Aitzinsolasa
(edo nola atera etekina liburu honi)

Ematen dugu denetarik,
inspiraziorik izan ezik.
(K. Kalocsay)

Curriculum-estandarren ikuspegitik problemak ebazteko gauza izatea matematika-gaitasunaren adierazle nagusia da eskolaldian zehar. Eskuetan duzun liburu honek, irakurle, bereziki (ez soilik, baina) Lehen Hezkuntzako irakaslegaiei lagundu nahi die zenbaitetan malkartsuxeak diren aritmetika nahiz aljebra eremuetako problemagintza bideetan barna.

Matematika-problema bat, oro har, hau da: erantzun bat behar duen egoera bat, baina dugun ezagutza zuzen aplikatuz erantzuterik ez duguna. Eta hemen bereizketa bat egin behar dugu aurrena: problema bat eta ariketa bat gauza oso bana dira, eguneroan biak nahasteko joera bada ere. Ariketak aplikaziozko jarduerak dira, eta mekanikoki eta gehiegi hausnartu gabe, di-da, ebatz daitezke aurretik dakigun formula, algoritmo edo beste prozedura ezagun bat erabiliz. Problemak, ordea, bestelakoak dira: normalean ez dugu eskura hura ebazteko berehalako prozedurarik, eta kasuan kasuko estrategiak aplikatu behar ditugu, halakoek arrakasta izango duten jakin gabe aplikatu ere. Ziurgabetasun horregatik da, hain zuzen ere, estu-estua problema bat ebazteak sortzen digun inplikazio emozionala. Bai, problemek deseroso sentiarazten gaituzte: askotan ez atzera eta ez aurrera egokitzen gara haien aurrean, nondik heldu asmatu ezinik, eta ez da samurra izaten dena bertan behera uzteko tentazioari amore ez ematea. Baina hura pozaren betea, problema bat ongi kostata ebatzi ondokoa!

Liburu honen xedea ez da problemak ebazteko prozedura heuristikoak erakustea (estrategiak, teknikak, gidalerroak…), edo problemen ebazpide-faseak deskribatzea (deskriba daitezkeen heinean, behintzat), ezta problema motak ezaugarritzea ere. Hau ez da, halaber, Lehen Hezkuntzako problemak nola ebatzi behar diren azaltzeko liburua: etapa horretako ebazkerak, dagozkien aldagai didaktikoak, ebaluazio-irizpideak zein errubrikak osatzeko gidalerroak beste nonbait daude garaturik. Halakoen gainean argi bila dabilen irakurle interesdunak badu, bestela ere, nora jo[1]. Problema-liburu honek, ordea, aipatu testuliburu horietan jasota ez dauden bestelako eskakizun batzuei erantzun nahi die: alegia, Lehen Hezkuntzako Graduko irakaslegaiak problemagintzan trebatzeko materiala da hau, besteak beste haiek (ez LHko ikasleek!) garatu beharko luketen arrazoibide aljebraikoaren perfekzio-maila berariaz erabil dezaten. Bistan da liburuko hainbat problema (ez denak, seguruenik!) ez direla LHko geletarako egokiak: eta are gutxiago proposatzen diren ebazpen moduak. Emandako ebazkera guztiak, ordea, prozedura aljebraikoak barne, bat datoz LHko irakaslegaientzako ikaskuntza-helburuekin.

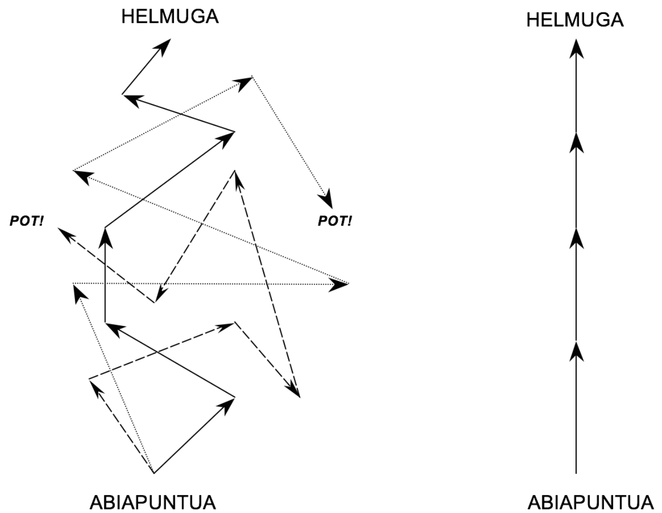
Liburu honen izan-nahia, berriz, ezinbestekoa eta are praktikoagoa da, gure ustean: oinarrizko problema ebatzien eta pausoz pauso azalduen bilduma baita lan hau. Esan nahi baita, ezer gutxi da teknika heuristikoak buruz jakitea horiek praktikan nola gauzatzen diren ez badakigu, edo ebatzitako problema eredugarrien corpus mardulxerik ez badugu eskura, edo geuk gerok problema bat ebatzi ondoren gure ebazkera zuzena den jakiterik ez badugu. Behar horri erantzun nahi dio lan honek.

Ez da egiteko samurra nola azaldu argiro problema baten ebazpidea zuhaitzen adar hosto-zabalek muina den basoa gordeko ez badute: urrats guztiak xehe-xehe emanda, xehetasun eta hitz parrasta lagun, edo arrazoibidearen zenbait berehalako katebegi esplizitatu gabe, prozesua areago ez iluntzeagatik. Orekari eusten saiatu gara gehienetan, baina, dudazko kasuetan, nahiago izan dugu holako edo halako zurkulu, beti ere erraz igartzekoa, irakurlearen esku uztea.

Egonezin bat kuxkuxka dabilkigu egileoi, baina, eta zurekin partekatu nahi genuke, irakurle, liburu honi etekin osoa aterako badiozu. Gure kezkak gaizki-ulertu aski hedatu batean du oinarria, eta liburu hau gaizki erabiltzera lerrarazi dezake oharkabeko irakurlea. Hara, inork ikasten al du margotzen museoetan eskegitako koadroak ikusiz bakarrik? Ez horixe! Inork ikasten al du pianoa jotzen piano-jotzaile bikainak entzunez eta gehiagorik gabe? Ezta. Bada, problemak ebazten gauza bera, haren batean. Zoritxarrez hainbat ikaslek uste dute irakasleak arbelean ebazten dituen problemak ikuste eta ulertze hutsez problemak egiten ikasiko dutela, goi-ixuriz edo, aurretik (etxean eta beren kabuz, adibidez) pentsatu ez badituzte ere. Uste ustela da hori, inondik ere. Izan ere, produktu bukatutzat

[1] Adibidez:
Sarasua, J.; Ruiz de Gauna, J. G.; García, J; *Arrazoibide matematikoa eta problemagintza.* Erein, 2013.
Ruiz de Gauna, J. G.; García, J; Sarasua, J.; *Irakaslegaientzako matematika eta bere didaktika.* UEU, 2013.

aurkezten diren ebazkerek (arbelekoek edo liburu honetakoek, kasu) zerikusi gutxi izaten dute delako problema ebazteko jarraitu den benetako ibilbidearekin: argia eta lineala izaten da ebazpidea haietan, eta estropezurik gabe lerratzen da hasi eta buka. Nor problema baten aurrean jartzen denean, berriz, oso bestelakoa izaten da kontua. Bidea gutxitan da lineala, eta bihurguneak, ez-atzera-ta-ez-aurrerak, joan-etorriak eta bestelako hinki-hankak ohiko gauzak dira. Itzulinguru edo bat-bateko bide-aldaketa horiek ez dira erakusten problema-liburuetako orrietan, egileek noizbait horiek guztiak ibili badituzte ere (langintzan nahikoa eskarmentu bereganatu arte, behinik behin!). Liburuko orrietara iristen dena ebazkera egokitua da, txukuna eta ongi egituratua, baina ebazte-prozesuaren behaztopoak ageri ez dituena: film biribila eta bukatua da hura, nolabait esan, baina filmaren *making-of*-aren malkarrak eta xoko-mokoak gordean dituena.



Problema baten ohiko ebazpidea: gora beheratsua

Problema baten ebazpidea arbelean edo problema-liburu batean: lineala

Hara, zer egiten dute euskal behiek belarrarekin? Euskal behiek hausnartu egiten dute belarra, ezta?: hau da, ahoan hartu eta luze darabilte kolkoan gora eta behera sabelera baino lehen, ongi mamurtu eta korapilo guztiak askatu arte erabili ere. Bada, zeuk ere, irakurle, halaxe egin behar zenuke liburu honetako problemekin: enuntziatua irakurri eta ziztuan soluziora jo beharrean, ongi hausnartu, mamurtu eta xehe-xehetu arte erabili behar zenuke problema bakoitza zeure hausnar-ontzian, zailtasunak identifikatuz eta korapiloak zeure kabuz askatzen saiatuz. Problema baten koskak hura ebaztean baizik ez baitira ikusten. Askotan ez zaizu lehen ahaleginean aterako, edo baliteke trabaturik geratzea bide erdian, zerbait aurreratu baduzu ere: normala da, ez etsi! Beharrezkoa bada, jaiki aulkitik, joan hozkailura eta jan-edan zerbait. Hartu atseden. Zeure burua arroztu problematik puska batez. Eta ekiozu, berriz, beste une batean. Edo beste egun batean, zergatik ez? Ez pentsa alferrik galdutako denbora denik hori, ezin hobeki inbertitutakoa da eta! Eta azkenik, jakina, ez baduzu ebazterik lortzen, edo lortu duzula uste baduzu baina ez bazaude ziur, jo orduan soluziora. Esan gabe doa, noski, liburu honetan aurkituko dituzun ebazkerek ez dutela zertan bakarrak izan. Hau da, problemak era batera baino gehiagotara ebazten ahal dira, eta zure ebazkera gurea bezain zuzena eta egokia izan daiteke. Areago: zure ebazkera gurea baino hobea izango da, inondik ere, zeure-zeurea delako, zeuk zerorrek ongi kostata libratu duzulako, eta harro demonio zaudelako zeure buruaz! Bejondeizula!

Jardutetik etorriko zaizu problemak ebazteko gaitasuna. Ekinaren ekinez konfiantza eta atsegina zeureganatuko dituzu. Bada, nondik eskuratu problemak egiten jarraitzeko adorea praktikan bertan ez badugu atseginik hartzen? Piano-jotzaile batek ere ezin hobe dezake bere teknika pianoa joz ez badu gusturik hartzen. Matematika gozatzen eta problemagintzan aurrera egiten akuilu eta bide-leungarri izango ahal zaizu liburu hau.

Ongi eginak on dagizula, gaizki eginak barkatu.

Egileak
Joxemari Sarasua (joxemari.sarasua@ehu.eus)
Ane Izagirre (ane.izagirre@ehu.eus)

1. Atala

Zenbaki arrazionalak eta proportzioak

1.1. Problema teorikoak

1.1.1. Problema. *Izan bedi* $\frac{a}{b}$ *zatikia. Zer zenbaki, x eta y, batu dakizkieke zenbakitzaile eta izendatzaileari, hurrenez hurren,* $\frac{a}{b}$*-ren zatiki baliokidea lortzeko?*

Ebazpena: *Honako ekuazio hau planteatuko dugu a zenbakitzaileari x zenbakia eta b izendatzaileari y zenbakia batzean* $\frac{a}{b}$*-ren zatiki baliokidea lortuz:*

$$\frac{a+x}{b+y} = \frac{a}{b} \Longleftrightarrow (a+x)b = (b+y)a \Longleftrightarrow ab+xb = ba+ya \Longleftrightarrow xb = ya$$
$$\Longleftrightarrow \frac{x}{y} = \frac{a}{b} \Longrightarrow x = ka \text{ eta } y = kb, \forall k \in \mathbb{Z}$$

Ondorioz, zatiki baliokideak lortuko ditugu, x eta y zenbakiak a eta b-ren multiploak badira, hurrenez hurren.

1.1.2. Problema. *Zenbaki baten erdia gehi bere ondoz ondokoaren herena gehi hurrengoaren laurdena bere burua da. Zeintzuk ote dira hiru zenbakiok?*

Ebazpena:

$$\frac{x}{2} + \frac{x+1}{3} + \frac{x+2}{4} = x \Longleftrightarrow x = \frac{6x+4x+4+3x+6}{12} \Longleftrightarrow 13x+10 = 12x$$
$$\Longleftrightarrow x = -10$$

Beraz, ondoz ondoko hiru zenbakiak $-10, -9$ *eta* -8 *dira.*