

Matematikaren didaktika

Estatistika eta geometria Lehen Hezkuntzako irakasleentzat

Jaione Abaurrea
Aitzol Lasa

MATEMATIKAREN DIDAKTIKA

ESTATISTIKA ETA GEOMETRIA
LEHEN HEZKUNTZAKO
IRAKASLEENTZAT

Jaione Abaurrea
Aitzol Lasa

Udako Euskal **Unibertsitatea**
Bilbo, 2018

© Udako Euskal Unibertsitatea

© Jaione Abaurrea Larrayoz, Aitzol Lasa Oyarbide

ISBN: 978-84-8438-675-9

Lege-gordailua: BI-2120-2018

Inprimategia: PRINTHAUS S.L., Bilbo

Azalaren diseinua: Igor Markaida

Hizkuntza-zuzenketen arduraduna: Ander Altuna Gabiola

Banatzaileak: UEU. Erribera 14, 1. D BILBO telf. 946790546 Faxe. 944793039

Helbide elektronikoa: argitalpenak@ueu.eus

www.ueu.eus

Elkar Banaketa: Igerabide, 88 DONOSTIA

Galarazita dago liburu honen kopia egitea, osoa nahiz zatikakoa, edozein modutara delarik ere, edizio honen Copyright-jabeen baimenik gabe.

Gure lankideei, esker onez:

Javier Etxeberria

Haritz Iribas

Inma Lizasoain

Joseba Lizeaga

J. R. Pascual

Mamen Prados

Álvaro Saenz de Cabezón

Miguel R. Wilhelmi

Aurkibidea

SARRERA	7
I. PARTEA: ESTATISTIKA ETA PROIEKTUEN BIDEZKO IKASKUNTZA	9
1. ZORIZKO ALDAGAIK LEHEN HEZKUNTZAN LANTZEKO PROIEKTUA.....	11
1.1. Zenbakiak eta eragiketak jarduera matematikoan nola integratu.....	12
1.2. Proiektu baten faseak zeintzuk diren	16
2. ZENBAKETATIK KONBINATORIARA	21
2.1. Taxilariaren dilema	22
2.2. Konbinatoria lantzeko testuinguruak	27
2.3. Konbinatoriaren elementuak.....	37
2.4. Ariketak.....	45
3. ZORIZKOTASUNA	51
3.1. Txanponen jaurtitzea.....	55
3.2. Zorizkotasuna lantzeko testuinguruak	58
3.3. Probabilitatearen elementuak.....	63
3.4. Ariketak.....	67
4. ESTATISTIKA	73
4.1. Lasterketa.....	74
4.2. Estatistika lantzeko testuinguruak.....	83
4.3. Estatistikaren elementuak	86
4.4. Ariketak.....	101

II. PARTEA: GEOMETRIA ETA VAN HIELEREN EREDUA 109

5. BISUALIZAZIOA EDO EZAGUTZA OROKORRAREN

MAILA (VH0).....	111
5.1. Jarduera tipikoak VH0 arrazoibide-mailan	112
5.2. Arrazoibide-mailetan aurrera nola egin	116
5.3. Aspektu formalak VH0 mailan: irudikapenak	121
5.4. Ariketak.....	122

6. ANALISIA (VH1)..... 125

6.1. Jarduera tipikoak VH1 arrazoibide-mailan	126
6.2. Arrazoibide-mailetan aurrera nola egin: VH1etik VH2ra.....	128
6.3. Aspektu formalak VH1 mailan: definizioak	132
6.4. Ariketak.....	146

7. SAILKAPENA (VH2)..... 151

7.1. Jarduera tipikoak VH2 arrazoibide-mailan	152
7.2. Arrazoibide-mailetan aurrera nola egin: VH2tik VH3ra	153
7.3. Aspektu formalak VH2 mailan: inplikazioa eta baliokidetasuna.....	157
7.4. Ariketak.....	159

8. DEDUKZIO FORMALA (VH3)..... 163

8.1. Jarduera tipikoak VH3 arrazoibide-mailan	163
8.2. Arrazoibide-mailen arteko muga lausoa: VH3 eta VH4.....	165
8.3. Aspektu formalak VH3 mailan: proposizioak eta argumentuak	172
8.4. Ariketak.....	178

ERREFERENTZIAK..... 185

Sarrera

Curriculuma arau normatibo bat da, eta zehazten du irakaskuntzaren etapa jakin batean zer eduki landu behar diren, gidalerro orokorren bidez. Arau normatibo hori ministerio batek zehazten du, edota tokiko administrazio batek haren izenean, eta lege edo dekretu forma hartzen du. Horrela, arau normatibo batek Lehen Hezkuntza¹ (LH) landu beharreko edukien zerrenda zehazten duenean, horixe besterik ez da, edukien zerrenda bat; baina dokumentu hori ezin da bere horretan erabili irakas-proposamen batean.

Matematikari dagokionez, curriculumean zenbakizko edukiak zehaztu ohi dira lehenengo eta behin, eta ondoren aipatzen dira bestelako berariazko edukiak, hala nola geometria eta estatistika. Bistan denez, horrek ez du esan nahi eduki matematikoak kronologia horri jarraiki landu behar direnik, irakas-proposamenek ezin dutelako egitura lineal hori izan. Hori horrela izanagatik ere, argitaletxe batzuek hitzez hitz eramaten dute arau normatibo horren egitura euren testuliburuetara, testuliburuaren aurkibidea curriculumaren egiturarekin bat etortzeak erraztu egiten baitu ministerio-ko teknikariek testuliburu horri oniritzia eta argi berdea ematea. Baina argitaletxeen praktika horiek disfuntzio ugari ekarriko dituzte gerora ikastetxeetan, baldin eta irakasleek testuliburu horiek erabiltzen badituzte, berriz ere, modu linealean, hasi eta buka.

Jarduera matematikakoa ezin da antolatu curriculumak linealki zehazten dituen zerrenden arabera. Aldiz, jarduera horretan integratu egin behar dira, alde batetik, bloke ezberdinetako eduki matematikoak, eta bestetik, jarduera matematiko hori kudeatzeko erabiliko diren euskarriak ere. Curriculuma linealki irakurriz gero, zerrendako hasierako blokeei, hau da, zenbakiei eta eragiketei, neurriz gainekeo garrantzia ematen zaie, eta zenbakizko eduki horiek modu isolatuan lantzen dira, nahiz eta haien izaera asistentziala izan: zenbakiak eta eragiketak ez dira helburu bat berez, baina jarduera matematiko konplexuago baten osagai dira. Gainera, ikasturte oso bat eman ondoren testuingururik gabeko eragiketak egiten, zerrendaren amaiera aldera agertzen diren beste berariazko eduki batzuk lantzeko ez ohi da denborarik izaten, hala nola geometria eta estatistika.

1. Nafarroan eta EAEn, derrigorrezko Lehen Hezkuntzak 6 ikasmaila hartzen ditu. Ikasmaila horiek batetik seira zenbakitzen dira, eta bina urteko hiru ziklotan antolatzen dira. Euskal Elkargoan, berriz, oinarritzko lehen mailak 5 ikasmaila ditu, eta egokitze-ikasmaila batek (CP) eta bina urteko bi ziklok osatzen dute (CE eta CM). Aurrerantzean, LH erabiliko da derrigorrezko etapa horri erreferentzia egiteko.

Egoera horrek paradoxa handi bat uzten du agerian: funtsean, estatistika zera da, zenbakiak eta eragiketak lantzeko testuinguru ezin aproposago bat, eta berean, zenbakiak eta eragiketak estatistika egiten laguntzen duten eduki asistentzialak dira. Gainera, eragiketak egiteaz aparte, matematikaren helburu da, baita ere, arrazoiketa lantzea, argumentu inductibo eta logiko-deductiboen bitartez. Horrela, ohikoan bazter uzteko arriskuan daude geometria eta estatistika, baina, hain zuzen ere, horiek testuinguru ezinbestekak dira zenbakiak eta eragiketak eta arrazoitzea lantzeko.

Proposamen honetan erakutsi nahi da estatistika eta geometria abiapuntu hartuta landu daitezkeela zenbakien eta eragiketen eduki multzoak, modu integratuan, eta horiekin batera landu daitezkeela arrazoiketa inductiboa eta deductiboa.

Arau normatiboetan edukiak eta horiek ebaluatzeko irizpideak zerrendatzen dira, bereziki. Baina ezagutzaren alderdi epistemologikoz aparte, Matematikaren Didaktikak hainbat tresna teoriko eskaintzen dizkio irakasleari, jarduera matematikoa antolatzeko eta jarduera hori ikasgelan kudeatzeko. Liburu honetako proposamenak, nagusiki, honako teoria didaktiko hauetan oinarritu dira:

- Matematikako egoera didaktikoen teoria (MEDT).
- Ezagutza eta instrukzio matematikoaren ikuspuntu ontosemiotikoa (IOS).
- Geometriaren irakaskuntzarako Van Hieleren eredua (VH).

Teoria horietan oinarritzen diren iturriak baliatu dira lan honetan, eta aipamen horiek guztiak erreferentzietan aurki daitezke.

I. PARTEA

ESTATISTIKA ETA PROIEKTUEN

BIDEZKO IKASKUNTZA

Estatistika, eduki matematiko soila bainoago, tekniken sail bat egituratzen duen lanerako metodoa ere bada. Oinarrizko estatistika deskriptiboak erabiltzen dituen eduki matematiko gehienak aritmetikoak dira, eta zenbakizko informazioa antolatzeke eta ulergarri egiteko baliatzen dituen adierazpen grafikoak, berriz, irisgarriak dira Lehen Hezkuntzako jardura matematikoa garatzeko. Horrez gainera, estatistika proiektuen bidez lantzen da modu erabat naturalean, hori baita haren tekniken eta lanerako metodoen funtsezko testuingurua. Horrela, zenbakiak eta horien arteko eragiketak lantzeko metodologia enpiristak albo batera utz daitezke planteamendu konstruktibista baten onurarako.

Haur Hezkuntzako etapatik datorrenean, haurrak oinarrizko hiru prozesu landu ditu zenbakiarekin eta magnitudeekin, horiek dira: (1) zenbakien sekuentziaren ezagutzea eta oinarrizko magnitudeen identifikazioa; (2) zenbakiarekin eta oinarrizko magnitude horiekin klasifikazio eta ordena-erlazioak landu ditu; eta (3) oinarrizko eragiketak landu ditu objektu geometrikoen eta batetik hamarrera bitarteko zenbakien konposaketaren eta deskonposaketaren bidez.

Funtsean, haurrak zenbaketan oinarrituriko estrategiak erabiliko ditu oinarrizko eragiketak egiteko. Hori izango da, beraz, edozein proposamenaren abiapuntua. Oinarrizko ezagutza hori, baina, nahikoa izango da aldagai estatistiko baten maiztasunak aztertzeke; maiztasunak horixe besterik ez baitira, gertaera baten agerpen kopurua zenbatzea: eguraldia aztertzerakoan, euria zenbat egunez egin duen aztertzeke, zenbaketa soila baliatuko da. Zenbaketa horiek irudikatzeko barra-diagramak erabiltzen badira, modu natural batean esleitzen zaio zenbaketa-prozesuko ordinal bakoitzari dagokion segmentua, eta horrela, unitate bateko luzera duten blokeetan eraiki daiteke diagrama hori: hasieran, baliabide fisikoak baliatuko dira (blokeak, abakoak, etab.), eta ondoren, egitura fisiko horren adierazpen grafikoa egingo da. Ikasleen inguru hurbileko egoera askok zorizko izaera dute (haur-jolasak, helduen apustu-jokoak, eguraldiaren iragarpena, etab.), eta horrela, zalantzezko

egoeren modelizatzek osatu egiten du izaera determinista duten egoeren azterketa, hots, zorizko aspektuak beharrezkoak dira ikasleen pentsamendu logiko-matematikoa garatzeko.

Azterketa estatistiko esperimental bat egin ostean, eta azterketa horren datuen interpretazioa egin ostean, pentsamendu konbinatorioak aukera ematen du esperimentu horren emaitza esperimentalak ikuspuntu teoriko batetik modelizatzeko eta balioztatzeko, emaitza posible guztiak aurreikus daitezkeelako gertaerei probabilitate teorikoak esleituz. Estatistikan bezala, edozein jarduera konbinatorioren oinarrian ere zenbaketa-prozesuak daude. Jarduera konbinatorio batean, *zenbat modutara* galderari erantzuna bilatu nahi zaio, eta funtsean, kasu guztien zenbaketa egitean datza jardueraren arrakasta, kasurik zenbatzeko utzi gabe, eta kasu bera bitan zenbatu gabe. Zenbaketa-prozesu horretan arrakasta izateko, euskarri fisikoak erabil daitezke, lehenengo eta behin, eta ondoren, euskarri horien adierazpen grafikoak edota errepresentazioak egingo dira. Testuinguru horretan ere, eragiketa aritmetikoak agertuko dira, aurrerago, zenbatzeko prozesu horiek azkartzeko aukera ematen duten teknika aurreratu gisa.

Haur Hezkuntzan zorizko fenomenoak identifikazioa lantzen da, haur txikiak uste baitu haren inguruko mundu fisikoa determinista dela. Etapa horretan erlazioak landu daitezkeen arren, probabilitatearen kuantifikazioak gaitu egiten du etapa horretako atalase aritmetikoa. Horregatik, zorizko fenomenoak esploratzeko jarduerak proposatzen zaizkie, uste horiek zalantzan jartzeko. Lehen Hezkuntzan, berriz, jarduera konbinatorioetan zenbatu egin daiteke gertaera baten aldeko kasuen kopurua, eta, testuinguru horretan, probabilitatearen kuantifikazio horretan urratsak egin daitezke, zenbaki arrazionalari esanahia ematearekin batera, bidenabar.

Horrela, bada, estatistika eta zorizkotasuna langai dituzten proiektuetan zenbaketa-prozesuetatik abiatuz gara daitezke zenbakizko multzoak (zenbaki arruntetik arrazional positiborako jauzi eginez) eta zenbakien arteko eragiketak (batuketa eta kenketa aurrena, biderketa eta zatiketa gero).

1. Zorizko aldagaiak Lehen Hezkuntzan lantzeko proiektuak

Estatistika eta probabilitatea Lehen Hezkuntzako (LH) unean uneko curriculumean nola eta zer modutara agertzen diren aztertu aurretik ere, baieza daiteke bi arlo horiek LHn landuak izateko badutela berezko nahikoa interes. Espainiako curriculumean, datuen tratamenduari erreferentzia egiten dioten edukiak 1990eko hamarkadan agertu ziren lehenengo aldiz, baina landu beharreko edukien zerrendan agertzen diren arren, nekez aurkituko du irakasleak eduki horiek lantzeko orientazio pedagogiko zehatzik. Probabilitateari dagozkion edukiak, berriz, 2006ra arte ez ziren curriculumean agertu (Alsina, 2016); zer esanik ez, konbinatoriari dagozkionak ez dira era esplizitu batean inon zehazten. Frantziako hezkuntza-dekretuetan (adibidez, FG, 2015: 6.034) zehatzago zedarritzen da haurrek informazioaren tratamenduari buruzko edukiak landuko dituztela, ikerketa-testuinguruetan. Haurrek euren hipotesiak formulatu beharko dituzte, eta ondoren, probak egin beharko dituzte aieru horiek egiaztatzeko edota errefusatzeko, zenbatespen edo estimazioen eta kalkulu zehatzen bidez. Informazioa antolatzeko adierazpen grafikoak baliatuko dira, eta haurrek erabili egin behar dute hizkuntza zientifikoa euren emaitzak komunikatzeko.

Orientabide pedagogikoen bila gabiltzanean, horiek ez dute zertan lokalak izan; aldiz, nazioarteko testuinguruari begira dakiok, zeren horrela, testuinguru lokalean ere ahalik eta praktika onenak eraginkortasunez ezartzen ahalko baitira. Esate baterako, AEBko NCTM² erakundeak aztertu du zer zeregin matematiko eska dakiokkeen ikasle bati haren garapen kognitiboa aintzat hartuz, eta horrela, ebaluatzeko estandarrak zehazten dituzten CESSM³ eta PSSM⁴ dokumentuetan esaten da «zorizkotasuna eta datuen tratamendua» lantzen has daitezkeela hiru urteetatik aurrera.

Kapitulu honen helburua da, hain zuzen ere, argitzea nola landu daitezkeen LHko konbinatoria, zorizkotasuna eta estatistika. Aurkeztuko den jarduera-egiturari, maiz, «estatistikako proiektu» izena jarriko zaio hizkera luze eta errepikakorra saihesteko, nahiz eta izen horren atzean sar daitezkeen, oro har, konbinatoria eta zorizkotasuna lantzeko jarduerak ere.

2. NCTM. National council of teachers of mathematics.

3. CESSM. Curriculum and evaluation standard for school mathematics.

4. PSSM. Principles and standards for school mathematics.

Besteak beste, justifikatuko da nola ematen duen estatistikako proiektu batek testuinguru apropos bat zenbakiak eta eragiketak lantzeko, hau da, curriculumean eduki aritmetiko horiek bloke berezitu batean zerrendatzen diren arren, ez direla eragiketak modu isolatuan landu behar. Horrela, estatistikako proiektuak modu jarraitu eta sistematiko batean garatuz, lantzen dira datuen bilketa, deskribapena eta interpretazioa, eta horrela, zenbakiak eta eragiketak lantzen dira ez bakarrik operazio aritmetiko soil gisa, baina, baita zorizko osagai bat duten egoeretan erabakiak hartzeko irizpide gisa ere. Horrela, ezagutza estatistikoek herritar bati lagun diezaioke jasozen duen informazioa ongi interpretatzen eta kontsumitzaile adimenduna izaten.

Irakasleak kontuan izan behar du estatistikako proiektuak modu jarraitu eta sistematiko batean landuko badira, ezin dela testuliburu klasikoa bere horretan erabili: liburuaren formatuagatik beragatik, aritmetika bezala estatistika landuko dira errepikakorrak diren ariketen zerrenden bidez. Estatistika proiektu batean lantzen denean, datuen bilketa eta zenbakizko informazio horren tratamendua liburuaren formatutik at gelditzen dira; era berean, ezagutza aritmetikoak testuinguru batean lantzen dira, eta errepikakorrak ez diren kalkuluak egiten dira.

Hasiera batean, ohiturarik ez duen irakasleari beldurra sar dakiok, lan molde honen bidez ikasleak ez dituen ariketa aritmetiko errepikakorrak egiten, irakasleak pentsa dezakeelako ikaslea ez dela ari aritmetika behar bezala ikasten. Beldur horiek uxatu beharko ditu irakasleak, lehenengo eta behin, justifikaziorik gabeko aurreiritziak direlako. Izan ere, ikasle batek eragiketa zerrenda luzeak egiten dituenen, baieztza daiteke ikasle horrek «eragiketa zerrenda luzeak egiten» ikasi duela, baina eragiketa horien esanahia ulertu ote duenetz, ez dago horren inolako garantiarik.

1.1. ZENBAKIAK ETA ERAGIKETAK JARDUERA MATEMATIKOAN NOLA INTEGRATU

Irakasleak curriculum baliatzen du oinarri gisa hark prestaturiko jardueretan agertu beharreko edukiak hautatzeko orduan. Nahiz eta curriculumak bata bestearen atzetik zerrendatzen dituen, eduki horiek guztiek ez dute garrantzi, presentzia edota helburu bera jarduera matematikoaren barruan. Funtsean, egongo dira *berariaz* landu nahiko ditugun zenbait nozio (magnitudeei, estatistikari, zorizkotasunari edota konbinatoriari loturikoak, adibidez), eta aldiz, egongo dira *asistentzialak* izango diren beste eduki batzuk (eduki aritmetikoak honela kontsideratuko ditugu).

Proiektu bat diseinatzerakoan, aurreikusi eta antolatu egingo ditugu proiektu horretan agertuko diren eduki matematiko berariazkoak eta asistentzialak. Datozen adibideetan, LHko 1. ikasmailako edukiak hartu dira erreferentzia gisa.

Adibidea. LHko 1. ikasmailan, estatistikari loturiko *berariazko* eduki bakarra aurkituko dugu curriculumean: datuak barra-diagramen bidez adieraztea. Hori horrela izanagatik ere, barra-diagramaren erabilera horri loturik aldagai estatistikoren bat aztertu beharko da, hori baita azterketa estatistiko baten funtsa. Aldagai estatistiko hori identifikatu egin beharko da, lehenengo eta behin, eta ondoren, datuen bilketa bat egingo da aldagai horrek hartzen dituen kategorien arabera. Helburu nagusia datuen tratamendua izanik ere, *asistentzialak* diren edukien barnean sartuko ditugu: eragiketak egitea zenbaki arruntekin (batuketa) eta zenbakien izena eta grafia. Horrela, haurrak zenbakiak erabiliko ditu eta haiekin eragiketak egingo ditu harentzat ulergarria den testuinguru batean, ondoren helburutzat duen barra-diagrama osatzeko.

Berariazko edukiak: estatistika	Eduki asistentzialak: zenbakiak eta aritmetika
Datuak barra-diagrama bidez errepresentatzea	Eragiketak zenbaki arruntekin: batuketa
Datuak eta informazioa irakurri eta interpretatzea	Zenbakien izena eta grafia

Adibidea. LHko 1. ikasmailan, ez dugu konbinatoria bere horretan aurkituko *berariazko* eduki gisara, baina eguneroko egoerei eta problemei buruzko aipamenak aurki daitezke, esate baterako: eguneroko bizitzako problemen ebazpena eta lorturiko emaitzak estrategia aritmetikoen bitartez egiaztatzea. Horrela, egunerokotasun horren barnean proposa daitezke konbinatoria-problema, eta problema horiek ebazteko, beharrezkoa izango da, beste behin ere, hainbat eduki *asistentzial* mobilizatzea: zenbaketa, zenbakiak eta eragiketak, edota zenbakien izena eta grafia.

Berariazko edukiak: konbinatoria	Eduki asistentzialak: zenbakiak eta aritmetika
Eguneroko bizitzako problemen ebazpena	Eragiketak zenbaki arruntekin: batuketa,
Emaitzak estrategia aritmetikoen bitartez egiaztatzea	biderketa eta banaketa
	Zenbakien izena eta grafia

Adibidea. Konbinatoriarekin gertatzen den bezalaxe, LHko 1. ikasmailan ez dugu aurkituko zorizkotasunari dagokion *berariazko* *edukirik*. Horiek lantzeko, eguneroko egoerei eta problemei buruzko atalera jo beharko dugu, ezinbestean: eguneroko bizitzako problemen ebazpena, emaitzen zenbatespena, eta lorturiko emaitzak estrategia aritmetikoen bitartez egiaztatzea. Egunerokotasunaren barnean proposaturiko zorizkotasun-problema horiek ebazteko aritmetikari loturiko eduki *asistentzialak* mobilizatuko dira, gertaerei probabilitateak ezartzeko: zenbaketa, zenbakiak eta eragiketak, edota zenbakien izena eta grafia.

Berariazko edukiak: zorizkotasuna	Eduki asistentzialak: zenbakiak eta aritmetika
Eguneroko bizitzako problemen ebazpena	Eragiketak zenbaki arruntekin: batuketa,
Emaitzen zenbatespena edo estimazioa	biderketa eta banaketa
Emaitzak estrategia aritmetikoen bitartez egiaztatzea	Zenbakien izena eta grafia

ARIKETA. Aurreko adibideak eta taulak eredu gisa hartuz, osa itzazu horien antzeko proposamenak, LHko lehenengo 5 ikasmailetarako eta berariazko eduki bakoitzerako. 5 ikasmaila eta 3 berariazko eduki daudenez (estatistika, zorizkotasuna eta konbinatoria), 15 taula osa ditzakezu (adb., «zorizkotasuna LH3n»). Zuen taldean 15 irakaslegai izatekotan, bakoitzak taula bat osa dezake, eta ondoren, elkarrekin eztabaida ditzakezue lorturiko emaitzak. Ohar zaitez LHko eduki aritmetiko guztiak txerta daitezkeela 15 taula horietan, eta, honenbestez, aritmetika modu isolatuan lantzeak ez duela inolako justifikaziorik.

LHko ikasmaila guztietarako luzerako garapen bat eginez gero, berehala ohartuko gara curriculumaren antolaketa kiribila dela. Izan ere, ikasmaila bakoitzean aurreko ikasmailetako edukiak agertzen dira, horietan sakonduz eta eduki zahar horiei berriak erantsiz. Hori kontuan hartuz, ezinbestekoa da ikasmaila bakoitzerako ezartzen diren edukiez gainera, aurreko eta ondorengo ikasmailetan landuko diren edukiak ere aztertzea, perspektiba apur bat izateko: «nondik gatoz» eta «nora goaz».

Horrela, zenbakizko edukien eta eduki aritmetikoen garapena aurreikusteko modukoa da: ikasmailetan aurrera egin ahala, batetik, geroz eta zenbaki-atalase handiagoa agertuko da, eta bestetik, geroz eta eragiketa mota gehiago landuko dira. Kontu handiz aukeratu beharko dira, hala ere, zenbaki eta eragiketa horiekin landu beharreko prozesuak, haurrei oztopo didaktikorik ez eragiteko.

Alsinaeren arabera (2011) haurrek hiru prozesu nagusiren arabera lantzen dituzte matematikak: (1) ezagutzea, identifikatzea eta definitzea; (2) erlazioak egitea; eta (3) operatzea. Horrela, haurrari ezin zaizkio aurkeztu, zuzenean eta kolpetik, zenbaki eta eragiketa berriak, horiekin «operatu» dezan; aurretik, identifikatu beharko ditu (esanahia eman beharko die, horien irakurketa eta idazketa landu beharko ditu, etab.) eta erlazionatu beharko ditu (sailkatu eta ordenatu beharko ditu).

Balizko salto horrek blokeo-egoera batean ezar dezake haurra, ezinezkoa egingo zaiolako algoritmo estandarizatu bat automatizatzea, algoritmo horretan agertzen diren zenbakiei esanahi bat ematen ez dien artean. Adibide gisara, 1. taulan, lehenengo 3 ikasmailetako zenbakizko atalaseak aztertu dira. Taula horretan, berrantolatu egin dira curriculumetan zehazten diren edukiak aritmetikoak, irizpide didaktikoen bidez.

1. taula. Zenbakizko atalasearen garapena, prozesuen arabera.

Ikasmaila	Ezagutzea Identifikatzea Definitzea	Erlazioak egitea	Operatzea
LH1	99ra arte	10era arte	Batuketa eta kenketa 10era arteko bi batugairekin
LH2	999ra arte	20ra arte	Batuketa eta kenketa 20ra arteko bi batugairekin Urrats bakarreko biderketak 2, 3 edo 5en multiploekin
LH3	99.999ra arte Zifra erromatarrek Zatikia (zatia/osoa) Zenbaki hamartarra (0,5)	30era arte	Batuketa, kenketa eta bider- keta bi urrats edo eragiketako problemak, nahasian Zifra batekiko zatiketak

1. taularen lehenengo lerroan (LH1) ikus daiteke nola curriculumak aipatzen dituen 99ra arteko «zenbakien izena eta grafia» (hau da, 7 urteko haurrak ezagutu egin behar ditu 99ra arteko zenbakiak testuinguru erreala batean aurkitzen dituenen, eta horien irakurketa eta idazketa landuko ditu, ahoz, idazkera naturalean eta idazkera sinbolikoan). Aldiz, haurrak 10era arteko zenbaki ordinalak erabiliko ditu, ez gehiago, kopuru horretatik aurrera ez dielako ordena-esanahirik emango zenbaki horiei (hau da, nekez aurkituko da eguneroko egoera natural bat non 7 urteko haur batentzat «67 zenbakia 89 zenbakia baino “txikiagoa” dela» esateak esanahi konkreturik duen).

Oro har, curriculumek operatzearen inguruan dituzten zenbait aipu zuhurtzia handiz aztertu behar dira, *prozesuen* ikuspegitik aztertuz gero «auskalo-noren-burutazioak» diruditelako: esate baterako, Espainiako Ministerioaren curriculumak hitzez hitz dio 7 urteko haur bati eskatu behar zaizkiola «2 zifra hiru batuketa 6 minututan» egitea. Halako baldintzapen eta mugak zer irizpiderekin ezarri diren ez dago jakiterik, baina bistan da ez dituela idatzi Matematikaren Didaktikaren aditua den inork. Jakin, badakigu, 7 urteko haur batek bururakoa ongi menderatu beharko duela, batuketa eta kenketetan, aurrera egingo badu, eta kronometro batekin presionatzeak estres handia eragin diezaioke haurrari.

1. taulako hirugarren lerroan (LH3) aurki daiteke zenbakien identifikazioaren eta operatzearen artean egon daitekeen beste nahaste-borraste handi bat. Izan ere, ikasmaila horretako curriculumetan eta testuliburuetan, zenbakien idazkera erromatarra agertu ohi da, haurrarekin landu beharreko eduki aritmetiko eta kultural gisara. Horrela, haurrak zenbaki horiek ezagutu eta identifikatu beharko ditu

monumentu edo arte-obra batean ikusiz gero, eta jakin beharko du zenbaki horiek irakurtzen eta idazten. Aldiz, esan beharrik ez dago idazkera horrekin ez direla eragiketa aritmetikoak egiten, eta argi dago haurrari ezingo zaiola eskatu zenbakien idazkera erromatarrekin eragiketak egiterik.

Ikastetxeetan urteko programazioa zehazten da ikasmaila bakoitzerako, eta ondoren, programazio luze hori unitate didaktiko laburragotan antolatzen da. Unitate didaktikoak egitean, beraz, ohiko akatsa izaten da matematikako berariazko unitate didaktikoak egitea, eta unitate horietan aipatutako hiru prozesu horiek behar bezala ez bereiztea; hots, haurrari zuzenean operatzeko jarduerak agintzea, *ezagutzen* duen baina *operatzen* ez duen zenbaki-atalase batean.

1.2. PROIEKTU BATEN FASEAK ZEINTZUK DIREN

Lehen Hezkuntzan, normalean, unitate didaktikoen arabera antolatzen da urteko programazio bat. Unitate didaktiko bakar batean, zenbait jakintza-alorretako hainbat ezagutza landu daitezke. Esate baterako, «Udaberria» izeneko unitate didaktiko batean, Natur Zientziak landu daitezke (landareen loratzea eta basa-animalien ernalkuntza), idazketa eta irakurketa (udaberriari buruzko poesiak idatz daitezke), etab. Matematikari dagokionez, «Udaberria» izeneko unitate didaktiko horretan estatistikako proiektu bat eraman daiteke aurrera, eguraldiaren garapena aztertzeko.

Horrela, lehenengo eta behin, bereizi egin behar dira «unitate didaktikoak» eta «estatistikako proiektua». Unitate didaktiko batek zenbait jakintza-arlo antolatzen edota integratzen ditu, irakaskuntza-ikaskuntza prozesu koherente baten barnean. Unitate didaktiko batean landu beharreko edukiak ikasleen mailara egokitzen dira, eskura dauden baliabideetara eta lortu beharreko helburuetara, eta haren egituran funtsezko hiru atal bereiz ditzakegu: justifikazioa eta helburu didaktikoak (garatuko diren gaitasunak, lortu nahi diren ikaskuntzak eta erabiliko diren baliabideak, ikasgelaren antolaketa, etab.), jarduerak (ariketen deskribapena) eta ebaluazioa (irizpideak eta tresnak).

Horrela, estatistikako proiektu bat edozein unitate didaktikoren barnean proposa daitekeen jarduera mota bat da, eta unitate horren barnean landuko diren eduki aritmetikoei testuinguru bat emateko aitzakia dira. Lehen Hezkuntzan, akatsa litzateke matematika soilik landuko lukeen unitate didaktiko bat diseinatzea. Aldiz, proiektu baten bidez, edozein unitatetan landu daitezke eduki matematikoak. Hauek dira proiektu batean aurkituko ditugun pauso edo faseak:

1. *Aldez aurreko hipotesiak.* Jarduera edozein motatakoa dela ere (dadoen jaurtiketan oinarrituriko zorizko jolas bat, datu-bilketa estatistiko bat, «zenbat modutara» gisako galdera bat, etab.), haurrak bere hipotesiak egin behar ditu, ahoz edo idatziz. Proiektuaren helburua izango da, funtsean, haurrak kontraste bat egin dezala bere alde aurreko usteen eta esperimentuan benetan gertatu denaren artean. Praktika hau ez da soilik egingo estatistikako proiektuetan, baita matematikaren edozein arlotan ere: eragiketa aritmetiko bat edo magnitude baten neurketa egin aurretik, haurrari galdetuko zaio «zenbat uste duzu aterako dela?».
2. *Esperimentua aurrera eramatea.* Konstruktibismoaren arabera, akzioaren bitartez ikasten da, eta honenbestez, haurrak esperimentua egin behar du, banaka edo taldeka. Hasiera batean, datuen bilketak ez dira zertan egin, haurrak esperimentuan bertan arreta jar dezan. Hala ere, behin esperimentua amaituta, haurra ohartuko da irakaslearen galderei ezin diela erantzun, informazioa ez baitu eskura, eta buruan ezin baitu atxiki; ahaztu egingo zaio. Ahanztura horrek justifikatzen du, nolabait, datuen bilketa.
3. *Datuen bilketa.* Esperimentua aurrera eramaten den neurrian, haurrak datuak bilduko ditu idatzizko erregistro batean. Berriz ere, hasieran gerta daiteke haurraren erregistroa efikaza ez izatea: garrantzirik gabeko datuak erregistra ditzake, edota ulergarri gertatzen ez diren moduren batean. Haurrak feedback hori jaso ahala, datu-bilketaren kalitatea hobetuko da, esperimentu batetik hurrengora.
4. *Datuen bistaratzea.* Datuen kopurua handia denean, begi hutsez ezin dira interpretatu datu horiek. Horrela, informazio hori tratatu egin beharko da, bai grafikoen bitartez (sektore- edo barra-diagramak, etab.), baita, aurrerago, eragiketa aritmetikoen bitartez ere (batezbestekoa, moda, etab.).
5. *Aieruak eta horien balioztatzea.* Momentu honetan, haurrak kontrastatu beharko ditu bere hasierako usteak (aldez aurreko hipotesiak) lortutako emaitzekin (bere usteak zuzenak ote ziren balioztatuko du). Horrez gainera, saia daiteke ematen gertaturikoaren azalpen bat (frogapen edota argumentu «informal» bat, egiaztapen aritmetiko bat, etab.).

Estatistikako proiektu baten egitura aurkeztu ostean, bi edo hiru irakaslegaiako taldetan proiektu bat garatzea proposatzen da orain, ariketa modura. Jarraian zehazten dira taldeko lan horrek izango dituen ezaugarriak.

ARIKETA (Taldeko lana). Aurreko ariketan LHko *berariazko* edukiak (estatistika, probabilitatea eta konbinatoria) eta eduki *asistentzialak* (zenbakiak eta aritmetika) antolatu dira, LHko lehenengo 5 ikasmailetan, 15 taula posibleetako batzuk osatuz. Orain, 15 taula horietako bakar bat aukeratu behar duzu, eta taula horretako edukiak erabiliko dituzu proiektu bat garatzeko. Lana bi edo hiru ikasleko taldetan egingo da, eta, lan horretan, LHko matematika-curriculumaren analisi bat egingo da, ikasmaila bakar baterako proposamen argudiatu batekin batera.

Atala	Zehaztapena
Sarrera labur bat	Non aipatuko diren taldeko egileak, proiektuaren izenburua, eta proiektuaren jatorria edota testuingurua.
Lehenengo zeregina	Berariazko eduki konkretu bat aukeratu behar duzu (estatistika, zorizkotasuna edota konbinatoria), eta eduki hori curriculumean nola antolatzen den azaldu behar duzu, luzerako progresio batean. Hau da, ikasmaila bakoitzerako, berariazko eduki horri dagozkion 5 taulen laburpen sintetiko bat eman behar duzu. Gogora ezazu eduki asistentzialak ere aipatu behar dituzula. Atal hau idatziz aurkeztuko da, baina ez da jendaurrean azalduko.
Bigarren zeregina	Proiektu baten proposamen argudiatua egin behar duzu, ikasmaila jakin baterako eta berariazko eduki baterako. Esate baterako, izan daiteke «Estatistika lantzeko proiektu bat LH3n», edota «Konbinatoria lantzeko proiektu bat LH5en». 15 aukera posible daude, eta horietako bakar bat garatu behar da; ez da errepikapenik onartuko, hots, bi taldek ezin dituzte edukia eta ikasmaila errepikatu. Atal hau idatziz aurkeztuko da, eta horrez gainera, jendaurrean aurkeztuko da.
Ondorioak	Behin proiektuaren proposamena itxi ostean, lantaldeak egindako lan osoaren balorazioa eta ondorioak azalduko ditu. Halakorik balego, zehaztuko dira, baita ere, erabilitako erreferentziak. Atal hau idatziz aurkeztuko da, eta horrez gainera, jendaurrean aurkeztuko da.

Gisa honetako lan bat kalitatekoa izan dadin, zenbait irizpideri jarraitu behar zaie, eta horregatik, honako aspektu hauek baloratu dira:

(A) *Lana originala izatea eta ez dadila plagiatua izan.* Erreferentziak erabil daitezkeen arren, ideiaren jatorria beti aipatu beharko da; baina beste norbaitek egindako lana bere horretan erabiltzea ez da onartuko. Bestalde, lanaren kalitatea ziurtatu ahal izateko, erabilitako erreferentziak ezin dira inoiz anonimoak izan (esate baterako, egile ezezaguneko webgune batetik ezin dira hartu).

(B) *Testuaren ortografia eta kohesioa*. Matematikako lan bat izanagatik ere, azalpenek eta zehaztapenek zuzenak eta egokiak izan beharko dute. Baldintza hori bete ezean, lana atzera bota daiteke.

(C) *Lanaren garapenaren ikusgaitasuna tutoretzetan*. Lanaren ideia eta idazketa originalak direla ziurtatzeko, ikasleek joan beharko dute irakaslearen tutoretzetara. Azken momentuan eta irakaslearen alde aurreko ikuskapenik gabe entregatu diren lanak zuhurtiaz hartuko dira beti.

(D) *Proiektuko bigarren zeregina aurkezteko saio praktikoa*. Saio horretan, ikaskideek isiltasuna gorde egin beharko dute, eta adi egotea ebaluatuko da. Ikaskideen azalpenek iraun bitartean errespeturik egon ezean, saioaren ebaluazioa negatiboa izango da. Talde batek bere azalpenekin amaitu ostean, gainerako taldeek galdera bana izango dute prest, eta baloratu egingo da izandako galde-erantzunen kalitatea.

2. Zenbaketatik konbinatoriara

Haur Hezkuntzatik (HH) Lehen Hezkuntzarako (LH) pausoa ematen duenean, haurraren oinarritzko estrategia aritmetikoa zenbatzea da, eta errealitate horrek bere horretan iraungo du LHko etapa guztian zehar. Horregatik, nahiz eta konbinatoria ez den bere horretan agertzen LHko curriculumetan, problema konbinatorio baten atzean galdera sinple bat dago beti: zenbat modutara egin daiteke holako edo halako zeregin bat? Hau da, problema konbinatorio bati erantzuna emateko, ez dira formula arraro batzuk aplikatu behar, aldiz, kasu posibleak zenbatu behar dira, zenbaketaren oinarritzko bi ezaugarriak errespetatuz: ez utzi kasurik zenbatu gabe; eta ez zenbatu kasu bera bi aldiz.

Problema konbinatorioen testuinguruak aproposak dira, beraz, zenbaketa-estrategiak garatzeko. Aurrerago, oinarritzko zenbaketa-estrategia horiek estrategia aritmetiko bihurtuko dira, ezinbestean: kasuak banan-banan zenbatu beharrean, batuketa erabiliko da zenbaketa hori azkartzeko; berdin, biderketa erabiliko da, batuketa ugari saihesteko.

Konbinatoriako problema bat adin-tarte baterako aproposa izan dadin, aurreikusi egin beharko da problema horrek dituen emaitza kopurua, eta irakasleak ziurtatu egin beharko du emaitzaren zenbakizko atalasea ikaslearen zenbakizko ezagutzen barnean dagoela (curriculumaren azterketan aipatu da aspektu hori).

Jardueraren arabera, baliabide fisikoak erabil daitezke kasu posibleen zenbaketa hori aurrera eramateko. Esate baterako, haurrari eskatzen ahal zaio argitu dezan zenbat modutara jantz ditzakeen galtza eta atorra, armairuan 3 galtza eta 2 atorra baldin baditu aukeran. Haurraren adinaren arabera, galtzak eta atorrak bere horretan erabil daitezke zenbaketan laguntzeko, arropa horren jostailuzko miniaturak erabil daitezke arropa bera irudikatzeko, paperezko marrazkiak moztu daitezke eta horiekin osa daitezke aukera posibleak, paperaren gainean zuzenean marraztu daitezke aukerak, edota zuzenean marka edo kalkulu abstraktuak egin daitezke paperean edo arbelean.

Adibidea. HHko haurrei estralurtar batzuen irudiak aurkezten zaizkie. Kartoizko pieza batzuk dira, eta gerritik moztuta daude. Gerritik gora, 3 estralurtar mota daude, eta gerritik behera, 2 estralurtar mota. Pieza bakoitzaren nahi adina ale daude, kutxa batean. Haurrei galdetzen zaie zenbat estralurtar ezberdin osa ditzaketen, gerritik gorako eta gerritik beherako pieza bana baliatuz. Hasiera batean, saiakerak egingo dituzte kartoizko piezekin, eta osatu egingo dute ahalik eta estralurtar gehien.

Gainerako haurrak adi egongo dira, eta errepikapenik ikusiz gero, esan egingo dute. Ondoren, hurrei eska dakieke estralurtar horien marrazkiak egin ditzaten, zenbaketa eta guarismoen erabilera errazteko.

Adibidea. LHn, jarduera horren beraren bariante bat aurkez daiteke, armairuan dituzten arrokekin eta arropa horien koloreekin egin daitezkeen konbinazioak zenbatuz: 4 galtza eta 2 atorra erabiliz; 4 galtza, 2 atorra eta 3 beroki erabiliz; 4 galtza, 3 atorra eta 2 beroki erabiliz, baina gorria marroiarekin batera janztea saihestuz, etab. Jarduera horiek ebazteko, berdin erabil daitezke kartoizko piezak edota marrazkiak, baina gaineratu daiteke zuhaitz-diagrama bat aukeren sailkapena errazteko.

Gerta daiteke zenbatzen ari garen aukera posibleetan erregulartasunak agertzea (aurreko adibidean, 3 galtzarekin eta 2 atorrarekin 6 modutara jantz gaitezke, hots, «biderketa-printzipioa» aplikatzen da), edota erregulartasun horiek horren agerikoak ez izatea (ikus Taxilariaren dilema, hurrengo sekzioan). Horrela, kasu posibleak antolatzeke eta zenbatzeko, zuhaitz-diagramen erabilera justifikatzen da. Zuhaitz-diagramak emaitza irregularra duen zenbaketa-prozesu bat laguntzen du, kasuak sistematikoki antolatzen dituelako; era berean, emaitza erregular batean erregulartasun hori agerian uzten laguntzen du.

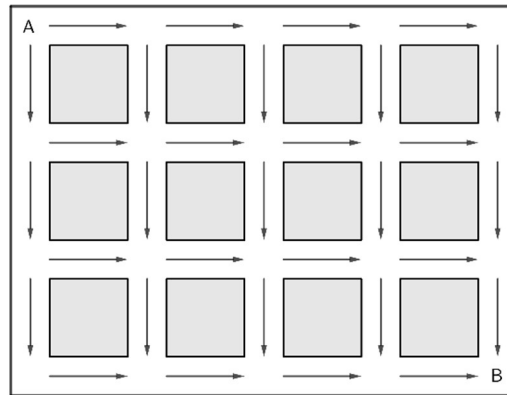
Zenbaketari loturiko ezagutza matematiko geroz eta konplexuagoak agertzen diren neurrian, kasu posibleak ematen dituzten ezagutza horiek formula edota espresio aljebraikoetan aurkezten dira. Horrela, oinarrizko eragiketa aritmetikoak aljebren antolatzen diren modu berean, ezagutza konbinatoriak antolatzen dira *aldakuntza*, *permutazio* eta *konbinazioetan*. Ezagutza horiek gainditu egiten dute LHko etapan lantzen den matematika, baina irakaslegaiak derrigor ezagutu behar ditu, graduiko ikasketen barnean. Horregatik, kapituluaren amaieran, aurkeztu egingo dira ezagutza kultural horiek guztiak.

2.1. TAXILARIAREN DILEMA

Taxilariaren dilemaren bidez (Wilhelmi, 2004: 16-19), modu integratuan aurkezten dira konbinatoriako nozioak problema baten ebazpenean: *gertaera bat emateko dauden aukera ezberdin guztien zenbaketa*. Problema hau aproposa da graduiko ikasleentzat, eta horrexegatik aurkezten da sarrera gisa, haientzat erronka bat izan dadin. Gainera, problema honen ebazpena emateko, jarraitu egiten zaie 1.2. atalean «estatistikako proiektu» batek izango dituen atalei eta momentuei. Problema honako hau dio:

Taxista batek hiri bateko A puntutik B puntura joan behar du (ikus 1. irudia). Atik Bra joateko, taxilariak kale horizontalak beti ezkerretik eskuinerako noranzkoan hartuko ditu, eta kale bertikalak goitik beherako noranzkoan. Ondorioz, ezinezkoa izango du atzera bueltatzea. Zenbat ibilbide ezberdin egin ditzake?

1. irudia. Taxilariaren ibilbide posibleak.



Problema ebazteko, dauden ibilbide posible guztiak kontuan hartzen dituen estrategia diseinatu behar da. Horretarako, kontuan hartu behar da mugimendu mugatuak daudela (mugimendu horizontala egiten badu, norabide eta noranzko horretan jarraitu beharko du hurrengo gurutzera heldu arte), eta taxilariak etengabe hartuko dituela eskuinera edota behera jotzeko erabakiak.

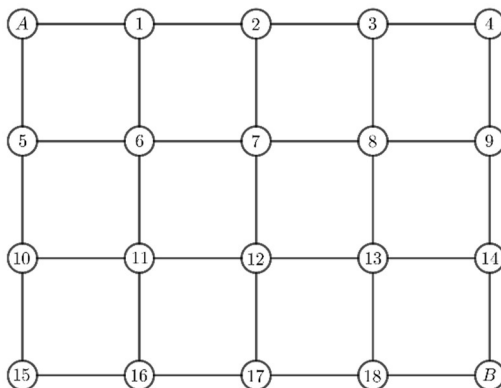
Berreskura dezagun «estatistikako proiektu» gisa izendatu dugun eskema hori, eta ikus dezagun nola problema honen ebazpenak betetzen dituen han aurkezturiko bost urratsak:

1. *Aldez aurreko hipotesiak.* Jarduera matematikoari aurre egitean, irakasleari dagokio ikasleak ohitzea euren hasierako usteak edota hipotesiak plazara ditzaten. Hasierako momentu honetan, ez du axola ikasleek proposatzen dituzten emaitzak asko edo gutxi hurbiltzen diren emaitza zehatzera. Hain zuzen ere, aldez aurreko hipotesiak plazaratzean, kontraste bat egin nahi da hasierako uste hauen eta ondoren lortuko diren emaitzen artean. Esate baterako, taxilariaren dilemaren kasuan ohikoak izango dira biderketan oinarrituriko estrategietan oinarritzen diren usteak. Ikasleak 3 lerroko eta 4 zutabeko lauki-sare bat ikusiko du, eta era naturalean, lotura egingo du biderketarekin. Horrela, ikasle batek hasieran esan dezake ibilbide posibleen kopurua 12 dela; aurrerago, uste hori okerra dela argituko da.
2. *Esperimentua aurrera eramatea.* Problema ebazten hasten direnean, ikasleek estrategia bat aurkitu behar dute, dauden kasu guztiak zenbatzeko, bat bera ere ahaztu gabe, eta kasu bera bitan zenbatu gabe. Lehenengo estrategia esplorazioan oinarrituko da, eta, saiakerak eginez, zenbait aukera lortuko dira, nahasian. Aukera posibleen kopuruak gora egiten duen neurrian, ikaslea ohartuko da ezinbestekoa dela nolabaiteko erregistroa eramatea. Erregistro horiek, hasieran, analogikoak edo piktorikoak izango dira: hots, ikasleak marraztu egingo ditu ibilbideak, banan-banan, kasu

bera bitan zenbatu ez duela ziurtatzeko. Baina marrazkien bidezko datuen bilketa hori ez da sistematikoa, eta lehenago edo beranduago, huts egin dezake.

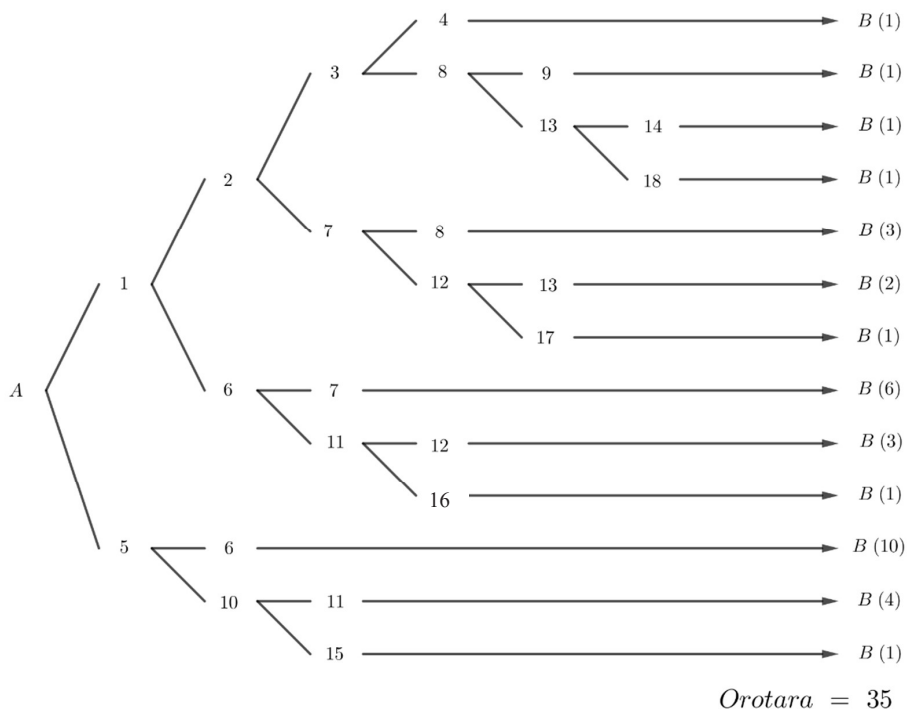
3. *Datuen bilketa.* Momentu honetan, ikaslea ohartuko da datuen bilketa sistema bati jarraiki egin beharko dela, bestela ez dela arrakastarik izango. Esate baterako, ordena bati jarraiki egingo ditu mugimenduak: saiaturako da, lehenengo eta behin, goitik beherako pauso guztiak egiten, eta ohartuko da beheko erpinera heldutakoan soilik eskuinera egin dezakeela; ondoren, goitik beherako pauso guztiak egingo ditu, bat izan ezik, eta ohartuko da lau ibilbide posible daudela puntu horretatik aurrera, etab. Hots, ikaslearen saiakerak sistematikoak bihurtzen direnean esan genezake egiazko «datu-bilketa» bat egiten ari dela. Momentu honetan, laukien sarea eskema modura antola daiteke, eta garrantzia ematen ahal zaie kaleek bat egiten duten puntuei, kaleei eurei baino: kaleek bat egiten duten puntuak zirkulu batez adierazi eta zenbakitu egin daitezke (2. irudia). Esate baterako, taxilaria 1 puntura heldu bada, erabaki beharko du 2ra edo 6ra joan nahi duen; 6ra joatea erabakitzen badu, berriz, beste bi ibilbideren artean (7 edo 11) aukeratu beharko du; etab.

2. irudia. Zenbaketa sistematikorako urratsa.



4. *Datuen bistaratzea.* Problema baten ebazpenaren testuinguruan gaude, eta horregatik, datuen bistaratzea edozein momentutan gerta daiteke, eta edozein modutara. Esate baterako, aurretik aipaturiko marrazkiak (errepresentazio analogiko edo piktorikoak) datuen bilketa sistematikoaren aurretik eman daitezke. Hala ere, datuen bilketa sistematikoa egiten denean, ohikoa izango da harekin batera datuen bistaratze bat egitea eskema edo diagrama baten bidez (hots, errepresentazio abstraktu baten bidez). Diagrama horrek lagundu egiten du emaitzaren balioztatzea, eskematikoki ikus daitekeelako emaitza guztiak lortu diren edo ez. Taxilariaren kasuan, ibilbide posible guztien zenbaketa egiteko zuhaitz-diagrama bat eraiki daiteke (3. irudia), zeinean kasu bakoitzean dauden bi aukera posibleak irudikatzen diren, ibilbidea puntuen edo zirkuluen sekuentzia bat izanik. Irudian ikus daitekeen bezala, ez da beharrezkoa ibilbide guztiak osorik idaztea. Adibidez, 7 zirkulura heltzen delarik, hortik aurrera 6 aukera dau-de, eta 7ra heltzen garen bakoitzean datu hori kontuan hartuko da ibilbide posible guztiak behin eta berriz esplizitatu gabe. Horrela, irudian egiaztatu egiten da 35 ibilbide posible daudela.
5. *Aieruak eta horien balioztatzea.* Emaitza lortutakoan, hasierako aieruarekin kontrastatu behar da, lehenengo eta behin. Hain zuzen ere, ebazpena hasi aurretik eta 3 bider 4ko lauki-sarea aurrean genuenean, zentzuzkoa zirudien 12 aukera posible zeudela aurreikustea (biderketan oinarrituriko estrategia); aldiz, orain egiaztatu da 35 aukera daudela. Behin problema partikularra ebatzi denean (35 aukera, 3 bider 4ko taula batean), orokortze-galderak planteatzen dira, problema partikular horren emaitzaren zergatia justifikatzeko. Esate baterako, taxilariaren dileman, bistakoa da problemaren emaitza ez dela 12 (errenkadak bider zutabeak), baina hala ere, lauki-sareak dituen errenkada eta zutabeen arabera izango dela emaitza. Horrela, bi aldagai identifikatu dira: errenkada kopurua (n) eta zutabe kopurua (k). Orain, problemaren tripak aztertuko dira, enuntziatuaren egituraren arakatzeko. Zenbat modutara egin liteke ibilbidea lauki-sareak 2 lerro eta 2 zutabe balitu? Eta 4 lerro eta 3 zutabe balitu? Etab. Momentu honetan, problemaren emaitza orokortzen ari gara. 4 taula betetakoan, ondorio orokorrak ateratzeko gauza izango gara. Taulako datuek betetzen dituzten patroik eta erregulartasunak bilatu beharko ditugu horretarako, aieruak aurkeztu beharko ditugu, eta ahal den neurrian, horiek balioztatzen saiatuko gara.

3. irudia. Zuhaitz-diagrama bidezko adierazpena.



4. irudia. Orokortze-fasea.

	<i>k</i> (zutabeak)				
<i>n</i> (lerroak)	1	2	3	4	5
1					
2					
3					
4					
5					

Taula bete ahala, ikaslea saiaturiko da erregularitasunak bilatzen taulako emaitzen artean. Esate baterako, taularen sarrerak simetrikoak direla ohartuko da; hau da, lorturiko emaitzak taularen diagonalarekiko simetrikoak dira: 3 bider 4ko taulan, eta 4 bider 3ko taulan, emaitza kopuru bera lortzen da, hau da, 35.

Bestalde, taulak propietate aritmetiko adierazgarriak dituela ere ohartuko gara. Esate baterako, taula bete ahala, ohartuko gara lauki bakoitza betetzeko arau aritmetiko bat dagoela. Horrela, lauki bakoitzeko balioa bat dator ezkerrean eta goian dauden bi balioen baturarekin. Adibidez, 2 lerro eta zutabe bakarreko planoan, 3 ibilbide posible daude; era berean, 3 ibilbide posible daude lerro bakarreko eta 2 zutabeko planoan (taula simetrikoa dela esan dugu); honenbestez, 2 lerroko eta 2 zutabeko planoan, ibilbide posibleen kopurua 6 da, batu egiten direlako ezkerreko eta goiko balioak: kasu honetan, $3 + 3 = 6$.

Azken propietate aritmetiko horren jatorria argitzea, hura zergatik betetzen den justifikatzea, argudiatze-ariketa interesgarria da. Aurretik lortu den zuhaitz-diagrama (3. irudia) eta zenbakizko taula (4. irudia) alderatuz hel daiteke ikaslea propietate horren zergatia argudiatzera.

2.2. KONBINATORIA LANTZEKO TESTUINGURUAK

Konbinatoria-problema batek «zenbat modutara» galderari erantzuten dio. Horrela, edozein testuingurutan ager daiteke konbinatoria-problema bat. Berariazko eduki matematikoari dagokionez, zorizkotasunari loturiko testuinguruak edota testuinguru geometrikoak aberatsak izango dira «zenbat modutara» edota «zenbat daude» galderei erantzuteko. Jarduera motei dagokienez, jolasetan oinarrituriko zereginak edota tailerrak aurkez daitezke. Ikus ditzagun adibide bana.

2.2.1. Jolas batean oinarrituriko proposamena

Ezagunak dira eragiketa aritmetikoak oinarri dituzten karta-jokoak. Jolas horietan, jokalaria zenbakien konposaketa eta deskonposaketak egin behar izaten ditu (batura bat emanda, batugai posibleak lortu behar ditu), edota erabaki behar izaten du karten zein konbinaziok duen ateratzeko aukera gehien (hau da, aurkitu egin behar du irabazteko aukera gehien emango dion konbinazioa).

Jolas horietan, ezagunenetako bat da «15 batzeko jolasa», edota «Eskoba» ere deitua. Jarduera konbinatorioaren helburua edota galdera nagusia garbia da:

Zenbat modutara deskonposa daiteke 15a, hainbat batugaitan?

Jolasaren arauak sinpleak dira. Jokalari bakoitzari hiruna karta banatzen zaizkio. Beste lau karta buruz gora jartzen dira mahai gainean, denen bistan. Jokalari bakoitzak, bere txandan, jokatu egin behar du bere kartetako bakar bat, eta karta horrekin batera, buruz gora dauden nahi adina karta hartzen ditu 15eko batura zehatza lortu arte. 15 batzea lortzen duenean, karta horiek beretzat gordeko ditu, eta hurrengo jokalaria txanda izango da; 15 batzerik lortzen ez badu, berak jokaturako karta ere buruz gora gelditzen da, aurretik zeuden kartekin batera, eta hurrengo jokalaria hartzen du bere txanda. 15 batzean mahai gaineko karta guzti-guztiak eramaten dituen jokalaria batek, eramandako kartetako bat buruz gora ezartzen du,

ahots gora «eskoba» adieraziz. Jokalariek euren karta guztiak jokatu dituztenean, jokalaria bakoitzari beste hiru karta ematen zaizkio oraindik eman gabe dauden karten multzotik.

Karta guztiak agortu direnean amaitzen da jolasa, eta jokalaria bakoitzak bere puntuak zenbatzen ditu: karta gehien bildu duenak puntu 1 jasoko du; urrezko karta gehien bildu duenak puntu 1 jasotzen du; «eskoba» bakoitzeko, puntu 1 jasoko du; zazpiko gehien bildu duenak puntu 1 jasotzen du; urrezko zazpia bildu duenak puntu 1 jasotzen du. Jolas honek aukera ematen du jarduera konbinatorio bat aurrera eramateko, proiektu baten formatuan.

1. *Aldez aurreko hipotesiak*. Jolasean hasi aurretik, haurrari galdetu egingo zaio irabazteko zein karta diren aproposenak. Hasierako hipotesi horietan, usteak eta aurreiritziak azaleratzen dira. Esate baterako, haurrek nahiago izaten dituzte bi batugaiko posibilitateak eta hobesten dituzte balio handiko kartak (erregea eta bostekoa, « $10 + 5$ »; zalduna eta seikoa, « $9 + 6$ »; eta neurri apalagoan, xangoa edo txanka eta zazpikoa, « $8 + 7$ »).
2. *Esperimentua aurrera eramatea*. Jolas bat tartean dagoenean, noski, esplorazio librea partidak jokatu ahala egiten da modu naturalean. Hasierako partidetan, alde aurreko hipotesien arabera jolastuko da haurra. Zenbat eta partida gehiago jolastu, ohartuko da 2 batugaiko baturekin ez direla behar beste karta biltzen, eta honenbestez, 3 edota 4 batugaiko konbinazioak egiten dituen lehiakideak partida irabazteko aukera gehiago dituela.
3. *Datuen bilketa*. Nahikoa partida libre jolastu direnean, irakasleak txantilo bat eman diezaike hurrei (adibidez, 2 taulakoa), eta partidak irauten duen bitartean, haurrek txantilo horretan idatzi egingo lukete jokalaria bakoitzak jokatu duen konbinazioa eta lortu dituen puntuak.
4. *Datuen bistaratzea*. Behin partida amaituta, eta lortu diren datuekin, irakasleak hurrei eska diezaike modu ordenatu eta sistematiko batean antola ditzaten 15 lortzeko dauden aukera posible guztiak. Zalantzak sor daitezke haurren artean, eta irakasleak interbentzio laburrak egin ditzake zalantza horiek argitzeko: Batugaien ordenak garrantzirik al du? Batugaien balioak errepika daitezke? Zein da batugaien kopuru maximoa? Etab. Aukera guztiak lortu direla ziurtatu ahal izateko, hots, kasurik zenbatzeke utzi ez dela eta kasu bera bi aldiz zenbatu ez dela ziurtatzeko, antolaketa sistematiko baten beharra azaleratuko da, esate baterako: kasuak antola daitezke batugai gutxieneko aukeretatik batugai gehieneko aukeretara; eta aukera bakoitzeko batugaiak antola daitezke handienetik txikienera, errepikapenak saihesteko.

5. *Aieruak eta horien balioztatzea*. 15aren deskonposaketa posibleak aztertu ostean, partidaren bat jolasten da berriz, baina oraingoan hurrek eskura izan dezakete 15aren deskonposaketa posible guztien taula, lagungarri gisa. Bestalde, jolasaren barianteak planteatu daitezke, non deskonposatu beharreko balioa den 16, 17, 18, etab.

ARIKETA. «15 batzeko jolasa» adibide gisa hartuta, pentsa ezazu beste karta-jolas bat. Adieraz ezazu zeintzuk diren jolasaren helburuak. Azal itzazu zeintzuk izango diren jolasaren arauak. Azal ezazu curriculumeko zein berariazko edukirekin eta zein eduki asistentzialekin izango duen lotura jolas horrek. Eduki horien arabera, azal ezazu zer adin-tartetarako izango den aproposa.

2. taula. 15 batzeko jolasa, datu-bilketarako txantilo baten adibidea.

Jokalaria	Zenbat karta (zenbat batugai)	Batugaiak	Karta bereziak
Ander	2	10+5	Urrezko erregea
Begoña	4	7+5+2+1	Zazpikoa
[...]	[...]	[...]	[...]

Bistan denez, jatorrizko jolasaren kasuan, hurrek nekez aurkituko dituzte aukera posible guztiak. Bi kartaren bidezko 3 deskonposaketa posibleak ziurtasunez aurkituko dituzte (3. taula), edota hiru kartarekin egin daitezkeen 14 deskonposaketa posibleetan gehienak, agian. Praktikan, horiek dira interesgarrienak jolaserako, gainerako deskonposaketak (lau batugairekin 21 aukera daude, bostekin 25, etab.) gerta daitezkeelako, baina ez da litekeena, horiek jolasean benetan gertatzeko probabilitateak eskasak direlako. Agertuz gero, anekdotikoak lirateke.

Horrek hausnarketa bat dakar ezinbestean, jarduera matematikoa ebaluatzerakoan irakasleak nola jokatu behar duen erabakitzeke. Izan ere, *ebazpen maximoko ebaluazio-irizpideak* (Lasa, 2015) ez dira aproposak izaten matematika-jarduera kalifikatzeko orduan; horien ordez, *gaitasunen arabera ebaluazioak* hobetsi beharko lirateke. Horrela, helburu nagusia ez da aukera posible guztiak zerrendatzea edota horiek ikastea, baizik eta aukera posible guztiak lortzeko bide horretan, curriculumak zehazten dituen gaitasunak erabili direla egiaztatzea: zenbaketa sistematikoak egitea, informazioa antolatzeke gaitasuna erakustea, irizpideak ezartzea eta horiek betetzea, argudiatze zuzenak egitea, etab.

3. taula. 15 batzeko jolasa, aukera posibleak batugaien kopuruaren arabera.

Zenbat batugai	Zenbat aukera	Aukera guztiak
Bi batugai	3	(10,5),(9,6),(8,7)
Hiru batugai	14	(10,4,1),(10,3,2)
		(9,5,1),(9,4,2),(9,3,3)
		(8,6,1),(8,5,2),(8,4,3)
		(7,7,1),(7,6,2),(7,5,3)
		(6,6,3),(6,5,4)
[...]	[...]	(5,5,5)
		[...]

2.2.2. Tailer batean oinarrituriko proposamena

Jarduera honetan ikasleek lepokoak egin behar dituzte koloretako 3 bola erabiliz. Ikasleari soka bat emango zaio, eta koloretako nahi beste bola dituzten hiru poltsa: poltsa batean bola urdinak daude, beste batean bola gorriak, eta hirugarrenean bola berdeak. Ebatzi nahi dugun problema ondorengoa da:

Hiru bolatxo dituen zenbat lepoko desberdin egin daitezke?

Tailer gisara planteatu den jarduera izanik ere, jardueraren garapenean proiektu batek dituen bost pausoak identifika daitezke.

1. *Aldez aurreko hipotesiak.* Ohiko modura, tailerrarekin hasi aurretik, haurrari galdetu egingo zaio aurrean dezala ea zenbat modutara egin daitezkeen lepoko horiek. Zenbatespenak egitea ohiko jarduera gisa atzeman behar dute haurrek, eta horretarako, modu sistematiko batean egin behar zaie galdera jarduera hasi aurretik. Zenbatespen hori nekez izango da hasieratik zuzena, baina amaierako kontrastea egiteko baliagarria da.
2. *Esperimentua aurrera eramatea.* Hasiera batean, haurrak esplorazio librean ariko dira, eta saiakerak egingo dituzte, baina ez diote zertan ordena zehatz bati jarraitu edota sistematikoak izan. Besterik gabe, iduneko ezberdinak osatuko dituzte, eta euren artean elkar kontrolatu beharko dute, errepikatuta agertzen diren idunekoak baztertzeko. Irakaslea adi egongo da, eta iradokizunak egin ditzake, baldin eta ikusten badu haurrek ahaztu egin dutela aukeraren bat.
3. *Datuen bilketa.* Behin saiakera ugari egin dituztenean, lorturiko lepokoek koloreak konparatu egingo dituzte, eta horrela, saiatu beharko dira antolaketa sistematiko baten arabera zenbatzen dauden kasu guztiak. Eztabaidak ere sor litezke, eta irakasleak zenbait interbentzio egin beharko ditu zalantza horiek bideratzeko: koloreak errepika daitezke? Ordenak garrantzia du? Etab. Hasierako galderan ez dira irizpide horiek zehazten, eta horrela,

haurrek negoziatu dituzten baldintzen arabera, emaitza posibleen kopurua ezberdina izango da.

4. *Datuen bistaratzea*. Kasu guztiak zenbatu ote diren argitzeko, zuhaitz-diagrama bat egingo da, non koloreekin egin daitezkeen konbinazio guztiak zehaztuko diren. Diagrama hori egiteko ez da zertan modu bakar bat egon. Haurrek eurek erabakiko dute informazioa nola antolatu, eta normalki, idunekoen marrazkiak egingo dituzte koloretako margoak erabiliz (4. taula). Taldeko eztabaidan negoziatu eta erabaki diren baldintzapenen arabera, soluzio gisa ager daitezke errepikapenik gabeko konbinazioak, errepikapenezko aldakuntzak, permutazioak, etab.

4. taula. 3 elementuren konbinazioak, aldakuntzak eta permutazioak, 3naka harturik.

Konbinazioak	Aldakuntzak errepikapenekin	Permutazioak
  	  	 
  	  	 
  	  	 
	  	
	  	
	  	
	  	
	  	
	  	
10 aukera posible	27 aukera posible	6 aukera posible

5. *Aieruak eta horien balioztatzea*. Behin jarduera amaituta, balioztatu egingo dira hurrek hasieran esan dituzten kopuruak tailerra amaitutakoan lortu diren kopuruekin. Bestalde, irakasleak orokortze-galderak egingo dizkie hurrei, lorturiko zuhaitz-diagramaren edota bestelako errepresentazioen arabera erantzuteko gai ote diren egiaztatzeko: zenbat aukera leudeke hiru bolako idunekoak egiteko lau kolore baleude aukeran? Zenbat aukera leudeke lau bolako idunekoak egingo balira aurreko hiru koloreekin, kolore bakarra (edo bi, edo hiru kolore) errepikatuz? Etab.

2.2.3. Lehiaketak

Zuhaitz-diagramak aproposak dira lehiaketa bateko parte-hartzaileek zer hurrenkeratan amaitu dezaketen aztertzeko. Esate baterako, honako problema hau har genezake kontuan:

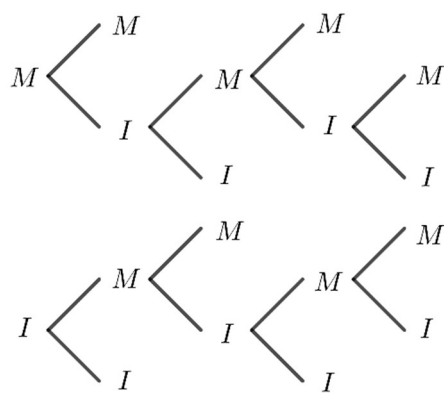
Mikelek eta Iratik tenis-txapelketa bat jolastu behar dute. Jarraian bi set irabazten dituenak edo txandakatutako hiru set irabazten dituenak lortuko du garaipena. Zenbat modu ezberdinetan gara daiteke lehiaketa?

Ebazpenerako, eskema bera errepikatuko dugu, baina ohitzen hasi garenez, pausoak ez ditugu horrenbesteko zehaztasunez deskribatuko.

1. *Aldez aurreko hipotesiak.* Ezertan hasi aurretik, haurrari galdetu egingo zaio zenbat aukera egon ote daitezkeen. Haur bakoitzak egiten duen hasierako zenbatespen hori baliagarria izango zaio irakasleari, horrela jakingo baitu haurrek nolako intuizioa hartu dioten problemari.
2. *Esperimentua aurrera eramatea.* Esplorazio librean, haurrak hasiko dira aukera posibleak aztertzen. Esate baterako, berehala ohartuko dira Mikelek (edo Iratik) bi set jarraian hasieratik irabaziz gero garaipena lortuko duela. Banakako setak txandaka irabaziko balituzte, kasu posibleen kontua eramatea zailagoa litzateke, eta litekeena da haurrak sistematikoak ez izatea. Eztabaidak honako sekuentzia honen antzeko bati jarraitu beharko lioke: demagun Mikelek irabazi duela lehenengo set hori; orain, bigarren setarentzat beste bi aukera daude, Mikelek irabaztea edota Iratik; lehenengoa gertatzen bada, lehiaketa amaitutzat emango da, Mikelek bi set jarraian irabazi baititu; aldiz, Iratik irabazten badu, jokoak jarraituko du eta oraindik bi aukera egongo dira hirugarren seterako, Mikelek irabaztea edota Iratik; etab.
3. *Datuen bilketa.* Saiakera librean ostean, irakasleak txantilo bat eman diezaieke hurrei, informazioa modu sistematiko batean antola dezaten. Problema honen enuntziatua argia eta zehatza denez, ez da zertan esanahien negoziatorik egon ikasleen eta irakaslearen artean. Kodifikazio sinple bat beharrezkoa izango da arrakasta lortzeko; esate baterako, izen bakoitzaren lehen letra erabil daiteke, M eta I , irabazitako setak izendatzeko.
4. *Datuen bistaratzea.* Problemaren ebazpena erakusteko hainbat adierazpen grafiko dira posible. 5. taulan zehaztu dira aukera posibleak, eta aukera horiek zuhaitz-diagrama batean antolatu dira.
5. *Aieruak eta horien balioztatzea.* Lehenengo eta behin, haurrek alderatu egin beharko dituzte eurek uste zutena eta benetan gertatu dena, euren usteak zuzenak ote ziren egiaztatzeko. Bestalde, irakasleak antzeko egoerak proposa ditzake, txapelketa bakoitzak arau ezberdinak izaten ohi dituelako, eta haurrek berriz azter ditzakete jolas horiek, aurretik aztertutakoekin alderatuz.

5. taula. Set bakoitzaren irabazleak eta jolasaren garaileak.

Zein set	Nork irabazi du set hori	Nor da garaile txapelketan
Lehenengoa	M, I	Momentuz, ez dago garailerik
Bigarrena	MM, MI	Mikel garaile izateko aukera bat (MM)
	IM, II	Irati garaile izateko aukera bat (II)
Hirugarrena (bigarrenean garailerik ez dagoenean)	MIM, MII	Mikel garaile izateko aukera bat (IMM)
	IMM, IMI	Irati garaile izateko aukera bat ($MI I$)
Laugarrena (hirugarrenean garailerik ez dagoenean)	$MIMM, MIMI$	Mikel garaile izateko aukera bat ($MIMM$)
	$IMIM, IMII$	Irati garaile izateko aukera bat ($IMII$)
Bosgarrena (laugarrenean garailerik ez dagoenean)	$MIMIM, MIMII$	Mikel garaile izateko bi aukera ($MIMIM, IMIMM$)
	$IMIMM, IMIMI$	Irati garaile izateko bi aukera ($MIMII, IMIMI$)
Gehienera, 5 set jokatuko dira		10 modutara gara daiteke jolasa

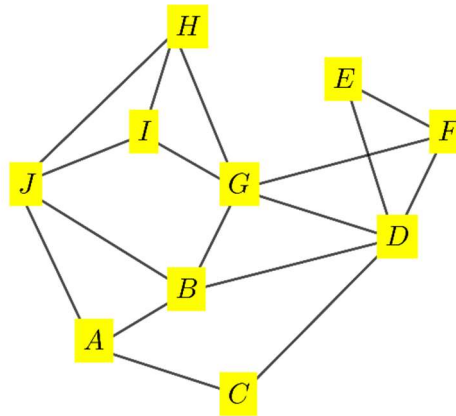


2.2.4. Bideak

Lehiaketa bat garatzeko dauden aukera posibleen zuhaitz-diagrama hori taxilariaren dilemakoaren antzekoa da. Funtsean, egon daitezkeen ibilbide posible guztiak era sistematiko batean aztertu nahi ditugunean, zuhaitz-diagrametara jo dezakegu. Har dezagun honako problema hau:

5. irudian, ibilbide bat agertzen da. Irudiko A puntutik B puntura heltzeko dauden aukera edo bide guztiak bilatu behar dituzu, honako bi baldintza hauek kontuan hartuz: derrigorrean pasa behar duzu G puntutik, eta ezin zara puntu beretik bitan pasa, ibilbide bakoitzean.

5. irudia. Aurki itzazu ibilbide posibleak.



ARIKETA. Ebatz ezazu aurreko problema hori. Zuhaitz-diagramaren laguntzaz, 35 ibilbide daudela egiazta daiteke. Zeintzuk dira ibilbide horiek?

2.2.5. Isometriak

Isometrien atala aurrerago aztertuko da, geometriako partean, baina jarduera konbinatorioak diseinatzeko testuinguru aparta denez, hemen azalduko dugu adibide bat. Laburrean esanda, isometrien bitartez aztertzen dira irudi baten posizio-aldaketak planoan edota espazioan. Funtsean, objektu baten isometria izan daiteke leku-aldaketa bat (translazioa), bere buruaren gaineko bira bat edota erreferentzia batekiko itzuli bat (biraketa), edota ispilu-simetria (ardatz batekiko simetria).

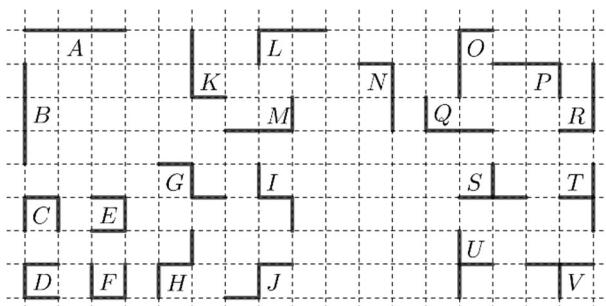
Har dezagun honako problema konbinatorio hau:

Planoko lauki-sarea erabiliz, esan zenbat forma marraz daitezkeen hiru segmentu erabiliz. Segmentuek elkarri loturik egon behar dute, lauki-sareak dituen elkarguneetan.

1. *Aldez aurreko hipotesiak.* Aldez aurreko hipotesiak plazaratzean, aurreikusi beharko dugu zenbat forma ager daitezkeen. Esan bezala, nork bere aurre-ezagutzak mobilizatzeko beharrezkoa da lehenengo fase hau. Memorian ditugun ezagutzak astintzen dira galdera simple honen bidez: zenbat modutara uste duzu egin daitekeela?

2. *Esperimentua aurrera eramatea.* Esperimentua aurrera eramatean, bakoitza saiaturiko da ahal dituen forma gehienak lortzen; hasiera batean, zurezko taula bat erabil daiteke eta txotxak koka daitezke taularen gainean, edota paperaren gainean marrazkiak egin daitezke. Lehenengo galderak ager daitezke hemen, ezartzen diren baldintzen arabera, soluzioen kopuruak ezberdinak izango direlako: biratutako bi irudi soluzio berdin gisa zenbatuko ditugu ala bi kasu ezberdin dira? Irudi baten simetrikoa onartuko dugu kasu berri gisa? Etab. Irudi ezberdinen zenbaketa egiteko, lehenik, 3 zuzenkien bidez eraiki daitezkeen irudi guztiak adierazi behar dira (translazio batekiko elkarren artean ezberdinak dira), nahiz eta hasieran erredundantziak edota errepikapenak egon daitezkeen.
3. *Datuen bilketa.* Paperaren gainean egindako saiakera horiek modu sistematiko batean antolatzen hasitakoan, datuen bilketa eta bistaratzea lantzen gabilta, jadanik. Kasuen zenbaketa sistematikoa izan dadin, forma ezberdinak zenbatzeko irizpideak argi gelditu behar izan dira aurreko fasean. Ikasleek finkatu duten baldintzaren aldean ezberdinak diren irudiak irudikatzen dira, eta horretarako, zenbaketa hori ahalbidetzen duen metodoren bat diseinatu behar da. Esate baterako, translazioarekiko elkarren artean ezberdinak diren irudiak aztertuz has daiteke. Zenbaketa sistematikoa izan dadin, irizpideren bati jarrai dakioke, esate baterako: lehenengo eta behin, hiru zuzenkiak zuzen berean dituztenak irudikatu; ondoren, bakarrik bi zuzenki zuzen berean dituztenak irudikatu; eta, azkenik, zuzenki denak zuzen ezberdinetan dituztenak irudikatu.
4. *Datuen bistaratzea.* 6. irudian ikus daitezke translazioarekiko elkarren artean ezberdinak diren 22 aukerak, isometriak kontuan hartu gabe. Behin aukera guztiak agertu direnean, eztabaida daiteke isometria bakoitzaren arabera murrizten diren kasuak.
5. *Aieruak eta horien balioztatzea.* Behin jarduera amaitutzat eman denean, galdera berriak planteatu daitezke, honela: «6. irudiko formen artean, zeintzuk dira elkarren berdinak biraketarekiko? Hau da, biraketa baten bidez lorturiko formak elkarren baliokideak direla pentsatzen badugu, zenbat forma dira elkarren ezberdinak?»; «6. irudiko formen artean, zeintzuk dira elkarren berdinak simetriarekiko? Hau da, simetria baten bidez lorturiko formak elkarren baliokideak direla pentsatzen badugu, zenbat forma dira elkarren aldean ezberdinak?»; «6. irudiko formen artean, zeintzuk dira elkarren berdinak isometria batekiko? Hau da, edozein isometria baten bidez lorturiko formak elkarren baliokideak direla pentsatzen badugu, zenbat forma dira elkarren aldean ezberdinak?».

6. irudia. Hiru segmenturekin egin daitezkeen formak, planoko lauki-sarean.



Behin jarduera amaitu denean, eta ikasleak euren aieruak balioztatzen dabiltzanean, irakasleak galdetegi bat eman diezaieke ikasleei isometrien eduki teorikoetan sakontzeko. Galdetegi horretan, irakasleak galderak egingo dizkie ikasleei, ikasleek jada eraiki eta manipulatu dituzten irudien gainean:

- C eta D elkarren berdinak dira, bata lortzen baita bestearen 90° -ko biraketa eginez. Era berean, D biratuz lortzen da F , eta hura biratuz, E . Ondorioz, C , D , E eta F irudiak elkarren berdinak dira biraketarekiko.
- G irudia _____ irudiaren berdina da _____-ko biraketa batekiko.
- I irudia _____ irudiaren berdina da _____-ko biraketa batekiko. Hala ere, G eta H irudiak eta I eta J irudiak ezberdinak dira, lehenengotik abiatuta ezin baita bigarrena lortu, biraketa edozein dela ere.
- K irudia _____.
- O irudia _____.
- K , L , M eta N irudiak eta O , P , Q eta R irudiak berdinak al dira (translazioa eta biraketeta kontuan hartuz)?
- S irudia _____.
- Beraz, 7 irudi ezberdin daude (translazioak eta biraketak kontuan hartuz): « A motakoak» (A tik abiatuta translazio bidez eta biraketa bidez lortu direnak); « C motakoak» _____.
- Zazpi horietatik 5 bakarrik dira elkarren aldean ezberdinak, hirugarren baldintzarekiko egiten bada sailkapena, hau da, simetriak kontuan hartzen badira. Honako mota hauek daude: A , C , _____.

2.3. KONBINATORIAREN ELEMENTUAK

Konbinatoria lantzeko testuinguruetan hainbat adibide eta ariketa aztertu dira, non problema ireki bat ebatzi beharra dagoen, hasieran haztamuka, gero adierazpen grafikoen bidez, diagramak erabiliz, edota teknika aritmetikoren bat erabilita. Zenbaketa-prozesuetan patroiak edota erregulartasunak topatzen ditugunean, erregulartasun horiek formula bihur daitezke. Hau da, saia gaitezke topatzen eta deskribatzen problema mota horren ebazpena ezaugarritzen duen teknika bat.

2.3.1. Errepikapenezko aldakuntzak eta aldakuntza sinpleak

Esate baterako, 2.2.2. atalean azaldu den lepokoak edo idunekoak egiteko tailerrean, jarduerari ken dakizkioke adierazpen fisikoak, eta orduan, jardueraren enuntziatua beste enuntziatu honen baliokidea da:

Hiru kolore erabilia, topa itzazu hiru leku huts betetzeko dauden moduak.

— — —

Koloreak adierazteko hiru letra erabil daitezke: gorria (G), urdina (U), eta berdea (B). Horrela, lehenengo bola gorria izanez gero, bigarrena berdea, eta hirugarren urdina, lorturiko emaitza honela kodifika daiteke:

G B U

Kodifikazio hori baliatuz, saia gaitezke aukera posible guztiak topatzen, letrak erabiltzea koloreak berak erabiltzea baino errazagoa izan daitekeelako. Hala ere, hori eginez gero, jarraituko genuke kasu posible guztiak banan-banan zerrendatzen, kasuen zenbaketa egin ahal izateko. Pauso bat aurrera eginez, saia gaitezke zuzenean aurkitzen zenbat modu dauden, baina zerrenda osoa eraikitzea saihestuz. Zenbaki baten bidez adieraz dezakegu leku edo posizio bakoitzean dauden aukerak, eta horrela, posizio bakoitzeko zenbakiak adierazten duenez zuhaitz-diagramaren zenbat adarkatze dauden pauso horretan, biderkatu egingo dira adarkatze posibleak edota aukera posibleak:

$$\underline{3} \underline{3} \underline{3} \rightarrow 3 \times 3 \times 3 = 27$$

Hau da, errepikapenak baimenduz gero, posizio bakoitzean hiru kolore jar daitezke; lehenengo lekuan jarri den kolore bakoitzeko, beste hiru aukera daude bigarren kolorea ezartzeko; eta, azkenik, lehenengo eta bigarren koloreak ezartzeko dauden aukera guztietako bakoitzean, beste hiru aukera daude azken bola jartzeko. Zuhaitz-diagramen bidez sistematizatu den prozedura honi *errepikapenezko aldakuntza* esaten zaio, non m letrak adierazten duen posizio bakoitzean dauden aukerak, eta n letrak adierazten duen zenbat posizio dauden:

$$EA_{(m,n)} = m^n$$

Errepikapenezko aldakuntza batean, hurrenkeran ezarritako elementuen ordenak garrantzia du (adibidean, koloreen hurrenkerak emaitza baldintzatzen du, ez baita berdin urdina eta gero gorria jartzea, edo alderantziz), eta gainera, elementu horiek errepikatu egin daitezke (adibidean, gorriaren ostean gorria errepika daiteke, etab.). Gure lehengo adibidean, $m = 3$ bola edo kolore posible ditugu posizio bakoitzean ezartzeko, eta orotara $n = 3$ posizio daude:

$$EA_{3,3} = 3^3 = 27$$

Aldakuntza batean, gerta liteke elementuak ezin errepikatu izatea; hau da, elementu bakoitza behin bakarrik erabili ahal izatea. Idunekoen adibidean, kolore bakoitzeko bola bakar bat izatearen baliokide litzateke egoera hori. Kasu horretan, *aldakuntza arruntak* izango ditugu. Galdera berri hori aurreko galderaren modura modeliza daiteke, hutsune bat utziz erabili beharreko kolore bakoitzarentzat:

— — —

Koloreak ezin direnez errepikatu, lehenengo kolorea hiru modutara aukera daiteke, baina bigarren kolorea aukeratzeko soilik bi modu egongo dira; eta azken kolorea, aldiz, emanda dator, soberan gelditu dena erabiltzea beste aukerarik ez dagoelako. Horrela, 6 lepoko ezberdin egin daitezke:

$$\underline{3} \underline{2} \underline{1} \rightarrow 3 \times 2 \times 1 = 6$$

Hau da, errepikapenak ez badira baimentzen, zuhaitz-diagramaren adarkatze bakoitzean, aurreko adarkatzean baino aukera bat gutxiago egongo da beti, dagoeneko erabili den elementuari dagokiona. Izendatuz gero m hasieran dagoen elementuen kopurua, eta n posizioen kopurua, *aldakuntza arruntak* honela adierazten dira:

$$A_{m,n} = m \times (m-1) \times (m-2) \times \dots \times (m-n+1)$$

Biderkadura luze hori laburrago idatz daiteke, zenbaki konbinatorien bidez idazten badugu. Zenbaki konbinatorio bat zera da, aurreko formularen emaitza bera ematen duen zatidura bat, bi biderkadura luzeren arteko zatiketa bat, non idazkera faktoriala erabiltzen den: zenbaki arrunt bat abiapuntutzat hartuta, zenbaki hori bera baino txikiagoak diren zenbaki arrunt guztiekin biderkatzean lortzen den biderkadura. Esate baterako, 3 zenbakiaren faktoriala $3!$ idazten da, eta zera adierazten du, $3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$. Horrela, idazkera berri honekin, aldakuntza arruntak formula berri-datz daiteke, hiru puntuak erabili gabe:

$$A_{m,n} = \frac{m!}{(m-n)!}$$

Aurreko adibidean, aukerako $m = 4$ kolore baldin badaude (esate baterako, urdina, gorria, horia eta berdea), eta $n = 3$ bolako idunekoak egin nahi badira, 24 lepoko ezberdin egin daitezke:

$$A_{4,3} = \frac{4!}{(4-3)!} = 4 \times 3 \times 2 = 24$$

Aldiz, aukeran $m = 5$ kolore izanez gero (aurreko kolore guztiak, eta beste kolore bat gehiago, zuria, esate baterako), eta $n = 3$ bola erabiliz, 60 lepoko egin daitezke:

$$A_{5,3} = \frac{5!}{(5-3)!} = 5 \times 4 \times 3 = 60$$

Eta $m = 6$ kolorerekin $n = 3$ bolako 120 lepoko egin daitezke:

$$A_{6,3} = \frac{6!}{(6-3)!} = 6 \times 5 \times 4 = 120$$

2.3.2. Objektu matematikoen esanahiak haurrekin negoziatu behar dira

Jarduera konbinatorioetan, irakasleak haurrekin negoziatuko behar ditu jardueraren baldintzak, eta baldintzapen horien arabera emango ditu erantzunak. Horrela, idunekoen tailerra egin bitartean, hainbat erabaki hartu beharko dira jarduerak aurrera egin ahala. Esate baterako, gerta daiteke haurrek eurek erabakitzea koloreak nahi adina aldiz errepika daitezkeela (hots, errepikapenezko aldakuntzak egingo dituztela), gerta daiteke ere haurrek erabakitzea koloreak ezin errepika daitezkeela idunekoetan (hots, aldakuntza sinpleak egingo dituztela), edota irakasleak espero gabeko bestelako erabakiak ere har ditzakete, esate baterako, koloreak errepika daitezkeela baina ezin direla kolore bereko bi bola elkarren aldamenean ezarri, etab.

Kasu horietan, ez dagokio irakasleari haurrek hartu duten erabakia zalantzan jartzea, jarduera matematikoa berak aurreikusitako eremura eramateko. Aldiz, irakaslea bera moldatu beharko da jardueraren baldintza berrietara, eta haurrek erabaki duten modura argudiatu beharko ditu kasu posibleak, elkarriketaren eta eztabaidaren bidez. Izan ere, lepokoak lotzen direnean, ez dio axola lepoko hori zein orientazioarekin lotu den, bi muturrak baliokideak direlako, eta honenbestez, ez du inporta zein aldetatik hasiko garen koloreak zenbatzen. Hori horrela balitz, *GUB* eta *BUG* aukerak elkarren baliokideak lirateke, hau da, aldakuntzetan zenbatzen diren kasuen erdiak bakarrik hartu beharko lirateke kontuan. Aurreko adibidean, $m = 3$ kolore eta $n = 3$ bolarekin, $6/2 = 3$ aukera bakarrik leudeke.

2.3.3. Permutazioak

Aldakuntza arrunten kasu berezi bat aurki dezakegu, non kolore bakoitzeko bola bakarra daukagun, eta gainera, dauden bola horiek guztiak erabili nahi diren. Hau da, aldakuntzen formulak, m eta n parametroek balio bera hartzen dute. Demagun $m = n = 4$ bolako idunekoa egin behar direla, baina kolore bakoitzeko bola bana izanik. Aurrekoan bezala, lau leku bete behar dira lau kolore erabilita:

— — — —

Zenbat modutara osa daiteke orain idunekoa? Bada, lehenengo elementua aukeratzeko 4 aukera daude, bigarrena aukeratzeko 3, hirugarrena aukeratzeko 2, eta azkena, berriz, emanda dator, sobera dagoena jartzea beste aukerarik ez dagoelako. Honela ba:

$$4 \underline{3} \underline{2} \underline{1} \rightarrow 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$$

Zuhaitz-diagraman ongi ikusten da lepoko desberdinen kopurua lortzeko biderkatu egin behar direla hurrenez hurren lorturiko adarkatzeak. Modu horretara lorturiko biderkadurari *faktoriala* esaten zaio, eta lorturiko konbinazioei, berriz, *permutazioak*:

$$P_m = A_{m,m} = m!$$

Aurretik aipatu modura, $m \cdot (m-1) \cdots 2 \cdot 1$ zenbaki horri, m zenbaki arrunt baten *faktoriala* esaten zaio. Biderkadura luze hori laburtzeko, $m!$ adierazten da eta m elementu ordenatzeko modu desberdinen kopurua adierazten du. Aurreko adibidean, lau leku lau objektu desberdinekin betetzeko dauden aukera posibleak kalkulatzeko balio duen teknika da:

$$P_4 = A_{4,4} = 4!$$

Horrela, m elementuko permutazio batean, ordenak eragina du aukera desberdinak eraikitzerakoan, eta, taldekatzeetan erabili egingo dira aukeran dauden elementu guztiak. Horregatik, $P_m = A_{m,m}$ beteko da, edo beste modu batean esanda, *permutazioak* zera dira, *aldakuntza arrunten* kasu partikular bat, non eskura dauden elementu guztiak erabiltzen diren.

2.3.4. Konbinazioak

Azkenik, irakasleak hurrekin izandako negoziaketetan, gerta liteke hurrek irizpide gisa erabakitzea bolen ordenak ez duela garrantzirik izango, hots, idunekoa ezberdinak zenbatzeko orduan bolen kolorea kontuan hartuko dela, baina ez posizioa. Esate baterako, bola gorri batekin, urdin batekin eta berde batekin osa daitezkeen idunekoa guztiak elkarren baliokideak lirateke, eta kasu bakar baten gisa kontatuko lukete. Baldintza horietan lor daitezkeen kasuei *konbinazio* esaten zaie.

Demagun $m = 4$ kolorerekin (beltza, urdina, gorria, eta berdea) egin daitezkeen konbinazioak aztertzen gabiltzala, koloreak hirunaka hartuta ($C_{4,3}$). Hasteko,

formularen zenbakitzailean begiratuta, 4 elementurekin osa daitezkeen 24 permutazioak zerrendatuko ditugu (6. taula); ordena bati jarraitzearen, lehenengo ilaran bola beltzarekin hasten diren iduneko guztiak, jarraian berdez hasten direnak, hurrengoak urdinez, eta, azkenik, gorritz hasitakoak.

6. taula. Aldakuntza batetik konbinazioak lortzeko modua.

4 elementuren permutazioak	4 koloreen artean 3 aukeratuta dauden aukerak	Koloreak (eta ez haien ordena) kontuan hartuz dauden aukerak
		U, G eta Ber koloreak dituzten lepokoak U, G eta Bel koloreak dituzten lepokoak Ber, G eta Bel koloreak dituzten lepokoak Ber, U eta Bel koloreak dituzten lepokoak
24 aukera posible	24 aukera posible	4 aukera posible

Helburua hiru bolako idunekoak egitea denez, aukeran dauden lepoko guztiei lehenengo bola kenduko zaie eta 6. taularen bigarren zutabearen egiazta daitekeen moduan, 24 iduneko ezberdin izaten jarraitzen dute. Horrela, lehenengo ilaran dauden lepoko guztiek bola urdina (U), gorria (G) eta berdea (Ber) izango dituzte, modu ezberdinean kokaturik. Hala ere, *konbinazioak* ez dio elementuen ordenari erreparatzen, lepokoa osatzen duten koloreak bakarrik kontuan hartuz. Horrela, 3 kolore aukeratzeko 4 modu daudela ondorioztatzen da irudiaren hirugarren zutabearen.

Honenbestez, bola guztiekin (m) egin daitezkeen aukeretatik, erabiliko ez diren koloreak (n) eta haien permutazioak eginez errepikatzen diren idunekoak kenduta, gainontzeko bolen artean ($m-n$) egin daitezkeen ordenazio ezberdinak ere baztertu behar dira. Adibidez, 5 kolore edukita: urdina (U), berdea (B), arrosa (A), horia (H) eta gorria (G); hiru bolako idunekoak egin nahi dira bola berde, arrosa eta gorriarekin. Hasieran lepoko guztiak ditugularik, UHBAG eta HUBAG lepokoak berdinak izango dira; izan ere, kolore urdina eta horia kenduz, bi kasuetan BAG lepokoa baitauekagu. Horrelako errepikapenez gain, aukeratutako koloreen arteko permutazioak ere baztertu behar dira. Kasu honetan, kolore berdea, arrosa eta gorria ordenatzeko modu ezberdinak aukera bakartzat hartuko dira.

Aurreko adibidearekin jarraituz, hasieran 4 bolekin zeuden aukera guztiei (P_4) kolore bateko bola bat kentzeaz gain (P_1), beste hiru bolen artean egin daitezkeen ordenazio guztiak ere alde batera utzi behar dira (P_3). Hori bi modu baliokidetan pentsa daiteke: 4 kolore edukita horietako bat kentzean dauden aukerak edo 4 kolore edukita 3 kolore aukeratzeko aukerak ($C_{4,3}$); $C_{4,1} = C_{4,3}$ izanik.

$$C_{4,1} = \frac{P_4}{P_1 \cdot P_3} = \frac{4!}{1! \cdot 3!} = \frac{4!}{1! \cdot (4-1)!} = \binom{4}{1}$$

$$C_{4,3} = \frac{P_4}{P_3 \cdot P_1} = \frac{4!}{3! \cdot 1!} = \frac{4!}{3! \cdot (4-3)!} = \binom{4}{3}$$

Honekin guztiarekin, zenbaki *konbinatorio*aren definizio alternatibo bat eman dezakegu. Hain zuzen ere, zenbaki horrek adierazten du zenbat modu ezberdinetara aukeratu daitezkeen m elementu n -naka harturik; hau da, m elementuko multzo batean, n elementuko zenbat azpimultzo antola daitezkeen. Aukeraketa horietan, elementuen ordenak ez du garrantzirik, soilik erreparatzen baitzaio elementuen aukeraketari. Beraz, *aldakuntza arruntarekin* ere lotu daitezke *konbinazioak*. Lehenik 4 koloreetatik 3 aukeratuko dira, eta, ondoren, hiru kolore horien arteko ordenazio ezberdinak deuseztatu.

$$C_{4,3} = \frac{A_{4,3}}{P_3} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{3!}$$

Kalkulu aritmetiko sinpleen bidez argi ikus daiteke formula hau aurrekoaren baliokidea dela, izan ere:

$$C_{4,3} = \frac{A_{4,3}}{P_3} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{3!} = \frac{4!}{3! \cdot 1!} = \frac{4!}{3! \cdot (4-3)!} = \binom{4}{3}$$

Beste hitz batzuetan esanda, konbinazio batean parte hartzen duten elementuen ordenak ez duenez garrantzirik, elementu horiekin osa daitezkeen *permutazio* guztiak elkarren baliokideak dira. Propietate horren bidez *konbinazioen* kopurua kalkula daiteke *aldakuntzak* eta *permutazioak* erabiliz: ordenak garrantzia duenean, aldakuntzak zenbatzen ditugu ($A_{m,n}$), baina aldakuntza horietan permutazioak (P_n) «errepikaturik» agertzen dira; honenbestez, «aldakuntzen kopurua» zati «permutazioen kopurua» ginez kalkula daitezke «konbinazioen kopurua» ($C_{m,n}$):

$$C_{m,n} = \frac{A_{m,n}}{P_n} = \frac{m!}{n! \cdot (m-n)!} = \binom{m}{n}$$

Hona hemen aurreko propietate hori bera planteatzeko beste modu bat. Koloretako bolak jartzeko dauden lau hutsuneetatik hiru hutsune hautatu behar dituzu. Kasu honetan ere, hiru hutsuneak aukeratzeko ordenak ez du inporta, eta emaitzak zenbaki-konbinatoriari egiten dio erreferentzia:

$$C_{4,3} = \frac{A_{4,3}}{P_3} = \frac{4!}{3! \cdot (4-3)!} = \binom{4}{3}$$

Baina hutsuneak hautatzeko ordenak ez duenez garrantzirik, lau hutsuneren artean hiru hautatzea libre geratzen den hutsunea hautatzearen baliokidea da. Hau da, lau hutsuneren artean hiru aukeratzeko (koloretako bolen kokapena zehazten dutenak) edo bat aukeratzeko (bola zuriaren kokapena zehazten duena) berdina da:

$$\binom{4}{3} = \binom{4}{1}$$

Berdintza hori betetzen da, hain zuzen ere, 3 eta 1 elkarren osagarriak direlako 4rekiko. Propietate hori orokorrean idatz daiteke, beraz:

$$\binom{m}{n} = \binom{m}{m-n}$$

Bigarren adibide bat aztertuko dugu orain. Demagun hurrek bost bolako ($m=5$) lepokoak egin behar dituztela hiru bola gorri ($n_1=3$) eta bi urdin ($n_2=2$) erabiliz. *Aldakuntzak* erabiliz, irakasleak aurreikus dezake zenbat aukera dauden ordena kontuan hartuz gero: lehenengo hutsunerako 5 aukera egongo dira, bigarrenenerako 4, hirugarrenenerako 3, laugarrenenerako 2 eta azkenekorako bakarra. Beraz, 120 lepoko egin litezke:

$$P_5 = A_{5,5} = 5! = 120$$

Baina bolen koloreak errepikatu egin dira, eta kolore bereko bolen posizioak ez dira garrantzitsuak konbinazioetan (9. irudia). Hiru bola gorriak permutatzen ditugun aldiro, lepoko berdina lortzen dugu. Gauza bera gertatuko da bi bola urdinekin. Horrela, bolak $2! \cdot 3!$ modu ezberdinetan *permutatu* (mugitu) arren, lepokoak ez du aldaketarik nozitzen. Beraz, lepoko ezberdinen kopurua hau da:

$$\frac{5!}{2! \cdot 3!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2 \cdot 3 \cdot 2} = \frac{5 \cdot 4}{2} = 10$$

Eta adierazpen hori beste honen berdina da:

$$C_{5,2} = \frac{5!}{2! \cdot (5-2)!} = \binom{5}{2}$$

Bost elementu ordenatzeko zenbat modu dauden adierazten du, elementu horietako hiru eta horietako bi elkarren berdinak izanik (beraz, posizioak *permutatzean* ez da ezberdintasunik nabaritzen). Problema bera honela planteatu genezake: bost hutsunetatik hiru aukeratzeko modu ezberdinak, aukeraketa-ordenak garrantzirik eduki gabe.

$$C_{5,3} = \frac{A_{5,3}}{P_3} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{3!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2!}{3! \cdot 2!} = \binom{5}{3}$$

Honenbestez, gauza bera da bostetik hiru hutsune aukeratzea edo bostetik bi aukeratzea:

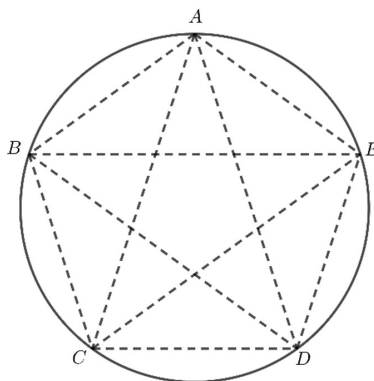
$$\binom{5}{3} = \binom{5}{2}$$

Bost hutsunetatik hiru aukeratzeko (aukeraketaren ordenak inporta gabe) konbinazioak erabiltzen direla ikusi dugu. Ideia berarekin jarraituz, konbinazioek taldeak sortzeko balio dutela ikusiko dugu.

7. taula. 120 aldakuntza eta 10 konbinazioren antolaketa.

12123	12132	12213	12231	12312	12321	11223	11322	21123	21321	31122	31221
21123	21132	21213	21231	21312	21321	12213	12312	22113	22311	32112	32211
11223	11232	12213	12231	13212	13221	11232	11322	21132	21312	31122	31212
21123	21132	22113	22131	23112	23121	12231	12321	22131	22311	32121	32211
11223	11322	12123	12321	13122	13221	12123	13122	21123	23121	31122	32121
21213	21312	22113	22311	23112	23211	12213	13212	21213	23211	31212	32211
11232	11322	12132	12312	13122	13212	12132	13122	21132	23112	31122	32112
21231	21321	22131	22311	23121	23211	12231	13221	21231	23211	31221	32211
11223	11232	21213	21231	31212	31221	12312	13212	21312	23112	31212	32112
12123	12132	22113	22131	32112	32121	12321	13221	21321	23121	31221	32121

ARIKETA EBATZIA. Zirkunferentzia batean 5 puntu adieraziko ditugu: A, B, C, D eta E. Zenbat modutara lotu daitezke puntu horiek binaka?



Binaka hartutako 5 elementuren konbinazioak dira, eta honela adierazten dira: $C_{5,2}$. Bi puntu lotzen badira, ez du axola zein ordenatan lotzen diren. Beraz, konbinazio hauek egin daitezke: AB, AC, AD, AE, BC, BD, BE, CD, CE eta DE. «Zenbat modutara» galderari erantzuteko, aukera guztien zerrenda ez da zertan banan-banan adierazi, aski baita *konbinazioak* kalkulatzeara:

$$C_{5,2} = \frac{5!}{2! \cdot (5-2)!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2! \cdot 3!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{5 \cdot 4}{2 \cdot 1} = \frac{20}{2} = 10$$

Edota zuhaitz-diagrama aztertzea:

$$A \begin{cases} B \\ C \\ D \\ E \end{cases}; B \begin{cases} C \\ D \\ E \end{cases}; C \begin{cases} D \\ E \end{cases}; DE$$

Banaka, binaka, bosnaka hartutako 5 elementuren konbinazioak lortzeko, zuhaitz-diagrama erabil daiteke. Esan bezala, ordenak ez du eraginik konbinazioetan: bi talde desberdinak izango dira, elementu bat desberdina badute.

ARIKETA EBATZIA. 20 bizilaguneko etxebizitza-bloke batean, bi laguneko batzordea aukeratu nahi da, udaletxera eskaera bat aurkeztera joateko. Zenbat batzorde osa daitezke?

20 elementu ditugu guztira eta 2 elementuko taldeak egin nahi ditugu. Kasu honetan, elementuen ordenak ez du eraginik eta ez ditu taldeak bereizten. Izan ere, bi lagunek batzorde bakar bat osatuko dute, lagun horiek zein ordenatan aukeratzen diren alde batera utzita. Binaka hartutako 20 elementuren *konbinazioak* dira:

$$C_{20,2} = \frac{A_{20,2}}{P_2} = \frac{20 \cdot 19}{2!} = 190 = \binom{20}{2}$$

2.4. ARIKETAK

- Gure zenbakikuntza-sistema posizionala da, eta 0tik 9rako digituak erabiltzen ditu hainbat zifratako (unitateak, hamarrekoak, etab.) zenbakiak adierazteko. Zenbakien zifrekin jolastuz, aukerak zenbatuko ditugu:
 - Bost zifrako zenbat zenbaki osa daitezke 1, 2 eta 3 digituekin? Horietako zenbat izango dira zenbaki bikoitiak? Eta zenbat bakoitiak?
 - Lau zifrako zenbat zenbaki idatz daitezke 1, 3, 5, 7 eta 9 digitu bakoitiak erabiliz? Zenbat hiru zifrako? Hiru zifra ezberdineko zenbat zenbaki osa daitezke? Eta bost zifra ezberdineko zenbat? 15 hasiko diren lau zifrako zenbat zenbaki osa daitezke? Horietako zenbatek izango dituzte zifra guztiak ezberdinak? Bost zifra ezberdineko zenbat zenbaki dira 70.000 baino txikiagoak?
 - 1etik 9rako digituak erabiliz, sei zifrako zenbat zenbaki osa daitezke? 7 zifra ezberdineko zenbat zenbaki? 92 hasi eta 32 amaituko diren bost zifrako zenbat zenbaki osa daitezke? Eta 132 hasi eta 74 amaituko diren zortzi zifra ezberdineko zenbat zenbaki?
 - Zenbaki *palindromo* bat berdin irakurtzen da hasieratik edo bukaeratik hasita. Lau zifrako zenbat zenbaki palindromo daude? Eta hamar zifrako zenbat? Zenbat dira 1.000 baino txikiagoak?
- Zenbakiekin bezala, letrekin ere jolas daiteke. Hitzak osatzea, funtsean, letren konbinazioak egitea besterik ez da. Esate baterako:
 - PERMUTAZIOA hitzak dituen 11 letrak erabiliz, 11 letra ezberdineko zenbat hitz idatzi ahal izango dira? Zenbat hasiko dira P letraz? Zenbat PE letrez? Zenbat hasiko dira PER letrez? Eta PERMU letrez?

- b. Letrez ari garela, idazle batek eskutitz bana idatzi die 6 pertsona ezberdini. 6 gutun-azaletan pertsonen helbideak idatzi ditu, baina eskutitzak azaletan sartzeraz zihoala telefonoz deitu diote, eta presaturik, eskutitzak zoriz sartu ditu azaletan. Zenbat modutara bete daitezke gutunak?
 - c. Literatur lehiaketa batean 50 lagunek hartu dute parte. Hiru sari baino ez daude, eta berdinak dira guztiak. Zenbat modu daude sariak banatzeko? Eta sariak desberdinak izango balira?
 - d. Zenbat modutan jar daitezke bost liburu apal batean? Eta horietako bat lehendabizi egotea nahi badugu, zenbat aukera egongo dira liburuak jartzeko?
3. Koloreak konbinatzea ohikoa izaten da. Gustuak gorabehera, koloreen konbinazioak zenbatzeko hainbat testuinguru aurki ditzakegu:
 - a. Paretan zintzilikatu dugun egurra apaintzeko hiru kolore dauzkagu aukeran: gorria, urdina eta berdea. Egurrean hiru zona ezberdin bereizten baditugu eta bakoitza kolore ezberdin batez margotu nahi badugu, zenbat modu desberdinetan margotu daiteke? Egurrean bi zona ezberdin bereizten baditugu eta bakoitza kolore ezberdin batez margotu nahi badugu, zenbat modu desberdinetan margotu daiteke? Egurra kolore bakar batez margotu nahi dugu, baina kolore hori hiru koloreetatik bi nahasita lortu behar da. Zenbat kolore sor ditzakegu egurra margotzeko?
 - b. Kolore desberdineko hiru zerrenda dituzten zenbat bandera osa daitezke ostadarraren zazpi koloreak erabiliz? Eta koloreak errepikatzeko aukera izanez gero? Zertan bereizten dira kasu bat eta bestea? Zenbat kolore lor daitezke ortzadarraren 7 koloreak hiruak nahastean baditugu?
4. Lan egitea beharrezkoa baldin bada ere, zer litzateke mundu hau festarik gabe? Ospakizunek izaten dituzte euren protokoloak, eta komeni izaten da horietan ere zenbatzen jakitea:
 - a. Festa batean lau lagun elkartu dira eta guztiek agurtu dute elkar besarkada banarekin. Zenbat besarkada egon dira guztira?
 - b. Datorren kuadrillako ezkontzarako, Aitorrek armairuan bost alkandora eta hiru jaka baldin baditu, zenbat konbinazio ditu aukeran?
 - c. Hezkuntzako kongresu baten atarian, sei hizlarik elkarri eskua eman diote. Zenbat bosteko izan dira guztira? Eta hamar hizlari elkartu balira?
 - d. Ezkontzetan, ezkonberriak gurasoekin, aita bitxiarekin eta ama bitxiarekin batera esertzen dira. Zenbat modutan eser daitezke, ezkonberriak beti elkarren ondoan esertzen badira?
 - e. Kuadrillarekin afaltzeko gelditu zara, baina poteoa luzatu denez, ez duzue inon lekuri aurkitzen eserita afaltzeko, eta tabernako bokatak eskatzen amaitu duzue beste behin ere. Lau ogitarteko mota eta hiru edari mota

daude: zenbat eskari (ogitartekoa eta edaria) aukera daitezke taberna horretan?

5. Testuinguru geometrikoetan zenbaketak egitea erraza izan ohi da, eskema geometrikoak lagundu egiten duelako informazioa antolatzen:
 - a. Zirkunferentzia batean 8 puntu adierazi dira. Zenbat aukera daude puntu guztiak binaka lortzeko? Zenbat triangelu osa daitezke puntuak hirunaka lotuta? Zenbat lauki? Zenbat pentagono? Zenbat hexagono? Zenbat heptagono? Eta zenbat oktagonon?
 - b. Zenbat diagonal osa daitezke lauki batean? Pentagono batean? Hexagono batean? Orokorrean, aurkez ezazu argumentu induktibo bat, zeinaren bidez n alde dituen poligono baten diagonal kopurua aurreikus dezakezun.
6. Kirol-txapelketetan konbinazioak aztertzen dira, bai taldeak osatzeko orduan, baita podium posibleak aurreikusteko orduan ere:
 - a. Tennis-txapelketa batean 5 jokalaria ari dira jokatzen. Jokalari bakoitzak beste guztien kontra behin jokatu behar badu, zenbat partida jokatuko dituzte guztira?
 - b. Lasterketa batean 20 parte-hartzaile daude eta 4 sari banatzen dira. Zenbat modu daude sariak banatzeko lau sariak ezberdinak badira? Eta sariak berdinak badira?
 - c. Kiniela batean, etxeko taldeak irabaziz gero, 1 markatzen da; bi taldeek berdinez gero, X, eta kanpoko taldeak irabaziz gero, 2. Bi futbol-partida jokatzen dira: Zenbat emaitza lor daitezke? Idatzi emaitza posible guztiak. Eta hiru partida balira? Eta lau izanez gero? Zenbat emaitza daude bost partidatarako? Zenbat emaitza izan daitezke 20 partidako jardunaldi batean? Zenbat apustu egin beharko lirateke 14 emaitzako kiniela batean, ziur-ziur asmatzeko?
 - d. Kirol-elkarte batean presidente, idazkari eta diruzainaren postuak bete behar dira. 12 hautagai badaude, zenbat modu ezberdinetan bete daitezke postuak?
7. Kirol-jokoetan bezalaxe, zorizko jolasetan ere komeni da konbinazioak kalkulatzeko jakitea, ziria sar ez diezazuten:
 - a. Sei aurpegiko bi dado bota dira eta lortutako balio handienari txikiena kendu zaio. Zer emaitza lor daitezke?
 - b. Dado bat eta txanpon bat bota dira. Zenbat emaitza lor daitezke? Kalkulatzeko zuhaitz-diagrama egin ezazu.
 - c. Sei txanpon desberdin bota dira. Zenbat emaitza lor daitezke?
 - d. Ontzi batean 1, 2, 3 eta 4 zenbakiak dituzten lau bola daude. 2 bola elkarren segidan hartuz gero, lehena ontzira berriz sartu gabe, zenbat emaitza lor daitezke? Eta 3 bola hartuz gero, ontzira bolarik sartu gabe?
 - e. Zenbat fitxa ditu domino-jokoak?

8. Badira beste hainbat testuinguru eguneroko bizitzan, zeinetan zenbatzen jakitea ongi etor daitekeen:
- Lau txanpon ditut poltsikoan (1 €-eko txanpon bat, 2 €-ko beste bat, 0,50 €-ko beste bat eta 0,20 €-ko beste bat). Zenbat kopuru osa ditzaket hirunaka hartuta? Zehaztu euro kopuru posible guztiak.
 - Laranjondo baten enborretik hiru adar atera dira; horietako bakoitzetik beste bost adar; horietatik beste zazpina adar; eta azken horietako bakoitzak 20 laranja ditu. Zenbat laranja daude arbolan?
 - Probintzia bateko telefono-zenbakiek hiru zifrako aurrezenbakia eta beste sei zifra dituzte. Aurrezenbaki hori duten zenbat telefono zenbaki egon daitezke?
 - Auzo-elkarte batean 25 etxebizitza daude, eta Presidente eta Idazkaria aukeratu behar dituzte. Zenbat modutan aukera ditzakete bi lagun horiek?
 - Izozki-denda batean 18 zapore dituzte. Hiru zaporeko zenbat izozki daude aukeran? Zenbat lau zaporeko, horietako bat txokolata izanik? Zenbat 5 zaporeko, horietako bi limoia eta marrubia badira?
 - Hegoaldeko autoen matrikulek hiru letra eta lau digitu dituzte. Zenbat matrikula osa daitezke sistema horretan? Iparraldean, aldiz, bi letra, hiru digitu eta beste bi letra osatzen dira autoen matrikulak; zenbat matrikula osa daitezke beste sistema horretan?
9. Ikaslearen bizitza hoberena da, harik eta azterketen sasoia iristen den arte:
- Azterketen aretoan, zazpi eserlekuko lerroak daude. Zenbat modutara eseri daitezke zazpi ikasle lerro batean? Patxik eta Asierrek elkarren aldamenean eseriko direla ziurtatu nahi dute, txuleta elkarri pasatzeko; zenbat modutara eseri daitezke orain zazpi ikasle horiek lerro batean?
 - Azterketa batean, ikasle batek hamar galderatik zortzi aukeratu eta erantzun behar ditu. Zenbat modu ezberdinetan egin dezake azterketa? Lehenengo hiru galderak erantzutea derrigorrezkoa bada, zenbat modu ezberdinetan erantzun dezake?
 - Irakasle-eskolan hiru talde daude: talde batean 28 ikasle daude, beste batean 25 eta hirugarrenean 26. Talde bakoitzetik ikasle bana aukeratu behar bada Fakultateko bilera batean parte hartzeko, zenbat hirukote desberdin egin daitezke?
 - Marrazketako saio batean, punta bereziko zortzi arkatz ezberdin ekarri dizkigute, bost ikasleren artean banatzeko. Zenbat modutan egin dezakegu banaketa? Zortzi beharrean, bost arkatz ekarri badizkigute? Arkatzen ordeztu, elkarren berdinak diren hiru klarion zuri eta elkarren berdinak diren bi beltz banatu behar baditugu, zenbat modutan egin dezakegu?

- e. Ikasle batek zazpi irakasgai ditu, eta irakasgai bakoitzean Gutxiegia, Nahiko, Ongi, Oso Ongi edo Bikain atera dezake. Noten zenbat buletin osa daitezke?
- f. Zazpi ikaskide bost laguneko taldetan elkartzen dira autoa partekatu ahal izateko. Zenbat modutara bidaia daitezke autoan? Zenbat taldetan egongo dira Leire eta Koldo elkarrekin?
- g. Azterketa batean 50 galdera daude, eta galdera bakoitzak lau erantzun ditu aukeran. Batere ikasi ez duen ikasle batek zenbat modutara osa dezake azterketa, galdera guztiei zoriz erantzunez gero?

3. Zorizkotasuna

Probabilitateen kalkulua zorizko fenomenoek arduratzen da, baina, zer da zorizkotasuna? Nondik dator ideia hori eta nola defini daiteke? Azter ditzagun zenbait iturri. Euskal Wikipediak⁵ *zoria* darabil, zorizko fenomenoek buruz hitz egiteko:

Zoria [...] auresanezinezko fenomenoak [...] deskribatzeko erabiltzen den terminoa da. Zoriaren mendean dauden gertakizunak zoriz gertatzen direla edo zorizkoak direla esaten da. Zorizko gertaerak arrazoi edo lege zientifiko orotik at daude eta [...] xehetasunez auresanezinak dira. Hala ere, zoriz gertatzen diren fenomenoek erregularitasunak agertzen dituzte epe luzera; erregularitasun hauek zorizko fenomenoak aztertzeko erabili dira, zorizko gertaera baten ziurgabetasun maila neurtzen duen probabilitate kontzeptuaren bitartez. Adibidez, dado bat jaurtitzean suertatzen den emaitza guztiz zorizkoa da, baina epe luzera 2 zenbakia sei aldietatik batean gutxi gorabehera gertatuko dela ezaguna da; horrela, haren probabilitatea $1/6$ dela esaten da.

Oinarrizko bi ideia nabarmentzen dira zorizkotasunaren nozio horren atzean: epe laburrean ezin da aurreikusi fenomenoaren portaera, baina epe luzean erregularitasunak erakuts ditzake. Bide beretik doa LUR hiztegi entziklopedikoa⁶, eta zehaztu egiten ditu bi ideia horiek:

Zoriari dagokiona, ustekabekoa, aldeztu aurretik ezin jakin daitekeena [MAT] Zorizko aldagaiak. Zoriaren mende dagoen aldagai oro. Itxaropena eta aldakortasuna ditu ezaugarri; itxaropenak gertakizun baten balio posibleen batez bestekoa adierazten du, eta aldakortasunak gertakizun horrek duen aldatzeko joera.

Horrela, bada, aldeztu aurretik (epe laburrean, unean-unean) ezin jakin daiteke zer ustekabeko emaitza gertatuko den, baina epe luzera, *itxaropen matematikoa* deritzon nozio bat agertzen da, nolabaiteko erregularitasuna adierazten duena. Horrez gainera, bigarren nozio bat gaineratzen dio itxaropenari: *aldakortasuna*. Aldakortasunak neurtzen du, nolabait, zoriz lorturiko emaitza bakoitza *itxarondako* balio horren zeinen hurbil edo urrun dabilzan.

Gaztelaniaz erreferente da Molinerren *Diccionario de uso del Español*, eta obra horretan, zorizko fenomenoek kutsu zerutiarragoa dute:

5. <https://eu.wikipedia.org/wiki/Azala>

6. <http://www.euskara.euskadi.eus/r59-734/eu/>

«Incierto. Se dice de aquello que depende de la suerte o del azar», siendo el azar «la supuesta causa de los sucesos no debidos a una necesidad natural ni a una intervención humana ni divina».

Molinerrek *natura* edota *jainkoa* aipatzen dituen lekuan, *arrazoia* edo *lege zientifikoa* esaten du Wikipediak. Edozelan, definizio horretan, *zorizkoa* da kausa ezezaguna duen fenomeno oro, eta *zorizkotasuna* litzateke zorizko fenomenoaren kausa ezezagun hori. Interpretazio hori Erdi Arotik datorren ideia historiko baten segida da, non dadoak eta astragalo-hezurak jaurtitzen ziren norberaren zoria igartzeko, erabakiak hartzeko eta zeremonia erlijiosoetan, zorizkotasunak ezabatu egiten zituelako borondatearen eragina, inteligentzia eta pertsonaren ezagutza oro.

Frantziar autoreen artean, Poincarék (1936) bereizi egiten ditu bi fenomeno multzo: ezagunak diren legeen arabera jarduten diren fenomenoak alde batetik, *deterministak*, eta, bestetik, *zorizkoak* diren fenomenoak, inongo legeren arabera aurrean ezin direnak. Zorizkotasunak esanahi zehatz eta objektiboa zuen, pertsona guztion aurrean berdin jokatzeko duelako, salbuespenik egin gabe. Bestalde, fenomeno deterministak metodo zientifikoaren bidez aztertu eta ezaugarritu daitezke, eta lege edo arau bat dute atzean; aldez aurreko baldintza berdinetan esperimendu determinista bat errepikatuz gero, emaitza bera lortzeko ziurtasuna izan dezakezu: adibidez, pilota bat altuera jakin batetik botatzen utziz gero, unez une izango duen abiadura jakin daiteke; edota, ura berotzen jarritakoan, irakiten zer tenperaturatan hasiko den.

Interpretazio horren aurrean, badira antzinako jatorria duten beste interpretazio alternatibo batzuk. Esate baterako, pentsa genezake fenomeno guztiek dutela jatorri eta kausa bat, baina ezagutzen ez ditugunez, eta lege baten arabera deskribatzeko ezintasuna agertzen dugunez, zorizkotasuna gure ezjakintasunaren neurria litzateke.

Ezer ez da zoriz gertatzen, baina guztia gertatzen da arrazoi batengatik eta behar bat asetzeko (Leucippus, K.a. V. mendea).

Leucippusen interpretazioa subjektiboa da, pertsona batentzat zorizko fenomenoak ez duelako zertan zorizkoa izan ezagutza gehiago dituen beste pertsona baten begien aurrean. Esate baterako, dado baten jaurtiketa egiten dugunean, onartzen dugu ezin dugula aurreikusi zer balio aterako den; aldiz, prozedura fisiko aurreratu baten bidez, aldez aurreko baldintza guztiak neurtzeko kapaz izango bagina, igarri genezake zer balio aterako den dadoaren jaurtiketan, hots: dado horren hasierako abiadura determinatzeko gai izanez gero, zer-nolako parabola egiten duen airean, nolako biraketa egiten ari den, mahaiaren gainean jotzean sortuko diren marruskadura-indarrak, eta abar, jakingo genuke zer zenbakitan eroriko den. Horrek Poincaréren definiziora garamatza.

Zorizkotasuna gure ezjakintasunaren neurria besterik ez da. Definizioz, fenomeno bat zorizkoa da haren legeak ezagutzen ez ditugunean (Poincaré, 1936: 69).

Irudi luke Poincaréren definizioa Leucippusena baino sendoagoa dela, baina bigarren interpretazio hori ere ez da guztiz egokia. Izan ere, badira zenbait fenomeno determinista, zeinen arauak ez ditugun ezagutzen, hala nola heriotza edo karaktere genetikoen transmisioa. Jakina da izaki bizidun guztiak hilko garela, nahiz eta heriotzaren mekanismoak eta arrazoiak ez ditugun guztiz ezagutzen. Era berean, seme-alabek gurasoen informazio genetikoa jasotzen dutela jakin badakigu, nahiz eta mekanismo horren oinarritzko hainbat ezaugarri oraindik ezkutuan dauden guretzat.

Funtsean, beraz, zorizkotasuna bizi garen mundu honen ezaugarri garrantzitsua bat da, eta horrek justifikatzen du eskolan hura landu beharra. Matematikak eskaintzen ditu zorizko fenomenoak aztertzeko eta ezaugarritzeko tresnak, eta horregatik, matematika-saioen barnean landu daiteke zoria. Aldi berean, zorizko jokoek testuinguru ezin hobea eskainiko diote irakasleari zenbakizko hainbat eduki ere lantzeko, hala nola zatikiak eta zenbaki arrazionalak, baita ehunekoak ere. Matematikaren didaktikaren ikuspuntutik, beraz, ikaslea nozio hauekin harremanetan jartzea dagokigu.

Haur Hezkuntzan, haurrak hasten dira jada inguru hurbileko datuak eta gertaerak identifikatzen. Datu horiek errepresentatzeko objektu konkretuak baliatzen dituzte, eta marrazkiak eta diagramak egiteko gai dira. Gertaeren azterketak egiteko, lehenik eta behin, hiztegi dikotomiko batetik hasten dira, eta aurrerago, geroz eta finagoa den klasifikazio batean aurrera egiten dute: gertaera seguruak eta ezinezkoak, probableak eta inprobableak, eta, azkenik, posibleak eta inpossibleak. Behin gertaerak eta datuak identifikatu, ezagutu eta definitu ostean, haurrek gertaerak erlazionatzen dituzte: klasifikazioak egiten dituzte (adibidez, gertaera seguruen bilduma bat egin dezakete, edota gertaera inprobableen bilduma bat) eta ordenazioak (zenbait gertaera antolatzen dituzte, segurutik ezinezkora bitartean).

Haur txikiak, beraz, landu egingo dituzte zorizko fenomenoei loturiko terminoak eta hitzak, baina ez dute horiekin operatzen, hots, ez dute eragiketarik egiten. Operatzea LHri dagokion prozesua da, baina horrek ez du esan nahi, inondik inora, zuzenean hasiko garenik kalkuluak egiten. Kalkuluekin edota analisiekin hasi aurretik, ikasleari proposatu egin beharko zaizkio hainbat testuinguru, eta testuinguru horien gainean hausnarketa bat egin beharko da, *zorizkoak* edota *deterministak* ote diren argitzeko. Esate baterako, Chamorrok (2003: 343) honelako galderak proposatzen ditu, zorizko fenomenoak identifikatzeko:

1. Paper bat sugar batera hurbiltzen badugu, zer gertatuko da? Gertatuko denaz ziur gaude?
2. Txanpon bat gorantza botatzen badugu, zer emaitza lor ditzakegu? Gertatuko denaz ziur gaude?
3. Zinemara bagoaz, txartelik gabe sartzen utziko digute?
4. Mendi-martxa batean gaudela, galdu egin bagara eta bidegurutze batean hiru bide ezberdin badaude, ziurtasun osoz aukera dezakegu zein bide hartu?

Zorizko fenomenoak eta fenomeno deterministak ezberdintzeko eztabaidak LH guztian zehar gertatuko dira. Horrelako eztabaida bat gertatzen denean, momentu aproposa izango da zorizko esperimentu bat egiteko. Zorizko esperimentu horren analisian, *zorizko gertaerak* identifikatu beharko dira, hots, esperimentuaren emaitza izan daitezkeen gertaera posible guztiak. Adibidez, dado baten jaurtiketan *{bakoitia ateratzea}* zorizko gertaera bat da. Gertaera posible guztien artean, interes berezia izango dute *oinarrizko gertaerek*. Esate baterako, *{bakoitia ateratzea}* ez da oinarritzko gertaera bat, beste hiru gertaera sinpleren konbinazioa delako: *{bat ateratzea}*, *{hiru ateratzea}* edota *{bost ateratzea}*. Aurreko hiru gertaera horiek, aldiz, sinpleak edo oinarritzkoak dira, ezin direlako gertaera txikiagotan deskonposatu. Euro baten jaurtiketan, bi oinarritzko gertaera daude: *{Europa ateratzea}* eta *{Irudia ateratzea}*.

Fenomeno bateko oinarritzko gertaera guztien multzoari *lagin-espazioa* deritzo. Horrela, dado bat botatzea esperimentuaren lagin espazioa $\{1,2,3,4,5,6\}$ da. Bestalde, oinarritzko gertaera horietatik oinarritzkoak ez diren beste gertaera batzuk lor daitezke: *{2 baino handiagoa ateratzea}*, *{1 eta 5 arteko zenbakia ateratzea}*.

Parte honen hasieran azaldu da zenbakizko edukiak eta eduki aritmetikoak berariazkoa den bestelako jarduera matematiko bat laguntzeko eduki asistentzial gisa kontsidera daitezkeela. Hain zuzen ere, zorizko gertaerei probabilitateak esleitzeko orduan, modu naturalean agertzen dira *zatikiak*, eta horrela, konbinatoria zenbaki eta eragiketen eduki multzoak erakusteko abiapuntu egokia den bezala, probabilitateak aukera ematen du zatikiak eta ehunekoak LHko ikasgelan lantzeko. Komeni da gogoratzea eskolan egiten den jarduera matematikoa ezin dela antolatu curriculumak linealki zehazten dituen ezagutzen zerrendaren arabera, baina unean-unean erabilgarri diren horiek hautatu behar direla jarduera bat aurrera eramateko.

Ohiko testuliburuaren antolaketak curriculumaren sekuentziari jarraitu egiten dio, eta iradokitzen du zatikiak eta ehunekoak, eta horien arteko eragiketak, ariketa zerrenda eta jarduera errepikakorren bidez landu behar direla. Testuliburuak kapitulu independenteak dauzka nozio matematiko horiek lantzeko, eta ondorioz, normalean, jarduerak testuinguru gabekoak izaten dira. Testuliburu horiek ezagutza matematikoak modu entziklopedikoan aurkezten dituzte, eta jarduera mekanikoei ematen diete garrantzia. Behin zatikiak eta ehunekoak testuingururik gabeko egoeretan landuz gero, aurrerago agertuko diren probabilitate-jardueretan nozio horiek berriz agertuko dira, eta honenbestez, horiek berrikusi beharko dira. Probabilitateari dagozkion nozioak liburuaren amaieran agertzen direnez, ikasleak ezagutza berdina birritan lantzen ditu: hasieran testuingururik gabe, eta ondoren testuinguru batean.

Curriculumaren antolaketa entziklopediko hori haustea komeni da, beraz, eta probabilitatea tarteko dauden jarduerak testuinguru ezin aproposagoak izango dira zatikiak sartzeko, baita ikasleak lehenengoz ikasten dituen ere.

Hurrengo atalean ikusiko den bezala, txanponak jaurtitzearen fenomenoak ikasleak egoera erreal baten aurrean jartzen ditu eta problemaren emaitza lortzeko,

zatikiak eta ehunekoak erabiltzera behartzen ditu. Beraz, probabilitate-jarduerak aproposak dira curriculumean ageri diren zenbait aspektu modu integratuan lantzeko. Alde batetik, ikasleei eguneroko bizitzako problemen enuntziatuak aztertu eta ulertzea, emaitzak estimatzea eta, ondoren, ebatzea eskatzen zaie. Bestetik, problema ebatzeko, zatikiak eta ehunekoak eta haien arteko eragiketak menperatzera behartuta daude.

3.1. TXANPONEN JAURTITZEA

Seguru aski, dagoen zorizko esperimenturik sinpleena txanponaren jaurtitzea izango da. Fenomeno horren oinarritzko gertaerak identifika ditzakegu: $\{Ardo\}$ eta $\{Ogi\}$ ⁷. Zorizkotasuna lantzen hasteko zorizko esperimentu aproposa da txanpona jaurtitzea, eta gainera, ebatzi beharreko problema honi LHko «estatistikako proiektu» baten egitura eman diezaiokegu, egitura horren atalak eta momentuak errespetatzen baititu. Jarduera egiten hasi aurretik, hipotesiak egitea ezinbestekoa izango da, hau da, emaitzen aurre-estimazioa egin beharko da, beste behin ere. Ondoren, esperimentua gauzatuko da, edota kalkuluak egingo dira, aurre-hipotesi horiek baieztatzeko edota errefusatzeko.

- *Aldez aurreko hipotesiak*. Esperimentua gauzatu aurretik, irakasleak gertatuko dena motibatuzko galderak egiten ahal dizkio ikasleari. Txanpona jaurti aurretik esperimentuaren emaitza ezagutu dezakegu? Aukera gehiago dago ardo ateratzeko edo ogi ateratzeko? Zer emaitza da probableagoa? Txanpona bi bider botatzen badugu, horietariko batean gutxienez ardo lortuko da? Txanpona bost aldiz jaurti dugu, eta bostetan ardo aterata da. Seigarren aldiz jaurtitzean, zer oinarritzko gertaerak izango du aukera gehien: ardok ala ogik? Zorizkotasunari buruz ikasleek izan ditzaketen aurreiritziak jakiteko asmoz, jarduera honela abiatuko dugu:

Demagun txanpona 20 aldiz jaurti behar dugula. Aurre esan zenezake txanponak nola eroriko diren? Hau da, idatzi egin behar duzu paperaren gainean balizko 20 jaurtiketen sekuentzia bat, zure ustez nola eroriko diren, baina txanponak benetan jaurti gabe (Batanero eta Godino, 2001).

Aldez aurreko sekuentzia hori paperean idatz liteke, txantiloietan. Ikasle bakoitzak berea idatziko du, 20 hutsuneko zerrenda batean.

Estimazioa: Zure ustez, nola eroriko dira 20 txanpon?

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.	12.	13.	14.	15.	16.	17.	18.	19.	20.

7. Txanpon baten bi aldeak izendatzeko, beste hauek ere erabil daitezke: leon-kastillo, kutx ala pil, aurpegia ala gurutzia, busti ala lehorka, txapel-zuloka.

- *Esperimentua aurrera eramatea*. Hipotesien informazio hori gorde egingo da, aurrerago kontrastea egin ahal izateko. Azken batez, jarduera honen gakoa zera izango da, konparatzea gure usteak (gure ustez nola eroriko diren 20 txanpon zoriz) eta errealitatea (benetan nola erori diren esperimentu batean). Horregatik, bigarren fase honetan, ikasleei txanponak emango zaizkie, eta eskatuko zaie esperimentua gauzatu dezatela.

Esperimentua: Bota itzazu 20 txanpon eta idatzi hemen emaitzak

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.	12.	13.	14.	15.	16.	17.	18.	19.	20.

- *Datuen bilketa*. Horrela, oharkabean, esperimentuaren datu-bilketa egin dugu. Bi sekuentzia ditugu, ustezko 20 jaurtiketarekin, eta benetako beste 20 jaurtiketarekin. Orain, bi sekuentzia horien konparaketa egitea besterik ez zaigu falta. 20 datuekin, gerta daiteke gutxitxo izatea; horregatik, hiruko taldetan elkartu daitezke ikasleak, eta horrela, bakoitzaren 20 datuak elkartuta, 60 datuko lagina osatuko da. Horrela, taulak osatuko dira 20 datuekin, bai eta 60 datuekin ere, alderik ote dagoen egiaztatu ahal izateko. 60 datuko sekuentzia horietan, elkarren segidan ezarriko dira sekuentzia bateko 20. datua eta hurrengo sekuentziako lehenengoa, tiraldian elkarren jarraian izan balira bezala.

Konparatzeko interesgarriak gerta daitezkeen bi faktore edo parametro aztertuko ditugu: Zenbat ardo agertu dira zure estimazioan? Eta zenbat esperimentuan? Zenbat ogi agertu dira zure estimazioan? Eta zenbat esperimentuan? Balio beraren zenbat *bolada*⁸ daude zure estimazioan? Eta zenbat esperimentuan? Zenbatekoa da boladarik luzeena zure estimazioan? Zenbatekoa esperimentuan?

- *Datuen bistaratzea*. Konparaketa horiek egin ahal izateko, taulak eta grafikoak egiteko unea heldu da. Honako taula hauek beteko ditugu, esperimentuko datuekin:

	Estimazioko datuak (20 jaurtiketa)	Esperimentuko datuak (20 jaurtiketa)	Estimazioko datuak (60 jaurtiketa)	Esperimentuko datuak (60 jaurtiketa)
Ardoen kopurua				
Ogien kopurua				
Ardoen zenbat <i>bolada</i> daude				
Ogien zenbat <i>bolada</i> daude				
<i>Boladarik</i> luzeena zenbatekoa da				

8. Esate baterako, hamar jaurtiketako *AAAOOAOOAA* sekuentzian, 5 *bolada* daude, bost aldiz aldatu delako sekuentzia «Ardotik Ogira», edota «Ogitik Ardora». *Boladarik* luzeena, berriz, 3koa izan da, hiru aldiz agertu delako «Ardo» jarraian.

Hiru laguneko taldeak egin diren modu berean, 5 ikasleko taldeak ere egin litezke, eta horrela, aurreko jardueran lorturiko emaitzak bateratuz, 100 jaurtiketatan lortutako ardoak eta ogiak bistan edukiko dituzte. Ikasgela guztiaren datuekin ere egin liteke azterketa, kalkulu-orria baliatuz.

Datuen kopurua handia denean, justifikaturik dago taulak eta diagramak osatzea. Horrexegatik, hurrengo urratsa izango da datuak bistaratzea. Datuak antolatzeko, barra-diagramak eta sektore-diagramak egingo dira datu horiek. Horrela, jakin liteke zein izan den baliorik handiena, zein txikiena, edota zenbatekoa den datuen arteko aldea, begi kolpe batez. Alde horiek esanguratsuak ote diren edo ez ebatz liteke, grafiko horien begi-bistako alderaketa eginez.

- *Aieruak eta horien balioztatzea.* Grafikoak aurrean ditugula, honako galdera sorta hauek erantzun litezke. Estimazioak eta esperimenduko datuak alderatu ostean, nola jakin liteke sekuentzia bat egiazkoa den edota asmatua den? Gezurti bat harrapatzeko irizpide bat finka daiteke? Zehazki agertuko dira 10 ardo eta 10 ogi? Lor daitezke 11 ardo eta 9 ogi? Lor daitezke 18 ardo eta 2 ogi? Grafikoei begiratuta, zertan dira antzekoak maiztasun estimatuak eta errealak? Grafikoei begiratuta, zertan dira ezberdinak maiztasun estimatuak eta errealak? Zein da baliorik handiena grafikoetako bakoitzean? Zein da balioen aldea grafikoetako bakoitzean? Zein aldagaik dauka aldakortasun handiena? Uste duzu txanpona 20 aldiz jaurtitzerakoan izan dituzun usteak zuzenak zirela? Behin esperimendua amaitu ostean, idatziko zenuke berriz 20 txanponeko estimazio bat? Estimazio hori aurrekoaren berdina idatziko zenuke ala aldatuko zenuke zerbait? Jaurtiketak benetan egin beharrean, gai izango zinateke sekuentzia bat asmatu duen gezurti bat aurkitzeko?

Azken galdera horiek balio dezakete, hain justu ere, proiektuaren azken atala ixteko, ikasleek aieruak egin behar baitituzte, eta aieru horiek egiaztatu baitaitezke ondoren, esperimendua berriz errepikatuz, esate baterako. Oro har, ikasleak ohartuko dira txanpon baten zorizko tiraldietan balio beraren bolada luzeak agertzea ohikoagoa dela haiek uste dezaketena baino. Ohartuko dira, baita ere, hasierako tiraldi gutxirekin behinik behin, balio kopuruen arteko desoreka handiagoa izaten dela, eta desoreka hori orekatuz joan ohi dela tiraldien kopurua handitu ahala.

Datorren atalean, zorizkotasuna lantzeko testuinguru gehiago proposatzen dira. Egoera horietan guztietan planteatu daiteke aurrekoaren moduko lan-eskema bat, estatistikako proiektu baten bidez lantzeko.

3.2. ZORIZKOTASUNA LANTZEKO TESTUINGURUAK

Ikasleen inguru hurbileko egoera askok zorizko izaera daukate (haur-jolasak, familiako kideren batek parte har dezakeen apustu-jokoak, eguraldiaren iragarpena, etab.) eta haurren formakuntzan erabilgarriak izan daitezke. Bestetik, ikasleen pentsamendu logiko-matematikoa garatzeko zorizko aspektuak beharrezkoak dira; izan ere, izaera determinista duten egoerekin bakarrik ez da aski. Beharrezkoa da zalantzazko eta probabilitatezko egoerak modelizatzen hastea.

HHko haur txiki batentzat mundua determinista da, eta haur horrek zorizko fenomenoak kausalak direla pentsatzeko joera du. Esate baterako, antzara-jokoan (edota antzeko beste edozein mahai-jokotan) ohikoa izaten da haurrak dadoa jaurti nahi ez izatea, putzuan edota penalizazioa dakarren beste lauki batean erortzeko aukera izanez gero; are gehiago, putzura eroritakoan, pentsatuko du bere erruz agertu dela dadoan bere pieza putzura eraman duen balioa.

Anekdotak horrek erakusten du nola haurren joera izango den munduko fenomenoaren artean kausalitatea bilatzea, ez dagoenean ere. Horregatik, berariaz landu behar da haurrekin zorizko fenomenoaren identifikazioa, eta fenomeno horien ezaugarriak zeintzuk diren. Zorizkotasunaren eta zorizko fenomenoaren ezaugarrietan haurrak hezteak garrantzitsua izango da, etorkizunean herritar irizpidedunak izan daitezen edota ez daitezen ludopatietan erori.

Probabilitateen esleipena, hasieran, ez da zertan zenbakizkoa izan. Oinarrizko zenbait terminoren esanahiak landu behar dira, lehenengo eta behin, eta termino horien artean dauden erlazioak aztertzea komeni da. Esate baterako, argitu beharko da zer diren gertaera segurua eta ezinezko gertaera, zer diren gertaera probableak eta inprobableak, bai eta gertaera posibleak eta inpossibleak ere. Adibidez, eguraldiaren iragarpenaren inguruan mota honetako galderak planteatu daitezke:

- Elurra ari duen neguko egun batean egin ditzake 30 °C?
- Ziurra al da neguko egun batean Iruñean 7 °C baino gutxiago egitea?
- Probablea da neguko egun batean Iruñean 7 °C baino gutxiago egitea?
- Probablea da udako egun bero batean denbora luzez iraungo duen euria hastea?

Horrelako galderekin zorizkotasunaren inguruko oinarrizko prozesuak landuko dituzte: termino eta nozio matematiko sinpleen identifikazioa, definitzea eta ezagutzea; nozio horien artean dauden harremanak eta erlazioak aztertuko dituzte; eta azkenik, operatu egingo dute zorizko balioekin, hots, zenbakizko probabilitateak esleituko dituzte eta horiekin eragiketak egingo dituzte.

ARIKETA. Orain arte esandakoaren harira, eta irakurketarekin jarraitu aurretik, proposa itzazu galderak zorizkotasunari buruzko oinarrizko terminoak identifikatzeko, erlazionatzeko eta operatzeko.

Bestalde, mahai-joko askotan aurki ditzakegu zorizko egoerak. Partxisean jolastean, adibidez, dadoan ateratako balioak baldintzatu egiten du gure jokaldia. Karta-jokoetan ere, norberak hautatutako estrategia alde batera utzita, zoriz banatzen dira kartak eta egokitzen zaizkigun karta horiek baldintzatu egiten dute jolasean aurrera egiteko ditugun aukerak.

Datozen lerroetan zorizko zenbait fenomeno aztertzen dira. Analisiak aurrera egin ahala, zorizko jardueretan zatiki eta ehunekoei dagokienez egiten den erabilera bistan geratuko da.

3.2.1. Ereduekin erabilera esperimentuetan

Haurrek txanponen tiraldi ugari egin dituztenean justifikaturik dago eredu dinamiko bat baliatzea. Azken batez, haurrek akzioa osatu dute, eta nekeza da eskuz tiraldi ugari egitea. 3.1. atalean egindako esperimentua simulatzen duen eredu dinamiko baten pantaila ikus daiteke 7. irudian⁹. Baliabide horri esker, botoi bati sakatuz simulatzen dira txanponaren jaurtiketak, eta softwareak zenbatu egiten ditu tiraldi kopurua, *ardoak*, *ogiak*, boladen kopurua eta boladarik luzeena zein izan den. Haurrek binaka erabiliko dute baliabide hori, batek eredu manipulatu duen bitartean, bigarrenak lanerako koadernoan idatzi beharko baititu pantailan agertzen diren datuak; ondoren, txandakatu egin daitezke.

7. irudia. Simulazioa eredu dinamiko baten bidez.



1. *Aldez aurreko hipotesiak.* Jarduera hau benetako txanponen jaurtiketen segida denez, aurreko hipotesiek indarrean jarraitzen dute. Hala ere, galdera berriak planteatu daitezke, hala nola, 500 jaurtiketa egindakoan, zein izango den ardoen eta ogien arteko proportzioa, etab.
2. *Esperimentua aurrera eramateko.* Haurrek manipulatu egiten dute eredu dinamikoa, atal honen sarreran adierazi den baldintzetan. Haurrek binaka egingo dute lan, batek eredu dinamikoa manipulatu duen bitartean, bigarrenak datuak transkribatuko ditu lanerako koadernoan, eta ondoren rolak trukatu dituzte.

9. Baliabidearen esteka, hemen: <https://www.geogebra.org/m/rzwpqzsf>

3. *Datuen bilketa*. 8. taulan laburbildu dira baliabide horren bidez egindako zenbait tiraldi. Haur bakoitzak 10 tiraldiren informazioa jaso du, eta bere bikotearekin txandak eginez, bikotearen artean 100 tiraldiren informazioa lortu dute. Horren ostean, ikasgelako gainerako haurrekin informazioa partekatu dute, eta horrela, ikasle guztien informazioari esker, 500 tiraldiren datu-basea lortu da. 10. irudian, laburbildu egin dira simulazio horietan lorturiko datuak, egindako jaurtiketa kopuruen arabera: 10, 100 eta 500 jaurtiketa egin dira.

8. taula. Esperimentuaren simulazioa, 10, 100 eta 50 jaurtiketa.

Jaurtiketen kopurua	10	100	500
Ardoen kopurua	4	55	248
Ogien kopurua	6	45	252
Boladen kopurua	3	49	201
Boladarik luzeena	3	5	9

4. *Datuen bistaratzea*. Maiztasun absolutuen datu gordinak irudikatzea nekeza izan daiteke, eta horregatik, komeni da maiztasun erlatiboetara jotzea: horrela, bide batez, irakasleak zenbaki arrazionalen inguruko ezagutzak txertatuko ditu jardueran. 3.3. atalean zehaztuko dira zeintzuk diren probabilitatearen nozio formal horiek; momentuz, maiztasun erlatibo horiek proportzionaltasunaren hizkera eta idazkera baliatuz aurkez daitezke, modu intuitibo batean. Horrela, 10 tiraldiko lehenengo zutabean, *ardo* gertaeraren maiztasun absolutua 4 da, eta *ogiena*, 6. Maiztasun erlatiboak adierazteko zatikiak erabiltzen dira, non zenbakitzailean ezartzen den maiztasun absolutuen kopurua, eta, izendatzailean, berriz, orotara izan diren tiraldi guztien kopurua:

$$\text{ardoen proportzioa} = \frac{4}{10} = 0,4 = \%40; \text{ogien proportzioa} = \frac{6}{10} = 0,6 = \%60$$

Ehun tiraldiko bigarren zutabean, hauek dira datuak:

$$\text{ardoen proportzioa} = \frac{55}{100} = 0,55 = \%55; \text{ogien proportzioa} = \frac{45}{100} = 0,45 = \%45$$

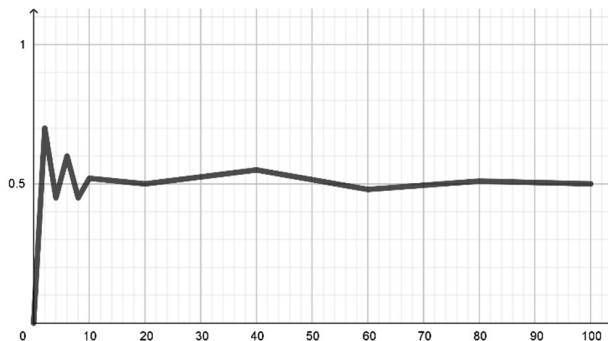
Eta bostehun tiraldiko azken zutabean, berriz:

$$\text{ardoen proportzioa} = \frac{248}{500} = 0,496 = \%49,6; \text{ogien proportzioa} = \frac{252}{500} = 0,504 = \%50,6$$

Simulazioan lortu diren emaitzekin gertatzen den bezala, saiakera kopurua handitu ahala, oinarritzko gertaeren maiztasun erlatiboak probabilitate teorikora geroz eta gehiago hurbiltzen direla egiaztatzen da, hots, 0,5era

hurbiltzen doazela agerian geratuko da. 8. irudian, txanponekin 100 jaurtiketa arte egindako esperimentu batean *ardoen* gertaeraren maiztasun erlatiboak irudikatzen dira.

8. irudia. Esperimentuaren simulazioa, 100 jaurtiketa.



5. *Aieruak eta horien balioztatzea.* Maiztasunak adierazteko, haurrek ez dituzte zertan letra abstraktuak (f , h) eta parentesiak erabili. Momentu honetan, garrantzia emango zaio zatikien erabilerari eta esanahiari, zenbaki hamartarren idazkerari, edota ehunekoaren erabilerari. Balioztatze-fase honetan, haurrek hausnartu egin behar dute lorturikoaren inguruan. Esate baterako, ohartuko dira tiraldien kopuru handietarako, ardoen eta ogien kopuruak parekatu egiten direla, eta $1/2 = 0,5$ balioaren hurbil dabiltzala. Irakasleak haurrekin eztabaidatuko du emaitza horrek zein lotura duen kalkulu teorikoarekin: emaitza bakoitza lortzeko, bi aukera daude, eta aldeko kasu bakarra. Zenbaki horien propietateak ere aztertuko dira, besteak beste, haien arteko osagarritasuna: zatikien eta hamartarren adierazpena erabiltzen denean, ardoen eta ogien arteko baturak unitatea emango du beti; ehunekoak baliatzen direnean, baturak 100 emango du; etab.

$$\frac{248}{500} + \frac{252}{500} + \frac{500}{500} = 1; 49,6 + 50,4 = 100$$

Probabilitate teorikoak, beraz, proportzio baten gisa jokatzeko du, eta proportzionaltasunaren nozio hori izango da, hain zuzen ere, haurraren heldulekua probabilitatearen nozio berriak ulertzeko. Adibidez, txanpon bat 10.000 bider botatzen bada, 5.000 ardo ateratzea espero da, era berean, ogien itxaropena ere 5.000 da. Hala ere, informazio honek ez digu emaitzen ordenari buruzko daturik ematen, hau da, ezin da jakin 10.000 jaurtiketa horietako bakoitzean zer gertatuko den.

ARIKETA. Diseina ezazu aurrekoaren antzeko jardura bat. Oraingoan, bi txanpon erabiliko dira: txanponetako bat ongi orekatu da, baina bestea ez; honenbestez, alborapena du *ardoen* alde. Proiektuaren helburua izango da alborapena duen txanpona zein den aurkitzea.

3.2.2. Txanpon baten jaurtiketa lauki-sarean

Zorizko fenomenoak aztertzeko esperimentuetan, txanpon-tiraldiaren emaitza bera ez den beste ezaugarri bat erabil daiteke. Esate baterako, txanpon mota bakoitzak diametro jakin bat duenez, lauki-sare batean jaurtitzean bi oinarritzko gertaera egongo dira: «marra ukitzea», edota «marra ez ukitzea». Esperimentu hori proiektu baten egituraren barnean azter daiteke, eta bertan lantzen dira matematikako bi prozesu: zorizko nozioak identifikatzea eta nozio horiek erlazionatzea. Enuntziatua honen antzekoa izan daiteke:

Paper batean 4 cm x 4 cm neurriko karratuak dituen lauki-sarea egingo dugu, 7 karratuko oinarria eta 5 karratuko altuera izango ditu lauki-sare horrek. Paper horren gainera euroaren 2 zentimoko txanpon bat (2 cm-ko diametroa) erortzen uzten badugu, txanpona «marra ukituz» erori daiteke edo «marra ukitu gabe». $G = \{Txanpona marra ukitu gabe erori da\}$ gertaeraren probabilitatea aurkitu nahi da.

1. *Aldez aurreko hipotesiak.* Proiektuaren egituraren barnean, lehenengo eta behin, ikasleek euren hipotesiak egingo dituzte, eta ondoren, hipotesi horiek egiaztatu egin beharko dituzte esperimentua gauzatuz. Hasierako hipotesi horien barnean, ikasleek eztabaidatu beharko dute ea aztertu nahi den G gertaera hori segurua den, ezinezkoa, probablea, inprobablea, posiblea, etab.
2. *Esperimentua aurrera eramatea.* Ikasle, bikote edota talde bakoitzak tiraldien kopuru bat egin dezake, eta ondoren, datuen kopurua emendatzeko, tiraldi guztien datuak amankomunean ipin daitezke. Irudian, esperimentua simulatzen duen eredu bat agertzen da¹⁰.

9. irudia. Txanponaren jaurtitzea, laukien sarea ukituz edo ukitu gabe.



10. Eredu dinamikoa esteka honetan aurki daiteke: <https://www.geogebra.org/m/g8zahecz>

3. *Datuen bilketa.* Datuen bilketa antolatzeko, taulak eta diagramak eraiki litezke, non zehaztuko diren txanponaren erradioa, arrakasten maiztasun absolutuak, maiztasun erlatiboak eta ehunekoak. Horrez gainera, taulako maiztasun erlatiboekin eta ehunekoekin probabilitate esperimentalen hurbiltzeak idatz daitezke zatikiak baliatuz.
4. *Datuen bistaratzea.* Saiakuntza bera askotan eginda, G gertaeraren maiztasun erlatiboak kalkulatu dira. Demagun 30 pertsonak (ikasgela bateko neska-mutilen kopurua) 100 bider egiten dutela bakoitzak saiakuntza hori (guztira 3.000 saiakuntza), eta G gertaera 728 bider gertatu dela zenbatzen dutela. Maiztasun erlatiboa hau izango da:

$$G\text{-ren maiztasun erlatiboa} = \frac{728}{3.000} = 0,24$$

Beraz, ikasle taldearekin, honako ondorio hau atera daiteke: $P(G) = 0,24$. Txanponak % 24ko probabilitatea du marrarik ez ukitzeko.

5. *Aieruak eta horien balioztatzea.* Esperimentua amaitu da, eta orain, lorturiko emaitzen justifikazio teorikoa bilatzea dagokigu. Kasu honetan, azalaren bidezko justifikazio teoriko bat bila daiteke. Lauki-sarean 35 karratu daude, eta karratu bakoitzaren azalera 16 cm^2 -koa da; beraz, azalera osoa 560 cm^2 -koa da. Orain, erabaki beharko dugu G gertaeraren aldeko azalera zenbatekoa den, zatiketa egin ahal izateko. Karratu bakoitzaren barnean, txanponak ezin ditu marra bertikalak edota horizontalak ukitu, eta txanponaren erradioa zentimetro batekoa denez, $2\text{ cm} \times 2\text{ cm}$ -ko azalera batean koka daiteke txanponaren zentroa, marra horiek ebaki gabe. 35 karratu daudenez, gertaeraren aldeko azalera 140 cm^2 -koa da. Horrela, G gertaeraren aldeko probabilitate teorikoa laurden batekoa da:

$$P(G) = \frac{140}{560} = 0,25; \%25$$

3.3. PROBABILITATEAREN ELEMENTUAK

Zorizko esperimentu bat N bider egin bada, G gertaera bat gertatzen den aldi kopuruari *Gren maiztasun absolutua* esaten zaio, eta $f(G)$ izendatzen da. Era berean, *Gren maiztasun erlatiboa* G gertatzen den aldien proportzioari esaten zaio eta, $h(G)$ izendatzen da.

$$h(G) = \frac{f(G)}{N}$$

Zorizko esperimentu bat behin eta berriro egitean, gertaera jakin baten maiztasun erlatiboak, $h(G)$, balio desberdinak hartzen ditu aldi bakoitzean. Balio horiek, hasieran, aldaketa handiak izaten dituzte, baina gero, apurka-apurka, balioak

orekatu egiten dira (gero eta gutxiago oszilatzen dute). N asko hazten denean, *Gren probabilitatea* balio jakin batera hurbiltzen da, $P(G)$ ra. Hau da, esan daiteke probabilitate teorikoa maiztasun erlatibo horien limitea dela, saiakeren kopuruak infinitura egiten duenean.

Zenbaki handien legeak, hain zuzen ere, honako hau dio:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} h(G) = P(G)$$

Horrexegatik, ogien eta ardoen esperimentuan (3.2.1. atala), N ren balio handietarako, hau da, esperimentuaren saiakuntza asko egiten direnean, $h(ogia)$ eta $h(ardoa)$ maiztasun erlatiboak $1/2 = 0,5$ balioaren inguruan orekatzen dira. Ondorioz, «txanpona jaurtitzea» esperimentuan *ogia* nahiz *ardoa* ateratzeko probabilitateak 0,5 dira. Hala ere, kontuan hartu behar da probabilitateak, orokorrean, ehunekotan adierazten direla; beraz, %50eko probabilitateari buruz hizketan ariko ginateke aurreko bi kasuetan.

Maiztasun erlatiboekin gertatzen den bezala, edozein probabilitatek 0 eta 1 arteko balioa hartzen du. Gainera, zorizko esperimentu baten oinarritzko gertaera guztien probabilitateen baturak 1 ematen du. Aurreko adibidearekin jarraituz, txanpon bat jaurtitzearen esperimentuan propietate hori betetzen dela ikus daiteke.

$$P(O) + P(A) = 0,5 + 0,5 = 1$$

Esperimentu baten oinarritzko gertaera baten probabilitatea ezagututa, esperimentu hori errepikatuz gero *oinarritzko gertaera hori zenbat aldiz ematea espero den* kalkula daiteke. Txanpon bat 10.000 bider jaurtitzean, zera espero da:

$$P(ardo) \times 10.000 = \frac{1}{2} \times 10.000 = 5.000$$

Beraz, 10.000 jaurtiketetatik 5.000tan ardoa ateratzea espero da. Orokorrean, N aldiz errepikatzen den esperimentu batean, oinarritzko gertaera bat zenbat aldiz ematea espero den aurreikusteko honako formula honi jarraitu behar zaio:

$$P(\text{oinarritzko gertaera}) \times N$$

Maiztasun erlatiboak aztertzerakoan, zatiki gisan ezarri dira gertaeren probabilitateak, ehuneko bat lortzeko. Ehuneko horrek adierazten du, funtsean, gertaera hori «zein litekeen den». Probabilitateak kalkulatzeko arau horri berari ikuspegi teoriko batetik aztertzen zaionean, *Laplaceren legea* esaten zaio. Laplaceren legea erabil daiteke oinarritzko gertaera guztiek (lagin-espazioko elementuek) probabilitate bera dutenean. Hau da, gertaerak *ekiprobableak* direnean. Adibidez, txanpon bat jaurtitzean, aukera bera dago ogi ala ardo ateratzeko, eta dado bat botatzean zenbaki guztiek dute irteteko aukera bera, hots, seitik bat, $1/6$.

Laplaceren legea gertaera zehatz baten probabilitatea kalkulatzeko erabiltzen da. Gertaeraren *aldeko kasuak* (gertaera hori betetzen duten oinarritzko gertaera guztiak) eta *kasu posible guztiak* (lagin-espazioko oinarritzko gertaera guztiak) kontuan hartuaz probabilitateak kalkulatuko ditu.

$$P(\text{gertaera bat}) = \frac{\text{aldeko kasuen kopurua}}{\text{kasu posibleen kopurua}}$$

Esate baterako, bi dado jaurtitzean, esperimenduaren lagin-espazioak oinarritzko 36 gertaera posible ditu: (1,1), (1,2), ..., (5,5), ..., (6,6), eta gertaera guztiek dute probabilitate bera: 1/36. Ondorioz, mota honetako galderei erantzuteko Laplaceren legea erabili ahalko da:

- Zein da lehenengo dadoan 1a eta bigarrenengan 6a lortzeko probabilitatea?
- Zein da lehenengo dadoan 3a lortzeko probabilitatea?
- Zein da bi dadoetan zenbaki berdina lortzeko probabilitatea?

Jolasaren arabera, aztertu nahi den aldagaia beste bat izan daiteke, esate baterako, dadoak botatzean ateratzen diren emaitzen batura aztertzea interesgarri gerta daiteke. Kasu horretan, «*zein da dadoen batura 4 izateko probabilitatea?*» galderaren gisakoak egin daitezke, eta horrek esperimenduaren lagin-espazioa aldatzen du. Esperimentu berriaren lagin-espazioa honakoa izango litzateke: {2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12}. Kasu honetan, oinarritzko gertaera guztiak ez dira ekiprobableak; beraz, «batura 2 izatea», «batura 7 izatea»... gertaeren probabilitateak kalkulatzeko ezingo da Laplaceren legea erabili.

Laplaceren legea erabili ahal izateko, {(1,1), (1,2), ..., (5,5), ..., (6,6)} lagin-espazioa erabili beharko da, oinarritzko gertaera horiek ekiprobableak direlako, eta lehenago oinarritzko gertaeratzat jo ditugunak, «batura 2 izatera», «batura 7 izatea», etab., gertaera konposatuak izaera hartzen dutelako orain:

$$\text{«batura 7 izatea»} = \{(1,6), (2,5), (3,4), (4,3), (5,2), (6,1)\}$$

$$P(\text{batura 2}) = \frac{1}{36}; P(\text{batura 7}) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}; P(\text{batura 10}) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$$

+	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Ondorioz, Laplaceren legea berehala erabili aurretik, esperimentuaren oinarriko gertaeren izaera aztertu behar da. Laplaceren legeak probabilitate teorikoa eman-go digu, betiere, oinarriko gertaera guztiak ekiprobableak direla ontzat ematen baldin badugu. Txanpona edo dadoa akastuna bada, edota bestelako objektu irregularrekin esperimentatzen badugu, adibidez, txintxetarekin, probabilitatea ebaluatzeko *Zenbaki handien legea*, eta ondorioz, maiztasun erlatiboak erabili beharko dira, ezinbestean.

ARIKETA EBATZIA. Mota bereko 100 txintxeta 10 bider erortzen uzten dira 1.000 emaitza lortuz. Esperimentua eginda hauek dira lortu diren emaitzak: 243 txintxeta punta gora erori dira, eta 757 txintxeta txapel gora. Honenbestez:

$$f(\text{punta}) = 243; f(\text{txapela}) = 757$$

Maiztasun erlatiboek probabilitatea estimatzeko balio dute:

$$P(\text{punta}) \approx h(\text{punta}) = 0,243; P(\text{txapela}) \approx h(\text{txapela}) = 0,757$$

Zenbaki handien legearen arabera, zenbat eta saiakuntza gehiago egin, orduan eta probabilitate teorikoaren estimazio hobea lortuko da.

Ikasleen gaitasun matematikoez ari garenean, zorizko fenomeno eta esperimentuen analisiak balio behar du, batez ere, probabilitateen inguruan ditugun uste okerrak eta ohiko akatsak identifikatzeko eta horiek zuzentzeko. Esate baterako, zenbaki handien legeak dio txanpon bat askotan botata lortuko diren ogien eta ardoen kopuruak, gutxi gorabehera, erdibana izango direla. Hori horrela izanagatik ere, ezinezkoa da auresatea zehazki zein ordenatan agertuko diren emaitza horiek. Egoera horrek sortzen du *Jokalariaren falazia* deiturikoa.

Jokalariaren falazia. Txanpona jaurtitzerakoan, jokalaria pentsa dezake txanponak «memoria» duela, eta uste oker horrek sortzen du jokalariaren falazia; txanponak ez baitaki aurreko saiakeretan zer atara den. Esate baterako, lehenengo 6 saiakeretan *AAOAAA* lortu badugu, hurrengoan *O* ateratzeko probabilitate handia dagoela uste izaten dugu, baina ez da egia. Saiakera bakoitzean ogia ala ardoa ateratzeko aukera bera dago, 1/2 alegia.

Zorizko jokoetan zenbaki bat zozketatzen denean, zenbaki *polit* eta *itsusien* artean bereizketa psikologikoa egiteko joera dugu. Joera horrek okerreko usteetara eramaten gaitu, oharkabea. Muturreko kasuetan, superstizioak asmatzen dira zenbaki itsusien inguruan: zorte txarreko zenbakiak, zenbaki magikoak, etab. Loteriako apustuak dira fenomeno horren adierazgarri garbienak.

Zenbaki itsusien falazia. Loteriako apustuetan, uste izaten dugu 22.222 zenbakia ez dela loterian aterako, *zenbaki itsusia* delako. Hau da, loteria-ontzitik bolak ateratzen direnean, pentsatzen dugu zaila dela 2 digitua bost aldiz jarraian agertzea; aldiz, sinesten dugu 13.248 zenbakiak aukera gehiago dituela, digituak ez dituelako errepikatzen. Laplaceren legearen arabera, baina, bi zenbaki horiek probabilitate bera dute: 22.222 ateratzeko probabilitatea 1/100.000 da, izan ere, aldeko kasu 1 eta 100.000 kasu posible daude; eta gauza bera esan daiteke 13.248 zenbakiaz ere.

Zenbaki itsusien falaziak zerikusia du egiazkoa den beste propietate matematiko batekin, eta okerreko ustean eragin nabarmena du bien arteko nahasketak. Esan bezala, 22.222 eta 13.248 zenbakiak aukeratuak izateko aukera berdin-berdinak dituzte. Aldiz, orokorrean aztertuko bagenu beste bi gertaera hauek: «bost zifrak berdinak izatea» eta «bost zifrak ezberdinak izatea», orduan bai, orokorrean, errazagoa da bost zifrak ezberdinak dituen zenbaki bat aukeratu izatea, bost zifrak berdinak dituen bat aukeratu izatea baino. Informazio horrek, baina, ez dio loteria-erosleari ezertan laguntzen, baieztapen horrek ez baitu zehazten zein bost zifra ezberdineko txartela aterako den garaile.

$$P(\text{zifra guztiak berdinak izatea}) = \frac{10}{100.000} = 0,0001$$

$$P(\text{zifra guztiak ezberdinak izatea}) = \frac{30.240}{100.000} = 0,30240$$

Esan bezala, loteriako 100.000 txartel daude, orotara. Zifra guztiak berdinak izan daitezen, 10 aldeko kasu besterik ez daude, hots, 00000tik 99.999ra. Zifra guztiak ezberdinak dituzten txartelen kopurua jakiteko, errepikapenik gabeko aldakuntzak erabil ditzakegu: $m = 10$ digitu dauzkagu aukeran, $n = 5$ naka hartzeko, eta errepikapenak ez dira onartzen; honenbestez:

$$A_{m,n} = A_{10,5} = \frac{10!}{(10-5)!} = 10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 = 30.240$$

Bestelako ohiko akatsak izaten dira Laplaceren legea beti aplikatzen saiatzea, baita oinarritzko gertaerak ekuipableak ez direnean ere; edota oinarritzko gertaera bat bitan zenbatzea, esate baterako, bi dadoren jaurtiketan (6,6) gertaera bitan zenbatzea.

3.4. ARIKETAK

1. Hona hemen zenbait esperimentu. Horietako batzuk deterministak dira, eta beste batzuk zorizkoak. Esan ezazu zeintzuk diren zorizkoak, eta hala direnean, zehaztu ezazu esperimentuaren lagin-espazio guztia, hots, oinarritzko gertaera guztiak.
 - a. Lursail karratu baten azalera kalkulatzeko haren aldearen luzera ezaguna izanik.
 - b. Karta sorta batetik karta bat ateratu eta haren paloa zein den ikustea.
 - c. Txanpon bat jaurtiz, futbol-talde bakoitzari zelaiaren alde bat egokitzea.
 - d. Pilota bat goraka botatzea (abiadura zehatzarekin) eta lortzen duen altuera maximoa aztertzea.
 - e. Bi dado bota eta zenbaki berdina edo ezberdina lortzen den ikustea.

- f. Kutxa batean 4 bola gorri, 3 urdin, 2 berde eta beltz bat daude. Boletako bat atera eta haren kolorea idatzi da paper batean.
 - g. Txintxeta bat airera bota eta punta gora erortzen ote den ikusiko dugu.
 - h. Poltsa batean 10 bola gorri daude. Bola bat atera eta haren kolorea idatzi da paper batean.
 - i. Dodekaedro forma duen 12 aldeko dado bat airera jaurti da, eta lortutako emaitza idatzi dugu.
2. Zorizko esperimentuetan, lehenengo eta behin, identifikatu egin behar dira aztertuko den aldagaia eta aldagai horren lagin-espazioa. Bigarren pauso gisa, eta probabilitate kalkuluetan propio hasi aurretik, komeni izaten da erlazioak egitea.
- a. Kutxa batean nahasi ditugu bola gorri bat, 50 bola berde eta 200 bola urdin. Bola gorria, berdea, urdina eta zuria ateratzeko probabilitateen artean, esleitu horietako bakoitzari etiketa hauetakoren bat: ezinezko gertaera, oso probabilitate gutxiko gertaera, probabilitate txikikoa, probabilitate handikoa, edota gertaera segurua.
 - b. Hiru kutxatan bola gorriak eta urdinak nahastu ditugu: lehenengo kutxan, bi bola gorri eta bi bola urdin daude; bigarren kutxan, hiru bola gorri eta bi urdin; eta hirugarrenean, lau bola gorri eta hiru urdin. Ordena itzazu kutxa horiek bola gorria ateratzeko probabilitatearen arabera.
 - c. Aurpegietan 1etik 12rako zenbakiak dituen dodekaedro formako dadoa jaurti dugu, eta ordenatu egin nahi ditugu honako gertaera konposatu hauek, haien probabilitatearen arabera: «5 baino gutxiago ateratzea», «4 baino gehiago ateratzea», «zenbaki bakoitia ateratzea», «3ren multiploa ez ateratzea».
 - d. Loteriako sari nagusian, jakin nahi dugu gertaera hauetatik zeintzuk diren litezkeenak: «azken zifra 4 baino txikiagoa izatea», «zenbaki bikoitia izatea», «azken zifra 5 baino handiagoa izatea».
3. Matematika eta literatura ez daude batere urrun. Letrekin zorizko elkartzeak eginez jolasten dira idazleak. Azter itzazu honako egoera hauek:
- a. «JOLAS» hitzaren letretako bakoitza papertxo batean idatzi dugu. Paperak poltsa batean sartu ditugu, eta zoriz atera dugu paperetako bat: deskribatu zorizko saiakuntza honetako lagin-espazioa; deskribatu «kontsonantea lortu» gertaera.
 - b. «PROBABILITATE» hitzaren letretako bakoitzarekin beste horrenbeste egin dugu: deskriba itzazu zorizko saiakuntzaren lagin-espazioa eta «kontsonantea lortu» gertaera.

- c. Idazle batek 120 orrialdeko liburu bat idatzi du, eta zuzentzaileak zenbatu egin ditu orrialde bakoitzean zenbat akats dauden. Emaitzak taula honetan zehaztu dira:

Akatsen kopurua	Orrialdeen kopurua
0	58
1	42
2	16
3	3
4	1

Zorian orrialde bat aukeratuz gero: Zenbateko probabilitatea dago akatsik ez edukitzeko? Zenbateko probabilitatea dago bi akats edukitzeko? Eta akatsen bat edukitzeko? Eta hiru akats baino gehiago edukitzeko?

- d. 120 pertsonari galdeketa bat egin zaie irakurtzea edo telebista ikustea nahiago duten galdetzeko. Emaitzak hauek dira: (1) 32 pertsonak irakurtzea eta telebista ikustea gustuko dute; (2) 92 pertsonak irakurtzea gustuko dute, eta (3) 47 pertsonak telebista ikustea atsegin dute. Pertsona horietako bat zoriz aukeratzeko badugu: Zein da telebista ikustea gustukoa ez duen pertsona izateko probabilitatea? Zein da irakurtzea gustukoa duen pertsona izateko probabilitatea, telebista ikustea ere gustukoa duela jakinik? Zein da irakurtzea gustukoa duen pertsona izateko probabilitatea?
4. Zorizko fenomenoak aztertzeke, txanponak airera jaurtitzea baliagarri gerta daiteke, horiekin probabilitateak kalkulatzeko. Hainbat eta hainbat esperimentu simula daitezke, aukeraturiko hasierako baldintzen arabera:
- Txanpon bat hiru bider bota dugu airera, eta lorturiko emaitzak apuntatu ditugu. Zehaztu ezazu lagin-espazioa, eta ondoren, gertaera hauen probabilitateak kalkula itzazu: *Ogi* bat eta bakarra ateratzea; gutxienez *ogi* bat ateratzea; zehazki hiru *ogi* ateratzea.
 - Txanpon bat lau bider botatzen badugu, zenbateko probabilitatea dago zehazki bi *ogi* lortzeko? Eta gutxienez bi *ogi* lortzeko?
5. Zorizko fenomenoak aztertzeke, dadoak airera jaurtitzea baliagarri gerta daiteke, horiekin probabilitateak kalkulatzeko. Hainbat eta hainbat esperimentu simula daitezke, aukeraturiko hasierako baldintzen arabera:
- Bi dado airera jaurtitzen ditugunean, kalkulatu zer probabilitate dagoen: puntuen arteko biderkadura 5 izateko; puntuen arteko biderkadura 6 izateko; puntuen arteko biderkadura 4 izateko.
 - Kalkulatu zenbatekoak diren ondo eginda dagoen dado baten botaldiei dagozkien honako probabilitate hauek: emaitza 3ren multiploa da; emaitza 1 baino handiagoa da; emaitza 5 baino txikiagoa da; emaitza 1 baino txikiagoa da.

- c. Dado bat 200 aldiz jaurti dugu airera. Zein da 145. jaurtiketan 4 ateratzeko probabilitatea? Zein da 200 jaurtiketa horietakoren batean 4 ateratzeko probabilitatea? Zein da 200 jaurtiketa horietan balio bera ateratzeko probabilitatea?
6. Zorizko fenomenoak aztertzeko, sorta batetik kartak ateratzea baliagarri gerta daiteke, horiekin probabilitateak kalkulatzeko. Hainbat eta hainbat esperimentu simula daitezke, aukeraturiko hasierako baldintzen arabera:
- Karta sorta batetik bi karta ateratzen dira; bata bestearen ondoren, baina hartu aurretik lehenengoa sortara itzultzen da. Kalkulatu hurrengo gertaeren probabilitatea: bi kartak kopak izatea; koparik ez lortzea.
 - 40 kartako multzo batetik bat atera dugu. Esan zenbateko probabilitatea dagoen: 5eko bat izateko; zaldizko bat izateko; urrea edo kopa izateko; ezpata ez izateko.
 - Mahai baten gainean lau karta hauek ditugu: 5eko kopa, 1eko urrea, 4ko bastoia eta 2ko urrea. Multzotik zoriz beste karta bat atera eta zer zenbaki duen ikusiz gero, zenbateko probabilitatea egongo da bost karten arteko batura 15 izateko? Eta 16 izateko?
7. Polyak esaten zuen nola zorizko ia edozein fenomeno simula daitekeen koloretako bolak poltsetatik zoriz ateraz. Bolen eta haien koloreen kopuruak aldatuz, probabilitate-kalkuluan trebatzeko testuinguru aberats bat lortzen da.
- Poltsa batean 6 bola gorri, 4 urdin, 7 berde, 2 hori eta beltz bat daude. Zorian bola bat atera dugu. Zenbateko probabilitatea dago: Urdina izateko? Beltza ez izateko? Gorria edo berdea izateko? Ez horia eta ez beltza izateko?
 - Kutxa honetatik bola bat atera eta zer zenbaki eta kolore dituen apuntatuko dugu. Esan zenbatekoa den honako gertaera hauen probabilitatea: zenbaki bikoitia duen bola berdea ateratzea; zenbaki bikoitia duen bola gorria ateratzea; bola horia edo gorria ateratzea; 7 baino zenbaki handiagoa duen bola ateratzea.



Oharra: bola berdeak 2,4,5 eta 9 zenbakidunak dira; bola gorria 1 zenbakiduna da, bola horiak 3,6,8,10 eta 11 zenbakidunak dira eta 7 zenbakia duen bola beltza da.

8. Ikaslearen bizitza hoberena da. Hori horrela izaten da, lanerako pausoa egin behar izaten den arte.

- EAEn eta Nafarroan, Haur eta Lehen Hezkuntzako irakasle izateko oposizioetan, idatzizko azterketan 76 gai daude. Azterketaren egunean, gai horietako 5 hautatzen dira zoriz, eta hautagai bakoitzak 5 gai horietako bat garatzen du, berak nahi duen hori. Hautagai batek 55 gai ikasi ditu oposizioa prestatzeko. Esan zenbateko probabilitatea dagoen: ikasi duen gairen bat aukeran izateko; ikasi ez dituen bost gairen artean hautaketa egin behar izateko.
- Bi ikasle jota aspertuta daude matematikako klasean. Denbora ahal modura pasatzeko, jolas bat asmatu dute: bakoitzak 1etik 9ra bitarteko zenbaki bat pentsatu du, eta paper batean idatzi dute; ondoren, egiaztatu egiten dute pentsatutako zenbakia berdina ote zen. Zein da bakoitzak zenbaki ezberdina pentsatzeko probabilitatea? Zein da biek zenbaki bera pentsatu izanaren probabilitatea?
- Unibertsitate bateko Hezkuntza Graduetan, ikasleak honela daude banatuta:

HHko Gradua	LHko Gradua	HH Gradua Ingelesez	Bigarren Hezkuntzako Masterra	Bigarren Hezkuntzako Masterra Ingelesez
210	250	260	220	140

Zoriz ikasle bat aukeratzen badugu, kalkula ezazu zenbateko probabilitatea dagoen: HHko Gradu batekoa izateko; HH edota LHko Graduetakoa izateko; Bigarren Hezkuntzako Masterrekoa izateko; ikasketak ingelesez egiteko.

9. Matematikak baliagarriak dira edonon, eta bereziki ongietorriak dira osasun-kontuetan lagundu dezaketenean.

- Ospitale bateko telefonora deitzean erantzunik jaso den edo okupatua zegoen aztertu da esperimendu batean. 1.000 deitik 324an, telefonoa okupatuta zegoen. Berriz deituz gero, zer probabilitate dago ospitaleak erantzuteko?
- Gaixotasun bat sendatzeko erabiltzen diren tratamenduak aztertu dira, honako taula honetan. Zoriz tratamenduetako bat jaso duen pertsona bat aukeratzen badugu: Zein da sendatu den pertsona bat izateko probabilitatea? Zein da tratamendu zaharra hartuta sendatu ez den pertsona bat izateko probabilitatea? Zein da sendatu ez den pertsona izateko probabilitatea?

	Sendatuak	Ez direnak sendatu	
Tratamendu berria	60	21	81
Tratamendu zaharra	43	36	79
	103	57	160

- c. Azterketa bat egin ostean, konprobatu da sendagai jakin batek ez duela inolako eraginik hura hartzen duten gaixoen % 0,2ren kasuan. Zoriz gaixo bat hautatzen badugu, zein da botikak eragina izateko probabilitatea? 2.500 gaixoen lagin bat hartzen badugu, horietako zenbati ez dio botikak eragingo?

4. Estatistika

Matematikaren adar soil bat ala aparteko zientzia bat, zer ote da Estatistika? Estatistikak zenbakiak erabiltzen ditu datuen multzo handietatik ondorioak lortzeko, baina, aldi berean, berezko metodologiak erabiltzen ditu. Metodo matematikoa deduktiboa omen da; estatistikak, berriz, datu partikularrak antolatuz egiten ditu inferentziak. Edonola ere, estatistikaren metodo horiek guztiek badute oinarri teoriko eta matematiko sendo bat.

Eskolan, estatistikako proiektuek berebiziko interesa dute, proiektu horiek lantzerakoan, haurrek gaitasun matematikoak eta gaitasun orokorrak garatzen dituztelako. Egoera erreal batean, aldagai estatistikoak identifikatu eta bakandu beharko dituzte, datuen bilketak egin eta antolatu, taulak eta diagramak eraiki, eta azkenik, lorturiko emaitza horiek interpretatu. Bien bitartean, zenbakiak erabili dituzte eta horien arteko eragiketak egin dituzte, testuinguru jakin batean. Maiz aipatzen da eskolako aritmetika ez dela landu behar testuingururik gabeko prozesu errepikakor baten gisara; bada, nekez aurkituko du irakasleak testuinguru aproposagorik haurrek zenbakien manipulazioari esanahi bat eman diezaioten.

Honenbestez, irakasleen trebakuntzan, estatistikari balio estrategikoa eman beharko litzaioke, LH guztian zehar eduki matematikoen artikulazioa errazten duen alorra delako, eta horrez gainera, diziplinen arteko loturak errazten dituelako: estatistiko proiektuak egiten dira natura- edota gizarte-zientziei loturik, bereziki.

Lanbide bakoitzak bere berezitasunak ditu, eta estatistikan teknikari izango den profesional batek menderatu beharko du, testuinguru bakoitzaren arabera eta eskura dituen datuen ezaugarrien arabera, zer teknika estatistiko erabili beharko den. Horrez gainera, teknika horiek arin maneiatu beharko ditu eta kalkuluak azkar egin beharko ditu, maiz, tresna teknologikoen ezinbesteko laguntzarekin. Irakasleak trebatzen ditugunean ere, batzuetan irudi luke teknikari estatistikoak trebatzen gabiltzala. Irakasle batek oinarrizko estatistika menderatu behar duela egia den arren, LHko etapan argitu beharko da estatistikak, ororen gainetik, balio didaktikoa duela.

Kapitulu honetan, ohi bezala, adibide bat aurkeztuko da lehenengo eta behin, «Lasterketa» izeneko. Adibide horretan, zehaztu egingo dira, beste behin ere, estatistikako proiektu batek izan eta errespetatu behar dituen atalak: jolastu aurretik, ikasleek euren hipotesiak egin beharko dituzte, hau da, gertatuko denaren gaineko euren usteak plazaratu beharko dituzte, ondoren, errealitatean gertatu den horrekin

kontrastea egin ahal izateko; hipotesiak plazaratu ostean, esperimendua gauzatu beharko dute, eta datuen bilketa osatu beharko dute; datu ugari bilduko dira, eta horiek egoki interpretatu ahal izateko, bistaratu eta adierazi egin beharko dira taulak eta diagramak baliatuz; azkenik, proiektuaren atal guztiak osatu direnean, hasierako usteak balioztatu egingo dira. Proiektu baten emaitzek balio behar diote ikasleari etorkizunean aurreikuspenak egiteko eta erabakiak hartzeko irizpideak eraikitzeke.

Aztertuko den aldagai estatistikoaren arabera, zenbaki multzo bat edo beste erabiliko da. Era berean, kalkulatu nahi diren parametroen arabera, eragiketa bat edo beste egin beharko da. Irakasleak aurreikusi egin beharko du zer zenbakiren erabilera motibatzen duen proiektu bakoitzak.

Kapitulua amaitzeko, mobilizatu diren ezagutza estatistikoetan sakontzen da, hala nola aldagaien izaeran, laginketak egiteko dauden moduetan, maiztasunen banaketak nola egiten diren, zer taula edo grafiko balia daitekeen maiztasun horiek adierazteko, eta zentralizazio- eta sakabanatze-parametroak eta posizio neurriak nola kalkulatzaren diren. Horien erabileran trebatzeko, ariketa sorta bat gaineratzen da.

Kapitulu honekin ixten da liburu honen lehenengo zatia, zeina konbinatoriari, probabilitateari eta estatistikari eskaini zaien. Datozen kapituluetan, geometriaren irakaskuntzari helduko zaio.

4.1. LASTERKETA

Lasterketaren jolasaren bidez (Wilhelmi, 2004: 1-13), modu integratu batean sar daitezke estatistikan klabeak diren honako nozio hauek: *zenbaketa sistematikoa, maiztasunak, probabilitatea eta datuen bilketa, antolaketa, adierazpena eta analisisa*. Horrez gainera, jolas honen egiturak errespetatu egiten ditu LHko *estatistikako proiektu* batek izan behar dituen atalak eta momentuak.

Jolas hau bi pertsonaren artean jolasten da, eta jolasa garatzeko, hamaika lerroko eta hamaika zutabeko taula bat erabiltzen da (10. irudia). Lerroak zenbakitu egin dira, eta lehenengo zutabean ezarri dira 2tik 12rako zenbakiak; azken zutabean HELMUGA hitza idatzi da. Taula horren gainean jolasteko, beharrezkoak dira bi koloreko bosna fitxa eta bi ohiko dado, 1etik 6ra zenbakiturik.

Hauek dira jolasaren arauak (irakur itzazu ongi, baina ez zaitez oraindik jolasean has):

- Txandaka, jokalarietako bakoitzak 2tik 12rako zenbaki bat aukeratzen du. Horiek dira, funtsean, bi dado jaurtitzean lor daitezkeen emaitza posibleak. Eskura dauden 11 zenbakien artean 10 elkarbanatu direnean hasiko da jolasa. Hamaikagarren zenbakiak «ez du jokatzeko».

- Dadoak jaurtiko dira, eta lorturiko emaitzaren zenbakia duen jokalaria bere fitxa hori lauki bat aurreratuko du. Lorturiko emaitza libre gelditu den zenbakia denean, txanda-pasa egiten da.
- Bere fitxa bat HELMUGARA sartzen duen lehenengo jokalaria irabaziko du jolasa.

10. irudia. Lasterketaren taula.

2											
3											
4											H
5											E
6											L
7											M
8											U
9											G
10											A
11											
12											

4.1.1. Jolastu aurretik, hipotesiak egin

Zorizko aldagaiak eta aldagai estatistikoak tartean dauden proiektuetan, lehenengo eta behin, aldagai horren portaera aurreikusteko saiakera egin behar da. Horrela, jolasaren arauak azaldu ostean, eta jolasarekin berarekin hasi aurretik, hots, esperimentazioarekin hasi baino lehen, aldagaiaren portaera hipotetikoari buruzko galderak egin behar zaizkie hurrei. Esate baterako:

- Zer zenbaki hautatuko duzu lehentasunez?
- Zer zenbaki ez dituzu hautatuko?
- 3aren eta 11ren artean hautatu beharko bazenu, zein hautatuko zenuke?
- 5aren eta 9aren artean hautatu beharko bazenu, zein hautatuko zenuke?
- Zeintzuk dira hobeak, zenbaki handiak ala zenbaki txikiak?
- Dena al da zoriaren mendeko?
- 10 partida jolastuz gero, hautaturiko zenbakietako bakoitzak behin irabaziko al du? Zergatik?
- 100 partida jolastuz gero, hautaturiko zenbakietako bakoitzak 10 aldiz irabaziko al du? Zergatik?

Jaso itzazu 10 partidaren datuak, 11. irudiko taula betez partida bakoitzeko. Bikote berak joka ditzake 10 partidak, edo bestela, 10 bikotek partida bana joka dezakete; lauki bakoitzean zehaztu behar dira fitxa horrek partida jakin batean egin dituen mugimenduen kopurua (fitxa horrek ez badu mugimendurik egin, edo aukeratua izan ez bada, 0 ezarriko zaio; helmugara heldu bada, 10 zenbakia dagokio), eta partida hori zer fitxak irabazi duen.

Behin 10 partidaren datuak lortu ondoren, litekeena da erdiko balioak maiztasun handiagoz mugitu izana¹¹. Bereziki, litekeena da 7. fitxak irabazi izatea partida gehien. Taula horiei behatuz, zenbakien aukeraketan lagunduko duten zenbait ondorio atera daitezke: jokoaren arauak aldatzen ez diren bitartean, eman daiteke balio zentralak maiztasun handiagoz aterako direla aurrerantzean ere, eta horrela, jokalariek lehentasunez hautatuko dituzte balio zentral horiek, muturreko balioen kalterako (2a edo 12a).

Informazio horrekin, has gintezke hasierako hipotesien zuzentasunari buruzko galderei erantzuten ere. Datu horiek zure hasierako intuizioarekin bat datoz? Zure hasierako intuizioak datu hauekin bat ez baldin badatoz, zein beste irizpide hartu beharko da kontuan?

12. irudiko taulan agertzen diren datuak 10 partidetako datu sintetikoak eta laburtuak dira. Hori horrela izanagatik ere, are gehiago labur daitezke, jokaturiko partida guztiei dagokien ezinbesteko informazioa soilik adierazi arte, hau da: Zenbat partida irabazi ditu fitxa bakoitzak? Zenbat mugimendu egin ditu fitxa bakoitzak?

12. irudia. Hamar partidaren datuak bildu.

Pieza	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	Orotara
Mugimenduak												
Irabazlea												

Funtsean, bi zorizko aldagai edo aldagai estatistiko agertzen dira 12. irudiko taulan, «fitxa bakoitzak egin dituen mugimenduen kopurua» eta «fitxa bakoitzak irabazitako partiden kopurua». Horrela, bi aldagai horien *maiztasun absolutua* agertzen da taula horietan, hau da, 2tik 12rako balioetako bakoitza zenbat aldiz agertu den.

Maiztasun absolutuez gain, mugimenduen kopuru totala eta jokaturiko partiden kopuru totala ezagutzen direnez, *maiztasun erlatiboak* ere kalkula daitezke. Azken batez, maiztasun absolutuek esaten digute zenbat aldiz gertatu den gertaera bat; maiztasun erlatiboek, berriz, esaten digute zenbat aldiz gerta zitekeen, edota

11. Wilhelms (2004) 22 partidaren datuen simulazioa aurkezten du adibide gisa (4.-5. or.).

totalarekiko zenbateko proportzioan eman den gertaera hori. Maiztasun erlatiboak 0 eta 1 arteko balioak direnez, aski da kopuru hori 100ekin biderkatzea *ehunekoak* lortzeko.

Informazio horrekin guztiarekin, ohiko maiztasun-aula (13. irudia) bete daiteke.

13. irudia. Maiztasun absolutuen eta erlatiboen taula.

Pieza	Mugimenduen maiztasun absolutua	Irabazitako partiden maiztasun absolutua	Mugi- menduen maiztasun erlatiboa	Irabazitako partiden maiztasun erlatiboa	Mugimenduen %	Irabazitako partiden %
2						
3						
4						
5						
6						
7						
8						
9						
10						
11						
12						
Orotara						

Taula horretako datuekin erraz erantzun daiteke zein den fitxa bakoitzak irabazteko duen *probabilitate enpirikoa*, balio hori irakur daitekeelako bai maiztasun erlatiboan zutabea, baita ehunekoen zutabea ere.

4.1.3. Datuen bistaratzeara eta adierazpena

Jarduera honetan jasotako datuen bistaratzeara orri batean eraikitako taulen bidez egin da. Datuen antolaketa hobetzeko helburuz, ikasleei bete gabeko taulak ematea komeni da. Horrek txukuntasuna mantentzen eta datu-bilketa ordenatua egiten lagunduko die.

Hala ere, haurrei ez zaie zertan eman alde zuretik prestaturiko taula estandarizatu bat. Aldiz, eska dakieke, hasiera batean, haiek nahi duten grafiko edo taula bat eraiki dezatela. Horrelakoetan, adinaren arabera, piktograma batetik abiatuta eraiki ohi dituzte euren grafikoak, hots, aldagai estatistikoak hartzen dituen kategorien arabera marrazkiak erabiltzen dituzte. Behin grafiko pertsonal horiek eraikitzen dituztenean, irakasleak inizatiba hartuko du taula edo grafiko estandarizatuak eraiki ditzaten.

Adibidea. Grafikoekin bezalaxe, zenbakien erabileraren ere antzeko progresio bat gertatzen da. LHko ikasleak guztiak, hau da, zenbakiak adierazteko ohiko sinbologia (1, 2, 3...) erabiltzeko gai dira; noski, ezagutzen dituzten zenbakiak ikasleek adinaren arabera izanik. Ondorioz, eskuragai dituzten taulak ulertu eta betetzeko arazorik ez dute edukiko. Hala ere, datuen bistaratzea paperean eta guztiaren bidez egin aurretik, informazioaren errepresentazioak prozesu bati jarraitzen dio, Haur Hezkuntzan garatzen den sekuentzia izanik. Demagun egoera hau ematen dela: kutxa batean 3 sagar daude eta ikasle batek kutxa zer dagoen galderari erantzun behar dio. Egin daitezkeen datuen bistaratzeak hiru kategoriatan sailkatzen dira eta ikaslearen adinaren edota garapen kognitiboaren arabera dira. Beraz, errepresentazioak egiteko prozesu bat den moduan, azkeneko kategoriatara heltzeko, aurreko kategorietatik pasa behar dute derrigorrean ikasleek. Horrela, adierazpen motak hauek dira: 1) adierazpen konkretua, 2) adierazpen piktorikoa, eta 3) adierazpen abstraktua. Haur Hezkuntzako bigarren zikloan ez dagoen edo zikloko lehenengo urtean dagoen ikasle batek hiru sagarrak hartu, kutxatik atera eta galderaren igoerari erantzuko dizkio. Objektu konkretuen bidez egiten du informazioaren adierazpena, kasu honetan, hiru sagarrak erakutsiz. Datuak bistartzeko modu horri adierazpen konkretua deritzo. Aldiz, haurren adinak gora egin ahala eta haien ahalmen kognitiboa handitzen doala, kutxa dagoena paper batean adierazteko eskatu ahal zaie. Jarduera honekiko erantzunak askotarikoak izan daitezke. Alde batetik, posible da ikasleak 3 sagarrak marraztea, hiru makilatxo irudikatzea (bat sagar bakoitzeko), etab. Adierazpen horiek guztiak piktorikoak dira, irudien bidez adierazten baitira datuak. Bestalde, guztiaren ezagutza duten ikasleek «3» idatziko dute paperean, hau da, modu abstraktuan irudikatuko dute.

Lasterketako datuekin, beraz, grafikoak eraikiko dira, eta grafiko horietan bistaratutako datuek balio beharko dute ikasleek egin dituzten hipotesiak ontzat emateko edo errefusatzeko.

Analisi hori egiteko, hainbat partida jokatu behar dira eta partida horien datuak jaso behar dira. Beste modu batera, zenbait pertsonak jokaturiko hainbat partidaren datuak bil daitezke. Lor itzazu zure ikaskideek jokaturiko 10 partidaren datuak. Zein datu-azterketa izango da esanguratsua?

4.1.4. Aieruak eta horien balioztatzea

Behin jolasaren fase guztiak amaitu direnean, jokalariek *aieruak* formulatzeko gai izan behar du. *Aieru* bat, funtsean, uste bat edo iritzi bat da, baina ez edonolako ustea: datuetan eta esperientzian oinarrituriko fundamentuzko iritzi bat izan behar

du. *Aieru* bat kontraste baten ondorio da, azken finean: partidak jokatu aurretik jokalariai zituen hasierako hipotesien eta partidak jokatu ondoren jokalariai lortu duen informazioaren arteko kontrastea.

Kontraste horretan oinarriturik, hau da, datu-taulen eta diagramen analisiaz baliatuz, jokalariai irizpide bat garatu behar du datozen partidetan zer fitxa aukeratu behar duen erabakitzeke. Hasierako hipotesietan, galderek irizpide hori zehaztera bideratzen dute jokalaria:

- Lehenengo hautatzea badagokizu, zer fitxa hautatuko zenuke?
- Bigarren hautatzea badagokizu, zer fitxa hautatuko zenuke?
- Fitxak hautatzerakoan, zer irizpide baliatuko zenuke?
- Zein hautatuko zenuke lehentasunez, 2a edo 12a?
- 3aren eta 11ren artean hautatu beharko bazenu, zein aukeratuko zenuke?
- Zer zenbaki dira «hobeak»: «handiak», «erdikoak» edota «txikiak»?
- Berdin du zer zenbaki hautatu?
- Dena al da zoriaren mendeko?

Kontraste horren barnean, jokalariai konparatu egin behar ditu galdera horiei hasieran eman dien erantzuna eta analisisia amaitu ondoren eman diena. Aieru horiek plazaratu ostean, baina, aieru horiek balioztatu egin behar dira, egiazkoak edo faltsuak ote diren ziurtatzeko. Horretarako, izaera ezberdina duten funtsezko bi bideri jarraitu dakieke:

- *Balioztatze enpirikoa*. Esperimentua berriz errepikatzen da hasieratik, bigarrenean emaitza bera lortzen ote den egiaztatu ahal izateko. Balioztatze enpirikoaren barruan, hasieratik errepikatzen da prozesu guztia, eta horrela, egiaztatu nahi da bigarren esperimentuan lortu diren datuak lehenengoarekin bat ote datozen. Bigarren esperimendu horretan lortu diren datuak lehenengoarekin bat etorritz gero, aieruetan ezarritako irizpidearen egokitasuna ebidentzia enpirikoek baieztatzen dute. Are, zenbat eta gehiagotan errepikatu esperimentua, eta zenbat eta gehiagotan lortu elkarren artean koherenteak diren emaitzak, orduan eta ziurtasun handiagoa. Balioztatze enpirikoa egiteko modurik ekonomikoena haxe litzateke: hainbat bikotek aldi berean egitea esperimentua, ondoren, analisi ezberdinen emaitzak konparatu ahal izateko.

Lasterketaren jolasaren kasuan, balioztatze enpirikoa honela egin liteke: ikastalde bateko hamar bikoteri (A) eta beste ikastalde bateko hamar bikoteri (B) jolasa eginaraziz, A eta B taldeek jolasaren azterketa osoa egiten dute, zeinek bere aldetik eta elkarren berri izan gabe, eta behin analisi guztia amaitu dutenean, bi ikastaldeak elkartu daitezke euren emaitzak konpara ditzaten. Datu errealak erabiliz gero, eta hamar partidatik gora jolastuz gero analisi bakoitzean, balioztatze enpirikoa arrakastatsua izango da (ia ziur!)

- *Balioztatze teorikoa*. Ez da partida gehiagorik jokatzeko eta ez da esperimendua errepikatzen. Horren partez, jolasaren azterketa teorikoa egiten da, ikuspuntu formal batetik. Balioztatze teorikoan, jakin nahi da zer zenbakik daukan ateratzeko aukera gehien, dadoak bota aurretik. Azken batez, balioztatze enpirikoak emaitza onak eman ditzake aieruak balioztatze orduan, baina haren bitartez ezin da azterketaren sakontasuna ulertu.

Bi dado jaurtitzen direnean, dadoetako bakoitzean 1etik 6rako balio bana lortzen da, bi balio horiek barne. Bikote batean antola daitezke emaitza horiek: esate baterako, «lehenengo dadoan 2 eta bigarren dadoan 3 lortzea» gertaera, (2,3) bikotearekin adieraz daiteke. Honenbestez, 36 aukera posible daude (6×6), baina soilik daude 11 emaitza edo batura posible (2tik 12ra). Bestela esanda, dadoak 36 aldiz jaurtiz gero, *espero daiteke* jaurtiketa horietako 6tan batura 7 izango dela, eta, aldiz, jaurtiketa bakar batean aterako den batura 2 edo 12 izatea (14. irudia).

14. irudia. Bi dado jaurtitzearen emaitza posibleak.

Batura	Aldeko kasuak	Zenbat aukera
2	(1, 1)	1
3	(1, 2)(2, 1)	2
4	(1, 3)(2, 2)(3, 1)	3
5	(1, 4)(2, 3)(3, 2)(4, 1)	4
6	(1, 5)(2, 4)(4, 2)(5, 1)	5
7	(1, 6)(2, 5)(3, 4)(4, 3)(5, 2)(6, 1)	6
8	(2, 6)(3, 5)(4, 4)(5, 3)(6, 2)	5
9	(3, 6)(4, 5)(5, 4)(6, 3)	4
10	(4, 6)(5, 5)(6, 4)	3
11	(5, 6)(6, 5)	2
12	(6, 6)	1

Gertaera baten *probabilitatea*, berez, horixe besterik ez da, gertaera hori *errazten* duten aukeren eta dauden aukera guztien arteko erlazioa. Esate baterako, bi dado jaurti ondoren, batura 5 izateko probabilitatea $4/36$ da, hau da, 5a lortzeko dauden aukeren kopurua (4 aukera) zati aukera posible guztien kopurua (36 aukera). Horrela, prozedura teorikoak baieztatu egiten du 7a dela ateratzeko aukera gehien duen batura, hau da, probabilitate handieneko batura ($3/36$), eta, aldiz, 2a eta 12a direla gertatzeko aukera gutxien duten balioak ($1/36$ bakoitzak).

Probabilitate teorikoek harremana dute esperimendazioan lortu diren *maiztasun erlatiboekin*. Izan ere, zenbat eta partida gehiago jolastu, hau da, datuen bilketa zenbat eta lagin handiagoaren gainean egin, orduan eta

gertuago egongo dira elkarrengandik esperimentalki lortu diren maiztasun erlatiboak eta probabilitate teorikoak. Wilhelmi (2004) 1.074 jaurtiketa-ren gainean egindako simulazio baten bidez egiaztatzen du erlazio hori (9. taula).

9. taula. Probabilitate teorikoen eta maiztasun erlatiboaren arteko harremana.

<i>Fitxa</i>	f_i	h_i	<i>Zenbat modutara</i>	Probabilitatea
2	14	0,013	1	$1/36 \approx 0,028$
3	56	0,052	2	$2/36 \approx 0,056$
4	89	0,083	3	$3/36 \approx 0,083$
5	132	0,123	4	$4/36 \approx 0,111$
6	149	0,139	5	$5/36 \approx 0,139$
7	180	0,167	6	$6/36 \approx 0,167$
8	149	0,139	5	$5/36 \approx 0,139$
9	122	0,114	4	$4/36 \approx 0,111$
10	99	0,092	3	$3/36 \approx 0,083$
11	51	0,047	2	$2/36 \approx 0,056$
12	33	0,031	1	$1/36 \approx 0,028$
<i>Orotara</i>	1.074	1	36	1

4.1.5. Aurreikuspenak eta erabakiak hartzeko irizpideak

Balioztatze enpirikoa edo teorikoa egin ostean, estrategia balioztatu da, eta horrela, jokalariek finkatu egin du jolasaren hasieran zenbakiak hautatzeko irizpide bat. Egiaztatu da 7ak duela jolasa irabazteko aukera gehien, eta, honenbestez, jokalariek zuhur batek fitxa hori hautatuko luke lehenengo eta behin. Gainera, erabakitze irizpidea erraz formulatu daiteke: «Har itzazu, lehenengo eta behin, erdiko balioak; utz itzazu muturreko balioak bukaerarako». Irizpide horrek erabakiak hartzeko balio du: esate baterako, hautatzeko nire txanda baldin bada eta 5, 6, 7 eta 8 hartuta baldin badaude, 9a hautatuko dut, zalantzarik gabe.

Bestalde, hautaketa on batek ez du ziurtatzen beti irabaziko denik. Zorizko jolas bat denez, zoriak bere partea jokatu du. Hautaketa on batek irabazteko aukera *gehiago* ematen ditu, baina ez du irabaztea ziurtatzen. Gertaera baten probabilitatea ezagutzen dugunean, gerta daitekeen horri aurrea har diezaiokegu, probabilitatea delako gertaera horren *esperantza*.

Laburrean esanda, *maiztasun erlatiboak* iraganean gertatu den esperimendu baten emaitzak dira, eta *probabilitatea*, berriz, etorkizunean espero dezakegun horren esperantza da, esperimendua bera egin aurretik.

Konbinatoria eta probabilitateko ariketekin gertatzen den bezala, jarduera estatistikoak zenbakiak eta horien arteko eragiketak ikasgelan lantzeko egoera ezin hobeak dira.

Aurreko kapituluetan curriculumari eta testuliburuei buruz aipatu den ideiarekin jarraituz, zenbakien arteko eragiketak kapitulu isolatu baten lantzeak ere irakaskuntzaren errepikapena eragiten du. Eragiketak lantzeari bideratuta dagoen kapituluari, ikasleek ariketa mekaniko eta testuingururik gabekoak egiten dituzte. Denbora luze eskaintzen zaio horri, eta ondoren, beranduago ageri diren kapituluari, esate baterako estatistikakoan, ezagutza horiek berriz lantzen dira; izan ere, estatistikako ariketetan ezinbestekoa da zenbakien arteko eragiketak egitea.

Beraz, estatistikako jarduerak aproposak dira curriculumean ageri diren zenbait aspektu modu integratuan lantzeko. Alde batetik, ikasleei eguneroko bizitzako problemen enuntziatuak aztertu eta ulertzea, emaitzak estimatzea eta, ondoren, ebaztea eskatzen zaie. Bestetik, problema ebazteko, zenbaki multzoak eta zenbakien eragiketak menperatu behar dituzte. Edozein datu-bilketa estatistikari egiten dio erreferentzia. Jasotako informazio horretatik ondorioak ateratzea da jarduera estatistikoaren helburua.

4.2. ESTATISTIKA LANTZEKO TESTUINGURUAK

Telebista, paper edota sareko edozein komunikabidean ia egunero aurki dezakegu datu-bilketa batetik ondorioztaturiko informazioaren publikazioaren bat; alderdi politikoek hurrengo hauteskundeetan izango duten babesaren estimazioa, Iruñean bidegorria jartzeko egindako galdeketaaren emaitzak, abiadura gainditzean jarritako isunen informazioa, asteko tenperaturaren informazioa aurkezten digun grafikoa, etab.

Informazio-gune horiek eskaintzen diguten materiala aztertu eta erabil daiteke LHko gelan, betiere azterketa kritikoa eginez. Izan ere, jakina da zenbaitetan hedabideek informazioa (grafikoak bereziki) euren kaxa eraldatzen dutela, irakurlearen edo ikuslearen iritzia lerratzeko asmoz, edo, besterik gabe, benetako datuen interpretazio okerra egin dutelako. Hedabideetako informazioa aitzakia gisa hartuz, ikasleek bere inkesta bat presta dezakete gaur eguneko gai baten inguruan datuak jasotzeko. Galdetegiaren egitura eta galderen hizkuntza aintzat eduki behar dute, informazioa modu ordenatu eta ulergarrian jasotzeko baliabideak prestatu behar dituzte eta jasotako informazio guztia egituratu eta modu ezberdinetan publikatu beharko dute. Horrela, gaitasun matematikoez gain, landu egiten dira, baita ere, gaitasun linguistikoak, logistikoak, teknologikoak, etab.

4.2.1 Ohiko galdeketak ikastetxe barnean

Datuen bilketa egiteko testuinguru naturala ikastetxea bera da, betiere nola-baiteko hedadura eta ikasleen kopuru minimo bat izanez gero, ikastetxe unitarioetan laginketa-arazo bat izan baitezakegu. Irakasleak adi egon beharko du, eta ikasleen elkarrikitza eta eztabaidetan ager daitezkeen aldagai estatistiko potentzialak identifikatu behar ditu, ikasleak harrapatzeko eta bereganatzeko: ikasleen gustuko kirolak, irakasleen adina, anai-arreben kopurua, oportetara nora joaten diren, etab.

Behin aldagaia identifikatu ostean, irakasleak proposatu egingo die ikasleei hura datu-bilketa baten bidez aztertzea. Lehenengo eta behin, ikasleek euren hipotesiak plazaratu beharko dituzte, ahal dela idatziz, datuen bilketa eta horien analisisa amaitu ostean euren hasierako usteen kontrastea egin ahal izateko.

1. *Hipotesiak egin.* Aldagaiak har ditzakeen balioen artean, irakasleak galderak aurkeztuko dizkie, ikasleek gertaera ezberdinak identifika ditzaten: gertaera seguruak, probableak, posibleak, inprobableak edota ezinezko gertaerak. Zeintzuk izango dira ikasleen gustuko kirolak? Existitzen diren kirol guztiak agertuko dira? Zer kirol agertuko da maiztasun handiagoz ikasleen erantzunetan? Zer kirol ez da agertuko ikasleen erantzunetan? Futbola agertuko da? Golfak agertzea posible da? Etab.
2. *Esperimentazioa eta datuen bilketa.* Ikasleek galdetegia prestatuko dute, eta ondoren, banaka edota taldeka, datuen bilketa osatu beharko dute. Ikasgela barneko datuak har daitezke aurrena, ikasmaila bereko beste ikasleena hurrena, eta azkenik, gainerako ikasmailetako ikasleen datuak. Datu-bilketak sistematikoa eta exhaustiboa izan beharko du, lorturiko datuak baliagarriak izango badira. Irakasleak ikasleekin adostu dezake zer motatako laginketa egingo den: ikasle guztien erroldari galdetu ahal zaio edota ikasleen laginketa bat egin daiteke, eta laginketa egitekotan, lorturiko datuak fidagarriak izan daitezken, errespetatu beharko dira ikasleen adin-tarteak eta ikasleen generoa, etab.
3. *Datuen bistaratzea eta adierazpena.* Ikasleek jaso duten informazio hori guztia tratatzerakoan, erabaki beharko da zer taula eta grafiko mota izango den egokiena kasu bakoitzean. Aldagai kualitatiboen kasuan, ehunekoak baliatzea interesgarri gerta liteke, aldagaia kuantitatiboen kasuan, berriz, batezbestekoak kalkulatzeko zilegi izan daiteke, etab. Datuen arabera, komeniko da barra-diagramak edota sektore-diagramak egitea, etab. Ez dago alde zuretik esaterik kasu bakoitzean zer taula edo grafiko erabili beharko den; betiere, bilatu beharko da datuen errepresentazioa adierazgarria izan dadila, eta informazioa era efikaz batean laburbildu dezala.
4. *Aieruak eta horien balioztatzea.* Eraikitako taulek eta grafikoek balio behar dute ikasleek hasieran egin dituzten alde zureko hipotesiak

balioztatzeko. Zein da ikastetxeko ikasleen kirolik gustukoena? Zenbat anai-arreba dituzte, oro har, ikastetxeko ikasleek? Oporretara hondartzara doaz ala mendia nahiago dute? Kontraste horren bidez, ikasleek irizpideak garatu beharko dituzte, hurrengo batean galdera berdinen aurrean suertatuz gero, haien hasierako hipotesiak ahalik eta zehatzenak eta errealeenak izan daitezzen.

LHko programazioetan, ez da egokia matematikari buruzko unitate didaktiko isolatuak diseinatzea, non matematika soilik landuko den. Aldiz, deskribaturiko proiektu hori zabalagoa den beste unitate didaktiko baten barnean txerta daiteke. Esate baterako, ikasleen gustuko kirola aztertzerakoan, hizkuntza landu daiteke (ikasleak ezar daitezke kirol-esatari baten rolean, kronika bat idatziz edo antzetzuz), kirola azter daiteke gizarte-ikuspegitik (nesken eta mutilen gustuko kirolen artean egon daitezkeen aldeak azter daitezke, genero-ikuspegitik, estereotipoen eta komunikabideen eraginaren arabera; kirol-apustuen fenomenoak gazteen artean duen eragina azter daiteke), edota naturaren ikuspegitik (zenbait kirolek natura-guneetan izan dezaketen inpaktua azter daiteke).

4.2.2. Kanpoko datuen interpretazioa

Aurreko atalean, deskribatu da zein diren aldagai estatistiko baten azterketa egiteko ikasleek jarraitu beharreko pausoak. Beste batzuetan, ikasleek ez dituzte zertan zerotik eraiki euren proiektuak. Irakasleak informazioa eman diezaike, eta ikasleek deskribatu edota interpretatu egin beharko dute emandako informazio hori. Ikasleei erakusten zaien informazio hori ahalik eta errealea izatea komeni da, eta ahal dela, saihestu egin beharko dira datuen bilduma prefabrikatuak eta estereotipatuak. Horrela, gutxika, ikasleei euren inguru erreala gerturatzen diegu, betaurreko matematikoak baliatuta.

Esate baterako, gerta daiteke eguneko prentsak hauteskunde-giroko diagrama bat erakustea, non zehazten den erkidego bateko boto-emaileek zer alderdiri emango lioketen bozka. Diagrama horren interpretazioa egiteko, ikasleei galde dakieke zeintzuk liratekeen gobernuaren osatzeko dauden aukerak (boto-estimazioen ehunekoak batuz eta ahal diren konbinazio guztiak eginez), eta ondoren, eztabaida bat piztu daiteke konbinazio horien artean litekeenak zeintzuk ote diren argitzeko. Helburu nagusia izango da aldagaiaren beraren identifikazioa (kasu honetan, «hauteskundeetan babestuko dudan alderdi politikoa»), zer motatakoa den argitzea (kasu honetan, kualitatiboa) eta zer balio har ditzakeen (alderdi politikoen errolda), betiere, ikasleen inguru hurbileko errealitate soziala aztertzeko asmoz. Oinarrizko informazioa ezagututa, aldagaiaren balio bakoitzaren maiztasuna ezagutu eta horren inguruko eztabaida egingo da; zer alderdik dauka babes gehien? Zeinek gutxien? Barra-diagrama ongi irudikatuta dago (hau da, proportzioak ongi mantentzen ditu)? Zein beste modutan adieraz daitezke datuak?

Jarduera hau periodikoki errepika daiteke, unean-unean gizartean pil-pilean dagoen gai bat aukeratuz. Tarteka, interesgarria izango da irakasleak egiazko datuekin bat ez datorren diagrama manipulatu bat ikasleei aurkeztea, galdera-erantzunen bidez, ikasleak ohar daitezen datuen eta haien errepresentazioaren artean dagoen koherentzia-gabezia: barren altuerak proportziorik mantendu gabe aurkezten dituen grafikoren bat azter daiteke, etab. Horrelako kasuak aztertzea onuragarria izango da ikasleen arrazoiketa lantzeko.

Kanpoko datuen interpretazioa aproposa izan daiteke, baita ere, bestela berez agertuko ez liratekeen eduki matematikoak lantzeko. Esate baterako, ikasleek eurek modu espontaneoan proposatuko dituzten aldagaien artean, nekez agertuko dira aldagai kuantitatibo jarraituak, berez, aldagai diskretuak hobetsiko dituztelako. Horrela, kanpoko informazioa balia daiteke aldagai jarraituen informazioa tartetan nola antolatzen den ikusarazteko. Adibidez, Espainiako Trafikoko Agentzia Orokorrak 2017an jarritako isunen informazioa kaleratu du, 50 eta 650 euro bitarteko isun kopurua adieraziz. Aldagaia kuantitatibo jarraitua izanik, isunen balioak tartetan bilduta aurkeztu dira: [50, 150), [150, 250), [250, 350), [350, 450), [450, 550), [550, 650); eta zehaztu egin dira tarte bakoitzean dauden isunak. Kasu honetan, jarduera taula baten interpretaziotik hasi behar da. Aldagaia identifikatzeaz aparte, horren izaera aztertu behar da eta balioen inguruko ondorioztapenak egin behar dira: Zenbateko isunak izan ziren ohikoenak 2017an? Zenbat isun jarri zituzten 550-650 euro bitartekoak? Zenbat euro ordaindu zuen isuna jasotako pertsona bakoitzak batez beste? Isuna ordaindu behar izan duten pertsonen erdiek zenbat euro ordaindu zuten gehienez? Etab.

4.3. ESTATISTIKAREN ELEMENTUAK

Kapitulu honetan, lehenik eta behin, estatistikako proiektu bat LHn nola egituratu behar den azaldu da, eta horretarako erabili da, adibide gisara, *Lasterketaren esperientzia*. Ondoren, justifikatu egin da nola integra daitezkeen *zenbakien multzoak* eta *eragiketak* jarduera estatistikoaren barruan. Kapitulu amaiteko, atal honetan zerrendatuko dira irakasle batek menderatu behar dituen estatistikaren inguruko oinarritzko unibertsitate-ezagutzak.

4.3.1. Aldagaien izaera

Aldagai estatistiko bat ezaugarri neurgarri bat da, eta ezaugarri horrek balio ezberdinak har ditzake norbanako edo objektu ezberdinetan. Horrela, bada, «begien kolorea», «oinetakoaren zenbakia» edota «altuera» aldagai estatistikoaren adibideak dira.

Aldagaiak hartzen dituen balio horiek *kualitatiboak* edo *kuantitatiboak* izan daitezke, aldagai horrek hartzen dituen balioen «natura»ren arabera. Hau da, aldagaiari *kualitatiboa* dela esango diogu aldagai horrek hartzen dituen balioak

zenbakizkoak ez direnean, edota zenbakizkoak izanagatik ere, zenbaki horrek «etiketa» funtzioa hartzen duenean. Aldagai kualitatiboek har ditzaketen balioei *modalitate* edo *kategoria* esaten zaie.

Esate baterako, «begien kolorea» aldagai kualitatiboa da; baina kualitatiboa da, baita ere, «telefono-zenbakia» edota inkesta bateko «asebetetze-maila», asebetetze-maila hori 1etik 4ra kalifikatzeko eskatzen zaigunean, 1 izanik «erabat ez-ados», eta 4 izanik «erabat ados».

Aldagai kualitatiboen artean, badira bi modalitate edo kategoria bakarrik hartzen dituztenak, eta horiei *aldagai dikotomiko* esaten zaie. *Aldagai dikotomiko* batek har ditzakeen bi balio horiek izaten dira: Bai/Ez; 1/0; egia/gezurra, etab. Ohikoan, erreferendum bidezko galdeketetan *aldagai dikotomikoak* neurtzen dira. Esate baterako, «Erraustegia eraikitzearen alde zaude?» edota «Nahi duzu Euskal Herria errepublika independente izan dadin Europako Batasunaren barnean?» aldagai estatistiko dikotomikoak dira, eta ez dute onartzen tarteko erantzun anbiguorik.

Aldagai bati *kuantitatibo* esaten diogunean, berriz, nabarmentzen ari gara aldagai horrek hartuko dituen balioak zenbakizkoak direla, eta zenbaki horiek ez dutela «etiketa» funtziorik; aldiz, esanahi aritmetikoa dute eta sekuentzia ordenatu baten barnean aurkezten dira.

Esate baterako, «matrikulatutako kredituen kopurua» edota «altuera zentimetrotan» *aldagai kuantitatiboak* dira, nahiz eta erabiltzen dituzten zenbakizko multzoen arabera, bigarren bereizketa bat egin behar den: aldagai *kuantitatibo diskretu* batek zenbakizko balio jakin batzuk bakarrik har ditzake; aldiz, aldagai *kuantitatibo jarraitu* batek emandako bi balioen arteko beste edozein balio har dezake.

Horren arabera, «matrikulatutako kredituen kopurua» *aldagai kuantitatibo diskretua* da, 1etik 60rako balio osoak hartzen dituelako; aldiz, «altuera zentimetrotan» *aldagai kuantitatibo jarraitua* da, altuera minimo eta maximo baten arteko edozein balio har dezakeelako, betiere neurketa-tresnaren zehaztasunaren mendekoa izango den balioa. Aldagai kuantitatibo jarraituen kasuan, aldagaiak har ditzakeen balioak tartetan antolatu ohi dira, eta horrela, nolabait esateko, izaera «diskretua» ematen zaie, aldagaiaren azterketa errazteko. Kasu horietan, tartearen erdiko balioari *klase-marka* esaten zaio, eta aurrerago ikusiko den modura, balio diskretu baten funtzioa betetzen du kalkuluatarako.

ARIKETA. Izenda itzazu haurren intereseko izan daitezkeen 20 aldagai estatistiko: 5 kualitatibo multimodal, 5 kualitatibo dikotomiko, 5 kuantitatibo diskretu eta 5 kuantitatibo jarraitu.

4.3.2. *Laginketa*

Aldagai estatistiko bat norbanako edo subjektu bakar batean neurtuz gero, nolabaiteko informazio puntuala lortuko dugu norbanako edo subjektu isolatu horren inguruan. Aldiz, estatistikaren helburua izango da aldagai hori neurtzea norbanakoen edo objektuen multzo batean, kolektibo baten edota produkzio baten gaineko informazioa lortzeko. Zenbat eta handiagoa izan aztergai den multzoaren kardinala, orduan eta esanguratsuagoa izango da multzo horren gainean lortuko den informazioa.

Lehenengo aukera izango da aldagaiaren portaera aztertzea indibiduo edo objektuen multzo osoan. Multzo oso horri *errolda* esaten zaio, eta esango da erroldako *populazio* guztiaren gainean aztertu dela aldagaia, salbuespenik egin gabe. Adibidez, hauteskundeak egiten direnean, 18 urtetik gorako *errolda* guztia dago bozkatzera deituta, eta horrela, «zer alderdiri eman nahi diozu bozka» aldagai kualitatiboaren *populazio-azterketa* bat egiten da.

Maiz, baldintzapen ekonomikoek edo denbora-baldintzapenek ezinezkoa egiten dute aldagai baten *populazio-azterketa* egitea. Horrelakoetan, *laginketara* jotzen da. Adibidez, kalean egiten diren inkestak *laginketaren* bidez egiten dira, ezinezkoa delako galdera jakin bat hiri bateko biztanle guztiei egitea. *Lagina* *populazioaren* zati bat da, eta informazio partziala ematen duenez, tentu handiz aukeratu beharko dira *laginean* pate hartuko duten norbanakoak, azterketa estatistikoaren emaitzak ez daitezen lerraturik atera. *Adierazgarria* izango bada, hau da, fidagarria izango bada, bi faktore hartu beharko dira kontuan *lagina* hautatzerakoan: *laginketa* mota eta *laginketaren* tamaina.

Populazioa homogeneoa bada, *zorizko laginketa* egingo da. Izan ere, *populazioa* homogeneoa bada, aldagaiak har ditzakeen balio guztiak aski berdin daude banatuta *populazioko* indibiduo guztien artean. Horregatik, *zorizko laginketa* batean, aukeratua izateko probabilitate bera du *populazioko* indibiduo bakoitzak. Indibiduo guztiak zoriz hautatu nahi ez badira, edo zorizko hautaketa hori posible ez bada, *laginketa sistematikoa* balia daiteke. Hautatze-sistema horretan, *populazioko* indibiduo guztiak zerrenda batean antolatzen dira, eta, zorizko *laginketan* bezalaxe, indibiduo bakar bat hautatzen da zoriz modu ekiprobablean. Ondoren, zerrendan luzera bereko saltoak eginez hautatzen dira gainerako indibiduoak, *laginearen* tamaina osatu arte. Azkenik, *populazioa* homogeneoa denean betiere, *laginketa konglomeratua* egin daiteke. *Konglomeratua* den *laginketa* batean, *populazio* osoaren antzeko ezaugarriak dituen *lagin* bat aukeratzen da zoriz, eta zoriz hautatutako *lagin* hori aztertzen da osorik, *mini-populazio* bat bailitza.

ARIKETA. Identifika ezazu hurrengo *laginketa* hauetan *errolda* zein den, eta azal ezazu, kasu bakoitzean, zer motatako *laginketa* egin den errolda horrekiko: (1) Nafarroako LH4ko ikasle guztiei ebaluazio diagnostikoa egin zaie, irakurketan, idazketan eta matematikan; (2) Landa-eremuko ikastetxe batean, ikastetxe horretako guraso guztiei

galdeketa egin zaie telefonoz, landa-eremuko ikastetxeen funtzionamendu orokorrari buruz; (3) LH5eko ikasleek inkesta bat egin diete euren zenbait ikaskideri, patioko orduak iraun duen bitartean; (4) Oposizioetako tribunal bat osatzeko, letra bat hautatu da zoriz, eta irakasle funtzionarioak hautatu dira abizenaren arabera letra hori baliatuz.

Aurretik azaldu diren hiru laginketa motak erabil daitezke populazioa homogeneoa denean, baina gerta daiteke aztertu nahi dugun populazioa homogeneoa ez izatea, eta honenbestez, esanguratsua izango den laginketa alternatibo bat beharko dugu. Horrela, heterogeneoa den populazio batean, elkarren artean oso ezberdinak diren sektore edo klase ugari aurki ditzakegu, eta kasu horretan, zorizko laginketa batek huts egingo du, hautatzen den sektorearen arabera elkarren artean oso ezberdinak diren emaitzak lortuko ditugulako. Kasu honetan, laginketa konplikatu egiten da, populazioaren konplexutasunaren araberrako sektoreak identifikatu behar direlako, eta ondoren, *laginketa estratifikatu* egin behar delako.

Laginketa estratifikatu batean ziurtatu behar da sektore edo klase guztietako subjektuek dutela presentzia laginean. Horrela, populazioko sektore edo klase bakoitzeko indibiduen proportzioa mantendu behar da laginean. Adibidez, «telebista-katerik gustukoena» aldagai kualitatiboa aztertuz gero, aurreikus daiteke arraz ezberdinak izango direla adin-sektoreen araberrako erantzunak; horregatik, *laginketa estratifikatu* batean, ziurtatu egin beharko da gizarteko adin-tartearen proportzio bera mantendu dela.

ARIKETA. «Zezenketen inguruko iritzia» aldagai estatistikoa aztertzeko laginketa motarik fidelena hautatu nahi da. Argudia ezazu zein litzatekeen aldagai hori aztertzeko laginketarik aproposena, laginketa mota (zorizkoa, sistematikoa, konglomeratua edo estratifikatua) eta laginketa-lekua (kalea, zezen-plaza, zezen-plazako eguzki-tendidua, zezen-plazako itzal-tendidua) kontuan hartuz. Azal itzazu laginketa bakoitzean gerta daitezkeen lerratzeak edo alborapenak.

Laginaren aukeraketa egitea, beraz, garrantzitsua da, hautaketa horrek berak baldintzatuko dituelako azterketa estatistikoaren emaitzak. Horrekin batera, *laginaren tamaina* ere garrantzitsua izango da. Behar bezalako baliabide ekonomikoak eta denbora-baliabideak eskura izanez gero, aproposena beti izango da populazioaren azterketa bat egitea.

Populazioa aztertzea ezinezkoa denean, laginaren tamaina zenbat eta handiagoa izan, orduan eta kalitate hobeko informazioa jasoko da. Adibidez, bonbillak ekoizten dituen enpresa batean «bonbillaren batez besteko bizitza-iraupena» aztertu nahi bada, ezinezkoa izango da ekoiztutako bonbilla guztiak aztertzea, ezingo liratekeelako saldu eta enpresak porrot egingo lukeelako. Kasu horretan, zorizko laginketa bat egin daiteke ekoiztutako bonbilla guztien artean. Laginaren tamaina aproposa zein izan daitekeen erabakitzeke, ez dago formula magikorik; aldiz, honako galdera hauei erantzun beharko zaie: Zenbat denbora eskain diezaioket laginari? Zenbat baliabide eskain diezazkioke?

4.3.3. Maiztasunen banaketa: taulak eta grafikoak

Azterketa estatistiko batean, behin aldagaia eta lagina zehaztu ondoren, eta behin datuen bilketa gauzatu ondoren, bildutako datu horiek guztiak taula eta diagrametan antolatzen dira. Datuak *maiztasun-tauletan* antolatzen dira, non lehenengo zutabearen ezartzen diren *aldagaiaren balioak* (x_i), eta bigarreanean ezartzen diren balio horietako bakoitza agertu den *maiztasun absolutua* (f_i). Lehenengo bi zutabe horietan, beraz, datuen bilketako zenbaketa besterik ez da adierazten.

Oinarrizko bi zutabe horiek erabiliz kalkulatzen dira gainerako datu eta zutabeak. Esate baterako, n tamainako lagin batean, $i = 1, \dots, k$ indizeak adierazten du aldagaiak harturiko balio bakoitza (x_i) eta balio jakin hori zenbateko maiztasunarekin agertu den (f_i), eta lagineko subjektu bakoitzarekin neurketa bat eta bakarra egin dugunez, *maiztasun absolutu* guztien batura derrigorrean izango da laginaren tamainaren (n) berdina. Batura hori, hots, laginaren tamaina, *maiztasun absolutuen* zutabearen azpian idazten da, baliagarria izango delako aurrerago datozen kalkuluentzat (10. taula).

10. taula. Oinarrizko maiztasun-taula.

$$n = \sum_{i=1}^k f_i \quad ; \quad \text{non } i = 1, \dots, k$$

x_i	f_i
x_1	f_1
x_2	f_2
$\dots$	$\dots$
x_k	f_k
	n

Esate baterako, maiztasun absolutuen ordeztu, *maiztasun erlatiboak* (h_i) aztertzea interesgarri gerta daiteke, maiztasun horiek laginaren proportzioa ematen dutelako, edo hobeto esanda, proportzio unitarioa (0tik 1erako balioa hartzen duelako). Era berean, *maiztasun erlatiboak* ehuneko gisa ere eman daitezke, maiztasun horiek 100 aldiz hartuz gero (11. taula).

11. taula. Maiztasun-taula hedatua.

$$h_i = \frac{f_i}{n} \quad ; \quad 1 = \sum_{i=1}^k h_i \quad ; \quad \text{non } i = 1, \dots, k$$

x_i	f_i	h_i	%
x_1	f_1	h_1	$h_1 \times 100$
x_2	f_2	h_2	$h_2 \times 100$
...	...		
x_k	f_k	h_k	$h_k \times 100$
		1	100

ARIKETA EBATZIA. Euskara hutsean jarduten diren 125 hedabideren tipologia aztertu da (Goikoetxea, 2016: 71-77), aldagai kualitatibo bat erabiliz. Aldagai kualitatiboak honako modalitate (x_i) hauek hartzen ditu: idatzizko hedabidea (x_1), irratia (x_2), hedabide birtuala (x_3) eta telebista (x_4).

Dauden komunikabide guztiak aztertu direnez, *populazio* osoaren edo *eroldaren* azterketa egin da. Zenbatu dira 68 idatzizko hedabide (f_1), 29 irradi (f_2), 18 hedabide birtual (f_3) eta 10 telebista (f_4). Datu horiek guztiak *maiztasun-taula* batean antolatu dira (12. taula), eta dagozkien *maiztasun erlatiboak* eta *ehunekoak* kalkulatu dira.

12. taula. Hedabideen tipologia (Goikoetxea, 2016).

x_i	f_i	h_i	%
Idatzizko hedabidea	68	0,54	54
Irratia	29	0,23	23
Hedabide birtuala	18	0,14	14
Telebista	10	0,08	8
	125	1	100

Datu horiek zenbakiz beteriko tauletan aurkeztuz gero, gerta daiteke taulan laburbilduriko informazio hori guztiz irakurterraza ez izatea. Horregatik, informazio hori *barra-diagrametan* edota *sektore-diagrametan* antolatzen da. *Barra-diagrama* batean, aldagaiaren modalitateak abzisa-ardatzetan kokatzen dira, eta modalitate bakoitzari barra bat esleitzen zaio; barra horren altuera ordenatu-ardatzetan kokatzen da, eta modalitatearen maiztasun absolutuari dagokio (diagramaren arabera; diagrama maiztasun absolutuen diagrama izan daiteke edo maiztasun erlatiboena, baina ezin dira inoiz bi maiztasun horiek diagrama berean nahastu). Beraz, aldagaiaren balioak (x_i) abzisa-ardatzetan kokatzen dira, eta aldagaiaren balio bakoitzaren maiztasun absolutuak (f_i) edo erlatiboak (h_i) ordenatuan (16. irudia). *Sektore-diagrama* batean, aldiz, maiztasun erlatiboak (h_i) adierazi ohi dira (16. irudia). Aldagaiaren modalitate bakoitzari sektore zirkular bat dagokio, eta sektore bakoitzaren anplitudea maiztasun erlatiboaren proportzionala da. Horrela, sektore bakoitzaren anplitudea ezagutzeko, sektore horrek zirkunferentziaren bira osoarekiko zer proportzio betetzen duen jakin behar da.

$$360^\circ \times h_i \quad ; \quad \text{non } i = 1, \dots, k$$

16. irudia. Hedabideen tipologia, barra- eta sektore-diagramak.



Aztertu nahi den aldagaia kuantitatiboa denean, aldagaiak hartzen dituen x_i balioak txikitik handira ordena daitezke, eta horrela, *maiztasun metatuei* buruz hitz egiteak badu zentzurik; hau da, aldagai estatistikoak balio jakin bat baino txikiagoa den maiztasun guztien batura egitea. Bestela esanda, erraz ikusten da aldagaiaren balio jakin baterako balio metatua lortzeko, aurreko maiztasun absolutu metatuaren (F_i) balioari gehitu behar zaiola aldagaiaren balio horren maiztasun absolutu metatugabea. Horrez gainera, azken maiztasun metatua beti izango da lagingaren tamainaren adinakoa. Maiztasun absolutuak metatu diren modu berean, *maiztasun erlatiboak* ere *metatu* daitezke; kasu honetan, azken *maiztasun erlatibo metatuak* (H_i) 1 balioa hartuko du (13. taula).

13. taula. Maiztasun-taula hedatua.

$$x_1 < x_2 < \dots < x_k ; F_i = \sum_{t=1}^i f_t = F_{i-1} + f_i ; H_i = \sum_{t=1}^i H_t = H_{i-1} + h_i$$

x_i	f_i	F_i	h_i	H_i	%
x_1	f_1	F_1	h_1	H_1	$h_1 \times 100$
x_2	f_2	F_2	h_2	H_2	$h_2 \times 100$
...	...	...	...	...	
x_k	f_k	$F_k = n$	h_k	$H_k = 1$	$h_k \times 100$
	n		1		100

Maiztasun metatuekin barra-diagrama egin daiteke, ohiko maiztasun metatugabeekin bezalaxe; hala ere, ezinezkoa da sektore-diagrama maiztasun metatuekin eraikitzea. Barra-diagramaren kasuan, berriz ere, aldagaiaren balioak (x_i) abzissardatzean kokatzen dira, eta aldagaiaren balio bakoitzaren maiztasun metatuak (F_i edo H_i , aurkeztu nahi den maiztasun motaren arabera) ordenatuan.

ARIKETA EBATZIA. Adinaren araberrako euskararen ezagutza aztertu da Nafarroan (Goikoetxea, 2016: 17-33). Horretarako, zenbatu egin dira Nafarroako elebidunak, eta adinaren arabera sailkatu dira (14. taula). Adina aldagai kuantitatibo jarraitua denez, adin-tarteak eratu dira, eta adin-tarte bakoitzaren erdiko balioa ere zehaztu da (*klase-marka*).

**14. taula. Nafarroako elebidunak, adinaren arabera
(Goikoetxea, 2016; NG, 2016).**

$[a_i, b_i)$	x_i	f_i	h_i	%
[65, ...)	70	8.936	0,11	11
[55, 65)	60	5.997	0,07	7
[45, 55)	50	8.668	0,10	10
[35, 45)	40	11.775	0,14	14
[25, 35)	30	14.168	0,18	18
[15, 25)	20	14.306	0,16	16
[5, 15)	10	20.550	0,24	24
		84.400	1	100

Aldagai kuantitatiboak, diskretuak ez ezik, jarraituak ere izan daitezkeela esan da. Aldagai jarraituetan, aldagaiak har ditzakeen balioen kopuruak (x_i) ugariegiak dira; den-denak kontuan hartu beharko balira, taulak lerro gehiegi lituzke, eta gainera, maiztasunak (f_i) beti lirake oso txikiak. Mugako datu horiekin eraikitako grafikoetan ere ez litzateke ezer ulertuko. Gisa horretako azterketa bat egiteak ez du interesik, informazioa nekez jadets litekeelako. Horregatik, aldagaia jarraitua denean, aldagaiaren balioak *tartetan taldekatzen* dira.

Tarte horiek ezkerretik itxiak dira (mugako baliorik txikiena barne hartzen dute) eta eskuinetik irekiak dira (mugako baliorik handiena ez dute barne hartzen, eta balio handien hori hurrengo tartean sartuko da). Tarte bakoitzari *klase* esaten zaio, eta klase bakoitzaren erdiko balioari *klase-marka* edo *klase-ordezkar*i. Orokorrean, tamaina edo luzera bereko *klaseak* aukeratzen dira, eta n tamainako laginarentzat, klase kopuruak egon behar du $\sqrt{n}$ baliotik hurbil.

ARIKETA EBATZIA. Baionako Kalostrape tabernan apairu goxoak prestatzen dituzte hurbileko produktuak erabiliz. Kartarekin batera, zerbitzariak esan egiten dizu jaki bakoitza nondik ekarria den, etxaldearen izena zehaztuz. Gaur, Bankako haztegiko amuarrainak ekarri dituzte, eta sukaldaria, zintzo demonio, kutxan datozen 55 amuarrainak pisatzen hasi da, plateretako kantitateak orekatu ahal izateko. Hauexek dira amuarrainen pisuak, gramotan emanak:

25	34	43	65	76	88	97	118	137	146	164
213	213	241	254	267	289	297	303	314	317	320
325	341	343	355	367	398	423	428	437	446	457
474	487	496	500	501	506	509	517	517	523	527
532	534	565	582	598	604	621	632	642	649	660

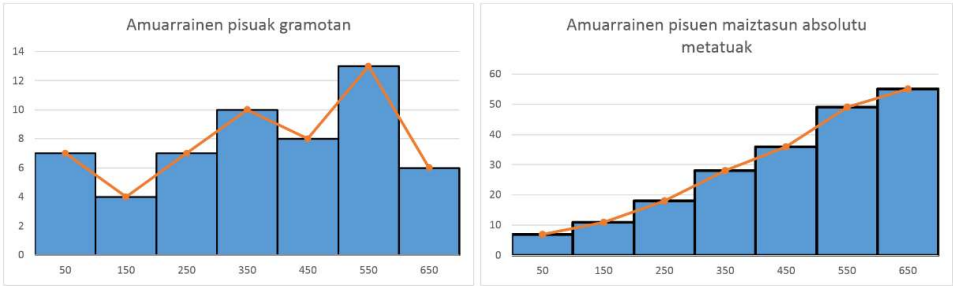
Sukaldaria berehala ohartu da oso datu gutxi daudela errepikatuta (213 gramoko bi arrain daude, eta 517ko beste bi), eta beraz, ez duela merezi aldagai diskretu gisa tratatzea. Horrela, hobe izango da datuei ematea aldagai jarraituaren tratamendua. Gainera, pisua magnitude jarraitua denez, aldagaia jarraituki lantzeak zentzuzkoa dirudi.

Lagina $n = 55$ denez, sukaldariak badaki $\sqrt{n} = \sqrt{55} \approx 7$ tartetan banatu beharko dituela datuak. Horrela, datuen heina 25etik 660ra doanez gero, eta 7 tarte egin behar dituenaz, 0tik 700era doazen 7 tarte aurreikusi ditu. Klase bakoitzaren luzera 100 unitatekoa izango da, eta klase-markatzat hartuko dira tartearen erdiko balioak.

Tartea	Klase-marka	Maiztasun absolutua	Maiztasun absolutu metatua	Maiztasun erlatiboa	Maiztasun erlatibo metatua
$[a_i, b_i)$	x_i	f_i	F_i	h_i	H_i
$[0, 100)$	$x_1 = 50$	$f_1 = 7$	$F_1 = 7$	$h_1 = 7$	$F_1 = 7$
$[100, 200)$	$x_2 = 150$	$f_2 = 4$	$F_2 = 11$	$h_2 = 11$	$F_2 = 11$
$[200, 300)$	$x_3 = 250$	$f_3 = 7$	$F_3 = 18$	$h_3 = 18$	$F_3 = 18$
$[300, 400)$	$x_4 = 350$	$f_4 = 10$	$F_4 = 28$	$h_4 = 28$	$F_4 = 28$
$[400, 500)$	$x_5 = 450$	$f_5 = 8$	$F_5 = 36$	$h_5 = 36$	$F_5 = 36$
$[500, 600)$	$x_6 = 550$	$f_6 = 13$	$F_6 = 49$	$h_6 = 49$	$F_6 = 49$
$[600, 700)$	$x_7 = 650$	$f_7 = 6$	$F_7 = 55$	$h_7 = 55$	$F_7 = 55$
$k = 7$		$\sum f_i = n$		$\sum h_i = 1$	

Maiztasun absolutuak eta maiztasun absolutu metatuak histograma banaren bidez adieraz daitezke, eta horretarako, tarteak bezain zabalak diren laukizuzenak erabiltzen dira (17. irudia). Barren altueren erdiko puntuak lotuz, maiztasun-poligonoak lortzen dira.

17. irudia. Amurrrainen neurria, histograma eta histograma metatua.



Informazio hori grafiko batean laburbiltzeko, barra-diagrama moldatu egiten da eta *histograma* izena hartzen du; hain zuzen ere, *histogramari* ematen zaio aldagaiaren jarraitutasuna adieraziko duen itxura.

Grafikoari itxura jarraitua emateko, elkartu egiten dira barren oinarriak, eta horrela, barra bakoitzaren oinarriak klasearen luzera totala hartzen du abzisa-ardatzean. Garrantzizkoa da aipatzea tarteak eraikitzean tarte guztiek (klase guztiek) luzera bera izan behar dutela, eta ondorioz, histogramaren abzisa-ardatzean barren oinarri guztiak berdinak izango direla. Ordenatu-ardatzean, aldiz, laukizuzen bakoitzak altuera bat izango du. Tarte edo klase bakoitzaren maiztasun absolutua adierazten du altuera horrek. Barra-diagramekin gertatzen den modura, *histogramak* ere onartzen du maiztasun absolutu metatuekin lan egitea (17. irudia).

Maiztasun metatuak adierazteko *histogramaren* kasuan, barra guztien oinarriak berdinak dira; izan ere, klase bakoitzaren luzera totala hartzen dute abzisa-ardatzean. Aldiz, ordenatu-ardatzean, barra bakoitzaren altuerak dagokion klasearen maiztasun metatua adieraziko du.

Grafika honetaz gain, maiztasun absolutuekin beste diagrama mota bat erabili ohi da: *maiztasun-poligonoa* deritzo. Diagrama hori eraikitzeko abiapuntu hartzen da histograma, eta laukizuzen bakoitzaren gainaldeko erdiko puntua (klase-marka deritzona) elkartuz lortzen den poligonal irekiari esaten zaio *maiztasun-poligonoa*. Era horretan, histograman dagoen informazio osoa barneratzen du maiztasun-poligonoak. Aldiz, maiztasun metatuekin eraiki daitekeen lerro poligonalari poligono metakorra esaten zaio.

4.3.4. Zentralizazio-parametroak, sakabanatze-parametroak eta posizio-neurriak

Klase-markak funtzio praktikoa du, ez bakarrik maiztasun-poligonoaren bidez adierazpen grafikoa errazten duelako; aldiz, interesgarria da *zentralizazio-parametroak* kalkulatzeko errazten duelako ere. *Parametro estatistikoak* erabiltzen dira taula batean edo grafiko batean ematen den informazioa are gehiago laburbiltzeko. Hiru motatako parametroak aurkeztuko dira: *zentralizazio-parametroak* (zentralizazio-neurriak), *sakabanatze-parametroak* (barreiatze-neurriak) eta *posizio-parametroak*.

Zentralizazio-parametroak adierazten dute datuak zer balioen inguruan elkartzen diren. Horien artean daude batezbestekoa, mediana eta moda. Nabarmendu behar da, lehenengo eta behin, batezbestekoa eta mediana soilik kalkula daitezkeela aldagai kuantitatiboen kasuan; aldiz, moda kalkula daiteke baita aldagai kualitatiboen kasuan ere.

- *Batezbestekoa*. Banaketa estatistiko batek hartzen dituen balio guztiak batu eta lagingaren tamainarekin zatituz gero lortzen den zentralizazio-parametroa da. Aldagaiaren sinboloari gainean marra bat ezartzen zaionean ($\bar{x}$), batezbestekoari buruz ari gara, eta batugaien kopurua handia izan daitekeenez gero, batukariaren sinboloa erabiltzen da ($\sum x_i$).

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} ; \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

Kalkuluak errazteko, aldagaiaren balioak eta maiztasunak elkarrekin biderka daitezke ($x_i \cdot f_i$), horrela batugaien kopurua gutxitzen baita ($k < n$, k izanik klaseen kopurua, eta n laginaren tamaina).

$$\bar{x} = \frac{x_1 \cdot f_1 + \dots + x_k \cdot f_k}{n} ; \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k x_i \cdot f_i$$

- *Mediana*. Banaketa estatistiko batek hartzen dituen balio guztiak txikitik handira ordenatzen baditugu, erdian geldituko den balioari mediana esango diogu (M_e). Datuen kopurua bakoitia denean, erraza da mediana identifikatzea, erdiko balio bakarra egongo baita; aldiz, datuen kopurua bikoitia denean, erdiko bi balio daudenez, bi horien arteko batezbestekoa kalkulatzuz lortzen da mediana. Bestalde, batezbestekoarekin alderatuta, mediana «sendoagoa» da muturreko balioak daudenean. Hau da, muturreko datu bakar batek eragin handia izan dezake batezbestekoaren emaitzan; aldiz, muturreko balio horrek ez dio zertan medianari horrenbeste eragin. Kalkuluak egin behar izan gabe ere, maitasun metatuak dituen taula batean erraza da mediana begi hutsez lokalizatzea.

$$x_1 < x_2 < \dots < x_n \rightarrow \begin{cases} M_e = x_{\frac{n+1}{2}} & n \text{ bakoitia bada} \\ M_e = \frac{x_{\frac{n}{2}} + x_{\frac{n+1}{2}}}{2} & n \text{ bikoitia bada} \end{cases}$$

- *Moda*. Sinpleki, maitasun (f_i) handienez agertzen den aldagaiaren balioari (x_i) esaten zaio moda (M_o). Maiztasun handien hori aldagaiaren balio batentzat edo gehiagorentzat ager daiteke, eta horregatik, banaketa estatistikoak moda bakarrekoak, bikoak edo gehiagokoak izan daitezke.

$$f_i = \max\{f_1, f_2, \dots, f_n\} \rightarrow M_o = x_i$$

ARIKETA. Euskaraz jarduten diren 125 hedabideen adibidea erreferentziazat hartuz, galdera hauei erantzun: (1) Zer galdera egin daiteke taulan agertzen diren datuen inguruan? (2) Datuen batezbestekoa kalkulatzeko zentzua dauka? (3) Euskaraz aritzen diren hedabide guztien artean gehien errepikatzen den tipologia zein den galdetzeak zentzua dauka? (4) Ziurta daiteke euskarazko hedabideen artean idatzizkoak direla kopurutsuenak?

ARIKETA. Amuarrairen adibidea erreferentziazat hartuz, galdera hauei erantzun: (1) Zentzuzkoa da datuen batezbestekoa kalkulatzeko? (2) Batezbestekoa klase-markak erabiliz kalkulatu bada, emaitza berdina izango da?

(3) Zer beste zentralizazio-parametro kalkula daiteke? Zentralizazio-parametroek informazio ugari eman dezakete datuen banaketa bat interpretatzeko, datuak zer balioen inguruan elkartzen diren esaten dutelako. Hala ere, ez dira nahikoa izaten datuen portaera osoa ulertzeko, ez digutelako esaten datuak balio zentral horretatik gertu edo urrun ote dauden. Informazio hori *sakabanatze-parametroek* emango dute.

- *Ibilbidea edo heina*. Aldagaiak hartzen duen balio handienaren (x_1) eta balio txikienaren (x_n) arteko aldea da, edo bestela esanda, datuak biltzen dituen tartearen luzera. R sinboloaz idazten da, ingelesetik datorren izena jartzen zaiolako (*rank*).

$$x_1 < x_2 < \dots < x_n \rightarrow R = x_n - x_1$$

- *Batez besteko desbideratzea*. Aldagaiak hartzen dituen balioak (x_i) batezbestekotik ($\bar{x}$) hurbil edo urrun ote dauden neurtzen du (balio absolutuetan neurtuta), distantzia horien guztien ($|x_i - \bar{x}|$) batezbestekoa kalkulatu. Maiztasun-taularik erabili gabe, hau da, n datuen zerrenda bere horretan erabilia, batez besteko desbideratzearen formulak itxura hau hartzen du:

$$D_{\bar{x}} = \frac{|x_1 - \bar{x}| + |x_2 - \bar{x}| + \dots + |x_n - \bar{x}|}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |x_i - \bar{x}|$$

Aldiz, datuak maiztasun-taularen arabera antolatu badira, aldagaiaren balio bakoitzaren agerpenak maiztasunarekin biderka daitezke:

$$D_{\bar{x}} = \frac{|x_1 - \bar{x}| \cdot f_1 + \dots + |x_k - \bar{x}| \cdot f_k}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k |x_i - \bar{x}| \cdot f_i$$

- *Bariantza*. Aldagaiak hartzen dituen balioak (x_i) batezbestekotik ($\bar{x}$) hurbil edo urrun ote dauden neurtzen du, distantzia horien guztien karratuen batezbestekoa kalkulatu. Maiztasun-taularik erabili gabe, hau da, datuen zerrenda osoa bere horretan erabilia, bariantzaren formulak itxura hau hartzen du:

$$s^2 = \frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$$

Aldiz, datuak maiztasun-taularen arabera antolatzen badira, aldagaiaren balio bakoitzaren agerpenak maiztasunarekin biderka daitezke:

$$s^2 = \frac{(x_1 - \bar{x})^2 \cdot f_1 + (x_2 - \bar{x})^2 \cdot f_2 + \dots + (x_k - \bar{x})^2 \cdot f_k}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k (x_i - \bar{x})^2 \cdot f_i$$

- *Desbideratze estandarra*. Bariantzaren kalkuluan karratuak erabili direnez, bariantza ez dago adierazia aldagai estatistikoaren unitate berean. Horregatik, bariantzaren erro karratua kalkulatu gero, desbideratze estandarrak berreskuratzen du aldagaiaren jatorrizko unitatea.

$$s = \sqrt{s^2}$$

Datu horien arabera, A epaimahaian batez besteko kalifikazioa 6 da, baina multzo horretako kalifikazio bat zoriz hautatuta, espero daiteke kalifikazio hori $6 \pm 1,04$ izango dela, hots, kalifikazio gehienak 5 eta 7 artean kokatzen dira (kalifikazioen % 87 tarte horretan daude).

Aldiz, B epaimahaian batez besteko kalifikazioa 6 den arren, multzo horretako kalifikazio bat zoriz hautatuta, espero daiteke kalifikazio hori $6 \pm 3,5$ artean egongo dela, hots, kalifikazio gehienak 2,5 eta 9,5 artean daude (berez, kalifikazioen % 46 daude tarte horretan; tarte apur bat hedatuz, berriz, kalifikazioen % 84 egongo lirarteke 2 eta 10 artean).

Ikusten denez, desbideratze estandarra batezbestekoaren unitate berean dago emana, eta horregatik estimatzen ditu batezbestekoaren inguruan dauden datuak. Bariantzarekin ezingo genituzke tarte horiek finkatu, batezbestekoari distantzia hori batuz edo kenduz. Kasu honetan, batezbestekoa berdina da bi kasuetan, eta AK koefizienteak ez du informazio gehigarririk ematen.

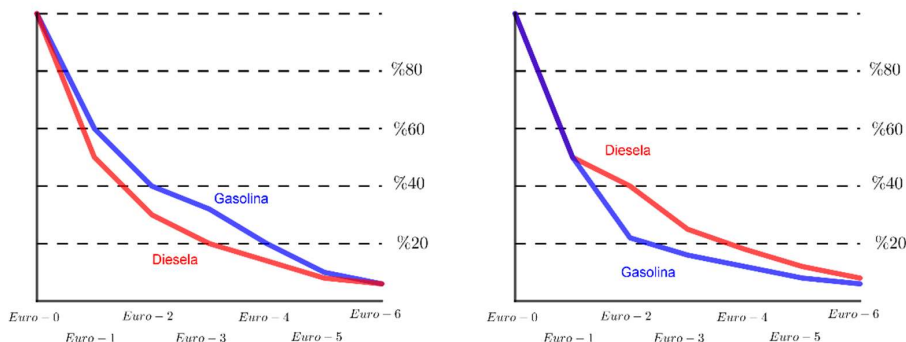
Mediana, zentralizazio-neurria izateaz gainera, posizio-neurria ere bada. Azken batez, medianak esaten digu aldagaiaren balioen artean, zer posiziotan dagoen datuen erdia. Bestela esanda, medianak adierazten du datuen % 50 non kokatzen den. Finago jokatu nahiko bagenu, zehaztu genitzake kuartilak (datuen % 25 non kokatzen diren), dezilak (% 10) edota pertzentilak (% 1).

- *Kuartila*. Aldagaiaren balioak txikienetik handienara ordenatuz gero, lau zati berdinetan banatzen dituzten 3 balioei esaten zaie kuartila. Beheko kuartilak (Q_1) azpitik uzten du populazioaren % 25, eta gainetik % 75. Erdiko kuartila medianarekin bat dator ($Q_2 = M_e$), azpitik eta gainetik uzten dituelako populazioaren % 50ak. Goiko kuartila (Q_3) behekoaren simetrikoa da, azpitik uzten duelako populazioaren % 75, eta gainetik, % 25.
- *Dezila*. Hurrenez hurreneko bi dezilen artean populazioaren % 10 kokatzen da. Horrela, bederatzi dezil daude ($D_1, \dots, D_9$), eta bosgarren dezila medianarekin bat dator ($D_5 = M_e$).
- *Pertzentila*. Hurrenez hurreneko bi pertzentil edo zentilen artean populazioaren % 1 kokatzen da. Horrela, laurogeita hemeretzi pertzentil daude ($P_1, \dots, P_{99}$), hogeita bosgarrena beheko kuartilarekin bat dator ($P_{25} = Q_1$), berrogeita hamargarrena medianarekin ($P_{50} = M_e$) eta hirurogeita hamabosgarrena goiko kuartilarekin ($P_{75} = Q_3$).

ARIKETA EBATZIA. Baionako Kalostrape tabernako sukaldariak Bankako haztegiko amuarrainen pisuen azterketa egin zuenean, ordenatu egin zituen arrainen neurketa guztiak txikitik handira. Horrela, esan daiteke amuarrainen erdiek 398 gramo baino gutxiago pisatzen zituztela ($M_e = Q_2 = D_5 = P_{50} = 398$). Bestalde, kontsideratzen da kilo erdi baino gehiagoko amuarrainak errazio eder bat eskaintzen duten piezak direla, eta ikusi da 67. pertzentilak markatzen duela muga hori ($P_{67} = 500$), hots, amuarrainen heren batek (% 33) betetzen zuen baldintza hori.

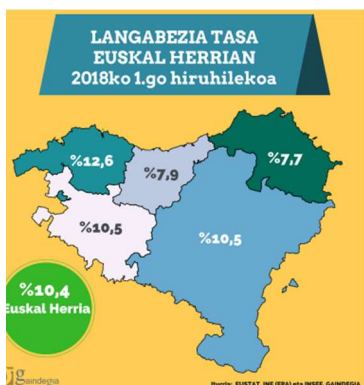
4.4. ARIKETAK

1. LHko 4. mailako ikasleei kanpo-ebaluaziorako proba bat egin nahi zaie. Baliabide eta denboragatik, ezinezkoa izango da proba ikasle guztiei pasatzea. Horregatik, 100 ikasletik bat hautatuko da azterketa hori egiteko.
 - a. Zein da populazioa?
 - b. Zein da lagina?
 - c. Zein dira indibiduoak?
 - d. Ikasleen produkzioetan honako hauek aztertu dira: matematikako gaitasun globala gainditu duen edo ez; natur zientzietako azterketetan lorturiko kalifikazioen batezbestekoa; eta 150 hitzeko idatzizko produkzio batean egin dituen akats ortografikoen kopurua. Esan zer motatakoa den aldagai bakoitza.
2. Ikastetxean, gizarteko gaia lantzen gabiltzala, irakasleak ikasleei eskatu die munduko herri batzuetako hainbat arlori buruzko azterketa konparatibo bat egin dezatela. Aztertu nahi ditugu herrialde horien biztanle kopurua, per capita errenta, erlijio nagusia eta 500.000 biztanletik gorako hirien kopurua. Ikerketa estatistiko horretan, zein da populazioa? Zein dira indibiduoak? Adierazi zein diren aldagaiak eta zer motatakoak diren.
3. Adierazi kasu bakoitzean: populazioa zein den; aldagaia zein den; aldagai hori kualitatiboa, kuantitatibo jarraitua edo kuantitatibo diskretua den.
 - a. Iaz Araban jaio ziren haurren pisua.
 - b. Ikastetxe bateko ikasleek etorkizunean izan nahi dituzten lanbideak.
 - c. Gipuzkoako landa-eremuetan laborariek dituzten abere motak.
 - d. Herritarrek hurrengo hauteskunde orokorretan zer alderdiri eman ahal izango dioten botoa.
 - e. LHko ikasleek irakurtzen erabiltzen duten denbora.
 - f. Euskal Herriko errugbi-denboraldian gertatu ziren sartzeen kopurua.
4. Ibilgailuaren erregai motak eragin handia du eguratsera isurtzen diren gas kutsagarrien kantitatean. Isuri horiek osasunerako kaltegarriak dira, eta horrez gain, klimaren aldatzea eragiten dute, berotegi-efektua indartzen baitute. Kyotoko protokoloa ezarriz, Europar Batasunak agindu berezien bidez katalogatzen ditu ibilgailuak: Euro-0tik, Euro-6ra. Beheko grafikoetan, konparatu egin dira gasolina eta diesel ibilgailuek igortzen dituzten CO_2 eta NO_2 isuriak. Aztertu grafiko horiek, eta erantzun galderei.



CO₂ isuria erregai motaren arabera. NO₂ isuria erregai motaren arabera.

- Euro-2 aginduaren arabera, zer ibilgailuri baimentzen zaio CO₂ gehiago isurtzea?
 - Euro-2 aginduaren arabera, zer ibilgailuri baimentzen zaio NO₂ gehiago isurtzea?
 - Nola eragiten die erabilitako erregai motak CO₂ emisioei?
 - Nola eragiten die erabilitako erregai motak NO₂ emisioei?
 - Euro-4 agindutik aitzina, diesel erregaien NO₂ emisioak jatorrizko mailaren % 20tik behera egon behar zuen, baina hainbat enpresak trukatu egin zituzten motorrak isuri horien igortzea kamuflatzeko. Bila ezazu prentsan gertaera horri buruzko informazioa (Diesel Gate deitu zitzaion).
5. Gaindegia¹² aztertu egin du 2018ko lehenengo hiruhilekoan izandako langabezia-tasa. Beheko diagraman agertzen dira lurraldeen araberrako datuak.



Langabetuen datu gordinak lurraldeka:

Araba, 19.200
 Bizkaia, 68.300
 Gipuzkoa, 29.000
 Nafarroa, 32.500
 Euskal Elkargoa, 12.600

12. Datuen iturria: <https://www.gaindegia.eus/>

- a. Ordena itzazu lurraldeak: langabezia-ehunekoaren arabera, eta langabeen datu gordinen arabera. Zerrenda bera lortu duzu?
 - b. Ondoriozta ezazu zer lurraldetan dagoen langile gordin gehien, eta zer lurraldetan langile gordin gutxien.
 - c. Datu gordinak eta ehunekoak baliatuz, lor ezazu EAEko langabezia-tasa, ehunekotan. Zein tasa da handiagoa, Nafarroakoa edo EAEkoa?
6. LHko 6. mailako ikasleei galdetu zaie azken hiruhilekoan zenbat liburu edo ipuin irakurri dituzten, eta honako datu hauek lortu ditugu:

2 1 3 1 1	5 1 2 4 3
1 0 2 4 1	0 2 1 2 1
3 2 2 1 2	3 1 2 0 2

- a. Egin ezazu taula bat honako hauek zehaztuz: maiztasun absolutuak, maiztasun erlatiboak, maiztasun absolutu metatuak eta maiztasun erlatibo metatuak.
 - b. Egin ezazu maiztasun absolutuen barra-diagrama.
7. Etxebizitza partikularretan herritarrek dituzten Informazio eta Komunikazioaren Teknologiei (IKT) buruz egin den ikerketa batean, honako datu hauek lortu dituzte:

Etxeke IKT ekipamendua	Etxeen ehunekoak
Telefono finkoaren linea	% 84,0
Sakelako telefonoaren linea	% 98,0
Telebista	% 86,0
Internetarako konexioa	% 54,0
DVD	% 68,0
Ordenagailua	% 72,0
Zinema etxean	% 4,0
Jokoen bideo-kontsola	% 34,0
Autorako GPS sistema	% 12,6
Argazki-kamera digitala	% 38,0
Lurreko telebista digitala	% 16,3

- a. Zentzuzkoa al da IKTen batezbestekoa kalkulatzeko?
- b. Zer zentralizazio-parametrori buruz hitz egin behar da ariketa honetan? Zergatik?
- c. Zer grafiko egingo zenuke datu hauek adierazteko?

8. Hainbat dendatan inprimagailu-modelo jakin batek zenbat balio duen galdetu dugu, eta datu hauek lortu ditugu (eurotan):

146 150 141 143 139 144 133 153

- Kalkula ezazu inprimagailu-modelo horren batez besteko prezioa.
 - Zenbatekoa da mediana?
 - Kalkula ezazu batez besteko desbideratzea, eta ibilbidea edo heina.
 - Esan zenbatekoa den desbideratze estandarra.
9. Lizartza familian, aitzak hilean 950 € irabazten ditu eta amak 1.600 €. Goirigoizargi familian aitzak 1.800 € irabazten ditu hilean, eta amak 750 €.
- Zenbatekoa da familia bakoitzaren batez besteko soldata?
 - Zeinetan da handiagoa sakabanatzea? Zenbatekoa da heina familietako bakoitzean?
10. Liburu batean orri bakoitzeko zenbat akats egon diren zenbatu eta Unaik honako datu hauek lortu ditu:

Akatsen kopurua	0	1	2	3	4	5
Orrialdeen kopurua	50	40	16	9	3	2

- Esan zenbatekoak diren batezbestekoa eta desbideratze estandarra.
 - Zenbatekoa da moda?
11. Errepidean egindako abiadura-kontrol batean, honako datu hauek lortu dituzte:

Abiadura (km/h)	60-70	70-80	80-90	90-100	100-110	110-120
Autoen kopurua	5	15	27	38	23	17

- Egin ezazu taula bat, klase-markak eta maiztasunak adieraziz.
 - Kalkula itzazu batezbestekoa eta desbideratze estandarra.
12. Uxuek eta Izarok aste bateko saskibaloiko entrenamenduetan lortu dituzten puntuak honako hauek izan dira:

Uxue	16	25	20	24	22	29
Izaro	23	24	22	25	20	19

- Egin ezazu datu horiek adierazteko grafiko egoki bat.
- Esan ezazu zenbatekoa den bakoitzaren batezbestekoa.
- Kalkula itzazu desbideratze estandarra eta aldakuntza-koefizientea. Bi jokalarietako zein da erregularragoa?

13. «Zenbat senide bizi zarete etxean» galdetuta, 40 pertsonak hau erantzun zuten:

4 5 3 6 3 5 4 6 3 2 2 4 6 3 5 3 4 5 3 6
 4 5 7 4 6 2 3 4 4 3 4 4 5 3 2 6 3 7 4 3

- a. Egin itzazu datu horiei dagozkien maiztasun-aula eta diagrama.
 b. Kalkula itzazu batezbestekoa, mediana, moda eta desbideratze estandarra.
14. Ekonomiako artikuluko bateko esaldietako bakoitzak honenbeste hitz ditu:

17 40 22 25 43 9 37 32 35 30
 36 40 30 48 45 28 7 33 35 22
 21 21 41 34 17 25 37 12 13 27
 41 45 39 39 40 38 23

- a. Egin ezazu maiztasun-aula bat datuak tartetan multzokatuz. Horretarako, gogora ezazu tarteen kopurua datuen kopuruaren erro karratua eginez lortzen dela: $\sqrt{n}$.
 b. Adieraz itzazu datu horiek histograma batean.
 c. Kalkula itzazu batezbestekoa eta desbideratze estandarra.
15. Selektibitateko azterketa batean izan diren kalifikazioen honako banaketa honetan, kalkula itzazu: M_e , Q_1 , Q_3 , P_{80} , P_{99} . Egin ezazu datu horien interpretazioa.

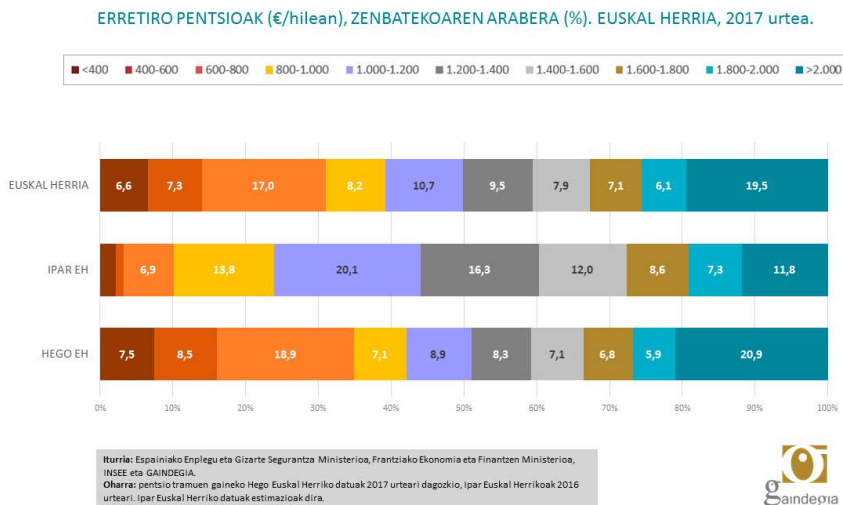
Kalifikazioak	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Ikasleen kopurua	7	15	31	53	65	104	46	23	19	14

16. 384 datutatik abiatuta, eta muturren balioak 19 eta 187 direla jakinik, taldekatutako datuen taula bat egin nahi dugu.
- a. 17ko luzera duten 10 tarte egin nahi baditugu, zer baliotan hasiko eta bukatuko dira tarte horiek?
- b. Egin ezazu 12 tarte bakoitzeko banaketa bat, tarteak komeni den luzerakoak hartuz.
17. A enpresa batek, hilean, batez beste 100.000 euroko gastuak ditu eta desbideratze estandarra 12.500 eurokoa da. B beste enpresa batean, hileko gastuen batezbestekoa 15.000 euro da, eta desbideratze estandarra, 2.500 euro. Kalkulatu aldakuntza-koefizientea eta adierazi bietako zeinek duen aldakuntza erlatiborik handiena.
18. Ikasgelako mutilen batez besteko pisua 58,2 kg da; eta desbideratze estandarra, 5,1 kg. Ikasgelako nesken batez besteko pisua 52,4 kg da, eta desbideratze estandarra, 5,1 kg. Kalkulatu aldakuntza-koefizientea eta konparatu bi taldeen sakabanatzea.

19. 25 familiako populazio batean «familiak duen automobil kopurua» aldagaia aztertu da, eta honako datu hauek lortu dira:

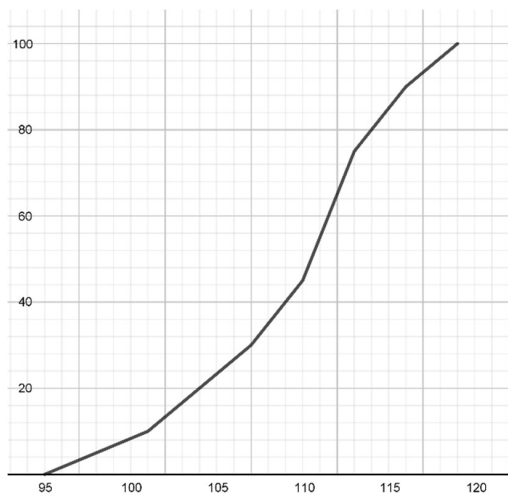
0 1 2 3 1 0 1 1 1 4 3 2 2 1 1
2 2 1 1 1 2 1 3 2 1

- Egin ezazu maiztasun-taula.
 - Egin ezazu barra-diagrama.
 - Kalkula itzazu batezbestekoa eta desbideratze estandarra.
 - Kalkula itzazu mediana eta kuartilak. Interpreta ezazu lortutako informazioa.
20. 2017ko datuen arabera, erretiro-pentsioak aztertu dira eta ehunekotan antolatu, berrehun euroko tarteetan. Emaitzak honako taula honetan agertzen dira:



- Azter ezazu, datuen multzo bakoitzerako, zer pentsiori dagozkien M_e , Q_1 , Q_3 , P_{80} , P_{99} .
- Herritarren zer ehunekok jasotzen ditu 1.000 euro baino gutxiago Hegoaldean? Eta Iparraldean?
- Herritarren zer ehunekok jasotzen ditu 2.000 euro baino gehiago Hegoaldean? Eta Iparraldean?
- Idatz ezazu iruzkin bat, datuak interpretatuz.

21. Honako hau 300 pertsonak duten adimen-koefizientearen banaketaren ehuneko metatuen poligonoa da:



- Grafikoaren gainean jardunez, ezarri, gutxi gorabehera, honako balio hauek: M_e , Q_1 , P_5 , P_{10} , P_{40} , P_{80} , P_{90} , P_{99} . Interpreta itzazu datu horiek.
 - Multzo horretako zenbat pertsonak (gutxi gorabehera) dute 104 eta 116 puntuko AK?
 - Zenbatek dute 116tik gorako AK?
 - Zer pertzentil du 112ko AK duen pertsona batek?
22. Torloju-fabrika batean torlojuetako batzuen luzera neurtu dute (mm-tan) eta datu hauek lortu dituzte:

22 20 18 15 19	22 16 19 25 18	17 23 23 21 18
20 22 18 25 25	22 22 19 19 20	21 18 24 17 20
19 23 21 23 21	20 19 21 20 22	19 20 18 21 19
	18 20 22 21 19	

- Egin ezazu maiztasun-taula bat bakandutako datuekin, eta taula hori baliatuz, kalkula itzazu:

$$\bar{x}, \sigma, Me, Q_1, Q_3$$

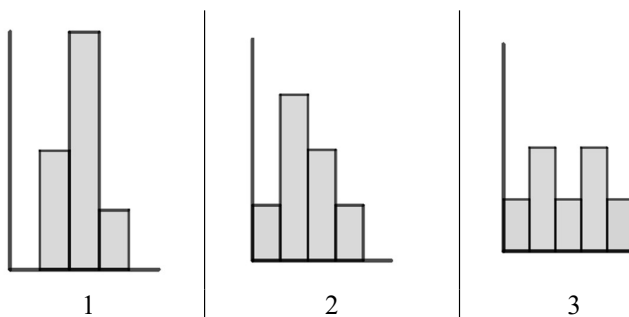
- Egin beste taula bat, balioak 14,5-16,5-18,5-20,5-22,5-24,5-26,5 muturrak dituzten sei tartetan taldekatuz. Taula hori baliatuz, kalkula itzazu berriz parametro horiek:

$$\bar{x}, \sigma, Me, Q_1, Q_3$$

- Zer pertzentil dagokio 24 mm-ri bi taula horietako bakoitzean?

23. Hiru saskibaloitaldetako jokalarien altuerak neurtu dira. Taulan agertzen dira altuera horien batezbestekoak eta desbideratze estandarrak. Horrez gainera, datu horien hiru grafiko agertzen dira. Zein grafiko dagokio talde bakoitzari? Argudia ezazu zure erantzuna.

	A	B	C
$\bar{x}$	175	174,3	172,1
σ	6,5	3,2	4,5



24. Froga ezazu maiztasun erlatiboen batura beti 1 dela.
25. 24 ikasle daude Gorputz Heziketan luzera-saltoaren proba egiten. Lehenengo 16 ikasleek egin dute proba eta haien emaitzen batezbestekoa 142,4 cm-koa izan da. Ondoren, gainerako ikasleek egin dute proba eta haien batezbestekoa 139 cm-koa izan da. Zein izango da ikasgela osoaren datuen batezbestekoa?
26. 200 pertsonari egunean kirola zenbat orduz egiten duten galdetu zaie. Jasotako datuak bi multzo berdinetan bereizi dira eta talde bakoitzaren batezbestekoa kalkulatu da. Populazio erdiaren batezbestekoa 1,6 ordu izan da eta beste erdiarena 2,3 ordu. Populazio osoa kontuan hartuz, egunean zenbat orduz egiten du kirola, batez beste, indibiduo bakoitzak?

II. PARTEA

GEOMETRIA ETA VAN HIELEREN EREDUA

Datozen 4 kapituluetan, Van Hieleren ereduan¹³ sakonduko da, eredu teoriko horrek azaltzen duelako zeintzuk diren geometriaren irakaskuntzan ikasleek igarotzen dituzten *arrazoibide-mailak*. Nolabait, ereduak zehaztu egiten ditu zenbait pauta deskribatzaile eta pedagogiko, irakasleek jakin dezaten geometria nola azaldu behar duten; hau da, proposamen metodologiko bat da.

Eredu hori menderatzen duen irakaslea gai izango da identifikatzeko bere ikaslea zer garapen-momentutan dagoen, eta horrela, ikasle horri proposatzen ahalko dizkio harentzat egokiak diren jarduerak, hark aurrera egin dezan geometriaren ikaskuntza-maila horietan, eta hedaduraz, baita pentsamendu matematiko orokorrean ere.

Van Hieleren arabera, irakaslea eta ikaslea ez dira hizkuntza berean mintzatzen. Diskurtso oro zehatza edo akastuna izan daiteke, eskatzen dugun perfekzio-mailaren arabera, eta irakasleak erabaki behar du ikaslearen «hizkuntza» edo «arrazoibide» hori noiz den egokia testuinguru jakin batean. Ereduak, beraz, irizpideak ematen dizkio irakasleari ikaslearen diskurtso hori mailakatzeko, eta maila jakin bati dagokion arrazoiketa egokia zein den erabakitzeko.

Konparaketa bat egin daiteke, adibide gisa, hizkuntzen ikaskuntzarekin: ikasle bat hizkuntza-eskolan matrikulatzen bada hizkuntza jakin baten B1 maila egiteko, kalifikazio bikaina lor dezake, nahiz eta zenbait akats ortografiko edo gramatikal egin; aldiz, akats horiekin berekin, gerta liteke B2 maila ezin eskuratzea. Bada, Van Hieleren mailek antzeko graduazio bat osatzen dute, eta balio dezakete, ez bakarrik ikaslearen garapen-momentua identifikatzeko, baita ikaslea ebaluatzerakoan balia-tzen diren irizpideak zehazteko ere.

13. *Van Hieleren ereduak*. Pierre Marie Van Hiele eta Dina Van Hiele-Geldof senar-emazteek garatu zuten eredu teorikoa, 1950eko hamarkadan. Biak matematikako irakasleak ziren Herbehereetan. Eredu klasikoa den arren, oraindik orain gaurkotasuna duela eta indarrean dagoela erakutsi du Sarasuak (2013). Funtsean, konstruktibismoan eta Piageten psikogenetikan oinarritzen den eredu teorikoa da.

Van Hielek *arrazoibide-mailakatze* horien gainean zehaztu zuen bere irakaskuntza-eredua, eta ziur zegoen geometria ikastea ez dela hizkuntza bat ikastearen aldean oso bestelakoa. Finean, geometria hizkuntza bat da, eta gure argumentuak hizkuntza horren arabera egituratzen ditugu, geroz eta sakontasun handiagoan. Horrela, ikaslea maila jakin batean baldin badago, maila jakin horri dagozkion ezagutzak bakarrik ulertuko dizkio irakasleari; ezinezkoa izango zaio ikasle horri arrazoibide matematiko jakin bat ikastea, baldin eta arrazoibide hori ikaslea bera dagoen mailatik gora baldin badago. Irakasleak, beraz, identifikatu egin behar du ikaslea dagoen maila, eta itxaron egin behar du ikasleak maila hori gainditzen duen arte, hari hurrengo mailako arrazoibideak aurkeztu aurretik.

Van Hieleren arrazoitze-mailak 5 dira, eta 0tik 4ra zenbakitzen dira. Zerotik hasteak badu zentzurik, kontuan hartuta hasierako maila hori deskribatzen dela «ez dauden» edo «falta diren» ezagutza geometrikoen arabera. Hots, hasierako maila horretan, arrazoitze-mailarik ez dago, eta irudi geometrikoak era orokor batean antzematen dira, bisualizazio soilaz.

Hurrengo ataletan, Van Hieleren «zero» *arrazoitze-maila* deskribatuko da, hots, *bisualizazioa edo ezagutza orokorraren maila* (VH0). Aurkeztuko dira, halaber, hura lantzeko proposamenak. Datozen 6., 7. eta 8. kapituluetan aurkeztuko dira, hurrenez hurren, Van Hieleren gainerako arrazoitze-mailak: *analisia* (VH1), *sailkapena* (VH2) eta *dedukzio formal*a (VH3). Unibertsitate-gradu bat ikasten duen ikasle bati eska dakioke VH3 mailako arrazoitzea, eta horregatik amaitzen dira testu honetako kapituluak mailakatze horretan; azken arrazoitze-maila, *zorroztasuna* (VH4), matematika era profesionalean erabiltzen duten horiei dagokie, eta horregatik, testu honetatik kanpo geldituko da.

5. Bisualizazioa edo ezagutza orokorraren maila (VH0)

Haur Hezkuntzatik Lehen Hezkuntzarako urratsa egin duen haurrak zenbait laukiren izenak ezagut ditzake, hala nola erronboa, karratua edota laukizuzena. Haurrari galdetuz gero irudi horietako baten eta besteren baten arteko ezberdintasunak zeintzuk diren, hizkera naturaleko terminoak erabiliko ditu forma horiek dituzten eguneroko objektuak deskribatzeko.

Esate baterako, laukizuzena «luzeagoa» dela esan dezake, erronboa «okerturik dagoela», eta karratua «zutik dagoela», betiere, ikasgelan bertan aurki daitezkeen objektu fisikoei erreparatuz. Horrela, etapa horretan, gerta liteke haurrak familia bereko bi irudi (adibidez, bi laukizuzen) familia berekotzat ez hartzea, baldin eta bi irudi horiek kanpoko ezaugarri itxuraz ezberdinak baldin badituzte (adibidez, laukizuzenetako bat *estandarra* da, 2×1 dimentsiokoa, eta bestea oso fina, $4 \times 0,5$ dimentsiokoa; hots, 20 irudiko laukizuzen urdina eta gorria).

18. irudia. VH0 haur batentzat, laukizuzen horiek ez dira familia berekoak.



Gainera, konparaketa horiek egiteko objektu fisikoak izango dituztenez gogoan, nahastu egingo dituzte irudi horien bestelako ezaugarri fisikoak ere, hala nola kolorea (horia, berdea, etab.) edota forma hori duen objekturen baten gainazalaren ezaugarria (latza, leuna, etab.) edota materiala (egurra, burdina, etab.).

Eta horretan, haurrek ez dituzte erabiliko objektuen ezaugarri fisikoez haraindi doazen deskribapen geometriko abstraktuak, hala nola «paralelo izatea», «elkarzuta izatea» edota «angeluzuzena izatea». Ezin espero daiteke VH0 *arrazoitze-mailan* dagoen haur batek termino geometriko horien esanahia ulertzerik, ez eta termino horiek arrazoiketa batean erabiltzerik ere.

Haur Hezkuntzako haur bat Lehen Hezkuntzara igarotzen denean, *arrazoibide-maila* horretan dagoela espero daiteke, esate baterako, forma geometrikoen deskribapenari eta izendapenari dagokienez; baina aldiro, ikaslea geometriako alor berri bat zerotik ikasten hasten denean (esate baterako, bigarren hezkuntzako ikasle bat trigonometria lehenengo aldiz ikasten hasten denean), berriz igarotzen da VH0 hastapen-mailatik alor horri dagokionez, epe labur batez besterik ez bada ere.

Sarasuaren (2013) arabera, haurrek irudi geometrikoak era global batean ikusten dituzte, unitarioak dira eta osotasun bat egiten dute. Irudiok ezin dira deskonposatu eta ez dute osagai edota atributu adierazgarririk. Horrela, VH0 *arrazoibide-mailan*, haurrek irudi horiek ezaugarritzen dituzte euren atributu adierazgarrienak soilik baliatuz.

Irudiak ez direnez ezagutzen euren parte edota barne-propietateen arabera, ezin da horien arteko sailkapenik egin antzekotasunen eta desberdintasunen arabera. Aldiz, mundu errealeko objektu fisiko ezagun baten antzekoak direlako multzoka daitezke: esate baterako, haurrak baldin badaki baloia esfera bat dela, pilota ere esfera bat dela ondoriozta dezake, baloia pilotaren antzekoa delako; bestalde, haurrak baldin badaki arbela laukizuzena dela, leihoa laukizuzena dela ondoriozta dezake, arbela leihoaren antzekoa delako, etab. Aldiz, eredu fisikoan, baloia eta arbela ez dira forma berekoak, eta horrela, esferak eta laukizuzenak badute elkarrengandik bereizten dituen ezaugarri bat.

Maila honetako ikasle batek ezin ditu orokortu irudi batean ikusten dituen ezaugarriak klase edo familia bereko beste irudi batera. Horrela, arbela eta leihoa familia bereko irudiak direla identifikatu duen haur batek arbelaren aldeak zenbatzen baditu eta lau alde dituela egiaztatzen badu, haur horrek ez du ondorioztatzen leihoak ere lau alde izango dituenik. Aldiz, zenbatu egin beharko ditu, baita ere, leihoaren aldean kopurua, irudi horrek ere lau alde dituela egiaztatzeko.

Arrazoibide-maila honetan, ikasleak hiztegi geometrikoa ikasten hasten dira, eta forma bereziak identifika ditzakete. Horrez gainera, irudi bat emanda, irudi hori kopiatzeko gauza dira.

5.1. JARDUERA TIPIKOAK VH0 ARRAZOIBIDE-MAILAN

Ikasle bati zeregin geometriko bat eskatzen diogunean, jakin beharko dugu, lehenengo eta behin, zeregin hori zein VH mailari dagokion. Baina zeregin bat, bere horretan, ezin da zuzenean VH maila batean kokatu, kokapen hori zereginean erabiliko den euskarriaren mendekoa delako; nolabait, euskarriak berak determinatzen du zereginaren *arrazoibide-maila*. Sarasuak (2013) papera erabiltzen du euskarri nagusi gisara, eta hura erabiltzeko lau molde ezberdintzen ditu:

- *Baliabide fisiko gisara*. Papera tolestuz edota moztuz egiten da jarduera, eta horrela, paperari izaera manipulagarria ematen zaio. Irudi baten gainean paper zuria jarritz azpikoa kalkatzea baliabide fisiko gisa ere kontsideratzen da.

- *Esku hutsez.* Haurrak irudi libreak egiten ditu paper zuriaren gainean, esku hutsez, inolako neurketa-tresnarik erabili gabe.
- *Lauki-sarea.* Paperaren gaineko lauki-sarea erreferentzia kartesiar gisa hartuz, haurrak irudiak egiten ditu sarearen gainean.
- *Marrazketa-tresnekin.* Haurrak marrazketa-tresnak erabiltzen ditu, hala nola erregela eta konpasa, edota zirkuluerdia, paper zuriaren gainean irudiak formalki eraikitzeko.

5.1.1. Baliabide fisikoekin

VH0 *arrazoibide-mailan* dagoen haur batek papera erabil dezake baliabide fisiko manipulagarri gisara, bai hura tolestuz, haren gainean kalkatuz, baita guraizeekin moztuz ere. Esate baterako, haurrari irudi baten eredua aurrean jartzen baldin bazaio, edo definizio ulergarri bat ematen bazaio, gai da hura papera tolestuz edota kalkatuz erreproduzitzeko.

Bestalde, haurra gai da propietate simple batzuk guraizeekin moztuz egiaztatzeko. Esate baterako, irudi baten barne-angeluen batura zenbatekoa den egiazta dezake irudiaren erpinak guraizeekin moztuz eta moztutako puntak berrantolatuz. Aldiz, propietate hori bera papera tolestuz egiaztatzeko zailtasunak agertuko ditu. Horrek erakusten du erabilitako euskarriak eragin zuzena izan dezakeela zereginaren arrakastan.

ARIKETAK

- (1) Egiazta ezazu paperezko triangelu baten hiru barne-angeluen batura angelu laua dela (180°), guraizeekin moztuz. Horretarako, lehenengo eta behin, hiru erpinetako bakoitza kolore ezberdin batez marraz dezakezu, behin erpinak moztu ostean horiek berrantolatzeko.
- (2) Egiazta ezazu paperezko lauki baten lau barne-angeluen batura bira osoa dela (360°), guraizeekin moztuz. Horretarako, lehenengo eta behin, lau erpinetako bakoitza kolore ezberdin batez marraz dezakezu, behin erpinak moztu ostean horiek berrantolatzeko.
- (3) Egiazta ezazu paperezko trapezio baten lau barne-angeluen batura bira osoa dela (360°), guraizeekin moztuz. Horretarako, lehenengo eta behin, lau erpinetako bakoitza kolore ezberdin batez marraz dezakezu, behin erpinak moztu ostean horiek berrantolatzeko.
- (4) Paper zati bat tolestuz, egin itzazu, hurrenez hurren: triangelu bat, lauki bat eta pentagono bat.
- (5) Poligono irregular baten eredua aurrean duzula (triangelu eskalenoa, lauki orokorra, pentagono irregularra), erreproduzi ezazu poligono hori paperaren gainean kalkatuz.

Oharra: (1), (2) eta (3) ariketetan, irudia guraizeekin mozten delako izango da haurrarentzat jarduera egingarria. Aldiz, jarduera horiek berak (angeluen baturak

egiaztatzea) papera tolestuz egingo balira, haurra ez da oro har gai izango jarduera horiek egiteko. Honenbestez, eta Van Hieleren ereduaren arabera, VH0 arrazoibide-mailan dauden haurrentzat irisgarriagoa da papera guraizeekin moztea, hura tolestea baino. Era berean, (4) jarduera papera tolestuz haurarentzat irisgarria eta egingarria da, horretan ez delako angeluen egiaztapenik eskatzen: soilik, forma globalak erreproduzitzen dira.

5.1.2. Esku hutsez paper zuriaren gainean

Papera moztu eta tolestu beharrean, haren gainean marrazteko aukera ematen bazaio, haurra gai izango da emandako eredu bat esku hutsez kopiaitzeko. Kasu horretan, irudiaren edo formaren erreprodukzio globala egingo du, barneko elementuetan erreparatu gabe. Irudi edo forma hori esku hutsez erreproduzitzeko gai izango da, baita haren definizio ulergarri bat ematen bazaio ere.

Irudiaren eredua bere osotasunean haurrari aurkeztu gabe ere, kasu batzuetan haurra gai izango da irudi bat erreproduzitzeko, irudiaren bigarren mailako elementu bat ematen bazaio (adibidez, diagonal bat). Demagun haurrari ematen zaiola paperaren gainean marraztutako diagonal bat, eta eskatzen zaiola laukizuzen bat eraikitzeke diagonal horretatik abiatuta. Haurra gai izango da, kasu batzuetan, irudi hori erreproduzitzeko: esate baterako, laukizuzena marrazteko gai izango da, baina ez du oro har lortuko karratu bat erreproduzitzea.

ARIKETAK

- (1) Triangelu isoszelearen izen eta definiziotik abiatuz, marraz ezazu esku hutsez horrelako triangelu bat.
- (2) Karratuaren izen eta definiziotik abiatuz, marraz ezazu esku hutsez karratu bat.
- (3) Pentagonoaren izen eta definiziotik abiatuz, marraz ezazu esku hutsez pentagono bat.
- (4) Laukiaren izen eta definiziotik abiatuz, eta bertikalean adierazitako diagonal bat emanda, marraz ezazu esku hutsez diagonal hori duen lauki bat.
- (5) Laukiaren izen eta definiziotik abiatuz, eta norabide zeharrean adierazitako diagonal bat emanda, marraz ezazu esku hutsez diagonal hori duen lauki bat.
- (6) Triangelu eskaleno baten eredua aurrean duzula, erreproduzi ezazu esku hutsez haren berdin bat.
- (7) Laukizuzen baten eredua aurrean duzula, erreproduzi ezazu esku hutsez haren berdin bat.
- (8) Pentagono irregular baten eredua aurrean duzula, erreproduzi ezazu esku hutsez haren berdin bat.

Oharra: (4) eta (5) ariketetan, lauki orokor bat eskatzen delako izango da haurarentzat egingarria jarduera. Horrela, haurrak erabaki dezake zer lauki eraiki, nahieran. Aldiz, haurra ez da oro har gai izango jarduera horiek egiteko lauki jakin bat eraikitzea eskatzen bazaio, adibidez, karratua.

5.1.3. Lauki-sarearen gainean

Paper zuria erabili beharrean, lauki-sarea duen papera erabiliz gero, haurrak nolabaiteko erreferentzia kartesiarra balia dezake irudiak eraikitzeke orduan. Lauki-sareak erraztu egiten du, oro har, eredu bat kopiatuz irudia erreproduzitzea¹⁴. Gainera, irudi lau identifikagarri baten oinarritzko elementu bat emanda (adibidez, poligono baten aldea), haurrak erraztasun handiagoz osatuko du elementu hori duen irudia (adibidez, karratu baten aldea emanda norabide horizontal edo zeharrean, haurrak karratu hori adieraz dezake; esku hutsez, ez dira izaten hori egiteko gai VH0 mailan).

ARIKETAK

- (1) Karratu baten izen eta definiziotik abiatuz, eta norabide horizontalean adierazitako alde bat emanda, marraz ezazu alde hori duen karratu bat lauki-sarearen gainean.
- (2) Karratu baten izen eta definiziotik abiatuz, eta norabide zeharrean adierazitako alde bat emanda, marraz ezazu alde hori duen karratu bat lauki-sarearen gainean.
- (3) Erronbo baten izen eta definiziotik abiatuz, eta alde bat emanda, marraz ezazu alde hori duen eta karratua ez den erronbo bat lauki-sarearen gainean.
- (4) Heptagono irregular baten eredia emanda, erreproduzi ezazu heptagono hori lauki-sarearen gainean.

Nahiz eta lauki-sareak erreferentzia kartesiarra ematen duen, VH0 mailan haurrak ez dira gai unitateak zenbatuz oinarritzko propietateak egiaztatzeke, ezta arrazoitzeke ere. Esate baterako, ez dira gai paralelogramoaren aurkako aldeak luzera berekoak direla egiaztatzeke, laukiak zenbatuz. Oinarritzko propietateak egiaztatzeke gai ez badira, are gutxiago izango dira gai oinarritzkoak ez diren beste propietate batzuk egiaztatzeke edo arrazoitzeke. Adibidez, ez dira gai paralelogramoaren diagonalek erdiko puntuan elkar ebakitzen dutela egiaztatzeke, laukiak zenbatuz.

5.1.4. Marrazteko tresnak erabiliz

Maila honetan, haurra gai izango da erregela eta konpasa erabiliz oinarritzko propietateak egiaztatzeke. Esate baterako, paralelogramoaren aurkako aldeen luzera-berdintasuna egiaztatzeke gai izango da, erregelarekin haiek neurtuz edota konpasarekin haien neurriak konparatuz.

ARIKETAK

- (1) Erregela eta konpasa baliatuz, egiazta ezazu triangelu isoszele batek luzera bereko bi alde dituela.
- (2) Erregela eta konpasa baliatuz, egiazta ezazu karratu baten lau aldeak luzera berekoak direla.

14. Euskarri gisa lauki-sarea ematen zaienean, haurrek aldeen kopuru bikoitia duten irudiak eraikitzeke joera eta erraztasuna izango dute: karratua, hexagonoa, oktagonoa, etab. Era berean, zenbait fenomeno didaktiko sortuko dira paralelismoari eta neurriari loturik; zehaztasun gehiagorako, ikus Txikiren Lursaila jarduera (Lasa, 2015).

- (3) Erregela eta konpasa baliatuz, egiazta ezazu laukizuzen baten aldeak binaka direla luzera berekoak.
- (4) Erregela eta konpasa baliatuz, egiazta ezazu erronboaren lau aldeak luzera berekoak direla.

Haurra, beraz, gai da egiaztapen errazak egiteko erregela eta konpasarekin, betiere akzioa bakarra eta zuzena bada: neurketa edo konparaketa soil bat egitea. Erregela marrazteko erabiltzen du bakarrik, eta ez du uste konpasa eta angelugarraiagailua beharrezkoak zaizkionik. Horrela, VH0 mailan dagoen haur bati ezin eska dakioke marrazketa-tresnekin irudi lauak eraikitzea, lauki soilak irudikatzeke bada ere: ez definiziotik abiatuta, ez haren elementu bat emanda, ezta eredu bat aurrean duela ere.

5.2. ARRAZOIBIDE-MAILETAN AURRERA NOLA EGIN

Van Hieleren mailetak bakoitzak konplexutasun-gradu bat adierazten du, eta, gainera, maila bakoitza aurrekoaren gainean oinarritzen da. Horren arabera, ikasle batek ezin du bigarren mailaren arabera pentsatu, lehen mailako arrazoibide-gaitasunaren jabe ez bada, eta ezinezkoa da hirugarren mailaren arabera pentsatzea, aurretik bigarren mailako arrazoibide-gaitasunik izan ezean. Horrela, bada, ezin da arrazoibide-maila bat eskuratu, lehendabizi aurrekoa lortu ez bada.

Eta horietan aurrera egiteko, metodologia zehatz bat zehazten da, non maila bakoitzean zehazten diren *ageriko elementuak* eta *ezkutuko elementuak*. Ikasleak era inkontziente batean eskuratzen ditu ezkutuko elementu horiek, ia oharkabea, eta ikaslea ez da gaitasun horien guztiz jabe egingo hurrengo mailara heldu arte, hots, era esplizituan eta jakinaren gainean erabiltzen ez dituen arte.

5.2.1. VH0tik VH1era nola igaro

VH0 mailan, *ageriko elementuak* irudi geometriko globalak dira: triangelua, laukia, karratua, laukizuzena, pentagonoa, zirkunferentzia, etab. Haurrak identifikatu, izendatu eta eraiki egiten ditu forma horiek, dagokion euskarria erabiliz: papera eta guraizeak, paper zuria, paper laukiduna, etab.

Irudi horiek eraikitzen dituenean, irudi horien parteak eta barneko elementuak era inplizitu batean baliatzen ditu, baina ez ditu izendatzen, eta ez ditu identifikatzen berezko izaera duten elementu propio gisa. Horrela, ez ditu era kontziente batean erabiltzen erpina, aldea, aurpegia, ertza, erradioa, diametroa, etab.

VH0 mailan, beraz, haurrak ez ditu irudi globalak deskonposatzen, eta ez ditu aztertzen ez irudiaren parteak ezta haren propietateak ere. Horrela, maila honetan, irudien parteak eta propietateak *ezkutuko elementuak* dira oraindik. VH1 mailara igarotzeko ahaleginean, esplizitatu egin beharko dira irudi global batek barne dituen elementuak.

Barne-elementuen esplizitatze hori, funtsean, jarduera komunikatiboa da, eta horregatik, hizkuntzak berebiziko erlazioa izango du maila honetan jarduera matematikoarekin. Maila bakoitzean, arrazoibide-gaitasunak bere isla du erabiltzen den terminologian eta adierazpideetan. Momentuz, VH0 mailan, hizkera matematikoak ez du inolako esanahirik haurarentzat, eta termino guztiak ulertzen ditu hizkera naturalean duten esanahiarekin. Esate baterako, *frogatu* hitzak ez du inolako esanahirik maila honetan: izatekotan, *saiatu* edo *probatu* hitzaren sinonimo bat izango da haurarentzat. Jarraian VH0 mailatik VH1 mailara igarotzeko bidea aurkezten da.

1. *Informazioa*. Haurrak irudi globalak manipulatzeko dituen bitartean, irakasleak irudi edo forma geometriko horiek dituzten barneko elementuak eta ezaugarriak izendatzeko ditu haurren aurrean. Irakasleak elementuak seinalatzen dituen bitartean, elementu horien izenak eta ezaugarriak esango ditu, ahoz, haurrekin hitz egiten duen bitartean. Batzuetan, elementu horiek izendatzeko sinbolo berariazkoak erabiltzen dira, eta sinbolo horien esanahia ere argitu beharko du: zirkunferentzia baten erradioa zentrotik perimetrotik puntu batera doan marra batez adierazten da; zenbaitetan, poligonoen erpinak adierazteko puntu borobilak erabiltzen dira, etab.
2. *Orientazio gidatua*. Ikasleek irudien elementuak eta horien ezaugarriak identifikatzeko jarduerak egingo dituzte. Fase honen helburua izango da ikasleak ahoz adieraz ditzala irudi eta forma geometrikoen barneko elementuak eta horien propietateak, era autonomo batean. Irudi geometrikoen konposaketa- eta deskonposaketa-jarduerak aproposak dira fase honetan, irudi konplexuen barne-egitura azaleratzen laguntzen dutelako.
3. *Esplizitate*. Aurreko fasean, ikasleek era autonomoan lan egiten dute, edota irakaslearekin elkarrekin. Hirugarren fase honen funtsa komunikatiboa da, eta taldeko haurren artean formulazio-jarduerak egitea du xede, egoera didaktiko edota jolasen bidez. Jarduera horiek arrakastatsuak izan daitezten, komunikazioak efektiboa izan beharko du eta ongi erabili beharko dira forma geometrikoen barneko elementuen izenak eta horien propietateak. Arreta berezia emango zaio terminologia egokia erabiltzeari.
4. *Orientazio libre*. Jarduera ugari egin ostean, esplizitatu egin dira haurren aurrean irudi geometriko globalek dituzten barne-elementuak eta ezaugarriak. Irakasleak haurrei aurkezten dizkien jardueretan elementu sekundarioak esplizitatzen dira. Adibidez, «karratuaren diagonalak» esamoldea erabili beharrean, «diagonalak» hitza bere horretan erabiliko da, irudi globalari erreferentzia egin gabe. Ikur eta sinboloek galdu egiten dute, apurka-apurka, euren izaera bisuala, eta esanahi propioa duten entitate orokor gisa agertzen dira: adibidez, puntua eta erradioa jada ez

dira sinbolo ezezagun batzuk, baina entitate propioak, eta esanahi propioa dute, karratuak eta zirkunferentziak esanahi propioa duten modu berean.

5. *Integrazioa*. Fase honetan, irakasleak berreskuratu egiten du protagonismoa edo eskola zuzentzeko ardura. Ikasitako guztiaren sintesia egitea dagokio, garrantzia duena nabarmenduz eta akzesorioa dena baztertuz. Batez ere, ikaslearen ebaluaziorako garrantzitsua den aspekturen bat azaleratu bada, irakasleari dagokio orain aspektu horri garrantzia ematea, ikasleak atxiki dezan. Adibidez, ikasleek poligonoen inguruan ikasi dituzten eduki guztien artean, irakasleak ahozko edota idatzizko proba batean laukiei buruzko edukiak galdetzen badizkie, irakasleak nabarmendu beharko du hori dela une honetan garrantzitsua.

Bosgarren fase hori gainditurik, ikaslea VH1 mailan dagoela esan genezake.

5.2.2. *Software dinamikoaren rola*

Esplorazio-jarduerak lagundu egiten dute Van Hieleren maila batetik hurrengora igarotzea, eta horrela, esplorazio-eredu dinamikoak aproposak izango dira orientazio gidatuko faseetan. Funtsean, VH0 mailan dagoen ikasle batek eredu dinamiko bat manipulatzeko du *herrestatzearen* bidez. Herrestatzearen oinarritzako akzio hori saguaren bidez edo arbela digital baten gainean hatzarekin sakatzeko egiten du.

Herrestatzearen bidez, haurrak irudi geometriko sinpleen konposaketa eta konplexuen deskonposaketa landu ditzake, eta irudi geometrikoen gainean puntuak arrastaka eraman ditzake eredu dinamikoan. Hona hemen, adibide gisa, Haur Hezkuntzako eta Lehen Hezkuntzako lehen ziklorako aproposak izan daitezkeen eraikuntza dinamiko batzuk.

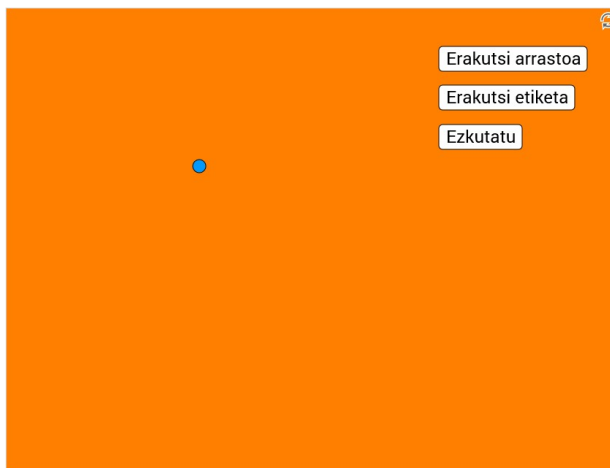
«Planoko puntuak» deritzon baliabidean¹⁵ (Lasa, Wilhelmi eta Abaurrea, 2017), puntu urdin mugikor bat aurkezten da, zeina herrestatzearen bidez mugi daitekeen (19. irudia). Baliabidea honela erabiliko da:

1. Haurrak, lehenengo eta behin, puntu urdinaren gainean sakatzeko du eta puntua mugitu egingo du, herrestatuz. Puntua ez da libreki mugituko, aldiz, aldezturik programaturik dago ibilbide jakin bat egin dezan. Puntua ibilbide jakin bat eginez mugituko da, baina ibilbidearen arrastorik ez da pantailan ikusiko, momentuz. Horrela, behin puntua mugitu ostean, haurrak haren ibilbidea deskribatu behar du, ahoz.
2. Haurrak proposatu duen ibilbidea zuzena ote den egiaztatzeko, puntuaren arrastoa erakutsiko du, dagokion botoia sakatzeko. Orain, puntu urdinaren gainean berriz sakatzeko gero, ibilbidearen traza marraztu egingo da, eta puntuaren ibilbidea ikusgai egingo da. Horrela, haurrak baieztatzen ahalko du aurretik proposatu duen ibilbidea egokia ote zen.

15. Baliabidea hemen eskuragai: <https://www.geogebra.org/m/Cvy84hyz>

3. Azkenik, haurrak sakatu egingo du etiketa erakusteko botoia. Etiketa erakusterakoan, testu bat agertuko da pantailan, eta testu horretan, haurrak irakurtzen ahalko du zein izan den puntuak egindako ibilbidea. Eredu dinamikoak berak emango dio haurrari, beraz, beharrezkoa zaion atzeraelikadura, proposatu duen ibilbidea zuzena ote zen argitzeko.

19. irudia. Planoko puntuak (Lasa, Wilhelmi eta Abaurrea, 2017).



«Larraintzar»¹⁶ deritzon baliabidean¹⁷ (Lasa, 2015), irudien konposaketa eta deskonposaketa lantzen da zenbait eredu dinamikoren bidez. Berez, ardatz bertikaleko simetriak lantzeko baliabidea da, eta globalizazio-printzipioari jarraiki, jardueran lantzen dira haurrak momentuan ikasten ari diren beste eduki batzuk, hala nola letrak (bereziki, ardatz bertikaleko barne-simetria duten letrak), idazkera eta irakurketa (20. irudia).

1. *Aurkezpena*. KAIXO hitzaren letrak lantzen dira eta eraikuntzan agertzen diren irudiak izendatzen dira.
2. *Deskonposaketa-puzzleak*. Triangeluaren eta karratuaren konposaketa eta deskonposaketa lantzen dira puzzleen bidez. Horrekin batera, poligono gisako etxe baten eraikuntza egin behar da.
3. *Saiakera libre*a. GeoGebraren tresna-barra pertsonalizatu egin da. Ezkutatu dira kurtsoare ez beste tresna-barra guztiak eta ezarri dira irakasleek propio diseinaturiko tresna berriak. Tresna horien bidez, haurrek konposizio

16. Jarduera hauek Ainhoa Belaunzaran, Irantzu Echarri eta Gonzalo Elcano irakasleek diseinatu zituzten Larraintzar eskolan. Proposamenak saria irabazi zuen 2010ean, Salamancan ospatu zen GeoGebra egunean: <http://diageogebra.info/>

Bestalde, Nafarroako Matematikaren Irakaskuntzarako II. Jardunaldietako baliabideetan ere kontsulta daiteke:

<http://caps.educacion.navarra.es/matematika/jornadas2/>

17. Baliabidea hemen eskuragai: <https://www.geogebra.org/m/Nxtzqp6y>

libreak egiten dituzte pantailan, eta, ondoren, gustukoenak aukeratzen dituzte inprimatu eta pasabideetako hormetan eskegitzeko.

4. *Ardatz bertikaleko simetrien ilustrazioa*. Letrak, barneko simetria-ardatza duten formak eta ordena lantzeaz gain, saguaren erabilera eta ordenagailuen gelako arauak lantzen dira. Simetria kontzeptuaren ilustrazio-momentua egiten da, eta erakusten dira barneko simetria-ardatz bertikala duten letrak. Horretarako, AMATXO hitza baliatzen da.
5. *Puzzle simetrikoak*. Deskonposaketa-puzleen antzera (2. fasea), haurrek simetria-ardatza duten puzzleak osatzen dituzte. Horretarako, hiru eraikuntza baliatzen dituzte: 1) forma geometriko simetrikoak eredu baten arabera osatzeko, 2) marrazki simetrikoak eredu baten arabera osatzeko, eta 3) marrazki simetrikoak nahierara eraikitzeke ispilu-simetriak marrazten dituen eraikuntza libre baten arabera. Horrekin batera letrak ere lantzen dira, batez ere simetria-ardatz bertikala duten letrak.

20. irudia. Larraintzar (Lasa, 2015).



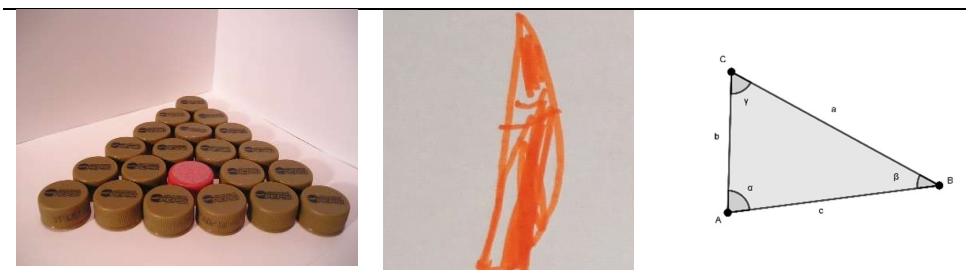
Funtsean, ikaslea Van Hieleren arrazoibide-maila baten mugara heltzen denean, agortu egiten zaizkio jardura horietan aurrera egiteko beharrezkoak zaizkion ezagutza aritmetikoak eta aljebraikoak. Maisutza aritmetikoaren muga hori gainditzeko, eredu dinamiko bat baliatuz esplora daiteke egoera berria, eta horrela, softwareak Van Hieleren hurrengo arrazoibide-mailarako zubi gisa jokatu du.

5.3. ASPEKTU FORMALAK VH0 MAILAN: IRUDIKAPENAK

VH0 arrazoibide-maila karakterizatzen duen ezaugarri nagusia, hain justu ere, ezagutza matematiko ororen eta hizkuntza matematiko ororen gabezia da: Horregatik hasten dira VH mailak zerotik. Maila honetan, beraz, irakasleak jakin beharreko matematikaren aspektu formal sakonik ez dago.

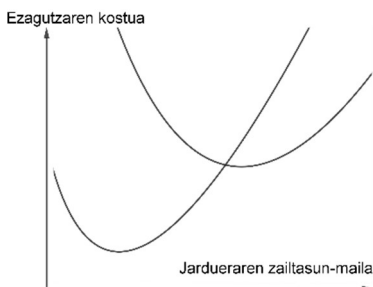
Maila honetan, haurra hasi egiten da adierazpen matematikoak idazten, eta irakasleak adi egon beharko du adierazpen horien abstrakzio-maila zein den jakiteko (21. irudia). Objektu matematikoak adierazi nahi dituenean, hasieran, haurrak objektu konkretuak erabiltzen ditu, eta eskuaz manipulatuak ditu objektuok (*errepresentazio konkretua*). Behin manipulazioak menderatu ostean, objektu horien irudikapen grafikoak egiten hasiko da (*errepresentazio piktoria*). Irudikapen horiek, hasiera batean, objektu errealeen marrazkiak dira, eta xehetasun guztiz marraz ditzake haurrak; irudikapenak egin ahala, irudi horiek geroz eta sinpleagoak izango dira, geroz eta abstraktuagoak, eta azkenik kodifikaturiko irudiak izatera igaroko dira (*errepresentazio abstraktuak*).

21. irudia. Triangelu baten adierazpenak: konkretua, piktoria eta abstraktua.



Haur txikiaren momentua errespetatu behar da, eta beraz, ez zaio inoiz bortxatu behar irudikapen mota bat atzean utzi eta hurrengo erabil dezan. Haurra prest dagoenean, bere buruaren gainean nahikoa segurtasuna duenean, aurreko adierazpide mota neketsuegia zaionean, orduan, bere kabuz egingo du. Ikaslea beti saiatuko da metodorik errazena erabiltzen, eta ikusten duenean posible dela beste estrategia berri bat ere erabiltzea, horren erabilerak indarra hartuko du ikasleak jarduera aurrera eramateko metodo berriak zaharrak baino abantaila gehiago ematen dituela ikusten duenean. Momentu horretan zaharra eraginkorra ez izatera pasatzen da. Beraz, jardueraren zailtasun-maila handitu ahala, errepresentazio zaharra haurrari neketsuegia gertatzen zaio, eta errepresentazio berriaren abantailak baloratuko ditu. Irakasleak jardueraren aldagai didaktikoak aldatuz eragin dezake haurraren teknika zaharrarekiko arbuioa (22. irudia).

22. irudia. Estrategia baten aldaketa kostuaren arabera (Brousseau, 2007).

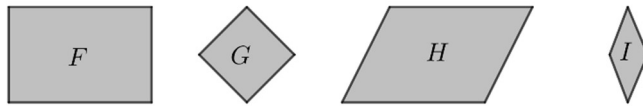


Adibidea. Multzo batean dagoen elementu kopurua paperean adierazteko (elementuek eurek osatzen dute errepresentazio konkretua), ikasleek adierazpen piktoriko bidez egingo dute hasieran: objektu guztiak marraztuko dituzte, xehetasun guztiz. Horrela, irakasleak aldagai didaktikoak aldatuko ditu (elementuen kopurua handituz, marrazteko zailak diren objektuak baliatuz, edota objektuen posizioa konplikatur) haurrari nekezagoa izan dakion adierazpen piktorikoa egitea abstraktua baino. Ondorioz, ariketa ahalik eta esfortzurik txikienaz ebazteko asmoz, haurrak adierazpen abstraktuaren abantailak onartuko ditu. Adibidez, lau elementu soilik badaude, erraza da lau elementu horien multzoa eraikitzea, edota lau elementu horien marrazki zehatza egitea; hamar edo hoge elementu badira, marrazki zehatzak egitea nekeza da, eta, aldiz, paperean «makilak» markatzeak abantaila dakar; hogeita hiru edota hogeita hamalau baldin badira, marrazki zehatza egitea «23» edota «34» idaztea baino neketsuagoa da, etab.

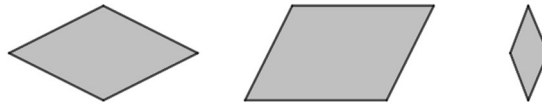
5.4. ARIKETAK

1. Arrazoitu ezazu jardura hauek VH0 mailari dagozkion ala ez:
 - a. Irudi lau askoren artean triangelua identifikatzea.
 - b. GeoGebra erabiliz edozein triangeluren erdikariak puntu batean bat egiten dutela frogatzea.
 - c. Triangeluen angeluen arabera sailkapena egitea.
 - d. Ikasgelan karratuaren forma daukaten objektuak bilatzea.
 - e. Laukizuzen bat eredutzat izanda, egurrezko makilak erabiliz laukizuzen bat eraikitzea.
2. Arrazoitu jardura hauek VH0 mailakoak diren ala ez. Ariketaren bat VH0 mailakoa bada, zer ezagutzatan oinarrituko dira ikasleak hori erantzuteko? Zer uste duzu erantzun egiteko?
 - a. Irudi hauetatik zeintzuk dira karratuak?
 - i. Ez dago karraturik.
 - ii. Bakarrik G .
 - iii. Bakarrik F eta G .

- iv. Bakarrik I eta G .
- v. Guztiak dira karratuak.



- b. Erronbo batek lau aldeak luzera berekoak ditu (irudietan ikus daitekeen bezala). Honako zer propietate ez da egia erronboetan?
 - i. Bi diagonalak luzera berekoak dira.
 - ii. Diagonal bakoitza erronboaren bi angeluen erdikaria da.
 - iii. Bi diagonalak elkarren perpendikularrak dira.
 - iv. Kontrako angeluek neurri berdina daukate.



- 3. Irudi lau baten adierazpen hau daukagu. Zer adierazpen mota da? Zein beste modutan adieraz daiteke irudi lau hori? Eraiki itzazu irudikapen horiek.



- 4. Deskriba itzazu ikasle batek emango dituen pausoak eta pasatuko dituen momentuak, triangelu orokor bat adierazteko «triangelua» hitza erabiltzera iritsi arte.

6. Analisia (VH1)

VH0 arrazoibide-maila gainditu duen haurrak jauzi kualitatiboa emango du VH1 mailan. Irudiei ikuspegi global batetik begiratzeari utziko dio, eta jabetuko da irudi horiek elementuz osaturik daudela. Horrela, irudi horien *analisia* egiteko gaitasuna garatuko du, eta aspektu horrek ezaugarritzen du, hain zuzen ere, VH1 maila.

Bisualizazio-mailako haur batentzat, laukizuzen bat ez da objektu bat berez, aldiz, errealtateko objektuen ezaugarri bat da, adjektibo da: «atea laukizuzena da», «liburua laukizuzena da», etab. Analisi-mailan, aldiz, irudiaren barneko ezaugarriak azaleratuko dira eta laukizuzena deskribatzeko hizkera matematikoa erabiliko da: «laukizuzen bat zera da, aldeak binaka paraleloak eta angelu zuzenak dituen laukia».

Irudi geometrikoaren izaera abstraktu hori ezagutzen duenez, haurra hasiko da irudia ikusten klase bateko ordezkari gisa. Hau da, irudi mota batek propietate jakin bat betetzen duela egiaztatzen badu, propietate hori mota bereko gainerako irudi guztiek ere beteko dutela baieztatzen ahalko du. Esate baterako, zenbait erronbo manipulatu ostean, ohartzen bada erronbo horien diagonalak elkarzutak direla, beste edozein erronboren diagonalak ere elkarzutak direla baieztatuko du, eta ez du bestelako frogarik beharko.

Irudi abstraktuak klase bateko ordezkari gisa ikusteko gai izango diren arren, ez dira gai izango, oro har, klaseak eurak ezartzeko. Hau da, erabateko baliokidetasuna ez duten bi irudi hartuz gero (adibidez, karratua eta laukizuzena), haurrak esan dezake bi horiek klase ezberdineko irudiak direla eta ez direla familia berekoak; aldiz, karratua laukizuzen baten kasu berezia dela baieztatzeko gai ez da izango. Horrela, haurraren ikuspegi mugatutik, propietate bereizgarri batzuek beste propietate komun batzuek baino garrantzia handiagoa dute.

Haurra gai izango da irudiak dituen parteak deskribatzeko, hizkera informala erabiliz. Irudiaren propietateak emateko gai ere izango da, esperimentazioaren eta behaketaren bidez. Gainera, aurretik esan bezala, propietate horiek klase bereko gainerako irudietara orokortzeko gai izango da, baina ezingo ditu sailkapen logikoak egin ez eta klaseak eraiki elementuen propietateak baliatuz (ikusiko denez, horiek VH2 mailako ezaugarriak dira). Edonola ere, sailkapen horiek egin litzake irudien formaz edota koloreaz baliatuz.

6.1. JARDUERA TIPIKOAK VH1 ARRAZOIBIDE-MAILAN

5. kapituluaren bezalaxe, arrazoibide-maila honetan egin litezkeen jarduerak sailkatuko dira erabilitako euskarriaren arabera (Sarasua, 2013): baliabide fisikoekin, esku hutsez, lauki-sarea baliatuz eta marrazketa-tresnekin. Gainera, argudiatuko da nola software dinamikoa baliatuz erraztu daitekeen VH1etik VH2rako jauzia.

6.1.1. Baliabide fisikoekin

Aurreko mailan, haurrak gai ziren papera guraizeekin mozteko eta mozketaren horietatik oinarritzeko propietateak frogatzeko, baina paperarekin egindako tolesduren bidezko konprobatzeak ez ziren egingarriak. Oraingoan, berriz, haurrak gai izango dira papera tolestuz zuzenekoak ez diren propietate batzuk frogatzeko. Esate baterako, triangelu baten erdikariak puntu bakar batean elkar topatzen dutela egiazta dezakete.

ARIKETAK

- (1) Egiazta ezazu paperezko triangelu baten hiru barne-angeluen batura angelu laua dela (180°), tolesdurak eginez. Horretarako, lehenengo eta behin, hiru erpinetako bakoitza kolore ezberdin batez marraz dezakezu, behin erpinak tolestu ostean horiek berrantolatzeke.
- (2) Egiazta ezazu paperezko lauki baten lau barne-angeluen batura bira osoa dela (360°), tolesdurak eginez. Horretarako, lehenengo eta behin, lau erpinetako bakoitza kolore ezberdin batez marraz dezakezu, behin erpinak tolestu ostean horiek berrantolatzeke.
- (3) Egiazta ezazu paperezko trapezio baten lau barne-angeluen batura bira osoa dela (360°), tolesdurak eginez. Horretarako, lehenengo eta behin, lau erpinetako bakoitza kolore ezberdin batez marraz dezakezu, behin erpinak tolestu ostean horiek berrantolatzeke.
- (4) Egiazta ezazu paperezko triangelu baten erdibitzaileek puntu batean bat egiten dutela, tolesdurak eginez.
- (5) Egiazta ezazu paperezko triangelu baten erdikariak puntu batean bat egiten dutela, tolesdurak eginez.
- (6) Egiazta ezazu paperezko triangelu baten erdibidekoek puntu batean bat egiten dutela, tolesdurak eginez.
- (7) Egiazta ezazu paperezko triangelu baten altuerak puntu batean bat egiten dutela, tolesdurak eginez.
- (8) Poligono irregular baten erdua aurrean duzula (triangelu eskalenoa, lauki orokorra, pentagono irregularra), erreproduzi ezazu poligono hori paper zati bat tolestuz.

6.1.2. Esku hutsez paper zuriaren gainean

Esan denez, VH0 mailan haurra forma globalak irudikatzeko gai da, eta bigarren mailako elementu batetik abiatuta irudi bat berregitea eskatzen zaionean, kasu batzuetan baizik ez du lortuko irudi hori erreproduzitzea.

VH1 mailan, oro har, haurra gai izango da esku hutsez edozein forma berreraikitzeke, erreferentzia gisa ematen zaionean oinarritzko elementu bat (aldea, ertza, erpina) edota bigarren mailako elementu bat (diagonala). Esate baterako, haurra gai izango da karratu bat berreraikitzeke haren diagonal batetik abiatuz, diagonala posizio tipikoan dagoenean (esan dugunez, VH0 mailan hori ez da gertatuko). Elementu horien posizioa tipikoa ez denean, haurrak zailtasunak izan ditzake, baina zailtasun horiek gaindigarriak izango dira.

ARIKETAK

- (1) Laukizuzen baten izen eta definiziotik abiatuz, eta norabide zeiharrean adierazita dagoen alde bat emanda, marraz ezazu alde hori duen laukizuzen ez karratu bat, esku hutsez.
- (2) Karratu baten izen eta definiziotik abiatuz, eta norabide zeiharrean adierazita dagoen diagonal bat emanda, marraz ezazu diagonal hori duen karratu bat, esku hutsez.
- (3) Hexagono baten izen eta definiziotik abiatuz, eta diagonal bat eta angelu bat emanda, marraz ezazu hexagono bat esku hutsez.

6.1.3. Lauki-sarearen gainean

Maila honetan, haurrak gai izango dira izena eta definizioa emanda forma orokorrak lauki-sarearen gainean irudikatzeko. Esate baterako, triangelu kamuts bat irudikatzeko gai izango dira, izena eta definizioa emanda. VH0 mailan bezalaxe, gai izango dira oinarritzko elementu batetik abiatuz (adb., poligono baten aldea) elementu hori duen irudia berreraikitzeke, eta zailtasunak izango ditu bigarren mailako elementuetatik abiatuz irudi konplexuagoak lauki-sarean irudikatzeko: hau da, VH0 mailarekin ez dago alderik aspektu horri dagokionez. Esate baterako, diagonal bat emanda trapezio bat marrazteko ez da gai izango.

Aldiz, VH0 mailan ez bezala, haurra gai izango da lauki-sarearen gainean unitateak zenbatuz oinarritzko propietateak konprobatzeko eta arrazoitzeko. Esate baterako, paralelogramo baten aurkako aldeak luzera berekoak direla egiaztatzeke gai izango da, laukitxoak zenbatuz. Aldiz, propietate konplexuagoak egiaztatzeke zailtasunak izango ditu: esate baterako, ezingo du egiaztatu paralelogramo baten diagonalek erdiko puntuan elkar ebakitzen dutela; halaber, ezingo du Pitagorasen teorema lauki-sarean egiaztatu laukitxoak zenbatuz.

ARIKETAK

- (1) Triangelu kamuts baten izen eta definiziotik abiatuz, marraz ezazu triangelu kamuts bat lauki-sarearen gainean.
- (2) Lauki-sarearen gainean laukitxoak zenbatuz, egiazta ezazu oinarritzko propietate hau: «Paralelogramo bat emanda, paralelogramo horren alde paraleloak binaka dira luzera berekoak».

6.1.4. Marrazteko tresnak erabiliz

Aurreko mailan bezalaxe, haurra ez da gai marrazketa-tresnekin irudi lauak eraikitzeke, ez ere du bat emanda, ez definiziotik abiatuta, ezta haren elementu bat emanda ere. Irudiak doitasunez egiteko erregela eta konpasa ez zaizkio beharrezkoak iruditzen: erregela marrazteko erabiltzen du soilik eta konpasa eta angelu-garraiaigailua ez zaizkio beharrezkoak iruditzen.

Salbuespen gisa, irudi sinple batzuk konpasarekin eraikitzeke gai izan daiteke, betiere, teknika horrek pauso bakarra eskatzen baldin badu. Adibidez, erregela eta konpasa erabiliz, triangelu aldekode bat marrazteko teknika ikas dezake.

ARIKETAK

- (1) Erregela eta konpasa baliatuz, eta haren izena eta definizioa ezagututa, marraz ezazu triangelu aldekode bat.

Haurrak soilik egiazta ditzake berehalakoak diren propietateak (neurketa edo konparaketa soil eta erraz bat eskatzen duten egiaztatzeak), baina ezingo ditu egin bi pauso baino gehiago eskatzen duten eta konplexuak diren egiaztapenak. Esate baterako, triangelu baten erdikari edo erdibitzaileek puntu batean bat egiten dutela egiaztatzea, hori ez da egingarria haur hauentzat.

6.2. ARRAZOIBIDE-MAILETAN AURRERA NOLA EGIN: VH1-ETIK VH2-RA

VH1 mailan, *ageriko elementuak* irudi geometrikoen parteak (elementuak) eta parte horiek betetzen dituzten propietateak dira: aldea, erpina, diagonal, erdibitzailea, erdibidekoa, etab.; triangelu aldeberdina izatea, isoszelea izatea, kamutsa izatea, etab.; aurkako bi alde elkarren paraleloak izatea, aldeak binaka paraleloak izatea, etab. Horiez gainera, noski, haurrak ezagutzen ditu VH0 mailari dagozkion ageriko elementuak (5.2.1. sekzioan zehaztu dira).

Irudi edo forma geometriko batek betetzen dituen propietateak esateko eta egiaztatzeke gai den arren, etapa honetan haurra oraindik ez da gai propietate horien artean dauden inplikazioak ondorioztatzeke. Hain zuzen ere, inplikazioak ondorioztatzeke gaitasun horiek izango dira etapa hau ezaugarritzen duten *ezkutuko elementuak*. Haurra VH2 mailara igaroko bada, esplizitatu egin beharko dira propietate horien artean dauden harremanak eta konexioak.

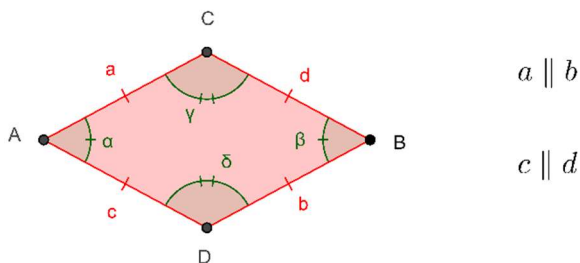
Maila batetik hurrengora, hizkuntza matematikoa garatu egiten da, gutxika. VH0 mailan ez bezala, non esan den hizkuntza naturalaz aparteko hizkera matematiko propiorik ez zegoela, VH1 mailan terminologia matematiko zehatza erabiltzen hasiko da: elementu matematikoen izen teknikoak erabiliko da, haren esanahi zehatzean, eta hizkera matematiko formalean formulaturiko definizioak erabiliko dira, gutxika. Esate baterako, VH1 mailan, *frogatu* hitzak gainditu egiten du kaleko hizkera (*saiatu* edo *probatu*), eta orain, zera esan nahiko du, «propietate bat betetzen dela egiaztatu, kasuen kopuru txiki batean». Ohikoan, egiaztapen hori egiteko, tresna edo instrumentu jakin baten bidez neurketak egingo dira.

1. *Informazioa*. Haurrak irudiak eta formen parteak manipulatzten dituen bitartean, irakasleak irudi edo forma geometriko horiek betetzen dituzten propietateak nabarmenduko ditu haurraren aurrean. Irakasleak formaren elementuak seinatzen dituen bitartean (adibidez, erronbo baten aldeak), elementu horiek betetzen dituzten propietateak esango ditu (erronboen kasuan, aldeak binaka paraleloak dituztela, aldeak binaka luzera berekoak dituztela, edota barne-angeluak binaka anplitude berekoak dituztela), ahoz, haurrarekin hitz egiten duen bitartean. Batzuetan, elementu horiek izendatzeko sinbolo berariazkoak erabiltzen dira, eta sinbolo horien esanahia ere argitu beharko du: paralelotasunari buruz hitz egitean, paralelo izatea baliokidetasun-erlazio bat da, eta, beraz, gerta daiteke paraleloak diren aldeak: a eta b paraleloak direla esateko, idazten da $a \parallel b$; elkarzutak edo perpendikularrak badira, berriz, $a \perp b$; bi alde luzera berekoak direla adierazteko, marratxo bat ezartzen zaie alde horiei, eta berdin egiten da angeluekin (23. irudia).
2. *Orientazio gidatua*. Ikasleek irudien parteek betetzen dituzten propietateak identifikatzeko jarduerak egingo dituzte. Fase honen helburua izango da ikasleak ahoz adieraz ditzala irudi geometriko baten barneko elementuek betetzen dituzten propietateak, era autonomo batean. Definizioek berebiziko garrantzia hartzen dute fase honetan, aurrerago, irudiak sailkatuko direlako betetzen dituzten propietateen arabera.
3. *Esplizitatzeta*. Aurreko fasean, ikasleek era autonomoan lan egiten dute, edota irakaslearekin elkarreraginez. Hirugarren fase honen funtsa komunikatiboa da, eta taldeko haurren artean formulazio-jarduerak egitea du xede, egoera didaktiko edota jolasen bidez. Jarduera horiek arrakastatsuak izan daitezen, komunikazioak efektiboa izan beharko du eta ongi erabili beharko dira forma geometrikoen propietateak, propietate horien artean dauden harremanak (esate baterako, laukien artean, karratuak honako propietate hauek betetzen ditu: «lau aldeak luzera berekoak izatea», «lau barne-angeluak luzera berekoak izatea», edota «aldeak binaka paraleloak izatea») eta propietateen artean dauden inplikazioak (lauki jakin batek «aldeak binaka paraleloak» baldin baditu, orduan, derrigorrean, «aldeak

binaka luzera berekoak ditu»). Fase honetan, arreta berezia emango zaio enuntziatu den propietatearen egiazkotasunari.

4. *Orientazio librea.* Jarduera ugari egin ostean, esplizitatu egin dira haurren aurrean irudi geometrikoek betetzen dituzten barne-propietateak. Irakasleak haurrei aurkezten dizkien jardueretan, propietateen arteko harremanak esplizitatzen dira. Adibidez, «karratu guztiak erronboak ere badira» esamoldea erabiliko du, erronbo bat ezaugarritzeko «lau aldeak luzera berekoak» dituen laukiari buruz mintzatu garelako, eta ikusi delako karratuek badituztela, bereziki, «lau aldeak luzera berekoak»; nahiz eta betetzen dituzten, baita ere, erronboek betetzen ez dituzten propietate gehiago (karratuek lau barne-angeluak anplitude berekoak dituzte, baina erronboek ez dute zertan halakorik bete). Propietate horiek, apurka, izaera propioa hartuko dute: adibidez, paralelismoari buruz hitz egitean, hasieran «karratuaren aldeak paraleloak dira» esan beharko da, hots, erreferentziazko formari erreferentzia egin beharko zaio; gerora, «elkarren paralelo izatea» entitate propio bihurtuko da, nahiz eta karratuari erreferentziarik ez egin.
5. *Integrazioa.* Fase honetan, irakasleak berreskuratu egiten du protagonismoa edo klasea zuzentzeko ardura. Ikasitako guztiaren sintesia egitea dagokio, garrantzia duena nabarmenduz eta akzesorioa dena baztertuz. Batez ere, ikaslearen ebaluaziorako garrantzitsua den aspekturen bat azaleratu bada, irakasleari dagokio orain aspektu horri garrantzia ematea, ikasleak atxiki dezan. Adibidez, forma geometriko lauek betetzen dituzten propietateen artean, irakasleak nabarmendu egingo ditu idatzizko proba batean galdetuko direnak, edota hurrengo gaiak lantzeko baliagarriak izango direnak.

23. irudia. Propietateen sinbologia erronbo batean: paraleloak izatea, luzera berekoak izatea, anplitude berekoak izatea.



Bosgarren fase hori gainditurik, ikaslea VH2 mailan dagoela esan genezake.

Software dinamikoaren rola

Forma geometriko jakin batek *propietate* bat betetzen duela esaten dugunean, familia bereko irudi guztiek betetzen duten ezaugarri inbariante bati buruz ari gara. Esate baterako, triangelu baten hiru aldeei dagozkien hiru erdibitzaileak irudikatzen direnean, hiru erdibitzaile horiek planoko puntu bakar batean mozten dute elkar. Propietate hori triangelu guztiek betetzen dutela egiaztatu nahi da, baina arrazoibide-maila honetan frogapen deduktiboak ez dira irisgarriak. Horrela, ikasleak egiaztatzen badu triangelu gutxi batzuetan propietate hori betetzen dela, hots, berak aztertu dituen triangelu horietan erdibitzaileek puntu berean elkar ebakitzen badute, horrekin aski izango du propietatea frogatutzat emateko.

Software dinamikoak, pauso honetan, abantaila nabarmen bat eskaintzen du: eredu dinamiko batean, nahi adina kasu azter daitezke, oso denbora gutxian. Horrela, adibide soil bat aurkeztu beharrean, adibide sorta bat eskaintzen da, hau da, *ilustrazio-eredu* bat.

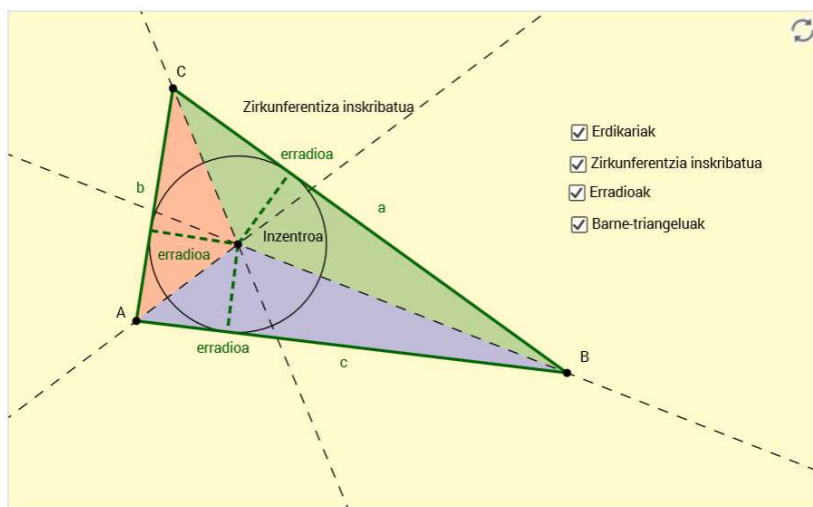
[*Ilustraziorako* erabilera honetan] propietate jakin baten egia erakusten duen eraikuntza bat aurkezten da. Eraikuntza hori eredu manipulatio gisa erabiltzen da eta haren erabilera arbel digital batekin osagarria da. Honenbestez, software dinamikoaren bidez, triangeluen propietateak aztertzeko triangelu ugari sor daitezke, eta, aldiz, ohiko arbelean, gutxi batzuk besterik ez (Lasa, 2015: 23).

Aztertutako adibide sorta horretan, ikasleak ez du propietatearen kontraadibiderik aurkitu, hots, ez du aurkitu ereduaren disposizio bakar bat non propietatea ez den betetzen. Hori aski ebidentzia izango da ikaslearentzat, eta propietatearen egiazkotasuna balioztatuko du.

24. irudiko adibidean¹⁸, triangelu baten erdibidekoek puntu bakar batean elkar ebakitzen dutela egiaztatzen duen eredu dinamiko bat aurkezten da. Triangeluaren hiru erpinak mugi daitezke (A , B eta C), arrastatuz, triangeluaren itxura nahierara aldatu ahal izateko; baina triangelua edozein izanik ere, hiru erdibidekoek puntu bakar batean elkar ebakitzen jarraitzen dute. Puntu hori aldeetako bakoitzarekin distantziakide denez, triangeluaren barneko zirkunferentzia inskribatuaren zentroa da, eta horregatik *intzentro* esaten zaio. Aldeetarako distantzietako bakoitzak zirkunferentziaren erradio bat adierazten du.

18. Baliabidea hemen eskuragai: <https://www.geogebra.org/m/SeJGW5FX>

24. irudia. Intzentroa eta zirkunferentzia inskribatua, *ilustrazio-eredua* (Lasa, 2015).



6.3. ASPEKTU FORMALAK VH1 MAILAN: DEFINIZIOAK

Elementuen eta propietateen analisiak egin ahal izateko, *enuntziatu deklaratiiboak* formulatu behar dira (Berto, 2007). Enuntziatu deklaratiiboen funtsezko ezaugarria hau da: *egia* edo *gezurra* izateko aukera dute (bi aukera horietako bakoitzari *egia-balio* esaten zaio). Horrela, enuntziatu deklaratiibo batentzat bi aukera besterik ez dago: egia da, edo bestela, gezurra da. Enuntziatu anbiguo bat, zeinaren egia-balioa zalantzazkoa den edo erabakiezina den, ez da inoiz deklaratiiboa izango. Enuntziatu deklaratiibo batek derrigorrean hartu behar du egia-balioetako bat: egia ez bada, ezinbestean gezurra izango da; edota, gezurra ez bada, orduan egia da halabeharrez. Era berean, enuntziatu deklaratiibo batek ezin ditu aldi berean hartu bi egia-balioak, hots, ezin da aldi berean egia eta gezurra izan.

ARIKETA EBATZIA. Hona hemen hiru enuntziatu deklaratiibo:

- (1) Leihoa itxita dago.
- (2) Ez du euririk egiten.
- (3) K.a. 335. urteko ekainaren 16an, Aristotelesek igela zuen bere tunikaren azpian.

(1), (2) eta (3) enuntziatuak dira, eta haien egiazkotasuna erabaki daiteke, hau da, *enuntziatu deklaratiiboak* dira. (1) enuntziatua egia dela onartzen badugu, leihoa benetan itxita dago; gezurra balitz, leihoa ez litzateke itxita egongo, hots, zabalik legoke. (2) enuntziatua egia izatekotan, benetan ez du euririk ari; aldiz, gezurra balitz, ez litzateke egia euririk ez egitea, eta horrela, benetan euria ariko luke (ohartu zaitezte elkarren ondoko bi ukaziok elkar ezabatzen dutela).

Azkenik, (3) enuntziatua, aurrekoak baino konplexuagoa izanagatik ere (*enuntziatu konposatua* baita), deklaratiiboa da. Egia izatekotan, Aristotelesek igela zuen tunikaren azpian aipatu urte eta egun zehatz horretan; aldiz, gezurra izatekotan, enuntziatu

konposatua osatzen duten enuntziatu sinpleetako baten bat gezurra izango da (bat gutxienez, edo bi, edo hirurak). (3) enuntziatu konposatua da, eta bi enuntziatu sinplez osaturik dago, horiek dira: (3a) K.a. 335. urteko ekainaren 16a; eta, (3b) Aristotelesek igela zuen bere tunikaren azpian. Enuntziatu konposatu hori ezeztatzeko hiru modu daude, aski baita enuntziatu sinpleetako bakar bat ukatzea, edo biak batera: «K.a. 335. urteko ekainaren 16an, Aristotelesez EZ zuen igela bere tunikaren azpian», «Aristotelesek igela zeraman bere tunikaren azpian, K.a. 335. urteko ekainaren 16 EZ zen egun batean», edota «Aristotelesek EZ zeraman igelik eta EZ zen K.a. 335. urteko ekainaren 16a».

Enuntziatu baten egia-balioa ezin bada erabaki, enuntziatu hori ez da deklaratioa, eta horrela, ezin da erabili propietateen analisia egiteko; are gutxiago sailkapenak egiteko (VH2 mailan ikusiko denez). Batzuetan, enuntziatu batek agindu gisako bat ematen du edota ohartarazpen bat, eta honenbestez, ez du informazio neutrorik ematen. Oro har, esklamazio- edota galdera-marka duten enuntziatuak ez dira deklaratioak izango. Era berean, ahalera edota hipotetikoak erabiltzen dituzten enuntziatuen egiazkotasuna ezin da egiaztatu, eta horiek ere ezingo dira hartu enuntziatu deklaratiobotzat.

ARIKETA EBATZIA. Hona hemen deklaratioak ez diren zenbait enuntziatu:

- (1) Itxi ezazu leihoa!
- (2) Kontuz gero euriarekin, barra-barra ari du eta!
- (3) Zer dela-eta alde egin zuen Aristotelesek Atenasetik?
- (4) Baliteke gaur euria egitea.
- (5) Seguru aski, ez naiz bertso-finalera joango.
- (6) A ze festa atzokoa!

Batzuetan, bi enuntziatu deklaratiobok informazio bera ematen dute, eta honenbestez, egia-balio bera dute. Hau da, forman bakarrik dira ezberdinak eta funtsean enuntziatu baliokideak dira: bietako bat egia izatekotan, bestea ere egia izango da, automatikoki; eta alderantziz. Esaldiaren egitura sintaktikoa alda daiteke, edota informazioa beste hizkuntza batean eman daiteke, baina informazio bera emanez gero, bi esaldi horiek baliokideak dira, eta egia-balio bera hartzen dute.

ARIKETA EBATZIA. Honako enuntziatu hauek guztiak baliokideak dira, eta egia-balio bera hartzen dute; denak dira egia, edo bestela, denak dira gezurra:

- (1) Robinek Batman maite du.
- (2) Batmanek Robinen maitasuna du.
- (3) *Robin loves Batman.*

Aurreko adibide batean, enuntziatuak sinpleak edo konposatuak izan daitezkeela aipatu da. Enuntziatu sinpleetatik abiatuz enuntziatu konposatuak eraikitzeke lotura logikoak erabiltzen dira, eta hurrengo sekzioan, horietako hiru aurkeztuko dira: konjuntzioa (eta), disjuntzioa (edo) eta ukazioa (ez).

6.3.1. Enuntziatu sinpleak eta konposatuak, lotura logikoak eta horien egia-balioak

Nolabait esateko, enuntziatu sinpleek informazio unitate bakarra ematen dute, aldiz, enuntziatu konposatuak enuntziatu sinpleen eratorriak dira. Enuntziatu sinpleak konposatzeko oinarritzko bost lotura logiko daude, horiek dira: *konjuntzioa* ($\wedge$), *disjuntzioa* ($\vee$), *ukapena* ($\neg$), *inplikazioa* ($\rightarrow$) eta *baliokidetasuna* ($\leftrightarrow$). Horietako hiru lehenak aztertuko ditugu sekzio honetan, banaka-banaka.

Enuntziatu sinpleak adierazteko letra minuskulak erabiltzen dira, normalean p -tik hasita (enuntziatuari *proposizio* ere esaten zaiolako), eta hortik aurrera, alfabetoari jarraitzen zaio: p, q, r, s, t , etab. Letra asko erabiltzea aurreikusten den kasuetan, alfabetoa hasieratik abiatzen da: a, b, c, d, e , etab.

ARIKETA EBATZIA. Hurrengo enuntziatu hauen artean, erabaki ezazu zeintzuk diren sinpleak eta zeintzuk konposatuak. Enuntziatua konposatua denean, erabil itzazu letrak (p, q, r , etab.) enuntziatu sinpleak identifikatzeko:

- (1) «Zerua urdina da». Enuntziatu sinplea da, eta letra bat ezar dakioke: « p , zerua urdina da».
- (2) «Euriak bustitzen du». Enuntziatu sinplea da, eta letra bat ezar dakioke: « q , euriak busti egiten du».
- (3) «Ez da egia euria egiten duenik». Enuntziatu konposatua da, ukazioari lokailu logikoaren izaera ematen zaiolako; « r , euria egiten du» enuntziatuaren ukazioa da: « $\neg r$, ez da egia euria egiten duenik», edo « $\neg r$, ez du euririk egiten».
- (4) «Euria ari du baina ez du hotzik egiten». Enuntziatu konposatua da, konjuntzioak eta ukazioak parte hartzen dutelako; kasu honetan, *eta* partikularen lekuan agertzen da *baina* partikula: « r , euria egiten du»; « s , hotza egiten du»; « $\neg s$, ez du hotzik egiten»; « $r \wedge (\neg s)$, euria egiten du baina ez du hotzik egiten».
- (5) «Litekeena da azterketa ongi egin izatea». Ez da enuntziatu deklaratioa, balizkoa erabiltzen delako: *litekeena*.
- (6) «Gu gaude, gutxi gorabehera, zuen eta haien artean, kalearen erdian». Ez da enuntziatu deklaratioa, ezin delako erabaki benetan kalearen erdian gauden, edo ez gauden: *gutxi gorabehera*.

Hizkera naturalean «eta» lotura erabiltzen dugunean, *konjuntzio logikoa* erabiltzen ari gara. Bi enuntziatu sinple (p, q) lotu egiten ditugu enuntziatu konposatu batean: « p eta q », « $p \wedge q$ ». Enuntziatuen konjuntzioa egia izan dadin, enuntziatu sinpleetako bakoitzak izan behar du egia. Aski da enuntziatu sinpleetako bat gutxienez gezurra izatea (p gezurra izatea, q gezurra izatea, edo biak batera gezurra izatea), enuntziatu konposatua gezurra izan dadin.

Enuntziatu konposatu baten egia-balioa kalkulatzeko, *egia-taula* deritzon tauletan antolatzen da enuntziatu konposatuetako informazioa. Taula horietan, enuntziatu bat *egia* denean, 1 balioa ezartzen zaio, eta aldiz, *gezurra* denean, 0 balioa ezartzen

zaio. Enuntziatu deklaratio simple bat dugunean (p), haren balioa izan daiteke *egia* alde batetik, edo *gezurra* bestetik, eta taula batean antolatzen dira kasu posible guztiak (enuntziatu bakarra dugunez, bi kasu dira):

$$p \quad | \quad 1 \quad | \quad 0$$

Bi enuntziatu simple ditugunean, taula hori hedatu egiten da, bi enuntziatu simple horiek har ditzaketen egia-balio guztiak adieraziz:

$$\begin{array}{c|c|c|c|c} p & 1 & 1 & 0 & 0 \\ \hline q & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}$$

Taula horretako zutabe bakoitzak egoera posible bat adierazten du. Lehenengo zutabea, bai p eta bai q , bi enuntziatu simpleak egia direla kontsideratzen da, horregatik hartzen dute bi lerroek 1 egia-balioa. Bigarren zutabea, adierazi egiten da beste kasu posible bat, non p egia den eta q gezurra den. Hirugarrenean, p gezurra dela eta q egia dela kontsideratzen da. Azkenik, laugarren zutabea, bai p eta bai q gezurra direla kontsideratzen da. Horiek dira gerta daitezkeen lau kasu posibleak, eta ez dago kasu posible gehiagorik.

Konjuntzioaren egia-balioak kalkulatzeko, taulari hirugarren lerro bat gaineratuko diogu. Hirugarren lerro horretan ezarriko dugu enuntziatu konposatuaren egia-balioa:

$$\begin{array}{c|c|c|c|c} p & 1 & 1 & 0 & 0 \\ \hline q & 1 & 0 & 1 & 0 \\ \hline p \wedge q & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

«Euria ari du eta hotz egiten du» esaldia enuntziatu konposatua da, eta bi enuntziatu sinplez osaturik dago: « p , euria ari du», eta « q , hotz egiten du». Enuntziatu konposatua ($p \wedge q$) egia izan dadin, bi enuntziatu sinpleek izan behar dute egia, aldi berean.

Kontu apur batez ibili behar da konjuntzioarekin, zenbaitetan «eta» erabiltzen dugulako sekuentzia tenporaletan, edo baldintza-ondorioa adierazteko; batez ere, kaleko hizkeran gertatzen da hori. Aldiz, lotura logikoei dagokienez, biak aldi berean gertatzen direla besterik ez du adierazten «eta» lokailuak.

ARIKETA EBATZIA. Har dezagun honako enuntziatu hau: «Sokratesek basaperrexila edan zuen eta hil zen». Enuntziatu horretan, irudi luke basaperrexila edateagatik hil zela Sokrates, belar hori toxikoa delako. Pentsa genezake Sokratesek lehenengo eta behin basaperrexila edan zuela, eta basaperrexila edatearen ondorioz hil zela, gerora. Ikuspuntu logikotik, baina, konjuntzioak ez du inolako kausa-efekturik adierazten: «aldi berean» geratzen dira Sokratesek basaperrexila edatea eta hiltzea, baina ez dugu hortik ondorioztatuko inolako baldintza-ondorio loturarik bi gertaera horien artean.

Bestalde, konposatzen diren enuntziatu sinpleak hiru edo gehiago direnean, komaz banaturik agertzen dira enuntziatu horiek, baina hala ere, koma horrek «eta» lokailuaren esanahi bera du.

ARIKETA EBATZIA. Har dezagun honako enuntziatu hau: «Sokratesek basaperrexila edan zuen, korroskada atera zitzaion, eta hil egin zen». Enuntziatu konposatu hori hiru enuntziatu sinplez osaturik dago, « p , Sokratesek basaperrexila edan zuen», « q , Sokratesi korroskada atera zitzaion» eta « r , Sokrates hil egin zen». Hiru gertaera horiek aldi berean gertatu zirela adierazten du enuntziatu konposatuak: « $p \wedge q \wedge r$ ».

Hizkera naturalean «edo» lotura erabiltzen dugunean, *disjuntzio logikoa* erabiltzen ari gara. Bi enuntziatu sinple (p, q) lotu egiten ditugu enuntziatu konposatu batean: « p edo q », « $p \vee q$ ». Enuntziatuen disjuntzioa egia izan dadin, enuntziatu sinpleetako batek gutxienez izan behar du egia (bietako batek, edo biek batera). Enuntziatu konposatua gezurra izan dadin, bi konposatu sinpleek izan behar dute gezurrezkoak, aldi berean:

p	1	1	0	0
q	1	0	1	0
$p \vee q$	1	1	1	0

«Ala» lotura «edo» loturaren antzekoa da, baina elkar baztertzen duten aukeretan erabiltzen da. Jatetxe batean menua eskatzen dugunean, normalean, lehenengo eta bigarren plater bana aukera ditzakegu zerrenda banatik. Egoera horri «ala» lokailua dagokio. Aldiz, asteburuko eguraldiari buruz ari bagara, «edo» lokailua erabiliko genuke.

ARIKETA EBATZIA. Har ditzagun honako enuntziatu hauek:

(1) Aste barruko menuaren prezioan eska dezakezu entsalada ala arroza.

(2) Asteburuan euria egingo du edo elurra egingo du.

(1) enuntziatuan, baztertu egiten da bi platerak aldi beran eskatzeko aukera. Hori horrela izanik ere, behin asteburuko menua ordainduta, bietako bat eskatu behar duzu derri gorrean, entsalada ala arroza (ezin duzu platerik ez eskatu). (2) enuntziatuan, berriz, asteburuko eguraldiari buruz hitz egiten da, eta aukera gisa onartu egiten da asteburuan euria egitea, elurra egitea, edota biak batera egitea. Aldiz, ez da onartzen prezipitaziorik gabeko asteburu bat.

«Ala» loturaren egia-taula honelakoa da:

p	1	1	0	0
q	1	0	1	0
$p \text{ ala } q$	0	1	1	0

Hizkuntza naturalean «ez» lotura edo haren baliokidea den adierazpen bat erabiltzen dugunean, ukapen logikoa erabiltzen ari gara. Lotura horrek enuntziatu baten egia-balioak alderantzikatzen ditu. Adibidez, « p , euria ari du» enuntziatuaren ukazioa da « $\neg p$, ez du euririk ari».

p	1	0
$\neg p$	0	1

Ukazioaren erabilera konplikatu egiten da, apur bat, kuantifikatzaile existentzialak (« $\exists$, existitzen da, bada elementu bat, aurki daiteke ale bat, etab.») edo unibertsalak (« $\forall$, guztiak, guztietarako, edozein, edozeinek, etab.») erabiltzen direnean. Izan ere, ukazioak enuntziatuaren egia-balioa alderantzikatzen duen era berean, kuantifikatzaileen izaera ere alderantzikatzen du: unibertsalaren lekuan existentziala ezartzen da, eta existentzialaren lekuan, unibertsala.

ARIKETA EBATZIA. Har ditzagun honako enuntziatu hauek:

- (1) Politikari guztiek lapurtzen dute.
- (2) Politikari batek ere ez du lapurtzen.
- (3) Politikariren batek ez du lapurtzen.
- (4) Kretan bada gezurti bat.
- (5) Kretan denak gezurtiak dira.
- (6) Kretan ez da gezurtirik.

(3) enuntziatuak, «politikari batek ez du lapurtzen», zera adierazten du: badela edo aurki dezakegula gutxienez politikari bat, lapurtzen ez duena. Hau da, dauden politikari guztien artean, gutxienez bat libratzen da, eta politikari horrek ez du lapurtzen. Enuntziatu hori ukatzeko, (1) enuntziatua erabiliko genuke, «politikari guztiek lapurtzen dute». Izan ere, gezurra baldin bada aurki dezakegula politikari bakar bat lapurra ez dena, orduan, horrek esan nahi du ezin dugula lapurra ez den bakar bat ere aurkitu, eta honenbestez, guztiak direla lapurrak.

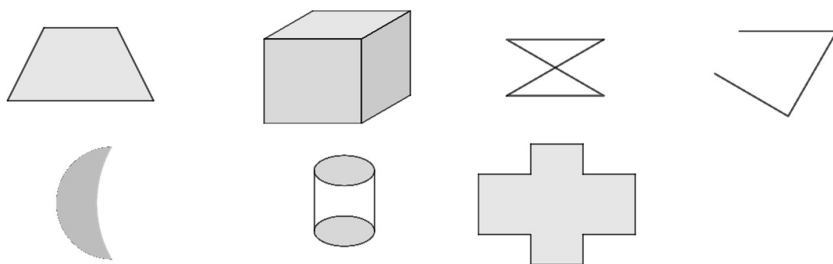
(6) enuntziatuak, «Kretan ez da gezurtirik», zera adierazten du: Kretako biztanle guztiek esaten dutela egia, edo bestela esanda, ezin dugula aurkitu Kretan gezurti bakar bat ere. Enuntziatu hori ukatzeko, (4) enuntziatua erabiliko genuke, «Kretan bada gezurti bat». Izan ere, (4) enuntziatuak zera dio, Kretan badela gutxienez gezurti bat, edo bestela esanda, aurki dezakegula Kretan gezurretan aritzen den pertsona bat bederen. Horrela, ukatu nahi badugu Kretan denek egia esaten dutela, horrek ez du esan nahi Kretan denak gezurtiak direnik, aldiz, esan nahiko du Kretan ez direla «guztiak» egiazaleak, eta badela gutxienez gezurra esaten duen bat.

(2) enuntziatua ukatzeko, «politikari batek ere ez du lapurtzen», esan beharko genuke «bada lapurtzen duen politikari bat gutxienez», edo baliokidea den beste esamolderen bat. (5) enuntziatua ukatzeko, «Kretan denak gezurtiak dira», esan beharko genuke «Kretan bada pertsona bat gutxienez, gezurtia ez dena», edo esamolde baliokideren bat.

6.3.2. Poligonoak eta lerro kurbatuak

VH1 mailan objektu geometrikoen definizio eta propietateak ezagutzera iritsiko dira ikasleak; izan ere, VH2 mailan sailkapenak egin beharko dituzte, baina hori egin ahal izateko irudia lauak eta gorputz geometrikoak ezagutu eta definitu behar dira lehendik. Lerro zuzenek edota lerro kurbatuek planoan osatzen duten edozein formari *irudi lau* deritzo, eta irekiak zein itxiak izan daitezke.

ARIKETA. Identifika ezazu zeintzuk diren irudi lauak, eta izenda ezazu forma bakoitza.



Poligono hitza entzuterakoan, seguru asko, lerro zuzenez osaturiko irudi plano bat etorriko zaizu gogora. Zehaztasunaren bila, egin dezagun bilaketa exhaustibo bat. Arrietan (2001) aurkituko dugu lehenengo hurbiltze bat.

Horrela, alde izeneko zuzenkiz bakarrik mugatutako irudi lau itxiei, poligono deritze. Hitz horrek, grekoz, zenbait angelu dituela esan nahi du. Poligonoen artean, poligono ganbilak interesatzen zaizkigu (irudiaren edozein bi puntu lotzen dituen zuzenkiaren puntu guztiak ere poligonoari dagozkionak dira) (Arrieta, 2001: 36).

Lehenengo definizio horretan badira kontuan hartzeko zenbait elementu. Esate baterako, irudiaren aldeak zuzenkiak dira, eta ezin dira, beraz, kurbatuak izan. Bestalde, irudia itxia da, eta horrek esan nahi du planoaren espazio mugatu bat gordetzen duela bere barruan. Definizio horretan esplizituki esaten ez den arren, zuzenkiek elkarri loturik egon beharko dute euren mutur edo erpinetan; bestelakoan, irudia nekez izango baita itxia.

Arrietak poligono hitzaren etimologiari ere egiten dio erreferentzia. Grekoz, zenbait (POLY) angelu (GONO) dituen irudia da poligonoa. Angelu horiek izan daitezke barnekoak edo kanpokoak, baina, berriz ere, Arrietaren definizioak iradokitzen du poligonoaren aldeek mutur edo erpinetan egon beharko dutela loturik, bestelakoan, poligonoak ez luke izango kanpo- eta barne-angeluen kopuru bera.

Azkenik, Arrietaren definizioan komentario subjektibo bat ere agertzen da, esaten duenean «poligono ganbilak interesatzen zaizkigula». Apreziazio hori doakoa da eta aurrerago ikusiko dugunez, oinarri sendorik ez izateaz gainera, arazotan sar gaitzake matematikaren didaktikaren ikuspuntutik.

Harluxet hiztegi entziklopedikoak bi adiera ematen dizkio poligono hitzari.

iz. 1. MAT. Lerro hautsi itxi batek osatzen duen irudi geometrikoa; delako irudi geometrikoak mugatzen duen gainazala. 2. Lurralde baten hirigintza-antolaketan, funtzio jakin bat betetzen duen esparrua. Industri poligonoa.

Hiztegiak zuzenki hitza ez du baliatzen, eta horren ordez, zuzenki guztien batura lerro baten gisa kontsideratzen du. Lerro bakar hori hautsi edo puskatu egin dugu, erabat askatu gabe, forma poligonal itxia emanez irudiari. Definizio horrek erpin hitza ere ez du baliatzen, baina lerroa puskatua izan den puntu horietako bakoitzari esaten zaio erpina, bi aldeek bat egiten duten puntuari. Harluxetek Arrietak baino nabarmenago zehazten du poligonoak irudiaren barneko gainazalari egiten diola erreferentzia, eta ez kanpoko siluetari bakarrik.

ARIKETAK

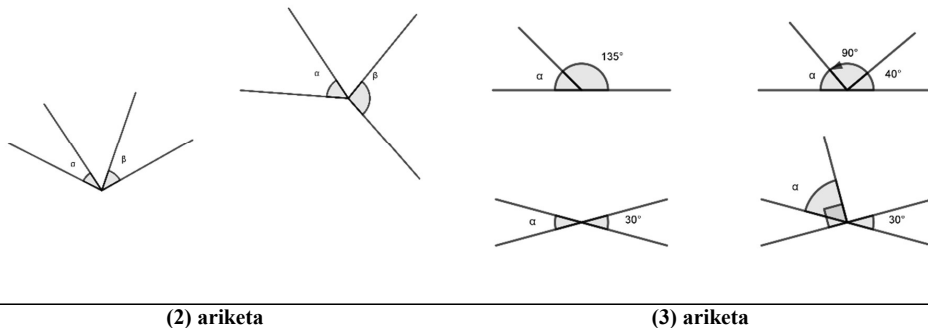
- (1) Aurreko irudiko irudi lauetatik aipatu zeintzuk diren poligonoak.
- (2) Zer da poligono erregularra?

Aurreko definizioak irakurrita, poligonoaren oinarritzko elementuak azaldu dira: aldea, erpina eta barne-angelua. Poligono baten bi aldeek erpin batean markatzen duten eremuari deritzo barne-angelu. Oro har, angelua, bi zuzenerdik plano bat bi eremutan banatzen dutenean sortzen den eremu horietako bakoitza da. Angelu esaten zaio, orobat, zirkunferentzia batean bi erradiok markatzen duten sekzioari. Poligono baten azkeneko elementu aztergaia diagonal da, jarraian ez dauden edozein bi erpin elkarri lotzen dituen zuzenkia.

Poligono ezberdinak aztertzen hasi aurretik, nabarmendu behar da angeluen anplitudeak aztertzeak LHn duen garrantzia. Esate baterako, ikasleekin kartulinazko bi tira egin daitezke eta txintxeta baten bidez erpinetik elkartu. Horrela, kartulinak mugituz, angeluaren anplitudea aldatzen dela begien bistakoa da.

ARIKETAK

- (1) Defini itzazu honako kontzeptu hauek: angelu zorrotza, angelu zuzena, angelu kamutsa, angelu laua, angelu osoa, angelu konbexua, angelu ez-konbexua (konkaboia), angelu kongruenteak, angelu osagarriak, angelu betegarriak.
- (2) Bi angelu osagarri edo betegarri izateko elkarren ondoan egon behar al dute? Esan irudiko angelu hauek elkarren osagarri edo betegarriak diren.
- (3) Kalkulatu ondoko α angeluaren balioa kasu bakoitzean.



Angelu ezberdinak ezagutu ondoren, poligonoen azterketa egiten has daiteke. VH1 mailan ikasleak ez dira gai poligonoen sailkapen bat egiteko (hain zuzen ere, gaitasun hori VH2 mailaren ezaugarri nagusia izango da), baina poligono ezberdinak identifikatzeko gai izango dira. Gainera, VH maila honetan poligonoen elementuak eta ezaugarriak ezagutzen hasten dira, eta ezaugarri horietan oinarrituz, irudiak deskribatzeko gai dira.

Poligonorik sinpleenak triangeluak dira, eta, aipatu den modura, VH0 mailatik aurrera, haurrak gai dira triangeluak modu global batean identifikatzeko, bai ikasgelako materialetan, baita ingurune hurbileko eta eguneroko bizitzako objektuetan ere: «trafiko-seinalea triangelu bat da». Gainera, irudia adierazteko gai izango dira. VH1 mailatik aurrera, triangeluen elementuen azterketa egingo da, berariazko hiztegi zehatza erabiliz: «triangeluak 3 alde eta 3 erpin ditu». Gainerako poligonoetan bezala, triangeluen elementu nabarmenak aldeak, erpinak eta barne-angeluak dira. Oinarrizko elementu horiez gain, triangeluetan bigarren mailako beste elementu hauek aurki daitezke, besteak beste: erdibitzaileak, erdikariak, erdibidekoak eta altuerak.

ARIKETAK

- (1) Zenbat diagonal dituzte triangeluek? Argudia ezazu zure erantzuna.
- (2) Izenda itzazu triangeluak haien barne-angeluen izaeraren arabera.
- (3) Izenda itzazu triangeluak haien aldeen luzeren izaeraren arabera.
- (4) Defini itzazu termino hauek: erdibitzailea, erdikaria, erdibidekoa eta altuera.
- (5) Irudika ezazu triangelu bat paperaren gainean, eta erregela eta konpasa baliatuz, eraiki itzazu (4) ataleko elementu horiek guztiak. Zenbat erdibitzaile ditu triangelu batek? Zenbat erdikari? Zenbat erdibideko? Zenbat altuera?
- (6) Nola esaten zaio erdibitzaileek bat egiten duten puntuari? Eta erdikariek bat egiten dutenari? Eta erdibidekoek bat egiten dutenari? Eta altuerak bat egiten dutenari?
- (7) Aurreko (6) ataleko lau puntu horiek beti triangeluaren barruan egongo al dira? Aukera ezberdinak aztertzeko, eraiki itzazu triangelu mota ezberdinak, edota erabil ezazu 24. irudikoaren gisako eredu dinamiko bat.

- (8) Izan bedi ABC triangelu isoszelea, $\overline{BC}$ izanik luzera ezberdineko aldea. Azal ezazu zergatik dagoen A erpina $\overline{BC}$ aldearen erdibitzailean. Kasu honetan, zein izango da $\overline{BC}$ aldearen altuera? Eta angeluaren erdikaria?
- (9) Irudika ezazu 6 cm dituen $\overline{AC}$ zuzenkia eta lor ezazu haren erdibitzailea. $\overline{AC}$ zuzenkia erronbo baten diagonalak bada eta beste diagonalak 8 cm neurtzen dituela baldin badakigu, lor itzazu erronbo horren B eta D erpinak. Zenbat neurtzen du erronboaren aldeak?

VH0 mailan, hurrek gaitasuna dute oinarritzko laukiak identifikatzeko, hala nola karratua edota laukizuzena. VH1 mailan, aldiz, garrantzia emango zaio lauki konplexuagoak eta haien barneko elementuak ezaugarritzeari: erronboa, erronboidea, trapezioa edota trapezoidea. Horrela, VH1 mailan dauden haurrak laukiak identifikatzeko, definitzeko eta errepresentatzeko gai izango dira. Gainerako poligonoetan bezalaxe, laukien elementu nabarmenak aldeak, erpinak, barne-angeluak eta diagonalak dira.

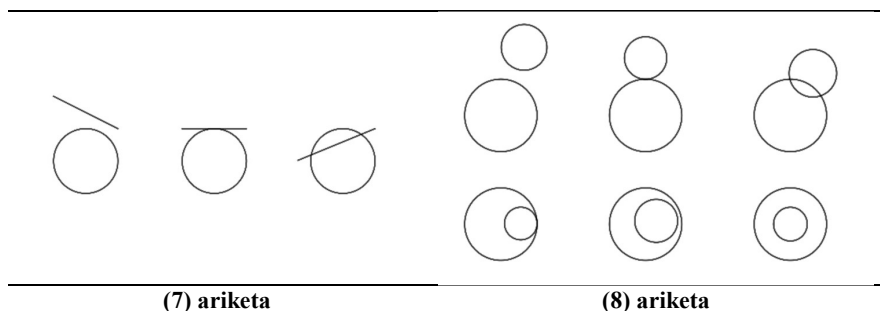
ARIKETAK

- (1) Eman ezazu laukiaren definizioa.
- (2) Zenbat diagonal ditu lauki batek? Zein da lauki baten barne-angeluen batura?
- (3) Laukia zein elementuk osatzen dute, hura mugatzen duten lerroek soilik, edota haren barruko eremuak ere?
- (4) Lauki bat beti laua da?
- (5) Laukien aldeak beti dira zuzenak? Izan daitezke kurbatuak?
- (6) Laukien aldeek beti dute elkarren luzera bera?
- (7) Nola definituko zenuke laukia?
- (8) Defini ezazu lauki paralelogramoa.
- (9) Defini itzazu termino hauek: karratua, laukizuzena, erronboa, erronboidea, trapezioa eta trapezoidea.

VH0 arrazoibide-mailan dauden hurrek jada zirkulua identifikatzen dute irudi lau ezberdinen artean, baina ez dira irudi hori formalki definitzeko gai izango (hain zuzen ere, gaitasun hori VH1 mailako ezaugarria da). *Zirkulua* definitzeko, lehendik *zirkunferentzia* bat zer den jakin behar da. Zirkunferentzia zentro izeneko puntu batetik distantzia berera dauden puntuen multzoa da; alegia, zentroarekiko puntu distantziakideen multzoa. Puntu multzo horrek lerro kurbatu itxi bat eratzen du. *Zirkulu* irudi horren barruan geratzen den eremuari deritzo. Zirkuluaren definizioa aintzat hartuz, argi ondoriozta daiteke zirkuluek ez dutela alderik, erpinik, barne-angelurik ezta diagonalik ere. Zirkunferentziaren elementu nabarmenak hauek dira: erradioa, diametroa, korda eta arkua.

ARIKETAK

- (1) Har ezazu zilindro forma daukan edozein objektu. Ezar ezazu zilindroaren oinarria paper baten gainean eta ingura ezazu arkatz batekin. Jarduera hau hurrekin eginez gero, zirkunferentziaren honako ezaugarri honetara helduko gara: lerro kurbatu eta itxia.
- (2) Paper baten gainean puntu bat irudikatu ondoren, erregelaren laguntzaz, puntu horretatik 5 cm-ra dauden puntuak irudika itzazu. Zenbait puntu daukazunean, lotu itzazu puntu horiek guztiak lerro kurbatu eta itxi baten bidez. Jarduera hau hurrekin eginez gero, zirkunferentziaren honako ezaugarri honetara helduko gara: zentroarekiko distantziakideak diren puntuz osaturik dago.
- (3) P puntua zentrotzat daukaten eta r erradiokoak diren zenbat zirkunferentzia existitzen dira?
- (4) Zirkunzentroa eta intzentroa zein zirkunferentziaren zentroak dira?
- (5) Planoan, lerrokaturik ez dauden edozein hiru puntu irudika itzazu. Erregela eta kon-pasa erabiliz, lor ezazu puntu horietatik pasatzen den zirkunferentziaren zentroa.
- (6) Defini itzazu erradioa, diametroa, korda eta arkua.
- (7) Azter itzazu zuzen baten eta zirkunferentzia baten artean eman daitezkeen posizio erlatiboak: elkarren kanpokoak izan daitezke, elkarren ukitzailak, edota ebakitzaileak.
- (8) Azter itzazu bi zirkunferentziaren arteko posizio erlatiboak: kanpokoak izan daitezke, kanpoko ukitzailak, ebakitzaileak, barruko ukitzailak edota barnekoak.



Gure espazioa tridimentsionala denez, hurrek ingurunearekin daukaten lehenengo harremana esperientzia tridimentsional bidezkoa da, hau da, ikusmenaren eta ukimenaren bidezkoa. Behin irudi lauak ezagutu ondoren, ezagutza horiek baliatuko dira gorputz geometrikoak ezaugarritzeko. VH1 arrazoibide-mailan, gorputz geometrikoen identifikazioa eta ezagutza lantzerakoan, hiru dimentsioko objektuen ezaugarriak eta barne-elementuak aztertuko dira. Hiru dimentsioko objektu horiek bi dimentsioko irudikapenen bidez lantzen badira soilik, haurrak arazo handiak aurki ditzake, irudikapen bidimentsional horiek errealitatea desitxuratzen dutelako. Ondorioz, zailtasunak, akatsak eta erroreak ager daitezke.

Espazioaren geometriarekin hasterakoan, zuzenen posizio erlatiboak aztertzea komeni da. Espazioan, bi zuzen izan daitezke paraleloak, gurutzatzaileak edota ebakitzailak. Zuzen perpendikularrak zuzen ebakitzailen kasu partikular bat dira, non bi zuzen ebakitzean lortzen diren lau angeluak berdinak diren. LHko ikasleek zuzen paraleloak irudikatzen dituztenean, bi zuzen horizontal marrazteko ohitura izaten dute. Horregatik, norabide ezberdineko zuzenekin ere paralelotasuna lantzea komeni da. Berdina gertatuko da elkarren perpendikular edo elkarzutak diren zuzenak eskatzen zaizkienean; zuzen horizontal eta bertikal bana irudikatuko dituzte. Hain zuzen ere, horregatik, LHko lehenengo kurtsoetan ohikoa izaten da ikasleek *zuzen* hitza *horizontal* edo *bertikal*arekin nahastea.

ARIKETAK

- (1) Bi makil zuzen hartzen baditugu (arkatz edota boligrafoekin egin daiteke), adieraz itzazu makilen artean eman daitezkeen hiru posizio erlatiboak: «paraleloak», «ebakitzailak» eta «elkar gurutzatzen dute». Posible izango da makil horiekin hirurak irudikatzea?
- (2) Bi zuzenen arteko posizio erlatiboak aztertu orde, zuzen eta plano baten artekoak aztertzen badira, zer posizio erlatibo desberdin aurki daitezke? Aipatu posizio horietako bakoitza eta eraiki ezazu (edo topa ezazu) egoera horietako bakoitza irudikatzen duen marrazki bat.
- (3) Bi planoren arteko posizio erlatiboa¹⁹ aztertuz gero, izenda ezazu aukera bakoitza. Eraiki edo topa ezazu egoera horietako bakoitza irudikatzen duen marrazki bat.

*Poliedro*²⁰ bat poligono lauez mugatutako espazioaren eskualdea da. Poliedroen deskribapena emateko haren elementuak ezagutzea ezinbestekoa da. *Aurpegia* poliedroaren poligono mugatzaile bakoitzari deritzo; *ertza* bi aurpegik bat egiten duten zuzenkia da; *erpina* bi ertz edo gehiagok bat egiten duten puntua; eta *diagonala*, bi erpin ez jarraitu lotzen dituen zuzenkia. Poliedroen elementuen ezaugarrien arabera, poliedroak mota ezberdinetakoak izan daitezke. Horietariko batzuk ezagutuko ditugu hurrengo lerroetan: prismak, piramideak eta poliedro erregularrak.

Prisma, plano paraleloetan dauden bi poligono berdinez eta euren ertzak lotzen dituzten paralelogramoak diren aurpegiez osaturiko poliedroa da. Poligono paraleloak prismaren *oinarriak* dira eta oinarrien arteko distantzia prismaren altuera da. *Piramidea* oinarri bakarra duen poliedroa da. Oinarri horrek edozein poligonoren forma eduki dezake, baina gainontzeko aurpegiak triangeluak dira eta puntu batean bat egiten dute, erpina deituriko puntuan. Poliedroekin amaitzeko, aurpegi guztiak poligono erregular berdinez osatuak dituen eta erpin guztietan aurpegi kopuru berak bat egiten duen poliedroari *poliedro erregular* deritzo.

19. Eredu dinamiko hau baliagarri gerta daiteke: <https://www.geogebra.org/m/t2eFeXQq>

20. Eredu dinamiko hau baliagarri gerta daiteke: <https://www.geogebra.org/m/C7BWRfQN>

ARIKETAK

- (1) Poliedro baten barneko edozein bi puntu zuzenki baten bidez lotuz, zuzenkia poliedroaren barruan geratzen bada, poliedro horri konbexu deritzo. Aldiz, zuzenki horren zati bat poliedrotik kanpo gertatzen bada, poliedro konkaboa dela esaten da. Bestalde, aurpegi guztiak triangeluak dituen poliedroari deltoedro deritzo. Eraiki edota topa ezazu aurreko definizioetako bakoitza beteko duen forma bana.
- (2) Deskriba itzazu prisma erregularra, prisma zuzena eta prisma zeharria. Saia zaitetz mota bakoitzeko prisma bat irudikatzen.
- (3) Defini ezazu piramidearen altuera. Irudika ezazu oinarri karratua duen piramidea eta haren altuera.
- (4) Deskriba itzazu piramide erregularra, piramide zuzena eta piramide zeharria. Irudika ezazu oinarri triangeluarra duen piramide bakoitzeko bana.
- (5) Identifika eta deskriba itzazu existitzen diren 5 poliedro erregularrak.

Ardatz baten inguruan poligono bat biratzen dugunean, hiru dimentsioko gorputzak sortzen dira. Gorputz horiek ez dira poliedrikoak, gainazal kurbatuak dituztelako. Horregatik, *biraketa-gorputz* esaten zaie²¹.

ARIKETA. Laukizuzen bat bere alde batekiko biratzen badugu, zein gorputz lortzen da? Egin ezazu gauza bera angelu zuzena duen triangelu batekin. Zein gorputz lortzen da? Azkenik, zirkulu baten erdia bere alde zuzenaren (hau da, diametroaren) inguruan biratzen bada, zer gorputz lortzen da?

6.3.3. Ikasleen ohiko akatsak eta zailtasunak

Arrazoibide-maila honetan, haurrek irudi lau eta gorputz geometrikoen definizioak ematen dituzte, eta forma horien barne-elementuak eta propietateak deskribatzen dituzte. Haurrek irudien analisia egiten dute eta analisi horren ondorioei esker eraikitzen dituzte euren definizioak.

Bide horretan, lehenengo eta behin, ikasleek identifikatu egin behar dituzte esanguratsuak diren eta esanguratsuak ez diren propietateak. Esate baterako, poligonoaren definizioa osatzerakoan, esanguratsuak dira honako ezaugarri hauek: irudi laua izatea, lerro zuzenez mugatua egotea, itxia izatea, puntu bikoitzik ez izatea, etab. Aldiz, aldean kopurua, erregularatasuna, ahurtasuna, etab., ez dira propietate esanguratsuak. Ezaugarri esanguratsuak eta esanguratsuak ez direnak bereizteko, irakasleak adibide asko aurkeztu behar dizkio ikasleari, eta adibide sorta horren barnean, kontraadibideak ere aurkeztu beharko dizkio. Ezaugarri esanguratsuetan erreparatzeko, irakasleak galderak proposatuko dizkie ikasleei.

Adibideak emateko orduan, irakasleak saihestu egin behar du irudiak beti posizio berdin edo antzekoetan aurkeztea ikasleari. Esate baterako, eskolako proposamenetan, haurra ohitzen bada bere oinarrietako batean horizontalki ezarria

21. Eredu dinamiko hau baliagarri gerta daiteke: <https://www.geogebra.org/m/uDE27dS8>

dagoen triangelu aldeakidea soilik irudikatzen, gerora ez ditu identifikatuko bestelako forma edota posizioetan dauden triangeluak. Hau da, bere adibideak aurkezterakoan, irakasleak saihestu egin beharko ditu estereotipatutako irudiak. Aurrerago, triangelua ohiko posizioan ez egoteagatik, haurrak zailtasunak izan ditzake azalerak kalkulatzeko orduan, oinarria eta altuera ez dituelako behar bezala identifikatuko.

Objektu geometriko bakoitza aztertzeke, beharrezkoa den denbora eman beharko zaio haurrari. Zenbaitetan, denbora falta argudiatuz, edota irudien ezaugarriak aztertzea erraza den ustetan, irakasleak azkar batean aurkezten ditu irudi eta formak. Horrelakoetan, haurrak ez du bere analisia egiteko behar beste denbora izaten, eta elementuak nahasteko joera handiagoa izango du. Esate baterako, prisma baten deskribapenean, oinarriak ahaztuko zaizkio, edota oinarria eta aurpegia nozioak nahastuko ditu, gauza bera direlakoan.

Arazorik handiena angeluek ematen ohi dute. Nozio hau berria izan ohi da ikasleentzat, zaila da eta ez da batere intuitiboa haietentzat. Angelua bi zuzenerdiren arteko eremua da, baina eremu horrek ez du zabalera berdina jatorritik hurbil, non bi zuzenerdiak elkarren gertu dauden, edo jatorritik urrun, non bi zuzenerdiak elkarrengandik aldentzen diren. Horrela, haurrak pentsatzen du zuzenerdien arteko distantziak eragina duela angeluaren anplitudean, eta uste du angelua handitzen dela jatorritik urrundu ahala.

Hiru dimentsioko objektuen *planoko irudikapena errealtatearen deformatzailea* da. Zaila izan ohi da ikasleak *solidoaren garapena* solidoaren ikuspegi espazialarekin erlazionatzea. Adibidez, kuboaren garapen laua egiterakoan, kuboaren aurpegiak poligono karratuen sekuentzia bat osatzen dute planoan, eta garapen lau hori nahasgarria izaten da haurrentzat. Kuboaren garapen lauan haurrak ez du kubo bat ikusiko. Era berean, izozki-kukurutxo baten irudia aurkezten badiogu, haurrak ziurrenik triangelu bat eta zirkuluerdi bat ikusiko ditu, ez, ordea, konoa eta esfera-erdia. Normalean, 8 urte ingurura arte, haurra ez da gai izaten objektu solido baten irudia bere garapen lauarekin identifikatzeko. 7 eta 9 urte bitartean, has daitezke objektu baten bistak elkarrekin aztertzen, eta hortik aitzina, zilindro, kono edota kuboaren garapen lauarekin lan egin dezakete. 11 urterekin, piramideak marrazteko gai izaten dira.

Zailtasun horiek gainditzeko, ez dago horiei aurre egitea beste modurik. Haurrei proposatu egin behar zaizkie poliedroen paperaren gaineko garapen lauak, guraizeekin moztu eta itsasgarritz lotu ditzaten²². Era berean, poliedro jakin bat paperez bil daiteke, zehaztasunez, ondoren forma horren garapen laua egiteko. Paperaz gain, badira merkatuan eraikuntza fisiko horiek egiteko hainbat material egituratu.

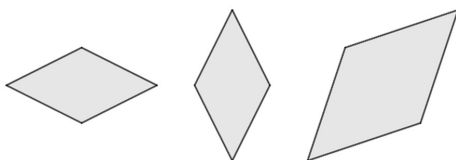
22. Eredu dinamiko hau baliagarri gerta daiteke: <https://www.geogebra.org/m/c292PmbY>

6.4. ARIKETAK

1. Ondoko kontzeptu hauek identifikatu, bereizi eta definitu behar dituzu. Gai izan behar duzu horiek ahoz zein idatziz deskribatzeko.

Puntua, planoerdia, zuzenkiaren luzera, zuzen paraleloak, gradu hirurogeitarra, angelu betegarriak, angelu parekideak, poligonoa, aldea eta erpina, triangelu aldeidea, triangelu zorrotza, laukia, paralelogramoa, laukizuzena, hexagonoa, dekadagonoa, zirkunferentzia, diametroa, sektore zirkularra, zuzena, zuzenerdia, angelu osoa, angelu osagarriak, txandakako barne-angeluak, poligono ganbila, hipotenusa eta katetoa, triangelu isoszelea, triangelu zuzena, lauki ganbila, trapezioa, karratua, heptagonoa, paralelepipedoa, dodekadagonoa, zirkulua, prisma, korda, plano, zuzenkia, zuzen elkarzutak, angelu laua, angelu kamutsa, erpinez aurkako angeluak, triangelu eskalenoa, lauki ahurra, pentagonoa, oktagonoa, erradioa, arkua.

2. Marraz ezazu kubo bat, eta haren gainean egin itzazu ondoko hauek:
 - a. Ertz zehatz bat aukera ezazu, eta azter ezazu beste ertzetikiko eta aurpegiekiko haren posizio erlatiboa.
 - b. Aukera ezazu aurpegi bat eta azter ezazu haren posizio erlatiboa beste aurpegiekiko.
3. Har ezazu edozein poliedro:
 - a. Gutxienez zenbat aurpegik egin behar dute bat erpinetako bakoitzean?
 - b. Zein da poliedro batek izan ditzakeen aurpegi kopururik txikiena?
4. Poliedro erregularren definizioaren arabera, azal ezazu zergatik ondorengo hauek ezin diren poliedro erregular gisa kontsideratuak izan:
 - a. Oinarri karratuko piramidea.
 - b. Zapata-kutxa forma duen ortoedroa.
5. Arrazoitu jarduera hauek VH1 mailakoak diren ala ez:
 - a. Erronboa luzera bereko lau alde dituen laukia da. Hauetako bat ez da egia erronboetan:
 - i. Bi diagonalak luzera berekoak dira.
 - ii. Diagonal bakoitza erronboaren bi angeluen erdikaria da.
 - iii. Bi diagonalak elkarren perpendikularrak dira.
 - iv. Kontrako angeluek neurri berdina daukate.



b. Izan bitez honako bi enuntziatu hauek:

- (1) ABC triangeluak alde guztiak luzera berdinekoak ditu.
- (2) ABC triangeluan B eta C barne-angeluek anplitude bera daukate.

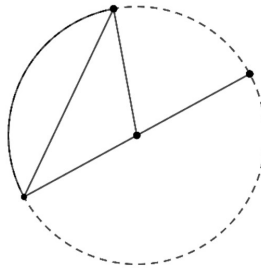
Adierazi erantzun zuzena:

- (1) eta (2) enuntziatuak ezin dira batera egia izan.
- (1) egia bada, (2) egia da.
- (2) egia bada, (1) egia da.
- (1) gezurra bada, (2) gezurra da.

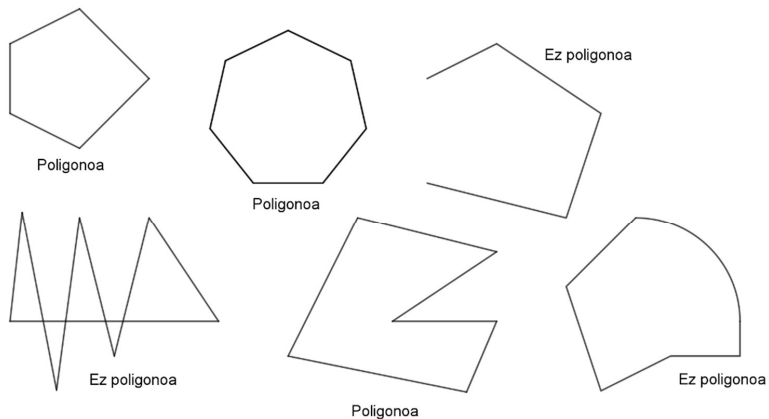
Erantzun guztiak okerrak dira.

Ariketa horietariko bat VH1 mailakoa izanez gero, zer ezagutza matematikotan oinarrituko dira ikasleak horri erantzuteko? Zer uste duzu erantzungo dutela?

6. Ebatzi ariketa hau eta arrazoitu ezazu zergatik dagokion VH1 arrazoibide-mailari: «Izendatu irudi honetan dauden elementu guztiak (puntuak, zuzenkiak, kurbak, gainazalak, angeluak, etab.)».

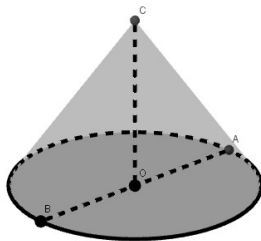


7. Zein mailakoa da ariketa? Arrazoitu erantzuna: «Irudian ematen den informazioan oinarrituz, defini ezazu *poligonoa*».



8. Jarduera hauek egin eta arrazoitu zer mailatakoak diren.

- a. Irudian ikusten den gorputz geometrikoaren izena eman ondoren, adierazi elementu hauek zer diren: C , O , AB , OC , AC edo BC .



- b. Esan ondoko irudia zer den: laukizuzena da; karratua da; triangelua da; paralelogramoa da; erronboa da; karratua da; laukia da.



- c. Arrazoitu adierazpen hauek egia diren ala ez. «Plano bateko bi zuzen, (1) eta (2) paraleloak dira...»:
- (1) zuzenarekiko perpendikularra den beste zuzen bat (2)-rekiko perpendikularra bada.
 - Puntu batean elkar ebakitzen ez badute.
 - (1) eta (2) hirugarren zuzen batekiko paraleloak badira.
 - Haien arteko distantzia konstantea bada.
 - (1) zuzeneko bi puntu hartuz eta konstante mantenduz, eta (2) zuzeneko puntu bat hartuz (aldakorra izan daitekeena), sortzen diren triangeluek azalera berdina dute.
9. Van Hieleren eredu teorikoan oinarrituz, deskriba itzazu laukiaren definizioaren eta propietateen irakaskuntzan zero arrazoibide-mailatik lehenengo arrazoibide-mailara pasatzeko eman beharreko pausoak.
10. Van Hieleren eredua eta haurren ohiko zailtasunak kontuan hartuz, azaldu zer urrats emango zenituzkeen umeekin paralelogramoaren definiziora iristeko.

11. Hona hemen triangeluak deskribatzeko baliagarriak izan daitezkeen zenbait enuntziatu simple:

« p , bi alde luzera berekoak izatea»

« q , hiru aldeak luzera berekoak izatea»

« r , hiru aldeen luzerak ezberdinak izatea»

« s , bi barne-angelu anplitude berekoak izatea»

« t , hiru barne-angeluen anplitudeak berdinak izatea»

« u , hiru barne-angeluen anplitudeak ezberdinak izatea»

- a. Enuntziatu simple horiek erabiliz, eraiki itzazu honako triangelu hauen definizioak: triangelu eskalenoa, triangelu isoszelea, triangelu aldekidea edo ekilateroa.

[Adibidez, triangelu eskalenoak betetzen dituzte r edota u enuntziatuak.]

- b. Enuntziatu simple horietatik abiatuz, osatu itzazu enuntziatu konposatuak, eta erabaki ezazu zer enuntziatu sinpleren baliokideak diren enuntziatu konposatu horiek.

[Adibidez, p eta q enuntziatuen konjuntzioa egiten badugu, emaitza gisa berriz lortzen dugu q enuntziatua (bi alde luzera berekoak *eta* hiru aldeak luzera berekoak dituzten triangeluek hiru aldeak dituzte luzera berekoak: $p \wedge q = q$); bestalde, r eta u enuntziatu baliokideak dira.]

12. Hona hemen triangeluak deskribatzeko baliagarriak izan daitezkeen zenbait enuntziatu simple:

« p , angelu zorrotz bat izatea»

« q , bi angelu zorrotz izatea»

« r , hiru angeluak zorrotzak izatea»

« s , angelu zorrotz bakarra izatea»

« t , zehazki bi angelu zorrotz izatea»

- a. Enuntziatu simple horiek erabiliz, eraiki itzazu honako triangelu hauen definizioak: triangelu zorrotza, triangelu kamutsa, triangelu zuzena.

- b. Enuntziatu simple horietatik abiatuz, osatu itzazu enuntziatu konposatuak, eta erabaki ezazu zer enuntziatu sinpleren baliokideak diren enuntziatu konposatu horiek.

13. Hona hemen laukiak deskribatzeko baliagarriak izan daitezkeen zenbait enuntziatu sinple:

«*a*, lau aldeak luzera berekoak izatea»

«*b*, aldeak binaka luzera berekoak izatea»

«*c*, ondoz ondoko bi alde luzera berekoak izatea»

«*d*, aurkako bi alde luzera berekoak izatea»

«*e*, lau aldeak ezberdinak izatea»

«*f*, lau barne-angeluak anplitude berekoak izatea»

«*g*, barne-angeluak binaka anplitude berekoak izatea»

«*h*, ondoz ondoko bi barne-angelu anplitude berekoak izatea»

«*i*, aurkako bi barne-angelu anplitude berekoak izatea»

«*j*, aldeak binaka paraleloak izatea»

«*k*, aurkako bi alde paraleloak izatea»

- a. Enuntziatu sinple horiek erabiliz, eraiki itzazu ondoko lauki hauen definizioak: trapezioa, paralelogramoa, laukizuzena, karratua, erronboa.
- b. Enuntziatu sinple horietatik abiatuz, osa itzazu enuntziatu konposatuak, eta erabaki ezazu zer enuntziatu sinpleren baliokideak diren enuntziatu konposatu horiek.

7. Sailkapena (VH2)

VH1 arrazoibide-maila gainditu duen haurrak irudi eta forma geometrikoen deskribapenak egin ditzake, forma horien definizio formala eman dezake enuntziatu deklaratioben bidez, eta irudi horien propietateak identifika eta formula ditzake; aldiz, VH2 mailan, propietate horiek formulatzeaz gainera, gai izango da propietate horien artean dauden inplikazioak eta loturak arrazoitzeko. Maila honetan, propietateen artean loturak egiteko gaitasunak aukera emango dio irudien *sailkapenak* egiteko.

Ikasleak pauso bakarreko dedukzioak edota inplikazio nabarmenak egiteko gai izango dira. Hala ere, maila honetan, teorema baten frogapenaren pauso guztiak emateko ez dira gai izango (hori izango da, hain zuzen ere, VH3 mailaren ezaugarrietako bat). Irakasleak frogapen baten pausoak azalduz gero, haurra gai izan daiteke pauso horiek ulertzeko; baina ez da gai izango pauso horiek bere kabuz erreproduzitzeko, edota frogapena bere kabuz eraikitze, frogapenaren egitura ezin duelako gogoan hartu eta frogapenaren xedeari ez diolako zentzurik ikusten. Hau da, pauso bakarreko dedukzioak egiteko gai diren arren, propietate bat frogatzeko beharra ez dute erakusten: kasuen kopuru handi xamar batean betez gero, ontzat ematen dute propietatea.

Adibidez, etapa honetan, haurra gai izango da paralelogramo batean honako argudiatzeak egiteko: «paralelogramoak aurkako angeluak binaka ditu anplitude berekoak; horrek aurkako aldean paralelismoa dakar, ezinbestean»; edota, «paralelogramoaren lau aldeak luzera berekoak izanez gero, haren barneko bi diagonalak elkarren perpendikularrak dira, ezinbestean». Aldiz, Pitagorasen teorema frogatzeko prozedura logiko deduktiboak hainbat pauso dituen, arrazoibide-maila honetan haurra ez da hari jarraitzeko gai izango.

Horrela, arrazoibide-maila honetan, pentsamendu matematiko formala gorpuzten hasten da. Haurra gai da definizio matematiko formalak emateko, eta definizioen xedea ulertzeko. Era berean, haurra gai da ulertzeko propietate batzuk beste batzuen eratorriak direla, eta hipotesietatik ondorioak lor daitezkeela; hau da, *inplikazioa* zer den ulertzen hasten dira. Inplikazioak egiteko gaitasun hori izango da, hain zuzen ere, irudi geometrikoen familiak irizpide logikoen arabera sailkatzea baimentzen duena, haren bitartez propietate geometrikoen arteko erlazioak eraikitzen direlako. Hori horrela izanik ere, sailkapenak egiteko arrazoibideak ez dira abstraktuak, eta manipulazio fisikoari hertsiki loturik daude, oraindik orain.

7.1. JARDUERA TIPIKOAK VH2 ARRAZOIBIDE-MAILAN

Aurreko 5. eta 6. kapituluetan, baliabide fisikoek eta esku hutsez eraikitako irudiek berebiziko garrantzia izan dute, baliabide horiek ongi egokitzen zitzaizkielako VH0 eta VH1 arrazoibide-mailei (Sarasua, 2013). VH2 mailatik aurrera, bi euskarri horiek baztertu egingo dira, gaindituta daudelako. Esate baterako, maila honetan, haurrak gai izan beharko luke esku hutsez edozein irudi eraikitzeko, baita aurreko mailetan egingaitzak zirenak ere. Adibidez, haurra gai izango da karratu bat esku hutsez marrazteko, karratuaren definiziotik eta bertikalean emandako diagonal batetik abiatuz.

Sekzio honetan, beraz, lauki-sarearen eta marrazteko tresnen erabilera aipatuko dira, soil-soilik, horiek direlako VH2 mailari ongi egokitzen zaizkion euskarriak. Horrez gainera, argudiatuko da nola software dinamikoa baliatuz erraztu daitekeen VH2tik VH3rako jauzia.

7.1.1. Lauki-sarearen gainean

Maila honetan, haurra gai izango da lauki-sarearen gainean unitateak zenbatuz oinarritzko propietateak konprobatzeko eta arrazoitzeko (VH1 mailan bereganatu du gaitasun hori) eta oinarritzkoak ez diren beste zenbait propietate konprobatzeko eta arrazoitzeko ere (VH2 mailari propio dagozkionak). Esate baterako, gai izango da unitateak zenbatuz ondorioztatzeko paralelogramo baten aurkako aldeek luzera bera dutela (VH1), edota diagonalek erdiko puntuan elkar ebakitzen dutela (VH2).

Aldiz, teoremen frogapenak bere kabuz berreraikitzeko eta ondorioztatzeko gaitasunik ez duenez, haurra ez da gai izango teorema bat ondorioztatzeko lauki-sarearen gainean unitateak zenbatuz. Adibidez, Pitagorasen teorema ezingo du egiaztatu teknika hori baliatuz lauki-sarearen gainean eraikitako triangelu batean.

ARIKETAK

- (1) Trapezio baten izen eta definiziotik abiatuz eta diagonal zehar bat emanda, marraz ezazu lauki-sarearen gainean angeluzuzena ez den trapezio bat.
- (2) Lauki-sarearen gainean laukitxoak zenbatuz, egiazta ezazu oinarritzko propietate hau: «paralelogramo bat emanda, paralelogramo horren diagonalek erdiko puntuan elkar ebakitzen dute».

7.1.2. Marrazketa-tresnak erabiliz

Maila honetan hasiko da haurra konturatzen, lehenengo aldiz, erregela eta konpasa beharrezkoak direla doitasun handiko marrazkiak egin ahal izateko. Horrela, irudi lau baten definizioa emanda, eredu bat emanda edota lehen mailako (aldea, erpina, etab.) edo bigarren mailako (diagonala, etab.) elementuak emanda, haurra gai izango da zenbait irudi erregelaren eta konpasaren bidez marrazteko: triangelua, angeluzuzena ez den paralelogramo orokorra, karratua ez den erronbo orokorra, etab.

Haurrak zailtasunak agertuko ditu irudi angeluzuzenak eraikitzeko orduan, ziurrenik erregela eta konpas bidez angelu zuzenak irudikatzeko trebezia faltagatik. Gainera, haurrak zailtasunak izango ditu zenbait irudi konplexu irudikatzeko, horiek marrazteko prozedura zehatza eta luzea izanez gero, pentagonoaren edota heptagonoaren kasuan bezalaxe.

Marrazketa-tresnen bidez, haurra gai izango da berehalakoak ez diren propietateak frogatzeko. Esate baterako, triangelu baten erdikariak edota erdibitzaileak puntu bakar batean bat egiten dutela egiaztatzeko gai izango da.

ARIKETAK

- (1) Erregela eta konpasa baliatuz, haren izen eta definizioa ezagututa, eta kateto zeihar bat emanda, marraz ezazu kateto hori duen triangelu angeluzuzen bat.
- (2) Erregela eta konpasa baliatuz, egiazta ezazu propietate hau: «triangelu baten erdikariak puntu batean bat egiten dute».
- (3) Erregela eta konpasa baliatuz, egiazta ezazu propietate hau: «triangelu baten erdibitzaileak puntu batean bat egiten dute».
- (4) Erregela eta konpasa baliatuz, haren izen eta definizioa ezagututa, eta alde luzeenaren luzera emanda, marraz ezazu diagonal laburrena posizio horizontalean duen errobo bat.
- (5) Hiru erpin emanda, eta erregela eta konpasa erabiliz, marraz ezazu paralelogramo bat.
- (6) Triangelu kamuts bat eredu gisa hartuta, marraz ezazu erregela eta konpasa erabiliz eredu horren berdina den beste triangelu bat.
- (7) Erronbo baten ereduak hartuta, marraz ezazu erregela eta konpasa erabiliz eredu horren berdina den beste errobo bat.

7.2. **ARRAZOIBIDE-MAILETAN AURRERA NOLA EGIN:** **VH2-TIK VH3-RA**

VH2 mailan, *ageriko elementuak* irudi lauen propietateak eta propietate horien arteko inplikazioak dira. Esate baterako, haurra gai da paralelogramoa deskribatzeko enuntziatu deklaratioak erabiliz (lau erpin izatea, lau alde izatea, aurkako aldeak binaka luzera berekoak izatea), enuntziatu horiek baliatzen ditu paralelogramoaren definizioa eraikitzeko (lau erpinez eta lau alde osaturiko lerro poligonal itxia da, zeinaren aurkako aldeak binaka luzera berekoak diren), eta gai da propietate horien artean inplikazioak eraikitzeko (lauki baten aurkako aldeak binaka luzera berekoak baldin badira, orduan, irudi hori paralelogramoa da derrigorrean).

Maila honetan, propietateen arteko inplikazioak sinpleak dira, eta haurra ez da gai bere kabuz inplikazioen kate luzeak ikasteko, horiek berreraikitze edota bere kabuz asmatzeko. Aldiz, teoremen dedukzio formala ahalbidetzen duten inplikazio

kateak ulertzeko gai da, eta horrexegatik, inplikazioen kateak egiteko gaitasun hori *ezkutuko elementu* gisa agertzen da maila honetan. Horrela, haurra VH2tik VH3ra igaroko bada, dedukzio formalaren gaitasuna garatu beharko du, ezinbestean. VH3 mailan, *frogapen* hitzak jada hartuko du, gutxi gorabehera, matematikariek ematen dioten esanahi hori bera: prozedura logiko deduktibo baten bidez argumentu bat frogatzea; nahiz eta erabiliko diren argumentuak informalak eta intuitiboak izango diren eta objektu konkretuen behaketan oinarrituko diren. Behaketan oinarriturik daudenez, ikaslearen frogak okerrak izan daitezke behin baino gehiagotan.

1. *Informazioa*. Irakasleak azaldu egiten dizkio ikasleari teorema baten frogapenerako urratsak, pausoz pauso. Pauso bakoitzean, irakasleak nabarmendu egiten ditu hipotesiak (abiapuntu gisa hartzen den informazioa, zuzena eta aurretiaz egiaztatu dena) eta ondorioak (pauso horretan ondorioztatzen den informazio berria); irakasleak nabarmendu egingo du, pauso bakoitzean, aurreko pausoan lorturiko ondorioak hurrengo pausoan hipotesi gisa erabiltzen direla. Horrela, irakasleak ikusarazi behar du argumentu logikoak inplikazioen kateak direla. Argumentu deduktiboek bere hizkera propioa dute (hipotesia/premisa, ondorioa, baldin [...] orduan [...], Demagun [...], etab.), eta sinbologia berezia ere erabiltzen da kasu batzuetan (gezi batek inplikazioa adierazten du, eta geziaren noranzkoak hipotesitik ondoriorako bidea, etab.).
2. *Orientazio gidatua*. Irakasleak proposatu egingo dizkie ikasleei dedukzio formala lantzeko jarduerak, non ikasleek bi edo hiru urratseko frogapenak egin beharko dituzten. Fase honen helburua izango da ikasleak ahoz adieraz dezala zeintzuk diren egin beharreko pausoak, jardueran emandako hasierako baldintzetatik ondoriora heltzeko. Eskema geometrikoek berebiziko garrantzia hartzen dute fase honetan, horien gainean argudiatzen delako propietate baten egiazkotasuna.
3. *Esplizitatzea*. Aurreko fasean, ikasleek era autonomoan lan egiten dute, edota irakaslearekin elkarreraginez. Hirugarren fase honen funtsa komunikatiboa da, eta taldeko ikasleen artean formulazio-jarduerak egitea du xede. Ikasle bakoitzak gai izan behar du bere kide bati teorema baten frogapena azaltzeko, ahoz zein idatziz, eta eskema geometriko baten laguntzarekin. Fase honetan, arreta berezia emango zaio argumentuaren egitura formalari.
4. *Orientazio librea*. Jarduera ugari egin ostean, ikasleak bereganatu egin behar ditu teorema baten frogapenean erabiltzen diren lengoaia eta egitura, eta eman beharreko pausoak. Horrela, ikasleak gai izan behar du eman zaion teorema baten frogapena bere kasa irakurtzeko, hura ulertzeko eta bere kide bati azaltzeko ahoz zein idatziz, eskema geometriko baten laguntzarekin.

5. *Integrazioa*. Fase honetan, irakasleak berreskuratu egiten du protagonismoa edo klasea zuzentzeko ardura. Ikasitako guztiaren sintesia egitea dagokio, garrantzia duena nabarmenduz eta akzesorioa dena baztertuz. Batez ere, ikaslearen ebaluaziorako garrantzitsua den aspekturen bat azaleratu bada, irakasleari dagokio orain aspektu horri garrantzia ematea, ikasleak atxiki dezan. Adibidez, klaseko jardueretan landu diren teorema guztien artean, irakasleak nabarmendu egingo ditu idatzizko proba batean galdetuko direnak, edota hurrengo gaiak lantzeko baliagarriak izango direnak.

Bosgarren fase hori gainditurik, ikaslea VH3 mailan dagoela esan genezake.

Software dinamikoaren rola

Van Hieleren arrazoibide-maila bakoitzean ikasleak ezagutza eta trebezia ezberdinak bereganatzen ditu, eta horretarako baliabide ugari erabil ditzake: objektu fisikoak, lauki-sarea, marrazketa-tresnak, eredu dinamikoak, etab. Hain zuzen ere, GeoGebraren bidez eredu dinamikoak diseinatzeko direnean, eredu horiek gutxienez bi modutara laguntzen dute VH2 arrazoibide-mailari dagokion jardueren matematikoa aurrera eramaten: alde batetik, maila honen ezaugarri den argudiatze inductiboaren nagusitasuna errazten dute, adibide eta kontraadibide ugari irakasleari aurkeztuz; bestalde, sailkatze-jarduerak antolatzeko euskarri egokia dela egiaztatzen da. Irakasleak eredu dinamikoa bere kabuz manipulatzeko duenean, emaitza edota ondorio pertsonal baten bila, esplorazio-momentu batean dagoela esaten da; bestalde, irakasleak propio diseinaturiko eredu baten bidez emaitza matematiko bat erakusten zaionean, horri ilustrazio-momentua esaten zaio (Lasa eta Wilhelmi, 2013; Lasa, 2017).

Irakasleak propietate matematiko jakin bat lantzeko GeoGebran esploraziorako eredu dinamikoa diseinatzeko badu, ikasleak eredu horren manipulazioak eginez jardueren horietan landutako propietatearen inguruko ondorioak atera ditzake. Bestalde, ilustrazio-momenturako diseinatzeko diren ereduak irakaslearen lana laguntzea dute helburu. Eredu horietan ikasleak ez du frogapen formalik edota arrazoibide deduktiborik baliatzen; aldiz, landu nahi den propietatea zuzenean aurkeztu zaio irakasleari, eta ereduaren bidez sortu egiten diren propietate hori betetzen duten nahi adina adibide, propietatea inductiboki frogatuz.

Hona hemen, adibide gisa, irudi lauen identifikazioa (VH0), analisisa (VH1) eta saillkapena (VH2) lantzeko baliagarria gerta daitekeen eredu dinamiko baten diseinua (Abaurrea, Ichaso, Lasa, Wilhelmi, 2018). Baliabidea GGB liburu baten formatuan aurkeztu da²³, non triangeluak eta laukiak lantzen diren, eta esplorazio-momentuak diren nagusi. Ohiko modura, bi euskarri erabiltzen dira aldi berean: softwarea bera, eta paperaren gaineko txantilo bat, non ikasleak informazioa transkribatu beharko duen. Eduki matematikoak euskarri batetik bestera konbertitzeko prozesu horrek lagunduko dio irakasleari irudi lauen propietateen inguruko ondorioak ateratzen.

23. Baliabidea esteka honetan eskuragarri: <https://www.geogebra.org/m/ser8UQU>

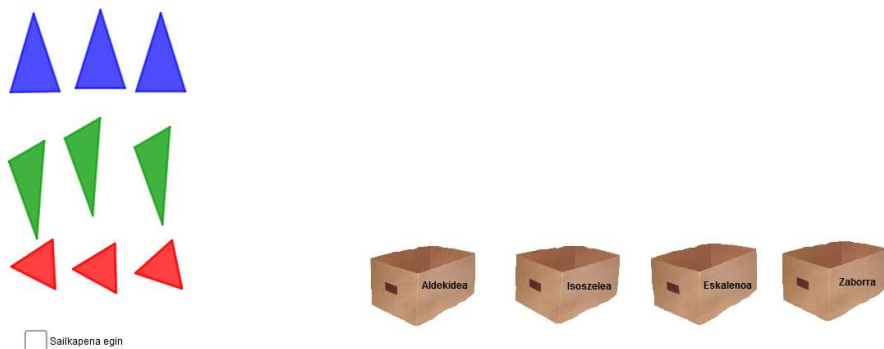
Behin ikasleak bere ondorioak plazaratu dituenean, egindako hori baliozta dezake, horretarako propio diseinaturiko ilustrazio-eredu baten bidez.

Liburua hiru azpiataletan banatu da. Alde batetik, triangeluak haien aldeen arabera sailkatzea proposatzen da; ondoren, triangeluak barne-angeluen arabera sailkatzea; eta azkenik, laukien sailkapenerako ariketak ere proposatzen dira. Hiru azpiatal horien egitura berdina da. Hasieran, ikasleari eskatuko zaio material manipulagarrien bidez sailkapena egin dezan. Jarraian, sailkapen hori bera eredu dinamikoaren bidez errepika daiteke. Azkenik, esplorazio horretan bildutako informazioa ikasleak tauletan antolatuko du eta sailkapenaren inguruko ondorioak atera beharko ditu. Triangeluen sailkapena aldeen arabera egiteko, lehenengo eta bigarren jardueretan, 25. irudian aurkezten den materiala eskaintzen zaio ikasleari:

- Kartoizko 4 kutxa, bakoitza etiketa batekin: (1) Eskalenoa; (2) Isoszelea; (3) Aldekidea eta (4) Zaborra.
- Mota bakoitzeko 3 triangelu: eskalenoen propietateak betetzen dituzten eta berdinak diren 3 triangelu (berdeak), isoszeleen propietateak betetzen dituzten eta berdinak diren beste 3 (urdinak), eta, azkenik, 3 triangelu aldekide (gorriak).

Ikasleak triangelu bakoitza dagokion kutxan sartu behar du. Adibidez, ikaslea triangelu berdeekin hasten bada, berde bat hartuko du eta eskaleno, isoszele edota aldekideen kutxan sartu behar den aukeratu beharko du. Kasu honetan, triangelu berdea eskalenoa denez, eskalenoen kutxan sartuko du. Hurrengo triangelu berdea (eskalenoa ere dena) ezin da aldekide edota isoszeleen kutxan sartu; izan ere, ez ditu aldekide edota isoszeleen propietateak betetzen; beraz, zaborretara botako du. Berdina gertatuko da hirugarren triangelu berdearekin. Hiru koloreekin horrela jardungo du ikasleak.

25. irudia. Triangeluak aldeen arabera sailkatzen.



Eredu dinamikoak balioztatzea egiteko botoia dauka. Horrela, ikasleak «Sailkapena egin» leihatila aktibatzen duenean, animazioak sailkapen egokia aurkeztuko dio ikasleari, eta hark berak egindakoaekin alderatuko du, behar izatekotan zuzenketak eginez. Ikasleak esplorazio honetan zehar lortutako informazioa paperean antolatu beharko du eta ondorioak atera beharko ditu. Triangelu bakoitzak aldean arabera betetzen dituen propietateak ageri dira taula batean. Beste triangeluren batek propietate horietariko bat (edo bat baino gehiago) betetzen badu, dagokion propietatearen (edo propietateen) azpian triangeluaren izena jarri behar da. Esate baterako, triangelu aldekidetaren propietateak hauek dira: (1) hiru aldeak luzera berekoak izatea, eta (2) bi alde luzera berekoak izatea (hots, gutxienez bi alde luzera berekoak izatea). Isoszeleak bigarren propietatea betetzen du eta eskalenoak bat bera ez. Isoszeleak triangelu aldekidetaren propietate bakarra betetzen duenez, ezin da esan aldekidetaren propietate guztiak betetzen dituela, eta, ondorioz, triangelu isoszele guztiak ez dira triangelu aldekidetak.

7.3. ASPEKTU FORMALAK VH2 MAILAN: INPLIKAZIOA ETA BALIOKIDETASUNA

Irudi lauen definizioak eraikitzeko, enuntziatu deklaratiiboak erabiltzen dira, eta 6. kapituluaren aurkeztu dira enuntziatu konplexuak eraikitzeko erabiltzen diren oinarritzko hiru lotura logikoak (*konjuntzioa*, *disjuntzioa* eta *ukazioa*). Atal honetan, propietateen arteko loturak egitea ahalbidetzen duten beste bi lotura logiko aurkeztuko dira: *inplikazioa* eta *baliokidetasuna*.

Hizkuntza naturalean «baldin [...] orduan [...]» lotura edo haren baliokidea den adierazpen bat erabiltzen denean, *inplikazio* logikoa erabiltzen ari da. Bi enuntziatuk hartzen dute parte inplikazio batean (p , q), eta inplikazioak zera esan nahi du: lehenengo enuntziatua egia den guztietan (p -ren egia-balioa, 1), horrek dakarrela, ezinbestean, bigarren enuntziatua ere egia izatea (q -ren egia-balioa, 1). Hau da, enuntziatuen artean alde bakarreko kausa eta ondorio harremana dago. Bestela esanda, inplikazio batean ezin da gertatu hipotesia bete bai, baina ondorioa ez betetzea. Hipotesiaren egia-balioa *gezurra* bada (0), ondorioari buruz ezin da ezer esan: berdina izan daiteke egia nahiz gezurra, eta berdina har ditzake 0 edo 1 egia-balioak.

p	1	1	0	0
q	1	0	1	0
$p \rightarrow q$	1	0	1	1

Nabarmendu beharra dago, halaber, taula ez dela simetrikoa. Hau da, «baldin p orduan q » inplikazioa betetzeak ez du esan nahi derrigorrean bete behar denik «baldin q orduan p » inplikazioa. Bi inplikazio horien egia-etaulak ez dira berdinak, eta horregatik esaten zaio inplikazioari *alde bakarreko kausa-ondorio harremana*.

ARIKETA EBATZIA. Hurrengo enuntziatu konposatu hauetan bi enuntziatu sinple-ren arteko inplikazioak eraiki dira:

- (1) «Aita Santua ezkongabea bada, orduan ez du emazterik».
- (2) «Argia ezarriz gero intentsitate handiko grabitate-eremu baten eraginpean, argi horren espektro elektromagnetikoak gorrirako lerratzea erakusten du».
- (3) «Oraingoan ere logikako azterketa gainditzen ez badut, arraunlari sartuko naiz».

(1) enuntziatu konposatua da, eta bi enuntziatu sinplez osaturik dago: « p , Aita Santua ezkongabea da», eta « q , Aita Santuak ez du emazterik». Enuntziatu konposatua inplikazio batenez ($p \rightarrow q$), ezin da gertatu Aita Santua ezkongabea izatea eta emaztea edukitzea. Bestalde, p hipotesia gezurra balitz (Aita Santua ezkongabea dela gezurra balitz), orduan q -ri buruz ezin da ezer ondorioztatu, emaztea duela egia izan daiteke (1) edo gezurra (0), ezin da deus esan horri buruz.

Aurrekoa bezala, (2) enuntziatu konposatua inplikazioa da, eta ezin da gertatu argia ezartzea intentsitate handiko grabitate-eremu baten eraginpean eta argi horrek ez erakustea espektro elektromagnetikoan gorrirako lerratze bat. Aldiz, argia ez bada ezarri intentsitate handiko grabitate-eremu baten eraginpean, orduan ez dakigu zer ezaugarri erakutsiko duen argi horrek espektro elektromagnetikoan, gorrirako lerratzea erakutsi lezake beste kausa batzuegatik (egia-balioa 1) edo gorrirako lerratzerik ez du erakutsiko (egia-balioa 0).

Azkenik, (3) enuntziatu konposatua, inplikazioa izanik, ezin da gertatu ikasleak logikako azterketa suspenditzea eta arraunlari ez sartzeari. Logikako azterketa gaindituz gero, ikasleak libre du arraunlari sartzeari (egia-balioa 1) edo arraunlari ez sartzeari (egia-balioa 0).

Bestalde, gerta daiteke bi enuntziatu baliokideak izatea. Kasu horretan, inplikazioa aldebikoa da eta simetrikoa, eta bi enuntziatuek egia-balio bera hartzen dute beti. Hizkuntza naturalean, enuntziatu baliokideei esaten zaie «esanahi bera» dutela, «berdinak» direla, «baliokideak» direla, edota «gauza bera» diotela. Hizkera formalean, matematikariek harreman horri esaten diote «[...] baldin eta soilik baldin [...]». Aldebiko inplikazioan, bi enuntziatuek egia-balio bera hartu behar dute derrigorrean. Hau da, bata egia bada, bestea ere egia da; eta alderantziz, bietako bat gezurra izatekotan, bestea ere gezurra da. Ezin da gertatu bat egia izatea eta bestea gezurra.

p	1	1	0	0
j	1	0	1	0
$p \leftrightarrow j$	1	0	0	1

Egia-balioen taulak duen egituragatik, baliokidetasunari *aldebiko inplikazio* ere esaten zaio, bi inplikazioen *konjuntzioa* delako. Hau da:

$$p \leftrightarrow q = (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$$

7.4. ARIKETAK

1. Ez dago poligonoak sailkatzeko modu bakar bat. Sailkapena izan daiteke alde kopuruaren arabera, barne-angeluen neurrien arabera, aldeen berdintasunaren arabera, barne-angeluen berdintasunaren arabera, etab. Egin ezazu poligonoen sailkapen bat:
 - a. Alde kopuruaren arabera.
 - b. Alde eta barne-angeluen berdintasunaren arabera.
 - c. Barne-angeluen irekieraren arabera.
2. Van Hieleren ereduak kontuan hartuz, zein ezaugarriren arabera identifikatuko zenuke haur bat VH2 mailan dagoela?
3. Diseina ezazu jarduera bat zure ikasleei VH1etik VH2ra igarotzeko lagungarria gerta daitekeena.
4. Hona hemen triangeluak deskribatzeko baliagarriak izan daitezkeen zenbait enuntziatu sinple:
 - « p , bi alde luzera berekoak izatea»
 - « q , hiru aldeak luzera berekoak izatea»
 - « r , hiru aldeak ezberdinak izatea»
 - « s , bi barne-angelu anplitude berekoak izatea»
 - « t , hiru barne-angeluen anplitudeak berdinak izatea»
 - « u , hiru barne-angeluen anplitudeak ezberdinak izatea»
 - a. Aurki itzazu enuntziatu sinple horien artean dauden inplikazioak eta baliokidetasunak.
 - b. Erabil itzazu (a) ataleko inplikazioak triangeluen sailkapen bat egiteko.
5. Hona hemen triangeluak deskribatzeko baliagarriak izan daitezkeen zenbait enuntziatu sinple:
 - « p , angelu zorrotz bat izatea»
 - « q , bi angelu zorrotz izatea»
 - « r , hiru angeluak zorrotzak izatea»
 - « s , angelu zorrotz bakarra izatea»
 - « t , zehazki bi angelu zorrotz izatea»
 - a. Aurki itzazu enuntziatu sinple horien artean dauden inplikazioak eta baliokidetasunak.
 - b. Erabil itzazu (a) ataleko inplikazioak triangeluen sailkapen bat egiteko.

6. Hona hemen laukiak deskribatzeko baliagarriak izan daitezkeen zenbait enuntziatu sinple:

«a, lau aldeak luzera berekoak izatea»
 «b, aldeak binaka luzera berekoak izatea»
 «c, ondoz ondoko bi alde luzera berekoak izatea»
 «d, aurkako bi alde luzera berekoak izatea»
 «e, lau aldeak ezberdinak izatea»
 «f, lau barne-angeluak anplitude berekoak izatea»
 «g, barne-angeluak binaka anplitude berekoak izatea»
 «h, ondoz ondoko bi barne-angelu anplitude berekoak izatea»
 «i, aurkako bi barne-angelu anplitude berekoak izatea»
 «j, aldeak binaka paraleloak izatea»
 «k, aurkako bi alde paraleloak izatea»

- a. Aurki itzazu enuntziatu sinple horien artean dauden inplikazioak eta baliokidetasunak.
- b. Erabil itzazu (a) ataleko inplikazioak laukien sailkapen bat egiteko.

[Lehenengo eta behin, laukiak izendatzeko erabiltzen diren izen guztiak zerrendatu behar dituzu, bat bera ere utzi gabe. Bigarrenik, izen horietako bakoitza deskribatu edo definitu behar duzu, goiko enuntziatu sinpleen konposaketak baliatuz; horretarako, behar bezala erabili behar dituzu lokailu logikoak (batez ere, konjuntzioa). Hirugarrenez, azkenik, behin aurreko izen guztiak karakterizaturik dituzunean, horien artean egon daitezkeen inplikazio guztiak lortu behar dituzu. Ohar zaitez prozesua aski luzea izan daitekeela, beraz, beharrezkoa izango zaizu sistematikoa izatea eta lana ongi antolatzea. Lan hori ez dugu klasean zuzenduko, baina tutoretza-orduetara etor zaitezkezte laguntza behar izanez gero]

7. Honako objektu geometriko hauen sailkapena egin Vennen diagrama eginez:

- a. Triangeluak aldean luzeraren arabera.
- b. Laukiak.

8. Esan honako baieztapen hauek zuzenak ala okerrak diren:

- a. Erronbo guztiak paralelogramoak dira.
- b. Karratu guztiak laukizuzenak dira.
- c. Laukizuzenen bat ez da trapezioa.
- d. Lauki guztiak ez dira paralelogramoak.
- e. Paralelogramo batzuk erronboak dira.
- f. Karratuak erronboak dira.
- g. Erronboren bat ez da laukizuzena.

- h. Laukizuzen batzuk erronboak dira.
 - i. Triangelu aldeak guztiak isoszeleak dira.
 - j. Triangelu isoszele guztiak aldeak dira.
9. Zein ezaugarriaren arabera bereizten dira:
- a. Karratuak eta erronboak?
 - b. Trapezioak eta paralelogramoak?
 - c. Laukizuzenak eta karratuak?
10. Prisma bat, oro har, ez da poliedro erregularra. Badago poliedro erregularra den prismarik? Zein?
11. Badago poliedro erregularra den piramiderik?
12. Saia gaitezen triangelu aldeak dituen poliedro erregularra eraikitzen.
13. Zer poliedro lortuko dugu hiru triangelu biltzen baditugu erpin bakoitzean?
14. Eta lau biltzen baditugu?
15. Pentsa ezazu ea posible den bost triangelu edo gehiago biltzea erpineko. Kontuan izan 360° baino gehiago ezin direla bildu.
16. Zer poliedro lortuko dugu 3 karratu biltzen baditugu erpineko.
17. Pentsa ezazu zer gerta daitekeen 4 edo karratu gehiago elkartu nahi baditugu erpineko.
18. Kontuan izanik pentagono erregular bateko angeluak 180° dituela, zenbat pentagono elkartu behar dira erpineko poligono erregularra egiteko.
19. Aurpegi hexagonalekin poliedro erregular bat eraikitzea posible da?
20. Oinarri karratuko piramide zuzen bat har dezagun.
- a. Zer poligono lortzen dira oinarriarekiko paraleloa den plano batez ebakitzen bada?
 - b. Eta oinarriarekiko plano perpendikular batez ebakitzen bada?
 - c. Eta zehar plano batez?
 - d. Laukizuzena izan daiteke ebaketaren emaitza?
21. Egin ezazu prismen sailkapena (har itzazu kontuan angelu diedroen anplitudea, oinarriaren erregularotasuna eta oinarriaren forma).
22. Egin piramideen sailkapena (har itzazu kontuan erpinaren kokalekua, oinarriaren erregularotasuna eta oinarriaren forma).

8. Dedukzio formala (VH3)

Arrazoibide-maila honetara iritsita, ikaslea gai izango da pauso anitzeko arrazoibide logiko formalen kateak ulertzeko eta arrazoibide horiek eraiki ditzake bere kabuz. Ikasleak ulertu egiten du teorema baten frogapenaren egitura eta haren beharra, eta enuntziatuen egiazkotasuna egiaztatzeko beharra sentitzen du. Horrez gainera, ikasleak onar dezake emaitza bera frogatzeko argudiatze bat baino gehiago egon daitezkeela, edota formulazio ezberdina duten definizio baliokideak egon daitezkeela. Maila honetan, beraz, ikaslea gai da matematikarekin plano abstraktu batean harremanetan jarduteko.

8.1. JARDUERA TIPIKOAK VH3 ARRAZOIBIDE-MAILAN

Arrazoibide-maila honetan, emaitza matematikoen frogapenezko problemak proposatzen dira, zeinetan argumentu bat eraiki beharko den emaitza matematiko horren egiazkotasuna balioztatzeko. Argumentu horiek izan daitezke induktiboak edota logiko deduktiboak, problemaren arabera eta frogatu nahi den emaitzaren arabera.

Sarasuaren arabera (2013), arrazoibide-maila honetan proposatzen ahal zaizkie ikasleei, oraindik orain, lauki-sarearen gainean edota marrazteko tresnekin egin beharreko jarduerak. Esate baterako, lauki-sarearen gainean, teoremen frogapenak egiazta daitezke, hala nola Pitagoraren teorema. Marrazteko tresnekin, berriz, irudi konplexuak eraiki daitezke, forma geometriko horiek eraikitzeko nolabaiteko trebakuntza teknikoa edota pausoz pauso jarraitu beharreko prozedura jakin bat beharrezkoak direlarik.

ARIKETAK

- (1) Horizontalean emandako diagonal bat emanda, marraz ezazu karratu bat marrazketa-tresnekin.
- (2) Erregela eta konpasa baliatuz, marraz ezazu pentagono erregular bat.
- (3) Erregela eta konpasa baliatuz, eta alde zehar bat emanda, marraz ezazu angeluzuzena ez den paralelogramo bat.
- (4) Eredu gisa karratu bat emanda, marraz ezazu erregela eta konpasarekin haren berdin bat.
- (5) Trapezioa ez den lauki bat emanda, marraz ezazu berdina den beste bat marrazketa-tresnak erabiliz.

- (6) Marraz ezazu laukizuzen bat erregela eta konpasa erabiliz.
- (7) Alde baten luzera emanda, marraz ezazu karratu bat erregela eta konpasa baliatuz.
- (8) Erregela eta konpasa baliatuz, marraz ezazu hexagono erregular bat.
- (9) Erregela eta konpasa baliatuz, marraz ezazu heptagono erregular bat.

Arrazoibide-maila honetan, beraz, eraikuntza konplexuak egin daitezke erregela eta konpasa baliatuz. Horrez gain, neurriari loturiko euskarriak albo batera utz daitezke, eta abstrakzioa eta kodifikazio sinbolikoa soilik baliatuz ebatz daitezke problema matematikoak. Frogapen abstraktu horiek egiteko, funtsean, bi argudiatze molde balia daitezke. Frogapen *induktibo* batean, kasuen kopuru handi bat aztertzen da erregularitasunak aurkitzeko eta arau orokor bat edota patroi bat aurkitzeko eta hura enuntziatzeko.

ARIKETAK

- (1) Zenbat diagonal ditu triangelu batek? Zenbat diagonal ditu lauki batek? Erantzun galdera berari hurrenez hurren baliatuz pentagonoa, hexagonoa, heptagonoa, oktagonoa, nonagonoa eta dekadagonoa. Argumentu induktibo baten bidez, eman ezazu arau bat, patroi bat edota formula bat, poligono baten diagonalen kopurua emango duena, poligonoaren aldeen kopuruaren arabera.
- (2) Poligono guztiak triangeluka daitezke, hau da, triangelutan deskonposa daitezke. Poligono-hurrenkera bat emanik (alde kopuruaren arabera hurrenkera), zein da poligono horietako bakoitza triangelukatzeko beharrezkoak diren triangeluen kopuru minimoa? Aurkitu behar duzu arau induktibo bat, balioko duena aurreikusteko zenbat triangeluz osaturik dagoen poligono bat, haren aldeen kopuruaren arabera.

Argumentu *deduktibo* batean, berriz, inplikazioen kateatze batean oinarrituriko arrazoibide logiko-deduktibo bat eraikitzen da, eta inplikazioen kate horrek hasierako hipotesia eta bilatu nahi den ondorioa lotzen ditu. Horrela, inplikazioaren egia-taularengatik, hasierako hipotesiak egia diren guztietan, amaierako ondorioak ere egia izan beharko du, derrigorrean.

ARIKETAK

- (1) Argumentu deduktibo baten bidez, froga ezazu triangelu baten hiru erdibitzaileek puntu batean elkar ebakitzen dutela.
- (2) Argumentu deduktibo baten bidez, froga ezazu triangelu baten hiru erdikariak puntu batean elkar ebakitzen dutela.
- (3) Argumentu deduktibo baten bidez, froga ezazu triangelu baten hiru erdibidekoek puntu batean elkar ebakitzen dutela.
- (4) ABC triangeluan, A eta B puntuak finkoak dira eta zuzenean daude. Aldiz, C puntua r zuzenaren paraleloa den s zuzeneko puntu bat da. Froga ezazu ABC triangeluak beti azalera berdina daukala, hots, C puntuak s zuzenean daukan kokapenak azalera eraginik ez daukala.

- (5) ABC triangelu batean, AB eta AC aldeak luzera berekoak baldin badira, orduan, B eta C angeluak anplitude berekoak dira.
- (6) ABC triangelu batean, c aldea hiruretan luzeena baldin bada, orduan, C angelua ere hiruretan anplitude handieneko angelua da.

8.2. ARRAZOIBIDE-MAILEN ARTEKO MUGA LAUSOA: VH3 ETA VH4

Van Hieleren eredu teorikoan, ez dago garbi VH3 mailaren eta VH4 mailaren arteko muga non dagoen; non hasi eta non bukatzen den arrazoibide-maila bakoitza, muga hori lausoa da. VH4 goi-mailako matematikarien arloa da, nolabait esateko, matematikari profesionalen eta ikertzaileen maila. Maila honetan, *ageriko elementuak* frogapen formalak dira, eta *ezkutuko elementuen* artean daude, berriz, argudiatze deduktibo hori justifikatzen duten sistema logikoa eta lege formalak.

Frogapen matematiko batean beti sakondu daiteke nahi den guztia, eta horregatik, VH3 eta VH4 mailen artean sartu eta irten ibiliko da ikaslea. Frogapenaren sakontasun maila erabaki ahal izate horrek argi erakusten du matematika jarduera komunikatibo bat dela, eta komunikazio horren egokitasuna ontzat eman daitekeela jarduera komunikatibo horretan parte hartzen duten subjektuen arabera.

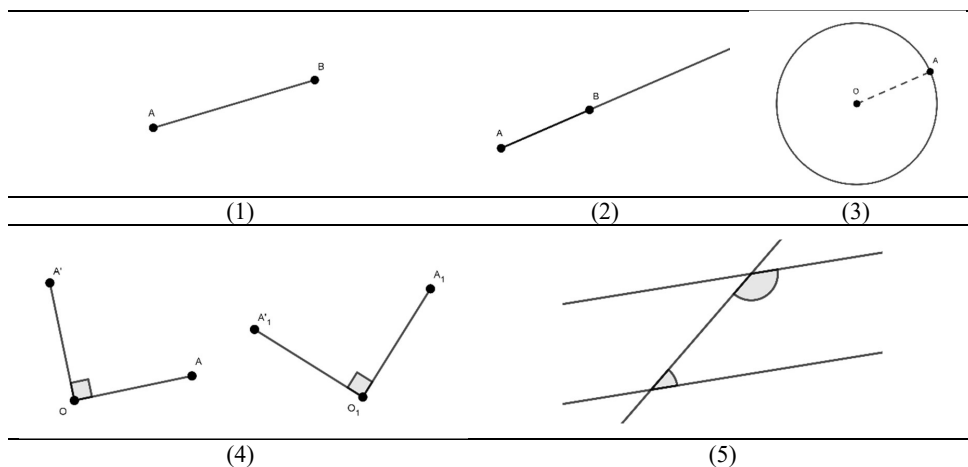
Inplikazioen kate batean aurrera egin daitekeen bezala, kate horretan berean beti egin daiteke atzera, eta geometriako emaitza bat beti oinarritu daiteke aldez aurreko beste emaitza batean. Horrela, kate horretan atzera eginez, geroz eta oinarritzokoagoak diren emaitzak aurkituko ditugu; baina, ezin denez atzerantz jo infinitura arte, nonbaiten jarri beharko da hasiera-harria, «zero gunea» edo argudiatze guztien abiapuntua: sistema logiko baten abiapuntuan *axiomak* aurkituko ditugu.

Axiomak, berez, komenientziaz ezarritako egia absolutuak dira. Eztabaidaezinak dira eta egiazkotzat hartzen dira, zalantzarik gabe. Horrela, axioma horietatik abiatuz ondoriozta daitezke gainerako emaitza guztiak. Eskolako geometria oinarritzen da Euklidesek bere *Elementuak* liburuan ezarritako sistema axiomatikoaren gainean, eta bost axiomaz osaturik dago:

- (1) Bi puntu emanda, beti marraz daiteke bi puntu horiek lotzen dituen lerroa.
- (2) Zuzenki baten edozein mutur luza daiteke nahi den bezain luze.
- (3) Puntu bat eta erradio bat emanda beti marraz daiteke zirkunferentzia bat.
- (4) Angelu zuzen guztiak berdinak dira.
- (5) Zuzen batek beste bi zuzen ebakitzen dituenean, horiekin osatzen dituen bi barne-angeluak bi angelu zuzen baino txikiagoak baldin badira, bi zuzen horiek behar beste luzatuz elkar ebakiko dute bi barne-angeluak bi angelu zuzen baino txikiagoak diren alde horretan.

Horrela, bada, nahiz eta axioma horiek ez diren erabiltzen modu operatibo batean diskurtso matematiko baten barnean, erabiltzen diren gainerako emaitza eta teorema guztiak, funtsean, bost emaitza absolutu horien egiazkotasun eztaba daezinean oinarritzen dira. Lehen Hezkuntzan, geometria laua eta espaziala aztertzen dira nagusiki, eta objektu geometriko horiek oinarritzko elementuz osaturik daude, hala nola puntuak, lerroak, poligonoak, angeluak, etab. Objektu geometriko guztiak deskriba daitezke sinpleagoak diren objektuen bitartez, baina «atzeratze» jolas hori ezin da infinitura eraman. Momenturen batean ezarri beharko da hasierako puntua, eta hasierako premisa horiei *axioma* esaten zaie.

26. irudia. Euklidesen axioma.



ARIKETAK

- (1) Bi lerro ez paralelok puntu bakarrean ebakitzen dute elkar.
- (2) Emanik r zuzena eta P puntu bat, soilik existitzen da zuzen bakar bat r -ren paraleloa izan eta P puntutik igarotzen dena.
- (3) Izan bitez hiru zuzen, r , s eta t . Baldin r eta s elkarren paraleloak baldin badira, eta s eta t elkarren paraleloak badira, orduan r eta t elkarren paraleloak dira.

Hiru propietate horiek egiazkoak dira, Euklidesen axiomen ondorio zuzenak direlako. Hemendik aurrera, goi-mailako eduki matematikoak lantzeko moduan gaude.

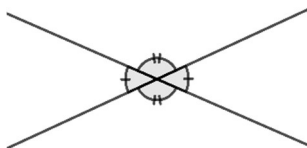
8.2.1. Angeluen propietateak

Hona hemen ariketa eta teorema sorta bat, angeluen propietateen inguruan hausnartzeko. Saia zaitez horiek ebazten, jakinik erabili beharreko argumentuetan inplikazio bat baino gehiago, edo arrazoitze-pauso bat baino gehiago baliatu beharko dituzula. Sistematikoa eta exhaustiboa izan ezean, nekez ebatz daitezke problema horiek.

ARIKETA. Izan bitez P , Q eta M planoko hiru puntu. Baldin QPM angelua zero bada, hau da $(\widehat{QPM}) = 0$, zer ondoriozta dezakezu P , Q eta M puntuei buruz?

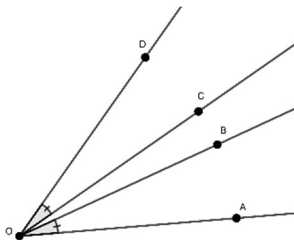
1. teorema

Izan bitez r eta s bi zuzen ebakitzaile. Orduan, ebakidura puntuan neurturiko aurkako angeluek anplitude bera dute.



2. teorema

Izan bedi O lau zuzenerdiren jatorri-puntua, zuzenerdi horiek izanik, hurrenez hurren, A , B , C eta D puntuetatik pasatzen direnak. Baldin AOB eta COD angeluak anplitude berekoak badira, orduan, AOC eta BOD ere anplitude berekoak dira.

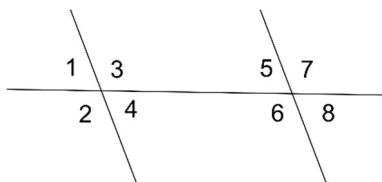


3. teorema

Izan bitez r eta s bi zuzen paralelo, eta izan bedi t , bi zuzen horiek ebakitzen dituen hirugarren zuzen ebakitzaile bat. Orduan:

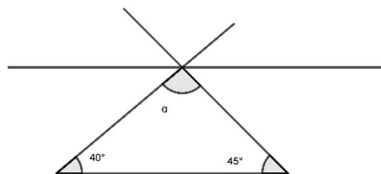
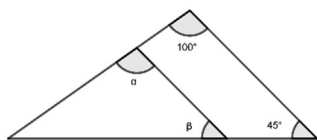
- Txandakako barne-angeluek (3 eta 6; 4 eta 5) anplitude bera dute.
- Txandakako kanpo-angeluek (1 eta 8; 2 eta 7) anplitude bera dute.
- Angelu parekideek (1 eta 5; 3 eta 7; 2 eta 6; 4 eta 8) anplitude bera dute.

- Erpinez aurkako angeluek (1 eta 4; 2 eta 3; 5 eta 8; 6 eta 7) anplitude bera dute.

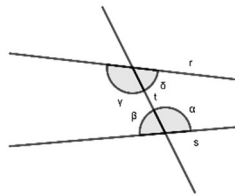
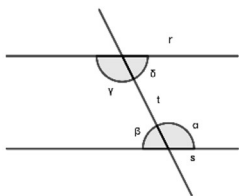


ARIKETAK

- (1) Baiezatu teorema hau betetzen dela: «Lehenengo eta bosgarren angeluak berdinak direla egiaztatuz gero, hori nahikoa al da 3. teoremako gainerako berdintzak betetzen direla egiaztatzeko?».
- (2) Izan bedi ABC triangelua. Argumentu deduktibo bat baliatuz, frogatu ezazu ABC triangeluaren hiru barne-angeluak batuz, batura hori angelu lau baten berdina dela, hau da, 180° .
- (3) Lor itzazu α eta β angeluen balioak.



- (4) Frogatu bi zuzen, r eta s , elkarren paraleloak badira, horiek ebakitzen dituen t zuzenaren alde batean geratzen diren angeluak elkarren betegarriak direla. Hau da, γ eta β betegarriak dira eta δ eta α betegarriak dira (r eta s paraleloak ez badira, ez da propietate hau beteko).



- (5) (3) Aurreko ariketako lehenengo kasuan (r eta s paraleloak diren adibidean), frogatu ezazu $\gamma = \alpha$ eta $\delta = \beta$ betetzen dela.

Hirugarren eta laugarren ariketetan frogatutako emaitzen alderantzizkoa betetzen da? Hau da, hirugarren ariketaren kasuan, γ eta β betegarriak eta δ eta α betegarriak badira, esan daiteke r eta s paraleloak direla?

8.2.2. Kongruentzia eta antzekotasuna

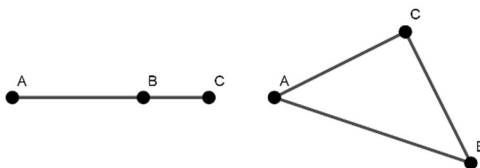
Poligonoen arteko kongruentzia eta antzekotasuna aztertuko da atal honetan, baina horrekin hasi aurretik, zuzenkien inguruko bi definizio ikusiko dira. Alde batetik, bi zuzenki kongruenteak direla esaten da norabide ezberdina eduki arren luzera berdina badute. Bestalde, $\overline{AB}$ eta $\overline{BC}$ zuzenkiak kateatuta daudela esaten da; izan ere, zuzenki baten muturreko puntu bat beste zuzenkiaren muturreko puntu bat ere badelako.

ARIKETAK

- (1) Ondoko zuzen bikoteetatik esan zeintzuk diren elkarren kongruenteak, eta kateatuta dauden ala ez adierazi.

$$(a) || \quad (b) \wedge \quad (c) / \quad (d) \vee \quad (e) // \quad (f) / - \quad (g) \setminus /$$

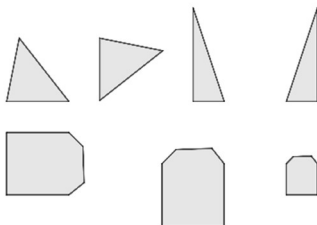
- (2) A , B eta C zuzen berean dauden puntuak dira, B puntua A eta C artean egonik. Ziurta dezakegu $\overline{AB}$ eta $\overline{BC}$ zuzenkiak kateatuta daudela? Zenbat neurtuko du $\overline{AC}$ zuzenkiak? A , B eta C puntuak zuzen berean egongo ez balira, zenbat neurtuko luke $\overline{AC}$ zuzenkiak?



- (3) A , B eta C plano bateko puntuak dira, non $\overline{AC} = 2$ cm, $\overline{AB} = 3$ cm eta $\overline{BC} = 1$ cm, diren. Hiru puntu horiek zuzen berean al daude?

LHn forma geometriko lauak lantzen direnean, elkarren antzekoak edota kongruenteak diren irudi lauak ezagutzeko, identifikatzeko eta definitzeko jarduerak egin ohi dira. Horrez gainera, forma horiek erlazionatzeko jarduerak proposatzen zaizkie ikasleei. Forma kongruenteak zera dira, posizio ezberdinetan egon arren forma eta tamaina berdina duten irudi lauak. Hau da, isometrien bidez transformatuz gero, haien itxura ez da aldatzen.

ARIKETA. Irudi hauetatik zeintzuk dira elkarren kongruenteak? Neurketak egitea beharrezkoa da edo irudiak moztuz eta haien posizioa aldatuz erantzun daiteke?



Beraz, bi irudi lau elkarren kongruenteak direla esaten da, haien erpinen artean korrespondentzia bijektiboa existitzen bada, honako bi ezaugarri hauek betez:

1. Lehenengo irudiko angeluek dagozkien bigarren irudiko angeluen anplitude berdinak dituzte.
2. Lehenengo irudiko aldeek dagozkien bigarren irudiko aldean luzera berdinak dituzte.

Triangeluez ari garela, hasiera batean, bi irudi elkarren kongruenteak diren ikusteko, ikasleek hiru aldeak eta hiru angeluak aztertu beharko dituzte irudi bakoitzean. Aldiz, ikasleek arrazoibide-mailetan aurrera egin ahala, kongruentzia-irizpideak baliatzen ahalko dituzte. Hau da, bi triangelu elkarren kongruenteak direla ikusteko ez da beharrezkoa 6 elementu pareak aztertzea (bi triangeluetako 3 aldeak eta 3 angeluak), eta kongruentzia egiaztatzeko hiru irizpide ximple existitzen dira:

1. *Hiru aldean irizpidea*. Bi triangeluren aldean luzerek bat egiten badute, kongruenteak direla esan daiteke.
2. *Bi angelu eta alde baten irizpidea*. Bi triangeluren bi angeluren eta horiek elkartzen dituen aldearen neurriek bat egiten badute, elkarren kongruenteak direla esaten da.
3. *Bi alde eta angelu baten irizpidea*. Bi triangeluren bi aldeek eta horien arteko angeluen neurriek bat egiten badute, kongruenteak direla esaten da.

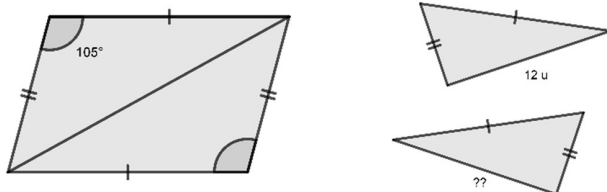
ARIKETAK

- (1) Lehenengo irizpidea ulertzeko (hiru aldean irizpidea), ikasleei triangelu bat eman behar zaie eta erregela eta konpasa erabiliz luzera bereko aldeak dituen beste bat eraikitzeko eskatzen zaie. Ondoren, bi triangeluak eraikita egiaztatuko dute barne-angeluen irekidura ere berdina dela.
- (2) Bigarren irizpidea ulertzeko (bi angelu eta alde baten irizpidea), ikasleei triangelu bat emanda, erregelaren bidez haren aldeatariko bat kopiatzeko eskatzen zaie. Ondoren, angeluak neurtzeko zirkuluardiaren bidez alde horri elkaturik dauden bi angeluak ere kopiatu behar dituzte. Eraikuntza horrek ixteko aukera bakarra dauka, triangelu berria sorraraziz. Hiru aldeak eta hiru angeluak berdinak direla frogatzea geratzen da.
- (3) Hirugarren irizpidea ulertzeko (bi alde eta angelu baten irizpidea), ikasleei triangelu bat emanda, erregelaren bidez haren aldeatariko bat kopiatzeko eskatzen zaie. Ondoren, angeluak neurtzeko zirkuluardiaren bidez alde horri elkaturik dagoen angelu bat kopiatu behar da eta angelu hori erreferentziazat hartuz ondoz ondoko aldea kopiatu. Eraikuntza horrek ixteko aukera bakarra dauka, triangelu berria sorraraziz. Hiru aldeak eta hiru angeluak berdinak direla frogatzea geratzen da.
- (4) Existituko al da *hiru angeluen irizpide* bat? Bestela esanda, eraiki al daitezke euren angeluak berdinak izanik, euren artean kongruenteak ez diren triangeluak?

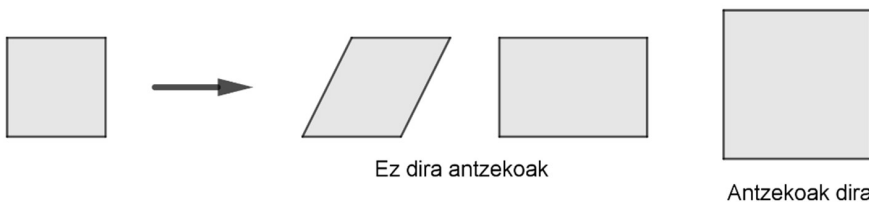
Ikusiko denez, alde baten eta bi angeluen irizpideak ez du edozein triangelutarako balio, baina triangelu angeluzuzenetan, aldiz, bai beteko da. Angelu zuzena, katetoa eta hipotenusa baliatuz, irizpidea erabilgarria da triangelu kongruenteak identifikatzeko. Bi triangelu angeluzuzenek kateto bat eta hipotenusa luzera berdinekoak badituzte, kongruenteak izango dira.

ARIKETAK

- (1) Irizpide hau ulertzeko, ikasleei triangelu zuzen bat eredutzat ematen zaie. Erregela erabiliz, haren kateto bat kopia behar dute, eta, ondoren, kateto horren perpendikularra den zuzen bat irudikatu (angeluzuzena lortzeko). Irudikatutako katetoaren beste muturretik abiatuz, hipotenusaren luzera adierazi behar da, eta ikusiko den bezala, hipotenusa zehaztuta, bigarren katetoa ere lortuko da.
- (2) Ikusitako irizpideak erabiliz, kasu horietako bakoitzean eskatzen den balio ezezaguna lor ezazu. Azal ezazu, zehaztasun guztiz, ariketa bakoitzean erabiltzen duzun irizpidea.



Bi irudi lau *antzekoak* direla esaten da, neurri ezberdina eduki arren edota posizio ezberdinean egon arren, forma berdina badute. Baina, zer esan nahi du forma berdina edukitzeak? Eredutzat triangelu bat edukita, alde bakoitzaren luzera faktore berdinarekin biderkatzen badugu lortzen diren hiru luzerekin, lehenengoaren antzekoa den triangelua sortuko da. Angeluen anplitudeak berdina izaten jarraitzen du?



ARIKETAK. Esan ezazu bi triangelu hauek elkarren antzekoak noiz ote diren. Lehenengo triangeluaren aldeek $a = 5\text{ cm}$, $b = 4\text{ cm}$ eta $c = 3\text{ cm}$ neurtzen dute. Bigarren triangeluaren alde batek $a' = 4,5\text{ cm}$ neurtzen badu, zenbat neurtu beharko dute b' -k eta c' -k?

Aldeen luzeraren proportzioa eta angeluen anplitudea mantentzen direnez, *bi irudi elkarren kongruenteak badira, antzekoak direla baieztatu daiteke*. Bi dira irudien antzekotasuna konprobatzeko erabiltzen diren irizpideak:

1. *Hiru angeluen irizpidea*. Bi irudiren barne-angelu guztiak berdinak baldin badira, antzekoak direla egiazta daiteke.
2. *Aldeen proportzionaltasun-irizpidea*. Irudi baten alde guztien luzerak beste irudi baten aldeekiko proportzionalak badira, irudiak elkarren antzekoak dira.

ARIKETA. Enuntzia ezazu eta frogatu Talesen teorema.

8.2.3. Eulerren teorema

Poliedro *sinple* guztietan, batuz gero poliedro horren aurpegiaren kopurua (A) eta erpinen kopurua (Ep), lorturiko emaitza beti izango da ertzen kopurua (Et) gehi bi. Poliedro bat *sinplea* dela esaten da, hiru dimentsioko forma hori zulorik gabekoa denean. Hau da, honako erlazio hau egiaztatuko da:

$$A + Ep = Et + 2$$

ARIKETAK

- (1) Argumentu inductibo bat baliatuz, egiazta ezazu poliedro erregular guztiek Eulerren formula betetzen dutela.
- (2) Argumentu deductibo bat baliatuz, frogatu ezazu poliedro sinple guztiek Eulerren formula betetzen dutela.

8.3. ASPEKTU FORMALAK VH3 MAILAN: PROPOSIZIOAK ETA ARGUMENTUAK

Logika zera da, arrazoiketaren *zuzentasuna* aztertzen duen jakintzagaia. Lehenengo eta behin, ohartarazi behar da enuntziatu eta argumentuei buruz ari garenean *zuzena* izatea eta *egiazkoa* izatea ez direla gauza bera. *Egia* edo *gezurra* diogunean, enuntziatuei buruz ari gara, hots, enuntziatu batek egia-taula batean hartzen dituen egia-balioei buruz: egia bada, 1; gezurra bada, 0. Argumentu bati buruz ez da esaten egia edo gezurra denik, aldiz, *zuzena* edo *okerra* dela esango da. Argumentu bat zuzena izan dadin, enuntziatu deklaratiiboen egitura jakin bat izan beharko du, non parte hartzen duten enuntziatu guztiek egiazkoak izan beharko duten.

8.3.1. Zenbait adibide

Bertoren arabera (2007) argumentu bat zuzena izan dadin, lehenengo eta behin, egia-balioa 1 duten *premisaz* (P) eta *ondorioz* (O) osaturik egon behar da.

Adibidea. Hurrengo argumentu hau *zuzena* da:

(P1) Pertsona guztiak hilkorrak dira;

(P2) Sokrates pertsona da;

Honenbestez,

(O) Sokrates hilkorra da.

Lehenengo premisa (P1) enuntziatu deklaratio bat da, «pertsona guztiak hilkorrak dira». Bigarren premisa ere enuntziatu deklaratio bat da, «Sokrates pertsona da». Argumentu horretan, Sokrates pertsona da, eta pertsona «guztiak» hilkorrak direnez, Sokrates ere hilkorra da, ezinbestean. Argumentua *zuzena* da, egia diren enuntziatu deklarazioz osaturik dagoelako.

Adibideko argumentu hori *zuzena* da, eta honako egitura hau du: inplikazio bat (P1), hots, p gertatzen den guztietan q gertatuko dela ziurtatzen duen kausa-ondorio harreman bat; inplikazioko hipotesiaren baieztapena (P2), hots, p enuntziatuaren egia-balioa 1 dela baieztatzen duen enuntziatu bat; eta aurrekotik ondorioztatzen den enuntziatua (O), inplikazioaren egia-etaulak berak baieztatzen baitu baldintza horietan q ere beteko dela.

Adibidea. Hurrengo argumentu hau *zuzena* da:

(P1) Argia ezarri gero intentsitate handiko grabitate-eremu baten eraginpean, argi horren espektro elektromagnetikoak gorriako lerratzea erakusten du;

(P2) Argiaren espektro elektromagnetikoak ez du gorriako lerratzerik erakutsi;

Honenbestez,

(O) Argi hori ez dago intentsitate handiko grabitate-eremu baten eraginpean.

Lehenengo adibidea pentsamendu filosofiko klasikotik hartua da, eta bigarren hau, berriz, Albert Einsteinen erlatibitatearen teoritik. Testuingurua ezberdina den arren, egitura antzekoa dute: bi premisa eta ondorio bat, premisetako bat inplikazioa izanik, eta beste premisa izanik inplikazioko hipotesiaren baieztapena edota ondorioaren ukapena. Ondoriora bideratzen duten adierazpen guztiak baliokideak dira: *honenbestez*, *orduan*, *beraz*, *ondorioz*, *etab.*, eta bata zein bestea erabil daiteke.

Bigarren adibide honetan, argumentuaren egitura apur bat aldatzen da: inplikazio bat (P1), hots, p gertatzen den guztietan q gertatuko dela ziurtatzen duen inplikazio bat; inplikazioko ondorioaren ukatzea (P2), hots, q enuntziatuaren egia-balioa 0 dela baieztatzen duen enuntziatu bat; eta horrela, ondorioa gertatu ez denez, hasierako hipotesia gezurtatzen duen enuntziatua (O), inplikazioaren egia-etaulak berak baieztatzen baitu baldintza horietan p ere ezin dela bete.

Adibidea. Hurrengo argumentu hau ez da *zuzena*:

(P1) Zerua urdina da;

(P2) Infernua gorria da;

Honenbestez,

(O) Atzo izozki bat jan nuen.

Bistan denez, hirugarren adibide horretan enuntziatuak deklaratioak dira, baina argumentua ez da *zuzena*, premisen eta ondorioen artean ez dagoelako inolako loturarik. Enuntziatu deklaratio bakoitza egia izan daiteke: gerta daiteke zerua urdina eta infernua gorria izatea, eta gainera, nik atzo izozki bat jan izana; hala ere, horrek ez du argumentuaren *zuzentasuna* justifikatzen.

Hirugarren adibide honetako enuntziatuak kodifikatuz gero, argi ikusten da ez dagoela loturarik enuntziatuen artean: baieztapen bat agertzen da (P1), hots, p egia dela esaten duen enuntziatu bat; bigarren baieztapen bat agertzen da (P2), hots, q enuntziatuaren egia-balioa 1 dela baieztatzen duen enuntziatu bat; eta azkenik, hirugarren enuntziatu ez-konexu bat agertzen da, r , egia izan daitekeena edo ez. Edozein kasutan, ez dago inplikaziorik enuntziatuen artean, eta inplikaziorik ezean, adibideko argumentua ez da *zuzena*.

Adibidea. Hurrengo argumentu hau ez da *zuzena*:

(P1) Zaldi guztiak hilkorrak dira;

(P2) Sokrates zaldia da;

Honenbestez,

(O) Sokrates hilkorra da.

Argumentu edo argumentu honen egitura lehenengo ariketaren antzekoa den arren, ezin da esan argumentua *zuzena* denik. Izan ere, bigarren premisaren (P2) egia-balioa 0 baita.

Argumentu bat *zuzena* izan dadin, haren premisa guztiek egiazkoak izan behar dute, lehenengo eta behin. Laugarren adibidean, (P1) eta (O) egiazkoak diren arren, (P2) enuntziatuaren egia-balioa 0 da: guk dakigunez, Sokrates ez da zaldia, Greziako filosofo klasiko bat da. Horregatik da argumentu okerra.

Adibidea. Hurrengo argumentu hau ez da *zuzena*:

(P1) Sokrates zaldia bada, orduan, Sokrates hilkorra da;

(P2) Sokrates zaldia da;

Honenbestez,

(O) Sokrates hilkorra da.

Argumentu edo argumentu honen egitura lehenengo ariketaren antzekoa den arren, ezin da esan argumentua *zuzena* denik. Izan ere, bigarren premisaren (P2) egia-balioa 0 baita.

Harrigarria dirudien arren, (P1) enuntziatuaren egia-balioa 1 da: Sokrates zaldia *izanez gero*, orduan, Sokrates hilkorra da. Enuntziatu harrigarri hori egia izanagatik ere, argumentua okerra da, (P2) enuntziatua ez delako egia: gauza baita Sokrates ez dela zaldia. Momentu honetan, inplikazioaren ezaugarri garrantzitsu bat argitu beharra dago: $p \rightarrow q$ inplikazioa *egia* izan dadin, p egia den guztietan q -k ere egia izan behar du; hau da, $p \rightarrow q$ gezurra izateko aukera bakarra da p gezurra izanik, q egia izatea. Laburbilduz, argumentu hau ezin da *zuzena* izan, nahiz eta hasierako bi premisak eta ondorioa deklaratioak diren, eta nahiz eta lotura bat dagoen premisen eta ondorioaren artean. Kasu honetan, premisetako bat *gezurra* delako ezin da *zuzena* izan argumentua, nahiz eta ondorioa *egia* den.

Adibidea. Hurrengo argumentu hau ez da *zuzena*:

(P1) Zaldi guztiek hegan egiten dute;

(P2) Sokrates zaldia da;

Honenbestez,

(O) Sokratesek hegan egiten du.

Argumentu honetan, premisa guztien egia-balioak *gezurra* dira, hau da, (P1)-en eta (P2)-ren egia-balioak 0 dira kasu guztietan. Ondorioaren egia-balioa, ere, 0 da.

Premisa guztiak gezurra direlako da argumentua okerra. *Zuzena izatea* eta *egia izatea*, beraz, ez dira baliokideak, nahiz eta aldi berean gerta daitezkeen. Informazioa pasatuz gero egia-taula baten egiturara, ohartuko gara inplikazioaren baldintzak ez direla betetzen, hau da, ez gaudela espero daitezkeen lau kasuetako bakar batean ere, eta honenbestez, argumentu hori *okerra* dela.

Honen guztiaren sintesi gisa, argumentu baten zuzentasuna karakterizatu dugu:

«Arrazoibide bat *zuzena* da, baldin eta soilik baldin, ezin bada gertatu hasierako premisa guztiak egia izanik ondorioa gezurra izatea. Irizpide honi honela esaten zaio: *zuzentasun logikoaren irizpide orokorra*».

8.3.2. Dedukzioa

Hemendik aurrera, beraz, *zuzentasun logikoaren irizpide orokorra* betetzen duten argumentuak besterik ez dugu onartuko argumentu zuzen gisa. Zuzenak diren argumentuen artean, bi mota dira nagusi: argumentu deduktiboak eta induktiboak. Esate baterako, 8.3.1. ataleko lehenengo adibidean arrazoibide deduktibo bat aurkeztu da, eta hura balia daiteke egitura deduktibo bat zertan datzan argitzeko.

(P1) Pertsona guztiak hilkorak dira;

(P2) Sokrates pertsona da;

Honenbestez,

(O) Sokrates hilkorra da.

Lehenengo eta behin, egiazta dezakegu zuzentasun logikoaren irizpide orokorra betetzen duela. Izan ere, premisak egiazkoak dira, eta egia-taulen bitartez egiazta dezakegu ondorioa egia besterik ezin dela izan.

(P1) «Sokrates pertsona bada, orduan Sokrates hilkorra da» ($p \rightarrow q$ inplikazioa egia da; egia-balioa 1)

(P2) «Sokrates pertsona da» (inplikazioko hipotesia, p , egia da; egia-balioa 1)

(O) «Sokrates hilkorra da» (inplikazioko ondorioa, q , egia da; egia-balioa 1)

(P1)	$p \rightarrow q$	1	0	1	1
(P2)	p	1	1	0	0
(O)	q	1	0	1	0

Egia-taularen lehenengo zutabea gauden, non egia-balio guztiak 1 diren; beraz, argumentua *zuzena* da. Gainera, ondorioa premisen arteko inplikazio batetik eratortzen da, eta horregatik, *deduktiboa* dela esango dugu. Argumentu deduktibo batek, oro har, honako egitura hau izango du:

- (P1) F propietatea betetzen duen orok G propietatea betetzen du;
- (P2) m -k F propietatea betetzen du;
- Honenbestez,
- (O) m -k G propietatea betetzen du.

Laburbilduz, hau ere esan genezake, egituraren sintaxia nabarmentzeko:

- (P1) F duen orok G dauka;
- (P2) m -k F du;
- Honenbestez,
- (O) m -k G dauka.

Letra larriek (F , G) propietateak adierazten dituzte eta letra txikiak (m) propietate hori betetzen duten subjektuak dira. Hona hemen egitura horri jarraitzen dioten adibide gehiago:

- (P1) Pertsona guztiak hilkorak dira;
- (P2) Sokrates pertsona da;
- Honenbestez,
- (O) Sokrates hilkorra da.

- (P1) Zaldi guztiak perisodaktiloak dira;
- (P2) *Ikiriki* zaldia da;
- Honenbestez,
- (O) *Ikiriki* perisodaktiloa da.

Hori litzateke «baiezko forman» idatzitako argumentu deduktibo baten egitura orokorra. Baiezkoa dela diogu, premisetatik zuzenean ondorioa iristen garelako, aurrerantz eginez. Argumentu logiko deduktiboek «ezezko forma» ere izan dezakete (inplikazioa egiazkoa bada eta ondorioa gezurrezkoa, ezinbestean hasierako premisa gezurra izango da). Bigarren eta zortzigarren adibideak ezezko forman dauden argumentu zuzenak dira. Horiek baliatuko ditugu, adibide berri batekin batera, haien sakonean dagoen egitura azaleratzeko:

- (P1) Argia ezarritik gero intentsitate handiko grabitate-eremu baten eraginpean, argi horren espektro elektromagnetikoak gorritako lerratzea erakusten du;
- (P2) Argiaren espektro elektromagnetikoak ez du gorritako lerratzerik erakutsi;
- Honenbestez,
- (O) Argi hori ez dago intentsitate handiko grabitate-eremu baten eraginpean.

Orokorrean, «ezezko forman» dagoen egitura batek honelako egitura du:

- (P1) F propietatea betetzen duen orok G propietatea betetzen du;
 (P2) m -k ez du G propietatea betetzen;
 Honenbestez,
 (O) m -k ez du F propietatea betetzen.

Edota, laburbilduz:

- (P1) F duen orok G dauka;
 (P2) m -k ez du G ;
 Honenbestez,
 (O) m -k ez dauka F .

Hona hemen ezezko forma hartzen duten argumentu zuzenen beste adibide xorta bat:

- (P1) Jainkoak engaina badezake, orduan Jainkoa gaiztoa da;
 (P2) Jainkoa ez da gaiztoa;
 Honenbestez,
 (O) Jainkoak ezin du engainatu.

- (P1) Ekonomia atzeraldian sartzen bada, etxebizitzaren prezioa igotzen da;
 (P2) Etxeen prezioa ez da igo;
 Honenbestez,
 (O) Ekonomia ez dago atzeraldian.

8.3.3. Indukzioa

Matematiketan erabiltzen diren argumentu guztiak ez dira zehazki inplikazio logiko deduktiboak. Jarduera matematikoa ezaugarritzen duen zeregin nagusietako bat patroien bilaketa eta arauen formulazioa da, eta zeregin horietan, ohikoak dira argumentu induktiboak. Argumentu induktiboetan ez da inplikazio logikorik erabiltzen; aldiz, adibideen kopuru handi bat aztertzen da «zentzuzkoa» den arau edo patroia bat ateratzeko. Zentzuzko arau hori ontzat emango da, harik eta adibide gehiago aztertzerakoan kontradibiderik aurkitzen ez den artean.

Adibidea. Hurrengo argumentu hau induktiboa da:

- (P1) Sokrates hilkorra da;
 (P2) Descartes hilkorra da;
 (P3) Leibniz hilkorra da;
 (P4) Hegel hilkorra da;
 (P5) Wittgenstein hilkorra da;
 Honenbestez,
 (O) Filosofo guztiak hilkorrak dira.

Azken zortzigarren adibide hori ez da arrazoibide deduktibo baten kasua, inplikaziorik ez baita inon ageri. Aldiz, arrazoibide induktiboa da, banakako kasuen hurrenkera baten aztertzea delako. Premisen kopuruak ez du arrazoibidearen izaera aldatuko, hau da, argumentua ez litzateke deduktiboa izango, ezta nahi adina premisa gaineratuta ere:

(P6) Aristoteles hilkorra da;

(P7) Marx hilkorra da;

(P8) Heidegger hilkorra da;

...

Argumentu induktiboen propietate hau interesgarria da, nabarmentzen duelako argumentu baten zuzentasuna ezin dela indartu adibide mordo baten zerrenda osatuz eta luzatuz. Adibide ugari ezartzeak balio dezake norberaren aieruak eta susmoak indartzeko, baina ez du inondik inora argumentu deduktiboa *frogatzen*. Lehenengo adibidea pertsona *guztiei* buruz ari da, eta zortzigarren adibidea, aldiz, zenbait kasu partikularrei buruz, nahiz eta ugariak izan.

Kasu! Horrek ez du esan nahi arrazoibide deduktiboak ezin direnik objektu, subjektu edo kasu bakar baten gainean eraiki. Hurrengo adibidean, pertsona bakarraren inguruko argumentu deduktiboa eraikitzen da.

Adibidea. Hurrengo argumentu hau deduktiboa da:

(P1) Jainkoak engaina badezake, orduan Jainkoa gaiztoa da;

(P2) Jainkoa ez da gaiztoa;

Honenbestez,

(O) Jainkoak ezin du engainatu.

Teologia kristauaren arloko argumentu horretan, (P1) eta (P2) premisak egiazkotzat jotzen dira (ez gaitezen eztabaida erlijiosoetan sartu, bestela, adibidea bertan behera eroriko zaigu eta!), non argumentu *zuzen* bat eraikitzen den subjektu bakar baten gainean. Argumentu hori deduktiboa da nahiz eta subjektu bakar baten inguruan mintzatzen den.

8.4. ARIKETAK

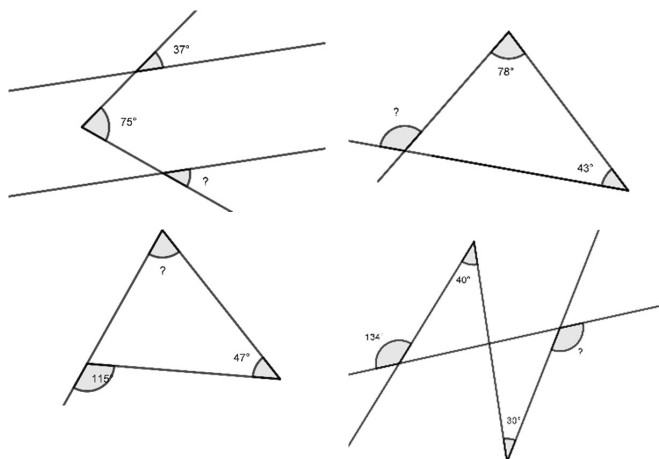
1. Hurrengo enuntziatu hauen artean, erabaki ezazu zeintzuk diren argumentuak.
 - a. Hotz egiten duelako babestu naiz.
 - b. Euria egiten duenean kapela janzten dut.
 - c. Euria ari du eta hotz egiten du.
 - d. Pentsatzen dut, ondorioz, banaiz.
 - e. Esaldi guztiak faltsuak baldin badira, orduan esaldi guztiak ez dira faltsuak.
 - f. Euria ari du; ondorioz, euria ari du edo ez du ari.
 - g. Burtsak kolapsoa izan du; hobe da akzioa saltzea.

- h. Igandea bada, meza dago; gaur igandea denez, meza dago.
 - i. Bikoitia ateraz gero, tiraldia gurea da; bakoitia atera da, ondorioz, zuen tiraldia da.
 - j. Susmagarria G andrearen etxean zegoen hilketaren egunean; biktima ez zuten G andrearen etxean hil; ondorioz, susmagarria ezin zen egon hilketaren lekuan.
 - k. Gaixoak petxuko angina baten sintoma guztiak ditu; ondorioz, interbentzio bat proposa da.
 - l. $3 + 1 = 4$; $3 = 2 + 1$; $2 = 1 + 1$; ondorioz, $2 + 2 = 4$.
 - m. Nire bila etorritz gero, zurekin ezkonduko naiz; baina zu ez zatoz nire bila; ondorioz, adarbakarrak existitzen dira.
 - n. Zer da hobe, akzioak saltzea edo gordetzea?
2. Hurrengo arrazoitze hauen artean, erabaki zeintzuk diren zuzenak.
- a. Pertsona guztiak hilkorrak dira; katu guztiak hilkorrak dira; ondorioz, pertsona guztiak katuak dira.
 - b. Pertsona guztiak hilkorrak dira; Altsasuko guztiak hilkorrak dira; ondorioz, pertsona guztiak eta altsasuar guztiak hilkorrak dira.
 - c. Gorila guztiak animaliak dira; animalia guztiak obiparoak dira; ondorioz, gorila guztiak obiparoak dira.
 - d. Barañaindar guztiak euskaldunak dira; euskaldun guztiak europarrak dira; honenbestez, barañaindar guztiak europarrak dira.
 - e. Castro Urdiales Euskal Herria da; Euskal Herria Europa da; honenbestez, Castro Urdiales Europa da.
 - f. $2 + 2 = 4$; beraz, John Lennon eta Paul McCartney pertsona bera dira.
 - g. Estatu Batuar guztiak hiltzeko zigorraren aurka daude; honenbestez, hiltzeko zigorraren aurka dauden guztiak estatubatuarrak dira.
 - h. Ordenagailuko dokumentu guztiak artxiboak dira; honenbestez, ordenagailuko artxibo guztiak dokumentuak dira.
 - i. John Lennon Paul McCartney da; Paul McCartney Batman da; beraz, John Lennon Batman da.
 - j. Napoleonek Waterloon galdu zuen 1815ean; Osasunak Athletici irabazi dio; beraz, Napoleon osasunazalea da.
 - k. Nobela erromantikoak idazten dituzten idazle guztiak gizonezkoak dira; Bernardo Atxaga nobela erromantikoen idazlea da; beraz, Bernardo Atxaga gizonezkoa da.
 - l. Pertsona guztiak hilkorrak dira; Ikiriki ez da pertsona; beraz, Ikiriki ez da hilkorra.

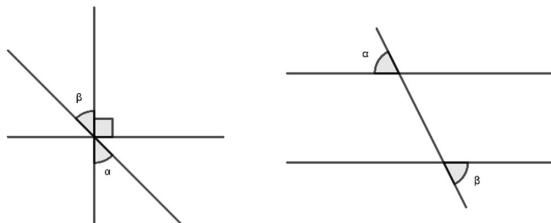
- m. Pertsona guztiak hilkorrak dira; Ikiriki ez da hilkorra; beraz, Ikiriki ez da pertsona.
 - n. Frantzia monarkia da edo Frantzia errepublika da; Frantzia ez da monarkia bat; ondorioz, Frantzia errepublika da.
 - o. Harkaitz Cano nobela erromantikoen idazlea da eta ez du inoiz komediarik idatzi; beraz, Harkaitz Canok ez du inoiz komediarik idatzi.
 - p. Osasunak liga irabazten badu, Alavesek ez du liga irabazi; Osasunak liga irabazi du; ondorioz, Alavesek ez du liga irabazi.
3. Honako hauen artean, bereiz itzazu argumentu induktiboak eta deduktiboak.
- a. Triste dagoenean, Gaizkak edan egiten du; Gaizka triste dago; honenbestez, Gaizkak edan egiten du.
 - b. Nire senarrak edaten zuen, erretzen zuen eta minbiziak jota hil da; nire anaiak ere edaten zuen, erretzen zuen eta minbiziak jota hil da; honenbestez, edaten eta erretzen duen orok badu minbizia izateko joera.
 - c. 4 zenbaki bikoitia da eta bi zenbaki lehenen batura da; 6 zenbaki bikoitia da eta bi zenbaki lehenen batura da; 8 zenbaki bikoitia da eta bi zenbaki lehenen batura da; honenbestez, zenbaki bikoiti guztiak bi zenbaki lehenen batura dira.
 - d. Bart, Aingeru lanera joan da eta nekaturik itzuli da; gaur, Aingeru lanera joan da eta nekaturik itzuli da; honenbestez, Aingeru lanera doan guztietan nekaturik itzultzen da.
 - e. 4az zatigarriak diren zenbaki guztiak 2az zatigarriak dira; 8az zatigarriak diren zenbaki guztiak 4az zatigarriak dira; beraz, 8az zatigarriak diren zenbaki guztiak 2az zatigarriak dira.
4. Osa ezazu esaldi honetan falta den testua, erdiko puntuaren definizioa eman ahal izateko: « B puntua $\overline{AC}$ zuzenkiaren erdiko puntua da baldin eta _____ betetzen bada».
5. Kontraadibide baten bidez, frogatu definizio hau okerra dela: « B puntua $\overline{AC}$ zuzenkiaren erdiko puntua da $\overline{AB}$ eta $\overline{BC}$ zuzenkiak kongruenteak badira».
6. Erabili adierazpen geometrikoa jarduera hau planteatu eta ebazteko:
 $\overline{AB}$ zuzenkia $\overline{CD}$ zuzenkia baino hiru aldiz luzeagoa da eta $\overline{EF}$ zuzenkia $\overline{CD}$ baino luzeagoa. $\overline{EF}$ zuzenkiak 7 cm neurtzen baditu, zenbat neurtzen du $\overline{AB}$ -k?
7. Ikusi horrelako jarduerak honako jarduera aritmetiko hauen ebazpena ulertzeko lagungarriak direla:
- Pedrok Anek baino hiru aldiz diru gehiago dauka eta Juanek Anak baino 3 euro gehiago dauzka. Juanek 7 euro baditu, zenbat dute bestee?

Triangelu baten alde batek 12 cm neurtzen ditu eta bigarren alde batek 6,3 cm. Zein balioren artean egongo da hirugarren aldea?

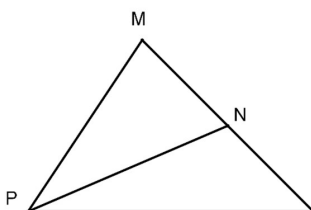
8. Irudikatu angelu bikote hauek: (1) osagarriak, baina ondoz ondokoak ez diren bi angelu; (2) betegarriak, baina ondoz ondokoak ez diren bi angelu; (3) ondoz ondokoak diren bi angelu, baina ez osagarriak ez betegarriak direnak.
9. Zenbat gradu mugitzen da lurra ordu batean (errotazio-mugimendua)? Eta minutu batean?
10. Dedukzio bidez, froga ezazu paralelogramoaren ondoz ondoko bi barne-angeluak betegarriak direla.
11. Argumentu inductibo bat baliatuz, aurki ezazu poligono baten barne-angeluen batura emango duen formula bat, poligonoen aldeen kopuruaren arabera.
 - a. Zein da lauki baten lau angeluen arteko batura?
 - b. Zein da pentagono baten bost angeluen arteko batura?
 - c. Zein da hexagono baten sei angeluen arteko batura?
 - d. Zein da 100 alde dituen poligono baten 100 angeluen arteko batura?
 - e. Zein da n alde dituen poligono baten n angeluen arteko batura?
12. Honako irudi hauetan, aurki ezazu falta den angeluaren anplitudea.



13. Froga ezazu lehenengo irudian $\alpha + \beta = 90^\circ$ betetzen dela, eta bigarren irudian $\alpha = \beta$ betetzen dela.



14. Izan bedi $\widehat{PQM}$ triangelua, eta izan bedi N puntua $\overline{QM}$ segmentuaren erdiko puntua. Froga ezazu $\widehat{PQN}$ eta $\widehat{PNM}$ triangeluek azalera bera dutela.



15. Frogatu propietate hau: triangelu baten bi alde berdinak badira, parez pareko angeluak ere berdinak dira.
16. Bilatu Pitagorasen teorema frogatzeko modu ezberdinak.
17. Antzekotasun-irizpidea lantzeko, lortuko dituzun triangeluak elkarren artean kongruenteak direla egiaztatzeko erregela eta zirkuluerdia erabil daitezke, edota triangeluak moztu daitezke ondoren elkarren gainean jartzeko.
- Hiru aldeen irizpidea: Marraztu edozein triangelu ABC . Erregela eta konpasa erabiliz, luzera berdineko aldeak dituen beste triangelua irudikatu. Kongruenteak dira?
 - Bi angelu eta alde baten irizpidea: ABC triangelua irudikatu. $\overline{AC}$ aldeak 4 cm neurtu behar ditu, A angeluak 65° eta C angeluak 35° . Orain, hiru datu horiek berdinak dituen beste triangelua irudikatu. Kongruenteak dira?
 - Bi alde eta angelu baten irizpidea: ABC triangelua irudikatu. $\overline{AB}$ aldeak 6 cm neurtu behar ditu, A angeluak 40° eta $\overline{AC}$ aldeak 4 cm. Orain, DEF triangelua irudikatu. $\overline{EF}$ aldeak 6 cm neurtu behar ditu, E angeluak 40° eta $\overline{DE}$ aldeak 4 cm. Elkarren kongruenteak dira bi triangeluak?
18. Kontraadibide baten bidez, froga ezazu nola angelu baten eta bi alderen arabeko irizpideak triangeluen kongruentziarako balio ez duen.
19. Azter ezazu ea laukietarako baliagarria den aldean arabeko irizpiderik existitzen den, kongruenteak diren laukiak identifikatzeko.

20. Izan bitez a , b eta c hiru zenbaki erreal positibo. Beti eraiki al daiteke luzera horiek dituen triangeluren bat?
21. Zuzena izatekotan, froga ezazu hurrengo baieztapena; bestela, kontraadibideren bat lor ezazu: «Bi triangeluk anplitude berdineko bi angelu dituzte, 50° eta 40° , hurrenez hurren. Gainera, biek 10 cm-ko luzerako alde bat daukate, ondorioz, elkarren kongruenteak dira».
22. Suposa dezagun ABC triangelua isoszelea dela, $\overline{AB} = \overline{BC}$. Izan bitez X eta Y $\overline{AC}$ zuzenkiko bi puntu, zeinek $\overline{AX} = \overline{YC}$ betetzen duten. Froga ezazu XY ere isoszelea dela.
23. Froga ezazu bi alde berdin dituen triangelu batek bi angelu berdin dituela. Esan daiteke bi angelu berdin dituen triangeluak bi alde berdinak dituela? Froga ezazu edo kontradibidea bilatu.
24. Triangeluen kongruentzia-irizpideak erabiliz, froga ezazu triangelu baten alde bateko erdibitzailearen edozein puntu alde horren bi muturretatik distantzia berera dagoela.
25. Triangeluen kongruentzia-irizpideak erabiliz, froga ezazu triangelu baten angelu baten erdikariak angelu hori bi zati berdinetan banatzen duela.
26. Izan bedi triangelu angeluzuzen bat. Hipotenusari dagokion altuerak triangelu hori bi triangelu txikitan banatzen du. Froga ezazu triangelu txiki horietariko bakoitza handiaren antzekoa dela.
27. Aurreko ariketako propietate hori erabiliz, froga ezazu Pitagorasen teorema.
28. Hexagono baten aldeek honako neurri hauek dituzte: 8 cm, 10,3 cm, 15 cm, 5,1 cm, 22,5 cm eta 13,2 cm. Horren antzekoa den hexagono baten alde txikienak 1,7 cm neurtzen baditu, zenbat neurtzen dute gainontzeko aldeek?

Erreferentziak

- Abaurrea, J.; Ichaso, A.; Lasa, A. eta Wilhelmi, M. (2018): «GeoGebra bidezko irudi lauen ikaskuntza Van Hieleren teorian oinarrituz», GeoGebra erabiltzaileen II. Topaketa, uztailaren 4a, Eibar.
- Alsina, A. (2011): *Com desenvolupar el pensament matemàtic. Els continguts matemàtics: propostes didàctiques per a l'Educació Infantil*, EUMO, Universitat de Vic.
- , (2016): «La estadística y la probabilidad en educación primaria, ¿Dónde estamos y hacia dónde debemos ir?», *Aula*, **261**, 13-17.
- Arrieta, M. (2001): *Matematikaren Didaktika Lehen Hezkuntzan. II Geometria eta Neurria*, Euskal Herriko Unibertsitateko Argitalpen Zerbitzua, Zarautz.
- Batanero, C. eta Godino, J.D. (2001): *Análisis de datos y su didáctica*, Departamento de Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada, Granada. Hemen eskuragai (2018/12/12): <<https://www.ugr.es/~batanero/pages/ARTICULOS/Apuntes.pdf>>.
- Berto, F. (2007): *Logica da zero a Gödel*, Laterza, Bari.
- Brousseau, G. (1997): *Theory of didactic situations in mathematics*, Kluwer, Amsterdam.
- , (2007): *Iniciación al estudio de la Teoría de las situaciones didácticas*, Zorzal, Buenos Aires.
- Chamorro, C. (2005): *Didáctica de las matemáticas en Educación Infantil*.
- Frantziako Gobernua (2015): Décret n° 2015-372 du 31 mars 2015 relatif au socle commun de connaissances, de compétences et de culture (6034. or.).
- Goikoetxea, G. (2016): *Euskara irabazteko bidean*, Elkar-Berria-Jakin, Donostia.
- Lasa, A. (2015): *Jarduera matematikoa eredu dinamikoen laguntzaz*, UEU, Bilbo.
- , (2017): «Ubicación del software GeoGebra en la adquisición de Niveles de Van Hiele y ejemplos de propuestas», Jornadas sobre experiencias de aula con GeoGebra, abenduaren 17-19a, Castro Urdiales (CIEM).
- Lasa, A. eta Wilhelmi, M.R. (2013): «Use of GeoGebra in explorative, illustrative and demonstrative moments», *Revista do Instituto Geo-Gebra Internacional de Sao Paulo*, **2(1)**, 52-64. Hemen eskuragai (2018/12/12): <<http://revistas.pucsp.br/index.php/IGISP/article/view/15160/12279>>.
- Lasa, A.; Wilhelmi, M. eta Abaurrea, J. (2017): «Modelos fantásticos y donde encontrarlos», VIII Congreso Iberoamericano de Educación Matemática, uztailaren 10-14a, Madril.

- Poincaré, H. (1936): «El Azar», jatorrizkoa ingelesez, *Journal of the American Statistical Association*, **31**, 10-30. Hemen jasota: J. Newman (ed.), *Sigma. El mundo de las Matemáticas*, 3, 68-82.
- Sarasua, J. (2013): «Representación externa de figuras planas y razonamiento geométrico», in A. Berciano, G. Gutiérrez, A. Estepa eta N. Climent (ed.), *Investigación en Educación Matemática XVII*, SEIEM, Bilbo, 43-65.
- Wilhelmi, M. (2004): *Combinatoria y probabilidad*, Departamento de Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada, Granada. Hemen eskuragai (2018/12/12): <<https://www.ugr.es/~batanero/pages/ARTICULOS/librowilhelmi.pdf>>.

Sailean argitaratu diren beste liburu batzuk

Bioestatistika

Arantza Urkaregi
1991n argitaratua
ISBN: 84-86967-37-6

Kalkulu diferentziala eta integrala I

Joserra Aizpurua eta Patxi Angulo (koord.)
1992an argitaratua
ISBN: 84-86967-47-3

Kalkulu diferentziala eta integrala II

Joserra Aizpurua eta Patxi Angulo (koord.)
1992an argitaratua
ISBN: 84-86967-48-1

Ekuazio diferentzialak. Aplikazioak eta ariketak

Elena Agirre (euskaratzailea)
1994an argitaratua
ISBN: 84-86967-63-5

Optimizazioa. Programazio lineala

Victoria Fernandez eta Ana Zelaia
1992an argitaratua
ISBN: 84-86967-65-1

Estatistikarako Sarrera

Karmelee Fernandez
1996an argitaratua
ISBN: 84-86967-70-8

Estatistikarako Sarrera. Ariketak

Karmelee Fernandez, Josu Orbe, Marian Zubia
1997an argitaratua
ISBN: 84-86967-80-5

Estatistika I eta Estatistika II. Ariketak

Karmelee Fernandez, Josu Orbe, Marian Zubia
1996an argitaratua
ISBN: 84-86967-79-1

R Hasiberrientzat

Gorka Azkune eta Yosu Yurramendi (itzul.)

2005ean PDFn argitaratua

ISBN: 84-86967-077-7

Estatistikaren oinarriak. Ariketak

Elena Agirre Basurko

2006an argitaratua

ISBN: 84-86967-079-3

Kalkulu diferentziala eta integrala (2. argitalpena)

Patxi Angulo

2009an argitaratua

ISBN: 978-84-8438-236-2

Erregresio lineala, bariantza-analisiak eta hipotesi-testak. Datu-analisirako lanabesak

Xabier Isasi Balanzategi

2010ean argitaratua

ISBN: 978-84-8438-290-4

Estatistikaren Oinarriak. Ariketak (2. argitalpena)

Elena Agirre Basurko

2010ean argitaratua

ISBN: 978-84-8438-288-1

Ekuazio diferentzial arruntak askatzeko zenbakizko metodoak

Elisabete Alberdi Celaya

2012an argitaratua

ISBN: 978-84-8438-419-9

R Commander eta Datuen Analisia

Paula Elosua Oliden, Juan Etxeberria Murgiondo

2013an argitaratua

ISBN: 978-84-8438-443-4

Irakaslegaiantzako matematika eta bere didaktika

Jesús García, Josu Gotzon Ruiz de Gauna, Joxemari Sarasua

2013an argitaratua

ISBN: 978-84-8438-445-8

Algebra: teoria eta ariketak. Mathematica programaren aplikazioa

Elisabete Alberdi Celaya, Isabel Eguia Romero, Aitziber Unzueta Inchaurre
2013an argitaratua

ISBN: 978-84-8438-466-3

Jarduera matematikoa eredu dinamikoen laguntzaz

Aitzol Lasa Oyarbide

2015ean argitaratua

ISBN: 978-84-8438-535-6

