

Jarduera matematikoa eredu dinamikoen laguntzaz

Aitzol Lasa

ueu

JARDUERA MATEMATIKOA EREDU DINAMIKOEN LAGUNTZAZ

Aitzol Lasa Oyarbide

Udako Euskal **Unibertsitatea**
Bilbo, 2015

© Udako Euskal Unibertsitatea

© Aitzol Lasa Oyarbide

ISBN: 978-84-8438-536-3

Lege-gordailua: BI-352-2015

Inprimategia: PRINTHAUS S.L., Bilbo

Azalaren diseinua: Igor Markaida

Hizkuntza-zuzenketen arduraduna: Ander Altuna Gabiola

Banatzaileak: UEU. Erribera 14, 1. D BILBO telf. 946790546 Faxe. 944793039

Helbide elektronikoa: argitalpenak@ueu.org

www.ueu.org

Elkar Banaketa: Igerabide, 88 DONOSTIA

Galarazita dago liburu honen kopia egitea, osoa nahiz zatikakoa, edozein modutara delarik ere, edizio honen Copyright-jabeen baimenik gabe.

Aurkibidea

HITZAURREA.....	7
1. SARRERA.....	9
2. AURREKARIAK.....	11
2.1. Softwarearen kronologia labur bat.....	12
2.2. Hasierako esperientziak	14
2.3. Erantzun beharreko galderak	17
3. INSTRUMENTAZIOA	19
3.1. Euskarritik ingurune materialera.....	20
3.2. GGB eta gardentasunaren ilusioa.....	21
3.3. GeoGebra erabiltzeko hiru momentu.....	22
3.3.1. Esplorazioa.....	22
3.3.2. Ilustrazioa.....	23
3.3.3. Frogapena.....	23
3.4. Geometriako eraikuntzen adibideak	24
3.4.1. Esplorazio-eredu baten adibidea.....	25
3.4.2. Ilustrazio-eredu baten adibidea.....	26
3.4.3. Frogapen-ereduen adibideak.....	27
3.4.3.1. Triangelu baten erdikarien ebakidura: intzentroa.....	27
3.4.3.2. Triangelu baten erdibidekoen ebakidura: barizentroa	29
3.5. Hezkuntzarako ondorioak	30
4. IKUSPUNTU ONTOSEMIOTIKOA	33
4.1. Problema-tipologiekin loturiko praktika operatibo eta diskurtsiboen sistemak	35
4.2. Objektu matematikoak.....	37
4.2.1. Lehen maila.....	37
4.2.2. Bigarren maila.....	39
4.2.3. Prozesuak	41

4.3. Ulermena eta ezagutza	43
4.4. Problema, praktika, prozesu eta objektu didaktikoak	43
4.5. Dimentsio normatiboa.....	45
4.6. Egokitasun didaktikorako irizpideak	46
5. EGOERA DIDAKTIKOEN TEORIA	51
5.1. Transposizio didaktikoa	52
5.2. Fenomeno didaktikoak.....	52
5.2.1. Topaze efektua	53
5.2.2. Jourdain efektua	54
5.2.3. Irristatze metakognitiboa	55
5.2.4. Analogiaren erabilera okerra	55
5.2.5. Irakaskuntza-egoeren iraungitzea	56
5.3. Egoera adidaktikoak.....	56
5.3.1. Akzioa	57
5.3.2. Formulazioa	58
5.3.3. Balioztatzea.....	58
5.4. Oztopo didaktikoak.....	59
6. JARDUEREN PROPOSAMENA	61
6.1. Haur Hezkuntza: irudi simetrikoak eta eredu dinamikoak	61
6.1.1. Aldez aurreko ezagutzak, erlazionaturiko oztopoak eta espero izandako portaerak.....	62
6.1.2. Materiala	62
6.1.3. Egoeraren faseak.....	63
6.1.4. Esperientziaren kontakizuna	63
6.1.5. Sintesia eta ondorioak	64
6.2. Lehen Hezkuntza: Lursail bat Txikirentzat.....	65
6.2.1. Marko teorikoa.....	66
6.2.2. Aldez aurreko analisisa	68
6.2.3. Egoera	70
6.2.4. Materiala	70
6.2.5. Irakaslearen helburuak.....	71
6.2.6. Egoeraren faseak.....	71
6.2.7. Espero izandako portaerak.....	72
6.2.8. Aldez aurreko ezagutzak eta erlazionaturiko oztopoak	72
6.2.9. Esperimentazioa.....	74
6.2.10. Emaitzak.....	74
6.2.10.1. Bigarren zikloa	74
6.2.10.2. Hirugarren zikloa	77

6.2.11. Emaizten eztabaida.....	78
6.2.12. Sintesia, ondorioak eta aztergai irekiak.....	81
6.3. Derrigorrezko Bigarren Hezkuntza: proportzionaltasun geometrikoa.....	83
6.3.1. Proportzionaltasun geometrikoa curriculum ofizialean.....	83
6.3.2. Enuntziatua matematiketan.....	84
6.3.3. Saioen deskribapena	85
6.3.3.1. Lehen saioa.....	85
6.3.3.2. Bigarren saioa.....	86
6.3.3.3. Hirugarren saioa	88
6.3.3.4. Laugarren, bosgarren eta seigarren saioak	89
6.3.4. Irakaskuntzari begirako ondorioak	90
6.4. Batxilergoa eta Lizeoa: funtzioen analisiko teorema klasikoak.....	90
6.4.1. Emaizta klasikoak: Nikomedesen konkoida	91
6.4.2. Oinarrizko nozioak: deribatua	92
6.4.3. Funtzioen inguruko zenbait teorema.....	93
6.5. Bigarren Hezkuntzako Masterra: ekuazioen eta inekuazioen sistemak....	94
6.5.1. Lagina	94
6.5.2. Galdetegia	94
6.5.3. Espero izandako portaerak.....	97
6.5.4. Emaizak	97
6.5.5. Emaizten eztabaida laburra	101
6.6. Ingeniaritza Industrialeko Gradua: mekanismoak	102
6.6.1. Makinen teoria	102
6.6.2. Aplikazioak.....	102
6.6.2.1. Loturen zinematika.....	104
6.6.2.2. Mekanismoen sintesia	107
7. EBALUAZIOA GAITASUNEN ARABERA.....	109
7.1. Ebazpen maximoko ebaluazioa eta gaitasunen araberako ebaluazioa.....	110
7.1.1. Hasierako ebaluazioa, trebakuntza-ebaluazioa eta ebaluazio batutzailea	110
7.1.2. Konbinatoria curriculumean eta testuliburuetan.....	112
7.1.3. Konbinazio-problema baten ebaluazioa.....	113
7.1.3.1. Esperimentuaren deskribapena: problema eta dinamika	114
7.1.3.2. Zuzenketa eskemak: emaitzak.....	116
7.1.4. Emaizten eztabaida eta irakasleen hasierako trebakuntzarako aholkuak	117
ERREFERENTZIAK.....	121

Hitzaurrea

Haur eta Lehen Hezkuntzako Irakasle Ikasketetan lau urteko graduen sistema ezarritik geroztik, Gradu Bukaerako Lanari aurre egin behar izan zaio. Zeregin mota hori berria izan da irakasleentzat eta ikasleentzat, Irakasle Ikasketek ez dutelako izan, aurrez, horrelako irakasgairik.

Curriculumaren berrikuntza horrek behar berriak sortu ditu. Hasierako urteetan, ezin izan zaie oinarritzko bibliografiarik eskaini Gradu Bukaerako Lana matematikaren arloan egin nahi zuten ikasleei. Lan horien marko teorikoa eraikitzeke, erdarazko testuetara jo behar izan da.

Alde batetik, matematikaren didaktikaren arloko teoriak dezente egin dute aurrera. Ikuspuntu ontosemiotikoa eta Genesi instrumentala dira garapen horren adibide. Horiekin batera, Egoera didaktikoen teoriak ibilbide nabarmena egin du, eta emaitza onak ematen ditu egoeren diseinuan eta horien analisisian.

Bestalde, behin marko teorikoa eraikita, jarduera matematikoa garatzeko tresnak aukeratu behar dira. Zalantzarik gabe, geometriako software dinamikoaren bitartez eraikitako ereduak abantaila ugari eskaintzen dituzte; bazter utzi gabe ohiko euskarri fisikoak, eta arkatza eta papera. Eredu dinamikoak irakaskuntza-etapa guztietan erabiltzen dira, hasi Haur Hezkuntzan eta unibertsitate-ikasketetaraino (ingeniaritza industrialean, esate baterako).

Finean, balio dezala liburu honek matematikako irakasleen trebakuntzan aurrerapausoak emateko.

1. Sarrera

Matematikak giza jardueraren parte dira, eta, horregatik, problemak ebazteko testuinguruan hartzen dute euren esanahi osoa, hau da, errealitatearen eredu matematiko gisa erabiltzean.

Horrez gainera, problema horiek ebazteko orduan, parte hartuko duten ezagutza matematikoak dimentsio anitzekoak dira eta ekartzen duten giza jarduera konplexua da:

Zientziaren irakaskuntzak ez luke diziplinatan banaturik egon behar, ez behintzat lehenengo etapetan. Argumentu ugari baieztazen dute hori. Modu berean, matematika errealitatearekin batera eraiki behar baldin bada, ikuspuntu horrek zabala izan beharko du ezinbestean (Freudenthal, 1978)

Ikasgelako jarduera matematikoa, beraz, giza errealitate horren arabera antolatu behar da. Horregatik, eskolaren testuinguruan diseinatzen diren irakaskuntza- eta ikaskuntza-egoerek kontuan hartu behar dituzte, besteak beste, ikasle bakoitzaren eskola-iragana eta jarduera matematikoa garatzen deneko ingurune aldakorra. Ikastaldearen memoria didaktikoan gordeko da hori guztia.

Sistemaren memoria zera da, aurrerago erabakiak hartzeko gaitasuna emango duen ingurunearen nolabaiteko antolaketa (Centeno, 1995).

Testuinguru horretan, irakasleak aukeratu egin behar ditu zeregina aurrera eramateko erabiliko dituen tresnak. Alde batetik, tresna horien bidez ezagutzak transmitituko ditu. Bestetik, tresna horiek sartuko ditu inguru didaktikoan, ikasleek euren produkzioen gaineko kontrola (feedbacka) izango dute, ezagutza matematikoaren eraikuntzan eta komunikazioan.

Tresnaren aukeraketa arrazoi pragmatikoengatik egiten da, hala nola abantaila teknikoak dituelako. Hori horrela izanagatik ere, ez dira ahaztu behar tresna horren bidez transmititu nahi den jakintzari dagozkion beste zenbait kontsiderazio. Hau da, egiaztatu behar da tresnaren erabilera efektiboa dela, eta, bereziki, *irristatze metakognitibo* batean ez erortzea zaindu behar da (35. orrialdea). Fenomeno horren arabera, tresnaren beraren instrukzioak ordezkatu egiten du edukiaren irakaskuntza:

[Irakaskuntza metodo berria] ikaskuntzaren helburu bihurtzen da. Eduki berri horiek badituzte, aldi berean, euren konbentzioak eta hizkera berezia. Aurkezpenaren fase bakoitzean azaldu egin behar dira konbentzio horiek, jatorrizko ezagutzekin batera (Brousseau, 1997).

Gaur egun, tresnaren aukeraketak zuzeneko lotura du aurrerapen teknologikoekin. Irakaskuntzaren objektuak etengabe transformatzen dira, eta, horiekin batera, jarduera matematikoa gauzatuko den ingurunea etengabe aldatzen da.

Matematikaren ulermenaren izaera dinamikoa denez, matematikaren jarduerak askotariko adierazpenak behar ditu. Oinarri teoriko horren gainean, GeoGebraren moduko tresna informatikoez integratu egiten dituzte objektu matematiko beraren gaineko hainbat ikuspegi (Bu, Spector eta Haciomeroglu, 2011).

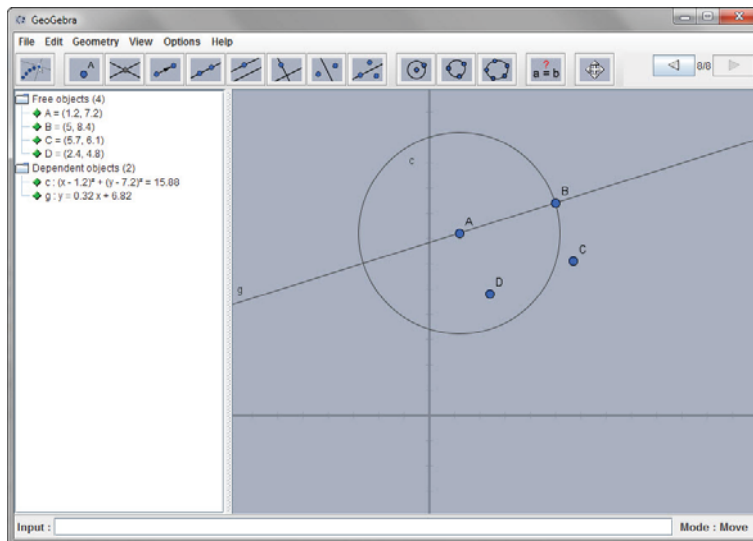
Horrenbestez, irakasleak ezagutu behar ditu berrikuntza teknologikoak eta horiekin kontaktuan egon. Baloratu behar du tresna horien balizko erabilera eta ikasgelan inplementatzeko ematen dituen aukerak.

Liburu honetan, GeoGebrak tresna gisa ematen dituen aukerak aztertzea nahi dira. Bigarren kapituluak aurrekariak aipatuko dira. 2009an hasita, GeoGebraren erabileraren kronologia labur bat aurkeztuko da. Hirugarren, laugarren eta bosgarren kapituluetan azalduko dira GeoGebra softwarea erabiltzeko zein testuinguru teoriko erabili diren. Horiek dira, alegia, Genesi instrumentalaren teoria, Ikuspuntu ontosemiotikoa eta Egoera didaktikoen teoria. Seigarren kapituluak esperientzia konkretuak aurkeztuko dira; hasi Haur Hezkuntzan eta unibertsitate-mailara arte, GeoGebra erabilita egin diren jardueren hurrenkera. Amaitzeko, zazpigarren kapituluak, aurkeztu diren eduki teorikoez eta proposaturiko adibideek gaitasun matematikoez eta ebaluazio matematikoarekin duten lotura azalduko da.

2. Aurrekariak

GeoGebra matematikak lantzeko software bat da. Ikastetxeetan geometria eta aljebra lantzeko diseinaturik dago. Hala ere, matematiketako beste hainbat alor landu daitezke haren bitartez.

GeoGebra proiektua Austriako matematikari eta informatikari batek abiatu zuen. Haren izena Markus Hohenwarter da. Markusen 2001eko doktorego-tesiaren emaitza da GeoGebra programa. GeoGebraren 1.0 bertsio sinple horrek sari bat irabazi zuen, *European Academic Software Award*. Geroztik, dozena bat sari irabazi du (1. irudia).



1. irudia. GeoGebra 1.0, lehen bertsioaren interfaze historikoa.

Existitzen da GeoGebraren antzeko programa bat, Cabri izenekoa, baina, Cabriren aldean, GeoGebrak abantaila nabarmen bat du: GeoGebra software askea da, eta, gainera, kode irekikoa; Cabri, aldiz, programa komertziala da, eta, ondorioz, lizentziapean erabili behar da.

Berezitasun horri esker, programaren garapenean interesa duen edonork hobekuntzak egin ditzake, eta, gaur egun, GeoGebrak erabiltzaile komunitate handia du, Europan gehienbat.

Softwarea 2001ekoa den arren, programaren 3.0 bertsioa izan da, seguruenera, hedadurarik handiena izan duena eta softwarea ezagutarazi duena. 2009ekoa da bertsio hori, eta, hain justu ere, eskuen artean duzun ikasmaterial honek urte horretan bertan du bere abiapuntua.

Kapitulu honetan, lehengo eta behin, softwarearen kronologia labur bat aurkituko duzu. 2009an hasi eta 2014ra arte, NUPen softwareak izan duen presentzia azaltzen da. Bigarren, hastapeneko urte haietan softwarearen zein erabilera egin den ikusiko duzu. Esperientzia pilotu horiei esker garatu da gaur egun ezagutzen dugun erabilera. Behin aurkezpen horiek guztiak eginik, ikasliburu honek zein galderari erantzun nahi dion aurkeztuko da kapituluaren amaieran.

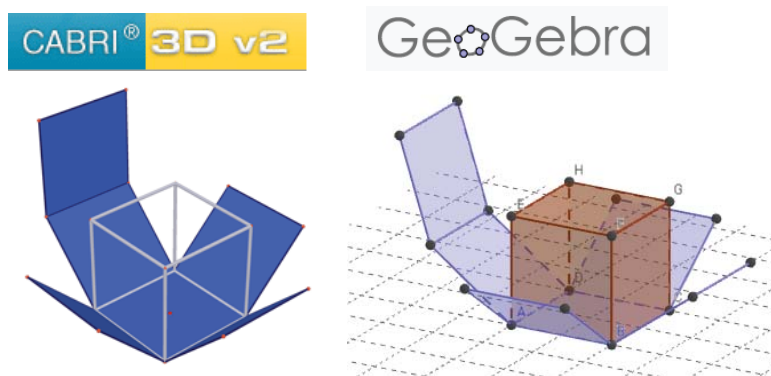
2.1. SOFTWAREAREN KRONOLOGIA LABUR BAT

Nafarroako Unibertsitate Publikoan (NUP), Lehen Hezkuntzako Irakasle Graduan eta Bigarren Hezkuntzako Irakasle Masterrean, 2008/2009 ikasturtean hasi zen erabiltzen GeoGebra, ordenagailuen laborategiko praktiketan (Lasa eta Wilhemi, 2013). Papera eta arkatza erabiliz, zenbait zeregin matematiko ez dira zentzuzkoak, denbora-kostu handiegiak dituztelako. Aldiz, geometria dinamikoa erabiliz, nozio, prozesu eta esanahi matematikoen ulermena ardatz duten egitekoak indartu daitezke. Horrekin batera, softwarea erabiliz, problemak ebazteko teknikak landu daitezke, baita geometriaren ikaskuntza-irakaskuntza prozesuak martxan jarri ere.

Aurretik, 2007/2008 ikasturtera arte, matematikako eta matematikaren didaktikako trebakuntzan Cabri II Plus softwarea erabili da. GeoGebrak Cabriren antzeko ezaugarriak dituen arren (2. irudia), baditu, haren aldean, abantaila nabarmenak ere.

Arrazoi batzuk pragmatikoak dira. Besteak beste, Cabri erabiltzeko lizentzia behar da, eta, aldiz, GeoGebra software askea da. Horrela, ikasleek ez dute unibertsitateko instalazioetara zertan etorri eta programarekin euren kabuz egin dezakete lan. Horrez gainera, teknikoki, GeoGebra erabilerraza da.

Beste arrazoi batzuk epistemologikoak dira. GeoGebrak nozio, prozesu eta esanahi matematikoak lantzeko tresna integratuak ditu. Tresna horien bidez, aldi berean lantzen dira geometria, aljebra eta funtzioen teoria. Matematikaren arloak elkarri loturik daude, eta softwareak lotura horiek indartzen laguntzen du. Gainera, 4.0 bertsioak estatistika eta probabilitatea lantzeko pakete bat dakar, horrek moldakortasuna laguntzen du; eta 5.0 bertsioak 3D ikuspegia gaineratu dio ohiko 2D ikuspegi bikoitzari.



2. irudia. GeoGebra eta Cabri.

Horrek guztiak justifikatzen du zergatik ari den eskoletan hedatzen GeoGebraren erabilera, nahiz eta hedatzea motela izan. Abantailen zerrenda luzea izanagatik ere, GeoGebraren ohiko erabilera errealitatetik urrun dago, oraindik orain.

Softwarea hamarnaka hizkuntzatan erabil daiteke. Askea denez, interesa duen edozein profesionalak itzul dezake bere hizkuntzara, doan eta libreki. Faktore horrek ahalbidetu du erabiltzaileek softwarea euskaraz eskura izatea. Gurean, itzulpenak hiru gainezartze izan ditu. Lehenengo eta behin, 2009ra arte, Gonzalo Elkano irakaslea arduratu da softwarea euskaratzeaz. Bigarren, 2009tik 2013ra, NUPeko Matematikaren Didaktika Arloak hartu du erreleboa (Lasa, Sáenz de Cabezón eta Wilhelmi, 2009). Hirugarren eta azkenik, 2014. urtean Euskal Herriko GeoGebra Institutua¹ (EHGI) osatu da, eta, geroztik, Udako Euskal Unibertsitatearen (UEU) ardura da softwarearen eguneratzea.

EHGI osatu aurretik, NUPeko Matematikaren Didaktika Arloa kontaktuan egon da Nazioarteko GeoGebra Institutuarekin. Aurrekari gisa, parte hartu zen Linzeko (Austria) GeoGebra Erabiltzaileen Nazioarteko Lehen Bilkuran (2009). Horrekin batera, zenbait jarduera egin dira Nafarroan:

- *Tokiko GeoGebra Institutuen (TGI) aurkezpena.* Manuel Sada (Iruñeko ILZ) eta Carles Giménez (Associació Catalana de GeoGebra elkarteak komunikazio-batzordeko kidea) NUPen izan dira. TGI bat zer den aurkeztu dute, eta azaldu dituzte haren egitura eta lan-ildoak.
- *Hainbat hezkuntza-etapatako zenbait irakaslerekin lantaldea osatu da.* Lantalde horretan parte hartu dute Lehen Hezkuntza, Bigarren Hezkuntza eta unibertsitateko dozena bat irakaslek. Nork bere proposamenak partekatu ditu eta softwarearen zein erabilera egitea komeni den eztabaidatu da.
- *TGIEk antolatu dituzten jardueretan parte hartu da.* Besteak beste, Kantabrian, Bartzelonan edo Salamancan antolatu diren jardueretan parte hartu da.

1. <http://www.unibertsitatea.net/blogak/geogebra/>

2009az geroztik, maisutzako ikasleak ez dira soilik trebatzen softwarearen erabilera tekniko huts batean. Horrez gainera, baliabide sinple baina erabilgarriak eraiki behar dituzte, LHko geometriako curriculumari begira. Ikasleek egin dituzten lan horiek erreferentziatzat hartu dira hurrengo urteetan (Lasa, Sáenz de Cabezón eta Wilhelmi, 2010).

2.2. HASIERAKO ESPERIENTZIAK

Ordenagailuen laborategian egindako jarduera horietan, aspektu osagarriak agertu dira: aspektu induktiboak eta deduktiboak. Alde batetik, ikasleek informazio teorikoa jaso dute eta jarraitu behar izan diete zenbait programazio-gidoiri, alde aurretik erabakitako adibideak eraikitzeko. Bestetik, proiektu bat garatzeko gaia aukeratu behar izan dute. Proiektu horretan, eta softwarea lan-tresna gisa baliatuz, geometriako zenbait aspektu esploratu behar izan dituzte. Esplorazio horren helburua bikoitza da eta alde aurretik finkaturik dago, hau da, taldearen aurrean matematikaren aspektu bat aurkeztu beharko dute eta azaldu beharko dute nola landu daitekeen eduki hori LHko gela batean.

Ikasleek argi izan behar dute, momentu oro, softwarearekin diseinatu duten eraikuntza horrek zein funtzio betetzen duen. Izan daiteke *ilustraziorako* eraikuntza bat (proposizio edo emaitza baten egia ulergarri egiten du), izan daiteke *froga* bat (dagokion ikasmailari begira, azalpen bat balioztatzeko erabiltzen da; aurrerago ikusiko dugu nola erlazioa daitekeen eraikuntza hau *esplorazio* momentu batekin), eta izan daiteke *frogapen* bat (balio matematikoa duen froga bat).

Hori horrela, LHn landu beharreko lehen frogapen-teknikak honako hauek dira: kontraadibidea (adibide baten bidez, proposizio baten egia ukatzen da), kasuen disjuntzioa (kasu posible guztien inbentarioa egin behar da), kontrajartzea (*modus tolens*) eta hipotesien testa (saiakera eta errorea).

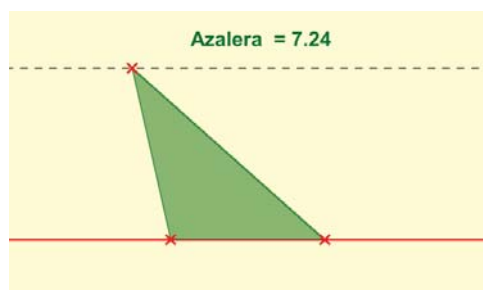
Prozesu horretan, ikasleak aldi berean ikasten du hautatu duen geometriako gaia eta GeoGebra nola erabili.

Lansaio gidatuek honako egitura hau izan dute:

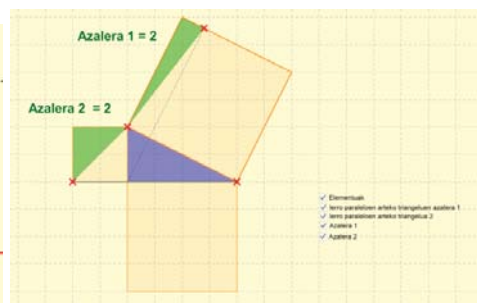
- Saio teoriko batean, aztertu beharreko kontzeptu geometrikoa aurkeztu da.
- Saio praktikoa batean, ikasleak bere kabuz egin behar du eraikuntza. Horretarako, eskura du eraikuntza nola egin pausoka azaltzen duen protokolo bat.

Hona hemen saio teoriko baten adibidea. Geometriaren garapen historikoa lantzen denean, Euklidesen *Elementuak* obra azaltzen da ezinbestean. Hain zuzen ere, I. liburuan frogatzen da Pitagorasen teorema. Teorema hori laukizuzenen arteko azalerak konparatzen dituen argudio baten bidez frogatzen da. Emaitza hori frogatzeko bi euskarri erabiltzen dira:

- Pitagorasen teorema ohiko arbelean aurkezten da eta ikasleei azaltzen zaie *Elementuetan* Euklidesek proposatzen duen frogapena.
- GeoGebraren bidez teorema frogatzen duen eraikuntza aurkezten zaie ikasleei. Berez, bi emaitza direnez, lema ($3a$ irudia²) eta teorema ($3b$ irudia³), bi eraikuntza aurkezten zaizkie.



3a irudia.



3b irudia.

3. irudia. Pitagorasen lema eta teorema eredu dinamiko bidez.

Proiektuak garatzeko, ikasleek beste eskema honi jarraitu diote:

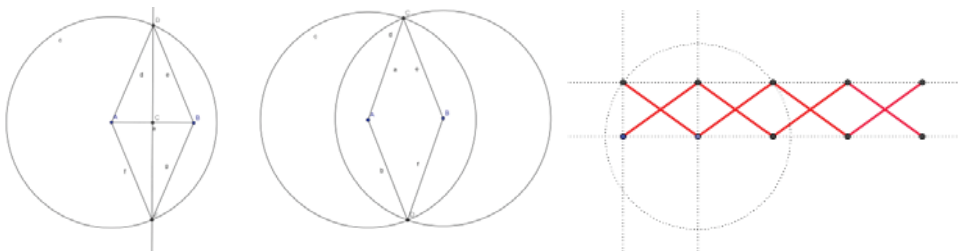
- Ikasleek eurek dituzten ezagutza matematikoak hartu dira oinarri. Ikasleek eurek aukeratu dute zein eduki matematikoren gainean garatuko duten beren geometria-gaia.
- Irakasleak ikaslearekin batera eztabaidatzen du zein aukera ematen duen hautaturiko gaiak. Besteak beste, gaiak curriculumean zein leku betetzen duen erabakitzen da, zein adin-tarterentzat aproposa den identifikatzen da eta erabakitzen da GeoGebra nola erabili eta softwareak gaiari zer eranstean dion.
- Jardueraren garapenaren ostean, ebaluazio-saio bat egiten da. Ikasleek taldearen aurrean aurkeztu beharko dute beren jardura. Taldearen ardura da proposaturiko jarduerari hobekuntzak proposatzea.

Horrekin batera, ikasleek azterketa bat gaintitu behar dute. Azterketa hori ordenagailuaren aurrean egiten da, eta ikasleei ebaluatzen zaizkie, alde batetik, GeoGebra erabiltzeko oinarritzko trebezia, eta, bestetik, ikasturtean zehar landu diren eduki geometrikoen ezagutza.

Hemen, ikasleek proposatzen dituzten jardueren zenbait adibide zerrendatzen dira:

2. <http://tube.geogebra.org/student/m424725>
3. <http://tube.geogebra.org/student/m424735>

- *Laukien sailkapena*. Erronboen propietateak landu dira. Irakaslearekin izan duen eztabaidan, ikasle sinesgogor batek dudak jartzen du aldean luzera berdina duten infinitu erronbo existitzen direnik, hau da, erronboaren aldearen luzerak erronboaren angeluaren zabalerak determinatzen dituela pentsatzen du. Irakasleak gonbita egiten dio propietate hori softwarearekin landu dezan. Gonbitari erantzunez, ikasleak erronboen gaineko hainbat eraikuntza aurkezten ditu. Eraikuntza horietan, erronboaren angeluak aldatzen dira aldean luzerak aldatu gabe. Zehazki, Zuberoako Maskaradan ohikoak diren eredu dinamikoak eraikitzen ditu (4. irudia⁴).
- *Tangrama*. Tangrameko piezen berregitea. Pieza bakoitzaren propietateak konpasaren bidez diseinatu ondoren, ikasleak poligono batez estaltzen du eskeleto bakoitza. Hiru dimentsioko pieza geometrikoak bi dimentsiotan berregitean, bi pieza simetriko eraiki behar dira paralelogramoaren ereduak egiteko, bakarraren partez. Bestela, pieza ezin da *irauli*. Eraikuntza html formatura esportatu da, LHko haurrek errazago erabiliko dituztelako piezak formatu horretan. Haurrek osatu beharreko irudien txantiloiak ere ematen dira (5. irudia⁵).
- *Eulerren zuzena*. Saio gidatu batean, triangeluen gaineko zuzen eta puntu nabarmenak landu dira: altuerak eta ortozentroa, erdibitzaileak eta zirkunzentroa, erdikariak eta intzentroa, eta erdibidekoak eta barizentroa. Jardueraren garapenean, ikasle batek eraikuntza bat proposatu du puntu horiek lerrokaturik daudela ikusarazteko (6. irudia⁶), delako Eulerren zuzenaren gainean.

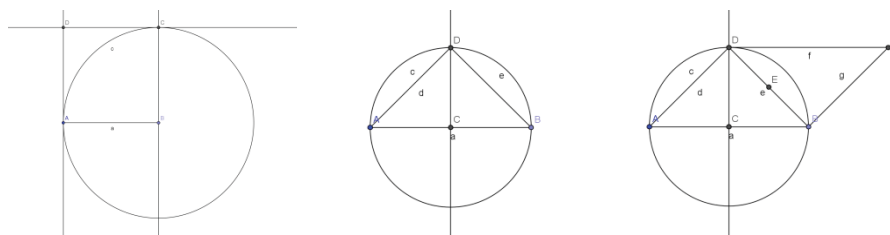


4. irudia. Laukien sailkapena, eta erronboaren propietateak.

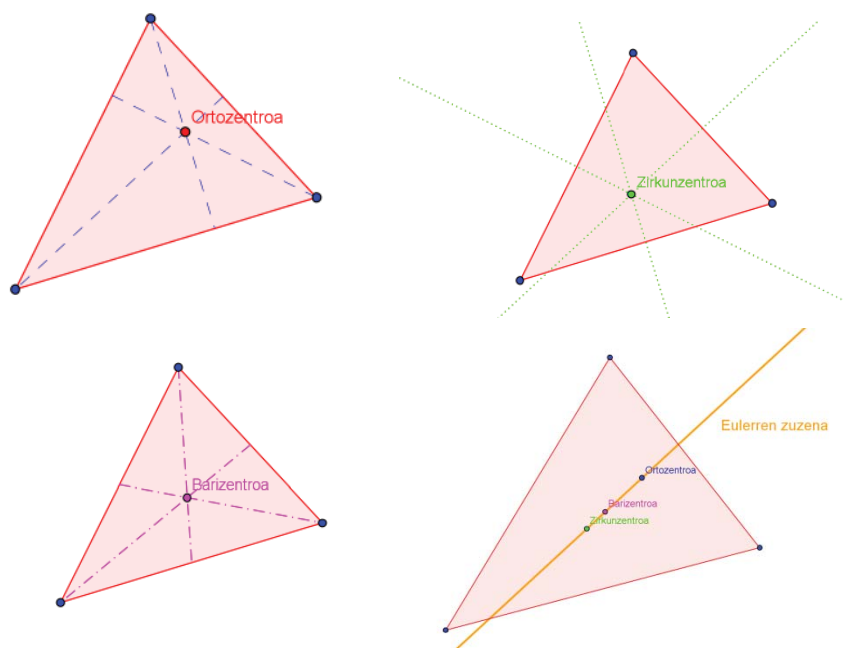
4. <http://tube.geogebra.org/student/m426001>, <http://tube.geogebra.org/student/m426005>

5. <http://tube.geogebra.org/student/m426009>, <http://tube.geogebra.org/student/m426011>

6. <http://tube.geogebra.org/student/m426019>, <http://tube.geogebra.org/student/m426021>



5. irudia. Tangrama.



6. irudia. Eulerren zuzena.

2.3. ERANTZUN BEHARREKO GALDERAK

LHko irakasle batek argiki menderatu behar ditu gaitasun matematikoa eta digitala, eta ordenagailu-laborategian egin diren proiektuek laguntzen dute gaitasun horien garapenean. Etorkizuneko irakasleek beharko dituzte tresna horiek euren eguneroko lanean.

Esandako horri kontrajarrita, oro har, irakaslegaiak ez dituzte maite software espezializatuak, errefusatzen dituzte. Hori horrela izanik, GeoGebrak laguntzen du etorkizuneko irakasleen alfabetatze digitalean.

Testuinguru horretan, egokia da GeoGebra unibertsitateko ikasleen irakaskuntza-programetan sartzea. Lehenengo pausoa egin da, beraz. Maisurako ikasleek ikasi dute GeoGebra erabiltzen.

Helburua argia da: irakasleek tresna informatiko hori modu autonomoan erabili behar dute, eraikuntzen, zereginen eta egoeren diseinurako eta ebaluaziorako. Ondorioz, galdera hauei erantzuna eman behar zaie: noiz komeni da erabiltzea software dinamikoa? Eta, nola erabili behar da?

Liburu honetan, galdera horiei erantzun partziala emango zaie. Momentura arteko zenbait garapen teorikoren eta esperientzia praktikoren bilduma da liburu hau.

3. Instrumentazioa

Giza jardueran, zeregin jakin bat aurrera eramateko orduan, Genesi instrumentalaren teoriak garrantzi handiko rola ematen die zeregin horretan erabilitako tresnei (Drijvers, Godino, Font, eta Trouche, 2013).

Tresna edo artefaktu bat objektu bat da. Objektu hori normalean fisikoa da, baina izan daiteke beste natura batekoa ere. Giza jarduerak sorturiko objektua da, eta zeregin jakin bat aurrera eramateko erabiltzen da. Tresnaren jatorrizko diseinua gorabehera, tresna jakin batekin hainbat zeregin lagundu daitezke. Tresna nola erabiliko den, hori erabiltzailearen gaitasunen mende dago. Horrenbestez, batera hartzen baldin baditugu, alde batetik, artefaktua bera, eta, bestetik, artefaktua manipulatzeko duen pertsonak zeregin jakin baten ebazpenean hura erabiltzeko behar dituen gaitasunak, orduan, artefaktua instrumentu izatera pasako da.

Artefaktuaren eta instrumentuaren artean dualtasun bat dago. Ez dira termino kontrajarriak, aldiz, txanpon beraren bi aldeak dira.

Artefaktu terminoa erabiliko dugu, termino «neutrala», objektuarekin inolako erlazorik adierazi nahi ez dugunean [... eta] instrumentu terminoa erabiliko dugu artefaktua adierazi nahi dugunean egoera jakin batean, erabiltzaileak manipulatzeko duenean, akzioa dagoen ingurune batean subjektuaren eta instrumentuaren artean erlazio instrumentala dagoenean (Rabardel, 2002).

Instrumentazioaren teoriaren barruan bada bigarren dualtasun bat. Instrumentazioaren eta instrumentalizazioaren arteko dualtasuna, hain zuzen ere. Genesi instrumentalaren barnean, aldebiko erlazioa sortzen da erabiltzailearen eta artefaktuaren artean.

Instrumentalizazioak deskribatzen du nola ikasleak, nolabait, bere ezagutzekin «forma ematen» dion instrumentuari zeregina ebazteko orduan. Dualki, instrumentazioak kontrako erlazioa adierazten du. Ikasleak bere produkzioa egiten duenean, instrumentuak aukerak eta mugak ditu zeregina aurrera eramateko orduan, eta, baldintzapen horiek eragina dute problemaren ebazpenean (Hoyles eta Noos, 2003).

Hori bera gertatuko da GeoGebrarekin. Zeregin matematiko bat software dinamikoarekin ebazteko orduan, esate baterako, ekuazioak ebazteko problema batean, eredu dinamikoak aldebiko erlazioa eragingo du erabiltzailearekin, hau da, ikaslearekin.

Instrumentu jakin baten bidez, ikasleek garatzen dutenean zereginen familia bat ebazteko prozedura egonkor bat, akzio *instrumentaleko eskema* bat garatu dutela esaten da (Trouche, 2000).

GeoGebra erabiltzeko orduan eta zereginen familia jakin bati buruz ari garela, beraz, ezinbestean egiaztatu behar da ikasleek akzio instrumentaleko eskema bat garatu ote duten, proposatu zaizkien zereginen ebazpenean.

3.1. EUSKARRITIK INGURUNE MATERIALERA

Jarduera matematikoa konplexua da eta ez da komeni zeregin matematikoak euskarri bakar baten gainean ebaztea. Euskarri materialak baldintzatu egiten du objektuaren esanahia. Hori horrela da, sistema didaktikoaren barruan, euskarri materiala ingurune antagonistaren parte garrantzitsua delako. Aktibitatearen bidez, ingurune antagonista horrek subjektuari ematen dizkio behar dituen atzeraelikadura ulergarriak (feedbacka). Horrela, erabilitako euskarria ingurune materiala bihurtzen da. Papera eta ordenagailua, horiek ingurunearen parte dira, eta, horregatik, berebiziko garrantzia du ingurune horien artean dauden erlazioen deskribapenak.

Analisi matematikoko galdetegiak lantzeko orduan, Bremiganek (2005) ohar garrantzitsua egiten du. Ikasleei enuntziatuak paperaren gainean banatzean, ikasleek oharrak hartu behar dituzte paperaren gaineko diagrametan. Izan ere, diagramen gainean moldaketak egiten dituzten ikasleek, hau da, oharrak hartzen dituzten ikasleek, euren errendimendua handitzen dute problemen ebazpenean. Errendimendu handiago horrek lotura izan lezake ikaslearen gaitasun espazialarekin. Azken batez, moldaketa horiek egiten dituen bitartean, ondorioak ere ateratzen ditu.

Horregatik, nahiz eta *applet* batek abantailak dituen (esate baterako, problema bat ebazteko propio diseinaturiko eredu dinamiko bat manipula dezakezu), ezin dira alde batera utzi papera bezalako euskarriak (ikasleak idatz dezakeelako paperaren gainean, oharrak har ditzakeelako edo diagrama bat molda dezakeelako), ordenagailuaren pantailan gertatzen ari denarekiko independentziaz.

Azken hamarkadan aldaketa nabarmena gertatu da ikastetxeetan. Ohiko arbela geroz eta gutxiago erabiltzen da, eta, haren ordeaz, geroz eta gehiago erabiltzen dira ordenagailua, arbel digitala eta ukimenezko pantailak dituzten miniatura-gailuak. Tresna horien erabilerak eragin zuzena du gaur egun (eta izango du etorkizunean) ikastetxeetan, eta aldatu egingo du, nabarmen, matematika-ezagutzen transmisioa nola ulertzen dugun.

Ez da soilik erabilitako instrumentuen aldaketa bat. Matematikaren irakaskuntza klasikoan garrantzi handia eman izan zaie prozedurazko aspektuei. Hori horrela izanik, ikasleek hainbat zeregin matematiko automatikoki egin ditzakete, ongi jakin gabe zertan ari diren benetan, ezta zergatik egin behar diren prozedura horiek modu horretara ere. Are larriagoa dena, ikasleek maiz ez dakite balioztatzen egin berri

duten produkzio matematikoaren zuzentasuna, eta irakaslearen esku uzten dute ongi edo gaizki egin duten esatea, *ardura matematikoa* saihestuz.

Eredu dinamikoaren gaineko irakaskuntzaren bidez, ikasleek aukera dute problema beraren hainbat adierazpenen gainean lan egiteko (hizkuntza, sinbologia aljebraikoa, adierazpen grafikoak eta abar). Horrela, tartean dauden nozio matematikoa ulertzeko eredu kognitibo dinamikoa eraikitzen dute.

GeoGebraren garapenean ardurak dituzten programatzaileek, matematikariek eta irakasleek haxe nabarmentzen dute: softwareak aukera eta abantaila handiak eskaintzen ditu eredu dinamikoaren gaineko ikaskuntza praktikara eramateko. Garatzaile horiek haxe defendatzen dute, orobat: ikasleek eredu dinamikoaren bidez problemak ebazten dituzten heinean, problemen ebazpenerako heuristika bat eraikitzen dute.

GeoGebraren garatzaileek bilatu dituzte ere softwarearen diseinua justifikatzen eta bermatzen duten oinarri didaktikoak, baita aurkitu ere: ikaskuntza matematiko errealistaren teoria (Freudenthal, 1978) eta ereduaren gaineko irakaskuntza (de Jong eta van Joolingen, 2008; Milrad, Spector eta Davidsen, 2003), besteak beste. Horrez gainera, matematikaren irakaskuntzarekin eta teknologien erabilerarekin lotura duten garapen berriagoak ere erantsi dituzte, esate baterako, Genesi instrumentalaren teoria.

3.2. GGB ETA GARDENTASUNAREN ILUSIOA

Bigarren Hezkuntzako Masterrean, matematikako berezitasuna egiten duten NUPeko ikasleek bi irakasgai dituzte matematikan sakontzeko, horiek dira, «Prestakuntza osagarria matematika jakintzagaian» eta «Areagotzea matematika jakintzagaian». Irakasgai horietan, besteak beste, geometriako gaiak garatu behar dituzte. Alde batetik, lantzen dituzte unibertsitate-mailako geometriako problemen ebazpena eta teoremen frogapena. Bestetik, Bigarren Hezkuntzako curriculum oinarri hartuta, gai bat garatu behar dute idatziz, eta gai horren aurkezpena egin behar dute taldearen aurrean.

Aurkezpen horietan, tresna gisa erabili dira GeoGebra eta arbel digitala, emaitza geometriko horien garapena egiteko eta haiek bisualizatzeko.

Izan ere, geometriako edukiak ohiko arbelean ilustratzean, saio bakoitzean objektu geometriko bakar baten edo gutxi batzuen adibideak erakuts daitezke. Objektu geometrikoen adierazpenak erakusteko muga nabarmen horrek fenomeno didaktiko bat eragin dezake, alegia, gardentasunaren ilusioa, «fenomeno horren arabera, irakasleak adibidea eredu gisa edo klase baten ordezkari gisa interpretatzen duen bitartean, ikasleak adibidea soil hori besterik ez du ikusten». Fenomeno horrek matematikaren bi errealitatearen arteko distantzia erakusten du. Alde batetik, ezagutza zientifiko gisa, matematikaren eraikuntzak dinamika propioa du. Bestetik, eskoletan,

irakaskuntza-objektu labelatu eta kristalizatu gisa erakusten da. Hori horrela, bi errealtate horien arteko distantziaren adibide da *gardentasunaren ilusioa*.

Horrenbestez, funtsezkoa da irakasle eta ikasleek «hizkuntza bera» hitz egingo dutela ziurtatuko duten bitartekoak identifikatzea. Nola lagundu dezake GeoGebrak fenomeno hori gaingaitzen? hau da, adibide matematiko bat aldi berean interpreta daiteke «objektu isolatu» eta «klase baten ordezkari» gisa, nola txikiagotu dezake GeoGebrak bi interpretazio horien arteko distantzia? (Lasa eta Wilhelmi, 2012). Galdera horiei erantzuna ematea ezinbestekoa da orokortze-prozesu guztietan, non objektu intentsiboak (orokorrak) eta estentsiboak (partikularrak) parte hartzen duten.

Orokortze-prozesu baten emaitza gisa, objektu intentsiboa deitzen den objektu matematikoa lortuko dugu. Objektu intentsibo hori arau bat da, objektu orokorren klasea sortzen duen araua (bilduma edo multzoa izan daiteke) eta ahalbidetzen du elementu partikular bat identifikatzea klase baten ordezkari gisa (Godino, Font, Wilhelmi eta Lurduy, 2011).

Partikularizazio-prozesuen bidez estentsiboak (partikularrak) deritzen objektu berriak lortzen dira. Zerrenda batean emandako objektu partikularren bilduma edo multzo finitu bat ez litzateke intentsibotzat onartu behar, harik eta subjektuak erakusten ez duen arte zein den multzoko elementuak zehazteko aplikatu den araua. Orduan, multzoa zer edo zer berri bilakatzen da, hura osatzen duten elementuen zerrenda soila ez beste zerbait, multzotik agertzen den entitate unitario baten modukoa. Horrela, multzorako bidea egiten duen orokortze-prozesuaz gainera, unitizazio-prozesu bat ere bada (Aké, Godino, Gonzato eta Wilhelmi, 2013).

Horrenbestez, orokortze-prozesuak berez dira konplexuak eta horien inguruan berariazko irakaskuntza-erabakiak hartu behar dira. Erabaki horiekin, ikasleei aukera eman behar zaie haien ezagutzak gara ditzaten, elementu partikularretatik klaseen determinaziora.

3.3. GEOGEBRA ERABILTZEKO HIRU MOMENTU

Bigarren Hezkuntzan, GeoGebra erabiltzea egokia da aktibitate matematikoaren hiru momentutan: propietate baten esplorazioan, ilustrazioan eta frogapenean (Lasa eta Wilhelmi, 2013). Hiru momentu horietan, adibidearen (estentsiboa) eta klasearen (intentsiboa) arteko dualtasuna nabarmendu behar da (Wilhelmi, Godino eta Font, 2007); izan ere, orduan onartzen dira objektu geometrikoak egoera mota partikular baten eredu gisa. Gaur egun, oro har, GeoGebra erabiltzen da propietate jakin bat adibide baten bidez ilustratzeko; horrenbestez, esplorazio eta frogapeneko momentuek gaingaitu egiten dute haren erabilera nagusia.

3.3.1. Esplorazioa

Geometriako software dinamikoaren bidez, ariketak eta problemak ebazteko esplorazio-eraikuntzak egin daitezke. Eredu horiekin, ondoriozta daitezke irudi

edo eraikuntza geometrikoen propietate ordura arte ezezagunak. Helburua zera da, problema baten hasierako baldintzak edo proposizio baten murrizketak betetzen dituen eraikuntza bat diseinatzea. Eraikuntza manipulatu ondoren, ikasleek haren propietateak deduzituko dituzte. Normalean, eraikuntza horiek ez dituzte ikasleek egiten. Irakasleak alde aurretik diseinatu du eraikuntza edo katalogo batetik aukeratu du, esate baterako, Gauss Proiektutik⁷ edo GeoGebraTubetik⁸.

3.3.2. Ilustrazioa

Aurretik esan bezala, geometriako software dinamikoa —bereziki, GeoGebra— gehienbat erabiltzen da propietateen adibideak emateko, *ad hoc* aukeraturiko kasu partikularren bidez.

Propietate jakin baten egia erakusten duen eraikuntza bat aurkezten da. Eraikuntza hori eredu manipulatio gisa erabiltzen da eta haren erabilera arbel digital batekin osagarria da. Horrenbestez, software dinamikoaren bidez, triangeluen propietateak aztertzeko triangelu ugari sor daitezke, eta, aldiz, ohiko arbelean, gutxi batzuk besterik ezin dira adierazi.

Gehien hedatu den erabilera horren arabera, manipulazioak motibatu beharko lituzke adibide berriak, eta, adibide horien bidez, ikasleek hobetu egingo lukete beren ziurtasuna formulaturiko aieruetan. Burke eta Kennedyren arabera (2011), Hölzek (2001) dio geometria dinamikoko ingurune batean, aieru baten egia ikusi duten ikasleek enuntziatuaren egiaren zergatia jakiteko beharra sentitzen dutela.

Azken batez, propietate baten ilustrazioa «marrazki» bat besterik ez da. Bigarren Hezkuntzan, hainbat baldintzaren daude, besteak beste, baldintzaren materialak, denborazko baldintzarenak edo ikasleen baldintzaren kognitiboak. Horien eraginez, propietatearen frogapen formalak alde batera uzteko erabaki didaktikoa har daiteke, eta, kasu horretan, aktibitatea mugatuko litzateke propietatearen ilustrazio-aurkezpen soil batera. Edonola ere, propietatearen ilustrazio-eraikuntzaren eta frogapen formalaren artean aldeak egon daitezke.

3.3.3. Frogapena

Tradizioz, propietate geometriko baten frogapen formalak arbelean egiten da, pausoz pauso. Edonola ere, ohiko frogapen formal horiek alde batera uzten ari dira, ohiko arbelak geometriako software dinamikoekin eta arbel digitalekin ordezkatzeko diren heinean; ilustrazio-eraikuntzak ez dira diseinatzeko frogapen formalaren pausoak kontuan hartuz, eta, batzuetan, inplementazio informatikoa eta arrazoibide logiko purua ez datoz bat. Bi arrazoibide horiek elkartuko dituzten egoerak hautatzea irakaslearen zeregina da; alde batetik, geometriako software dinamikoari dagokion arrazoibide induktiboa, eta tradizioz frogapen formalei dagokien arrazoibide deduktiboa —paper eta arkatzezko frogapenak—.

7. <http://recursostic.educacion.es/gauss/web/>

8. www.geogebra.org

Ikasleak motibatu egiten dira arrazoibide induktiboekin, eta, horregatik, autore gehienek iritziz, argudiatze induktiboak landu behar dira lehenik. Izan ere, ikasleek hobesten dituzte frogak pragmatikoak, frogak intelektualen aurretik (Ballacheff, 1987). Produkzio matematikoa eredu dinamiko batekin laguntzean, frogak enpiriko bat nahikoa izan daiteke ikaslearentzat, argudiatze induktiboa eraiki dezakeelako saiakeren kopuru nahiko batekin. Horrenbestez, ikasleek ez dute frogapenak egiteko praktikarik eta ez dute ikusten erabilitako prozedura matematikoa justifikatzeko beharrik (Dreyfus, 1999). Gainera, GeoGebraren edo Sketchpaden moduko software dinamikoen inguruneetan, erraza da kontraadibideak aurkitzea. Horrela, axiomaren nozioa hedatu egiten da eta proposizio gutxiak behar dute frogapen formala; eredu dinamikoarekin ez bada kontraadibiderik aurkitzen, propietatea egiazkotzat hartuko da (De Villiers, 2004).

Testuinguru horretan, hainbat autorek frogapenak joka ditzakeen rolen hainbat sailkapen aurkeztu dituzte, hala nola azalpena (enunziatu bat argitzeko eta ulergarri egiteko), ahozko azalpena (arrazoibide-prozedura bat, norbait gogobetetzeko) edo frogapen formala (frogapen matematikoa) (Dreyfus, 1999); bada frogapenaren beste rol bat, normalean eskolan kontuan hartzen ez dena, hori da, *a posteriori* sistematizazio bat, hots, erlaziorik gabeko emaitzak batasun batean antolatzea (De Villiers, 2004). Bada, irakaskuntza matematikoaren erronka handietako bat da ebaluazioa, hau da, ikasleen frogapen gisako produkzioak ebaluatzea, eta erabakitzea noiz den argumentu bat nahiko zehatza frogapena dela esateko.

Ez da lan honen asmoa transmisio-eredu tradizionala defendatzea. Hala eta guztiz ere, lan honetan, frogapenari buruz ari garelarik, «frogapen formal»ari buruz ari gara. GeoGebrak ilustraziorako balio duela argi dioenez literaturak, eztabaidatu nahi dugu zein diren GeoGebra eraikuntza batek izan behar dituen ezaugarriak argudiatze formal bati laguntzeko. Egiaz, datorren atalean GeoGebra eraikuntzen zenbait adibide aurkeztuko dira, eta eztabaidatuko da frogapen formal baten artikulazioan laguntzen duten edo ez.

3.4. GEOMETRIAKO ERAIKUNTZEN ADIBIDEAK

Aurreko atalean hiru momentu deskribatu dira, eta, atal honetan, momentu horiei dagozkien adibideak aurkeztuko dira. GeoGebra eraikuntza guztiak triangeluen propietateak aztertzeko diseinatu dira. Bigarren Hezkuntzako curriculumeko edukiak hautatu dira. Alde batetik, eraikuntza horien bidez, saioaren kudeaketa propietateen gainean zentra daiteke. Horrela, adibide partikularren gainean lan egin beharrean, ereduaren gainean lan egiten da. Bestetik, eztabaida piztu nahi da, hau da: eraikuntza horiek aukera ematen al dute argudio induktiboetatik deduktiboetara igarotzeko? bestela esanda, azalpen geometriko baten eta frogapen formalaren arteko hutsunea zeharkatzen laguntzen al dute?

Adibide guztiak eskema beraren arabera aurkeztuko dira:

- *Enuntziatua.*
- *Eraikuntzaren deskribapena.*
- *Erabilera.*
- *Justifikazioa edo frogapen formala.*

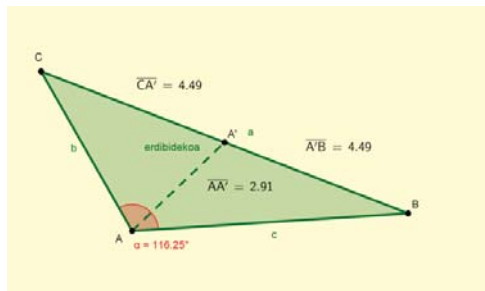
Horrez gainera, baliabide guztiak eskura daude GeoGebraTuben, GeoGebraBook formatuan⁹.

3.4.1. Esplorazio-eredu baten adibidea

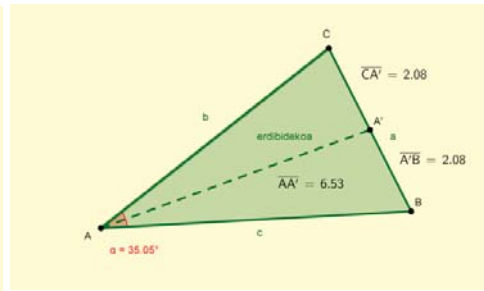
- *Enuntziatua.* Triangelu bat emanda, ABC , froga ezazu α angelua zuzena dela, baldin eta soilik baldin A erpinari dagokion erdibidekoaren luzera BC aldearen erdiaren berdina bada.
- *Eraikuntzaren deskribapena.* Eraikuntzak enuntziatuko elementuak erakusten ditu (ABC triangelua, AA' erdibidekoa, a aldearen erdiko puntua definitzen duten segmentuak, eta aztertu nahi den α angelua) eta egoeraren esplorazioa ahalbidetzen du. α angelu kamutsa duen edozein triangeluren antolaketan, erdibidekoaren luzera $\overline{BC}$ segmentuaren erdia baino laburragoa da, eta, α angelu zorrotza duen edozein triangeluren antolaketan, aldiz, erdibidekoaren luzera $\overline{BC}$ segmentuaren erdia baino luzeagoa da. Baliabidea eskuragarri dago ondoko estekan¹⁰.
- *Erabilera.* Eraikuntzaren laguntzarekin aierua egin daiteke. Gainera, propietatea frogatzeko bidea nondik nora joan daitekeen pentsatzeko aukera ematen du, erakusten dituelako tartean diren elementu guztiak eta frogapena osatzeko baliagarria izan daitekeen hainbat informazio. 7. irudiak erakusten ditu esplorazio-momentu horren bi adibide. Esplorazio-momentuaren ostean, aktibitatea aldatu da. Orain, frogapena osatzeko argumentu logikoa aurkitu behar da.
- *Justifikazioa edo frogapen formala.* Demagun α angelu zuzena dela; $\beta + \gamma = 90$ denez, α angelua bi angelutan banatuko dugu, β eta γ ; $AA'B$ eta $AA'C$ triangeluak isoszeleak dira, bakoitzak dituelako bi angelu berdin; horrenbestez, AA' , $A'B$ eta $A'C$ luzera bereko segmentuak dira, eta, ondorioz, A' puntua $\overline{AC}$ segmentuaren erdiko puntua da. Argudioa itzul dezakegu bigarren inplikazioa lortzeko.

9. <http://tube.geogebra.org/book/title/id/423125#>

10. <http://tube.geogebra.org/book/title/id/423125#material>



7a irudia.

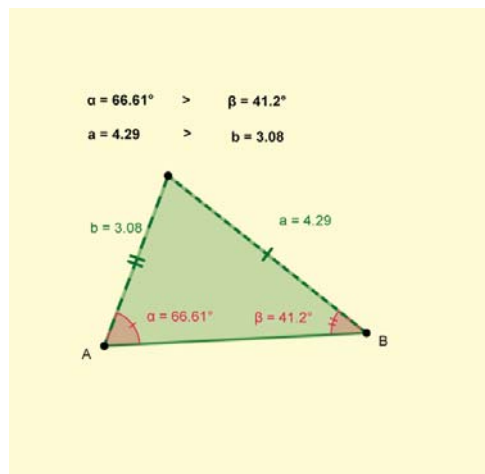


7b irudia.

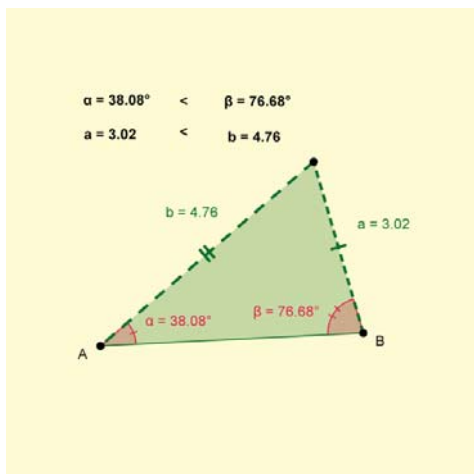
7. irudia. Esplorazio-momentua.

3.4.2. Ilustrazio-eredu baten adibidea

- *Enuntziatua.* Triangelu bat emanda, ABC , aldeetako bat beste bat baino laburragoa bada, orduan, alde horien aurkako angeluek desberdintza berdina beteko dute.
- *Eraikuntzaren deskribapena.* Eraikuntza geometrikoak ongi azaltzen du enuntziatuko propietatea, baina eraikuntzaren bidez ezin da esandakoaren zuzentasuna egiaztatu. Testu-laukiek angeluen desberdintzetan gertatzen diren aldaketak bistarazten dituzte, aldean luzerek desberdintza bera betetzen dutenean (8. irudia¹¹).



8a irudia.



8b irudia.

8. irudia. Ilustrazio-momentua.

11. <http://tube.geogebra.org/material/simple/id/423121>

- *Erabilera*. GeoGebra tresna erabilgarria da propietatea azaltzeko, «zenbakizko» eredu bat sortzen duelako. Edonola ere, ikusten dena justifikatzeko aztarnarik ez du ematen.
- *Justifikazioa edo frogapen formalak*. Triangelua aldeberdina edo isoszelea denean, $\alpha = \beta$ baldin eta soilik baldin $a = b$. Demagun, hortaz, triangelu eskaleno bat dugula, halakoa non $a < b$. Kasu horretan, irudikatu a erradioa eta C zentroko arku bat; arku horrek b aldean A' puntuan ebakitzen du. $A'BC$ triangelua isoszelea da, α' eta β' angelu berdinak ditu (B erpina jatorrizko triangeluan eta B' erpina barne-triangeluan, erpin bera dira). Alde batetik, $\beta > \beta'$, eta, bestetik, $\alpha' > \alpha$; azkenik, $\alpha' = \beta'$ denez, nahi den erlazioa betetzen da, $\alpha < \beta$.

3.4.3. Frogapen-ereduen adibideak

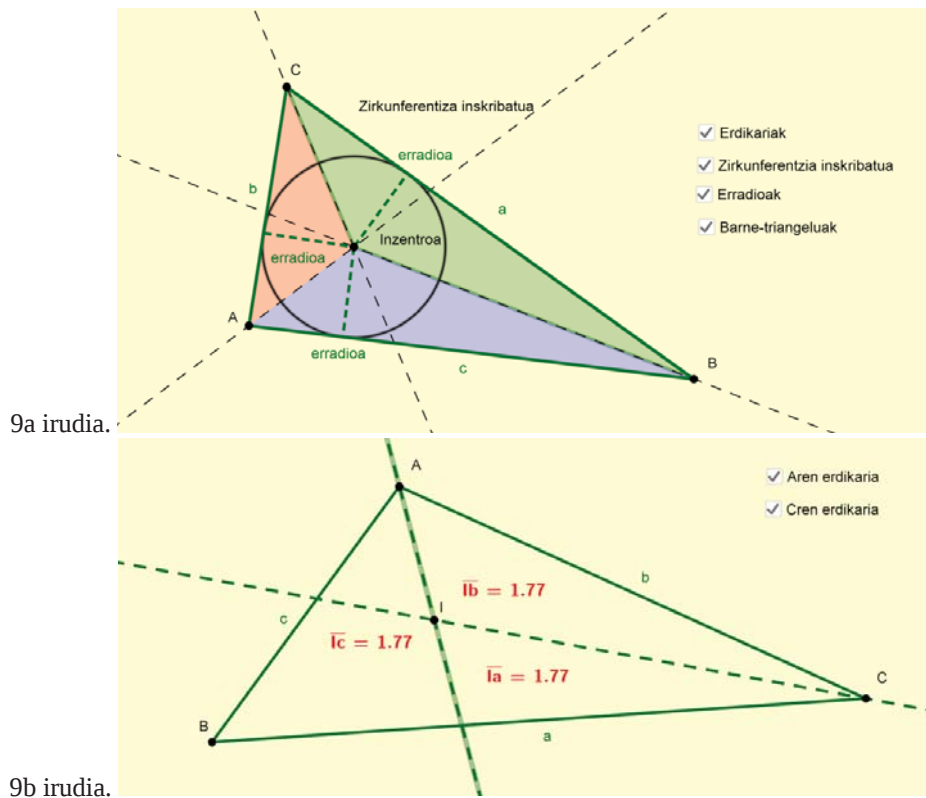
Atal honetan triangeluen gaineko hiru eraikuntza klasiko aurkezten dira. Horietako bakoitzean, konparatuko dira ilustrazio-eraikuntzak eta frogapen-eraikuntzak.

3.4.3.1. Triangelu baten erdikarien ebakidura: intzentroa

- *Enuntziatua*. Triangelu baten hiru erdikariek puntu bakar batean ebakitzen dute elkar. Ebakidura-puntuari intzentro esaten zaio.
- *Eraikuntzaren deskribapena*. Ilustrazio-eraikuntzak (9a irudia¹²) erakusten ditu propietatearen frogapenean parte hartzen duten elementuak. Horrekin batera, propietatearen ondorio diren beste zenbait elementu ere aipatzen dira. Kontrol-laukien laguntzaz erakutsi eta ezkutatu egiten dira, nahieran, erdikariak eta horien ebakidurak, zirkunferentzia inskribatua, zirkunferentzia horrek triangeluaren aldeetako bakoitzarekin duen erradioa, eta hiru erradio edo altuera horiek definitzen dituzten barne-triangeluak. Frogapen-eraikuntzak (9b irudia¹³) erakusten ditu, soilik, frogapen logikorako beharrezkoak diren elementuak: elkar ebakitzen duten bi erdikari, eta horien bidez ondorioztatzen da hirugarren erdikariak derrigorrez ebaki behar dituela aurreko biek egiten duten puntu berean.

12. <http://tube.geogebra.org/student/m423301>

13. <http://tube.geogebra.org/student/m423341>



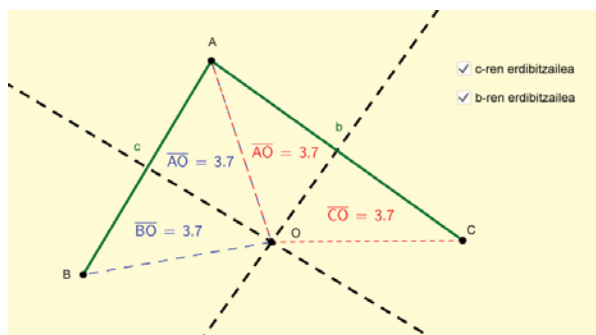
9. irudia. Intzentroa.

- *Erabilera*. Ilustrazio-eraikuntza interesgarria da sintetizatzen dituelako intzentroari loturiko hainbat kontzeptu, eta erakusten dituelako elementu horien arteko erlazioak. Edonola ere, geometria lauaren ikaskuntzan, ilustrazio-eraikuntza ez da beti frogapen formalaren baliokidea, ez die pauso berei jarraitzen. Frogapenak arrazoibide formala behar du, eta frogapen-eraikuntza sinpleago batek erakusten du bidea.
- *Justifikazioa edo frogapen formala*. α angeluaren erdikaria distantziakidea da b eta c aldeekiko; bestalde, γ angeluaren erdikaria distantziakidea da a eta b aldeekiko; horrenbestez, bi segmentu horien ebakidura-puntuak I , a eta c aldeekiko distantziakide behar du izan, eta, ezinbestean, β angeluaren erdikarian dago.

Zehaztapenetan sartuko ez garen arren, antzeko egoera batera helduko gara zirkunferentzia zirkunskribatuaren eta zirkunzentroaren azterketan, ilustrazio- eta frogapen-eraikuntzak konparatuz gero (10. irudia).



10a irudia.



10b irudia.

10. irudia. Zirkunzentroa.

3.4.3.2. Triangelu baten erdibidekoen ebakidura: barizentroa

- *Enuntziatua*. Triangelu baten hiru erdibidekoek puntu bakarrean ebakitzen dute elkar. Ebakidura-puntu horri barizentro esaten zaio.
- *Eraikuntzaren deskribapena*. Ilustrazio-eraikuntzak soilik erakusten ditu erdibidekoen ebakidurak eta sorturiko bi segmentuen arteko proportzioa (11a irudia¹⁴), hau da, barizentroak 1:2 proportzioan ebakitzen du erdibideko bakoitza. Egiaz, erdibidekoa proportzio jakin horretan markatzeko pausoa frogapenaren zati da, hau da, erdibidekoek puntu bakar batean elkar ebakitzen dutela ondorioztatzeko tarteko argumentu bat da; ez da frogapenaren korolario bat, ez da propietatearen ondorio bat, ilustrazio-eraikuntza ikusiz inork hori pentsa lezakeen arren. Frogapen-eraikuntzak bestelakoa erakusten du (11b irudia¹⁵). Bigarren eraikuntza horrek irristailua erabiltzen du pausoz pauso erakusteko argumentuaren garapena, zergatik ebakitzen duten elkar hiru erdibidekoek puntu batean eta bakarrean.
- *Erabilera*. Propietatearen ilustrazioa eta haren frogapena ez dira gauza bera. Triangelu baten barizentroaren azterketa ezberdintasun horren muturreko adibidea da. Izatez, Bigarren Hezkuntzan, erakusten da barizentroa dela triangeluaren hiru erdibidekoen ebakidura-puntua, baina baieztapen horren egia ez da frogatzen.

14. <http://tube.geogebra.org/student/m423439>

dago: eredu dinamikoak bitarteko izateari utz diezaioke helburu bihurtzeko; hau da, irristatze metakognitiboa gertatu da (Brousseau, 1997): GeoGebra irakaskuntza-prozesuaren azken helburu bihurtzen da.

Unibertsitateko irakasleen artean, zenbaitzuek parte hartzen dute Matematikako Olinpiadaren antolaketan, Olinpiada horren fase ezberdinetan. Irakasle horietako batzuek alerta piztu dute, geometriako software dinamikoari loturiko arrisku baten inguruan erne egoteko aholkua eman dute: ikasleek ez dituzte gehiago erabiltzen arrazoibide euklidearrak, eta, ondorioz, frogapen geometriko batean, ezin dituzte kateatu pauso anitzeko arrazoibideak, beren esperientzia matematikoan oinarrituz ez dutelako horren beharrik sentitzen. Ez dute behar den instrukzioa ere.

Eredu dinamikoen bidez ebazteko zereginak bi fase beharko lituzkete. Alde batetik, ilustraziorako eredu dinamiko bat erabili beharko litzateke problemaren nondik norakoak aztertzeko. Eredu dinamikoen laguntzaz prozesu induktiboak indartzen dira eta prozesu induktibo horiek ezinbestekoak dira elementu partikularrak aztertzeko. Hala ere, aktibitate hori neurri batean alferrekoa da, ez baldin bada ahalegin bat egiten elementu-klase dualtasuna agerian uzteko; hau da, eredu dinamikoak arrazoibidea ireki behar dio propietatearen frogapen formalari. Horrela, bigarren fasean, argumentu logikoek hartu behar dute gidaritza. Bestela, propietatea «ikusten da» baina frogatzeke geldituko da.

Hori horrela izan dadin, ez dira soilik diseinatu behar lehen fasean erabiliko diren ilustrazio-eraikuntzak, horiek kontraadibiderik gabeko frogapen induktiboa hornitzen dute. Ereduak erakutsi behar ditu, baita ere, propietatearen frogapenerako pausoak. Horretarako erabiliko den bigarren GeoGebra eraikuntza sinpleagoa izango da, seguru aski.

4. Ikuspuntu ontosemiotikoa

Ezagutza eta instrukzio matematikoaren ikuspegi ontosemiotikoak (IOS) Matematikaren Didaktikaren oinarriak sendotzea du helburu, eta, horretarako, hainbat tresna teoriko garatu dira, hiru etapatan (Godino, Batanero eta Font, 2009).

Lehenengo etapan (Godino eta Batanero, 1994; Godino, 1996; Godino eta Batanero, 1998), bi nozio garatu eta finkatu dira, horiek dira, «objektu matematiko baten esanahi instituzionala eta pertsonala» (bi esanahi horiek praktiken sistema gisa ulertu behar dira, non objektua ezinbestekoa den zeregina aurrera eramateko). Bi nozio horiek lotura estua dute ulermenarekin. Ikuspuntu pragmatiko batetik, objektu matematiko instituzionalizatuen ikerketan ezartzen da interesa, baina, betiere, irakaskuntzak helburu duen subjektu indibiduala bistatik galdu gabe.

Bigarren etapan, eredu ontologiko eta semiotiko zehatzagoak garatu dira (Godino, 2002; Contreras, Font, Luque, Ordóñez, 2005). Izan ere, aztergai epistemiko-kognitiboa ezin da ontologikotik bereizi. Ontologia horrek gai izan behar du deskribatzeko, bai jarduera matematikoa, baita haren «produktzio»en komunikazio-prozesuak ere. Analisi epistemiko eta kognitiborako lehenengo tresna gisa (ezagutza matematikoaren dimentsio instituzional eta pertsonala), proposatu dira oinarritzko nozio gisa «egoera-problema klase baten aurrean subjektuak (instituzio baten barnean) erakusten dituen praktiken sistemak». Hala ere, matematikaren irakaskuntzan gertatzen diren prozesu komunikatiboetan, ez dira soilik interpretatu behar entitate kontzeptualak. Aldiz, interpretatu behar dira, orobat, egoera problematikoak eta egoera horietan erabili diren arazoiketarako baliabideak eta baliabide espresiboak. Horretarako, ezagutu behar dira praktika mota bakoitzean azaleratzen diren objektuak eta horien egitura. Horrela, pentsamenduaren (ideia matematikoak) eta hizkuntza matematikoaren (zeinuen sistema) arteko erlazio dialektikoak sakonago aztertu behar dira. Baliabide horiek egoera-problema batzuk ebazteko asmatu direnez, egoera horiek ere aztertu behar dira. Horrenbestez, IOSen barnean, interakzio didaktikoan jokoan jartzen diren zeinu matematikoen sistemak interpretatzeko berariazko ontologia eta semiotika garatu dira. Eztabaidagai horiek zentralak dira beste diziplina batzuetan, hala nola semiotikan, epistemologian eta psikologian. Hori horrela izanik ere, ez dago galdera horientzat erantzun bakar bat. Aldiz, erantzunak anitz dira, eta, sarritan, bateraezinak edo bateratzeko zailak. Hor daude, esate baterako, Peirce (1978), Saussure (1915) eta Wittgensteinek (1953) proposaturiko dilemak. Matematikaren ikaskuntzan semiotika-nozioak geroz eta

gehiago erabiltzen dira (Anderson, Sáenz-Ludlow, Zellweger eta Cifarelli, 2003; Radford, Schubring eta Seeger, 2008), eta *Educational Studies in Mathematics* aldizkariak monografikoa kaleratu du gai horren inguruan (Sáenz-Ludlow eta Presmeg, 2006). IOSen barnean, Matematikaren Didaktikaren arlotik erantzun nahi zaie galdera horiei. Horretarako, esanahi instituzional eta pertsonaletan sakondu da, eta osatu dira semiotika-funtzioaren nozioa eta hari loturiko ontologia matematikoa (Godino eta Recio, 1998).

Hirugarren etapan, Matematikaren Didaktikaren barnean dauden instrukzio matematikoaren inguruko eredu teorikoak landu dira (Godino, Contreras eta Font, 2006). Instrukzio matematikoaren barnean sei dimentsio ezaugarritzen dira. Dimentsio horietako bakoitza prozesu estokastiko gisa azal daiteke, egoerak eta ibilbideak aintzat hartuz: epistemologia (ezagutza instituzionalari dagokiona), irakaskuntza (irakaslearen funtzioa), ikaskuntza (ikaslearen funtzioa), bitartekoak (instrukziorako erabili diren baliabideei dagokiena), kognitiboa (esanahi pertsonalen genesisia) eta emozionala (matematikaren ikaskuntzaren aurrean ikasleek erakusten dituzten jarrerak, emozioak eta abar). Ezagutzaren eredu ontologiko eta semiotikoak zenbait irizpide proposatzen ditu ibilbide epistemologiko eta kognitiboen egoera posibleak identifikatzeko. Horrekin batera, «esanahien negoziatzea» nozio giltzarria da ibilbide didaktikoak kudeatzeko.

Hiru etapa horietan eraiki diren eraikuntza teorikoek osatzen dute eredu ontologiko-semiotikoa. Datozen ataletan, osagai horiek sintetizatzen dira. Eredu horretan, zenbait tresna teoriko aurkezten dira elkarrekin aztertzeko pentsamendu matematikoa, hura laguntzen duten ostentsiboen erabilera, egoerak eta horien garapenean eragiten duten faktoreak. Horrekin batera, matematikaren ezagutzaren eta instrukzioaren eredu bateratua lortu nahi da, irakaskuntzaren eta ikaskuntzaren ikerketaren hainbat ikuspuntu artikulatuz eta alderatuz, eta horretarako aproposak diren ezagutza matematikoaren alderdiak kontuan hartuz.

Datorren atalean IOSen nozio teorikoen sintesia aurkezten da. Abiapuntua objektu matematikoen ontologia baten formulazioa da. Formulazio horrek matematikaren hiru aspektu hartzen ditu kontuan: problemak ebazteko jarduera soziala, lengoaia sinbolikoa eta logikoki antolaturiko sistema kontzeptuala. Oinarritzko noziotzat hartuko da egoera problematikoa, eta, horretan oinarrituz definitzen dira ondoko kontzeptu teorikoak: praktika, objektua (pertsonala eta instituzionala) eta esanahia. Kontzeptu horiekin nabarmendu eta operatibo egin nahi dira, alde batetik, matematikaren izaera hirukoitza, eta, bestetik, ezagutza matematikoaren genesisi pertsonal eta instituzionala, eta elkarrekiko mendekotasuna.

4.1. PROBLEMA-TIPOLOGIEKIN LOTURIKO PRAKTIKA OPERATIBO ETA DISKURTSIBOEN SISTEMAK

Praktika matematiko bat zera da, jokaera edo adierazpen bat (ahozkoa, grafikoa edo bestelakoa), norbanako batek egin duena, problema matematiko bat ebazteko, lorturiko soluzioa besteei komunikatzeko, hura balioztatzeko edo beste testuinguru eta problema batzuetan orokortzeko (Godino eta Batanero, 1994: 334).

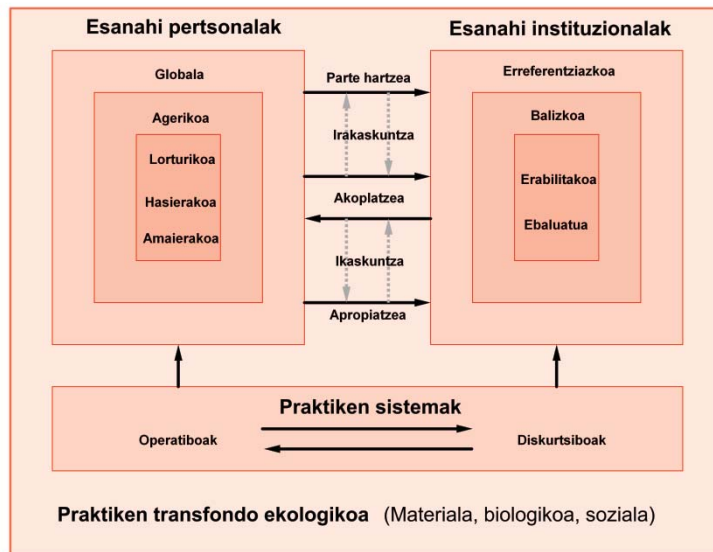
Praktika horiek pertsona batek eraman ditzake aurrera edo instituzio baten barnean parteka daitezke. Instituzio bat pertsona talde batek osatzen du, eta pertsona talde hori guztia egoera problematiko baten ebazpenean engaiaturik dago. Problematikaren gaineko engaiamendua elkarrekin banatzen dute, eta, horretarako, zenbait praktika sozial gauzatzen dituzte. Praktika sozial horiek ezaugarri berariazkoak dituzte (arauak eta funtzionamendua), eta, oro har, eskura dauden tresnek baldintzatzen dute praktika horren garapena.

Matematikaren ikaskuntzan, problema jakin baten gainean praktika partikular bat aztertzea baino, interesgarriagoa da praktiken sistemak aztertzea (operatiboak eta diskurtsiboak). Praktiken sistema horiek pertsonek erakusten dituzte egoera problematikoen mota baten gainean jardutean.

Honako galdera hau eginez gero: zer esan nahi du edo zer adierazten du «batez besteko aritmetikoa» esamoldeak? Beste erantzun hau proposa daiteke: «Datuen multzo batean ordezkari bat aurkitzea helburu duten egoera problematikoen tipologia bat ebazteko, pertsona batek aurrera daraman (esanahi pertsonala) edo instituzio baten barnean partekatzen den (esanahi instituzionala) praktiken sistema».

Esanahiaren formulazio horrekin, IOSen barnean onartu egiten dira epistemologia pragmatistaren premisak: «Akzioaren kategoriak hartzen du leku pribilegiatua, subjektu eta objektu kategorია kontrajarrien kaltetan; horiek bigarren plano batera pasatzen dira, estatutu eratorria dagokielako» (Faerna, 1996: 14).

Horrenbestez, esanahiak praktiken sistema gisa ulertu behar dira, erlatibitate sozioepistemikoa eta kognitiboa kontuan hartuz, eta esanahiek analisi didaktikoan erabili nahi dira. 12. irudian oinarritzko tipologien sailkapen bat agertzen da (Godino, 2003: 141).



12. irudia. Esanahi instituzional eta pertsonalen tipologiak.

Esanahi instituzionalei dagokienez, ondoko hauek hartzen dira kontuan:

- *Erabilitakoa*. Ikaskuntza-prozesu jakin batean, irakasleak funtzionamenduan ezarri dituen praktikak dira.
- *Ebaluatua*. Irakasleak ikaskuntzen ebaluaziorako erabiltzen duen praktiken azpisistema da.
- *Balizkoa*. Ikaskuntza-prozesuaren planifikazioan sartu diren praktiken sistemak.
- *Erreferentziazkoa*. Balizko esanahia osatzeko erabiltzen den erreferentziazko praktiken sistema. Ikaskuntza-instituzio jakin batean, erreferentziazko esanahi hori objektu matematikoaren esanahi holistikoaren zati bat da. Esanahi globala zehazteko, beharrezkoak dira objektuaren jatorria eta garapena zehazteko azterketa historikoa eta epistemologikoa. Kontuan hartuko dira, orobat, objektua jokoan jartzen direneko testuinguruen aniztasuna.

Esanahi pertsonalei dagokienez, honako hauek hartzen dira kontuan:

- *Globala*. Objektu matematiko bati buruz ari garela, subjektu batek erakuts ditzakeen praktiken sistema guztiak.
- *Agerikoa*. Proposaturiko ebaluazio-azterketetan begien bistan agertu diren praktika efektiboak dira. Ikuspuntu instituzionaletik zuzenak edo okerrak direnak hartzen dira kontuan.

- *Lorturikoa*. Ezarrita dauden arau instituzionalekin bat datozen praktikak dira. Ikasketa-prozesu batean esanahi pertsonalen aldaketa bat gertatzen da. Esanahi-aldaketa horiek aztertzerakoan, kontuan hartu behar dira ikasleek dituzten aurretiazko esanahiak, hots, alde aurreko esanahiak, eta amaieran lortuko dituztenak.

12. irudiaren erdialdean aurkeztu dira ikaskuntzaren eta irakaskuntzaren arteko erlazio dialektikoak. Erlazio horien arabera, gutxika gertatzen dira esanahi pertsonal eta instituzionalen arteko giltzadurak. Horrekin batera, ikasleak parte hartzen du esanahi instituzionalari eusten dion praktiken komunitatean. Irakaskuntzak kontuan hartzen du hori, eta, ikaskuntza gertatuko da, azken batean, ikasleak bere egiten dituenean esanahi instituzional horiek.

4.2. OBJEKTU MATEMATIKOAK

IOSen barnean, epistemologia pragmatistaren premisak onartzen dira eta objektuak praktika matematikoen eratorriak dira. Zehazki, kontuan hartzen da objektu matematikoak praktiken sistemetan sortzen direla. Sortze-prozesu hori fenomeno konplexua da, eta, hura azaltzeko, kontuan hartu behar dira, gutxienez, bi maila ezberdin, jardura matematikoan sortzen diren objektuen artean.

Lehenengo mailan daude testu matematiko batean ikus daitezkeen entitateak (problema, definizioak, proposizioak eta abar). Bigarren mailan sailkatzen dira lehenengo mailako objektuen gainean dauden ikuskerak, hitz egiteko manierak, eragiteko formak eta abar. Bigarren mailako objektuak dualtasunean agertzen dira, bikoteka: objektu pertsonalak edo instituzionalak, ostentsiboak edo ez-ostentsiboak, unitarioak edo sistemikoak, eta abar.

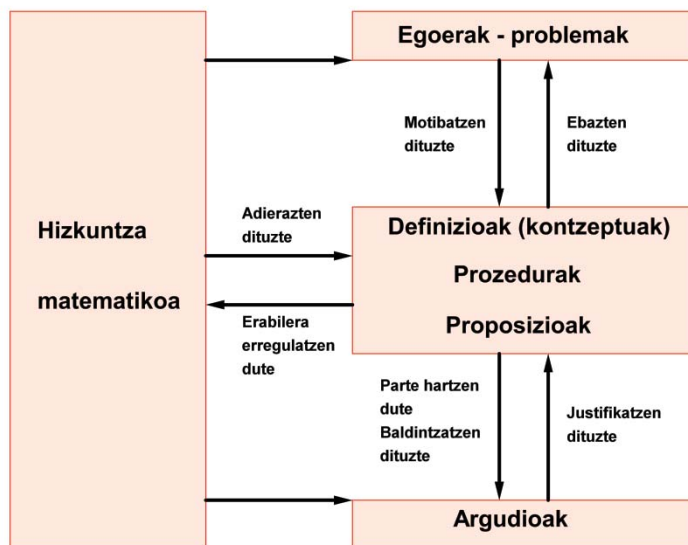
4.2.1. Lehen maila

Praktika matematiko bat aurrera eramateko eta lorturiko emaitzak onargarriak direla interpretatzeko, funtzionamenduan jarri behar dira hainbat ezagutza. Demagun, esate baterako, egoera-problema jakin bat ebatzi nahi dela, eta kontuan hartu nahi dira hura ebazteko praktikan beharrezkoak izango diren ezagutzak eta horien ebaluazioa (adibidez, bi ezezaguneko eta bi ekuazioko sistema bat planteatu eta ebaztea). Praktika horretan erabili dira ahozko hizkuntza eta idazkera sinbolikoa.

Hizkera horiek guztiek zenbait kontzeptu, proposizio eta prozeduraren alderdi ostentsiboa osatzen dute. Hizkera horiekin osatzen dira argudioak. Argudio horiekin erabakitzen da praktika partzialak onargarri eta gogobetegarri diren. Horrela, praktika partzial horiekin osatzen den praktika orokorra baloratzen da.

Ondorioz, subjektu batek praktika matematiko bat egiten duenean eta hura ebaluatzen duenean, osagai-pilaketa bat jartzen da martxan, horiek dira: egoera-

problemak, hizkuntza, kontzeptuak, proposizioak, prozedurak eta argudioak. 13. irudiak erakusten du osagai horien konfigurazioa (Font eta Godino, 2006: 69).



13. irudia. Objektu primarioen konfigurazioa.

Objektu matematiko primarioen ondoko tipologia proposatzen da:

- *Elementu linguistikoak*. Terminoak, espresioak, notazioak, grafikoak; hainbat erregistrotan ager daitezke, ahoz, idatziz, imintziaz.
- *Egoera-problema*. Matematikaz haraindiko aplikazioak, zereginak, ariketak.
- *Kontzeptu-definizioak*. Definizioen edo deskribapenen bidez sartu dira, zuzena, puntua, zenbakia, neurria, funtzioa.
- *Proposizioak*. Kontzeptuen gaineko enuntziatuak.
- *Prozedurak*. Algoritmoak, eragiketak, kalkulerako teknikak.
- *Argudioak*. Proposizioak eta prozedurak balioztatzeko edo azaltzeko behar diren enuntziatuak. Deduktiboak edo induktiboak izan daitezke.

Era berean, objektu horiek entitate konplexuagoetan antolatzen dira. Sistema horiek kontzeptualak dira eta teoriak osatzen dituzte. Tradizioz, bi oinarritzko entitate daude: kontzeptuak eta prozedurak. Bada, aurreko sei entitate primario horiek hedatu eta osatu egiten dute antolaketa tradizional hori, jarduera matematikoan parte hartzen duten eta haren barnean sortzen diren objektuak deskribatzeko ez direlako aski.

Egoera-problema jakararen abiapuntua edo izateko arrazoia dira. Hizkuntzak ordezkatzan ditu gainerako entitateak eta akziorako tresna da. Prozedurek eta proposizioek kontzeptuak haien artean lotzen dituzte eta argudioek justifikatu egiten dituzte lotura horiek.

Entitate bat primarioa dela esatea ez da baieztapen absolutua, aldiz, erlatiboa da. Entitate horiek erabiliko den hizkuntzaren jokoekiko funtzionalak eta erlatiboak dira (marko instituzionala eta erabilera-testuingurua).

Badute, orobat, izaera errekurtsiboa. Izan ere, objektu bakoitza gainerako entitateez osaturik egon daiteke, egin nahi den analisiaren sakontasunaren arabera. Esate baterako, argudio batek jokoan jar ditzake kontzeptuak, proposizioak eta prozedurak.

«Praktiken sistema» nozioa erabilgarri suerta daiteke, baita zenbait analisi makrodidaktiko egiteko ere. Esate baterako, marko instituzional ezberdinetan ezagutza matematikoak hartzen duen forma partikularra konparatzeko balio du. Ezagutza matematikoen testuinguruak edota hizkuntzaren erabilera bera konparatzeko balio du.

Jarduera matematikoaren analisi finago bat egin nahi izanez gero, derrigorrez sartu behar dira alde aurretik azaldu diren sei entitate primarioak: egoera-problema, hizkuntza, definizioak, proposizioak, prozedurak eta argudioak.

Kasuetako bakoitzean, objektu horiek elkarren artean erlazionaturik daude eta konfigurazioak osatzen dituzte. Konfigurazio horiek zera dira, objektuen artean sortzen diren sareak, praktiken sistemetan agertzen diren erlazioak objektu horien artean.

Konfigurazio horiek sozio-epistemologikoak izan daitezke (objektu instituzionalen sareak) edo kognitiboak (objektu pertsonalen sareak).

4.2.2. Bigarren maila

Hizkuntzaren jokia nozio garrantzitsua da (Wittgenstein, 1953). Instituzio nozioarekin batera, testuinguruari loturiko elementu horrek objektu matematikoen esanahiak erlatibizatze balio du. Izaera absolutua kendu eta izaera funtzionala ezartzen die.

Hizkuntzaren jokoa arabera, praktika matematikoan parte hartzen duten objektu matematikoak ikuspuntu edo dimentsio dualen arabera sailka daitezke (Godino, 2002):

- *Pertsonala/instituzionala*. Praktiken sistemak instituzio baten barnean partekatzen dira. Praktika horietan sortzen diren objektuak instituzionalak dira. Aldiz, sistema horiek pertsona bati badagozkio, orduan objektuak pertsonalak dira (Godino eta Batanero, 1994: 338). Ulermen matematikoak

alderdi pertsonala eta instituzionala hartu behar ditu kontuan. Bi alderdi horien artean erlazio dialektiko konplexuak eratzen dira. Matematikaren hezkuntzari begira, erlazio hori aztertzea funtsezkoa da. Ulermen pertsonala pentsamenduaren ondorio da, subjektu indibidual baten akzioa problema klase baten aurrean. Aldiz, ulermen instituzionala eztabaidaren ondorio da, praktiken komunitatea osatzen duen gizatalde baten baitan ezartzen diren hitzarmenen eta erregulazioen ondorio.

- *Ostentsiboa/ez-ostentsiboa*. Objektu ostentsibo bat publikoa da, eta, ondorioz, norbanako batek beste norbanako bati erakuts diezaioke. Objektu instituzional eta pertsonalek izaera ez-ostentsiboa dute. Ezin dira berez atzeman. Hala ere, objektu horiek guztiak praktika publikoetan erabiltzen dira, eta, horretarako, elkartu egiten zaie ostentsibo bat (notazioa, sinboloa, grafikoa eta abar). Objektu ostentsiboen eta ez-ostentsiboen arteko sailkapen hori hizkuntzaren jokoaren arabera da. Izan ere, objektu ostentsibo bat buruan erabil daiteke, subjektu batek imajina dezake edo diskurtso matematiko batean ager daiteke inplizituki. Esate baterako, biderketaren sinboloa ez da esplizituki erabiltzen notazio aljebraikoan.
- *Adierazpena/edukia*. Jarduera matematikoa eta objektu matematikoen eraikuntza eta erabilera ezaugarritzeko, erlazioan oinarritzen direla esan dugu. Objektu bakoitza ez da entitate isolatu bat, aldiz, objektuak erlazioan daude elkarren artean. Erlazio horiek semiotika-funtzioen arabera ezartzen dira. Aurrekari baten (adierazpena, esanahia) eta atzekari baten (edukia, esanahia) arteko erlazioa da. Subjektu batek ezartzen ditu (pertsona edo instituzioa) irizpide edo korrespondentzia kode baten arabera.
- *Estentsiboa/intentsiboa*. Edo, beste modu batean emanda, *adibidea* eta *klasea*. Hizkuntzaren jokoan parte hartzen duen objektu bat aldi berean da partikularra (esate baterako, $y = 2x + 1$ funtzioa) eta klase orokorrago baten ordezkaria (esate baterako, $y = mx + n$ funtzioen familia). Estentsiboaren eta intentsiboaren arteko dualtasuna jarduera matematikoaren oinarritzko ezaugarriak azaltzeko erabiltzen da, hori da, elementu orokorren erabilera (Contreras eta beste, 2005). Dualtasun horren arabera, dialektika zentra daiteke partikularraren eta orokorren artean. Jakintza matematikoaren eraikuntzan eta aplikazioan, aspektu giltzarria da hori. «Orokortzea ezinbestekoa da; izan ere, prozesu horretan ezberdintzen dira, alde batetik, sorkuntza matematikoa, eta, bestetik, portaera mekanizagarria edo algoritmo-izaera» (Otte, 2003: 187).
- *Unitarioa/sistemikoa*. Zenbait egoeratan, objektu matematikoak entitate unitarioak dira. Aldez aurretik ezagutzen dira eta izaera propioa dute. Beste egoera batzuetan, sistema bat osatzen dute eta sistema hori deskonposatu egin behar da hura sakonean aztertzeko. Lehen Hezkuntzako azken etapetan, batuketa eta kenketa aztertzeko orduan, zenbakikuntza-sistema

hamartarra (hamarrekoak, ehunekoak eta abar) ezagutza ezaguna da, eta, ondorioz, sistema hamartarrak entitate unitario bat osatzen du (elementala). Lehen Hezkuntzako lehen ikasmailan, zenbakikuntza-sistema osatzen duten elementu horiek berak sistema gisa hartu behar dira kontuan, hura ikasteko orduan.

Alderdi horiek guztiak bikoteka agertzen dira. Dialektikoki eta dualki osagarriak dira. Objektu primarioen gainean aplika daitezkeen atribututzat hartzen dira. 14. irudian adierazi dira nozio teoriko horiek guztiak.



14. irudia. Objektuen eta prozesuen konfigurazioak.

IOSen arabera, jarduera matematikoak hartzen du leku zentrala. Jarduera matematiko hori praktika operatibo eta diskurtsiboen eredu baten arabera ezaugarritzen da. Praktika horietatik sortzen dira objektu matematiko primarioak. Aldi berean, objektu primario horiek elkarren artean erlazionaturik daude konfigurazioak osatuz. Azkenik, praktika matematikoan parte hartzen duten objektuak eta praktika horietatik sortzen direnak, hizkuntzaren jokoaren arabera antola daitezke. Hau da, objektu primarioak bost alderdi edo dimentsio dualen arabera antola daitezke, eta horrek objektu sekundarioen tipologia ezartzera garamatza: pertsonala/instituzionala, unitarioa/sistemikoa, intentsiboa/estentsiboa, adierazpena/edukia eta ostentsiboa/ez-ostentsiboa.

4.2.3. Prozesuak

Alde batetik dualtasunak, eta, bestetik, objektu primarioen konfigurazioak, horiek guztiak azter daitezke prozesu baten gisa. Horrek 14. irudian laburturiko prozesuetara garamatza.

Prozesu matematikoen ondorioz agertzen dira konfigurazioko objektuak (problema, definizioak, proposizioak, prozedurak eta argudioak). Prozesu horiek dira komunikazioa, problema aztergai gisa aurkeztea, definizioa, enuntziatuak osatzea, prozeduren elaborazioa (algoritmo-izaera ematea, errutina bihurtzea) eta argudiatzea.

Bestalde, dualtasunek ondoko prozesu kognitibo eta epistemologikoei ematen diete bidea: instituzionalizatzea/pertsonalizatzea; orokortzea/zehaztea; analisisa edo deskonposatzea/sintesia edo gauza bihurtzea; materialtzea edo konkretzioa/idealizazioa edo abstrakzioa; adierazpena edo espresioa/esanahia.

Zehaztea eta orokortzea, prozesu gisa, idealizazio- eta deskonposizio-prozesuen arabera azal daitezke. Horretarako, kontuan hartu behar dira estentsibo/intentsibo, ostentsibo/ez-ostentsibo eta unitario/sistemiko alderdi dualak (Font eta Contreras, 2008). Aldi berean, sintesia eta deskonposatzea azal daitezke, baita idealizazio- eta deskonposizio-prozesuen arabera ere.

Zedarritzapen hori garrantzitsua da, prozesu horietako bakoitzaren analisisa zehazki egiteko aukera ematen duelako. Prozesu horiek guztiak modu konbinatuan agertzen dira jarduera matematikoan, eta, horien bidez, «objektu matematiko»aren izaera argi daiteke. Izan ere, entitate hori abstraktua edo ideala da, normalean.

IOSen ez da «prozesu» terminoaren definizio bat ematen, prozesu mota ugari dagoelako. Prozesu bat izan daiteke praktiken sekuentzia bat, kognitiboa izan daiteke, metakognitiboa, instrukzio-prozesu bat, aldaketa-prozesu bat, gizarte-prozesu bat eta abar.

Prozesu horiek guztiak elkarren aldean oso ezberdinak dira. Izatez, prozesu horietako askoren artean, ezaugarri komun bakarra «denbora» faktorea da. «Sekuentzia» izaera ere izan dezakete komunean, non osagaietako bakoitzak eragina duen hurrengoaren determinazioan.

Ondorioz, jarduera matematikoaren ikuspegitik garrantzitsuak gerta daitezkeen prozesuen zerrenda egin da (14. irudian agertzen dira prozesu horiek). Nahita, ez dira sartu irudi horretan inplikaturako prozesu guztiak, besteak beste, prozesu horien artean garrantzitsuenak direnak (esate baterako, problemen ebazpenerako prozesua edo eredu bat sortzeko prozesua), prozesu barik, hiper edo mega prozesuak direlako, non prozesu elementalek parte hartzen duten: adierazpena, argudiatzea, idealizazioa, orokortzea eta abar.

Aukeraketa horretatik kanpo daude, halaber, praktikak aurrera eramateko beharrezkoak diren prozesu metakognitiboak.

4.3. ULERMENA ETA EZAGUTZA

Oinarrian, «ulermena» ikusteko bi manera daude. Alde batetik, prozesu mental gisa ikus genezake. Bestetik, gaitasun bat izan daiteke (Font, 2001). Bi ikuspuntu horiek epistemologiaren bi ikuspuntu ezberdini dagozkie. Gainera, ikuspuntu horiek dibergenteak dira, edo, are gehiago, elkarren aurkakoak.

Matematikaren Didaktikaren ikuspuntu kognitiboetan, funtsean, ulermena prozesu mental gisa ikusten da. Hala ere, IOSen arabera posizioak pragmatistak direnez, ulermena ez da prozesu mental gisa ikusten, aldiz, funtsean, gaitasun baten gisa hartzen da. Hau da, subjektu batek objektu matematiko jakin bat ulertu duela esaten da, baldin eta zenbait praktiketan trebetasunez erabiltzeko gai bada.

Horrekin batera, IOSen arabera, ulermena semiotika-funtzioen arabera ere azter daiteke (Godino, 2003). Hori horrela da, semiotika-funtzioek rol nabarmena jokatzen dutelako praktika matematikoetan agertzen diren entitateen arteko erlazioetan, baita entitate multzoen artean ere (eta hizkuntzaren joko jakin baten barruan).

Hau da, har dezagun subjektu bat, izan norbanako edo instituzio. Subjektu horren objektu baten gaineko ulermena semiotika-funtzioen arabera azal daiteke. Baldintza jakin batzuen arabera, subjektuak objektua jokoan ezartzen du, espresio edo eduki gisa. Semiotika-funtzio bakoitza subjektu-hartzaile batek interpretatzen du eta horrek ezagutza osatzen du.

Ezagutzari buruz hitz egiten denean, semiotika-funtzio baten (edo zenbait semiotika-funtzioen) edukiei buruz hitz egin behar da. Ereduaren barnean hainbat entitatek har dezakete parte, eta, entitate horien artean ezar daitezkeen semiotika-funtzioen aniztasunak lotura zuzena du agertuko den ezagutzen multzoarekin.

4.4. PROBLEMA, PRAKTIKA, PROZESU ETA OBJEKTU DIDAKTIKOAK

Deskribatu den eredu kognitibo teorikoa oro har beste jakintza-arlo batzuei aplikatu dakieke. Zehazki, jakintza didaktikoei aplikatu dakieke. Kasu horretan, problemek izaera ezberdina izango dute.

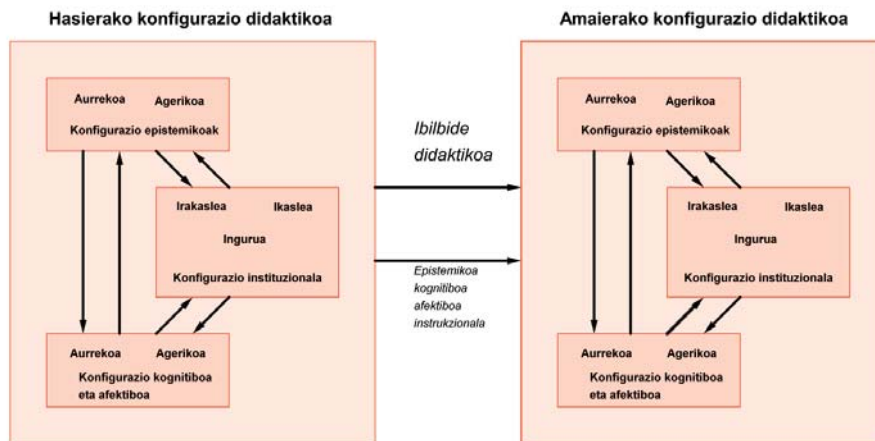
- Zein eduki irakatsi testuinguru eta inguruabar bakoitzean?
- Nola banatu denbora irakatsi beharreko edukien osagai eta alderdi bakoitzaren artean?
- Zein ikaskuntza- eta irakaskuntza-eredu inplementatu inguruabar bakoitzean?
- Nola planifikatu, kontrolatu eta ebaluatu ikaskuntza-irakaskuntza prozesuetako bakoitza?
- Zein faktorek baldintzatzen dute ikaskuntza?

Kasu horretan, jokoan ezarriko diren praktika didaktikoak, prozesu didaktikoen sekuentzia, eta sistema didaktiko horietatik agertuko diren objektuak, ez dira izango problema matematikoen ebazpenean agertuko diren berdinak.

Konfigurazio didaktikoen teoriaren barnean (Godino, Contreras eta Font, 2006) eduki matematiko bakoitzaren irakaskuntza-ikaskuntzaren eredu bat eraikitzen da. Eredu horretan, eduki bakoitzaren irakaskuntza dimentsio anitzeko prozesu estokastiko bat da. Prozesu horrek sei azpiprosesu ditu: epistemologikoa, irakaskuntzari dagokiona, ikaskuntzari dagokiona, inguruari dagokiona, kognitiboa eta emozionala. Azpiprosesu horietako bakoitzak bere ibilbide eta egoera potentzialak ditu.

Analisi didaktikorako unitate primarioa ondoko konfigurazio didaktikoak osatzen du: objektu edo eduki matematiko jakin baten inguruan eta baliabide material jakin batzuk erabiliz, irakaslearen eta ikaslearen arteko interakzioen multzoak.

Antolatutako errealitatetzat hartzen da, ibilbide didaktikoen beste konfigurazio batzuen gaineko interakzioari irekia dagoen sistema. Eduki edo gai matematiko baten instrukzio-prozesua denbora mugatu baten arabera ematen da, konfigurazio didaktikoen sekuentzia baten arabera (15. irudia)



15. irudia. Interakzio didaktikoak.

Konfigurazio didaktiko batek elkarturik dakar konfigurazio epistemologiko bat. Hau da, zeregin bat, zeregin hori ebazteko beharrezkoak diren prozedurak, hizkuntza, kontzeptuak, proposizioak eta argudioak. Konfigurazioko elementuak irakaslearen esku egon daitezke, ikaslearen esku, edo bien artean bana ditzakete.

Konfigurazio epistemologiko bakoitzari instrukziorako konfigurazio bat dagokio. Instrukziorako konfigurazio horretan objektuen sare bat dago, hau da,

problema edo zeregin matematiko jakin horren arabera sare bat, irakaskuntzarako, ikaskuntzarako eta ingurua antolatzeko beharrezkoak diren objektuez osatutako sarea.

Prozesuan zehar ikaskuntzak eraikiko dira. Ikaskuntza horiek deskribatzeko konfigurazio kognitiboak erabiltzen dira. Izan ere, konfigurazio epistemologiko batean jokoan jarriko dira zenbait praktika pertsonal, eta, praktika pertsonal horietan parte hartuko duten eta agertuko diren objektuen sareak konfigurazio kognitibo horietan antolatzen dira.

4.5. DIMENTSIO NORMATIBOA

Matematikaren Didaktikaren barnean, normen gaia aztergai izan da. Bereziki, interakzio sinbolikoa aztertu duten autoreak daude (Blumer, 1969), eta horiek ezarri dituzte ondoko nozioak: interakzio-patroiak, norma sozialak eta soziomatematikak (Cobb eta Bauersfeld, 1995; Yackel eta Cobb, 1996).

Brousseauk kontratu didaktikoaren nozioa garatu du eta nozio hori Egoera didaktikoen teoriako giltzarrietako bat bihurtu da (Brousseau, 1998).

Bi kasu horietan, kontuan hartzen dira arauak, ohiturak eta, oro har, inplizituak diren konbentzioak. Norma horiek guztiek erregulatu egiten dute matematikako eskolaren funtzionamendua. Matematikako eskola gizarte txiki baten gisa ikusten da, eta, gutxi-asko, norma horiek baldintzatu egiten dituzte ikasleek eraikitzen dituzten ezagutzak. Hurbiltze hauetan, irakaslearen eta ikaslearen arteko interakzioak aztertu dira, gai matematiko jakin bat lantzen den bitartean.

Bi kontratu horiek (interakzio-kontratua eta kontratu didaktikoa) sistema normatibo konplexu baten ikuspuntu partzialak dira. Sistema normatibo horiek lagundu eta baldintzatu egiten dituzte (aldi berean) irakaskuntza, oro har, eta matematikaren ikaskuntza, bereziki (Godino, Font, Wilhelmi eta Castro, 2009). 16. irudiak laburbiltzen ditu IOSen barnean identifikatu diren hainbat norma.

Dimentsio normatiboko alorrak identifikatzerakoan (epistemologikoa, kognitiboa, afektiboa, interakziozkoa, inguruaren arabera edo ekologikoa), honako urrats hauek egin daitezke:

- Irakaskuntza- eta ikaskuntza-baldintzatzen dituzten arauen multzoak eta horien tipologia identifikatu ondoren, irakasleen eta ikasleen arteko interakzioak balora daitezke.
- Sistema didaktikoen funtzionamendua eta kontrola hobetzen lagunduko duten aldaketa normatiboak proposa daitezke. Horrela, esanahi pertsonalen eboluzioan eragin daiteke, esanahi pertsonal horiek helburu diren esanahi instituzionaletara hurbil daitezen.



16. irudia. Dimentsio normatiboa.

4.6. EGOKITASUN DIDAKTIKORAKO IRIZPIDEAK

Aurreko nozio teorikoak osatzera datoz ondoko hauek. Instrukzio-prozesu baten egokitasun didaktikoa ondoko sei osagai hauen artikulazio koherente eta sistemikoa da (Godino, Contreras eta Font, 2006; Godino, Bencomo, Font eta Wilhelmi, 2006; Ramos eta Font, 2008):

- *Egokitasun epistemologikoa*. Erreferentziazko esanahi bat abiapuntu hartuta, inplementatu diren edo helburu diren esanahi instituzionalen adierazgarritasun-mailari dagokio. Esate baterako, Lehen Hezkuntzan, batuketa irakats daiteke errutina huts gisa eta algoritmoaren aplikazio soil gisa (egokitasun apala). Aldiz, kontuan har daiteke batuketa-egoeren aniztasuna eta algoritmoa justifika daiteke (egokitasun handia).
- *Egokitasun kognitiboa*. Helburu diren edo inplementatu nahi diren esanahiek ikaslearen garapen hurbileko gunean egon behar dute (Vygotski, 1934). Horrekin lotuta, lortu diren esanahi pertsonalek eta helburu diren edo inplementatu nahi diren esanahiek elkarrengandik hurbil egon behar dute. Adibidez, ondoko hau egokitasun kognitibo handiko irakaskuntza-ikaskuntza prozesu baten adibidea da: hiru zifra edo zifra gehiagoko

eragiketa aritmetikoen ikaskuntzan, irakasleak hasierako ebaluazio bat egiten du jakiteko ikasle gehienek zifra bateko eta bi zifrako eragiketak menderatzen ote dituzten; horrela ez balitz, irakaskuntza-prozesua zenbaki horiekin abiatuko luke.

- *Interakzio-egokitasuna*. Irakaskuntza-ikaskuntza prozesu batek interakzio-egokitasun handiagoa izan dezan, konfigurazio eta ibilbide didaktikoen ondoko hauek lortu behar dituzte: alde batetik, alde aurretik identifikatu daitezkeen balizko semiotika-konfliktoak identifikatzeko gai izan behar dute; eta, bestetik, instrukzio-prozesuan gerta daitezkeen konfliktoak konpontzeko gaitasuna izan behar dute. Esate baterako, akzio-, formulazio- eta balioztatze-faseen arabera antolatu den ikaskuntza-prozesu batek (Brousseau, 1998) interakzio-egokitasun handia du. Aldiz, prozesu magistral batek interakzio-egokitasun apala du, ez dituelako kontuan hartzen ikasleen zailtasunak.
- *Inguruarekiko egokitasuna*. Irakaskuntza-ikaskuntza prozesu bat aurrera eramateko, kontuan hartu behar dira eskura dauden baliabide materialak eta denborazko baldintzapenak. Esate baterako, geometria laua lantzeko orduan, irakasleak eta ikasleak eskura baldin badituzte baliabide informatikoak, hala nola GeoGebra edo bestelako software dinamikoren bat, orduan, ikaskuntza-prozesu horrek inguruarekiko egokitasun handia izan beharko du. Aldiz, ohiko arbela, arkatza eta papera ardatz dituen prozesu tradizional batek inguruarekiko egokitasun apalagoa du. Denborazko baldintzapenen inguruan ari bagara, eskola magistral bat inguruarekiko egokitasun handia lukeen irakaskuntza-ikaskuntza prozesu bat litzateke. Izan ere, irakasleak helburu den esanahia landuko luke bere osotasunean eta ikasleekin inolako interakziorik izan gabe.
- *Egokitasun emozionala*. Ikasleak ikaskuntza-prozesuarekin erakusten duen inplikazio-maila neurtzen du, hala nola interesa, motibazioa eta abar. Egokitasun emozionalean bi jatorriren araberrako faktoreek eragiten dute: alde batetik, instituzioari loturiko faktoreak daude; bestetik, ikasleari eta haren eskola-historiari loturikoak daude. Esate baterako, ikasleen interesekoak diren egoera-problemek egokitasun emozional handia dute.
- *Egokitasun ekologikoa*. Ikaskuntza-prozesuak bat etorri behar du ikastetxearen eskola-proiektuarekin, gizartearekin eta inguruaren baldintzapenekin.

Adibide hauetatik ondoriozta daitezkeen modura, dimentsio baten egokitasunak ez du ziurtatzen irakaskuntza-ikaskuntza prozesu osoaren egokitasuna. Egokitasun horiek elkarrekin integratu behar dira, haien arteko elkarrekintzak kontuan hartuz. Horrenbestez, egokitasuna irizpide sistemikoa da eta hezkuntza-proiektu orokorraren barruan ulertu behar da (Godino, Wilhelmi eta Bencomo, 2005).

Deskribatu diren tresna horiek ikaskuntza-prozesu jakin bati aplika dakizkioke, hala nola eskolako lansaio inplementatu bati, unitate didaktiko baten planifikazio eta garapenari, edota, goragoko maila batean, ikasturte baten garapenari edo curriculumaren proposamen bati.

Tresna horiek erabilgarriak izan daitezke, halaber, ikaskuntza-prozesu baten aspektu partzialak aztertzeko. Esate baterako, baliabide didaktiko bat, eskolarako eskuliburu bat, zeregin jakin baten aurrean ikasleek eman duten erantzuna, edota intzidentzia didaktiko bakanak aztertzeko.

5. Egoera didaktikoen teoria

Jarduera matematikoa Haur eta Lehen Hezkuntzan antolatzeko orduan, Egoera didaktikoen teoriak (Brousseau, 1998) tresna erabilgarri ugari eskaintzen ditu. Alde batetik, tresna teoriko horien bidez, ikaskuntza-irakaskuntza jarduera zehatzak diseina daitezke, hau da, ikasleek matematika jarduera eraikitzailea izan dezaten, jarduerak zein ezaugarri izan behar dituzten azaltzen du teoriak. Bestetik, behin jarduera martxan jarri ostean, ikasgelako aktibitatea kudeatzeko zenbait klabe ematen ditu, eta, horrekin batera, ikasleen produkzio matematikoak eta ikasgelako fenomenologia aztertzeko tresnak ere eskaintzen ditu.

Ikasgela barneko kontratu didaktikoa hainbat motatakoa izan daiteke, eta, Bigarren Hezkuntzatik aitzina, normalean, alde batera uzten dira teoriak proposatzen dituen *egoera didaktikoak*.

Matematika lantzeko orduan, lehenengo eta behin, irakasleak egokitu egin behar du landu nahi duen jakintza matematiko hori dagokion etapari. *Transposizio didaktikoaren* bidez azaltzen da prozesu hori.

Ezagutza matematikoa eraikitzean, ikasleek alde aurreko ezagutzak erabiltzen dituzte. Egoera berri baten aurrean, ezagutza matematikoa moldatu eta egokitu egin beharko da, eta, prozesu horretan, ikasleek *oztopoak* aurkituko dituzte.

Horrez gainera, irakaslearen helburuetako bat izango da ikasleak zuzenean erabil ditzala ezagutza matematikoak zereginaren ebazpenean. Hori horrela ez denean, ikasgelan ohikoak izango diren zenbait *fenomeno didaktiko* saihestu behar ditu irakasleak. Horietako batzuk dira, besteak beste, Topaze, Jourdain, irristatze metakognitiboa, analogiaren erabilera okerra eta egoera didaktikoen iraungitzea. *Gardentasunaren ilusioa* ere fenomeno horien arteko bat da.

Egoera didaktikoen teoriak diseinurako elementuak ematen ditu. Esate baterako, egoerak antolatu behar dira *akzio-*, *formulazio-* eta *balioztatze-faseen* arabera. Horrekin batera, behin ezagutzak eraiki ondoren, jakintza horien instituzionalizatzea ere ezinbestekoa izango da. Esanahi pertsonal eta instituzional horien arteko lotura nabarmena da Egoera didaktikoen teorian, baina IOSeK ere aspektu horiek berak integratzen ditu bere proposamenean. Loturak aurki daitezke, horrenbestez, bi teoria horien artean.

5.1. TRANSPOSIZIO DIDAKTIKOA

Ikaskuntza eta irakaskuntzarako proiektu oro dialektikoki eraikitzen da, identifikatzen eta aukeratzen direlarik, jakintza-arlo zabal baten barnean, zeintzuk diren irakatsi beharreko ezagutza eta edukiak. Irakasteko hautatu diren ezagutzetako batzuk esplizituki zehazten dira curriculum eta programetan. Beste ezagutza batzuk inplizituki transmititzen dira, tradizioz, eboluzioz edo programak modu jakin batean interpretatzen direlako.

Zenbaitetan, baina, irakasle edo instituzio batek irakaskuntzarako behar jakin batzuk ditu, eta, behar horiei erantzuteko, sorkuntza didaktiko propioak egiten ditu. Sorkuntza didaktiko horiek uste dena baino gehiagotan gertatzen dira.

Horrela, ezagutza bat irakasteko aproposa dela erabaki bada, zenbait transformazio edo adaptazio egingo zaizkio, ezagutza hori ezarri nahi den etapara egokitzeko. Azken batez, etapa jakin horretan landuko diren gainerako objektu matematikoezko koherentzia bilatuko zaio. Jakintza-arlo jakin bateko objektu bat irakaskuntza-objektu bilakatzeko prozesu horri esaten zaio, hain zuzen ere, *transposizio didaktikoa* (Chevallard, 2005). Zentzu horretan, jakintza-arloko eduki jakin horren bertsio didaktikoa da irakaskuntzako objektua.

Transposizio didaktikoa Matematikaren Didaktikaren oinarritzko dimentsioa da. Eskema horren barnean, lehenengo eta behin, objektu espontaneo bat bihurtzen da jakintza-arloko objektu zehatz eta definitu bat. Ondoren, jakintza-arloko objektua bihurtzen da irakaskuntzarako objektu, eta, azkenik, irakaskuntzarako objektua bihurtzen da irakatsitako objektu. Pauso horietako bakoitzean, objektuak transformazioak jasan ditu. Objektu inplizitu izatetik objektu esplizitu izatera pasatzen da. Objektu praktikoa izatetik (jakintza-arloko profesionalek egunerokoan erabiltzen baitute) objektu teorikoa izatera pasatzen da (irakaskuntza-sistemaren barnean aztertzeako objektua).

Transposizio didaktikoaren adibide gisa aurkez daiteke «bi punturen arteko distantzia». Matematiketan, bi punturen arteko distantzia «betidanik» erabili da, nozio espontaneo bat da. 1906an, Fréchetek definitu zuen distantzia kontzeptu matematiko gisa, topologiaren barnean (jakintza-arloko objektu bihurtu zen). Bigarren Hezkuntzako curriculumetan (Frantziakoa, kasu; laugarren ikasmailan agertu zen), 1970eko hamarkadan agertu zen distantzia nozioa irakaskuntzarako objektu gisa. Aldiz, gainerako ikasmailatan ere lantzen da distantzia nozioa; hori bai, irakasleak moldatu egiten du, ikasmailaren arabera, nozio horren esanahia (irakatsitako objektua).

5.2. FENOMENO DIDAKTIKOAK

Transposizio didaktikoaren kontrola zenbait fenomenori loturik agertzen da. Fenomeno horiek erabiltzen dira sistema didaktikoko parte-hartzaileen artean gertatzen diren elkarreraginak azaltzeko.

Irakaskuntza-egoerek badute antzerkitik zerbait eta Egoera didaktikoen teoriak antzerki-obra klasikoetako pertsonaien izenak erabiltzen ditu fenomeno horietako batzuk deskribatzeko. Izan ere, irakasleak transmititzen dituen ezagutzak ikaslearentzat ezezagunak diren arren, irakasleak antzeztu egiten du ikaslearen aurrean eta sinetsarazten dio ikasgelan jakintza berria sortu dela, nahiz eta ezagutza matematiko horiek mendeak dituzten.

Horrenbestez, irakasleari dagokio ikaslearen aurkikuntza matematikoak gidatzea, baina prozesu horrek frustrazioak ekar ditzake. Ikaskuntza-jarduera batek huts egin dezake, esate baterako, irakasleak aldeztu aurretik espero zituen aurkikuntzak gertatzen ez direlako. Kasu horretan, irakasleak sisteman esku hartuko du, eta esku hartze horiek egiteko orduan, kontuan hartu behar ditu zenbait efektu.

Jarraian deskribatuko dira, hurrenez hurren, Topaze eta Jourdain efektuak, irristatze metakognitiboa, analogiaren gehiegizko erabilera eta egoera didaktikoen iraungitzea.

5.2.1. Topaze efektua

Efektu honen arabera, irakasleak bere gain hartzen du ikaskuntza-egoera jakin batean ikasleari dagokion ardura, ikaskuntza-egoeraren helburua bera desagerraraziz.

Ikasleak ez badio irakaslearen galderari zuzen erantzuten, irakasleak geroz eta galdera errazagoak egingo dizkio, ongi erantzuten duen arte. Irakasleak nahiko luke ahalik eta ikasle gehienek zuzen erantzutea, galderaren esanahi optimoa galdu gabe. Baina prozesu horretan gerta daiteke, aukeraturiko galderak geroz eta errazagoak izanik, helburu zen ezagutza erabat desagertzea, hots, *irakaskuntza-egoeraren kolapsoa* gertatzea.

Efektu hori Marcel Pagnolen *Topaze* antzezlanean deskribatzen da, Topaze bera ikasle bati testu baten diktaketa egiten ari zaionean. Alde batetik, Topazek ezin du onartu ortografia-akats larririk ikaslearen produkzioan, baina, bestalde, ezin dio zuzenean ikasleari esan diktatzen ari zaion hitzaren idazketa zuzena. Horrenbestez, joskera moldatzen du, behin eta berriz, ikaslea ohar dadin hitzetako bat gaizki idatzi duela. Pasartearen amaieran, Topazek amore emango du eta ikasleari letraka esango dio idatzi beharreko hitza zein den, irakaskuntza-egoera kolapsatuz.

12. orrialdean azaldu da zeintzuk diren GeoGebra erabiltzeko momentuak ikasgelako matematika-jardueran. Erabilera horietako bat da propietate matematikoen esplorazioa, eredu dinamikoaren laguntzaz. Normalean, eredu dinamiko hori aldeztu aurretik diseinatu da.

Esate baterako, Bigarren Hezkuntzan, irakasleak eska diezaioke ikasleari azter ditzala zenbait irudi lauren perimetroak eta azalerak. Zeregin horrek kalkulu aritmetikoak eta manipulazio aljebraikoak eskatzen ditu. Ikaslearen balizko porrotaren aurrean, irakasleak erabaki dezake berak diseinatuko duela eredu

dinamiko bat ikasleek irudi lauak eraiki ditzaten eta tartean dauden kalkuluetan lagungarri izan dadin, eta fase gisa txerta dezake zereginaren ebazpenean. Hartara, irakasleak hartuko du zereginaren ardura. Ikasleak irudia eraikiko du ordenagailuaren pantailan eta softwareak egingo ditu behar diren kalkulu guztiak. Horrela, ikasleak ongi erantzungo die irakaslearen galderei eta arrakasta izango du zereginaren ebazpenean, ikaskuntzaren helburu ziren adierazpen aljebraikoak manipulatu gabe. Laburrean, irakasleak bere gain hartu du ikasleari zegokion ardura, eta ikaskuntza-egoera kolapsatu egin da.

Fenomeno hori ager daiteke, orobat, irudiak softwarearen bidez eraikitzea ikaslearen ardura denean. Softwarearen bidez irudi geometrikoak eraikitzeke, programaren tresna ugari erabili behar dira, baita irudi horiek eraikitzeke ezagutza geometrikoak ere. Forma geometrikoa eraikitzeke ikaslearen balizko ezintasun baten aurrean, irakasleak erabaki dezake ikaslea pausoz pauso gidatzea forma lortzeko prozeduran. Horrela, ikasleak ez du erabakirik hartzen, ez du egoeraren gainean eragiten eta ez du lanabesa modu autonomoan erabiltzen.

5.2.2. Jourdain efektua

Efektu honen arabera, irakasleak saihestu egiten du ikaslearekin eztabaidatzea, gaizki erantzungo duen beldurrez. Irakasleak ez du ikaslea desanimatu nahi, eta, horrenbestez, jakintza zientifikoaren zertzeladaren bat aurkitu nahiko du haren diskurtsoan, nahiz eta eztabaidagai den jakintzaren aztarnarik ez egon.

Efektu honek *gardentasunaren ilusio*arekin lotura du. Fenomeno horren arabera, irakasleak adibidea eredu gisa interpretatzen du, hau da, klase baten ordezkari gisa, ikasleak adibidea besterik ikusten ez duen bitartean. Matematikaren eraikuntza eta komunikazioaz ari garela, fenomeno horrek erakusten du badagoela distantzia bat ezagutza zientifikoaren eta eskola-instituzioan kristalizaturiko eta etiketaturiko ezagutzaren artean. Horregatik, ezinbestekoa da irakasleek eta ikasleek «hizkuntza bera erabiltzea» eta horretarako bitartekoak aurkitzea.

Beste plano batean, efektu bera errepika daiteke matematikari profesional eta didaktikaren arloko ikertzaileen eta matematikako irakasleen kolektiboaren artean.

Le Bourgeois Gentilhomme antzezlan komikoan, filosofiako irakaslea Jourdainekin eztabaidan ari da, eta hizkera zientifikoa baliatuz, eguneroko jarduera sinpleak sakratutzat jotzen ditu etengabe.

Demagun Lehen Hezkuntzako irakasle batek GeoGebrako tresnak diseinatzen dituela. Tresna horiek koloretako ikonoak dituzte eta hainbat koloretako forma lauak sortzeko aukera ematen dute. Jarraian, ikasleei aurkeztuko die eredu dinamiko bat non koloretako forma geometrikoak aukeratu beharko dituzten eta ordenagailuko pantailan irudikatu. Animatzeko asmoz, irakasleak esan diezaieke ikasleei irudi geometrikoak koloreen kode baten arabera sailkatzen ari direla. Aldiz, gerta daiteke haurrak soilik marrazten egotea.

Funtsezko gaizki-ulertu hori Bigarren Hezkuntzan ere gerta daiteke, baldin eta irakasleak ongi bereizten ez baditu propietate matematiko baten *ilustrazio*-eta *frogapen-momentuak* (12. orrialdea). Propietate matematiko bat frogatzeko asmoz, irakasleak ikasleari aurkez diezaioke propietatea ilustratzen duen eraikuntza bat. Ikasleek prozedura induktiboak hobesten dituztenez, ikasleari aski zaio kontraadibiderik ezin aurkitzea propietatea egiazkotzat jotzeko. Ilustrazio-ereduaren manipulazioarekin konformatuz gero, eta ondoren ez badu baieztapena frogatzeko argudiorik bilatzen, mezu okerra jaso dezake irakaslearen partez: saguarekin ilustrazio-ereduaren gainean manipulazioak egitea nahikoa da jakintza eraikitzeke.

5.2.3. *Irristatze metakognitiboa*

Ikaskuntza-jarduera batek huts egiten duenean, gerta daiteke irakaslea eta irakaskuntza-instituzioa bera ere hutsegite hori eragin duten ezagutza matematikoak berriz formulatzen saiatzea.

Prozesu horretan, oinarritzko kontzeptu berriak edo teoria berriak sar daitezke, sinbologia edo prozedura berriak erabil daitezke, edo irakaskuntzarako erabili den tresna alda daiteke. Efektu horrek hainbat iterazio izan ditzake, eta azkenerako, gerta daiteke irakaskuntza-metodo berriak ordezkatzeko jatorrizko helburu matematikoa. Hau da, irakaskuntzarako erabili asmo zen tresna, helburu bihurtu daiteke.

Efektu horren adibide klasikoa multzoen teoriaren sarrera da, 1930eko hamarkadan. Hamarkada horretan, multzoen teoria atera egin zen bere jatorrizko testuinguru zientifikotik eta irakaskuntzan erabiltzen hasi. Pentsatzen zen teoria berri horrek ikasleei euren produkzio matematikoen gaineko kontrol handiagoa emango ziela. Aldiz, multzoen teoriak berak bere lengoia eta sinbologia berezkoak ditu, eta, azkenerako, irakaskuntzaren helburu bihurtu zen multzoen teoria bera, beste ezagutza matematiko batzuei lekua kenduz.

Hain zuzen ere, software dinamikoaren erabilerarekin fenomeno hori errepikatzeke arriskua dago. Ikastetxean, GeoGebra lanabesaren erabilera-instrukzioak ordezkatu egin ditzake ikaskuntza-helburuak lortzeko behar diren jarduera matematikoak. Jarduera matematiko jakin batean, gerta daiteke behin eta berriz errepikatzea lanabes informatikoaren instrukzio-fasea, zeregina ebazteko behar diren ezagutza matematikoen eztabaidan sartu gabe.

5.2.4. *Analogiaren erabilera okerra*

Analogiaren erabilera naturala da erlazio didaktikoetan. Ikasle batek eskatu zaizkion helburuak bete ez baditu, bigarren aukera bat eman behar zaio gai beraren inguruan. Nahiz eta irakasleak problema berria kamuflatu, ikasleak badaki ebatzitako aurreko problemarekin harremana izango duela. Horrela, ikasleak indizioak bilatuko ditu problemaren enuntziatuan, pistak eta antzekotasunak, jakin nahi duelako aurretik ebatzitako zein problemaren antzekoa den problema berri hori. Ikasleak ez

du zertan arduratu ea lortu duen ebazpenak problemaren enuntziatua asetzen duen, ez da probleman murgildu. Aldiz, irakasleak beragandik espero duena identifikatu du.

Berez, analogia itzelezko heuristika da hura erabiltzen duen pertsonak haren gaineko ardura hartzen duenean. Aldiz, irakaskuntzaren testuinguruan erabiliz gero, Topaze efektuak sortzeko erraztasuna du.

5.2.5. Egoera didaktikoen iraungitzea

Irakaslea horretan tematuta ere, zaila da irakaskuntza-jarduera bat bere horretan errepikatzea. Jarduera jakin baten erreplika zehatzak ez du emaitza bera ematen ikasle talde berri batekin (are gehiago, normalean emaitza okerragoak lortzen dira). Horren eraginez, erreprodukzio batetik bestera, irakasleak problemaren enuntziatua edo aurkezpena aldatu nahi izaten ditu, ariketa edo adibide berriak sartzen ditu, edota ikastaldiaren egitura bera eraldatzen du. Efektu hau areagotu egiten da erreprodukzioen kopuruak gora egin ahala.

Zenbait egoera motelago iraungitzen dira. Esate baterako, azalpen batekin hasi eta jarraian aplikatzeko ariketak dituzten saioak, edota instrukzio batekin hasi eta jarraian irakaslearen parte-hartzerik gabeko ikaskuntza-egoera bat duten saioak, motelago iraungitzen dira.

Beste plano batean, efektu hori irakaskuntza-instituzioen barruan ere atzeman daiteke, hala nola irakaskuntza-legeetan eta curriculum ofizialetan. Lege berri bat ezartzen denean, irakaskuntza-sistemak denbora handia behar izaten du bere egitura eta jokabideak aldatzeko. Aldiz, egindako esfortzu horren aldean, lortzen den feedbacka beti izaten da nahiko txikia.

Argitaletxeen ohiko testuliburueta ere heda daiteke fenomeno hau. Izan ere, curriculumak aldatzen diren arren, argitaletxeen proposamenak ez dira abiadura berean aldatzen. Maiz, azalaren diseinua eta barneko irudiak soilik aldatzen dituzte.

5.3. EGOERA ADIDAKTIKOAK

Irakaskuntza eredu sistemikoaren arabera modeliza daiteke. Eredu hori lau erpineko tetraedro baten bidez irudika daiteke, non erpinetako bakoitzak ikaskuntza-irakaskuntza prozesuko polo bat adierazten duen: irakaslea, ikaslea, jakintza (matematika) eta egoera. Sistema tentsioan dago eta poloetako baten gainean eragindako aldaketa txiki batek sistema guztian du eragina.

Problema bat proposatzen dionean, irakasleak ikaslearengan desoreka bat eragiten du. Ondoren, ikasleak problemaren ebazpena aurkitzen duenean, sistema oreka berri batera helduko da.

Ezinbestekoa da ikasleak problema onartzea, hau da, ikasleari problema interesgarri gertatu behar zaio eta helburua ulertu behar du. Horrela, problemaren gainean erabakiak hartu beharko ditu, hitz egin eta pentsamenduaren egitura aitzinatu. Ikasleak problema onartzen duen momentutik erantzuna ematen duen momentura, irakasleak bere horretan utzi behar du ikaslea, ez dizkio eman behar problema ebazteko mobilizatu behar dituen ezagutzak. Ikasleak susma dezake aurkeztu zaion egoera zerbait ikasteko helburuarekin aurkeztu zaiola, baina egoeraren barne-egiturak justifikatu behar du jarduera bera, inolako arrazoibide didaktikorik gabe. Ikaslea ohartu bada egoera ebazteko gaitasuna duela, eta horrekin batera, konturatu bada problemaren ebazpenari esker irakaskuntzatik kanpoko egoera jakin batean eta inolako gidaritzarik gabe erabakiak har ditzakeela, orduan egoera hori ikaslearentzat *adidaktikoa* da.

Irakasleak ikasleari proposatzen dio egoera didaktikoa eta ikasleari dagokio egoera horren ezaugarriak ezagutzera ematea. Horretarako, inguruarekin elkarerraginean dihardu. Jokoa bada, hura deskribatu beharko du eta irabazteko estrategia aurkitu beharko du.

Hasiera batean, kodifikatu gabeko informazioa trukatu du, hizkuntzarik erabili gabe. Hau da, jokoaren gaineko erabakiak hartuko ditu akzioaren bitartez. Ondoren, transmititutako informazioa hizkuntza jakin batean kodifikatzen da, eskema klasikoaren arabera: «mezua – kodea – kanala – igorlea – hartzailea». Azkenik, iritziak trukutzen dira, teoria baten barnean biltzen diren enuntziatuen bilduma bat.

Hiru ataletan sailkatzen dira egoera adidaktikoak: *akzioa*, *komunikazioa* eta *balioztatzea*.

5.3.1. Akzioa

Subjektu batek ingurua bere interesen arabera moldatzen duenean, inguruarekin elkarerraginean dagoela esaten da. Aldi berean, subjektuak inguruaren atzeraelikadura jasotzen du, horrek erregulartasunez erreakzionatzen duenean. Erregulartasun horiei esker, subjektuak aurrea har diezaieke etorkizunean hartu beharreko erabakiei.

Ikaskuntza bat gertatuko da subjektuak aldatzen edo moldatzen duenean erabakiak hartzeko eskema bat, eta landuagoa edo efizienteagoa den beste batekin ordezkatzeko duenean. Joko baten testuinguruan, ikaskuntza gertatuko da subjektuak estrategia bat bazter uzten duenean, eta, horren lekuan, joko maizago irabazteko aukera emango dion beste bat aukeratzen badu. Jokalariak atzeraelikadura lortzen du, jokoaren arauarekin eta gainerako jokalariekin elkarri eragiten diotenean.

Euskarri gisa ordenagailua erabiltzen denean, erabilitako softwareak atzeraelikadura eragin dezake erabiltzailearengan. Geometriako software dinamikoak badu gaitasun hori. Manipulagarria den eredu dinamiko jakin bat enuntziatu geometriko baten baldintzapenen arabera diseinatu da. Ikasleak eredu

manipulatzen duenean, ereduak berak eragiten duen atzeraelikadurak enuntziatuaren inguruko informazioa ematen dio ikasleari.

5.3.2. *Formulazioa*

Ezagutza inplizitu baten formulazioak aldatu egiten ditu hura erabiltzeko, ikasteko eta ulertzeko aukerak. Azken batez, subjektu batek ezagutza berrerabili behar du eta gai izan behar du hizkuntzaren sistemaren barnean hura ezagutzeko, identifikatzeko, deskonposatzeko eta berrosatzeko.

Inguru batean lan egiten duenez, informazio bat trukatzeko subjektu batek formulazio bat egiten duenean, kontuan hartu behar ditu gainerako subjektuak ere. Komunikatu nahi den edukia efektiboa izan dadin, bi solaskidek parte hartu behar dute inguruaren kontrolean. Horrela, eskolaren testuinguruan, egoerak diseinatu behar dira halako moduz non ez den arrakastarik lortzen ahal, harik eta haurren arteko komunikazioa efektiboa den arte. Tartean dauden ezagutzen formulaziotik informazioa lortzea izango da irabazteko modu bakarra. Sintaxia eta hiztegia, hau da, ezagutzen eztabaidarako beharrezkoak diren hizkuntza-baliabideak, enuntziatuarekin batera emango dira.

Oro har, softwareek ez dute formulaziorako aukerarik ematen. Baldintzapen teknologikoak tarteko, erabiltzailearen testu edo irudikapen baten aurrean erabaki jakin bat hartuko duten software gutxi daude. Horregatik, geometriako software dinamikoa erabiltzeko orduan, garrantzi bizikoa da informazioa euskarri batetik bestera transkribatzea. Eskolan, oro har, hiru euskarri dira nagusi: material fisikoak, arkatza eta papera, eta softwarea. Formulatzeko aldera, ikasleari eskatu behar zaio informazioa euskarri batetik bestera alda dezala.

5.3.3. *Balioztatzea*

Akzio- eta formulazio-faseetan aurkeztu diren eskemak balioztatu behar dira. Hau da, eztabaidatu behar dira mobilizatu diren ezagutzen egokitzapena, egokitasuna eta komenigarritasuna. Zuzenketa-prozesu horietan, igorlea ez da informatzaile hutsa, aldiz, hartzailari proposatzen dio, eta horrek aurkariaren rola jokatzeko du.

Zalantzak daudenean, proposatzen duenak eta aurkariak elkarri aurka egiten diote. Hori horrela izanik ere, biek ala biek lotzen diote ezagutza ezarritako jakintza-esparruari. Bakoitzak posizio bat hartzen du emandako enuntziatuaren aurrean, eta, desadostasunik egonez gero, frogapen bat eskatuko dute edo aplikazio bat exijituko dute, betiere inguruan gertatuko den akzio baten bidez.

Irakasleak ez luke izan behar balioztatze-fasearen arduraduna. Aldiz, balioztatzea egoeraren beraren barnean gertatzea komeni da. Hau da, jarduerak berak eman behar dizkie haurrei zenbait elementu, haurrek balora dezaten emandako proposamenaren egia.

Softwareak formulatzeko zailtasunak ematen dituen era berean, software gutxi dira balioztatzea egiteko aukera ematen dutenak. Teknologikoki, GeoGebrak ematen ditu zenbait aukera. Esate baterako, kontrol-laukiak erabil daitezke ikaslearen erabaki bat balioztatzeko balio duen informazioa aurkezteko edo ezkutatzeko. Badira ere eragile logikoak, baldintza jakin bat betetzen denean akzio jakin bat eragiten dutenak. Eragile horien bidez, jarduera balioztatzeko aukera emango duen informazioa ager edo ezkuta daiteke pantailan, hori bai, erabiltzailearen akzio bati loturik.

5.4. OZTOPO DIDAKTIKOAK

Bachelordek zientzia esperimentaletan erabili zuen kontzeptu hau (1938), nahiz eta, haren arabera, oztopo hauek matematiketan ez ziren gertatzen. Hala ere, Brousseauk aldatu egin du kontzeptua eta matematikaren hezkuntzarako egokia den definizioa proposatu du:

- Oztopo bat ezagutza bat da, eta ezagutza horrek aukera ematen du egoeren multzo bat era erregularrean tratatzeko.
- Ezagutza horrek emaitza zuzenak eta abantailak ematen ditu esparru jakin batean, baina faltsua da eta ez du egokitzapenik esparru berri edo zabalago batean.
- Esparru berri edo zabalago horretan, ezagutza berria ez da eraikitzen aurreko ezagutzaren gainean, baizik eta aurreko ezagutza horren aurka. Beste ikusmolde bat erabili behar da, beste metodo bat eta beste teknika batzuk. Ezagutza zaharraren eta berriaren artean ez dago erlazio logiko nabarmenik. Ezin zaio ezagutza zaharrari ospe eta izen ona kendu ezagutza berriaren bidez. Aldiz, ezagutza berria eta zaharra norgehiagoka ari dira esparru zaharrean.
- Ezagutza horiek ez dira eraikuntza pertsonal aldakorrak. Esparru zehatzetan ematen diren erantzun unibertsalak dira. Jakintzaren genesian agertzen dira, derrigorrean, bai genesi historikoan bai didaktikoan.

Oztopo bat errorearen bidez agertzen da. Subjektu batek egiten dituen errore horiek lotura handia dute elkarren artean. Ezagutzeko modu bat da, kontzepzio ezaugarritu bat, ez da zuzena baina barne-koherentzia handia du, esparru oso batean arrakasta izan zuen alde aurreko ezagutza bat da.

Kanpoko oztopoak ez dira fenomeno konplexuen eraginez agertzen, ez dira ere gizakiaren espirituaren ahultasun bat. Aldiz, ezagutzearen ekintzak berak eragiten ditu, behar funtzional baten gisakoa da. Aurreko ezagutza baten aurka ezagutzen dugu.

Horrela, oztopoak ez dira desagertzen ezagutza berri bat ikastean. Kontrara, oztopoak erresistentzia bat eragiten du, ezagutza berriari oztopoak ezartzen dizkio.

Ezagutza zaharrak ezagutza berriaren aplikazioa galarazten du, eta, desagertu dela dirudienean, berriz agertzen da, espero gabe, egoerak edo testuinguruak aukera ematen dion guztietan.

Oztopoen aurrean ezikusiarrena egitea ez da zilegi. Oztopoak ezin dira saihestu. Esplizituki errefusatu behar da, haren ukazioa ezagutza berriaren ikaskuntzan integratu behar da. Horretarako erabili behar dira, batez ere, kontraadibideak. Zentzu horretan, oztopoak ezagutzaren osagarri dira.

Aurretik esan den modura, oztopo epistemologikoen teoria Bachelard (1938) filosofoaren eskutik heldu den arren, Matematikaren Didaktikan Brousseauk sartu du oztopoaren nozioa:

Ikaskuntzaren teoria enpiristen eta konduktisten barnean bestela uste zen arren, errorea ez da soilik ezjakintasunaren, ziurgabetasunaren edo zoriaren efektu bat. Aldiz, aldeaz aurreko ezagutza baten efektua da. Ezagutza horrek interesa eta arrakasta izan zituen, baina, orain, faltsua da edo ez da behar bezala egokitu. Errore mota horiek ez dira ustekabekoak, eta aurreikus daitezke. Errore horien jatorriak oztopo bat eratzen du (Brousseau, 2000: 120).

Jatorriaren arabera, oztopo bat izan daiteke epistemologikoa, ontogenikoa edo didaktikoa.

- *Jatorri epistemologikoa duten oztopoak.* Ezagutza matematikoarekin zuzenki loturik daude. Ezagutza matematikoa horien aurka eraikitzen da, horien beharra du. Aurrera daramaten ikaskuntza-prozesuan, ikasleek ezinbestean topo egingo dute horiekin.
- *Jatorri ontogenikoa duten oztopoak.* Subjektuen garapen neurofisiologikoari loturik agertzen dira. Esate baterako, Haur Hezkuntzan, objektuen bildumekin gertatzen diren kontserbazio-fenomenoek jatorri ontogenikoa dute.
- *Jatorri didaktikoa duten oztopoak.* Irakasleak edo hezkuntza-sistemak ezagutza matematikoen gainean hartzen dituen erabakiek eragiten dituzte. Esate baterako, irakasleak irudi geometrikoen adierazpen ostentsiboak egiten dituenean, maiz, irudi estereotipatuak gehiegizko erabilera egiten du. Horrek nahasmena sortzen die ikasleei. Izan ere, gauza bat da irudi bat begi hutsez ikustea, eta beste gauza bat da eraikuntza geometriko baten gainean propietateak, proposizioak eta teorema ondorioztatzea.

Oro har, oztopoak ezagutza matematikoaren eraikuntza-prozesuan sartzen dira. Engainagarria da oztopoak saihestu nahi izatea, oztopoek eragiten dituzten erroreak saihestu nahi izatea. Kontrara, ikasleek aurka egin behar diete. Gaingitu egin behar dituzte eta eragiten dituzten baldintzapenez jabetu behar dira. Hori posible izan dadin, irakasleak hautatu egin behar ditu ikasleak desorekak eta atzeraelkadurak eragingo dizkieten egoerak.

6. Jardueren proposamena

Aurreko garapen teorikoak beharrezkoak dira bai jarduera matematikoaren diseinurako, baita analisirako ere. Datozen proposamen guztiak hirugarren, laugarren eta bosgarren kapituluetan aurkeztu diren eduki teoriko horien arabera diseinatu eta aztertu dira. Haur Hezkuntzatik hasi eta unibertsitatera arteko zazpi proposamen zerrendatu dira.

Lehenengo bi proposamenak Haur Hezkuntzari eta Lehen Hezkuntzari dagozkie. Alde batetik, 5 urteko haurrekin simetriak lantzeko jarduera-sekuentzia bat aurkeztuko da. Proposamen horrek saria irabazi zuen 2010ean, Salamancan ospatu zen GeoGebra egunean. Bestetik, Egoera didaktikoen teorian oinarrituriko proposamen bat aurkeztuko da, azalaren optimizazioa lantzeko 8 eta 9 urteko haurrekin, non GeoGebra integratzen den beste euskarri batzuekin batera. Proposamen teorikoarekin batera, hainbat ikastetxetan egin datu-bilketaren analisia ere aurkeztu da.

Hurrengo bi proposamenak Bigarren Hezkuntzari dagozkio. Derrigorrezko Bigarren Hezkuntzari begira, 13 urteko ikasleek proportzionaltasun geometrikoa lantzeko unitate didaktiko baten adibidea aurkeztuko da. Sekuentzia hori Iruñeko Salestarren ikastetxean erabili izan da azken urteetan. Bestalde, Lizeo edo Batxilergo mailako ikasleei zuzendurik (16-17 urte), funtzioen analisirako teorema klasikoaren inguruko GeoGebra eraikuntzak aurkeztuko dira.

Unibertsitate-mailako bi adibide ere sartu dira zerrendan. Alde batetik, Bigarren Hezkuntzako Masterreko ikasleekin egin den esperientzia bat aurkeztuko da. Bestetik, erakutsiko dira, baita ere, Ingeniaritza Industrialeko Graduan mekanismoak lantzeko erabiltzen diren beste zenbait eraikuntza.

Amaitzeko, azken adibide bat ere aurkeztuko da, non erakusten den software dinamikoa erabilgarri gerta daitekeela baita aisialdiari loturiko dibulgazio-azalpenak emateko ere. Konkretuki, planetek Eguzkiaren inguruan egiten duten mugimendua azaltzeko eraikuntza batzuk aurkeztuko dira.

6.1. HAUR HEZKUNTZA: IRUDI SIMETRIKOAK ETA EREDU DINAMIKOAK

Eskola txikiek elkarlanerako aukera handiak eskaintzen dituzte. Esate baterako, Larrainzarreko (Nafarroa) ikastetxean bat egiten dute Haur Hezkuntza (HH), Lehen Hezkuntza (LH) eta Derrigorrezko Bigarren Hezkuntzako (DBH) ikasleek,

eta etapa guztietako irakasleek espazioa partekatzen dute. Horrenbestez, ondoko proposamen hau diseinatu zuten HHko irakasleek, DBHko matematikako irakasleen laguntzarekin.

Jarduera hiru egunetan zehar gauzatu zen, eta ardatz bertikaleko simetriak landu zituzten, letren idazketa eta irakurketarekin batera. Proposamenak saria lortu zuen Salamancan egindako GeoGebra Egunean¹⁶, 2010ean. Bestalde, Nafarroako Matematikaren Irakaskuntzarako II. Jardunaldietako baliabideetan ere kontsulta daiteke¹⁷.

6.1.1. Aldez aurreko ezagutzak, erlazionaturiko oztopoak eta espero izandako portaerak

Jarduera honetan, haurrek forma lauak identifikatu behar dituzte, hala nola forma triangularrak, laukiak, zirkunferentzia, zirkulua eta forma simetrikoak. Horrekin batera, forma lauen konposaketa eta deskonposaketa lantzen dituzte, bai eta ardatz bertikaleko simetriak ere.

Globalizazio printzipioari jarraiki, jardueran landuko dira haurrak momentuan ikasten ari diren beste eduki batzuk, hala nola letrak (bereziki, ardatz bertikaleko barne-simetria duten letrak), idazkera eta irakurketa. Horrekin batera, ordenagailuen gelan lan egiteko oinarritzko arauak lantzen dira, baita saguaren erabilera ere.

Esperientzia honetako haurrek ezagutzen dute ordenagailuen gela, astean saio bat egiten dutelako bertan. Aldez aurretik, haurrek proiektu bat landu dute autoen etxeen logotipoetan poligonoak, zirkunferentzia eta bestelako oinarritzko forma lauak identifikatzeko.

Duten adinean, haurrek oztopo ontogenikoekin egingo dute topo, hau da, sagua manipulatzeko euren garapen fisikoarekin lotutako oztopoak aurkituko dituzte. Alde batetik, sagua handiegia da kasu batzuetan haurrak eskuan har dezan. Bestalde, gerta daiteke haurra gai ez izatea bi akziori arreta jartzeko, hau da, saguari egingo dio kasu, edo pantailari, baina ez biei aldi berean.

Haurrak saiatuko dira puzzleak osatzen, irakasleen jarraibideei kasu eginez.

6.1.2. Materiala

Jardueren sekuentzia honetan, software dinamikoa besterik ez da erabili. Saio bakoitzean, haurrek manipulatu egingo dituzte aldez aurretik diseinaturiko eraikuntza dinamikoak¹⁸.

16. GeoGebra egunen inguruko informazio osagarria, hemen: <http://diageogebra.info/>

17. Nafarroako Matematikaren Irakaskuntzarako II. Jardunaldietako baliabideak, hemen: <http://caps.educacion.navarra.es/matematika/jornadas2/>

18. <http://tube.geogebra.org/student/b414525#>

6.1.3. Egoeraren faseak

Jardueren sekuentzia honako modu honetara antolatu da:

1. *Aurkezpena*. KAIXO hitzaren letrak lantzen dira eta eraikuntzan agertzen diren irudiak izendatzen dira¹⁹.
2. *Deskonposaketa-puzzleak*. Triangeluaren eta karratuaren konposaketa eta deskonposaketa lantzen dira puzzleen bidez. Horrekin batera, poligono gisako etxe baten eraikuntza egin behar da²⁰.
3. *Saiakera librea*. GeoGebraren tresnen barra pertsonalizatu egin zen. Ezkutatu ziren kurtsorea ez beste tresna-barra guztiak eta ezarri ziren irakasleek propio diseinaturiko tresna berriak. Tresna horien bidez, haurrek koloretako puntuak, koloretako poligonoak eta zirkunferentziak eraiki ditzakete. Haurrek konposizio librean egiten dituzte pantailan, eta, ondoren, gustukoenak aukeratzen dituzte inprimatu eta pasabideetako hormetan eskegitzeko²¹.
4. *Ardatz bertikaleko simetriaren ilustrazioa*. Letrak, barneko simetria-ardatza duten formak eta ordena lantzeaz gain, saguaren erabilera eta ordenagailuen gelako arauak landuko dira. Simetria kontzeptuaren ilustrazio-momentua egiten da, eta erakusten dira barneko simetria-ardatz bertikala dituzten letrak. Horretarako, AMATXO hitza baliatzen da²².
5. *Puzzle simetrikoak*. Deskonposaketa-puzzleen antzera (2 fasea), haurrek simetria-ardatza duten puzzleak osatzen dituzte. Horretarako hiru eraikuntza baliatzen dituzte, 1) forma geometriko simetrikoak eredu baten arabera osatzeko²³, 2) marrazki simetrikoak eredu baten arabera osatzeko²⁴, eta 3) marrazki simetrikoak nahierara eraikitzeko ispilu-simetriak marrazten dituen eraikuntza libre baten arabera²⁵. Horrekin batera letrak ere lantzen dira, batez ere simetria-ardatz bertikala duten letrak.

6.1.4. Esperientziaren kontakizuna

Hiru irakaslek lagundu dituzte ikasleak ordenagailuen gelan. Gainera, lehenengo saioan, ikasleek bi taldetan egin dute lan, ikasleen kopuru txikiagoa izan dadin.

Oro har, deskonposaketa-puzzleetan, haurrek ongi egin dituzte piezak arrastatzeko diseinaturiko eraikuntzak. Hala ere, bereziki zailak egin zaizkie erpinak manipulatu egin beharreko eraikuntzak, inork gutxik amaitu baitzituen. Horrek zerikusia du haurren garapen fisikoarekin. 18. irudian ikus daitezke, alde batetik, haurren produkzioak, eta, bestetik, haurrak lanean.

19. <http://tube.geogebra.org/student/b414525#material/414517>

20. <http://tube.geogebra.org/student/b414525#material/414557>

21. <http://tube.geogebra.org/student/b414525#material/414569>

22. <http://tube.geogebra.org/student/b414525#material/414643>

23. <http://tube.geogebra.org/student/b414525#material/414627>

24. <http://tube.geogebra.org/student/b414525#material/414665>

25. <http://tube.geogebra.org/student/b414525#material/414659>



18. irudia. 5 urteko haurrak softwarearekin lanean.

6.1.5. Sintesia eta ondorioak

Haur Hezkuntzako ikaslea esker onekoa izaten da, seguru aski, irakaskuntza etapa guztiak elkarren artean alderatuz gero, esker onekoena. Haren eskutxoak zailtasunez hartzen du ordenagailuaren saga, sorpresa adierazten du pantailako triangeluak dantza egiten duenean eta lotsarik gabe eskatzen du irakaslearen laguntza. Gainera, haurrek elkarri laguntzen diote, bat-batean, espontaneoki. Hori guztia ikuskizun atsegina da, inondik inora.

Mugimendu dinamikoak haurrentzat erakargarri egiten du jarduera eta irakasleek balorazio positiboa egin dute. Haurrek aktiboki hartu dute parte eta galderak egin dituzte. Gainera, nahiz eta haurrek irakaslerenganako konfiantza afektiboa behar izaten duten, naturaltasunez onartu dute taldetik kanpokoa den irakasle baten presentzia (DBHko matematikako irakaslea) eta berdin eskatu diote hari laguntza. Horixe ikastetxe txikien abantaila izan daiteke.

Horrez gainera, haurrek GeoGebra softwarea ezagutu dute. Saiakuntza honek erakusten du GeoGebra irakaskuntza-etapa goiztiarretan ere arrakastaz erabil daitekeela. Gainera, aurrera begira, haur horiek softwarea ezagutuko dute eta lanabes gisa identifikatuko dute LHra igarotzen direnean.

Etaparen honetan, haurren garapen fisikoak erabat baldintzatzen du jardueraren garapena eta lanabesaren erabilera. Bereziki, egiaztatu da ordenagailuaren eta saguaren erabilerak oztopo ontogenikoak eragiten dituela.

Esker onak

Eskerrik beroenak esperientzia honen diseinatzaileei, euren materiala uzteagatik unibertsitate-mailako irakaskuntzan eta trebakuntza iraunkorrean erabiltzeko: Ainhoa Belaunzarán, Irantzu Echarri eta Gonzalo Elcano.

6.2. LEHEN HEZKUNTZA: LURSAIL BAT TXIKIRENTZAT

Atal honetan, LHko bigarren ziklorako (8-9 urte) jarduera bat aurkezten da. Adin horretan, zenbait irudi geometrikoren adierazpen aritmetiko eta aurrealgebraikoek gainditu egiten dituzte haurren aurreikusitako ezagutzak, eta, horregatik, eredu dinamikoaren laguntzaz identifikatu eta deskribatu nahi dira irudi lau horien propietateak.

Perimetro jakin bat emanik azalera optimizatzeko, Ribeirok (2013) paper laukidunaren gaineko egoera bat proposatzen du. Egoera horretan, haurrek irudi lauak eraiki behar dituzte paper laukidunaren gainean, eta, ondoren, eraiki diren irudi horien propietateak eztabaidatu behar dituzte. Jarduera horretan, haurren aurreikusitako ezagutza aritmetikoek eta lauki-sareak aktibitatea baldintzatzen dute, hau da, haurrak laukien familiaren barruko irudiak proposatzen ditu. Baldintzapen horiekin, haurrak karratua identifikatzen du azalera optimizatzen duen irudi gisa. Autoreak identifikatu egiten du haurren atalase aritmetiko hori, baina ez du inolako jarduera matematikorik aurreikusten hura gainditzeko.

Hain zuzen ere, jarduera honen asmoa pauso hori ematea da. Material fisikoa eta papera erabili ondoren, haurrak euren atalase aritmetikora heldu direnean, esplorazio fase bat proposatzen da jarduera matematikoa aitzinatzeko. Horrela, haurrak eskura izango ditu bere produkzio idatziak kontrolatzeko baliabide berriak. Izan ere, euskarri ezberdinetan lorturiko objektu matematikoen ikuspegi ezberdinak konparatuko ditu.

Egoera didaktiko hau *akzio-*, *formulazio-* eta *balioztatze-faseen* arabera diseinaturik dago. Helburua, berriz, LHn geometria eta neurria irakastea da. Zehazki, azalaren optimizazio-problema bat proposatzen da: Lursail bat Txikirentzat.

Kontraste esperimentalari esker egiaztatu da jarduera matematikoa aberastu egiten dela euskarri ezberdinen bat egitearekin, hala nola material manipulagarriak, papera eta arkatza, eta software dinamikoa. Izan ere, gaur egungo LHn, haurren ikaskuntzen eboluzioa nagusiki lortzen da material fisikoen eta paper eta arkatzaren bitartez, eta softwarearen erabilera, oro har, marjinala da sistema didaktikoan (Lasa eta Wilhelmi, 2013a). Problema geometrikoak ebazteko orduan, hiru momentutan erabil daiteke GeoGebra: propietate geometriko baten *esplorazioan*, *ilustrazioan* eta *frogapenean* (Lasa eta Wilhelmi, 2013b). Partikularki, GeoGebra *instrumentua* da bai frogapen matematikoak egiteko orduan, bai problemaren ebazpenean.

Zeregin matematiko bat aurkezterakoan, irizpideak behar dira ingurua eta inguru horretan erabiliko diren tresnak aukeratzeko. Izan ere, jarduera matematikoa beti garatu behar da inguruari aurre eginez (Brousseau, 2007). Tresna aukeratzeko orduan, berriz, instrumentazioaren teoriak giltzarritzat dute instrumentu-nozioa (Rabardel, 2002). Aktibitate matematikoak barnean biltzen ditu askotariko jarduera fisikoa, hitzezko eta gorputz bidezko komunikazioa, eta idatzizko adierazpen

ikonografikoak. Matematikako egoera didaktikoen teoriarekin (MEDT) batera, ikuspegi ontosemiotikoak (IOS) tresna teoriko eta metodologikoak eskaintzen ditu jarduera diseinatzeko eta haurren produkzioak analisatzeko. Bi marko teoriko horien artikulazioa oinarritzen duten hainbat lan aurki daitezke literaturan (Wilhelmi, Font, Godino, 2005; Godino, Font, Contreras, Wilhelmi, 2006; Drijvers, Godino, Font, Trouche, 2013; Godino *et al.*, 2013); zehazki, Godino, Rivas, Arteaga, Lasa eta Wilhelmi (argitaratzeko zorian) ingeniari-tza didaktikoaren esanahi zabal bat deskribatzen dute, eta ingeniari-tza didaktiko horrek aukera ematen du ikaskuntza-prozesuen diseinua eta kudeaketa egiteko, marko teoriko anitzetan.

Lehenengo eta behin, jardueraren diseinua justifikatzen duen marko teorikoa azalduko da. Segidan, alde zuriaren analisia azaltzen da. Horren ondoren, egoera deskribatzen da eta aurkezten dira fase esperimentaleko emaitzak. Azkenik, sintesia eta ondorioak aurkeztuko dira.

6.2.1. Marko teorikoa

Matematikako egoera didaktikoen teorian (Brousseau, 2007) hipotesi teoriko batek dio posible dela ezagutza matematiko jakin bati loturiko funtsezko egoera bat deskribatzea. Funtsezko egoera horrek oinarritzeko osagai didaktiko bat izango luke eta ikasleek ezagutza matematikoa lortuko lukete haren bitartez (Bloch, 1999). Egoera horiek *akzio*-, *formulazio*- eta *balioztatze-fase*etan egituratzen dira, eta, fase horiek bete ostean, ezagutzaren instituzionalizatzea etorriko litzateke.

Ezagutza funtzional batek aukera ematen du egoera-multzo jakin baten aurrean erantzunak emateko. Aldi berean, egoera-multzo berri bat aurkezterakoan, ezagutza funtzional horiek egokitu egiten dira egoera-sorta berriari erantzuna emateko. Ezagutza egonkor bat oztopoa dela esaten da, egoera-multzo zaharretik berrirako salto horretan sortu diren kontraesanen aurrean egokitu gabe irrimo jarraitzeko gaitasuna duenean. Horrela, *oztopo* batek errore espezifikoak eragiten ditu, lokalizagarriak, aztergarriak eta errepikariak. *Oztopoak* denbora luzean errepikatzen dira testuinguru anitzetan.

Oztopo bat gainditzeko, ezagutza berriarekin enfrentamendua eragin behar da, modu programatuan eta sistematikoki, oztopoa eragin duen ezagutza egokitu dadin edo baztertua izan dadin. Irakasleak bere parte-hartzeak zehaztasunez aurreikusi behar ditu, material anitzen erabilera eta erregistroen aldaketa bultzatuz.

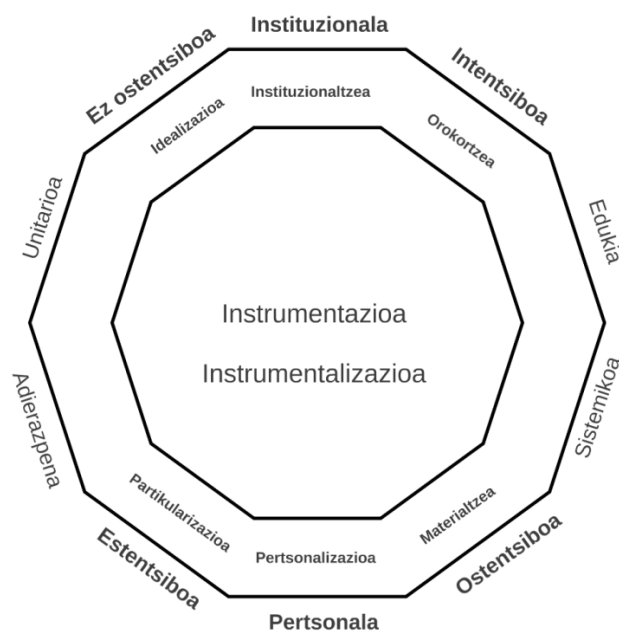
Tresna edo *artefaktu* bat objektu bat da, zeregin jakin bat gauzatzeko erabiltzen den objektua, normalean fisikoa da baina izan daiteke beste mota batekoa ere (Drijvers, Godino, Font eta Trouche, 2013). *Artefaktuari* gaineratzen baldin badizkiogu zeregin jakin hori gauzatzeko pertsona batek behar dituen trebeziak, artefaktua *instrumentu* bihurtzen da. Haurrek garatzen dutelarik zeregin mota jakin bat ebazteko modu egonkor bat, *akzio instrumentaleko eskema* bat garatu dutela esaten da (Trouche, 2000), eta eskema horrek oztopoak gainditzeko lagun dezake.

Genesi instrumentalaren teoriaren (GIT) ikuspegitik, euskarri fisikoa, papera eta arkatza eta geometriako software dinamikoak *instrumentuak* dira. Euskarri material bakoitzak objektu matematikoen esanahia baldintzatzen duenez, euskarri horien bat egiteak lagundu egiten du ezagutza matematikoen ulermena. Izan ere, erregistro semiotiko batetik bestera ezagutza aldatzeko gaitasunak ikaskuntza laguntzen du (Duval, 1995).

IOSen arabera, jarduera matematikoa gauzatu egiten da askotariko adierazpenak dituzten objektu matematikoen manipulazioan (D'Amore, Font eta Godino, 2007; Font, 2007). Gainera, objektu horiek testuinguru erreal bati loturik agertzen dira, eta zenbait dualtasunen arabera funtzionatzen dute:

- Estentsiboak (partikularrak) / intentsiboak (generikoak).
- Esanahi pertsonala (kognitiboa) / instituzionala (epistemologikoa).
- Agerpenezko ezaugarria (materiala) / ez-agerpenezkoa (ideala).
- Unitarioa / sistemakoa.
- Edukia / adierazpena.

Horregatik, eredu ontosemiotikoaren barnean, bai *instrumentazioa* bai *instrumentalizazioa* praktika operatibo eta diskurtsiboak dira, egoera-sorta edo familia batek motibatzen ditu eta behar dituzte berezko hizkuntza, definizioak, enuntziatuak eta argumentuak (19. irudia).



19. irudia. Instrumentua IOSen, praktika gisa.

Lan honetan, dimentsio dual horietarik hiru lantzen dira: pertsonala/instituzionala, agerpenezkoa/ez-agerpenezkoa, eta estentsiboa/intentsiboa.

Batetik, egoera didaktiko baten diseinuaren barnean, erreferentziazko esanahi bat instituzionalizatzeko nahia dago, eta, horretarako, erabiltzen dira *akzio-*, *formulazio-* eta *balioztatze-faseak*. Fase horietan, haurrek funtzionamenduan jartzen dituzte objektu matematikoaren gaineko euren esanahi pertsonalak zeregina ebazteko (pertsonala/instituzionala dualtasuna).

Bestetik, hainbat instrumenturen gainean (fisikoak, papera eta arkatza, geometriako software dinamikoa) gertatzen den objektu matematikoen materialtzea ikasleek eskuratzea nahi den objektu matematiko idealei kontrajarrita agertzen da (agerpenezko/ez-agerpenezko dualtasuna).

Azkenik, eredu dinamiko baten erabilerak aukera ematen du jarduera objektu matematikoen propietate orokorren gainean zentratzeko, eta, aldi berean, bitartekoak errazten ditu kasu partikular ugari aztertzeko (estentsiboa/intentsiboa dualtasuna).

Erabili den euskarri materialaren instrumentazioa ez da, inondik inora, eskolako jarduera matematikoa determinatzen duen praktika operatibo bakarra. Izan ere, jarduera horietan zenbakia eta adierazpen aljebraikoak ere erabili behar dira, dagokion *mailan*. Jarduera paperaren eta arkatzaren erabileran zentratzen bada, haurren maisutasun-atalase aritmetikoari *0 aljebra-maila* dagokio (Godino, Castro, Aké eta Wilhelmi, 2012; Godino, Aké, Gozato eta Wilhelmi, 2014), hau da, ez dago arrazoibide aljebraikoaren inolako presentziarik eta argudioetan soilik erabiltzen dira objektu estentsiboak. Berez, baldintza horietan, zenbaketan oinarrituriko teknikak erabiltzen dira eta oinarritzko eragiketak aplikatzen dira zenbakizko adierazpenen gainean.

3 aljebra-mailan, aljebraren erabilera finkatzen da. Maila horretan, objektu intentsiboak eratzen dira eta, objektu horiekin, eragiketak egiten dira transformazio sinbolikoen bitartez. Baina badira, tartean, beste bi maila non aljebraren erabilera hastapenekoa den (*1 maila*, intentsiboak erabiltzen dira zeregin estrukturaletan) edo bitartekoa (*2 maila*, aldagaiak agertzen dira baina ez da haiekin eragiketarik egiten). Lan honetan erakusten da nola den posible maila horietan ikasleek aurrera egitea adin goiztiarretan.

Laburbilduz, MEDTek eta GITek, IOSekin batera, aukera ematen dute jardueraren proposamena diseinatzeko eta esperimendazioan lorturiko emaitzak aztertzeko. Horren aurretik, ezagutza matematikoen eta baldintzapen kognitiboen inguruko *a priori* azterketa egingo da.

6.2.2. Aldez aurreko analisia

Nafarroako curriculumak LHko bigarren zikloan kokatzen ditu irudi lauen deskribapena eta identifikazioa (poligonoak eta zirkunferentzia) eta luzeren kalkulua.

Gainera, nahiz eta azalaren zenbatespena eta kalkulua LHko hirugarren zikloko edukiak izan, haurrek badute gainazalaren ezagutza intuitiboa bigarren zikloan ere.

Perimetroa ezagututa azalera bat optimizatzeko problema, beraz, koherentea da curriculumeko edukiekin, eta, gainera, zenbakitik neurrirako pausoa ahalbidetzen du; berez, pauso hori optimizazio-problema baten bidez egin daiteke LHko lehen zikloaren amaieran (7-8 urte) (Lacasta, Malaspina, Pascual eta Wilhelmi, 2009, 2010).

Optimizazio-jarduera LHko bigarren ziklora moldatzean, kontuan hartzen da zeintzuk diren jarduera hori aurrera eramateko haurrek behar dituzten alde aurreko ezagutza finkatuak. Ezagutza finkatuak izango dira, esate baterako, zenbaketa eta gainazalaren gainezartzea, konparaketa eta ordenatzea.

Gainera, jarduera horren bidez, azalera lantzen da kalkulu formala sartu aurretik, eta, horrela, baldintzak ezartzen dira perimetro- eta azalera-nozioei esanahia emateko, eta bi nozio horiek elkarrengandik ezberdintzeko.

Marko teorikoan azaldu den modura, *0 algebra-maila* paper eta arkatx euskarriaren ezaugarrietako bat da, LHko etapan. Izan ere, zenbaketa, zenbaki arruntan gainean egindako eragiketak eta unitatearen interpretazio grafikoa jarduera aritmetiko figuratiboak dira. Horregatik, honako galdera hauek egin daitezke:

- Zein baldintzapen behar ditu egoera batek LHko haurrek (8-9 urte) *algebra-mailatan* aurrera egin dezaten?
- Zein da euskarri materialen funtzioa garapen horretan?

Galdera horiei erantzuna ematean zehazten dira atal honen helburuak. Proposatuko den egoeraren lehenengo fasean, haurren maisutasun-atalase aritmetikoa identifikatuko da, eta, hortik abiatuta, objektu intentsiboen aurkikuntzan egingo da aurrera; hau da, perimetro jakin bat emanda, azalera optimizatuko duten irudi geometriko lauen familiak orokortuko dira.

Agerpenezko objektuetatik abiatuta (poligono konkretuen irudiak), ez agerpenezko objektuetara igaroko da eztabaida (desberdintza isoperimetrikoa), hau da, pausoa emango da *1 algebra-mailarantz*, eta eztabaida horrek ekarriko du propietatearen instituzionalizatzea (zirkunferentziak optimizatzen du azalera, perimetro jakin bat emanda).

Horregatik guztiagatik, hau da oinarritzko hipotesia:

«Geometriaren irakaskuntzan, objektu matematikoen dimentsio intentsiboa nabarmentzen duen euskarri bat sartzean, haurrek arauak eta patroiak ezagutzen dituzte, eta ezagutza horien bidez objektu ez-agerpenezkoaren (ideala) ulermenean sakontzen da».

Arrazoibidearen abstrakzio-prozesu horrek lotura zuzena du objektu geometrikoek eredu dinamikoaren gainean nozitzen duten tentsio dualarekin, hau da, poligonoak eta horien propietateak aldi berean adierazten dira objektu partikular gisa (estentsiboak) eta klase baten ordezkari gisa (intentsiboa).

6.2.3. Egoera

Haurrei optimizazio-problema bat aurkezten zaie. Haurrek hesitutako eremu baten forma erabaki behar dute, luzera jakina duen perimetro baterako, barruan dagoen azalera maximoa izan dadin. Hori lortzeko, haurrek garatu eta egokitu egin beharko dituzte euren ezagutzak euskarri motaren arabera.

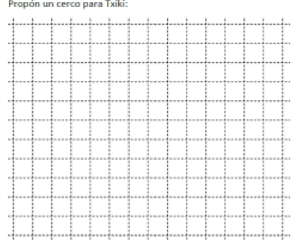
6.2.4. Materiala

Egoeran honako material hauek erabili dira:

- *Material fisikoa*. 20 hesi-unitate, txotxak adibidez, unitate bakoitzak hesiaren metro bat adierazten du. 20 unitateko luzera duen soka bat.
- *Papera eta arkatza*. Orri laukitua eta arkatza (20. irudia).
- *Software dinamikoa*. Haurrak sarrera-laukian idatziko du aukeratu duen forma lauaren izena. Ondoren, irudi lau horri dagokion eredu dinamikoa manipulatzuz, konparatu egingo ditu perimetroa eta azalera.

Problemaren eredu dinamikoa Lasa eta Wilhelmin aurki daiteke (2014) bai eta GeoGebraTubeko estekan²⁶ ere.

Propón un cerco para Taliti:

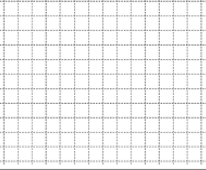


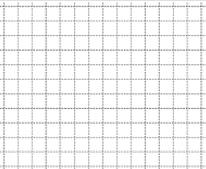
La figura propuesta es un: _____

Perímetro de la figura: _____

Área de la figura: _____

Nombre:

Forma seleccionada	
Perímetro de la figura	
Área de la figura	

Forma seleccionada	
Perímetro de la figura	
Área de la figura	

Nombres:

Forma seleccionada	Perímetro de la figura	Área de la figura

¿Cuál es el perímetro de las figuras? _____

¿Es el área igual en todas las figuras? _____

La forma que tiene mayor área es: _____

Nombres:

20. irudia. Papera eta arkatza euskarri gisa.

26. <http://tube.geogebra.org/student/mF2FlmeY3>

6.2.5. Irakaslearen helburuak

Irakasleak bi helburu nagusi ditu. Alde batetik, hurrek aieruak egin ditzaten nahi du, desberdintza isoperimetrikoaren gainean. Horretarako, hurrek irizpidetzat hartuko dituzte perimetroaren luzera eta gainazalaren azalera, eta esploratu, klasifikatu eta eraiki egingo dituzte sei aldera bitarteko poligonoak, zirkunferentzia eta zirkulua. Bestalde, hurrek neurketak egiteko estrategia pertsonalak garatu ditzaten nahi du. Hurrek poligonoen luzera eta azalera neurtzeko zenbatespenak egingo dituzte, eta zehazki neurtuko dituzte, gainazalak konparatuz edo deskonposizioz. Hurrek azaldu egin beharko dituzte erabilitako estrategia eta jarraituriko prozesua, ahoz eta idatziz.

6.2.6. Egoeraren faseak

Egoera didaktikoa honako fase hauen arabera antolatu da:

1. *Kontsigna.* Hurrek problemaren enuntziatua jasotzen dute irakaslearen eskutik. Ahalik eta hesiturarik handiena eraiki behar dute eskura dituzten hesiekin. Enuntziatua ikasleek ulertzeko modukoa da eta haien interes-guneen barne dago (globalizazio-printzipioa):
«Txikik espazioa behar du pilotarekin jolasteko, baina, aske utziz gero, despistatu egiten da eta ez daki itzultzen. Horregatik, lursaila eraiki nahi diogu Txikiri, bertan jolas dadin. 20 metro hesi ditugu, eta 20 metroko perimetro horrekin ahalik eta espazio handiena hartuko duen hesitura eraiki behar dugu».
2. *Akzioa taldeka material fisikoekin.* Lehenengo akzio-fase honetan, ikasleak problemarekin ohitzen dira. Hurrek formak proposatuko dituzte eskura duten material fisikoa baliatuz (txotxak, soka) eta forma horien perimetroa irudikatuko dute lurzoruan. Zenbatespenaren bidez, erabaki behar dute zein formak izan dezakeen azalera handiena barruan. Lehen fase honetan ez da inolako magnituderik neurtzen.
3. *Banakako akzioa paperean.* Haur bakoitzak Txikiren lursailerako proposamen bat marraztuko du laukitutako sarearen gainean, perimetroaren baldintza errespetatuz. Luzeren eta azalaren neurketak laukitutako sarearen arabera egiten dira, karratutxo bakoitzak gainazal-unitate bat adierazten du.
4. *Proposamenen bateratzea paperean.* Formulazio-fase honetan hurrek euren proposamenak komunikatu eta ikaskideen proposamenekin alderatu behar dituzte. Eztabaida horren emaitza gisa, taldeak aukeratu behar du, proposamen guztien artean, gainazala optimizatzen duena.
5. *Akzioa bikoteka eredu dinamikoarekin.* Ikasleek forma lauei buruzko galdetegia beteko dute eredu dinamikoaren laguntzaz. Hurretako batek landu nahi den forma aukeratuko du eta azalera optimizatzen saiatuko da, perimetroa doituz onartutako maximoari. Behin irudia lortu ondoren, bi hurrek transkribatu behar dituzte forma eta neurriak paper gaineko

galdetegian. Ondoren, txanda aldatu, eta horrela jardungo dute eskura dauden forma guztiekin amaitu arte.

6. *Proposamen irabazlearen balioztatzea.* Eredu dinamikoaren bidez lorturiko formak hobetzen baldin badu (4) jarduerako proposamen irabazlea, hura ordezkaturiko da.

6.2.7. *Espero izandako portaerak*

Lehenengo eta behin, objektu fisikoen manipulazioak edozein espazioren sorrera ekar dezake, jarduera matematikoa tamaina erlatiboaren arteko konparaketan eta zenbatespenean oinarritzen delako. Hesiaren erreproduktzio fisikoan forma erregularrak espero dira, forma erregularrak optimizatu egiten duelako azalera formen familia bakoitzean.

Paperean, orri laukituak forma laukizuzenen agertzea bultzatuko du; izan ere, formaren azalera kalkulatzeko, haurrak formaren barneko karratutxoaren zenbaketa erabiliko duelako oinarritzko estrategia gisa. Horrela, laukien familiaren barnean, 5 unitateko aldea duen karratuak azalera optimizatzen duela ondoriozta daiteke, eta kalkulu aritmetikoak emaitza hori balioztatzen du. Izatez, haurrak ez ditu eskura estrategia aritmetiko eta aljebraikoak ia bere osotasunean laukitutako orriaren erpinetara egokitzen ez diren poligonoen azalera kalkulatzeko. Ez du ezagutzen zirkuluaren azalera kalkulatzeko modurik ere.

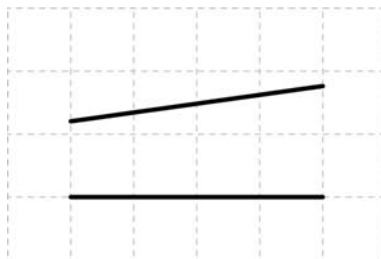
Azkenik, eredu dinamikoaren manipulazioak forma konplexuagoak esploratzea ahalbidetzen du. Haurra ohar daiteke poligonoaren aldean kopurua handituz, geroz eta azalera handiagoa lortzen dela, eta, horrenbestez, zirkunferentziak optimizatzen duela azalera perimetro jakin baterako.

6.2.8. *Aldez aurreko ezagutzak eta erlazionaturiko oztopoak*

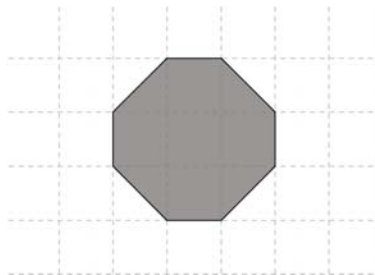
Haurrak identifikatu behar ditu zirkunferentzia, zirkulua eta sei aldera arteko poligonoak, eta azken horiek aldean kopuruaren arabera sailkatu behar ditu. Era berean, haurrak oinarritzko hiztegi geometrikoa erabili behar du forma horiek deskribatzeko.

Zenbaki irrazionalaren nozioa ez da irisgarria LHko bigarren zikloko haur batentzat. Txantiloak laukitu bat erabiltzean, gerta daiteke luzera-unitatea identifikatzea ondoz ondoko bi erpinen arteko distantzia gisa, ez soilik horizontalean edo bertikalean, baita diagonalean ere.

Dickson, Brown eta Gibsonen (1991) arabera, LH amaitzerakoan, haurren erdiek interpretatzen dute unitatea bi lerro paraleloren arteko distantzia ez-perpendikular gisa (21. irudia).



Luzera bereko segmentuak.



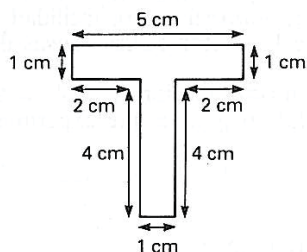
8 unitateko perimetroa duen forma.

21. irudia. Unitatearen interpretazioa bi lerro paraleloren arteko distantzia ez-perpendikular gisa.

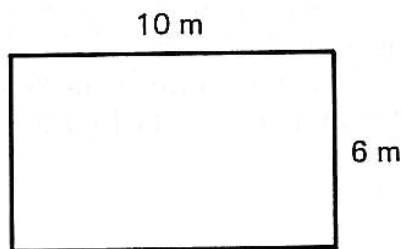
Jarduera honetan, haurrak berak eraikitzen ditu forma lauak, bai paperaren gainean bai ordenagailuaren pantailan. Horrela, forma lauen aurkezpen estereotipatua saihesten da, oztopo didaktiko klasikoa (Castro, 2001).

Neurketa-prozesuak hurrenkera jakin bat bete behar du, zeregina ez dadin bilaka perimetroaren eta azaleraren kalkulu aritmetikoen prozedurazko errepikapen hutsa. Hau da, neurketa egin aitzin, haurrari zenbatespena egiteko eskatuko zaio, eta unitate ez-estandarrek erabili behar dira unitate estandarren aurretik, zereginaren aritmetizazioaren aurretik (Dienes, 1997).

Hain zuzen ere, 10 urteko haurrek ez dute zailtasunik izaten perimetroa kalkulatzeko orduan, betiere problema «liburu-formatukoa» bada eta «gardenki diseinaturik» baldin badago (Dickson, Brown eta Gibson, 1991). Problemaren kodifikazio linguistikoa zereginaren ebazpena baldintzatzen du, eta, hezkuntza-sistemaren eraginez, apurka-apurka, ikasleak nahastu egiten ditu azalera eta perimetroa (22. irudia). Gainera, haurrak pentsatzen du perimetro bereko bi formari azalera bera dagokiela (Chamorro, 2005).



Zereginaren aritmetizazioa: haurrak zailtasunik gabe kalkulatu du perimetroa.



Oztopoen agertzea: perimetroaren eta azaleraren arteko interferentzia, haurren % 25ek 60 unitateko perimetroa adierazten du.

22. irudia. Zereginaren aritmetizazioa eta oztopoen agertzea.

6.2.9. *Esperimentazioa*

Etengabeko trebakuntzan diharduten irakasle boluntarioek jarduera hau garatu zuten 2013/2014 ikasturtean, ikastetxe publiko eta kontzertatuetan. Laginean LHko bigarren zikloko 90 hurrek hartu zuten parte. LHko hirugarren zikloko 55 hurrek kontraste-talde gisa jokatu dute. Hala, 1. taulan ikus daiteke laginaren banaketa.

3. atalean garatu den modura, jardueraren diseinuak eta landutako edukiak kontuan hartuta, jarduera hau LHko bigarren ziklorako egokia da. Bigarren zikloko ikasleek ez bezala, hirugarren zikloko ikasleek berariaz landu dituzte azalera-unitateen inguruko edukiak, ez soilik intuitiboki. Modu horretara, kontrastatu nahi dira, alde batetik, azalera eta perimetroen ezagutza goiztiarra eta intuitiboa duten ikasleen produkzioak, eta, bestetik, ezagutza berdin horien prozedurazko aspektuak landu dituztenen produkzioak.

Ikastetxea	Ikasmaila	Haur kopurua
A	3	21
B	3	9
C	3-4	24
D	4	36
Orotara		90

1. taula. Laginaren banaketa.

6.2.10. *Emaitzak*

Atal honetan aurkezten dira egoeraren fase bakoitzean (manipulazio fisikoa, papera eta arkatza, eta eredu dinamikoa) lorturiko emaitzak, bigarren eta hirugarren zikloko ikasleen laginetan.

6.2.10.1. *Bigarren zikloa*

Material fisikoaren manipulazio-fasean, oro har, hurrek forma erregularrak aurkezten dituzte. Hurrek proposatu dituzte laukizuzena, karratua, pentagonoa, hexagonoa eta zirkunferentzia (23. irudia). Formak lurrean eraiki dira eta hurrek oina sartzen dute formaren barnean, haren neurria zenbatesteko.



23. irudia. Hurren produkzio fisikoak zotzekin.

Papereko akzio-fasean, proposamen laukizuzenak dira gehiengo, eta karratua da nagusi. Aldeen kopuru bikoitia duten poligonoak (hexagonoa, oktogonoa, dekadagonoa) maiztasun apur bat handiagoz agertzen dira aldeen kopuru bakoitia dutenak baino (pentagonoa, heptagonoa, endekagonoa). Alde kopuru handiagoko irudiak maiztasun txikiagoan agertzen dira eta soilik 4 hurrek proposatu dute zirkunferentzia. Seitik batek izan ditu unitatea identifikatzeko oztopoak. Jarraian 2. taulak laburbiltzen ditu hurrek jardueran emandako erantzunak.

Hautaturiko forma	PK	Perimetroat				Azalera			
		PZ	ZA	FA	DU	AZ	ZA	FA	PZA
Laukizuzena	14	13	2	0	0	13	6	0	0
Karratua	37	32	3	2	2	34	10	0	1
Erronboa	1	0	0	0	1	1	0	0	0
Pentagonoa	3	1	0	0	1	1	0	0	0
Hexagonoa	5	3	1	0	2	3	2	0	0
Heptagonoa	1	1	0	0	0	0	1	0	0
Oktogonoa	5	1	2	0	3	2	2	0	0
Dekagonoa	2	2	1	0	0	2	1	0	0
Endekagonoa	1	1	0	0	0	1	0	0	0
Dodekagonoa	1	1	0	0	0	1	0	0	0
Zirkunferentzia	4	0	0	0	2	0	0	0	0
Izen berezia	8	4	1	0	4	6	3	0	0
Zurian	8	2	1	0	1	3	3	0	0
Orotara	90	61	11	2	16	57	28	0	1

PK: proposamenen kopurua; PZ: perimetro zuzena;

ZA: zenbaketa adierazten du; FA: formula adierazten du;

DU: diagonal unitate gisa interpretatzen du;

AZ: azalera zuzena; PZA: perimetro zurrana adierazten du

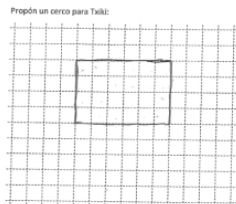
2. taula. Papereko jardueraren emaitzak, bigarren zikloa.

24. irudian ikus daitezke haurren laukizuzen-formako produkzio-tipoak. Alde batetik, 24a irudian ikus daitezke zenbaketa-estrategiaren markak laukitutako eremuaren gainean. Bestalde, 24b irudian prozedura aritmetiko bat adierazi da perimetroat kalkulatzeko.

Formulazio-fasean haur bakoitzak bere proposamena aurkezten du. Eskura dauden datuak kontuan hartuz eta bateratze-lanaren ostean, hurrek erraz erabakitzen dute karratuak optimizatzen duela azalera, emandako perimetrorako. Huraxe da proposamen irabazlea, momentuz.

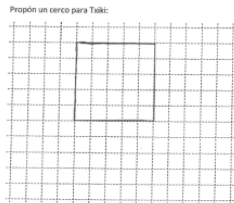
Nahiz eta itxuraz karratuaren azalera gainditzen duten beste proposamen batzuk egon, hurrek ezin izan dituzte azalera horiek kalkulatu, eta, horrenbestez, proposamen horiek baztertu egin dira formulazio-fasean. Hala ere, eztabaidaren ondoren, justifikatu egin da eredu dinamikoaren erabilera hurrengo jardueran.

Azalera eta perimetro
ezberdinak



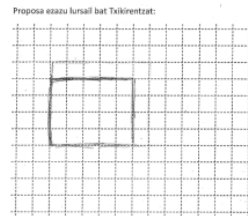
La figura propuesta es un: Rectángulo
Perímetro de la figura: 20
Área de la figura: 12

- Azalera maximoko laukizuzena: karratua
- Perimetroaren kalkulua: formula



La figura propuesta es un: Cuadrado
Perímetro de la figura: 4x5=20
Área de la figura: 25

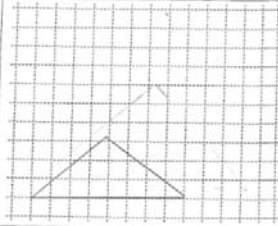
Perimetroaren eta azaleraren arteko parekatzea 3. zikloan (oztopo epistemologikoa)

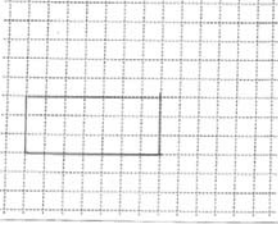


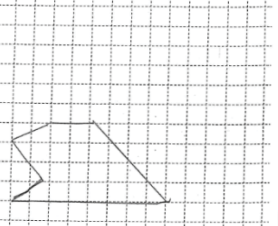
Proposatutako lursailaren forma: Rectángulo
Formaren perimetroa: 20
Formaren azalera: 12

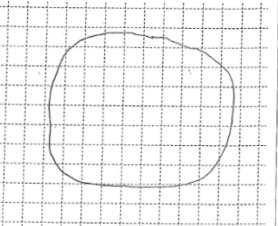
24. irudia. Produkzio tipikoak: karratua eta laukizuzena.

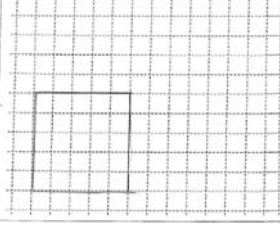
Ordenagailuan, jarduera bikoteka egiten da. Gainera, saioaren garapen dinamikoa ziurtatzeko, bi irakasle arduratu dira saioa gidatzeaz. Jarduera gorabeherarik gabe garatu da eta haurrak galdetegia betetzeko gai dira (25. irudia). Akats aritmetiko txikiak eta transkripzio-akats arinak dauden arren, haur guztiak heltzen dira espero izandako ondorioa: zirkunferentziak optimizatzen du azalera, perimetro jakin bat emanda.

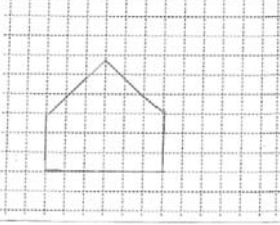
Forma seleccionada	triángulo	
Perímetro de la figura	20	
Área de la figura	12.57	

Forma seleccionada	cuadrilátero	
Perímetro de la figura	20	
Área de la figura	21	

Forma seleccionada	hexágono	
Perímetro de la figura	20.06	
Área de la figura	16	

Forma seleccionada	circunferencia	
Perímetro de la figura	20.05	
Área de la figura	31.98	

Forma seleccionada	cuadrilátero	
Perímetro de la figura	20	
Área de la figura	25	

Forma seleccionada	pentágono	
Perímetro de la figura	20.2	
Área de la figura	26.45	

Forma seleccionada	Perímetro de la figura	Área de la figura
triángulo	20	12.57
cuadrilátero	20	25
pentágono	20.2	26.45
hexágono	20.6	26
circunferencia	20.5	31.98

¿Cuál es el perímetro de las figuras? 20

¿Es el área igual en todas las figuras? No

La forma que tiene mayor área es: la circunferencia

25. irudia. Jardueraren garapen tipikoa, eredu dinamikoaren laguntzarekin.

6.2.10.2. Hirugarren zikloa

LHko hirugarren zikloan, haurren ezaugarrietara egokitu behar da jarduera. Konkretuki, alde batera uzten da manipulazio fisikorako lehenengo fasea. Izan ere, 10 eta 11 urteko haurrei eska dakieke produkzio abstraktu bat paperaren gainean, aldeztu aurretik material fisikoen manipulazioa egin gabe, azalera-unitatearen nozioa aurkeztu zaielako eta landu dutelako. Gainera, ikuspuntu afektibotik, gerta daiteke adin horretako haurrek nolabaiteko lotsa sentitzea, jarduera matematikoa manipulazio fisikoan oinarritzea LHko lehen zikloko prozedura delako, batez ere.

Horrenbestez, lehenengo jarduera paperean garatzen da, ikasleen proposamenak bigarren zikloko ikaskideen antzekoak izanik. Beste behin ere, orri laukituaren gainean, karratua da proposamen irabazlea. Laukizuzena agertzen da bigarren lekuan, eta ondoren datoz izen bereziko forma irregularrak (gezia, eskailera, gurutzea, etab.). Lau alde baino gehiagoko poligonoak gutxiengo dira. Hala, 3. taulan laburbildu dira hurrek emandako erantzunak. Hurrek akats gehiago egiten dituzte perimetroaren kalkuluan, azaleraren kalkuluan baino.

Hautaturiko forma	PK	Perimetroa				Azalera				P=A
		PZ	ZA	FA	DU	AZ	ZA	FA	PZA	
Laukizuzena	8	1	0	1	0	7	4	1	0	7
Karratua	35	34	0	3	0	30	19	0	3	0
Pentagonoa	1	0	0	0	1	1	1	0	0	0
Oktogonoa	2	1	1	0	1	2	2	0	0	0
Dodekagonoa	1	1	0	0	0	1	0	0	0	0
Izen berezia	8	5	4	1	1	7	5	0	0	0
Orotara	55	42	5	5	3	48	31	1	3	7

PK: proposamen kopurua; PZ: perimetro zuzena; ZA: zenbaketa adierazten du;

FA: formula adierazten du; DU: diagonal unitate gisa interpretatzen du;

ZA: azalera zuzena; PZA: perimetro zurrunda adierazten du; P=A: perimetroari esleitzen dio azaleraren balio bera

3. taula. Paperaren gaineko jardueraren emaitzak, 3. zikloa.

Ordenagailuan, aktibitatea antzera gauzatzen da bi zikloetan. Bigarren zikloko ikasleen antzera, ordenagailuko jarduera bikoteka egiten da. Hori horrela izanik ere, oraingoan ez da beharrezkoa bigarren irakasle baten presentzia, ikasleek modu autonomoan lan egiten dutelako. Ikasleek galdetegia arrakastaz betetzen dute.

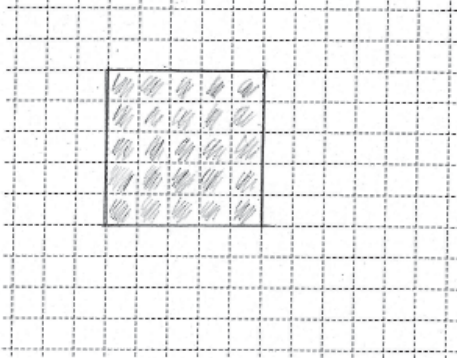
Akats aritmetiko arinak gertatu dira eta transkripzio-akatsak, baina akats horiek ez dute jardueraren garapena arriskuan jartzen. Eredu dinamikoaren manipulazioak ez du arazorik sortzen eta aztertutako kasuen papererako transkripzioak zuzenean dakar zirkunferentziaren onarpena, hau da, perimetro jakin baterako, zirkunferentzia da azalera optimizatzen duen forma laua. Berezi, akzio-, formulazio- eta balioztatze-faseei esker, hurrek onartu egiten dute ondorio hori, irakaslearen parte-hartze zuzenik gabe.

6.2.11. Emaitzen eztatzea

Paper eta arkatx euskarrian, hurrek erabilitako prozedurek agerian uzten dute zenbaketa dela haien oinarritzko estrategia perimetroaren eta azaleraren kalkuluan. Izatez, etapa guztian, % 40k esplizitu egiten du zenbaketa bere produkzioetan, puntuen bidez, markak eginez edo zenbakiak idatziz laukitutako sarean eta zenbatutako karratutxo bakoitzaren barruan (26. irudia).

Zenbaketa ez bezala, formen deskonposaketa ez da ezagutza operatiboa bigarren zikloan azalaren kalkulurako. Hala ere, azalerak kalkulatzeko formula bidezko eskola-genesiak aukera ematen die hurrei hirugarren zikloan triangeluaren azalera kalkulatzeko karratuaren azaleraren funtzioan, zatiki sinpleak erabiliz (27. irudia).

Proposa ezazu lursail bat Txikirentzat:

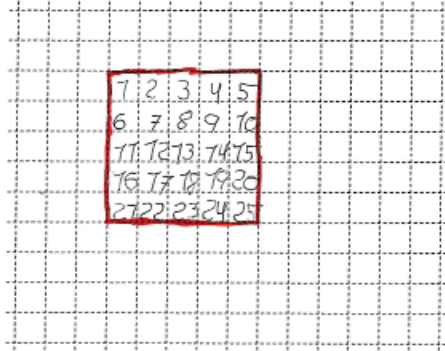


Proposaturiko lursailaren forma: lerrotu

Formaren perimetroa: 20m

Formaren azalera: 25m²

Proposa ezazu lursail bat Txikirentzat:



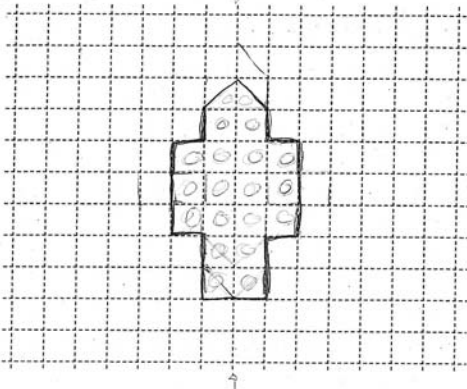
Proposaturiko lursailaren forma: Karratua

Formaren perimetroa: 20

Formaren azalera: 25

26. irudia. Azalera-unitateen zenbaketa esplizitua.

Proposa ezazu lursail bat Txikirentzat:

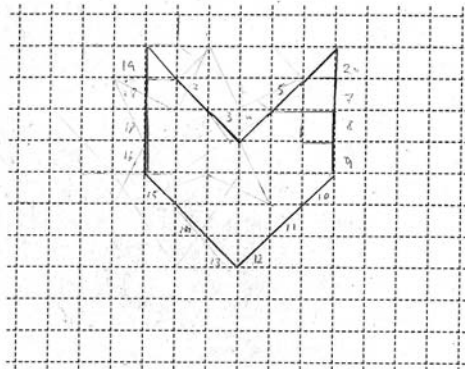


Proposaturiko lursailaren forma: Zuzen forma

Formaren perimetroa: 20 metro

Formaren azalera: 19 m²

Proposa ezazu lursail bat Txikirentzat:



Proposaturiko lursailaren forma: Kozka

Formaren perimetroa: 20m

Formaren azalera: 29 m²

27. irudia. Azalaren kalkulua, karratua triangelu isoszeleetan deskonposatuz.

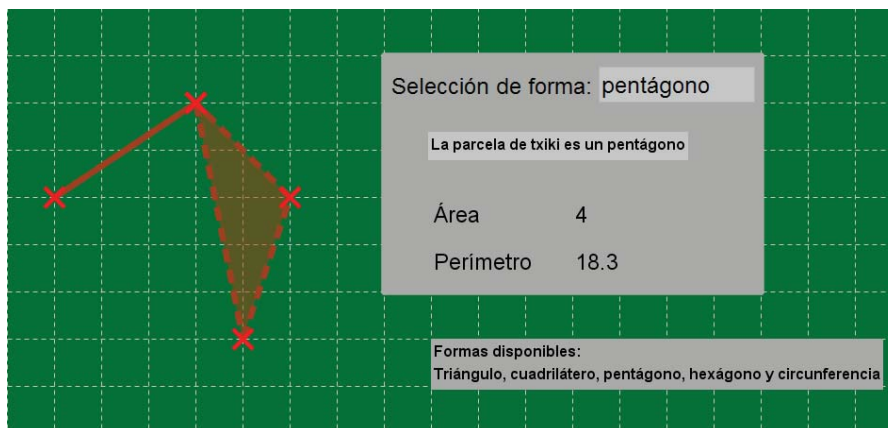
Hasiera batean, haurrek joera dute unitatea interpretatzeko hurrenez hurreneko bi erpinen arteko distantzia gisa, baita erpin horiek laukitutako sarean diagonalean daudenean ere. Baina, etapan zehar, zuzendu egiten da interpretazio hori. Bigarren zikloan, haurren % 16k egiten du erre hori; hirugarren zikloko haurren artean, aldiz, % 5ek besterik ez (2. eta 3. taulak). Horrela, kontrol-taldeari esker ikusi ahal izan denez, «unitatearen interpretazioa bi lerro paraleloren arteko distantzia ez-perpendikular gisa» oztupoa gainditzeko joera dagoela etapan zehar.

Paperaren gaineko akzio-fasean laukitutako sarea erabiltzen denez, horrek ekartzen du, nagusiki, forma laukizuzenak agertzea (4. taula). Fase horretan, laukien familiaren barruan azalera optimizatzen duen irudia karratua dela identifikatzen duten ikasleen ehunekoa asko hazten da ziklo batetik bestera.

Zikloa	Orotara	Karratua	Laukizuzena	P=A laukizuzenetan
2	% 57	% 41	% 16	% 0
3	% 78	% 63	% 15	% 13

4. taula. Laukizuzen eta karratuen proposamenak.

Hirugarren zikloko proposamenetan, forma laukizuzenak proposatzen dituzten haurrek azalerari ematen diote perimetroaren balio bera (24c irudia): bigarren zikloan haur batek ere ez du $P=A$ identifikazioa egin; aldiz, hirugarren zikloan, tasa hori % 13koa da. Esan den modura, bigarren eta hirugarren zikloko haurren artean dagoen ezberdintasun nagusia zera da, hirugarrenenekoek prozedura gisa lantzen dutela azaleraren eta perimetroaren kalkulua, eta, horrela, zantzuak daude ondoko aierua esateko, hau da, prozesu horiek ondoko oztupo didaktikoa sortzen dute: «perimetroaren eta azaleraren arteko identifikazioa».



28. irudia. Munstroa eredu dinamikoaren bitartez (Lakatos, 1976).

Azkenik, eraikuntzaren diseinu informatikoa dela-eta, eredu dinamikoak forma singularrak proposatzeko aukera ematen du, esate baterako, poligono jakin bat adierazten ez duten irudiak aldeak gurutzatu zaizkielako, edo erpinak bata bestearen gainean ezarri eta kolapsatu diren poligonoak (28. irudia). Aukera hori egon badagoen arren, haurrek forma sinpleak aurkeztu dituzte beti, eta, horrenbestez, jardueran ez dira munstroak sortzen, Lakatosen zentzuan (1976).

6.2.12. Sintesia, ondorioak eta aztergai irekiak

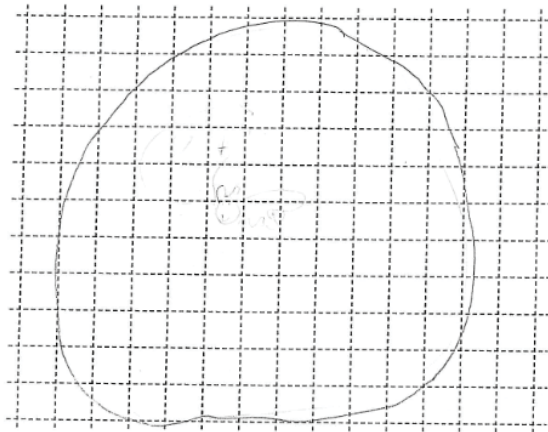
Irudi optimo gisa zirkunferentzia hautatu duten haurren kopurua anekdotikoa da paperaren gaineko jardueran, eta, aldiz, ahobatezkoa izatera igarotzen da jarduera eredu dinamikoaren laguntzaz egitean (29. irudia). Gertaera horrek agerian uzten du nola haurren ezagutza aritmetiko eta aurrealgebraikoek, *0 algebra-maila* bati dagozkionak, aukera ematen duten karratua identifikatzeko irudi optimo gisa, eta laukitutako sareak identifikazio hori eragiten duela, beste zenbait autorek esandakoarekin bat eginez (esate baterako, Ribeiro, 2013). Hau da, haurren maisutasun-atalase aritmetikoak muga hori markatzen du, eta eredu dinamikoak aukera ematen du irudi berrien eraikuntzan aurrera egiteko, nahiz eta irudi horiek ez diren haurrentzat irisgarriak ikuspuntu aritmetiko, figuratibo eta aurrealgebraiko batetik.

Horrela, software dinamikoak bere ahalmen guztia erakusten du esplorazio-tresna gisa (Lasa eta Wilhelmi, 2013b) eta aukera ematen du hastapeneko algebra-maila batera hurbiltzeko, *I. maila* Godinoren eta beste batzuen arabera (2012, 2014). Horrela, praktika operatiboan parte hartzen duten zenbakizko balio aldakorrek eta irudi geometrikoen eredu dinamikoek orokortu egiten dute zenbakiaren eta objektu geometrikoaren erabilera estentsiboa.

Paper eta arkatzaren euskarriarekin ez bezala, eredu dinamikoak distantziak eta azalera aurkezten ditu balio aldakor gisa. Irudiaren erpin bat manipulatzear, haurrak puntuaren kokapena aukeratzen du pantailan agertuko den zenbakizko balioaren aurreikuspenaren arabera. Horrekin batera, haurra ohartzen da nola, azalera handiagoa lortzeko, beharrezkoa den poligonoaren aldean kopurua handitzea eredu dinamikoan. Horrenbestez, aktibitate matematikoaren barnean, bada arrazoibide bat araua edo patroia ezagutzen duena tendentzia baten moduan.

Konkretuki, eredu dinamikoaren gainean manipulaturiko irudiak paperean transkribatzen direnean, transkripzioen sekuentziak agerian uzten du nola, aldean kopurua handitzean, ohikoa den azalera handiagoa lortzea. Horrela, haurrek moldatu egiten dituzte euren esanahi pertsonalak eta esanahi instituzionalera hurbiltzen dituzte, hau da, onartzen dute zirkunferentzia dela azalera optimizatzen duen forma, perimetro jakin baterako.

Propón un cerco para Txiki:



La figura propuesta es una circunferencia

Perímetro de la figura: 20

Área de la figura: no lo sabemos



29. irudia. Zirkunferentzia: paperaren gainean eta eredu dinamikoaren gainean.

Ereduen arabeko irakaskuntza, matematikaren irakaskuntza errealista edo Genesi instrumentala (Bu eta Schoen, 2011), horiek guztiak, software dinamikoaren erabilerarekin interesa erakutsi duten hezkuntza-teoriak dira. Lan honetan, ikuspegi horiek artikulatu dira MEDT eta IOSein, eta horrek aukera eman du zenbait praktika operatibo eta diskurtsibo diseinatzeko GeoGebra instrumentuaren laguntzaz. Optimizazio-egoera baten diseinuak (zirkunferentziak azalera maximoa du) aukera eman du GeoGebra modu pertinente batean erabiltzeko LHko bigarren eta hirugarren zikloan, eta erabilera hori justifikaturik dago aintzat hartuz gero hurrek aurrera egin dutela euren *algebra-mailetan*. Horrela, jarduketa-lerro bat ireki da hurrek prozedura aljebraikoak gutxika ikas ditzaten.

Jarduera honen analisisian azpimarratu behar dira, alde batetik, *algebra-mailetan* aurrera egiteko eredu dinamikoen erabilera, eta, bestetik, jarduera matematikoa aztertzeko IOSe dituen tresna teorikoak. Konkretuki, beharrezkoak izango dira ikerketa gehiago, kontuan hartuko dituztenak ez soilik pertsonal/instituzional, intentsibo/estentsibo eta agerpenezko/ez-agerpenezko dualtasunak; aldiz, kontuan hartuko dituztenak, orobat, edukia/espresioa eta sistema/unitarioa (1. irudia), praktika operatibo, diskurtsibo eta erregulazio-praktiketan. Halaber, posible litzateke deskribatzea konfigurazio eta ibilbide didaktikoak (Godino, Contreras eta Font, 2006), non software dinamikoak, euskarri fisikoen eta beste gisa batzuetako euskarriekin batera, instrumentu gisa jokatuko duen inguru materialean.

Esker onak

Honako lan hau EDU2012-31869, MINECO ikerketa-proiektuaren barruan egin da.

Zati esperimentalak honako irakasle hauen lanari esker izan da posible: Luis Braco, Mirentxu Conde, Lupe Muxika, Ana Oliver eta Ane Yuste.

6.3. DERRIGORREZKO BIGARREN HEZKUNTZA: PROPORTZIONALTASUN GEOMETRIKOA

Proporzionaltasun geometrikoaren irakaskuntza problematikoa da. Papera eta arkata erabiltzea zaila gerta daiteke, marrazketarako eskuzko teknikak baliatu behar direlako. Baliabide informatikoak erabiliz, zailtasun horiek arindu daitezke propietate geometrikoetan zentratzeko. Adibide honetan, Derrigorrezko Bigarren Hezkuntzako 2. ikasmailan proporzionaltasun geometrikoa lantzeko jardueren sekuentzia bat proposatzen da.

6.3.1. Proporzionaltasun geometrikoa curriculum ofizialean

Curriculum ofizialak honako helburu hauek finkatzen ditu proporzionaltasun geometrikoari loturik (MEC, 2007: 752):

- Eguneroko bizitzan agertzen diren erlazio espazialak eta formak identifikatzea. Tartean dauden propietate eta erlazio geometrikoak aztertea. Kreatibitatea eta imajinazioa bizkortzen duten heinean, sortzen duten edertasunarekiko sentibera izatea.
- Egoera konkretuen analisirako estrategia pertsonalak garatzea. Problemen ebazpenean eduki horiek identifikatzea. Tresna eta baliabide anitz erabiltzea. Lorturiko emaitzak zehatzak izan edo zenbatespenak izan, zer estrategia erabili baloratzea.

Helburuak horiek izanik, helburu horiei eta proportzionaltasun geometrikoari loturiko edukiak hauek lirarteke (MEC, 2007: 754):

- Forma bereko eta neurri ezberdineko irudiak. Antzekotasuna. Segmentuen arteko proportzionaltasuna. Antzekotasun-erlazioen identifikazioa.
- Irudiak handitzea eta txikitzea. Ahal den guztietan, erabilitako eskala-faktorea lortzea. Antzekoak diren gainazalen arteko proportzionaltasun-arrazoia aurkitzea.
- Neurriak lortzeko eta irudien arteko erlazioak egiaztatzeko, Talesen eta Pitagorasen teorema erabiltzea.

6.3.2. Enuntziatua matematiketan

Enuntziatua behar den bezala ulertzea ezinbestekoa da, ikasleek problemaren ebazpena zuzen egin dezaten.

Problema baten enuntziatua testu mota berezia da. Ohiko testu narratibo edo dokumentaletan baliatzen den irakurtzeko gaitasuna ezin da zuzenean transmititu problemen enuntziatueta. Ikasleek beste gaitasun bat garatu behar dute enuntziatuari zentzua emateko: proposaturiko egoera ulertu behar dute, jakin behar dute zer dagoen jokoan ikuspuntu matematikotik, horrela, egoerari hoberen egokitzen zaizkien estrategiak eta tresnak aukeratu egingo dituzte (Briand eta Chevalier, 1995: 81-82).

Hori horrela izanik ere, batzuetan ez dago lotura zuzenik testuliburuak erakusten duen marrazkiaren eta GeoGebraren bidez eskalan eraikitako irudiaren artean (IRUDIAK). Kasu horietan, enuntziatuak ez dio ikasleari laguntzen. Hau da, testuliburuak irudia sartzen du haren bidez ikasleak enuntziatua hobeto ulertuko duelakoan, baina ez du zertan horrela izan.

Eskolan gisa horretako ariketak egitean, ohikoa da ikasleren bat konturatzea irudiak inolako funtsik ez duela. Ikasle horrek aditzera emango du, «arbeleko irudia eta liburukoa ez datoz bat». Hori gertatzen delarik, irakasleak esku hartu behar du, eta berariazko estrategiak garatu behar ditu *marrazkia* (neurri erlatibo eta konketuak) eta *ideograma* (marrazkiaren bidez adierazten den ideia) bereizteko, ez du suposatu behar marrazkia eta ideograma gauza bera direnik.

Ikasleek marrazkian ideograma «ikusiko» dutela pentsatzea ilusio bat da. Ikasleek ez dute naturaltasunez interpretatuko ideograma bat aurkezturiko marrazkian. Hori sinesten duen irakasleak *gardentasunaren ilusioa* du; hau da, irakasleak uste du ikasleen interpretazio- eta adierazpen-gaitasunak bereak bezalakoak direla. «Begien aurrean» objektu bera dute, baina irakaslearentzat nabarmena dena, ikaslearentzat ez da.

6.3.3. Saioen deskribapena

Jarduera hauek Iruñeko Salestarren Ikastetxean egin dira, DBHko 2. ikasmailako neska-mutilekin (Sáenz de Cabezón, Lasa eta Wilhelmi, 2010). Orotara, 49 ikaslek hartu dute parte esperientzian, bi gelatan banaturik. A taldean 23 ikasle izan dira (ikasle hauek Hizkuntza Trebetasunen hautazkoa dute); B taldean, aldiz, 26 (aurrekoek ez bezala, hauek Matematikan Sakontzen hautazkoa dute).

Bi talde diren arren, Matematika, Gaztelania, Ingelesa eta Natur Zientzien arloetan hirugarren talde bat osatzen da. Bost ikaslek zailtasun bereziak dituztenez, ikasle horiek talde berezi batean lantzen dituzte arlo horiek.

Proportzionaltasun geometrikoa azaltzeko, honako material hauek erabili dira: DBHko 2. ikasmailako liburua (Garrido eta beste, 2008); ikasgela berezi batean finkoa den arbel digitala; eta ohiko ikasgelan erabiltzeko ordenagailua, proiektorea eta arbel digital eramangarria.

55 minutuko 6 saio erabili dira ikasleekin gaia garatzeko. Saio horietan, gaiaren azalpena egin da, ariketak eta adibideak aztertu dira eta ebaluazio saioa ere egin da. Saioak nola gauzatu diren azaltzen da datorren atalean.

6.3.3.1. Lehen saioa

Lehenengo saioan gaiaren aurkezpena egin da eta edukien azalpen laburra egin zaie ikasleei.

Segmentuen arteko arrazoiaren definizioa aurkeztu zaie ikasleei:

Hurrenez hurren m eta n luzera duten bi segmenturen arteko arrazoia esaten zaio luzera horien arteko zatidurari, m/n (Garrido eta beste, 2008: 122).

Bi nozio aurkeztu zaizkie ikasleei, proportzionaltasun-arrazoia eta proportzionaltasun geometrikoa.

Horrekin batera, honako propietate hau enuntziatu eta frogatu zaie²⁷ (30. irudia):

Zuzen paraleloen multzo batek bi zuzen ebakitzaille mozten baldin baditu, eta zuzen ebakitzaille horietako batean sortzen diren segmentuak elkarren berdinak baldin badira, orduan, beste zuzen ebakitzaillean sortu diren segmentuak ere elkarren berdinak izango dira (Garrido eta beste, 2008: 123).

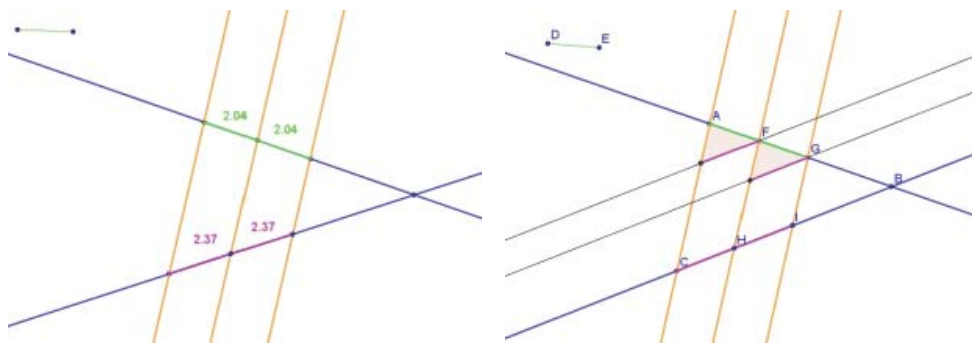
Talesen teorema enuntziatu eta frogatu zaie²⁸ (31. irudia):

Bi zuzen ebakitzaille zuzen paraleloen multzo batek mozten baldin baditu, zuzen ebakitzailleetako batean sortzen diren segmentuak eta beste zuzen ebakitzaillean sortzen diren segmentuak elkarren proportzionalak dira, hurrenez hurren (Garrido eta beste, 2008: 124).

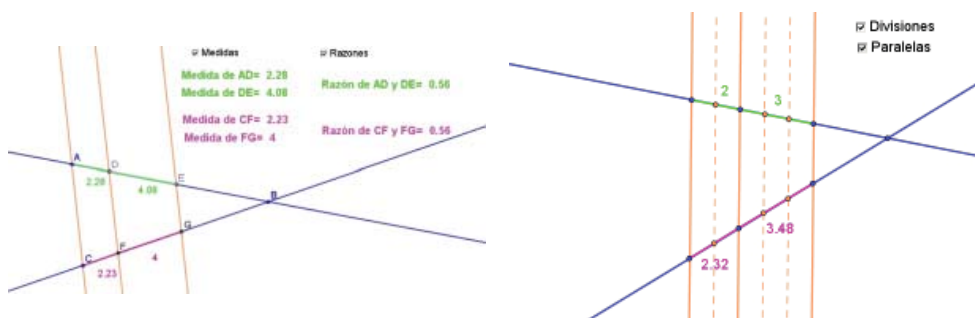
27. <http://tube.geogebra.org/student/m428029>· <http://tube.geogebra.org/student/m428031>

28. <http://tube.geogebra.org/student/m428035>· <http://tube.geogebra.org/student/m428037>

Ikasleei aurkeztu zaie ariketen sorta bat, aurreko ezagutza horiek aplikatu ditzaten.



30. irudia. Propietatearen ilustrazioa eta frogapena.



31. irudia. Propietatearen ilustrazioa eta frogapena.

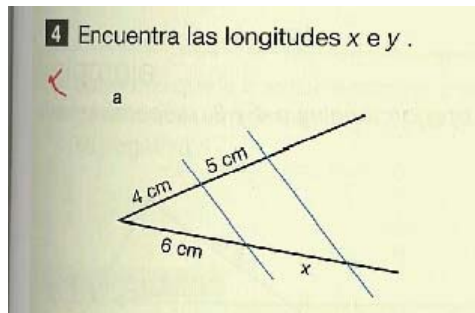
6.3.3.2. Bigarren saioa

Lehenengo saioan ikasleei bidali zaizkien ariketak zuzendu dira. Ariketa horietan, segmentu proportzionalak ebatzi behar dira Talesen teorema baliatuz (32. irudia). Ariketak ikasleei liburuko formatuan aurkeztu zaizkien arren, ebazpena arbel digitalaren gainean egin da. GeoGebrekin egindako eraikuntza proiektatu da, eta eraikuntza horren gainean idatzi dira kalkuluak eta datuak²⁹.

Ariketak ebatzi ondoren, adibideak landu dira Talesen teorema nola aplikatu daitekeen aztertzeko (33. irudia). Berriz ere, liburuko enuntziatua betetzen duen GeoGebra eraikuntza bat diseinatu da, eta, ondoren, arbel digitalaren gainean ebatzi da adibidea, eraikuntzaren gainean idatziz³⁰.

29. <http://tube.geogebra.org/student/m428047>

30. <http://tube.geogebra.org/student/m428055>



$$\frac{4}{6} = \frac{5}{x}$$

$$x = \frac{5 \cdot 6}{4}$$

$$x = \frac{30}{4}$$

$$x = 7,5$$

32. irudia. Talesen teorema praktikatzeko ariketak.

ejemplo 3

Dos personas quieren repartirse 20 m de cable eléctrico en partes proporcionales a 4 y 8, respectivamente. ¿Cuántos metros le tocarán a cada una?

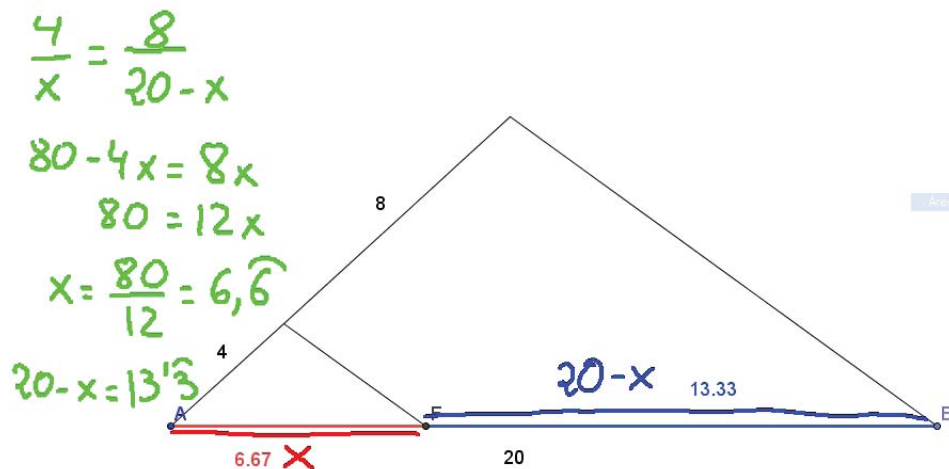
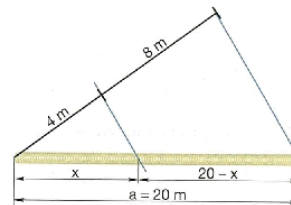
Para hacer los cálculos aplicaremos el procedimiento anterior. Tomaremos el segmento a de longitud 20 m y los segmentos b y c de longitudes 4 m y 8 m, respectivamente.

Consideramos ahora x como la longitud de uno de los segmentos sobre a , y $20 - x$ la longitud del otro segmento (tal y como muestra la figura). Así, podemos establecer la proporción siguiente:

$$\frac{4}{x} = \frac{8}{20 - x} \Rightarrow x = 6,67$$

Por lo tanto, $20 - x = 20 - 6,67 = 13,33$

Así, a una persona le corresponden 6,67 m y a la otra, 13,33 m.

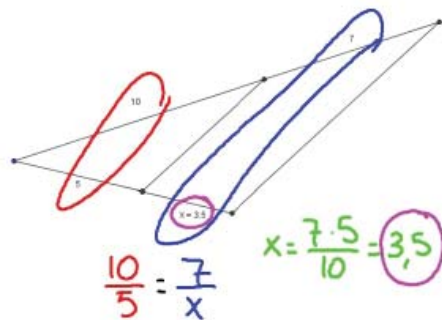


33. irudia. Ariketen ebazpena, GeoGebra eraikuntza eta arbel digitala baliatuz.

Ariketa eta adibide horiez gain, ikasleei definitu zaizkie «segmentu baten laugarren proportzionala» eta «segmentu baten hirugarren proportzionala». Horren ondotik, ariketa sorta berria eman zaie ikasleei, kontzeptu horiek aplikatu dituzten.

6.3.3.3. Hirugarren saioa

Saioa ariketen ebazpenarekin hasi da. Bezperako ariketak zuzendu dira eta zalantzak argitu dira. Ariketa horien adibide bat ikus daiteke 34. irudian³¹: «eraiki ezazu hurrenez hurren 10, 5 eta 7 zentimetro dituzten hiru zuzenkiren laugarren proportzionala».

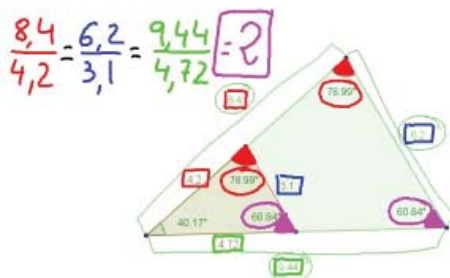


34. irudia. Laugarren proportzionala lantzeko esplorazio-eredua.

Horren ondotik, Talesen posizioan dauden triangeluak definitu dira:

Bi triangelu Talesen posizioan daude baldin eta angelu bat partekatzen badute eta angelu horren aurkako aldeak elkarren paraleloak baldin badira (Garrido eta beste, 2008: 129).

Ikasleei aurkeztu zaizkie Talesen posizioan dauden triangeluen adibideak³² (35. irudia) eta horiek betetzen dituzten propietateak.



35. irudia. Triangeluak Talesen posizioan.

31. <http://tube.geogebra.org/student/m428061>

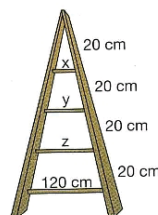
32. <http://tube.geogebra.org/student/m428065>

Azkenik, ikasleei ariketa sorta berria aurkeztu zaie, saioan landu diren nozioak aplikatu zituzten.

6.3.3.4. Laugarren, bosgarren eta seigarren saioak

Saio horiek ariketak ebazteko baliatu dira. Ariketa guztien ebazpenean GeoGebra erabili da, arbel digitalarekin batera. Laugarren saioa ariketen sortan (36. irudia), argi ikusten da *marrazkiaren* eta *ideogramaren* arteko aldea. Hain justu ere, eskailera baten mailen luzera kalkulatzeko ariketan nahiz herrien arteko distantziak kalkulatzekoan, marrazkiak ez dira datuekiko proportzionalak. Bosgarren saioa ariketa bat adierazi da 37. irudian.

- 45 Halla la medida de cada uno de los peldaños de la escalera.

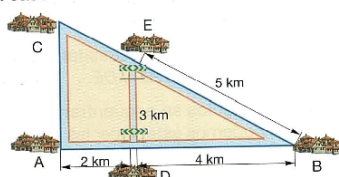


$$\frac{20}{x} = \frac{80}{120} \quad x = \frac{120 \cdot 20}{80} = 30$$

$$\frac{40}{y} = \frac{80}{120} \quad y = \frac{120 \cdot 40}{80} = 60$$

$$\frac{60}{z} = \frac{80}{120} \quad z = \frac{120 \cdot 60}{80} = 90$$

- 46 Observa en el siguiente gráfico las carreteras que unen los pueblos A, B, C, D y E. Puesto que la carretera que une D con E está cortada, si un coche parte de D para ir a E tiene dos posibles recorridos, uno pasando por B y otro pasando por A y por C. ¿Cuántos kilómetros recorrería en cada caso?



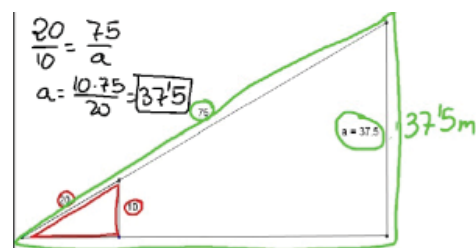
$$\frac{x}{6} = \frac{3}{4} \quad x = \frac{6 \cdot 3}{4} = \frac{18}{4} = 4.5$$

$$\frac{y}{2} = \frac{5}{4} \quad y = \frac{5 \cdot 2}{4} = \frac{10}{4} = 2.5$$

$$2.5 + 2.4 \cdot 5 = 9 \quad 4 + 5 = 9$$

36. irudia. Laugarren saioa ariketak.

- 48 Un coche asciende por una rampa a una velocidad de 5 m/s. Si a los 4 s de su salida se encuentra a una altura de 10 m, ¿a qué altura se hallará a los 15 s?



37. irudia. Bosgarren saioa ariketak.

Ebaluaziorako froga idatzia egin zaie ikasleei, nozioak ikasi dituztela egiaztatzeko.

6.3.4. Irakaskuntzari begirako ondorioak

Proportzionaltasun geometrikoari dagozkion zenbait eduki ohiko arbel digitalean aurkeztu nahi direnean, horrek zailtasunak ekartzen ditu. Alde batetik, arbelean egindako irudiak irakaslearen gaitasun artistikoen esku daude, nolabait. Aldiz, GeoGebra eta arbel digitala erabilita, zailtasun horiek arindu egiten dira. Bestetik, GeoGebrarekin eraikitako ereduak dinamikoak direnez, errez manipula daitezke. Horrela, ikasleek ikus dezakete Talesen teoremaren enuntziatua ez dela betetzen soilik zuzen paralelo eta ebakitzailen disposizio jakin baterako, baina eredu nahierara molda daitekeela eta emaitza beti lortuko dela. Nolabait, frogapen induktiboa erabiltzen da lehenik (kontraadibiderik ezin aurki daiteke), eta, ondoren, frogapen deduktibora pasa daiteke. Eztabaida induktiboa ezin gauza liteke ohiko arbel batean.

GeoGebrarekin eta arbel digitalarekin egin den esperientzia positiboa izan da. Alde batetik, ikasleek motibazio handiagoa erakutsi dute jarduerak egiteko orduan. Bestetik, GeoGebra eta arbel digitala nozioak aurkezteko euskarri eraginkorrak direla erakutsi da, aukera handiko bikotea osatzen dute. Adibideak eta ariketak irudikatzeko kostua jaitsi denez, saioetan presentzia handiagoa hartu dute nozio geometrikoen gaineko eztabaidek.

Esperientzia honek ez du ikerketa-diseinurik barnean. Ez ditu argitzen ikasleen ikaskuntzak zein neurritaraino hobetu ote diren. Ondorio sendoagoak ateratzeko, beharrezkoa litzateke kontraste-talde bat erabiltzea, hau da, ohiko baliabideak erabiliz gai bera landu duen eta antzeko ezaugarriak dituen talde bat.

Hala ere, baliabide horiek erabili nahi dituen irakasle bati baliagarria gerta dakioke, praktikara eramandako proposamena delako eta emaitza positiboak eman dituelako.

6.4. BATXILERGOA ETA LIZEOA: FUNTZIOEN ANALISIKO TEOREMA KLASIKOAK

Analisi matematikoko edukiak ilustratzeko ohiko arbela erabiliz gero, saio bakoitzean funtzioen adierazpen grafiko bat edo adierazpen gutxi batzuk besterik ezin dira aurkeztu. Adibide horiek fenomeno didaktiko bat eragin dezakete, hau da, gardentasunaren ilusioa sor dezakete. Nola lagun dezake GeoGebrak fenomeno hori gainditzen? Bestela esanda, adibide bat bi eratara interpreta daiteke, «objektu isolatu» gisa eta «klase baten ordezkari gisa», eta, galdera da GeoGebrak bi interpretazio horien arteko distantzia murrizten lagunduko ote duen.

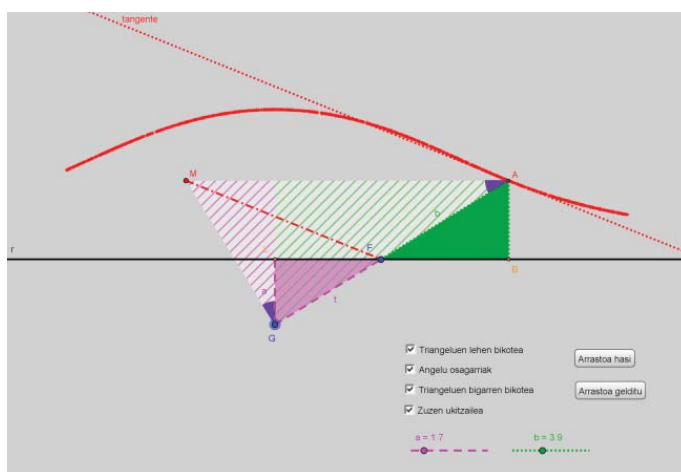
Fenomeno honen arabera [gardentasunaren ilusioa], irakasleak adibidea eredu gisa interpretatzen du, hau da, klase baten ordezkari gisa, ikasleak adibidea besterik ikusten ez duen bitartean. Matematikaren eraikuntza eta komunikazioaz ari garela, fenomeno horrek erakusten du badagoela distantzia bat ezagutza zientifikoaren eta

eskola-instituzioan kristalizaturiko eta etiketaturiko ezagutzaren artean. Horregatik, ezinbestekoa da irakasleek eta ikasleek «hizkuntza bera erabiltzea» eta horretarako bitartekoak aurkitzea (Lasa eta Wilhelmi, 2012).

Hain zuzen ere, lan honetan azalduko dugu GeoGebrak aukera ematen duela jakintzaren eraikuntzan eta komunikazioan aurrera egiten, eta laguntzen duela gardentasunaren ilusioa gainditzeko. Argudioa babesteko, hainbat jatorritako adibideak aurkeztuko ditugu: batzuk klasikoak dira, esate baterako, zuzen ukitzailearen eta deribatuaren ebazpenean kalkulu infinitesimalak duen garrantzia; beste batzuk oinarritzkoak dira, hala nola deribatuaren nozioa bera; azkenak Bigarren Hezkuntzako curriculumetik hartu dira, hala nola kalkulu diferentzialeko eta integraleko zenbait teorema.

6.4.1. *Emitza klasikoak: Nikomedesen konkoidea*

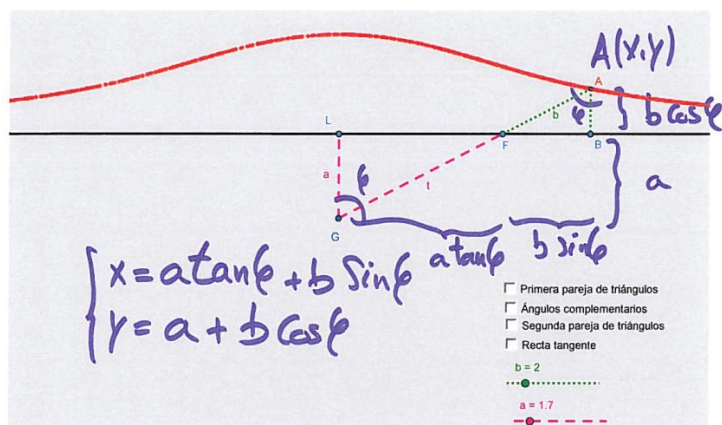
Historikoki, Newtonen eta Leibnizen kalkulu infinitesimalaren aurretik, kurba baten zuzen ukitzaileak metodo geometrikoen bidez aztertzen ziren. Nikomedesen konkoidea, maskor-itxurako kurba, GeoGebraren bidez adieraz daiteke leku geometriko gisa (38. irudia³³).



38. irudia. Nikomedesen konkoidearen eredu dinamikoa.

Konkoideak bi parametro dituenenez, ez da kurba bakar bat, aldiz, kurben familia da. GeoGebraren bidez familiako edozein konkoide adieraz daiteke. Ez da adibide bat: eraikuntza dinamikoak konkoideen familia guztia hartzen du, eredu dinamiko bat da. Behin konkoidea adierazi ostean, arbel digitalean haren irudi bat hartuz, kurba parametriza daiteke (jatorritzat hartzen da G puntua), eta, azkenik, kalkulu infinitesimalaren bidez hura aztertu (39. irudia).

33. <http://www.geogebraTube.org/student/m103751>

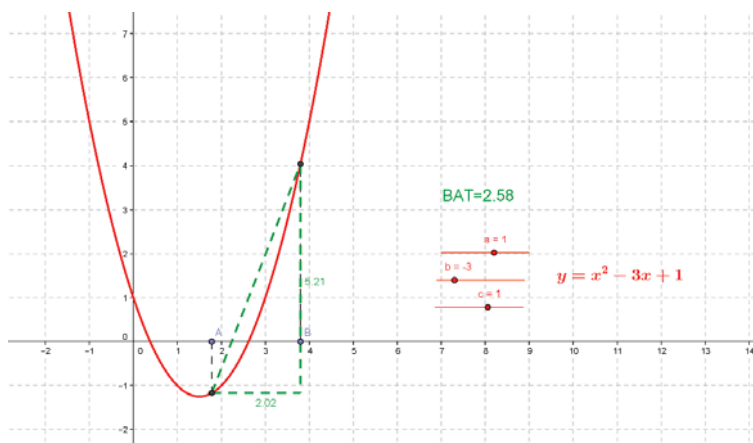


39. irudia. Parametrizazioa arbel digitalaren gainean.

Gisa horretako eraikuntzak erabil daitezke, Batxilergoan, deribatuekin eta funtzioen jarraitutasunarekin loturiko emaitzak ilustratzeko.

6.4.2. Oinarrizko nozioak: deribatua

Oinarrizko nozioak nola azter daitezkeen erakusteko, esate baterako deribatua, parabola erabiliko dugu. Izan ere, kurben familia hori aski ezaguna da Bigarren Hezkuntzako ikasleen artean. Beste behin ere, eredu dinamikoen bidez manipulatu dira parabola definitzen duten hiru parametroak, familiako edozein parabola irudikatzeko. Gainera, eraikuntzaren bidez, aldiuneko aldakuntza-tasa interpreta daiteke A eta B bi punturen arteko batez besteko aldakuntza-tasaren kasu partikular gisa, puntu horiek elkarren nahi bezain hurbil daudenean. Horrela, A eta B infinituki gertu daudenean, eraikuntzak zuzen ukitzaila erakutsiko du (40. irudia³⁴).



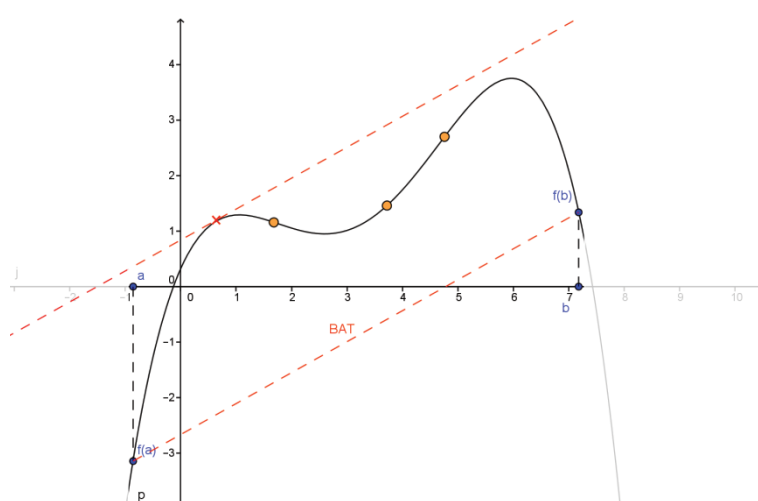
40. irudia. Parabolaren eredu dinamikoa eta BAT.

34. <http://www.geogebraTube.org/student/m103888>

6.4.3. Funtzioen inguruko zenbait teorema

Erakutsiko ditugun azken eraikuntzak Batxilergoko curriculumetik atera ditugu. Horiek dira, Bolzanoren teorema³⁵, Rooleren teorema³⁶ eta batez besteko balioaren teorema³⁷ (41. irudia).

Eraikuntza horiek «erronka» gisa aurkezten zaizkie ikasleei. Agindua zera da, ikasleek aurkitu behar dute teorema beteko ez den kontraadibide bat. Hori, noski, ezinezkoa da. Eraikuntzetako bakoitza hari dagokion teorema betetzeko diseinatu da, eta, ondorioz, ikasleek ezingo dute euren helburua bete, hau da, ezingo dute aurkitu eraikuntzaren antolaketa bat non emaitza orokorra beteko ez den. Eraikuntzan 4. mailako funtzio polinomikoen familia adierazi den arren, aukera posibleak horrenbeste dira non kontratu didaktikoa hautsiko dela ziurra den, hau da, ikasleek egiaztatuko dute zereginak «ez duela soluziorik» eta irakaslearen parte-hartzea eskatuko dute. Hori izango da teoremak formalki aurkezteko momentua.



41. irudia. Batez besteko balioaren teorema.

35. <http://www.geogebraTube.org/student/m103939>

36. <http://www.geogebraTube.org/student/m103945>

37. <http://www.geogebraTube.org/student/m103943>

6.5. BIGARREN HEZKUNTZAKO MASTERRA: EKUAZIOEN ETA INEKUAZIOEN SISTEMAK

Atal honetan, Bigarren Hezkuntzako Irakasle Masterreko ikasleekin egindako esperientzia baten emaitzak aurkeztuko dira. Ekuazioen eta inekuazioen sistemak ebazteko zeregina aurkeztu zitzaizen, eredu dinamikoaren laguntzaz.

Emaitzetan ikusiko denez, batzuetan intuizioak eredu dinamikoaren erabilera ezegokia eragiten du. Horrenbestez, ezinbestekoa da alde aurreko instrukzioa, bai tresnaren erabileran bai zereginaren helburuetan.

Datozen ataletan deskribatuko dira lagina, galdetegia, espero izandako portaerak eta lorturiko emaitzak.

6.5.1. Lagina

Lagina gurariz hautatu da. Masterreko 17 ikaslek hartu dute parte, 2011/2012 (9 ikasle) eta 2012/2013 (6 ikasle) ikasturteetan. Parte-hartzaile guztiek dute goimailako titulazio bat, teknologia- edo zientzia-graduren batean.

6.5.2. Galdetegia

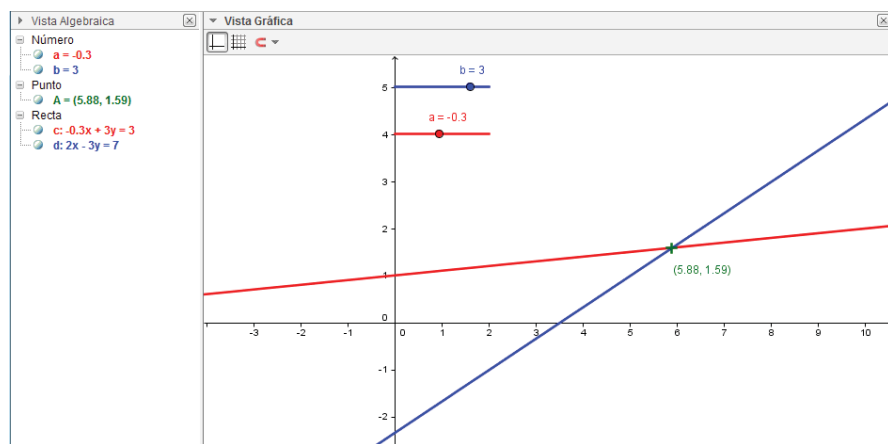
Ikasleei bi zeregin proposatu zaizkie: bi aldagai eta bi ekuazio dituen sistema baten eztabaida (Z1), eta inekuazio ez-linealen sistema baten eztabaida (Z2). Kasu batean zein bestean, eztabaida bi parametroren arabera egingo da (5. taula).

Z1 zeregina	Z2 zeregina
Egin ezazu honako ekuazio linealen sistema honen eztabaida, a eta b parametroek hartuko dituzten balioen arabera:	Egin ezazu honako inekuazio ez-linealen sistema honen eztabaida, a eta b parametroek hartuko dituzten balioen arabera:
$\begin{cases} ax + 3y = 3 \\ 2x - by = 7 \end{cases}$	$\begin{cases} x^2 + y^2 \leq a \\ x - y \geq b \end{cases}$

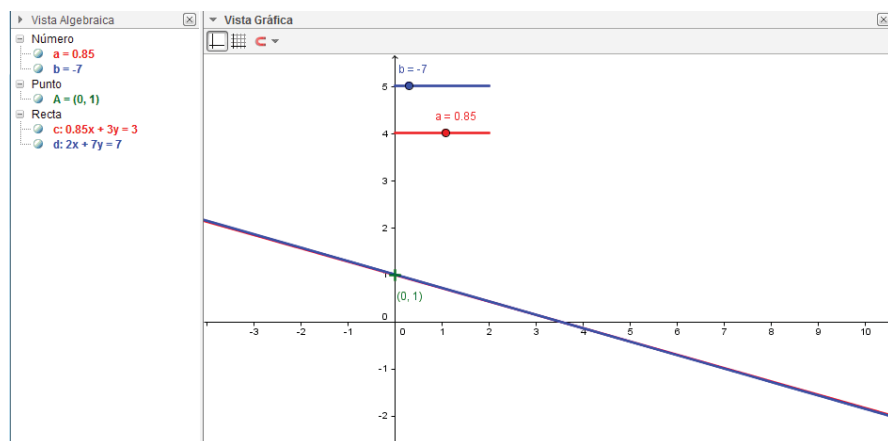
5. taula. Zereginen deskribapena.

Ikasleek ebazpenerako bi metodo erabili dituzte. Alde batetik, zeregina prozedura aljebraikoen bidez ebazten dute (PA), paperean, ohiko modura. Bestetik, eskatzen zaie zereginean lagunduko dien eredu dinamiko bat diseina dezaten (ED). Hala, 42. eta 43. irudiek erakusten dituzte ikasleek diseinatutako eraikuntza dinamikoaren zenbait momentu. Horrekin batera, hiru zutabeko taula bat eman zaie, eredu dinamikoarekin lortu dituzten emaitzak transkriba ditzaten (6. taula).

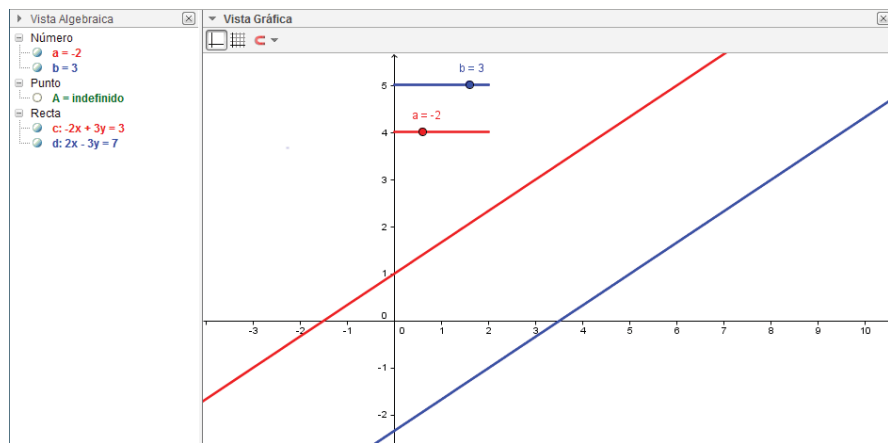
Bateragarri determinatua
($ab \neq 6$)



Bateragarri indeterminatua
($ab = 6$; $b = 7$)

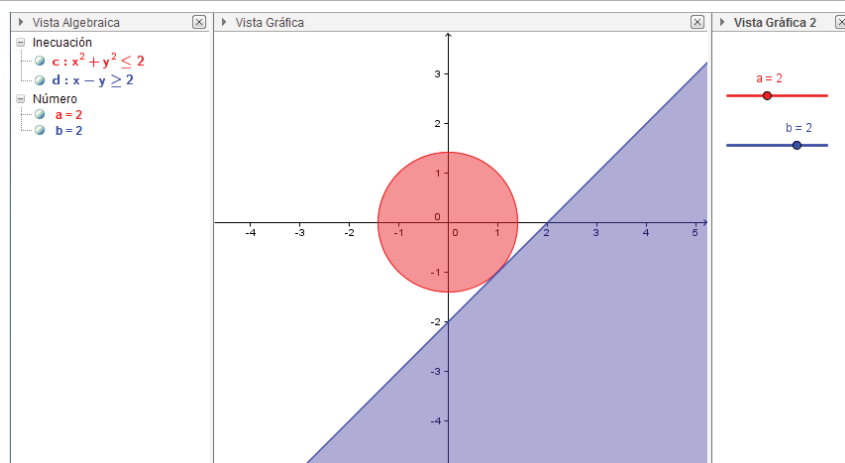


Bateraezina
($ab = 6$; $b \neq 7$)

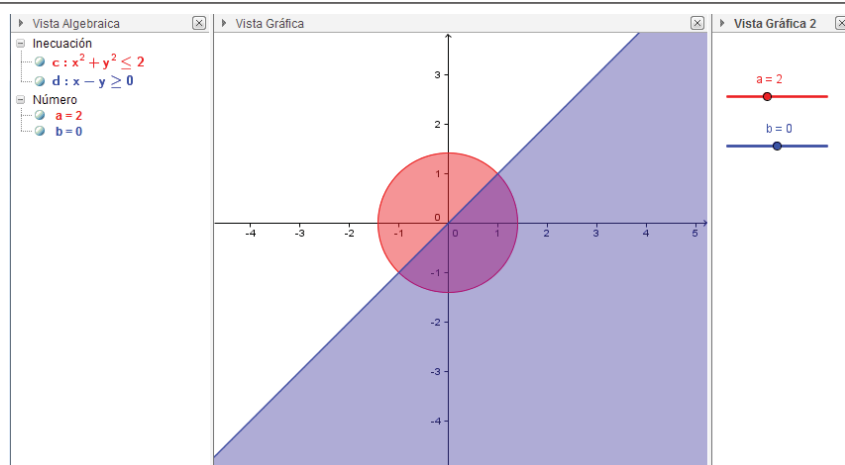


42. irudia. Eredu dinamikoaren momentuak Z1 zereginean.

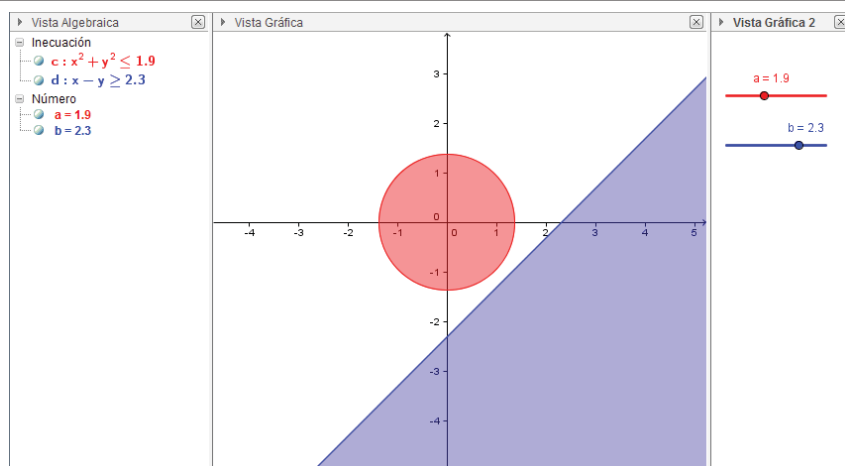
Bateragarri determinatua
($2a = b^2$)



Bateragarri indeterminatua
($2a > b^2$)



Bateraezina
($2a < b^2$)



43. irudia. Eredu dinamikoaren momentuak Z2 zereginen.

Ikasleen erdiei A galdetegia eman zaie, eta, beste erdiei, B galdetegia. A galdetegian, ikasleek Z1 zeregina PA-ED sekuentzian ebatzen dute, eta Z2 zeregina ED-PA sekuentzian. B galdetegian, alderantzizko ordena erabili da, Z1 zereginari ED-PA egokitu zaio, eta, Z2 zereginari, PA-ED. Modu horretara, erabilitako baliabideen ordenak emaitza baldintzatzen ote duen ikusi nahi da.

6.5.3. *Espero izandako portaerak*

Ikasgelaren memoria didaktikoari begira, Z1 garapen-zeregina da. Aldiz, Z2 sarrerako zeregina da. Horrenbestez, zereginetako bakoitzean portaera ezberdinak espero dira.

Horrekin batera, PA eta ED metodoen erabilera-hurrenkerak ikasleen erantzunetan eragina izango duela espero da. Eredu dinamikoa lehenengo erabiliz gero, alde zureko azterketa horrek emaitza hobeak eman beharko lituzke, ikasleei eredu manipulagarri bat aurkezten dielako mahaigaineratu den kasuistika aztertzeke.

Horrekin batera, ikasleei eman zaien txantiloak informazioa antolatzen lagundu behar luke. Izan ere, txantilo horrek elkartu egiten dituelako zereginaren ikuspuntu aljebraikoa eta funtzionala. Horrela, ikasleari bere produkzioen gaineko kontrola errazten zaio.

Kasua	Adierazpen grafikoa	Ebazpen aljebraikoa

6. taula. Eredu dinamikoarekin erabiltzeko txantiloia.

6.5.4. *Emaitzak*

7. taulak laburbiltzen ditu Z1 zereginean lortu diren emaitzak. Ikusten denez, emaitzak hobeak dira A galdetegian, laginaren segmentu guztietarako.

	2012	2013	Galdetegia						
Erantzunak	A	B	Totala	A	B	Totala	A	B	TOTALA
Zuzena	3	2	5	3	1	4	6	3	9
Osatugabea	1	0	1	0	1	1	1	1	2
Okerra	2	3	5	0	1	1	2	4	6
Totala	6	5	11	3	3	6	9	8	17

7. taula. Z1 zereginaren emaitzak, galdetegiaren eta urtearen arabera.

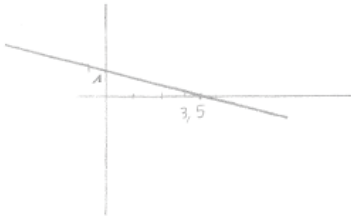
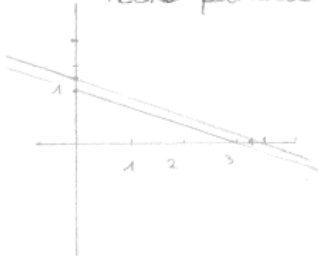
8. taulak laburbiltzen ditu A galdetegiaren erantzunetan ikusi diren portaerak, Z1 zereginean. Horrekin batera, 44. irudian ikus daiteke ikasleek egindako ebazpen tipikoa. PA mota bakoitzari ED erabilera bat egokitu zaio. Prozedura aljebraikoen bidez ebazpen zuzena eta osoa eman denean (parametroen arabera ebazpena, kasu bateragarri determinatuaren (BD) emaitza eta guzti), matrize bidezko teknikak erabiliz egin da. Kasu horretan, eredu dinamikoa erabili da lorturiko kasuistikaren egiaztapena egiteko.

Ebazpen zuzen baina osatugabea (ez da ebatzi kasu bateragarri determinatua) geometria analitikoko teknikak erabiliz eman zen edo berdintze-metodoa erabiliz. Ikasle horiek eredu dinamikoa erabili zuten prozedura aljebraikoan lorturiko emaitzen adibideak emateko. Azterketa aljebraiko zuzena egin ez zuten ikasleei, eredu dinamikoak ez zien ezertan lagundu, ez zuten emaitza lortu ereduaren bitartez.

9. taulak laburtzen ditu B galdetegian ikusitako portaerak. Aurreko kasuarekin gertatu denaren antzera, ED erabiliz eztabaida zuzena egin duten ikasleek matrizeen bidez egiaztatu dute PA atala. Aldiz, 45. irudian ikus daitekeen modura, ED bidez egindako eztabaida ezegoki batek parametroen garrantzirik gabeko kasuen eztabaida dakar, baita PA atalean ere (Oren berdina, handiagoa edo txikiagoa; zuzenen posizio erlatiboak lortu diren angeluen arabera).

Metodo aljebraikoa	Eredu dinamikoa	GGB instrumentazioa
Eztabaida zuzena BD kasua parametrizatzen du Matrize bidezko teknika Laburtze-metodoa	Lorturiko kasuistikaren egiaztapen zehatza egiten du	Eredua erabiltzen du lorturiko produkzioaren kontrolerako sistema gisa
Eztabaida zuzena Ez du BD kasua parametrizatzen Berdintze-metodoa Geometria analitikoa	Lorturiko emaitzen adibideak ematen ditu, parametroei balio partikularrak emanez	Eredua erabili du kasuistikaren adibideak emateko
Eztabaida okerra	Ez du egin Okerra	Ereduak ez dio ebazpenari laguntza gehigarririk ematen

8. taula. Z1 zereginako portaerak, A galdetegia.

Caso	Representación gráfica	Resolución algebraica
$a = \frac{6}{7} \approx 0,86$ $b = -7$	Ambas rectas coinciden 	$\begin{cases} \frac{6}{7}x + 3y = 3 \\ 2x + 7y = 7 \end{cases}$ Es la misma recta luego $\begin{cases} x = \frac{7-7y}{2} \\ y = y \end{cases}$ Sistema compatible indeterminado
$a \cdot b = -6$ (Por ejemplo $a = 1$ $b = -6$)	Rectas paralelas 	Sistema incompatible $\begin{cases} x + 3y = 3 \\ 2x + 6y = 7 \end{cases}$ $\begin{cases} 2x + 6y = 6 \\ 2x + 6y = 7 \end{cases}$ Imposible
$a \cdot b \neq -6$ Por ejemplo $a = 2$ $b = 1$	 Rectas que se cortan en un punto	$\begin{cases} 2x + 3y = 3 \\ -2x - y = 7 \end{cases}$ $\begin{aligned} &4y = -4 \quad y = -1 \\ &x = 3 \end{aligned}$ Sistema compatible determinado

44. irudia. Z1 zereginaren ebazpen tipikoa, txantiloian.

Eredu dinamikoa	Prozedura aljebraikoa	GGB instrumentazioa
Eztabaida zuzena Laburtze-, berdintze-metodoa Geometria analitikoa	Lorturiko kasuen egiaztapena, matrize eta heinen bidez	Eredua erabiltzen du adierazpen grafikoaren transkripzioa egiteko
Eztabaida osatugabea edo okerra Garrantzirik gabeko kasuak aztertzen ditu	Analisi aljebraikoa garrantzirik gabeko kasu berdinetan oinarritzen dute	Ereduaren erabilera okerrak zereginaren ebazpen ezohikoa dakar

9. taula. Z1 zeregineko portaerak, B galdetegia.

Caso	Representación gráfica	Resolución algebraica
$S' \begin{cases} a=0 \\ b=0 \end{cases}$		Para $a=0$ y $b=0$. $\begin{cases} 3y=3 \rightarrow y=1 \\ 2x=7 \rightarrow x=\frac{7}{2} \end{cases}$
$S' \begin{cases} a=0 \\ -9 < b < -5 \\ -\infty < a < \infty \end{cases}$		$y=1$ - Para $-\infty < b < -9 \rightarrow x < -1$ - Para $-9 < b < -7 \rightarrow -1 < x < 0$ - Para $-7 < b < -5 \rightarrow 0 < x < 1$ - Para $-5 < b < \infty \rightarrow x > 1$
$S' \begin{cases} b=0 \\ -\infty < a < \infty \end{cases}$		$x=\frac{7}{2}$ - Para $-\infty < a < -2^{14} \rightarrow 3^{15} < y < \infty$ - Para $-2^{14} < a < 0^{86} \rightarrow 0 < y < 3^{15}$ - Para $0^{86} < a < 3^{86} \rightarrow -3^{15} < y < 0$ - Para $3^{86} < a < \infty \rightarrow -\infty < y < -3^{15}$

45. irudia. Eredu dinamikoaren erabilera ezohikoa Z1 zereginean.

Z1 zereginean ez bezala, Z2 zeregineko emaitzak homogeneoak dira talde guztietan. Zeregin honetan, ez dirudi erabilitako baliabideen ordenak eraginik izan duenik lorturiko emaitzetan. 10. taula, horren testigu.

	2012	2013	Galdetegia						
Erantzunak	A	B	Totala	A	B	Totala	A	B	TOTALA
Zuzena	3	1	4	1	1	2	4	2	6
Osatugabea	1	2	3	1	1	2	2	3	5
Okerra	2	2	4	1	1	2	3	3	6
Totala	6	5	11	3	3	6	9	8	17

10. taula. Z2 zereginaren emaitzak, galdetegiaren eta urtearen arabera.

Hori horrela izanik ere, aurretik aipatu diren zenbait portaera identifika daitezke. Esate baterako, A galdetegian, ED bitartez kasuistika ongi zehazten duten ikasleek zuzen garatu dute PA eztabaida. Aldiz, ereduaren garrantzirik gabeko posizioak aztertzen dituzten ikasleek oker ebazten dute sistema prozedura aljebraikoen bidez (kasu bakar batean izan ezik).

Horrekin batera, B galdetegian, PA zuzen ebazten duten ikasleek ED bitartez lorturiko kasuistikaren adibideak ematen dituzte, parametroei balio partikularrak esleituz. Aldiz, PA oker edo osatugabe ebatzi duten ikasleek (ebazpenerako baldintza beharrezkoak aurkitzen dituzte, baina ez dituzte parametrizatu) hobetu egiten dute beren ebazpena ED erabiliz, ereduaren bidez kasuen azterketa zehaztu dezaketelako.

6.5.5. *Emaizten eztabaida laburra*

Lortu diren emaitzek erakusten dutenez, eredu dinamikoaren erabilerak proposaturiko zeregina baldintzatzen du. Emaizta horien arabera, egokia dirudi eredu dinamikoa erabiltzeak ebazpen aljebraikoaren lagungarri, zenbakizko emaitzak ikusgai egiteko, produkzioaren gaineko kontrola izateko eta lorturiko emaitza balioztatzeko. Hala ere, eredu dinamikoa erabiltzeko orduan, Masterreko ikasleek ez dute akzio instrumentalerako eskemarik.

Biak dira ekuazioak eta inekuazioak ebazteko zereginak. Aldiz, bi zeregin horiek izaera ezberdinekoak dira. Z1 edukien garapenerako zeregina den bitartean, Z2 eduki berriak sartzeko zeregina da.

Horrenbestez, ikasleek hobeto egin dute Z1 zeregina. Eredu dinamikoa erabili dute ezagunak zaizkien prozedura aljebraikoak laguntzeko. Horrela, emaitza balioztatzeko tresna bat dute. Hori horrela izanik, PA-ED eskemak egokiagoa dirudi gisa honetako zereginen aurrean. Izan ere, eredu dinamikoaren bidez ikasleak ez badu akzio instrumentalerako eskemarik, horrek ikaslea eraman dezake zeregina oker ebaztera.

Z2 zereginaren kasuan, eredu dinamikoaren bidez soilik azter daitezke soluzioa existitzeko beharrezkoak diren baldintzak. Ikaslea gai da kasu bateragarri eta bateraezinak grafikoki aztertzeko, baina prozedura aljebraiko zorrotzik gabe ezin da emaitzarik lortu.

Laburbilduz, emaitza esperimentalak hasierako hipotesiarekin kontraesanean daude. Hau da, eredu dinamikoak ez du berez errazten zeregin konplexu eta berrietarako sarrera. Eredu dinamikoak ebazpena laguntzen du eta emaitzak hobetzen ditu, betiere, ikaslea zereginaren ebazpenean trebaturik dagoenean. Baina, jarduerak eduki berriak sartzen dituenean, eredu dinamikoa distrakziorako tresna da: ikasleak atentzioa desbideratzen du sistemaren ebazpenean garrantzirik ez duten kasuetara.

Horrenbestez, beharrezkoa da aspektu honen inguruan etorkizuneko irakasle berriak trebatzea. Hau da, beharrezkoa da ikasleek akziorako eskema bat garatzea, artefaktuaren instrumentazio efektibo bat egiteko.

Azkenik, nabarmendu beharra dago hainbat euskarriren erabilera integratua. Eredu dinamikoaren erabilera hutsa ez da nahikoa zeregin matematikoa arrakastaz burutzeko. Ezinbestekoa da euskarri fisiko baten gainean (paperean) transkribatzea ordenagailuaren pantailan ikusten den hura. Horregatik, hiru zutabeko txantiloia erabilera aukera aproposa eta interesgarria da. Txantiloia horretan kasuak antola daitezke, ikuspuntu funtzional eta grafikoa adieraz daitezke, eta kalkulu aljebraikoak egin daitezke.

Esker onak

Honako lan hau EDU2012-31869, MINECO ikerketa-proiektuaren barruan egin da.

6.6. INGENIARITZA INDUSTRIALEKO GRADUA: MEKANISMOAK

Makinen teorian mekanismoak irakasten direnean, mekanismo horien deskribapen zehatza egin behar izaten da, eta, batzuetan, ez da erraza hori irudi estatikoen bidez egitea. Horrelakoetan, ohikoa izaten da mekanismo baten mugimendua software bidezko aplikazio baten bidez irudikatzea. GeoGebraren bidez, baldintzapen matematikoak ezar daitezke, hala nola distantzia konstanteak, ebakidurak, tangenteak eta perpendikularrak, eta, horiekin, mekanismo interaktiboan multzo handi bat eraiki daiteke.

Softwarea Nafarroako Unibertsitate Publikoan erabili da, Ingeniaritza Mekanikoko Graduan, eta ikasleen partetik harrera ona izan du.

Softwarea bi modutara erabili da. Alde batetik, ilustrazio-ereduak erabili dira saio teorikoetan ikasleek mekanismo jakin batzuen mugimenduak ikus ditzaten. Saio teorikoetan, behin kontzeptu geometrikoak ohiko arbelean azaldu ostean, ikasleei erakutsi zaie azalpenari dagokion eredu dinamikoa, sakoneko kontzeptuak ilustratzeko. Baliabide horiek guztiak ikaslearen eskura daude irakasgaiaren web orrian eta GeoGebraTuben. Horrela, ikasleak baliabideak erabili, jaitsi eta nahieran molda ditzake.

Bestetik, saio praktikoak izan dira, non ikasleek beren kabuz eraiki dituzten askatasun-gradu bakarreko mekanismoak. Saio praktiko horrek bi orduko iraupena izan du. Lehenengo orduan, softwarearen oinarritzko erabilera irakasten zaie, bi mekanismo sinple eraikiz (biradera-mekanismo bat; eta, lau barrako mekanismo bat). Horren ostean, bigarren orduan, bi zeregin eman zaizkie sintesi-problema ebazteko (hiru pausaguneko gorputza bideratzeko problema; eta, diad bat gaineratu behar zaion denbora-mekanismo bat).

Ikasleek interesez jarraitu dituzte saio praktikoak eta emaitzak gogobetegarriak izan dira. Eredu dinamikoak erabilgarriak iruditu zaizkie mekanismoa ulertzeko. Nolabait, GeoGebrak ikaskuntza-kurba aldapatsua duela ondorioztatu da (ikaskuntza arin lortzen da) eta mekanismoei loturiko kontzeptuak eta horien sintesia irakasteko abantailak dituela. Ikasle gehienek garaiz amaitu dituzte praktikak eta kontzeptuak ulertu dituzte.

6.6.1. *Makinen teoria*

Makinen teoria ohiko irakasgaia da Ingeniaritza Mekanikoko Graduan. Irakasgai horretan, ikasleei irakasten zaizkien ikasgai gehienek zerikusia dute makina baten parteek euren arten dituzten mugimendu erlatiboekin. Loturen analisia eta sintesia, espekak eta engranajeak ohiko ikasgaiak dira, eta horiek azaltzeko metodo geometrikoak hamarkadetan zehar garatu dira (Norton, 1999; Shigley eta Uicker, 1981).

Edonola ere, mugimenduari loturiko kontzeptu gehienak irudi estatikoen bidez azaltzen dira, eta mugimendua adierazteko geziak eta itzalak erabiltzen dira, edota sistema beraren irudi ugari erabiltzen dira, momentu ezberdinak adieraziz. Adierazpen horiek guztiak, normalean, ingeniari trebatuentzat eta ikertzaileentzat aski argiak dira. Aldiz, aski ezak gertatzen dira irudikatze-gaitasun eskaseko ikasleentzat, eta ikasle horiek arazoak dituzte sakoneko kontzeptuak ulertzeko. Irakasleek eta ikasleek irudi beraren gainean egiten dituzten interpretazio ezberdin horiek gardentasunaren ilusioa eragiten dute (Lasa eta Wilhelmi, 2012). Hain zuzen ere, eredu dinamikoen erabilerak erakutsi du intentsiboen eta estentsiboen arteko oreka lortzeko erraztasunak ematen dituela, eta, horregatik, geroz eta maizago erabiltzen dira irakaskuntzan. Mugimendu-baldintzapenei aurre egiteko baliabideen artean, geometriako software dinamikoek eskaintzen dituzte eraikuntza geometrikoak eraikitzeako tresna hoberenak. Are, eraikuntza horiek parametroen arabera eraiki daitezke, eta, parametroen balioak behin aldaturik, eraikuntza guztia automatikoki berriz sortzen da. Tresna horrek aukera handiak ematen dituen arren, erreferentzia gutxi daude, orain arte, gaiaren inguruan³⁸. Horrez gainera, bideoak, animazioak eta simulazioak ere erabil daitezke mugimendua tartean duten kontzeptuak irakasteko.

6.6.2. *Aplikazioak*

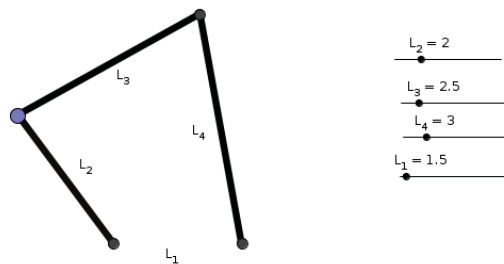
Geometriako software dinamikoaren bidez makinen teoriako ohiko kontzeptu ugari ilustra daitezke. Mekanismoaren beraren oinarritzko kontzeptutik hasi eta loturen sistema bat sintetizatzen duen eraikuntza geometrikoraino.

38. Bryant, J. eta Sangwin, C.: *How round is your circle?*, <<http://web.mat.bham.ac.uk/c.j.sangwin/howroundcom/front.html>>.

Mora Sanchez, J.: *Matemáquinas. La Geometría de los Mecanismos*, <<http://jmora7.com/Mecan/index.htm>>.

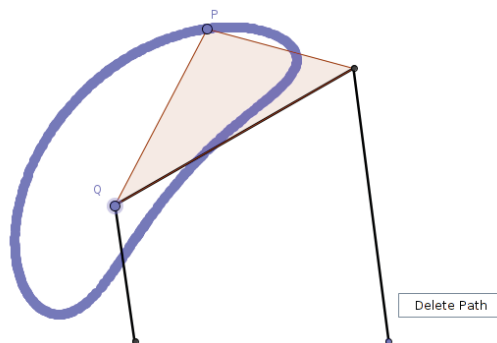
6.6.2.1. Loturen zinematika

Loturen sistemen inguruko zinematikako oinarriko kontzeptuen sarrera erraz egin daiteke lau barrako lotura baten bidez. Biradera-besoa mugi daiteke hari loturiko puntu bat arrastatuz. Ohiko kontzeptuak, hala nola alderantzizkatze zinematikoa, Grashoffen legea, abantaila mekanikoa eta akoplatze-kurbak, erraz bistara daitezke antzeko eraikuntzak erabiliz. Hala, 46. irudian, lau barrako mekanismo bat ikus daiteke. Irristailu batzuen bitartez, loturen luzerak alda daitezke. Horrela, Grashoffen legea erraz egiazta daiteke, luzeren balioen arabera mugimendua ikuskatuz.



46. irudia. Lau barrako mekanismoa, loturen luzera aldakorra Grashoffen legea egiaztatzeko.

Antzera, 47. irudiak lau barrako mekanismo bat aurkezten du non P puntu bat finkatu zaion. Segmentuarekiko duen kokapenaren arabera, P puntuak kurba ezberdin bat irudikatuko du. P puntuaren kokapena arrastatuz erabakitzen denean, mekanismoa mugi daiteke Q puntua arrastatuz.



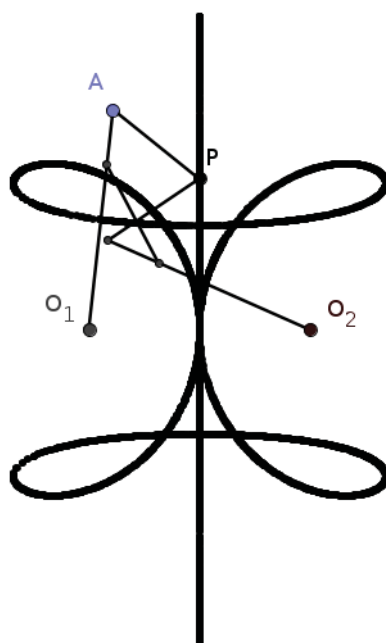
47. irudia. P puntuaren akoplatze-kurba.

Zenbait mekanismo klasiko ilustratu zaizkie ikasleei, haien zinematika ulertzeko. Eredu dinamikoa eraiki zaie ilustratzeko lerro zuzeneko mekanismoa (Watt, Roberts, Chebyshev, Peaucellier, eta Hart) eta itzulera azkarreko mekanismoa

(Whitworth). Beste zenbait kontzeptu, hala nola konfigurazio singularrak eta bidegurutzeak, geometriako software dinamikoaz errazki diseina daitezke.

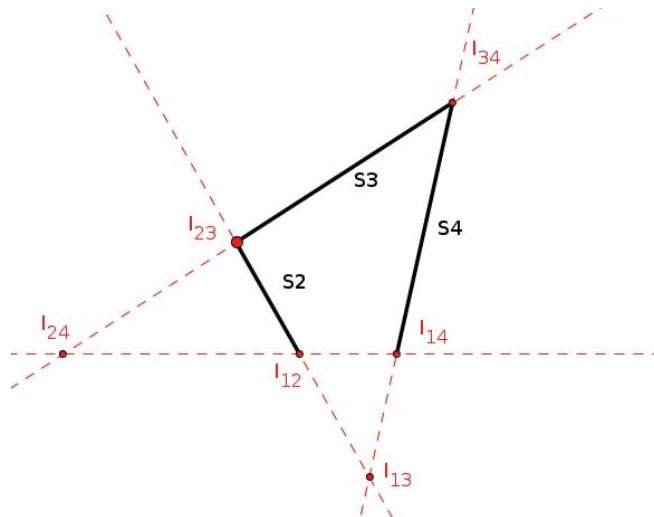
Mugitzen den elementuak konfigurazio singular blokatu bat gainditzeko duenean, mekanismoa ezin da GeoGebrarekin eraiki. Hori nabarmentzeko, GeoGebrak ezkutatu egiten du baldintzapen geometrikoa betetzen ez duen lotura jakin hori. Aldiz, bidegurutze bat gertatzen denean, erabiltzaileak ezin du kontrolatu zein ibilbideri jarraituko zaion. Ibilbide hori zenbakizko algoritmo iteratiboaren eboluzioaren mendekoa da. Batzuetan bideetako bat hartuko du, eta, beste batzuetan, beste bat.

48. irudiak Harten mekanismoa erakusten du. A puntua mugitzen denean, P puntuak ibilbide bat edo beste hartuko du. A puntua O_1O_2 lerroan dagoenean, lotura guztiak elkarrekin lerrokaturik daude. Bidegurutzeak aukera ematen dio P puntuari hiru bide hartzeko: eskuinerako kurba, ezkererako kurba edo lerro zuzen bertikala.



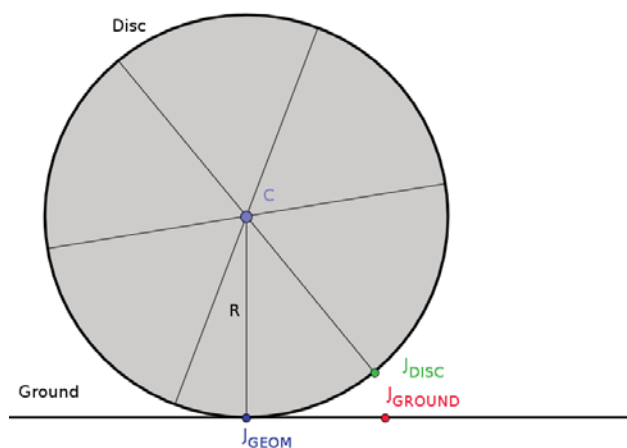
48. irudia. P puntuaren ibilbideak Harten mekanismoan.

Abiadurari loturiko zenbait kontzeptu ere deskriba daitezke eraikuntza geometrikoekin. Aldiuneko errotazio-zentroaren kokapena, esate baterako, geometrikoki kalkula daiteke, lotura-bikoteen poloetatik pasatzen diren lerroen bitartez. Are gehiago, eraikuntza geometrikoaren mugimenduari esker ikusten da aldiuneko errotazio-zentroaren kokapena mekanismoaren egoeraren arabera. 49. irudian, lau barrako mekanismo baten poloak eta aldiuneko errotazio-zentroa ikus daitezke.



49. irudia. Lau barrako mekanismo baten aldiuneko errotazio-zentroa eta poloak.

Marruskadurarik gabeko gainazal batean biraka dabilen disko baten analisisan aurki daitezke, halaber, abiadurarekin loturiko eta ulertu beharreko zenbait kontzeptu. Marruskadurarik gabeko biraketa ez-holonomikoa da. Horrenbestez, abiadura-mailan definitu behar da, honako baldintza hauetakoren bat ezarriz: $V_{\text{zorua}}(P_{\text{diskoa}}) = V_{\text{zorua}}(P_{\text{zorua}})$ edo $V_{\text{diskoa}}(P_{\text{geom}}) = V_{\text{zorua}}(P_{\text{geom}})$. Horrenbestez, ikasleei azaldu behar zaie P_{diskoa} zinematikoki diskoarena dela eta P_{geom} dela diskoaren eta zoruaren arteko kontaktu-puntua. Kontzeptu horien arabera, puntuak independenteki marrazten dira posizio arbitrarioetan, eta planoko puntu berean egiten dute bat diskoa aztergai den konfiguraziorantz mugitzen denean. 50. irudiak erakusten du kontzeptu horiek ilustratzeko erabili den eredu dinamikoa.

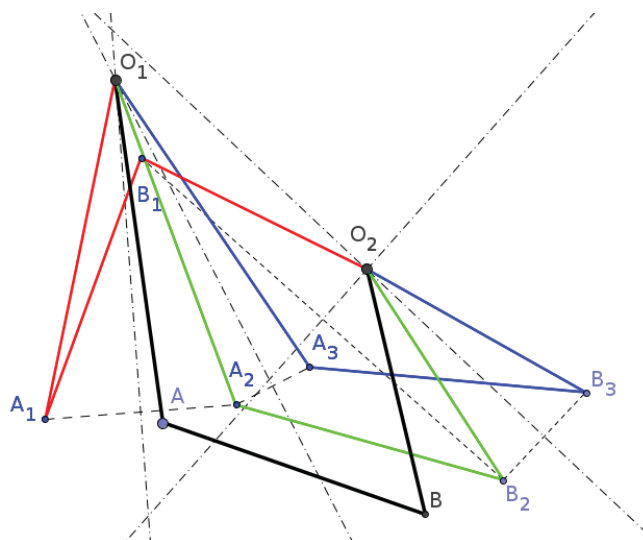


50. irudia. Marruskadurarik gabeko plano batean biratzen duen diskoa.

6.6.2.2. Mekanismoen sintesia

Mekanismoen sintesirako, prozedura geometriko ugari daude eskura (Norton, 1999; Shigley eta Uicker, 1981). Prozedura geometriko horiek ikasleek erabil ditzakete sintesiaren inguruko oinarritzko ideiak begi-bistaz ulertzeko. Oro har, geometriako software dinamikoa lagungarri gerta daiteke funtzio-sorrera, ibilbide-sorrera eta gorputz-gidatzeko problema geometrikoen testuinguruetan. Edonola ere, behin eraikuntza geometrikoa eraiki denean, ez da erraza hau ulertzea: nahiz eta prozedurak hasierako datuen edozein baliori eusten dion, lorturiko mekanismoak ez ditu zertan bete eskakizun diren baldintzak.

Esate baterako, hori gertatzen da hiru pausaguneko gorputza bideratzeko problemari. Problema horretan, lorturiko soluzioak adarkatze-akatsa sufri dezake, hau da, akoplagailua beste adar posible batean muntatua izan balitz, beste egoera batera helduko litzateke. 51. irudiak hiru pausaguneko gorputza bideratzeko problema bat erakusten du, non soluzioak adarkatze-akatsa duen.

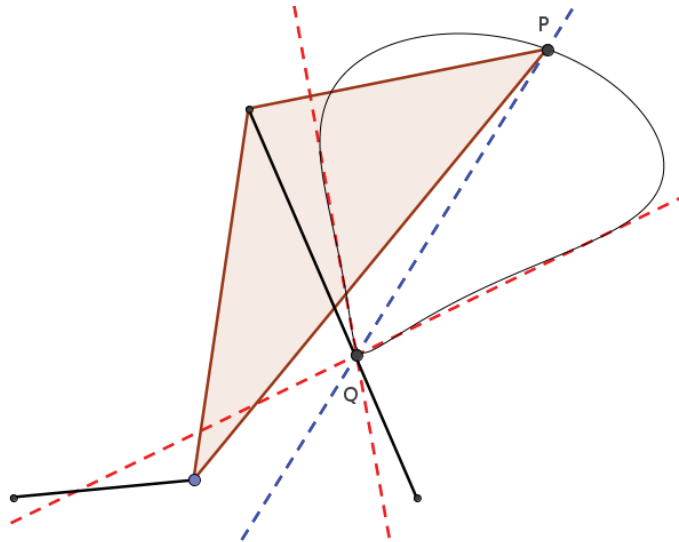


51. irudia. Hiru pausaguneko gorputza bideratzeko problema, soluzioak adarkatze-akatsa du.

Lau barrako O_1ABO_2 mekanismoa (beltza) 2 (berdea) eta 3 (urdina) posizioetatik pasako da. Aldiz, adarkatze-akatsa nabarmena da 1 posizioan (gorria). Eredu dinamikoa tresna erabilgarria da soluzio-mekanismoa mugitzeko eta aurreikusitako 3 posizioetatik pasako den egiaztatzeko.

Geometriako software dinamikoa erabil daiteke, orobat, biradera-mekanismo bat edo biradera bikoitzeko mekanismo bat ilustratzeko. Mekanismo hori sintetiza daiteke lau barrako akoplagailu bateko puntu batek egiten duen kurba lau edo

zirkularrean. Mekanismo guztiaren eredu dinamikoak eraikitzean, akoplagailuen puntuko kurba traza daiteke, non ikusiko den diad orokorra geldirik dagoela, nahiz eta akoplagailuko puntua mugitzen den kurba zuzen edo zirkularreko segmentuan. 52. irudiak erakusten du lau barrako mekanismoa, non akoplagailuko P puntua ia zuzenak diren bi segmentutan aurrera eta atzera dabilen, biraderaren itzuli bakoitzeko.



52. irudia. Biradera bikoitzeko mekanismo baten sintesia.

Esker onak

Xabier Iriarte doktoreari eskerrik beroenak, berak sortutako baliabideak hemen erakusteko baimena emateagatik. Baliabide gehiago eskura, hemen³⁹.

39. <http://tube.geogebra.org/student/b75313#> <http://tube.geogebra.org/student/b74202#>
<http://tube.geogebra.org/student/b75314#> <http://tube.geogebra.org/student/b75315#>

7. Ebaluazioa gaitasunen arabera

Liburu honen kapitulu teorikoetan, behin eta berriz nabarmendu da matematika jarduera konplexua dela. Eskakizun diren praktika operatibo eta diskurtsiboak zenbat eta askotarikoagoak izan, orduan eta gaitasun handiagoak lortuko dituzte ikasleek euren ikaskuntza matematikoetan.

Esate baterako, konbinatoriako problemak era naturalean agertzen dira bestelako testuinguru matematikoetan, hala nola zeregin geometrikoetan. Ongi txertatzen dira beste zereginetan eta jarduera matematikoa aberasten dute.

Kapitulu honetan, adibidetzat hartuko da pentominoen bidez egindako jarduera bat. Pentominoen gaineko zereginak antolatzeko, hainbat baliabide daude. Batzuk estrukturatuak dira eta ekoizleek saltzen dituzte, fabrikaturik. Baliabide estrukturatu horiek erabil daitezke tangram gisa, behin irudien eraikuntza-dialektika amaitu denean (53. irudia), baina ez dute balio eraikuntza-jarduera gisa (Wilhelmi, Belletich eta Lasa, 2013).



53. irudia. Pentonimo fabrikatuak.

Interesgarriago gerta daiteke eraikuntza-blokeak erabiltzea. Horien bidez, pentominoak eraikitzeke estrategiak gara daitezke. Horrela, mugimenduen arabera ekitabaidak erabil daitezke eraikuntza baliokideak identifikatzeko translazio, biraketa eta simetriaren arabera.

Baliabide fisikoez gain, eskura daude eredu dinamikoak ere⁴⁰. Baliabide fisikoekin gertatzen den bezala, eredu bidez pentominoak erabil daitezke, edo eraiki eta sailka daitezke. Baliabide klasikoaren artean, noski, arkatza eta papera ere erabil daitezke jarduera matematikoa garatzeko.

7.1. EBAZPEN MAXIMOKO EBALUAZIOA ETA GAITASUNEN ARABERAKO EBALUAZIOA

Transposizio didaktikoak azaltzen ditu jakintzak eskolan izango dituen adaptazio-prozesuak. Adaptazio horiek baldintzatu egiten dituzte irakaslearen interbentzioak sistema didaktikoan, eta, horregatik, garapen didaktikoek nabarmendu egiten dituzte prozesu horiek. Hori horrela izanik ere, teoria didaktikoen barnean ez dira orain arte sistematikoki aztertu ebaluazioa eta azterketa arautuen zuzenketa-irizpideak.

Atal honetan, jarduera matematikoaren ebaluazioa egiteko bi modu konparatuko dira. Alde batetik, jarduera matematikoa gauzatze maximoko irizpide absolutu baten arabera ebalua daiteke. Bestetik, ebaluazioa gauzatu daiteke curriculumetik hartutako arau baten arabera.

Atal honetan, zenbaketa-zeregin baten erantzunak aztertuko dira. Trebakuntzan dauden irakasleek aztertu egin dituzte zenbait zuzenketa-eskema. Analisiaren ostean, irakasleek subjektibotasun handia erakutsi dute proposatu dituzten zuzenketa-eskemetan. Gauzatze maximoko irizpide absolutu bati atxiki zaizkio, irreflexiboki, eta ez dituzte kontuan hartu zereginaren, curriculumaren eta ebaluazio-irizpideen arteko loturak.

7.1.1. Hasierako ebaluazioa, trebakuntza-ebaluazioa eta ebaluazio batutzailea

Ebaluazio-prozesu oro deskriba daiteke, generikoki, esanahi pertsonalen eta instituzionalen arteko adaptazioaren analisi gisa (Godino eta Batanero, 1994). Hala, 12. irudiak erakusten du esanahi pertsonalen eta instituzionalen arteko antolaketa bat.

Esanahi pertsonal eta instituzional horien arteko adaptazio-prozesuetan oinarrituz, historikoki, hiru ebaluazio mota bereizi izan dira, horiek dira:

- *Hasierako ebaluazioa edo ebaluazio diagnostikoa.* Ebaluazio honen helburua da hezkuntzarako marko bat zehaztea (ikasleen hasierako ezagutzak, gaitasunak, jarrera eta kanpo-baldintzapenak, hala nola eskura dauden baliabideen analisia, eta, azkenik, irakasleak diziplinaren gainean dituen ezagutzak eta ikasleen hasierako ezagutza horiek eboluzionarazteko dituen ezagutza didaktikoak).

40. <http://tube.geogebra.org/student/m481185> http://recursostic.educacion.es/gauss/web/materiales_didacticos/primaria/actividades/geometria/poligonos/pentominos/actividad.html

- *Trebakuntza-prozesuaren ebaluazioa.* Irakaskuntza-ikaskuntza prozesua hobetzea du helburu nagusi. Ezagutzen lorpena aztertzeaz gainera, hauek ere ebaluatu egiten dira: progresioa, zailtasunak, errore errepikariak eta horien jatorria, erabaki didaktiko eta pedagogikoen egokitasuna, irakaslearen interbentzioen eta aukeratutako baliabide material eta denborazko baliabideen efikazia, eta abar.
- *Ebaluazio batutzailea edo azken ebaluazioa.* Ikasleek eskatzen zitzaizkien ikaskuntza-helburuak bete dituztela egiaztatu nahi da ebaluazio honekin.

Behin hasierako eta amaierako ebaluazioen analisisa eginda, konparaketa horrek adierazten du esanahi pertsonalen eta instituzionalen arteko egokitzapena gertatu den. Hasierako eta amaierako ebaluazioa momentu ezberdinetan gertatzen dira. Horrez gainera, erreferentziatzat hartzen diren esanahi pertsonalak ezberdinak izango dira momentu batean (ikaskuntza-prozesuaren aurretik) zein bestean (ikaskuntza-prozesuaren emaitza gisa). Hasierako ebaluazioan ez bezala, amaierako ebaluazioan esanahi pertsonalen eta instituzionalen artean egokitzapen bat gertatu den egiaztatu behar da.

Alde batetik, hasierako ebaluazioak hezkuntza-sistemari aukera ematen dio planifikatu den edo helburu den ikaskuntza-prozesua aldeztu aurretik baloratzeko. Balorazio hori, ia beti, irakaslearen eskutik gertatuko da. Bestalde, azken ebaluazioa bi helbururekin erabil daiteke: lortu diren esanahi pertsonalen gaineko balorazioa egiteko, eta inplementatu den ikaskuntza-prozesuaren efikazia baloratzeko.

Trebakuntza-ebaluazioan sistematikoki aztertu behar dira akoplamendu-prozesuak, hau da, esanahi pertsonal deklaratu eta esanahi instituzional inplementatu arteko akoplamendu-prozesuak. Eskolan, maizegi eta baldintzapen instituzionalen eraginez, esanahi pertsonal eta instituzionalen arteko sarea gehiegi sinplifikatzen da. Sinplifikazio hori gertatzen denean, «ebaluazio»aren lekuan «ebaluazio batutzailea» egiten da. Baldintzapen instituzional horiek ez dira soilik gertatzen baliabide eta denbora-mugak daudelako. Aldiz, beste hiru faktorek ere baldintzatzen dituzte erabaki horiek: irakaslearen diziplina-ezagutzek eta ezagutza didaktikoek; hezkuntzari dagokionez, gizartean zabaldurik dauden irakasle eta ikasleen arteko ardura-banaketen pertzepzioak; eta, bereziki, jakintzak eskolan duen estatusak.

Ikaskuntza-prozesua amaitzen denean, ikasle bakoitzak kalifikazio kuantitatibo eta kualitatibo bana jasotzen du. Horrela, ikasle bakoitzak posizio erlatibo bat lortzen du taldearen barruan, eta, aldeztu aurretik antolaturiko eskala baten arabera, esleitzen zaio jakintza- eta gaitasun-maila bat.

Kalifikazio bat esleitzeak aukera ematen du, alde batetik, erakutsitako mailaren arabera onespena edo saria emateko. Bestetik, erabakitzeko balio du ea lorturiko ikaskuntza-maila hori datozen ikaskuntzak bermeekin garatzeko nahikoa ote den edota ikasle jakin bati ikasmaila edo ikaskuntza-etapa gainditzea dagokion.

Hala ere, ebaluazio batutzailearen bidez ezin dira honako hauek egin:

- *Gaitasun ezberdineko bi ikasle diskriminatu.* Esate baterako, azterketa bateko galderen puntuaketa alde aurretik ezarrita baldin badago, bi ikaslek kalifikazio bera lor dezakete galdera ezberdinei zuzen erantzunez. Ikasle horietako bakoitzak gaitasun edo trebezia ezberdinak ditu eta ebaluazio batutzaileak ezin du halakorik ezberdindu.
- *Garatu diren edukien gainean eragin.* Ebaluazio batutzailea finalista da. Ikaskuntza-prozesu jakin baten emaitza baloratzen da.

Are gehiago, normalean, jarduera matematikoaren ebaluazio batutzailea gauzatze maximoko irizpide absolutu bat erabiliz egiten da, eta ez dira egiten curriculumetik hartutako arau baten arabera. Horrela, ikasleen produkzioak modu objektiboan azter daitezkeela uste da, termino absolutuetan, baina uste hori ilusio bat besterik ez da. Ebaluazio batutzailean lortzen den neurria subjektuaren gaitasunen indikatibo bat dela uste da; are larriagoa dena, subjektuaren inteligentziaren indikatibo bat dela ere uste da.

Erlazionatu egin behar dira, ezinbestean, proposaturiko jarduera matematikoa, aztertu diren portaerak, curriculum eta ebaluazioa. Erlazio hori azaltzeko, adibide gisa, zenbaketa-jarduera baten erantzunak aztertuko dira datorren atalean. Trebakuntzan dauden irakasleek aztertu egin dituzte hainbat zuzenketa-eskema. Aurretik, edukiaren curriculumeko orientazio eta testuliburuetan duen konprezioa aztertu dira. Amaitzeko, lorturiko emaitzak eztabaidatu dira eta zenbait aholku emango dira irakasleen hasierako trebakuntzari dagokionez.

7.1.2. Konbinatoria curriculumean eta testuliburuetan

11 taulak erakusten ditu, DBH eta Batxilergorako, Nafarroako curriculumean zehazten diren konbinatoriako edukiak eta ebaluaziorako irizpideak (MEC, 2007a, 2007b). Zehaztu behar da, lehenengo eta behin, «konbinatoria» terminoa ez dela beti erabiltzen testu ofizialetan. Aldiz, erlazio inplizitu bat dago curriculumaren eta eremu jakin horri dagozkion edukien artean. Funtsean, Laplaceren legearen bidez probabilitateak kalkulatzeko, horixe da curriculumak ongi zehazten duen edukia, eta gainerakoak horren mende gelditzen dira.

Bestalde, testuliburuetan, konbinatoriaren sarrera lineala egiten da. Oro har, sekuentzia honako modu honetara deskriba daiteke: biderketaren printzipioarekin eta zuhaitz-diagramekin hasten da ikaskuntza; ondoren, bilduma antolatuen zenbaketa (aldakuntzak eta permutazioak, errepikapenik gabe eta errepikapenekin) eta antolatu gabeko bildumen zenbaketa (konbinazio arruntak, errepikapenik gabekoak) proposatzen dira; amaitzeko, zenbaki konbinatorioak eta Newtonen binomioa aurkezten dira, eta, eduki horiekin, manipulazio sinbolikoko ariketak egiten dira.

Ikasmaila	Edukiak	Ebaluaziorako irizpideak
DBH 3	<i>1 Blokea. Eduki komunak.</i>	
	Problemak ebazteko estrategiak planifikatzea eta horiek erabiltzea, hala nola zenbaketa zehatza.	7 Aldez aurreko informazio enpiriko batetik abiatuz, edota, kasu errazetan, posibilitateen zenbaketa eginez, gertaera baten probabilitateen gainean iragapenak egitea.
	<i>6 Blokea. Estatistika eta probabilitatea.</i>	
DBH 4	Probabilitateen kalkulua Laplaceren legea erabiliz. Zorizko fenomeno errazen gainean, aieruen formulazioa eta egiaztapena.	8 Problemen ebazpenerako estrategia bat planifikatzea eta hori erabiltzea, hala nola zenbaketa zehatza.
	<i>6 Blokea. Estatistika eta probabilitatea.</i>	
	Esperientzia konposatuak. Kontingentzia-taulak eta zuhaitz-diagramak erabiltzea kasuen zenbaketa egiteko eta probabilitateak esleitzeko.	8 Eguneroko egoerak eta problemak ebazteko, probabilitate kalkularen kontzeptuak eta teknikak erabiltzea.
Batxilergoa	<i>3 Probabilitatea eta estatistika.</i>	
GGZZ 2	Gertaerei probabilitateak esleitzea. Probabilitate-banaketa binomiala eta normala.	5 Zenbaketa-teknika pertsonalak, zuhaitz-diagramak edo kontingentzia-taulak erabiliz, gertaera simple eta konposatuak, menpeko eta independenteei probabilitateak esleitzea.

11. taula. DBHko eta Batxilergoko edukiak eta ebaluaziorako irizpideak.

Prozesu horren zeregin zentrala zenbaketa-problema prototipikoen ebazpena da, honako heuristika hau baliatuz:

1. Problema irakurri.
2. Erantzun galdera hauei «bai» ala «ez»: Eragiten al dio ordenak kasuen determinazioari? Elementu guztiak erabili dira? Elementuak errepika daitezke?
3. Erantzunen arabera, erabaki behar da permutazioa edo aldakuntza den (errepikapenekin edo gabe) edo konbinazioa den.
4. Formularen parametroak zehaztu eta horiek erabili emaitza lortzeko.

Heuristika horren arabera, sobera modu hertsian «planifikatzen eta erabiltzen ditu ikasleak problemak ebazteko estrategiak, hala nola zenbaketa zehatza» eta tarte handirik ez zaio uzten «zenbaketa-teknika pertsonalak» erabiltzeko, nahiz eta horiek diren Errege Dekretuak deskribatzen dituen ebaluazio-irizpideak.

7.1.3. Konbinazio-problema baten ebaluazioa

Aurreko ataleko heuristikarekin ezin ebatz daitekeen zenbaketa sistematikoko zeregin bat proposatu zitzaion ikasleei. Heuristika horren orde, zenbaketa-estrategia konplexuen erabilera ezinbestekoa da zeregina ebazteko.

Trebakuntzan dauden irakasleek, Bigarren Hezkuntzako Masterraren barnean, fikziozko ebazpenak kalifikatu behar dituzte. Jarduera horren bidez, eztabaidatu egiten dira hainbat kalifikazio-irizpide, eta, horrekin batera, irizpide horien erabilerak ikasleei ezarriko litzaizkiekeen kalifikazioetan izango duen eragina.

Eztabaidaren bitartez, honako hau eragin nahi da: konparatu nahi dira ebazpen maximoko irizpide absolutu baten arabera eta curriculumetik hartutako arau baten arabera ebaluazioak.

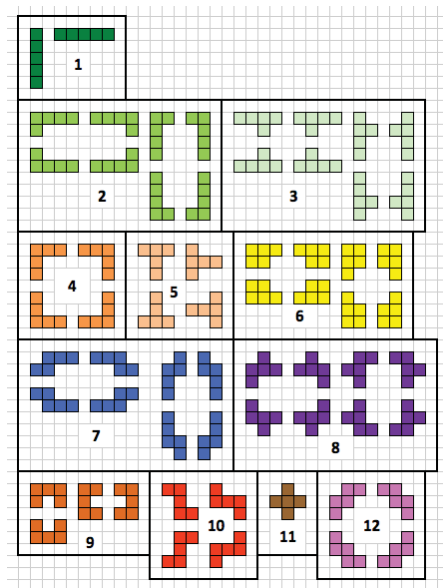
7.1.3.1. Esperimentuaren deskribapena: problema eta dinamika

Jardueraren dinamika honako hau izan da:

1. Trebakuntzan dauden ikasleei honako enuntziatu hau proposatu zaie: «Laukien sare bat emanik, 5 karratu ezarri behar dira sarearen barnean, halako moduz non karratu baten alde batek beti egin behar duen bat beste karratu baten alde batekin; arau hori jarraituz, zenbat modutara ezar daitezke karratuak? Esate baterako:

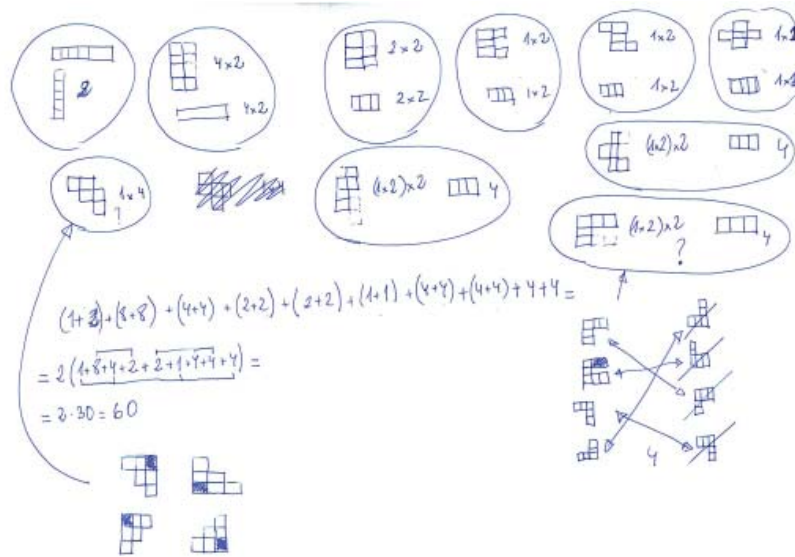


54. irudian ikus daitezke zeregina ebazteko dauden aukera guztiak. Orotara, 63 modutara ezar daitezke pieza (horiek dira, pentominoak), baldin eta pentsatzen bada bi irudi berdinak direla eta bata besteari gainean ezar daitekeela soilik translazio-mugimendu bat erabiliz. Aldiz, pentsatzen bada bi pentomino baliokideak direla translazio, biraketa edota simetriak aplikatuz, orduan 12 aukera besterik ez dago».



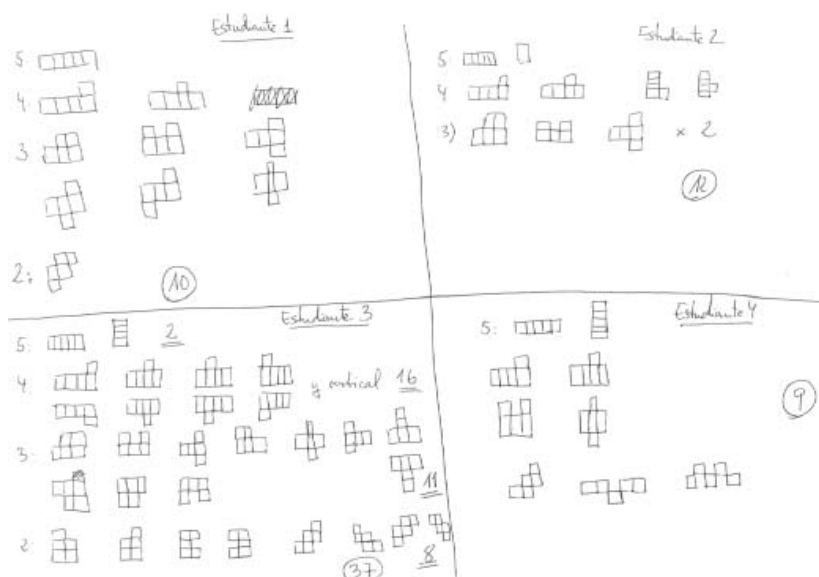
54. irudia. Pentominoen zenbaketa eta klasifikazioa.

2. Irakasleek ikasle baten proposamena jasoko dute (55. irudia), eta hura kalifikatu beharko dute. Horretarako, lehenengo eta behin, zuzenketarako eskema bat zehaztu beharko dute. Eskema hori prestatzeko, inplizituki, zeregina euren ebatzi beharko dute.



55. irudia. Lehenengo ebazpen-proposamena.

3. Irakasleek lehenengo ebazpen-proposamena zuzentzen dute (55. irudia). Erabiliko dute, alde batetik, euren zuzenketa-irizpidea, eta, ondoren, beste irakasleen zuzenketa-irizpideak erabiliko dituzte.
4. Komunean ezarriko dira irakasle bakoitzak eskema ezberdinen arabera ezarritako kalifikazioak (eurenak eta besteenak).
5. Irakasleek beste lau erantzun jasoko dituzte (56. irudia), euren eskemaren arabera zuzentzeko. Lorturiko emaitzen arabera, erabaki behar dute eskema horrekin jarraitu nahi duten, edo, aldiz, hobe den hura moldatzea edo beste eskema ezberdin bat erabiltzea.



56. irudia. Lau ikasleren fikziozko ebazpenak.

7.1.3.2. Zuzenketa-eskemak: emaitzak

Irakasleek bikoteka egin dute lan, eta 12. taulan laburbildu dira erabili dituzten zuzenketarako irizpideak. Lehenengo ebazpen-proposamenaren zuzenketa nahiko homogeneoa izan da: kalifikazioa altua izan da kasu guztietan, eta, erabilitako irizpidearen arabera (norberarena eta besteena) irakasle bakoitzak ezarritako kalifikazioen arteko ezberdintasun maximoa 1,5 puntukoa izan da (10 punturen gainean), eta, desbiderapena 0,6 puntukoa.

Gainerako lau ikasleen produkzioak aztertzeke orduan, bikote guztiek erabaki dute zuzenketarako irizpidea erantzun berrietara egokitu beharra zegoela. Izatez, zereginaren enuntziatua ez da zehazten isometriak erabili behar diren edo ez, eta, horregatik, eztabaida piztu da planteamendu ezberdinak dituzten produkzioak nola zuzendu behar diren erabakitzeko: alde batetik, bi pentomino translazioen arabera berdinak direla dioen irizpidea; eta, bestetik, bi pentomino translazio, biraketa eta simetrien arabera berdinak direla dioen irizpidea. Azkenik, erabaki da bi orientazioak zuzenak direla, eta, horrenbestez, funtsean ezberdinak diren bi erantzunek kalifikazio maximoa eskura dezaketela; kalifikazio hori izan daiteke maximoa.

Aspektua	A1	A2	B1	B2	C1	C2
Zeregina ulertu da	0	1	0	0	3	2
Estrategia: planteamendu egokia egin da	5	3	0	0	0	0
Ebazpen sistematikoa (kasuak utzi badira, zehatu egin da)	0	2	0	0	4	3
Biraketen arabera irudi baliokideak determinatu dira	4*	1,5	0	0	0	2
Simetrien arabera irudi baliokideak determinatu dira		1,5	0	0	0	2
Ebazpen globala	1	0	9	9**	3	1
Antolaketa, koherentzia, argitasuna eta garbitasuna	0	1	1	1	0	0
Ebazpenaren kalifikazioa (55. irudia) (norberaren eskema)	9,25		8,9		8	
Ebazpenaren kalifikazioa (55. irudia) (besteen eskema)	9/9		9,1 / 9,5		8 / 8	

Legenda:

A1 eta A2 (B1 eta B2; C1 eta C2): A bikotearen (B; C) ebazpenerako 1 eta 2 eskemak.

* Biraketa eta simetriaren arabera ezberdintasunak pentominoetan ez dira kontuan hartu.

** Aurreko eskeman ez bezala, non erroreak zigortzen diren (kasu gehiegi zenbatu dira edota kasu gutxi zenbatu dira), hemen eskema ezberdina da: ikasleek ongi ebatzitako zereginen arabera, puntuazio gehigarria ezartzen da.

12. taula. Zuzenketarako lehenengo eta bigarren eskemak.

13. taulan ikus daitekeen modura, bigarren zuzenketa-eskemaren bidez emandako kalifikazioek dispersio handiagoa dute. Zuzenketarako lehenengo eta bigarren eskemen bidez emandako kalifikazioen artean ezberdintasun handiak daude, bai bikote bakoitzak emandako kalifikazioen artean, baita bikote ezberdinek emandako kalifikazioen artean ere.

Erantzuna	A1	A2	B1	B2	C1	C2
Mota	9,25	9,4	8,9	9,05	8	8
1 ikaslea	5,5	9,5	4,7	8,3	4	3
2 ikaslea	4,5	6	2,3	5,1	4	3
3 ikaslea	8,75	7,8	7	6,9	6	6
4 ikaslea	4	3	2,5	5,4	3	1

13. taula. Zuzenketarako eskema ezberdinen arabera bikoteek emandako kalifikazioak.

7.1.4. Emaizten eztabaida eta irakasleen hasierako trebakuntzarako aholkuak

Inongo bikoterik ez du 10eko kalifikaziorik eman, ezta 0ko kalifikaziorik ere. Muturreko kalifikazio horiek trebakuntzan dagoen irakasle baten iruditerian agertzen dira, ondoko esanahi hauekin: ikaslearen erantzuna perfektua da (10), ikasleak ez du erantzun (0).

Ondorioz, ez zaio curriculumari inolako erreferentziarik egiten. Zuzenketarako irizpideak ez ditu arau batek ematen, aldiz, gauzatze maximoko irizpide absolutu baten arabera zuzendu dira. Galde genezake: curriculumak konbinatoriari

zeharkako erreferentzia egiten baldin badio, eta testuliburuaren konprezioa jarduera estereotipatueta mugatzen baldin bada (proposaturiko jarduera konplexutik urrun dauden jarduerak), zergatik ez zaio esleitzen kalifikazio maximoa itxarotako eta erreferentziatzko ebaluazioaren gainetik dagoen ebaluazio orori?

Matematikaren kanpoko adibide batek lagun diezaguke gertaera hori hobeto ulertzen. Hizkuntza-gaitasunez ari garela, Europako hizkuntzen erreferentziatzko markoa hartzen da kontuan⁴¹. Haren arabera, DBH amaitutakoan, ikasle batek B1 maila lortu beharra du hizkuntza jakin batean. Ikasle horrek B2 edo goragoko maila erakutsiz gero, zein kalifikazio dagokio? Inork ez luke zalantzan jarriko ikasle horri 10 puntuko kalifikazio maximoa dagokiola, nahiz eta ikasle horrek ez dituen menderatzen hizkuntzaren ñabardura guztiak, nahiz eta ez duen perfektu menderatzen.

Aurreko egoera paradigma bat da. Hizkuntzen irakaskuntzan eskolaz kanpoko marko bat existitzen da, eta hura erabiltzen da erregulatzaileris. Gainerako irakasgaietan, eta, bereziki, matematiketan, erreferentziatzko esanahi instituzionala erabili beharko litzateke erregulatzaileris. Horrela, alde batetik, objektiboki azter liteke aurrera eramandako jarduera, eta, bestetik, objektiboki ezar litezke ebaluazioan erabilitako irizpideak.

Emaitzak eta horien dispersioa aztertu behar dira, ez soilik kuantitatiboki (bikoteek emandako kalifikazioak zuzenketarako eskema ezberdinen arabera), baita kualitatiboki ere (elkarturiko balio instituzionala: ez-gaunditua, gaunditua, ongi, oso ongi edo bikain). Izatez, aldaketa kuantitatibo txiki batek aldaketa handia ekar lezake kalifikazio kualitatiboan. Batez ere, aldaketa horrek ez-gaundituaren eta gaundituaren arteko aldea markatzen badu.

Kontuan hartu behar dira, orobat, zuzenketarako eskeman irakasleek izandako portaerak. Proposaturiko bigarren eskemaren bidez egindako zuzenketetan, 1-4 ebaluazioen kalifikazioak goratzeko joera ikusten da. Aldiz, hasierako erantzuna egonkor mantentzen da. Ondorioz, besteekin alderatuz, nolabaiteko zigorra jasotzen da. Gertaera horrek hemen aurkezturiko tesia indartzen du: gauzatze maximo irizpide absolutua berraztertu behar da.

Ebaluazioa ez da esanahi pertsonalen eta instituzionalen arteko alderaketa bat besterik. Horrenbestez, irakasleen hasierako trebakuntzan ezinbestean aztertu behar dira ebaluazioarako prozesuak. Zehazki, ebaluazio-prozesuen balizko objektibotasuna salatu behar da.

Amaierako ebaluazioan, bi ohiko praktika zalantzan jarri behar dira, horiek dira: alde batetik, «kenketaren praktika», egindako errorearen arabera edo utzitako hutsuneengatik puntuak kentzea; bestetik, «gauzatze maximoa», erantzun perfektua hartzen da erreferentzia bakar gisa. Irakaslearen bi portaera horiek ez dituzte kontuan hartzen ez curriculumaz eta etapa jakin batean ikasleek dituzten gaitasunak ere.

41. Adibidez, http://cvc.cervantes.es/ensenanza/biblioteca_ele/marco

Esker onak

Honako lan hau EDU2010-14947 (MCINN-FEDER) eta EDU2012-31869 (MEC, Madrid) ikerketa proiektuen barruan egin da. Eskerrik beroenak parte hartu duten ikasleei (alfabetikoki): Jon Arraiza Inza, Tamara Arrontes Sola, Laura de Miguel Turullols, María Pérez Prados, María Mercedes Puyal Vijuesca, Ruth Unzu Ripoll eta Diego Urrutia Olo.

Erreferentziak

- Anderson, M.; Sáenz-Ludlow, A.; Zellweger, S. eta Cifarelli, V. C. (2003): *Educational perspectives on mathematics as semiosis: From thinking to interpreting to knowing*, Legas, Ottawa.
- Aké, L. P.; Godino, J. D.; Gonzato, M. eta Wilhelmi, M. R. (2013): «Proto-algebraic levels of mathematical thinking» in A. M. Lindmeier eta A. Heinze (ed.), *Proceedings of the 37th Conference of the International Group for Psychology of Mathematics Education*, **2**, 1-8. Kiel, PME. Alemania.
- Balacheff, N. (1987): «Processus de prevue et situations de validation», *Educational Studies in Mathematics*, **18(2)**, 147-176.
- Blumer, H. (1969): *El interaccionismo simbólico: Perspectiva y método*, Hora, 1982, Bartzelona.
- Bremigan, E. G. (2005): «An ananysis of diagram modification and construction in students' solutions to applied calculus problems», *Journal for research in mathematics education*, **36(3)**, 248-277.
- Briand, J. eta Chevalier, M-C. (1995) : *Les enjeux didactiques dans l'enseignement des mathématiques*, Hatier, Paris.
- Brousseau, G. (1997): *Theory of didactical situations in mathematics*, Kluwer, Dordrecht.
- Brousseau, G. (1998): *La théorie des situations didactiques*, La Pensée Sauvage, Grenoble.
- Bu, L.; Spector, J. M. eta Hacımeroglu, E. S. (2011): «Towards model-centered mathematics learning and instruction», in L. Bu eta R. Shoen (ed.), *Model-Centered Learning. Pathways to Mathematical Understanding Using GeoGebra*, Rotterdam (Herbehereak), 13-40.
- Burke, M. eta Kennedy, P. (2011): «GeoGebra: From simulation to formalization in teacher preparation and inservice programs», in L. Bu eta R. Schoen (ed.), *Model-Centered Learning*, Sense Publishers, Rotterdam, 57-72.
- Centeno, J. (1995): *La mémoire didactique de l'enseignant*, LADIST, Bordele, 154-182.
- Chevallard, Y. (2005): *La trasposición didáctica: del saber sabio al saber enseñado*, Aique.
- Cobb, P. eta Bauersfeld, H. (1995): *The emergence of mathematical meaning: Interaction in class-room cultures*, Hillsdale, Lawrence Erlbaum Associates, NJ.

- Contreras, A.; Font, V.; Luque, L. eta Ordóñez, L. (2005): «Algunas aplicaciones de la teoría de las funciones semióticas a la didáctica del análisis infinitesimal», *Recherches en Didactique des Mathématiques*, **25(2)**, 151-186.
- D'Amore, B. (2001): «Una contribución al debate sobre conceptos y objetos matemáticos. La posición “ingenua” en una teoría “realista” versus el modelo “antropológico” en una teoría “pragmática”», *Uno, Revista de Didáctica de las Matemáticas*, **27**, 51-76.
- D'Amore, B. eta Godino, J. D. (2007): «El enfoque ontosemiótico como un desarrollo de la teoría antropológica en Didáctica de la Matemática», *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, **10(2)**, 191-218.
- D'Amore, B.; Font, V. eta Godino, J. D. (2007): «La dimensión metadidáctica en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas», *Paradigma*, XXVIII. bol., **2**, 49-77.
- De Jong, T. eta Van Joolingen, W. R. (2008): «Model-Facilitated Learning», in J.M. Spector; M. D. Merrill; J. van Merriënboer eta M. P. Driscoll (ed.), *Handbook of research on educational communications and technology* [3. ed.], Lawrence Erlbaum, New York, 457-468.
- De Villiers, M. (2004): «Using dynamic geometry to expand mathematics teacher's understanding of proof», *International Journal of Mathematics Education in Science and Technology*, **35(5)**, 703-724.
- Dreyfus, T. (1999): «Why Johnny Can't Prove», *Educational Studies in Mathematics*, **38(1-3)**, 85-109.
- Drijvers, P.; Godino, J.; Font, V. eta Trouche, L. (2013): «One episode, two lenses», *Educational Studies in Mathematics*, **82(1)**, 23-49.
- Eco, U. (1976): *Tratado de semiótica general*, Lumen, 1995, Bartzelona.
- Faerna, A. M. (1996): *Introducción a la teoría pragmatista del conocimiento*, Siglo XXI, Madril.
- Font, V. (2001): «Processos mentals versus competència», *Biaix*, **19**, 33-36.
- Font, V. eta Contreras, A. (2008): «The problem of the particular and its relation to the general in mathematics education», *Educational Studies in Mathematics*, **69**, 33-52.
- Font, V. eta Godino, J. D. (2006): «La noción de configuración epistémica como herramienta de análisis de textos matemáticos: su uso en la formación de profesores», *Educação Matemática Pesquisa*, **8(1)**, 67-98.
- Freudenthal, H. (1973): *Mathematics as an Educational Task*, D. Reidel, Dordrecht, 131-146.
- , (1978): *Weeding and sowing: Preface to a science of mathematics education*, D. Reidel, Dordrecht.
- Garrido, A.; Gómez, J. L.; Vilchez, J. F.; Centelles, S. eta López, J. (2008): *Matemáticas 2º ESO*, Edebé, Bartzelona.

- Godino, J. D. eta Batanero, C. (1994): «Significado institucional y personal de los objetos matemáticos», *Recherches en Didactique des Mathématiques*, **14(3)**, 325-355.
- Godino, J. D. (1996): «Mathematical concepts, their meaning, and understanding», in L. Puig eta A. Gutierrez (ed.), *Proceedings of the 20th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, **2**, Universidad de Valencia, 417-424.
- Godino, J. D. eta Batanero, C. (1998): «Clarifying the meaning of mathematical objects as a priority area of research in mathematics education», in A. Sierpiska eta J. Kilpatrick (ed.), *Mathematics Education as a Research Domain: A Search for Identity*, Kluwer, Dordrecht, 177-195.
- Godino, J. D. eta Recio, A. M. (1998): «A semiotic model for analysing the relationships between thought, language and context in mathematics education», in A. Olivier eta K. Newstead (ed.), *Proceedings of the 22nd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, **3**, University of Stellenbosch, Hegoafrika, 1-8.
- Godino, J. D. (2002): «Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática», *Recherches en Didactiques des Mathématiques*, **22(2/3)**, 237-284.
- Godino, J. D. (2003): *Teoría de las funciones semióticas. Un enfoque ontológico-semiótico de la cognición e instrucción matemática*, Departamento de Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada, <http://www.ugr.es/local/jgodino/indice_tfs.htm>.
- Godino, J. D.; Wilhelmi, M. R. eta Bencomo, D. (2005): «Suitability criteria of a mathematical instruction process. A teaching experience of the function notion», *Mediterranean Journal for Research in Mathematics Education*, **4(2)**, 1-26.
- Godino, J. D.; Bencomo, D.; Font, V. eta Wilhelmi, M. R. (2006): «Análisis y valoración de la idoneidad didáctica de procesos de estudio de las matemáticas», *Paradigma*, **XXVII(2)**, 221-252.
- Godino, J. D.; Contreras, A. eta Font, V. (2006): «Análisis de procesos de instrucción basado en el enfoque ontológico-semiótico de la cognición matemática», *Recherches en Didactiques des Mathématiques*, **26(1)**, 39-88.
- Godino, J. D.; Font, V.; Contreras, A. eta Wilhelmi, M. R. (2006): «Una visión de la didáctica francesa desde el enfoque ontosemiótico de la cognición e instrucción matemática», *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, **9(1)**, 117-150.
- Godino, J. D.; Batanero, C. eta Font, V. (2007): «The onto-semiotic approach to research in mathematics education», *ZDM. The International Journal on Mathematics Education*, **39(1-2)**, 127-135.

- Godino, J. D. eta Font, V. (2007): *Algunos desarrollos de la teoría de los significados sistémicos*, <http://www.ugr.es/~jgodino/indice_eos.htm>.
- Godino, J. D.; Font, V.; Wilhelmi, M. R. eta Castro, C. de (2009): «Aproximación a la dimensión normativa en Didáctica de las Matemáticas desde un enfoque ontosemiótico», *Enseñanza de las Ciencias*, **27(1)**, 59-76.
- Godino, J. D.; Font, V.; Wilhelmi, M. R. eta Lurduy, O. (2011): «Why is the learning of elementary arithmetic concepts difficult? Semiotic tools for understanding the nature of mathematical objects», *Educational Studies in Mathematics*, **77(2)**, 247-265.
- Gusmao, T. R. S. (2006): *Los procesos metacognitivos en la comprensión de las prácticas de los estudiantes cuando resuelven problemas matemáticos: una perspectiva ontosemiótica*, doktore-tesia, Universidade de Santiago de Compostela.
- Hoyles, C. eta Noos, R. (2003): «What can digital technologies take from and bring to research in mathematics education?», in A. J. Bishop; M. A. Clements, C. Keitel-Kreidt; J. Kilpatrick eta F. K. S. Leung (ed.), *Second international handbook of mathematics education*, 323-349.
- Lasa, A.; Sáenz de Cabezón, A. eta Wilhelmi, M. R. (2009): *Restrictions in the lecture of geometry with GeoGebra in Primary School Teacher Education*, International GeoGebra Conference, uztailearen 14tik-15era, University of Upper Austria, Linz.
- Lasa, A.; Sáenz de Cabezón, A. eta Wilhelmi, M. R. (2010): «Uso de GeoGebra en la Titulación de Maestro», *Epsilon*, **27(1)**, 7-14.
- Lasa, A. (2011): *Papel de la noción de función en la resolución de ecuaciones en 2º ESO*, master bukaerako lana, Nafarroako Unibertsitate Publikoa, Iruñea.
- Lasa, A. eta Wilhelmi, M. R. (2013a): «GeoGebra en la formación de profesorado de E.S.O y Bachillerato», *Cónica*, **3**, 30-32, <<http://acgeogebra.cat/joomla/index.php>>.
- , (2013b). «Use of GeoGebra in explorative, illustrative and demonstrative moments», *Revista do Instituto GeoGebra Internacional de Sao Paulo*, **2(1)**, 52-64, <<http://revistas.pucsp.br/index.php/IGISP/article/view/15160/12279>>.
- , (2013c): «Modelos dinámicos y resolución de ecuaciones con GeoGebra», *XVI Jornadas para el Aprendizaje y la Enseñanza de las Matemáticas*, uztailearen 2tik-5era, Palma.
- , (2013d): «Procesos de estudio de ecuaciones e inecuaciones en secundaria», *Investigación en Educación Matemática XXVII*, irailaren 5etik 7ra, Universidad del País Vasco, Bilbo.
- , (2014): «Integración de GeoGebra en el diseño de situaciones didácticas en Educación Primaria», *VI Jornades de l'Associació Catalana de GeoGebra: Nous reptes i noves solucions: el GeoGebra continua avançant*, otsailaren 14-15a, Universitat Pompeu Fabra, Bartzelona, <http://acgeogebra.cat/vi_jornades.html; <<http://www.geogebraTube.org/student/mrDIcsgI5>>.

- Milrad, M.; Spector, J. M. eta Davidsen, P. I. (2003): «Model facilitated learning», in S. Naidu (ed.), *Learning and teaching with technology: Principles and practices*, Kogan Page, Londres, 13-27.
- Ministerio de Educación y Ciencia (MEC) (2007a): «Real Decreto 1631/2006, de 29 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas correspondientes a la Educación Secundaria Obligatoria», *Boletín Oficial del Estado (BOE)*, **5**, urtarrilaren 5a, 677-773.
- , (2007b): «Real Decreto 1467/2007, de 2 de noviembre, por el que se establece la estructura del bachillerato y se fijan sus enseñanzas mínimas», *Boletín Oficial del Estado (BOE)*, **266**, azaroaren 6a, asteartea, 45.381-45.477.
- Norton, R. (1999): *Design of machinery: an introduction to the synthesis and analysis of mechanisms and machines*, McGraw-Hill.
- Peirce, C. S. (1978): *The Collected Papers of Charles Sanders Peirce*, The Belknap Press of Harvard University Press, Cambridge, MA.
- Rabardel, P. (2002): *People and technology. And cognitive approach to contemporary instruments*, <<http://ergoserv.psy.univ-paris8.fr>>.
- Ramos, A. B. eta Font, V. (2008): «Criterios de idoneidad y valoración de cambios en el proceso de instrucción matemática», *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, **11(2)**, 233-265.
- Sáenz de Cabezón, A.; Lasa, A. eta Wilhelmi, M. R. (2009): *La gestión del tiempo en la enseñanza de la geometría*, International GeoGebra Conference, uztailearen 14-15a, University of Upper Austria, Linz.
- Sáenz de Cabezón, A.; Lasa, A. eta Wilhelmi, M. R. (2010): «Utilización de GeoGebra en proporcionalidad geométrica en 2º ESO», *Epsilon*, **27(1)**, 21-32.
- Sáenz-Ludlow, A. eta Presmeg, N. (2006): «Semiotic perspectives on learning mathematics and communicating mathematically», *Educational Studies in Mathematics*, **61(1-2)**, 1-10.
- Saussure, F. (1915): *Curso de lingüística general*, Alianza, 1991, Madril.
- Sfard, A. (2000): «Symbolizing mathematical reality into being – Or how mathematical discourse and mathematical objects create each other», in P. Cobb; E. Yackel eta K. McCain (ed.), *Symbolizing and Communicating in Mathematics Classroom*, LEA, Londres, 37-97.
- Shigley, J. eta Uicker, J. (1981): *Theory of Machines and Mechanisms*, McGraw-Hill Book Company.
- Steinbring, H. (2006): «What makes a sign a mathematical sign? – An epistemological perspective on mathematical interaction», *Educational Studies in Mathematics*, **61(1-2)**, 133-162.
- Trouche L. (2000): «La parabole du gaucher et de la casserole à bec verseur: étude des processus d'apprentissage dans un environnement de calculatrices symboliques», *Educational Studies in Mathematics*, **41**, 239-264.
- Vygotski, L. (1934): *Pensamiento y lenguaje*, Paidós, 1995, Buenos Aires.

- Wilhelmi, M. R.; Godino, J. D. eta Font, V. (2007): «Bases empíricas de modelos teóricos en didáctica de las matemáticas: reflexiones sobre la teoría de las situaciones didácticas y el enfoque ontológico y semiótico», M. J. Alderete eta M. L. Porcar (ed.), *Temas de Didáctica de las Matemáticas*, Universidad de Cuyo, Mendoza, Argentina, 1-20, <<http://www.webpersonal.net/vfont/Burdeos.pdf>>.
- Wilhelmi, M. R.; Belletich, O.; Lasa, A. eta Reina, L. (2013): «Evaluación de respuestas a una tarea de recuento», in J. M. Contreras; G. R. Cañadas; M. M. Gea eta P. Arteaga (ed.), *Actas de las Jornadas Virtuales en Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria*, Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada, Granada, 285-292.
- Wittgenstein, L. (1953): *Investigaciones filosóficas*, Crítica, 1988, Bartzelona.
- Yackel, E. eta Cobb, P. (1996): «Sociomathematical norms, argumentation, and autonomy in mathematics», *Journal for Research in Mathematics Education*, **27(4)**, 458-477.

Sailean argitaratu diren beste liburu batzuk

Bioestatistika

Arantza Urkaregi
1991n argitaratua
ISBN: 84-86967-37-6

Kalkulu diferentziala eta integrala I

Joserra Aizpurua eta Patxi Angulo (koord.)
1992an argitaratua
ISBN: 84-86967-47-3

Kalkulu diferentziala eta integrala II

Joserra Aizpurua eta Patxi Angulo (koord.)
1992an argitaratua
ISBN: 84-86967-48-1

Ekuzio diferentzialak. Aplikazioak eta ariketak

Elena Agirre (euskaratzailea)
1994an argitaratua
ISBN: 84-86967-63-5

Optimizazioa. Programazio lineala

Victoria Fernandez eta Ana Zelaia
1992an argitaratua
ISBN: 84-86967-65-1

Estatistikarako Sarrera

Karmele Fernandez
1996an argitaratua
ISBN: 84-86967-70-8

Estatistikarako Sarrera. Ariketak

Karmele Fernandez, Josu Orbe, Marian Zubia
1997an argitaratua
ISBN: 84-86967-80-5

Estatistika I eta Estatistika II. Ariketak

Karmele Fernandez, Josu Orbe, Marian Zubia
1996an argitaratua
ISBN: 84-86967-79-1

R Hasiberrientzat

Gorka Azkune eta Yosu Yurramendi (itzul.)

2005ean PDFn argitaratua

ISBN: 84-86967-077-7

Estatistikaren oinarriak. Ariketak

Elena Agirre Basurko

2006an argitaratua

ISBN: 84-86967-079-3

Kalkulu diferentziala eta integrala (2. argitalpena)

Patxi Angulo

2009an argitaratua

ISBN: 978-84-8438-236-2

Erregresio lineala, bariantza-analisiak eta hipotesi-testak. Datu-analisirako lanabesak

Xabier Isasi Balanzategi

2010ean argitaratua

ISBN: 978-84-8438-290-4

Estatistikaren Oinarriak. Ariketak (2. argitalpena)

Elena Agirre Basurko

2010ean argitaratua

ISBN: 978-84-8438-288-1

Ekuzazio diferentzial arruntak askatzeko zenbakizko metodoak

Elisabete Alberdi Celaya

2012an argitaratua

ISBN: 978-84-8438-419-9

R Commander eta Datuen Analisia

Paula Elosua Oliden, Juan Etxeberria Murgiondo

2013an argitaratua

ISBN: 978-84-8438-443-4

Irakaslegaienezako matematika eta bere didaktika

Jesús García, Josu Gotzon Ruiz de Gauna, Joxemari Sarasua

2013an argitaratua

ISBN: 978-84-8438-445-8

Algebra: teoria eta ariketak. Mathematica programaren aplikazioa

Elisabete Alberdi Celaya, Isabel Eguia Romero, Aitziber Unzueta Inchaurre

2013an argitaratua

ISBN: 978-84-8438-466-3