Irakaslegaientzako matematika eta bere didaktika

Josu Ruiz de Gauna Gorostiza
Jesús García Iturrioz
Joxemari Sarasua Fernández

eman ta zabal zazu

Universidad del País Vasco
Euskal Herriko Unibertsitatea

UEU

IRAKASLEGAIENTZAKO MATEMATIKA ETA BERE DIDAKTIKA

Josu Ruiz de Gauna Gorostiza
Jesús García Iturrioz
Joxemari Sarasua Fernández

Udako Euskal **Unibertsitatea**
Bilbo, 2013

© Udako Euskal Unibertsitatea
© Josu Ruiz de Gauna Gorostiza, Jesús García Iturrioz, Joxemari Sarasua Fernández

ISBN: 978-84-8438-464-9
Lege-gordailua: BI-0599-2013

Inprimategia: PRINTHAUS S.L., Bilbo
Azalaren diseinua: Igor Markaida
Hizkuntza-zuzenketen arduraduna: Ander Altuna Gabiola

Banatzaileak: UEU. Erribera 14, 1. D BILBO telf. 946790546 Faxa. 944793039
Helbide elektronikoa: argitalpenak@ueu.org
www.ueu.org

Elkar Banaketa: Igerabide, 88 DONOSTIA

Galarazita dago liburu honen kopia egitea, osoa nahiz zatikakoa, edozein modutara delarik ere, edizio honen Copyright-jabeen baimenik gabe.

Aurkibidea

HITZAURREA..... 5

LEHENENGO GAIA. MATEMATIKAREN IKUSPEGI OROKORRA 7
1. MATEMATIKAKO ZEREGINAK: PRAKTIKOA, INSTRUMENTALA ETA FORMALA..... 9
2. MATEMATIKAREN HISTORIA: ZENBAKIKUNTZA-SISTEMAK..... 13
3. MATEMATIKAREN HISTORIA: GEOMETRIA EUKLIDEARRA 25
4. MATEMATIKAREN HISTORIA: ESTATISTIKA ETA PROBABILITATEA. 35
   4.1. Estatistika..... 35
   4.2. Probabilitatea 37
5. ARRAZOIBIDE MATEMATIKOA. KUANTIFIKATZAILE LOGIKOAK ETA IRUDIKAPEN GRAFIKOAK..... 43
   5.1. Arrazoibide matematikoa..... 44
   5.2. Multzoak eta irudikapen grafikoak 50
6. MATEMATIKAREN IRAKASKUNTZAREN BILAKAERA. LEHEN HEZKUNTZAKO CURRICULUMA EUSKADIKO AUTONOMIA ERKIDEGOAN..... 57
   6.1. Mundua 57
   6.2. Euskadi eta Espainia 60
   6.3. NCTM eta Estandarrak 66
7. OHARRAK ETA BIBLIOGRAFIA..... 71
8. ERANSKINA: EAE-KO CURRICULUM-DEKRETUA. MATEMATIKAKO EDUKIAK..... 73

BIGARREN GAIA. PROBLEMEN EBAZPENA 91
1. PROBLEMEN EBAZPEN OROKORRA..... 93
   1.1. Problemak eta ariketak..... 93
   1.2. Problema baten ebazpenerako faseak eta estrategiak 94
   1.3. Proposatutako jarduerak..... 100
2. ESKOLA-PROBLEMAK..... 101
   2.1. Protokoloa..... 101
   2.2. Problema motak Lehen Hezkuntzan..... 102

2.3. Eskola-problemen zailtasuna 107
2.4. Enuntziatuen lanketa 110
2.5. Proposatutako jarduerak 115
3. PROBLEMEN EBAZPENAK ETA OINARRIZKO GAITASUNEN GARAPENA 127
4. LAN PRAKTIKOA 131
5. OHARRAK ETA BIBLIOGRAFIA 133

HIRUGARREN GAIA. TEKNOLOGIA BERRIAK ETA MATEMATIKAREN IRAKASKUNTZARAKO BALIABIDEAK 135
1. MATEMATIKAREN IRAKASKUNTZA ETA IKT-AK 137
1.1. Gaitasun digitala 137
1.2. IKTak matematikaren irakaskuntzan 137
2. HEZIKETA-SOFTWAREA MATEMATIKAREN IRAKASKUNTZARAKO 139
2.1. Logo 139
2.2. Geometria dinamikoa 141
3. MATEMATIKAREN IRAKASKUNTZARAKO BALIABIDE DIDAKTIKOAK 145
3.1. INTEFen proiektuak (Hezkuntza Teknologien eta Irakasleen Prestakuntzaren Institutu Nazionala) 145
3.2. Matematikari buruzko web orriak 148
3.3. Testuliburu digitalak 150
4. JARDUERAK 153

Hitzaurrea

Esku artean duzun liburu hau Lehen Hezkuntzako Graduko Irakaslegaientzako Matematika eta Bere Didaktika I irakasgairako testuliburua izateko prestatu dugu.

Hau, graduko ikasketen lehen ikasturteko 6 kredituko lau hileko irakasgaia da. Irakasgaia Matematikaren Didaktika jakintza-arlokoa da.

Bere baitan hiru gai hartzen ditu. Lehendabizikoan, «Matematikaren ikuspegi orokorra», eskola-matematikan ohikoak diren gai batzuetatik ibilbidea egingo dugu, eta matematikaren arrazoibiderako eta multzoen teoriarako sarrera; azken hauek, matematikaren irakaskuntzan eduki zuten protagonismo erabat desagertu den arren, problemen irudikapenerako tresna pedagogiko baliotsua baitira. Baita ere, matematikaren irakaskuntzaren historiatik ibilbidea egiten da, eta indarrean dagoen, eta matematikari erreferentzia egiten dion, legediarekin bukatzen da.

Bigarren gaiaren izenburua «Problemen ebazpena» da; bertan, tratamendu orokorretatik abiatuta eskola-problemak ikastera igarotzen da. Berau izan da tradizionalki matematikako berezko edukia eta jarraitzen du izaten curriculumean garrantzi handiko gaia delako.

Hirugarren gaian matematikaren irakaskuntzarako baliagarriak suerta daitezkeen teknologia berrietatik ibilbidea egiten da.

Testuliburu hau hiru ikasturtetan esperimentatua, aldatua eta hobetua izan da, eta hori dela-eta, Irakasle Ikasketetako ikasleentzat lagungarri eta baliozkoa izango dela espero dugu, beraiengan antzinako zientzia honekiko, baina gaur egunekoa eta baliagarria ere bai, interesa eta zaletasuna pizteko.

Josu Ruiz de Gauna Gorostiza
Jesús García Iturrioz
Joxemari Sarasua Fernández

Leioa, 2013ko ekaina.

Lehenengo gaia.
Matematikaren ikuspegi orokorra

1. Matematikako zereginak: praktikoa, instrumentala eta formala

Oso ohikoa da, Mendebaldeko filosofia eta zientziarako, greziarren matematikak eduki duen garrantzia azpimarratzea. Matematika eta matematikari izendapenak ere, Europako hizkuntza gehienetan grekoaren jatorria du. *'Mathema'* aditzetik eratorria (=ezagutu edo ikasi), esanahi hau du: ikasi dena edo ulertu dena, edo eskuratutako ezagupena.

Iturri desberdinetatik jakin ahal izan dugu Pitagoras izan zela lehenengo aldiz filosofia eta matematika hitzak erabili zituena (…) Pitagorasek bere buruari filosofo edo jakinduriaren maitale esaten zion.

Matematika baliotsua da gure gizartean bai bere praktikotasunagatik (bizitza arruntaren egoerak), bai bere balio instrumentalagatik (beste zientzia eta aplikazioetarako) bai eta bere balio formalagatik ere (mintzaira, logika, arrazoibideak). Matematikak gure gizartean duen balioa erakusten duten adibide eta problema batzuetara iritsi aurretik, goazen bada, lehendabizi, matematikaren irakaskuntzaren auzirako sarbide adeitsua egitera bi txisteren bidez: lehenengoa, Internetetik ateratako kontakizuna da, nahiz eta XX. mendeko 70eko hamarkadan zenbait ikasle-gunetan ezaguna izan; bigarrena, prentsa idatzian agertua, txiste grafikoa da; biek ala biek, parodia moduan izan arren, errealitatearekin erlazioa dute, nahiz eta errealitate hori iragan berri den.

Problemak Matematikarekin…?

Horregatik gaude gauden moduan: neurona nagiak…

> Pasa den astean produktu bat erosi nuen 158 €-an. Kutxazainari 200 € eman nizkion eta txanpon gehiago ez hartzearren poltsikoan neramatzan 8 € atera nituen. Kutxazainak diru osoa hartu zuen eta, itxuraz zer egin jakin gabe, kutxa erregistratzaileari begira gelditu zen. Azalpenak ematen saiatu nintzen, esanez 50 €-ko billetea itzuli behar zidala, baina bera ez zen konbentzitu.

Zergatik gogoratzen dut pasadizo hori? Matematikaren irakaskuntzaren bilakaeraz hausnarketa egin nuelako. Bilakaera ondokoa duzue:

1. 1960ko Matematikaren Irakaskuntza:

   Nekazari batek patata zaku bat 1.000 pezetan saltzen du. Produkzio-gastuak salmentaren prezioaren 4/5 badira, zein izango da etekina?

2. 1970eko Matematikaren Irakaskuntza Tradizionala:

   Nekazari batek patata zaku bat 1.000 pezetan saltzen du. Produkzio-gastuak salmentaren prezioaren % 80 dira, zein da etekina?

   1970eko Matematikaren Irakaskuntza Modernoa:

   Nekazari batek pezeten P multzoa trukatuko du txanponen M multzoarekin. M multzoaren kardinala 1.000 da, eta M-ren edozein p elementuren balioa 1 pta. da. Marraz itzazu 1.000 puntu lodi, M multzoaren irudikapena direnak. Produkzio gastuko F multzoak M multzoak baino 200 puntu lodi gutxiago ditu. Egin F multzoaren irudia M-ren azpimultzo bezala, eta ondoko galderari erantzun: zein da B etekin-multzoaren kardinala? Marraz ezazu B multzoa gorriz.

3. 1980ko Matematikaren Irakaskuntza:

   Nekazari batek patata zaku bat 1.000 pezetan saltzen du. Produkzio-gastuak salmentaren prezioaren 4/5 badira (hots, 800 pta.), zein da etekina?

4. 1990eko Matematikaren Irakaskuntza:

   Nekazari batek patata zaku bat 1.000 pezetan saltzen du. Produkzio-gastuak 800 pta. dira. Aukeratu etekina adierazten duen erantzun zuzena:

   (20 pta.) (40 pta.) (60 pta.) (80 pta.) (200 pta.)

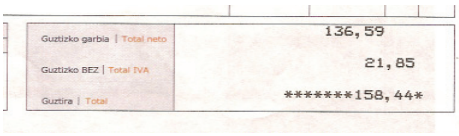
5. 2000ko Matematikaren Irakaskuntza:

   Nekazari batek patata zaku bat 100 €-an saltzen du. Produkzio-gastuak 80 € dira eta etekina 20 €. Zuzena da? (Bai)……..(Ez)

Jarraian, matematika erabilgarria den eguneroko egoera batzuk agertzen dira.

Maiz, supermerkatuetan, ezkerrean dagoen eskaintza bezalakoak daude.

1. Zein da supermerkatuan egindako deskontua?
2. Deskontu hori zenbakizko notazio desberdinekin adierazi: ehunekoak, batekoak, zatiki moduan eta zenbaki hamartar moduan.



Portzentajeekin jarraituz, suposa dezagun 84 €-ko produktu bat erosi dugula baina BEZarik gabe. BEZa % 18 bada, nola kalkulatuko genuke kalkulagailu batez eta eragiketa bakar baten bidez, prezioa BEZarekin? Eta prezioa baldin bada 112,10 € (BEZa barne), nola kalkulatuko genuke kalkulagailu batez eta eragiketa bakar baten bidez, BEZ-arik gabeko prezioa?

- Ariketak:

1. Asko bidaiatzen zuen gizon batek kezka handia zeukan bere hegazkinean bonba bat egoteko posibilitatearekin. Bonba bat egoteko probabilitatea kalkulatu zuen eta, txikia izan arren, ez zen lasaitu. Ordudanik beti eramaten du bonba bat bere maletan. Gizonak uste baitu bi bonba egoteko probabilitatea infinitesimala dela.
2. Erraza eta atsegina izan arren, batuketak egitea ez da beti egokiena. Froga bitxi baten arabera, umeek ez dute egun nahikorik edukiko eskolara joateko:

Urte batean,	denbora osoaren 1/3a lotan daude (eguneko 8 ordu)	=	122 egun
	Denbora osoaren 1/8a jaten daude (eguneko 3 ordu)	=	45 egun
	Denbora osoaren 1/4a oporretan daude	=	91 egun
	Denbora osoaren 2/7ak asteburuak dira	=	104 egun

	GUZTIRA		362 egun

3. Ulertu zer galdetzen den. Ness lakuko munstroa:

   Ness lakuko munstroaren luzera 20 m eta bere luzeraren erdia da, baina ez da 30 m luze. Zenbat metro luze da?

4. Hiru lagun afaltzera doaz; afaria ordaintzeko bakoitzak 10 € jartzen ditu. Afaria 25 € kostatzen da; beraz, 5 € sobera daude, horrela lagun bakoitzak euro bana har dezake eta bi euro potoan gelditzen dira. Beraz, gastaturikoa izango litzateke: (10 – 1) x 3 = 27.

   Gastatutako 27 € horiei gehitzen badizkiegu potoan dauden euro biak, 29 € ditugu. Zer gertatu da falta den euroarekin?

5. Iruzur aritmetikoa.

   Arratsaldeko ordu batean, bi pertsona sartu ziren banku baten sukurtsalean. 50 €-ko 7 billeteren trukean, 100 €-ko 3 billete eskatu zituzten. Bulegariak itzuli zien sobera zegoen 50 €-ko billetea. Mostradore gainean utzi zituen aldatzekoak ziren 50 €-ko 6 billeteak eta trukean ematekoak ziren 100 €-ko 3ak. Ohikoena da iruzurgileek billeteren bat ezkutatzea, baina ez zuten horrela jokatu.

Iruzurgileak originalagoak izan ziren: pentsatu ondoren, esan zuten, nahiago zutela 500 €-ko billete bat, horretarako falta ziren 200 €-ak jarriz. Ez zen arazorik sortu. Orduan, oraindik mostradorean zeuden 100 €-ko 3 billeteetatik bi hartu zituzten eta bulegariari eman zizkioten; bulegariak 500ekoa eman zien. Iruzurgileak pozik joan ziren. Orduantxe konturatu zen bulegaria egindako iruzurraz: 600 € eraman batzituzten —500eko billete bat eta 100eko beste bat— eta trukean 50 €-ko 6 billeteak utzi.

2. Matematikaren historia: zenbakikuntza-sistemak

Zenbakikuntza-sistemen historiarekin hasi aurretik, komenigarria da denboran zehar agertutako zenbakiak berrikustea. Haien izenak, batzuetan, iradokitzaileak dira.

Lehenengo tokian **zenbaki arruntak** ditugu; haien multzoaren ikurra $\mathbb{N}$ da eta berau osatzen duten zenbakiak hauexek dira: 0, 1, 2, 3, 4, 5, … Naturak emandako zenbakitzat hartuak izan ziren eta hortik datorkie izena.

Zenbaki osoak deiturikoak; haien multzoaren ikurra $\mathbb{Z}$ da eta zenbaki arruntak dira ikur positibo edo negatiboarekin, hots, … -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, … Unitatearen «zatirik» ez dutenez, hortik datorkie izena.

Zenbaki arrazionalak, zatikiak edo frakzioak, $\mathbb{Q}$ ikurrarekin adierazten dira. Zenbaki osoen arteko zatiketei dagozkie, zatiketaren izendatzailea zero ez denean. Adibidez: 1/3, -6/4, 5, 2,34, … «Arrazional» izena jarri zitzaien segituan aipatuko diren zenbaki «irrazional»en kontzeptuarekin kontrajartzearren.

Zenbaki irrazionalak: Grezia klasikoan, aljebraren lanabesa existitzen ez zenean, matematikako arrazoibideak irudi lauen gainean egiten ziren, erregela eta konpasa erabiliz. Unitate bateko karratua egitean, badakigu Pitagorasen bidez, haren diagonalaren luzera erro karratu bi dela. Diagonal hori erraz irudikatu daiteke eta, beraz, ikusi, baina ezin da erregela batez neurtu (erro karratu bik infinitu hamartar ditu segida periodiko bati jarraitzen ez diotenak). Horrenbestez, zenbaki hauei «irrazional» izena jarri zitzaien. Horien artean π zenbakia dago, logaritmo nepertarren *e* zenbakia, bai eta zenbaki oso positibo askoren erroak ere.

Aurreko zenbaki guztiak dituen multzoari zenbaki errealen multzoa deritzo eta $\mathbb{R}$ ikurraz adierazten da.

Zenbakikuntza-sistemen historiarekin hasteko, objektu horren definizioa emango dugu: «Zenbakikuntza-sistema deritzo edozein zenbaki (arrunt) izendatzeko eta adierazteko, sinbolo eta hitz kopuru mugatuarekin, erabiltzen diren arauen eta konbenioen multzoari».

Baina, zenbatu ahal izateko beharrezkoa al da zenbaki-sistema bat? Imajinatu artzain primitibo bat, zenbakiez eta zenbatzeaz ezer ez dakiena, eguna bukatzean jakin nahi duena da ea ardirik falta ote zaion. Nola askatu problema hau?

Zenbakiak adierazteko lortu beharreko sistemak, idazmenaren jatorriarekin lotuta dauden saiakuntza askoren bidez egin ziren. Jakina, zenbakiak adierazten dituzten hitzetarako, erraz asmatu zitezkeen idatzizko sinboloak. Beste edozein hitz idaztea bezain erreza izango zen. Horrela, euskaraz, esku baten zenbaki kopurua, «bost» hitzaren bidez adierazi liteke. Baina, zenbakiek berezitasun bat badutela, hasiera-hasieratik agerikoa izan zen: zenbakiak hurrenkera batean daude, modu finko batez zenbatu daitezke, «zenbatuz» edozein zenbakitaraino ailega daiteke.

Horrela «bat», «I»-ren bidez, «bi», «II»-ren bidez, «hiru», «III»-ren bidez, eta abar, edozein zenbaki adierazi daiteke ikur baten bidez. Adibidez, IIIIIIIIIIIIIIIIIIII ikurraren bidez «hogeita bi» zenbakia adierazten da. Gainera, ikur hori unibertsala izango litzateke, eta ez litzateke egongo hizkuntza bakoitzak ikur hori izendatzeko erabiliko lukeen doinu eta adierazpenaren menpe.

Arazoa, zenbakia handitzean, irakurketan dago. Nola bereizi «hogeita bi», «hogeita hiru»-tik? Nahiko naturala da ziri multzo handiak, multzo txikiagotan banatzea (horixe egiten da sarritan zenbatzen dugunean, adibidez klaseko delegatuaren hautaketako botoak zenbatzean). Eskuko atzamarrekin zenbatzen ohituta bazaude, logikoa dirudi ziriak bosteko taldetan banatzeak: orduan «hogeita bi» izango litzateke IIIII IIIII IIIII IIIII II.

Esku biak erabiliz, hamarreko taldeak egin litezke: IIIIIIIII IIIIIIIII II.

Edo esku baten lau atzamarren falangeak eta atzamar lodia, besteen oposagarri, zenbatzeko erabiliko balira, orduan hamabiko taldeak edo hogeikoak egin litezke, bi eskuen eta oinen hatzak erabiliz, etab.

Behin prozesu hori hasita, bosteko, hamarreko edo hogeiko talde bakoitza besteen berdina denez, errazagoa izango litzateke ikur bakarraren bidez adieraztea, taldeko bost edo hamar osagaiak idaztea baino. Horrela, IIIIIIIII, hori adierazteko adibidez idatzi liteke: +. Orduan, «hogeita bi», ++II izango litzateke, askoz errazagoa idazteko eta ezagutzeko. Prozesua jarraituz, hamar «+»-eko talde bat (hots, ehun «I»), beste ikur batekin ordezka liteke, adibidez «x»-rekin. Era berean, hamar «x»-ko talde bat, beste ikur batekin ordezka liteke, adibidez «o», eta abar.

Zenbakikuntza-sistema honetan, adibide moduan, «mila zortziehun eta hogeita hamalau» honela idatziko litzateke:

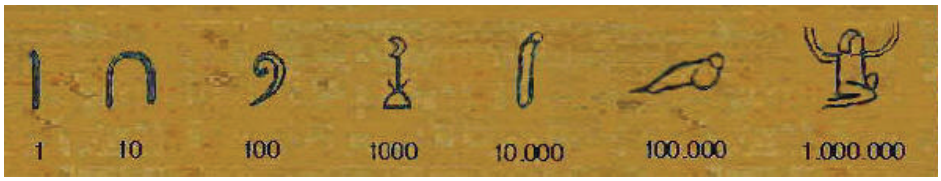
oxxxxxxxx+++IIII

Gizakiaren begiak dituen ahalmenak aprobetxatuz, modu azkarrago batean ikustarazi liteke, honela:

oxxxx++II
xxxx+ II

• Zenbakikuntza-sistema egiptoarra.

Hau zen, hain zuzen, antzinako egiptoarrek erabiltzen zuten sistema, hori bai, idazkera hieroglifikoarekin.



Ziria Ferra Kiribil (soka kizkurtua) Loto lorea Hatza Zapaburua (edo igela) Gizon belaunikatua

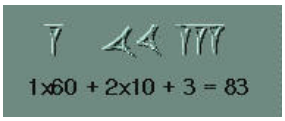
Ikurren hurrenkerak ez dauka garrantzirik, adierazten duten zenbakia berdina delako; ondokoak «mila zortziehun eta hogeita hamalau» izango lirateke:

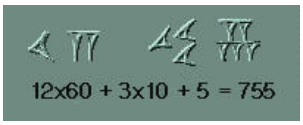
xxxxIIo++
xxxxII + eta IIxxxo+II++xxxxx

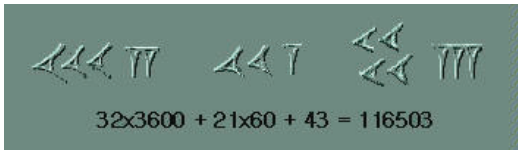
• Babiloniako zenbakikuntza-sistema.

Antzinako Mesopotamian loratu ziren zibilizazio askoren artean, zenbakikuntza-sistema desberdinak garatu ziren. Horien artean, sistema hirurogeitarrak (oinarria 60), angeluak eta denbora neurtzeko gure egunetaraino iraun du.

Hortik aurrera, unitateen talde bakoitzak 60ko berreketa desberdinen kopurua adierazten zuen (60, 60x60, 60x60x60, ...). Adibidez:







Emaitzak ateratzea interesatzen zitzaien eta hori dela-eta aljebrarako oso jaioak ziren. Emaitza horiek beharrezkoak ziren interes konposatuak kalkulatzeko eta eraikuntzak eta kalkulu astronomikoetarako. Bazekiten ondokoak egiten:

– Erro karratuak kalkulatzen, hurbilketen bidez.

– $(a+b)^2$ eta $(a+b)\bullet(a-b)$ formulak ezagutzen zituzten.

– Pitagoras eta Thales-en teoremak.

– Aldiz π zenbakirako 3 erabiltzen zuten hurbilketa moduan.

– Trigonometriako taula batzuk ere ezagutzen zituzten.

Adibidea: ondoko ekuazioa askatzeko gai ziren

$$x^8 + a^2x^4 = b^2$$

• Grekoen zenbakikuntza-sistema bat.

Zenbakiak idazteko beste era bat da Grekoek erabilitakoa. Beste sistema ordenatu batean oinarritu ziren: alfabetoan.

Hasiera batean, metodoa aurrekoaren antzekoa zatekeen: gure alfabetoa erabiliz «bat», «A» izango zen; «bi», «AB» izango zen; «hiru», «ABC», etab. Baina ikur guztiak desberdinak direnez, soilik azkenengoa jartzearekin nahikoa izango zen zenbakia adierazteko.

Horrela, «bat», «A» izango zen, «bi», «B», «hiru», «C», …, «hamar», «J» izango zen. Hemendik aurrera berdin jarraitu daiteke eta «hamaika» = «K» izango zen, «hamabi» = «L», etab. Baina orduan, hogeita seira heltzean, ikurrak bukatuko lirateke. Grekoek zerbait hobea egin zuten: «hamaika» = «hamar» + «bat», orduan «hamaika» = «JA», «hamabi» = «JB», etab., K, L, M, … ikurrak hamarrekoentzat gordeaz: «K» = «hogei», «L» = «hogeita hamar», …, «R» = «ehun», eta ondoren, «S» = «berrehun», …, «Z» = «bederatziehun».

Grekoen alfabetoak 24 hizki besterik ez zuenez, bederatziehuneraino zenbatu ahal izateko ikur bereziak erabili zituzten. Hala ere, «bederatziehun eta laurogeita hemeretzi»raino heltzean, ikurrak bukatzen ziren, eta milako unitateetara igarotzeko beste ikur laguntzaileak erabili zituzten, hala nola kakotxak. Horrela, «mila», A’ idazten zen, «bi mila», B’ . Beste zailtasun bat zen hogeita zazpi hizkien balioa buruz ikasi behar zela.

Aurreko sisteman bezalaxe, erabilitako ikurren hurrenkerak ez du bere zenbakizko balioa aldarazten. Horrela, «berrehun eta hogeita hamabost» = SLE = ELS = LES.

- Numerologia.

Zenbakiak adierazteko alfabetoko hizkiak erabiltzeak zeharkako ondorio bat eduki zuen, hain zuzen sasizientzia baten agerpena: «gematria» (seguruenik «geometria»-ren deformazioa) edo «numerologia».

Adibidez, juduak. Bibliako hitz bakoitza estudiatzeko ahaleginean, edonon ikusten zituzten zenbakiak. Sistema oso erraza da, alfabetoko hizki bakoitzari zenbakizko balio bat ematen zaio eta horrela hitz bakoitzari zenbaki bat dagokio, eta zenbakiaren izaeraren arabera, hortik erabakiak hartu (ezkondu ala ez, zorte onekoa izan edo txarrekoa…).

Adibiderik ospetsuena 666 zenbakikoa omen da, «Piztiaren zenbakia» deiturikoa eta Antikristoarekin identifikatuta. Biblian, Agerkundeen liburuan esaten da (13-18): «Hemen dago jakinduria. Utzi entendimendua daukanari Piztiaren zenbakia kalkulatzen, hauxe baita gizonaren zenbakia: bere zenbakia 666 da».

Saiakera asko egin dira gematriako 666 zenbakia duten pertsonaia historiko batzuk identifikatzeko. Ikerketa horiek «Neron Cesar» edota «Diocleciano»-renganaino ailegatu ziren, biak ala biak kristianoen pertsegitzaileak, baina egon badaude gehiago.

Aurrekoarekin zerikusirik eduki gabe, bitxia da Ifrah-k (Ifrah, 1987) 17 zenbakiak Italian duen esangurarekin dioena: «…Napoleon Bonapartek Brumarioko estatu-kolpea 18ra arte atzeratu zuen —hasieran 17rako, ostirala, aurreikusita zegoen— ("ez zaizkit sinesgabeak gustatzen, azaldu zuen, soilik tontoek desafio egiten diote ezezagunari"). Jakina da Italiako hoteletan ez dagoela 17 zenbakidun gelarik, eta Alitalia-ko hegazkinek, inongo hegalditan, ez dutela 17 zenbakidun eserlekurik eramaten. Eta Europan Renault 17 izenez ezagutzen den ibilgailua, Italian Renault 117 bataiatu dutela».

Eta jarraitzen du arrazoia azalduz: «Zifra erromatarretan, 17 zenbakia XVII idazten da; horrela da VIXI adierazpen latinoaren anagrama eta zenbakizko balioa, eta adierazpen horren esanahia da "bizi izan dut" eta hedapenez "hilda nago"».

• Erromatarren zenbakikuntza-sistema.

Zenbakikuntza-sistema erromatarrak, gaur egun ere mundu osoan ezaguna, nolabait aurreko biak uztartzen zituen: letrak erabiltzen ditu grekoenak bezalaxe, baina unitateen taldeak adierazteko erabiltzen dira, babiloniakoan bezalaxe. Erromatarrek, talde erregularrak egin ordez, denek osagai kopuru berdinekin, bosteko taldeak txandakatu zituzten hamarreko taldeekin.

1 = I	9 = IX	80 = LXXX	700 = DCC
2 = II	10 = X	90 = XC	800 = DCCC
3 = III	20 = XX	100 = C	900 = XM
4 = IV	30 = XXX	200 = CC	1000 = M
5 = V	40 = XL	300 = C	
6 = VI	50 = L	400 = CD	$\bar{V} = 5000$
7 = VII	60 = LX	500 = D	
8 = VIII	70 = LXX	600 = DC	$\bar{X} = 10000$

Ikur erromatarrak bi klasetan bana daitezke, erabileraren arabera: alde batetik, X, C, M. Beste aldetik, V, L, D. Arau orokor legez, zenbakiak handienetik txikienera idazten dira. Bigarren taldeko hizkiak ezin dira errepikatu eta beti batu egiten dute; lehenengokoak, ordea, hiru bider errepika daitezke batzean eta hizki bat jar daiteke ikur handiago baten ezkerrean kenketak egiteko.

• Posiziozko zenbakikuntza-sistema.

Ikusi dugunez, grekoek (baita erromatarrek ere) zenbaki handiak adierazteko (milakoak, milioikoak, eta abar) ikur laguntzaileak erabiltzen zituzten:

A' grekoen artean «mila» zen, $\bar{V}$ = «bost mila» erromatarren artean.

Suposa dezagun une batez, ikur laguntzaileak ez liratekeela soilik erabiliko uni-tate handien ordenak adierazteko, baizik eta ordena guztietarako. Adibidez, hasierako ikurrak erabiliz (I = unitateak, + = hamarrekoak, x = ehunekoak, o = milakoak), bederatzi hizkirekin, besterik ez, «bederatzi mila bederatziehun eta laurogeita hemeretzi»rainoko zenbaki guztiak adieraz litezke. Adibidez,

«Bi mila hirurehun eta berrogeita bost» = o x + I
B C D E

«Lau mila laurehun eta berrogeita lau» = o x + I
D D D D

Eta ez litzateke izango inolako nahasterik, zeren hizki bakoitzaren gainean jarritako ikurrak adieraziko bailiguke lehenengoak «lau mila» balio duela, bigarrenak «laurehun», eta abar. Orobat, beste ikur laguntzaile batzuk erabilita, sistema honen bidez adierazi daitekeen zenbaki kopurua handitu liteke.

Ohartu zaitez, hemen ere, hizkien hurrenkerak ez duela aldarazten zenbakiaren balioa.

«Bi mila hirurehun eta berrogeita bost» = o x + I = B C D E
x I o + = C E B D

Orain, suposa dezagun ados gaudela hurrenkera ez aldatzearekin, unitateak beti amaieran joango direla, aurretik bigarren ordenako unitateak jarriz, hauek edukiko dituzte aurretik hirugarren ordenakoak, eta horrela bata bestearen segidan. Orduan, hizkien gainean jarritako ikurrak ez lirateke, nabaria denez, beharrezkoak izango; hizkien hurrenkerak zenbakiaren barruan zehazten duelako dagokien unitateen ordena.

Horrela adibidez, «ADB» bakarrik izan liteke «ehun eta berrogeita bi». Beraz, esango genuke posizio-sistema dela, zeren eta erabilitako ikurren balioa zenbakiaren barruan duten posizioaren menpe baitago.

Baina orduan zailtasun berri bat azaltzen da: zer gertatzen da ordena batean unitaterik ez dagoenean? Adibidez, nola adierazi «ehun eta bi» zenbakia? «A..B» idatzi liteke, zenbakiaren erdian hutsune zuria jarriz, baina zenbakia idaztean errore asko sortuko lirateke, hutsune horri emandako luzeraren araberakoak. Beste irtenbidea da, «hutsa» adierazteko beste ikur berri bat asmatzea. Horrelako irtenbidea aurkitzea ia bost mila urte kostatu zitzaion gizarteari, hinduak izan ziren lehenak hori erabiltzen, VIII.-IX. mendeetan. Ikur horri *sunya* deitu zioten (hutsa); arabiarrek hartuta, *cifer* (hutsa) deitu zioten, hortik eratorrita daude nazioarteko eleak: zeroa eta zifra.

Emeki-emeki sistema berria Europara heldu zen, eta sistema erromatarra ordezkatu. Herrialde ez erromatartuetatik zetorrenez, zenbakien formek ez zuten

inolako antzik alfabeto erromatarreko hizkiekin, eta hori beste abantaila bat izan zen, zenbaki eta hizkien arteko nahastea bukatu zelako horrela.

Hau izan zen gure zenbaki-sistema hamartarraren jaiotza; haren ezaugarri nagusiak ondokoak ditugu:

– Posizionala da
– Bederatzi ikur erabiltzen dira (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9), gehi beste bat berezia (0) «hutsa», ordena baten unitateen falta adierazteko.
– Hamartarra da: ordena bateko hamar unitate, goragoko ordenako unitate baten baliokide dira (*sistemaren oinarria* hamar dela esaten da).

Lehenengo propietatea inportanteena da. Posiziozko sistemek abantaila bat dute: zenbaki handiak idatz daitezke ikurren kopuru txiki bat erabiliz, eta, gainera, eragiketa aritmetikoak modu erraz batean egitea ahalbidetzen dute.

• Geure zenbakikuntza-sistema hamartarrari buruz.

Bilakaera luze baten azken fruitua izanda, geure zenbaki-sistema, hamartarra eta posizionala, orain arte izan den sistemarik perfektuentzat har daiteke, baina baditu akats batzuk, horien artean:

1. Idatzizko eta ahozko adierazpenak, maiz, biderkatzaileak dira (ber-ehun, bi-mila…) eta hori kontraesanean dago posizio-sistema izatearekin. Zergatik ez dugu irakurtzen «1268» zenbakia «bat-bi-sei-zortzi»?, horixe egiten baitugu telefono-zenbakiak irakurtzean (nahiz eta hauek bikoteka irakurri).
2. Are gehiago: arestian ikusi dugunez nola sortzen diren zenbaki baten zifrak, zergatik ez irakurri «1268» honela «zortzi-sei-bi-bat», unitateetatik hasita?
3. Zergatik «hamaika», «hamabi», «hamahiru»… eta ez «hamar eta bat», «hamar eta bi»…
4. Kontraesana dago zenbakiak izendatzean, batzuen adierazpen biderkatzailearen (ber-ehun, hiru-ehun,…) eta bestetzuen batutzailearen (hamar eta sei, hamar eta zazpi…) artean.
5. Oinarria, 10, zenbaki konposatua denez, badaude zatiki baliokideak. Problema hori ekiditeko, nahikoa izango litzateke oinarritzat zenbaki lehen bat hartzea, adibidez 11.
6. Azkenez, nahiz eta soluziorik gabeko problema izan, zenbakiak sistema ordenatua direnez, zenbaki bat idaztean egon litekeen edozein errorek zenbakia ezagutezina bihurtuko luke, hitzekin ez bezala (adibidez, «Unibrtsitatea»).
7. Ahozko hizkuntzan, zenbaki ordinalak izendatzean, araua dira irregulartasunak.

• Zenbaki ordinalak: hurrenkera adierazten dutenak; euskaraz, erraz sortzen dira,

9. = bederatzigarren	100. = ehungarren
11. = hamaikagarren	200. = berrehungarren
12. = hamabigarren	300. = hirurehungarren
13. = hamahirugarren	400. = laurehungarren
16. = hamaseigarren	500. = bostehungarren
18. = hamazortzigarren	600. = seiehungarren
19. = hemeritzagarren	700. = zazpiehungarren
20. = hogeigarren	800. = zortziehungarren

• Zenbakien adierazpidea.

Gure zenbakizko ikurrek, eta zenbakikuntza-sistemak berak ere, Indian dute jatorria, eta arabiarrek ekarri zituzten Europara. Hemen, zenbaki berriei «cifrae» izena jarri zitzaien, arabierako «al-cifr»-etik eratorria, zeina, «sunya»-ren (hutsa, zeroa) itzulpena zen; latin kultuan «zephirae» edo «zephirum» hitza agertu zen, eta hortik eratorri ziren «cero» eta «cifra» hitzak (zifren idazkerak eduki duen bilakaerari jarraitzeko ikus daiteke: Ifrah, 293. or. eta hurrengoak).

Bestetik, gizakiaren eskua, dituen hezur eta artikulazioen kopuru handiei eta bere hatzen kokapenari esker, hatz lodia besteen aurkaria izanik, zenbakien kasuan tresna ezin hobea da, kalkulu eta eragiketetan bitartekari izateko. Laguntzailerik antzinakoena eta orokortuena izan da.

Prozedurarik oinarrizkoena da umeek zenbatzen ikastean erabiltzen dutena; hain zuzen, hatz bakoitzari zenbaki osoa atxikitzen zaio, zenbaki arrunten hurrenkeraren arabera eta batarekin hasita. Munduan zehar aldaera anitz daude: hatzak banan-banan altxatzea, hatzak atximurtzea, batekin zein bestearekin zenbatzen hastea, hatz lodiak erabiltzea… Honi dagokionez, ondokoak ikusi daitezke (Ifrah, 1987):

– Arabiako zenbait herritan tratuan aritzeko erabilitako prozedura (80.-81. or.).
– Zenbatzeko hatzetako falangeak erabiltzea (82.-83. or.).
– Gormutuen alfabetoa (86. or.).
– Zenbakien adierazpen digitaletatik eratorritako hitz-jokoak (91. or.).
– Txinako kalkulatzaileak 100.000 (esku bat) edo 10.000 miloi (esku biak).

Azken kasu horretan, falangeen artikulazio bakoitza 3 zatitan banatzen zen, ezkerrekoa, erdikoa eta eskuinekoa, horrela hatz bakoitza sistema hamartar baten ondoz ondoko 9 unitateei zegokien.

Eskuineko hatz txikia: unitate bakunak	Ezkerreko hatz lodia: milako ehunekoak
Eskuineko hatz nagia: hamarrekoak	Ezkerreko hatz erakuslea: milioiak
Eskuineko hatz luzea: ehunekoak	Ezkerreko hatz luzea: milioiko hamarrekoak
Eskuineko hatz erakuslea: milakoak	Ezkerreko hatz nagia: milioiko ehunekoak
Eskuineko hatz lodia: milako hamarrekoak	Ezkerreko hatz txikia: milioiko milakoak

Azkenez, historian zehar, gauza anitz erabili dira:

– Inkek, korapilodun kordak erabiltzen zituzten («quipu»-ak) (97.-108. or.).
– Historiaurreko koskak.
– Harri-koskorrak («calculi»).
– Era askotako abakoak.

• Ariketak:

1. Biz {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B} sistema hamabitar, posizional eta batukor baten oinarria.

i) Zer esan nahi du sistema posizionala izateak? Eta batukorra izateak?

ii) Berridatzi sistema berrian sistema hamartarrean idatzita dauden bi zenbaki hauek:

$374_{(10}$ $47_{(10}$

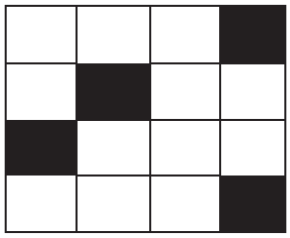
iii) Burutu sistema hamabitarrean, kenketarako ohiko algoritmoa erabiliz, beheko kenketa. Azaldu eta arrazoitu urratsak:

$$\begin{array}{r} A\ 4\ 5\ 1 \\ -\ 3\ B\ 0\ 2 \\ \hline \end{array}$$

2. Apur bat lasaitu eta entreteni zaitezen, gurutzegrama bat osatzeko proposatzen dizut: gurutzegrama berezia, haatik, hitzen ordez, zenbakiak eskatzen baitizkizut. Asmoa zenbakikuntza-sistema hamartarra beste oinarrietako sistemekin erlazionatzea da.

HORIZONTALEAN

1. Hiru zifrako zenbakirik handiena, 3ko oinarrian.
2. a) Zenbakikuntza-sistema guztietan berdin idazten den zenbaki bat, eta ez da zero.
   b) Sei unitate eta hamarreko bat, 5eko oinarrian.
3. $13_{(5}$ -ren aurreko zenbakia, 5eko oinarrian.
4. $4_{(10}$, baina 2ko oinarrian.



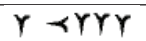
BERTIKALEAN

1. a) Bi unitate falta zaizkio $10_{(3}$ izateko.
   b) Horizontaleko 2. a) bezalakoa.
2. a) 3ko oinarriko sisteman idatzitako zenbakietan ager daitekeen zifrarik altuena.

b) $2_{(10}$, baina 2ko oinarrian; edo $3_{(10}$, baina 3ko oinarrian; edo$5_{(10}$, baina 5eko oinarrian.

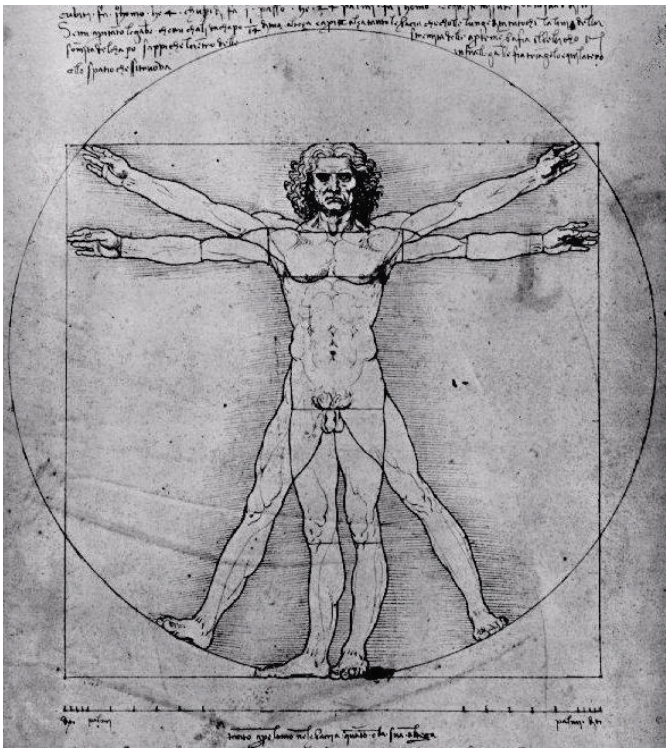
3. $335_{(10}$, baina 5eko oinarrian.
4. 5eko oinarrian, $13_{(5}$ baino handiagoa eta $20_{(5}$ baino txikiagoa.

3. Osatu beheko taula, kontuan harturik lerro bakoitzean zebaki berak agertu behar duela zenbakikuntza-sistema guztietan.
Azken zutabean zuk paraturiko zenbakikuntza-sistemari dagokion zenbakera idatzi behar duzu. Zer ezaugarri ditu zure sistema horrek?

Indo-arabiarra	Babiloniarra	Egiptoarra	Erromatarra	Zure uztako sistema
83				
			LXXIII	
123				
			MMCDXXIII	

3. Matematikaren historia: geometria euklidearra

Geometriari buruz hitz egiten hasi baino lehen, zientzia horri buruzko bi ikuspuntu desberdin ikusiko ditugu. Lehendabizi, Leonardoren koadro ospetsua, non giza gorputzak irudi geometriko batzuekin duen egokitzapenean oinarrituta, edertasunaren kanon bat postulatzen den.



Leonardo da Vinci. Vitrubioren gizona. Giza gorputzaren kanona.

Bigarrenez, kutsu zirtolariagoarekin, doako egunkari batek, bere horoskopoen sailan, emandako ikuspuntua:

> Geometriak oinarri ditu bai matematika bai eta fisika ere. Poligonoak ikasteko balio du: karratua, konoa, trapezioa, kuboa, eta abar. Beste onura bat da, publiko handiak hain ondo ezagutzen ez duena, Magian, gauzak handitzeko eta eragiteko duen erabilera. Leonardok, Vitrubioren gizona irudikatu zuenean zirkulu baten barruan, hau, berriz,

> karratu baten barruan egonda, jakin bazekien triangelu baten ardatza finkatzen ari zela eta triangelu horrek irudikatzen dituela lau urtaroak, lau puntu kardinalak, lau elementuak eta gizonaren lau puntuak. Zirkulu bat marraztea, grabitazio-eremu bat sortzea da, babes ezkutu bat egitea. Triangelu bat marraztea indar-eremu bat ezartzea da. Karratu batek espiritu normaldua eta laua dituen eremu bat sortzen du, hots, geure segurtasuna arautzen duen eremua. Prismak, trapezioak eta konoak marraztean, segurtasuna, askatasun-espiritua, desioa eta ihes-pasioa bidaltzen dizkigute.
>
> Eliza batean sartzean irudi geometrikoetan jarri behar da arreta. Aldare nagusia beti izango da zirkuluerdi bat, aldarearen eremua karratua edo laukizuzena izango da. Geure hilobia edo hobia bezala, lau puntuak, lau elementuak eta, erdian, arima eta esentzia. Arrazoi hau dela medio susmoa dago filosofoen harria kubikoa zela, Durero handiak «Malenkonia» grabatuan margotu zuen bezalaxe. Kuboa, non sagarra baino ez den kabitzen (*Qué fácil,* 2002-07-10, 14. or.).

Etimologikoki, «geometria» grezierako «geo» (lurra) eta «metron» (neurria) hitzetatik dator[1]; horrela definitu daiteke: *planoko edo espazioko irudien propietateak ikertzen dituen matematikaren atala.*

Haren jatorria antzinako Egipton bide dago oro har onartua[1] eta, zehazkiago, eguneroko bizitzako problemen ebazpenean, hala nola lurren neurketa —haien mugak periodikoki aldatzen baitziren Nilo ibaiaren uholdeekin batera— edo edukiontzien eta biltegien edukia finkatzean. Bazekiten azalera eta bolumen sinpleenak finkatzen, nahikoa zehaztasunez ezagutzen zuten zirkunferentzia baten eta haren diametroaren arteko proportzioa, eta dirudienez esfera baten azalera kalkulatzen ere bazekiten. Egiptoko kulturan geometria aplikatuaren gailurra aurki daiteke, bai eguneroko bizitzaren problemen ebazpenari zein sormen artistikoari lotua. Aitzitik, ez dirudi egiptoarrek Geometria zientzia teoriko legez ulertzen zutenik, teorema eta frogekin hornitua. Garai hartan, Geometria, Aritmetika legez, funtsean esperientziatik eratorritako arauen bilduma zen.

Urte batzuk geroago eta partzialki, Egiptoko zibilizazioaren garaikide (K.a. 3300etik 539ra), Babiloniako kultura dago (grekoentzat, Mesopotamia, edo ibaien arteko herrialdea; gaur egungo Irak). Batik bat, angeluen neurketan nabarmendu ziren (haien Astronomiarenganako zaletasunarekin lotua). Beraiengandik heredatu dugu angeluak eta denbora neurtzeko erabiltzen dugun egungo zenbaki-sistema hirurogeitarra.

Egiptotik Greziara igarotzean, K.a. IV. eta III. mendeen artean, eta Thales bezalako filofoek garatua, Geometria apurka-apurka teoria matematiko bihurtu zen, oinarrizko emaitza bi lortuz: alde batetik, teorema geometrikoaren kontzeptua eta haren frogarena, eta bestetik, oinarrizko proposizioen sailkapena, hots, axiomak, zeinetatik gainontzekoak eratortzen diren. Garaiko erakunde garrantsitzua da

1. Errege Akademiaren Espainiako Hizkuntzako Hiztegia (1992). 21. argitalpena. Madril.

Akademia, Platonek sortua, sarbideko aurrealdean honako hitzak zituena: «Ez dadila sar Geometria ez dakien inor» (González Urbaneja, 2003).

Orduan agertu zen Euklides Alexandriakoa (Egiptoko hiria, Mediterraneoko bazterrean, Alexandro Handiak sortua, K.a. 331. urtean), zeinak, K.a. 300. urtearen inguruan, 13 liburuz osaturiko tratatua **izkiriatu zuen,** *Elementuak* **izenarekin bataiatua. Tratatu horretan, bere** aroan zeuden Zenbakien teoria eta Geometriari buruzko ezagupenak sistematizatu zituen. Asko dira Euklidesi buruz kontatzen diren anekdota bitxiak, besteak beste, H.S.M. Coxeter-ek (Coxeter, 1971: 26) kontatzen dituen anekdota biak. Lehenengoa, oso ezaguna, garaikide zuen aurreneko Ptolomeok eginiko galderari dagokio; horrek, geometria ikasteko *Elementuak* baino bidezidor laburragorik ez ote zegoen galdetu zionean, Euklidesek erantzun zion «ez zegoela errege-bide bat geometria ikasteko». Bigarrena, geometria ikasten hasita zegoen bati dagokio; horrek, Euklidesi galdetu omen zion ea «zer lortuko dudan gauza hauek ikasita?», eta erantzun bezala, Euklidesek esklabo bati deitu eta hauxe esan zion: «Emaiozu honi txanpon bat, ikasitakoaren ganantzia lortu behar duelako».

Bere liburu ospetsuan, oinarrizko bost postulatu edo axiometatik, Euklidesek, soilik argudio logikoak erabiliz, propietate geometriko guztiak garatzen ditu.

1. Bi puntutik igarotzen den lerro zuzena trazatu daiteke.
2. Lerro zuzen bat mugarik gabe luza daiteke.
3. Zentroa eta erradioa emanda zirkunferentzia bat trazatu daiteke.
4. Angelu zuzen guztiak berdinak dira.
5. Zuzen batek ebakitzen baditu beste bi zuzen, eta haiekin osaturiko barneko angeluen batura bi angeluzuzen baino txikiagoa bada, orduan bi zuzenak mugarik gabe luzatuz elkar ebakiko dute, angelu bien batura bi angeluzuzen baino txikiagoa den alderdian.

(*) Periodoa hau badoa K.a. 5000tik (Niloko lehenengo jendeztatzeak) K.a. 30era arte (Cleopatraren heriotza, Egiptoko azken erregina, eta erromatarren inbasioa).

Courant/Robbins-ek (Courant, Robbins, 1955: 226) seinalatzen duten moduan, inolaz ere ez da egia Greziako Matematika solik egongo zela garatua, *Elementuak* lanaren postulatu zurrunen bidez; lan horrek ondorengo belaunaldietan eragindako inpresioa hain izan zen handia, ezen matematikako froga zorrotz guztietarako eredu bilakatu baitzen. Egoera hori ez zen apurtu XIX. mendearen hasiera arte, non Gauss alemaniarrak (1777-1855), Bolyai hungariarrak (1802-1860) eta Lobachevsky errusiarrak (1793-1856) aldi berean argitaratu zituzten geometria ez-euklidearrak. Izatez, Euklidesen liburua, testuliburu izan zen hainbat belaunalditan.

Bost postulatuen artean, bosgarrenak, hasiera batetik eduki zuen izaera berezia. Haren idazkera, gainontzekoena baino arras konplikatuagoa da, zuzen paraleloen definizioaren baitan berez dagoen zailtasunari gehitzen zaiolako nozio horrek barnean duen «infinitu»aren kontzeptua.

Haren zailtasunagatik, antzinatetik bertatik, kentzeko saiakerak egin ziren; postulatu hori deduzitzeko, beste postulatuetatik eta geometriaren oinarrizko kontzeptuetatik eratortzeko teorema bezala. Hala ere, saiakera guztiek porrot egin zuten. Irtenbidea aurkiturik bide zegoenean orduan frogatzen zen, demostrazioa, geometriaren gainontzeko premisetatik ondorioztatzen ez zen proposizio nabarian oinarrituta zegoela, edo 5. postulatuaren baliokidea zen baten batean; hala nola:

- Triangelu baten barruko angeluen batura, zehatz-mehatz bi angeluzuzen da.
- Playfair-en axioma: «Izan bitez P puntu bat eta P barnean ez duen L zuzen bat. L zuzenarekiko paraleloa den eta P puntutik igarotzen den zuzen bakarra dago (axioma honengatik ezagutzen da, 5. postulatua «pareleloen postulatu izenez)».

Horrela, XIX. mendearen hasieran, arazoa, Euklidesen garaian bezalaxe zegoen, hau da, 2.000 urte lehenago zegoen bezala. Baina XIX. mendean ikuspuntua aldatu zen: 5. postulatua beste axiometatik deduzitu beharrean, kontrako baieztapena hartu zen abiapuntuko hipotesitzat, hots: «Zuzen baten kanpoko puntu batetik, gutxienez trazatu daitezke zuzenarekiko paraleloak diren bi zuzen». Hipotesi horri geometriaren gainontzeko propietateak gehituko begenizkio, eta kontraesan batera helduko balitz, 5. postulatua frogatuta egongo zen. Baina halako kontraesanik ez zen agertu, eta beraz:

- Lehenengo lau postulatuetatik, ezin da 5. postulatua frogatu.
- Bosgarren postulatuaren kontrako proposizioa ontzat emanez gero, kontraesanak ez dituen teoria bat garatu daiteke, logikoki posiblea, geometria berritzat har daitekeena (ez-euklidearra), nahiz eta haren ondorioak ez etorri bat geure espazioaren ideia intuitiboarekin.

Horrelako geometria batean, Lobachevski-renean esaterako, zuzen baten kanpoko puntu batetik zuzenarekiko bi zuzen paralelo trazatu daitezkeelako suposiziotik eratorria, emaitza benetan harrigarriak lortzen dira, hala nola:

Zuzen bat beti urruntzen da emandako beste zuzen batetik. Horrela, lerro bat beste lerro batetik distantzia finko batera mantentzen bada, ezin da lerro zuzena izan; kurba bat da, bere izena kurba distantziakidea da.

Triangelu baten angeluen batura beti da bi angeluzuzen baino txikiagoa.

Ez da existitzen edonolako azalera handiko triangelurik.

Hala ere, Lovachevski-ren geometriak eremu txikietan geometria euklidearrarekiko desberdintasun gutxi du eta hori propietate garrantzisua da. Lovachevski-k berak uste zuen geometria euklidearrarekiko diferentziak antzeman litezkeela behaketa astronomikoen bidez, eta suposizio hori baieztatu da. Horrela, Euklidesen geometria Lovachevski-renaren kasu partikularra izango litzateke, honek bere baitan, bestea duelarik.

Dena den ordurako, geometria berrien bilaketan bideak irekita zeuden. Adibidez, Leonardo da Vinci eta Alberto Durero artistek ikertutako «perspektiba-arazo»ei irtenbidea ematean, zenbait matematikarik propietate geometriko batzuk ikertu zituzten, eta geroxeago propietate horiek «geometria proiektiboa»ren izenarekin bataiatutako eremuaren barruan izan ziren (geometria proiektiboaren ikerketa sistematikoa XVIII. mendearen bukaeran hasi zen). Margolari batek trazatutako irudia kontsidera daiteke oihalaren gainean egindako originalaren proiekzioa, proiekzio-zentroa margolariaren begian dagoela. Prozesu horretan luzerak eta angeluak aldatzen dira margotutako objektuen posizio erlatiboen arabera. Haatik, originala oihalaren gainean antzeman daiteke. Hori posible da proiekzioan identifikazioa ahalbidetzen duten geometriaren *propietate inbarianteak* daudelako. Horrelako propietateen azterketa eta dedukzioa da geometria proiektiboaren helburua.

Duccio (1255-1318). *Azken afaria*. Ikusi zer perspektiba erabili den. Badirudi mahaian dauden gauzak ikuslearengana erortzen direla.

Leonardo da Vinci (1452-1519). *Azken afaria*. Perspektibaren erabilera.

Rafael Sanzio (1483-1520). *Atenaseko Akademia.* Perspektibaren adibide bikaina. Gainera, antzinako Greziako hainbat pertsonaje agertzen dira, horien artean matematikari asko.

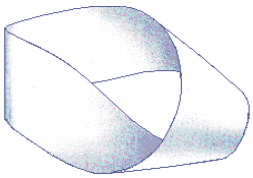
1: Zenon Zitiokoa edo Zenon Eleakoa – 2: Epikuro – 3: Frederiko II Gonzaga – 4: Boezio edo Anaximandro edo Enpedokles – 5: Averroes – 6: Pitagoras – 7: Altzibiades edo Alexandro Handia – 8: Antistenes edo Xenofonte – 9: Hipatia edo Francesco Maria della Rovere gaztea – 10: Eskines edo Xenofonte – 11: Parmenides – 12: Sokrates – 13: Heraklito (Miguel Angel bezala margotua) – 14: Platon *Timeori eusten* (Leonardo da Vinci bezala margotua) – 15: Aristoteles *Etikari eusten* – 16: Sinopeko Diogenes – 17: Plotino? – 18: Euklides edo Arkimedes ikasle talde baten ondoan (Bramante bezala margotua)? – 19: Estrabon edo Zoroastro? – 20: Klaudio Ptolomeo – R: Rafael Apeles bezala– 21: Sodoma Protogenes bezala.

XVII. mendearen lehenengo zatian, Pierre Fermat (1601-1665) eta, batik bat, René Descartesen eskutik (1596-1650), *geometria analitikoa* deiturikoa agertzen da. Ondoko bi kontzeptuotan oinarritzen da: koordenatuetan eta 2 ezezaguneko edozein ekuazio aljebraiko kurba lau baten bidez irudikatzean haren koordenatuez baliaturik. Honekin guztiarekin Descartesek geometriara besterenganatzen du aljebrako lan-metodoa. Horrela Matematika osoaren batasuna eta problemen ebazpenean generalizazioa lortuz: «problema baten» ikerketatik problema guztietara aplikagarri izan daitekeen metodo batera igarotzen da.

Kalkulu diferentzialaren laguntzarekin kurben azterketa errazten da, kurbako edozein puntuko zuzen ukitzailea zehaztu daitekeelako eta kurbadura ere bai.

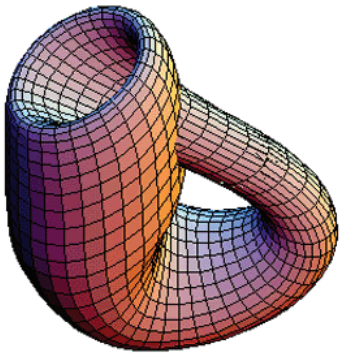
Azkenez, XIX. mendearen erdian, nahiz eta Euler matematikari suitzarra (1707-1783) aitzindari izan, Geometriaren garapen zeharo berriari hasiera eman zitzaion. Jakintzagai berriari *analisi situs* edo *topologia* izena eman zitzaion; irudi geometrikoak eraldatzean propietate metrikoak eta proiektiboak galdu arren, beste propietate batzuk mantentzen dira; topologiak propietate horien ikerketa du helburu. Eraldaketa topologiko orokorren adibiderik intuitiboenak «deformazioak» dira, eta haren oinarrizko kontzeptuak hauxek dira: «ondoko»arena, «ingurune»arena, «mugagabeki hurbil»arena eta «gorputz baten disekzio»arena.

Behean agertzen dira topologiak aztergai dituen objektu batzuk

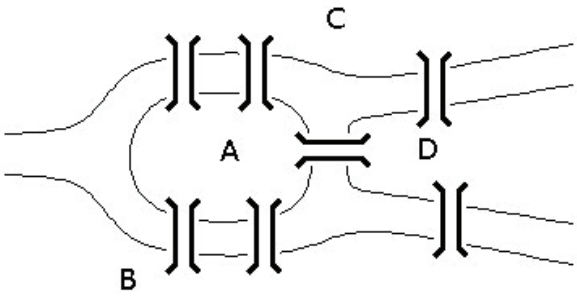


Möebius-en zinta.

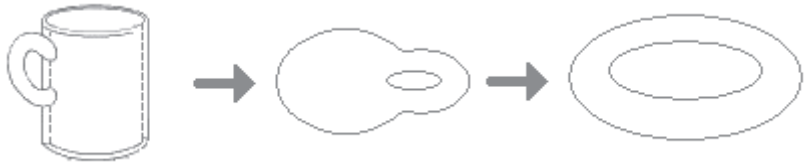
Nazioarteko birziklatzearen ikurra Möebius-en zinta bat da.



Klein-en botila.



Könisberg-eko zubien problema.



Topologikoki baliokideak diren irudiak.

Madrileko metroaren planoa da. Hemen, geltokiak eta haiek lotzen dituzten metroko lineak daude. Baina ez da geometrikoki zehatza. Metroko lineen kurbadura, haren eskalaren luzera, geltokien arteko posizio erlatiboa…ez datoz bat errealitatearekin. Hala ere, planoa guztiz erabilgarria da (izatez, zehatza balitz askoz erabilgaitzagoa izango litzateke). Haatik, plano hau zentzu batean zehatza da; informazio mota bat doi-doi aurkezten du eta metroko saretik ibiltzeko beharrezkoa den informazio bakarra: *informazio topologikoa.*

- Ariketak:

1. Egin Moëbius-en xingola bat. Marraz ezazu xingolaren erditik doan zuzena. Xingola moztu zuzen horri jarraituz. Beste xingola batean, heren bateko distantziara doan zuzena marraztu, eta, ondoren, zuzen horri jarraituz moztu.
2. Froga ezazu, modu bat baino gehiago erabiliz, triangelu baten angeluen batura 180 gradu dela.
3. Eraiki itzazu simetria ardatz bat, bi edo hiru dituzten irudiak. Tolesturak eginez, irudi minimoa lortu.
4. Justifika itzazu laukizuzen, karratu, erronbo, erronboide, triangelu eta trapezioaren azaleraren formulak.

4. Matematikaren historia: estatistika eta probabilitatea

4.1. ESTATISTIKA

Espainiako Hizkuntza Akademiak dio «estatistika» hitza «estadista» hitzetik datorrela eta hori «estatu»tik, eta azken hori latinezko «status»etik (status = pertsona edo gauza baten egoera eta, bereziki, pertsona edo gauza baten izatean aldaketen ondorioz eragina duten izaera desberdinak).

«Estatistika» hitzaren hiru adierak honako hauek dira[2]:

1. Populazioaren edo naturako eta industriako baliabideen edo trafikoaren edo estatu baten edozein ezaugarriren (probintzia, herria…) errolda edo kontaketa.
2. Kontagarri edo zenbakarri diren egitate moral edo fisikoen ikasketa eta haien zifren erkaketa.
3. (Mat.) Probabilitate-kalkuluan oinarritutako inferentziak lortzeko zenbakizko datuak erabiltzen dituen zientzia.

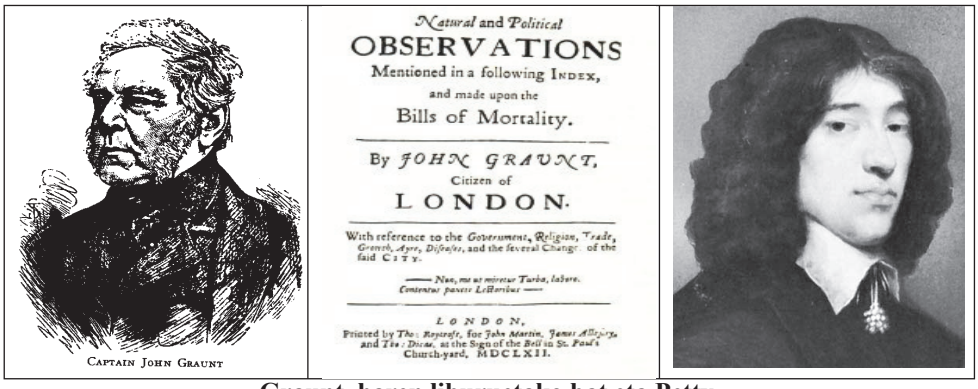
Lehenengo adierari dagokio Estatistikaren helbururik tradizionalena: *zenbakizko datuen bilketa, aurkezpena eta deskripzioa.* Estatistika *deskribatzailea* da. Antzinako Egipton, Nilo ibaiaren uholde periodikoen ondoren, ondasunak eta jabetzak banatzeko urtero egiten zituzten erroldako lanak. Erromatar inperioak erroldak egin zituen zergak biltzeko; Bibliaren arabera, Jesukristo bera jaio zen bere gurasoek erroldan agertzeko eginiko bidaia batean.

Erromako Senatua.

2. Errege Akademiaren Espainiako Hizkuntzaren Hiztegia (1992), Madril (905. or.).

Halaber, aurreko bigarren adierak kontaketa hutsak baino zerbait gehiago aipatzen du: «zifren erkaketa»; esaldi horretan «batez besteko balioen» esistentzia antzematen da. Hau izango litzateke Estatistikak duen bigarren eremu zabala, hots, inferentzien estatistika deiturikoa, estatistika *inferentziala: zenbakiak interpretatzeko estatistika deskribatzaileetatik eratortzen diren teknikak eta emaitza horietan oinarrituz erabakiak hartzeko teknikak* (Johnson, 1976: 18).

Zentzu horretan, John Graunt (1620/1674), oihalen saltzaile londrestarra, estatistikareno aitzindaria izan zen; berak, Londreseko elizetako datu demografikoetan oinarrituta, balio iraunkorra duten lege demografikoak eriden zituen eta Londreseko eta Ingalaterrako beste hirien populazioa zenbatestera heldu zen. Halaber, ohartu egin zen istripuengatiko, suizidioengatiko eta askotariko gaixotasunengatiko hiltze-portzentajeak antzekoak zirela aztertutako hirietan eta urtetik urtera ia-ia ez zutela aldaketarik. Horrela, zoripean omen dauden gertakariek erregulartasun harrigarriak zituzten. Zientzia jaioberriari «aritmetika politiko» izena eman zitzaion eta Petty-k, Graunt zenaren lanen jarraitzaileak, honako definizioa jarri zion: «Gobernuarekin zerikusirik duten gauzen gaineko arrazoibidearen artea zifren bidez egina» (Kline, 2000: 497).



Graunt, haren liburuetako bat eta Petty.

Espainian, 1713an, Errolda Zibileko gaineko xedapenak eman ziren; 1829an, XVI. mendeko populazioaren errolda argitaratu zen. Espainiako Estatistika Institutua (INE) 1945ean sortu zen, estatistika ofizialen ardura bere gain hartuz. Askoz geroago sortu ziren elkarte autonomoetako antzeko erakundeak. Euskadin, *Eustat* izenekoa.

Bukatzeko, M. Kline-k egindako metodo estatistikoaren eta deduktiboaren arteko desberdintasuna aipatuko dugu (Kline, 2000: 498): «Problema baten aurrean ikuspegi estatistikoa da, batik bat, ezjakite baten aitorpena. Arrazoibidezko kateak garatzeko erabil litezkeen premisak aurkitzeko oinarrizko printzipioetara heldu behar da esperimentuetatik, behaketatik edo intuiziotik abiatuta. Hori ematen ez denean, datuetara jotzen dugu, eta gertatutakoari buruz ahalik eta informazio gehien biltzen saiatzen gara. Tratamendu mediko berri baten emaitzak deduzitzeko beharrezkoa

diren ezagupenak ez baditugu, tratamendua aplikatzen da, emaitzak apuntatzen ditugu, eta saiatzen gara ondorioak ateratzen. Nahiz eta tratamendua eraginkorra den eta beraz aplikatu daitekeela ondorioztatu, oraindik ez dakigu zein faktore fisiko edo kimiko dauden tratamenduaren azpian. Agian, metodo deduktiboaren eta estatistikoaren arteko desberdintasunik handiena da, azken horrek talde handiekin gertatzen dena dioskula, baina ezin du kasu konkretu baten aurrean gertatuko denaren aurreikuspenik egin; bitartean, metodo deduktiboak, hain zuzen, aurreikusten du kasu bakoitzean gertatu behar dena».

4.2. PROBABILITATEA

Probabilitate-teoriari dagokionez, 1650eko Frantziako gizartean du jatorria non jokoa nahiko entretenimendu arrunta zen, murrizketa legal askorik gabea. Gero eta joko konplikatuagoak joan ziren garatzen eta joko bakoitzean irabazteko probabilitatea kalkulatzeko metodo baten beharra sentitu zuten.

Probabilitatea, aldeko kasuak kasu posible guztiekin zatituz lortzen da:

$$p = \frac{aldeko \quad kasuak}{kasu \quad posible \quad guztiak}$$

Beraz, karta-sorta batetik karta bat ateratzean urrezkoa izateko dagoen probabilitatea 10/40 = ¼ da:

$$p(urrezkoa\ izateko) = \frac{10}{40} = \frac{1}{4}$$

eta onartzen da karta bat 400 aldiz ateratzean, karta hori aldi bakoitzean karta-sortara itzuliz, lortutako urrezkoen maiztasun erlatiboa ¼-etik urrun egotea nahiko arraroa izango dela. Beraz, probabilitatea neurketa bat da: gertakari zehatz bat gertatzeko dagoen posibilitatearen neurketa.

Jokalari pasionatu batek, De Meré zaldunak, dadoetan irabazteko zeukan probabilitatea kalkulatu zuen eta irabazitakoen maiztasun erlatiboak kalkulatzean, balio errealen eta teorikoen artean aldea zegoela antzeman zuen.

Diferentzia horri buruz, Pariseko Blaise Pascal matematikari eta filosofo ospetsuari galdetu zion, eta Blaise Pascal-i, De Meré-k proposatutako problemarekiko interesa piztu zitzaion; horrela beste lagun matematikari batzuekin, batez ere Pierre Fermat-ekin, gutun-trukaketa bat hasi zuen. Gutunen trukatze hori probabilitate-teoriaren jatorritzat hartzen da.

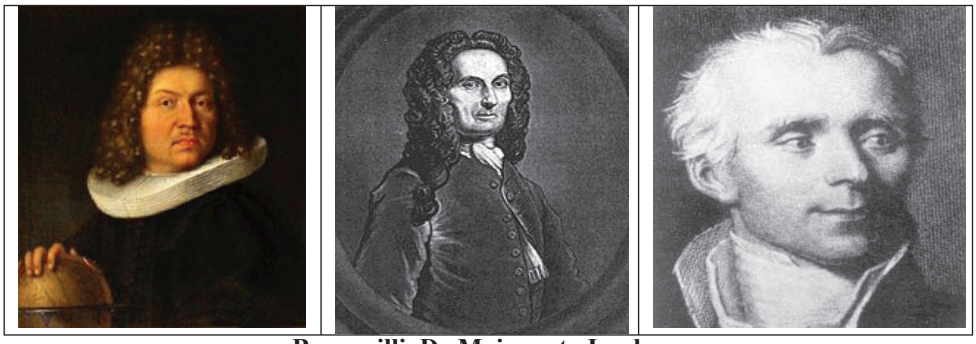
Berehala, Pascal-ek eta Fermat-ek antzeman zuten De Meré-k kalkulatutako probabilitatea gaizki zegoela. De Meré okertu egin zen kasu batzuk ekiprobabletzat hartzean, eta emandako definizioa soilik da aplikagarri kasuak ekiprobableak direnean.

De Meré, Pascal eta Fermat.

Probabilitate-teoriaren garapenak badu beste erreferentzia-puntu bat 1713. urtean; urte horretan J. Bernouilli-ren *Ars conjectandi* (aieruaren artea) lana argitaratu zen eta lan horretan banaketa binomialaren ikasketa egiten du, banaketa horretarako maiztasun erlatiboen egonkortasunaren adierazpen matematikoa emanez.

Beste mugarri bat da *The Doctrine of Chances* (probabilitateen doktrina) lanaren bigarren argitalpena, 1738an aterata, haren egilea De Moivre frantses hugonotea da. Arrazoi erlijiosoengatik Frantziatik ihes egin zuen Ingalaterrara, eta han bizimodua atera zuen zorizko jokoen problemak ebatziz. Aipatutako lan horretan banaketa normalari buruzko lehenengo arrastoak agertzen dira.

1812an Laplace-k *Theorie Analytique des probabilités* bere lan ospetsua argitaratu zuen; lan horretan zorizko jokoen azalpen osoa ematen zuen eta horrez gain probabilitate-teoriaren aplikazio anitz, bai arlo zientifikoan bai praktikoan ere.



Bernouilli, De Moivre eta Laplace.

Laplace-ren lanaren ondorioz, probabilitate-teoriaren aplikazioak zientziaren beste adarretara zabaltzen dira XIX. mendean, eta horrela, Gauss eta Laplace-k, bakoitza bere aldetik, probabilitate-teoria aplikatu zuten behaketa fisiko eta astronomikoen erroreak ikasteko. Maxwell, Boltzmann eta Gibbs-ek *Mekanika Estatistikoa* lanean probabilitatea aplikatu zuten; lan hori fisika garaikidearen arlo desberdinetarako funtsezkoa izan da. Jada, XX. mendean, probabilitate-teoriaren aplikazioak eremu askotara zabaldu dira: genetika, ekonomia, psikologia, soziologia, burtsa…

Nahiz eta aplikazio horiek arrakastatsuak izan, probabilitatearen definizio klasikoaren kontrako ahotsak altxatu ziren, definizio horrek kasu posible guztiak ea ekiprobableak ote ziren aurretiaz jakitea eskatzen zuelako. Gainera, zenbait kasutan probabilitatearen definizio klasikoa ezin da aplikatu, adibidez, txintxeta bat puntaz gora erortzeko dagoen probabilitatea edo 30 urte dituen gizona datorren urtean hil dadineko probabilitatea kalkulatzean.

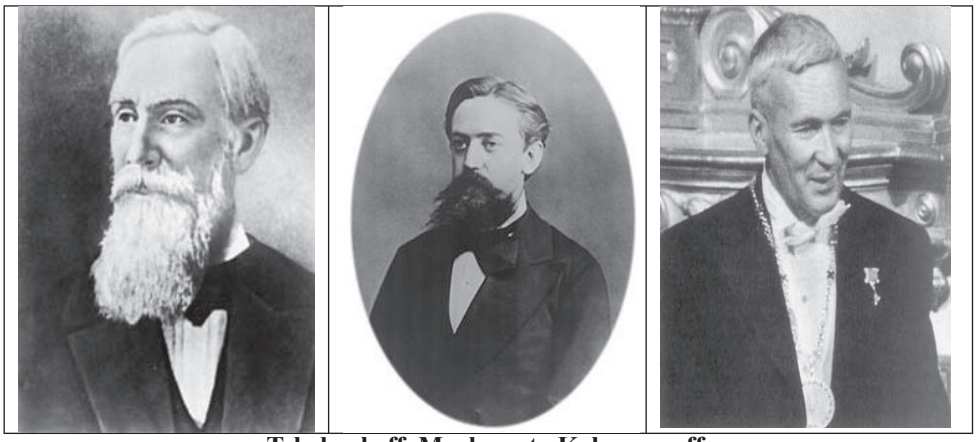
Munduko bi gerra handien artean, matematika zeharo aldatu zen eta Bigarren Mundu Gerraren ostean, matematikaren parte batzuk zerbait guztiz berria ziren, horrek aro berria iragartzen zuelarik. Multzoen eta neurketaren teoriek matematikako gero eta zati handiagoak inbaditu zituzten XX. mendean zehar, eta joera horrek berebiziko garrantzia eduki du probabilitate-teoriaren garapenean, zeinari Borel-ek 1909an bere *Eléments de la théorie des probabilités* lana dedikatu zion.

XX. mendeko lehen urtea lagungarri gertatu zen probabilitate-teoriaren aplikazioetarako bai Fisikan bai Genetikan ere, zeren 1901. urtean Gibbs-ek bere *Elementary Principles in Statistical Mechanics* lana argitaratu baitzuen eta urte berean Karl Pearson-ek (1857-1936) *Biometrika* aldizkaria fundatu zuen. Pearson-ek 1900. urtean χ^2 «khi-karratu»aren irizpidea ezagutarazi zuen Londreseko unibertsitatean. Poincaré-k matematikariak zituen tituluetariko bat omen zen «probabilitate-kalkuluaren irakaslea»; horrek, gaiarekiko handituz doan interesa adierazten du.

Karl Pearson.

Bizkitartean Errusian gertakari kateatuen ikasketari hasiera eman zitzaion, bereziki 1906-1907 urteetan, Tchebycheff-en ikaslea zen Andrei Andreyevich Markov-ek hasita (edo Markov, 1856-1922); horrek bere maisuarekin batera, *Oeuvres* (2 liburuki, 1899-1904) argitaratu zituen. Gasen teoria zinetikoan, giza fenomeno eta biologiko askotan eta, adibidez, ilaren teorian, gertakari baten probabilitatea aurreko emaitzen mendekoa da, eta, beraz, probabilitateak kateaturik daude. Markov-en kateak zehazki estudiatuak izan dira XX. mendeko bigarren partean. Gaur egun

probabilitate-teoriaren azalpen teorikoetarako beharrezko ditu funtzio neurgarriaren eta oraingo integrazio-teoriaren kontzeptuak.



Tchebycheff, Markov eta Kolmogoroff.

Errusian bertan, adibidez, Andrei Nicolaevich Kolmogoroff-ek Markov-en prozesuen teorian aurrerapen garrantzitsuak egin zituen (1931) eta Hilbert-ek planteatutako seigarren problemaren zati bati irtenbidea eman zion; problema horretan probabilitate-teoriaren oinarri axiomatikoa eskatzen zen, eta Lebesgue-ren integrazio-neurria erabili zuen.

Analisi klasikoak nagusiki funtzio jarraituak zituen erdigune; aldiz, probabilitate-problemak orokorki kasu diskretoei dagozkie. Neurriaren teoriak eta integralaren kontzeptuaren zabalpenak tresna egokiak ziren analisiaren eta probabilitateen arteko elkarketa lortzeko, batez ere Laurent Schwartz (1915-2002) Pariseko unibertsitatekoak diferentziazio konptzeptua orokortu zuenetik, banaketa-teoriaren bidez (1950-1951).

- Ariketak:

1. *Test baten fidagarritasuna*

Minbizia antzemateko test bat dago eta haren fidagarritasuna % 98koa da. Horrek zera esan nahi du: pertsona batek minbizia baldin badu test horretan positiboa emango du 0,98ko probabilitatearekin. Era berean pertsona batek ez badu minbizirik test horretan negatiboa emango du 0,98ko probabilitatearekin. Aierua: populazio osoaren % 0,5ek minbizia du. Pertsona bati testa egiten zaio eta positiboa ematen du. Zer punturaino deprimitu beharko litzateke?

Ebazpena:

Suposa dezagun minbizia detektatzeko 10.000 froga egin direla:

– Horien artean zenbatek edukiko du minbizia?

% 0,5 10.000 = 50 pertsona

– 50 horietatik zenbatek emango du positiboa?

0,98 x 50 = 49 pertsonak ematen dute positiboa

– Badaude 9.950 pertsona minbizirik gabe eta horietatik (testean) % 2 izango dira positiboak, beraz 9.950 x 0,02 = 199

– Beraz badaude 199 + 49 = 248 test positibo baina horietatik 199 faltsu positiboak

– Beraz *P (minbizia eduki/behin testean positiboa emanda)*= 49/248 = % 2

Horrek esan nahi du positiboa eman duten 5 pertsonetatik soilik batek duela minbizia.

2. *Gaixotasun larri batzuetatik libre izatea*

Demagun ondoko gaixotasunetatik libre egoteko dauden probabilitateak hauexek ditugula:

p(ez hiltzeko auto-istripu batean) = % 99
p(ez hiltzeko etxeko istripu batean) = % 98
p(ez hiltzeko biriketako gaixotasunengatik) = % 95
p(ez hiltzeko erotasunagatik) = % 90
p(ez hiltzeko minbiziagatik) = % 80
p(ez hiltzeko bihotzeko batengatik) = % 75

Gaixotasun horiek guztiak independenteak direla suposatuz, horietatik guztietatik libratzeko dagoen probabilitatea ondokoa dugu:

$$p(\text{gaixotasun horietatik libre egoteko}) = 0{,}99 \cdot 0{,}98 \cdot 0{,}95 \cdot 0{,}90 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}75 \leq 0{,}5$$

3. *Zer da merkeagoa Osakidetzarentzat, odol-analisiak banan-banan egitea gaixoei edo odol guztiak nahastu eta analisi bakarra egitea?*

Demagun 50 gaixo ditugula anbulategian goizeko zortzietan odol-analisiak egiteko prest. Banan-banan eginda 50 odol-analisi egingo genituzke. 50 odol horiek nahastuz analisi bakarra egingo genuke eta bi aukera aurkeztu daitezke:

a) Analisi nahastatu horrek negatibo ematea; horrela 50 gaixoak osasuntsu egongo lirateke.

b) Analisi nahastatu horrek positibo ematea; horrela banakako analisiak egin beharko lirateke jakiteko nortzuek eman duten positiboa; beraz, denetara 51 analisi.

Ebazpena:

Egin ditzagun kalkulu eta aieru batzuk:

$$p(\textit{pertsona osasuntsu}) = \frac{99}{100}$$

$$p(50\ \textit{pertsona osasuntsu}) = \left(\frac{99}{100}\right)^{50} = p(\textit{soilik analisi}\ 1)$$

$$p(\textit{gutxienez pertsona}\ 1\ \textit{gaixorik}) = \left[1 - \left(\frac{99}{100}\right)^{50}\right] = p(51\ \textit{analisi})$$

Beraz itxarondako batez besteko analisi kopurua honela kalkulatzen da:

$$\text{Itxarondako analisiak} = 1 \cdot \left(\frac{99}{100}\right)^{50} + 51 \cdot \left[1 - \left(\frac{99}{100}\right)^{50}\right] \cong 21\ \text{analisi)}$$

4. *CHUCK — A — LUCK (Ingalaterran eta Far West-eko aratusteetan jokatutako jokoa*

Jokoa, hiru dadorekin egiten da. Hiru dadoak airera jaurtitzen dira eta goiko aurpegiei erreparatzen zaie. Pertsona batek euro bateko postura egiten du, eta dadoen goiko hiru aurpegietan ateratakoa asmatzen badu, orduan 3 € irabaziko ditu; 2 dadotakoa asmatzen badu, 2 € irabaziko ditu, eta dado bakarrekoa asmatzen badu, 1 € eramango du. Zein da batez bestez itxaron daitekeen irabazia?

Ebazpena:

Kalkula ditzagun probabilitate batzuk:

$$p(3\ \textit{dadoetan igarri}) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{216}$$

$$p(2\ \textit{dadotan igarri}) = 3 \cdot \left(\frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6}\right) = \frac{15}{216}$$

$$p(\textit{dado bakar batean igarri}) = 3 \cdot \left(\frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6}\right) = \frac{75}{216}$$

$$\text{Beraz, itxarondako irabazia} = 3 \cdot \frac{1}{216} + 2 \cdot \frac{15}{216} + 1 \cdot \frac{75}{216} - 1 \cdot \frac{125}{216} = -0{,}08\ €$$

Jokoa nahiko bidezkoa da.

5. Hemen duzu Estatistikari buruzko web orri bat MALAPRENSA *http://www.malaprensa.com/*

5. Arrazoibide matematikoa. Kuantifikatzaile logikoak eta irudikapen grafikoak

Has gaitezen oinarrizko definizio batzuk ematen.

- Proposizioa: *edozein esaldi, baldin eta adierazten duenari buruz egiazkoa ala gezurrezkoa den esan ahal bada.*

  Adibideak:

  – Kepak jolasten du.
  – Jone medikua da.
  – 2 = 3
  – Zer ordu da?
  – Haize gozoa.
  – zaporea > 2,13

  Zeintzuk ez dira proposizioak?

- Axiomak: *aurretiaz egiatzat hartzen diren proposizioak.*

  Adibideak:

  – Bi puntutatik zuzen bakar bat igarotzen da.
  – Berdintzak (=) ondoko axiomak betetzen ditu:

    1. a edozein objekturako betetzen da: a = a
    2. a eta b bi objektuetarako, baldin a = b bada, orduan b = a
    3. a, b, eta c hiru objektuetarako, baldin a = b eta b = c, orduan a = c

- Proposizioak lotu:

  Badaude bide desberdinak proposizioak lotzeko.

– Ezeztapena: proposizioa p bada bere ezeztapena da «Ez p».

  Adibideak:

  – p = Irati abokatua da, Ez p = Irati ez da abokatua
  – p = (x=3), Ez p = (x≠3)

– Konjuntzioa: bi proposizio batera ematen direnean. Horrela idazten da $p \wedge q$.

  Adibideak:

  – p = Danubio ibai handia da, q = Uruguaiko hiriburua Tokio da.

  Orduan $p \wedge q$ = Danubio ibai handia da eta Uruguaiko hiriburua Tokio da.

– Disjuntzioa: proposizio bat edo beste bat ditugunean, bi proposizioen disjuntzioa dugu.

  Adibideak:

  – $p \vee q$ = Danubio ibai handia da edo Uruguaiko hiriburua Tokio da

– Baldintzazkoa: p eta q emanda, baldin p orduan q proposizioari baldintzazko proposizioa deritzo. $p \Rightarrow q$ idazten da; p halabeharrez q ere irakurtzen da.

  Adibideak:

  – p = a zenbakiaren azken zifra 2 da, q = a 2ren multiploa da; $p \Rightarrow$ q-ren esanahia da: baldin a zenbakia 2z bukatzen bada, orduan 2ren multiploa da.

– Baldintzabikoa: $p \Leftrightarrow q$ idazten da, eta irakurri, p baldin eta soilik baldin q. . $p \Rightarrow q$ proposizioaren alderantzizkoa . $q \Rightarrow p$ da eta biak batera hartuta baldintzabikoa $p \Leftrightarrow q$ lortzen da.

  Adibideak:

  – $p \Leftrightarrow q$ 0 (Danubio ibai handia da baldin eta soilik baldin Uruguaiko hiriburua Tokio bada).

5.1. ARRAZOIBIDE MATEMATIKOA

• Demostrazioa matematikan. Teoremak

Teorema bat frogatu beharreko enuntziatua da. Adibidez, eguneroko mintzairan diogunean «egarri bazara, hozkailuan ur hotza dago», ez da teorema bat. Aldiz, «aspirina hartuta ez duzu buruko minik izango», bai, teorema bat da.

Teorema baten frogan erabilgarri diren «lema» bezalako hitzak erabiltzen dira; lema bat proposizioa da; «korolarioa», teorema baten ondoriozko proposizioa; eta «axioma», frogarik gabe onartutako proposizioa. Teorema hitza gorde ohi da garrantzia duen proposiziorako.

Teorema baten frogaren muina da premisa batzuetatik abiatuz ondorio batzuen baliagarritasuna deduzitzea, inplikazio logikoak erabiliz. $H \rightarrow T$ erako inplikazio bakoitza teorema bat da. H hipotesia da eta T tesia.

Adibidea: «Triangelu baten barne-angeluen batura 180º da».

Hipotesia: «Irudi bat triangelu bat da».

Tesia: «Haren barne-angeluen batura 180º da».

Ondoko teorema edo inplikazioari, $H \rightarrow T$, zuzena deituko diogu, hortik abiatuta ondokoak ditugu:

Alderantzizko teorema:	$T \rightarrow H$
Kontrako teorema:	$Ez\ H \rightarrow Ez\ T$
Alderantzizkoaren kontrako teorema:	$Ez\ T \rightarrow Ez\ H$

Horien artean ondoko baliokidetzak daude: $H \rightarrow T$ baliokide $Ez\ T \rightarrow Ez\ H$

$T \rightarrow H$ baliokide $Ez\ H \rightarrow Ez\ T$

Adibidez, abesti ospetsuaren testua hartuz: «Baldin eta osasuna, dirua eta amodioa eduki, orduan zoriontsua zara» (teorema zuzena) baieztapen hori ondokoarekin baliokide izango da: «Ez bazara zoriontsua orduan ez duzu osasunik, ez dirurik, ezta amodiorik ere» (alderantzizkoaren kontrakoa).

Era berean, «Baldin eta zoriontsua bazara orduan baduzu osasuna, dirua eta amodioa» (alderantzizko teorema) baieztapenaren baliokidea da: «Baldin eta ez baduzu osasunik, dirurik eta amodiorik orduan ez zara zoriontsua) (kontrakoa),

Ez dira nahastu behar $H \rightarrow T$ (teorema zuzena) eta $T \rightarrow H$ (alderantzizkoa): «Baldin eta dopaminak Parkinson gaixotasunaren dardaren gutxitzea eragiten badu, orduan, dopaminarik ezak dardarizoa eragiten du» (Paulos, 1990).

- Baldintza beharrezko eta nahikoa

Izan bedi $H \rightarrow T$ teorema bat, orduan, H betetzea *baldintza nahikoa* da T bete dadin, eta T betetzea *baldintza beharrezkoa* da H bete dadin

Adibidea:

Izan bedi «zenbaki bat 6ren multiploa bada orduan bikoitia da» baieztapena. 6ren multiploa izatea baldintza nahikoa da bikoitia izateko, baina ez beharrezkoa. Bikoitia izatea beharrezkoa da 6ren multiploa izateko, baina ez nahikoa.

Gainera kasu honetan, hau ere esan genezake:

- $T \rightarrow H$ alderantzizko baieztapena ez da egia.
- $Ez\ H \rightarrow Ez\ T$ baieztapena ez da egia.
- Alderantzizkoaren kontrako baieztapena $Ez\ T \rightarrow Ez\ H$ egia da.

H $\rightarrow$ T teorema batean, alderantzizkoa ere betetzen bada, T $\rightarrow$ H, orduan H baldintza beharrezko eta nahikoa da T bete dadin.

Adibidea:

«Baldin eta poligono batean bere barne-angeluen batura 180º bada, orduan poligono hori triangelua da eta alderantziz».

- Teorema baten froga

Aurreko guztia idatzi ondoren H $\rightarrow$ T teorema frogatzeko bide batzuk daude:

* Zuzeneko froga: H egiatzat hartuta, T-ren egiara ailegatzen da.
* Zeharkako froga (absurdo bidezko froga, Ez T $\rightarrow$ Ez H): «Ez T» egiatzat hartzen da (hots, T gezurra da) eta hipotesi horrekin arrazoitzen da H-ren faltsutasuna aurkitu arte (orduan «Ez H» egia izango da).

Adibidea:

Ikus dezagun Euklidesi esleitzen zaion orain dela 2.400 urteko demostrazioa: $\sqrt{2}$ zenbaki irrazionala dela frogatu nahi dugu (ezin da zatiki bezala idatzi). Kontrakoa egiatzat hartuz, $\sqrt{2}$ zatiki legez idatziko dugu (zatiki sinplifikaezina), horrela:

$\sqrt{2} = a/b \rightarrow 2 = a^2 / b^2 \rightarrow 2\,b^2 = a^2 \rightarrow a^2$ bikoitia da $\rightarrow$ a bikoitia da $\rightarrow a = 2\,\alpha \rightarrow a^2 = 4\,\alpha^2 \rightarrow 2\,b^2 = 4\,\alpha^2 \rightarrow b^2 = 2\,\alpha^2 \rightarrow b^2$ bikoitia $\rightarrow$ b bikoitia da, eta absurdoa da, zatikia sinplifikagarria izango litzatekeelako (bikoitia/bikoitia)

- Kontraadibidea: maiz, teorema baten enuntziatua, C multzoko elementuei erreferentzia egiten dien proposizioaren bidez emanda dago (funtzio logikoa deitzen zaio p(x). Horrela, edozein x-tarako p(x) enuntziatu bat da eta, beraz, egia ala gezurra izan daiteke). Kasu honetan, multzoetan bezalaxe, kuantifikatzaileak erabiltzen dira:

$\exists\, x \in C / p(x)$. «Badago 100 baino txikiagoa den zenbaki arrunten bat lehena dena».

$\forall\, x \in C / p(x)$. «Edozein n zenbaki arruntetarako, n-ren aurreko zenbaki arrunt guztien batura (n + 1) n/2 formularen bidez kalkulatu daiteke».

Eta multzoetan bezala, *Morgan-en legeak* ere existitzen dira kuantifikatzaileak dituzten proposizioetarako:

Ez ($\forall$ x, p(x) <==> ($\exists$ x, Ez p(x))
Ez ($\exists$ x, p(x) <==> ($\forall$ x, Ez p(x))

Horrela, lehenengo legea aplikatuz, $\forall$ x, p(x) enuntziatua gezurra dela frogatzea $\exists$ x, Ez p(x) egiaztatzearen baliokidea da; hau da, esistitzen da x_0 elementu bat zeinarentzat $p(x_0)$ faltsua den. x_0 elementu hori —«$\forall$ x, p(x)»—, enuntziatuaren kontraadibidea da.

Adibidez, «suediar guztiak errubioak dira» esaldiaren faltsutasuna frogatzeko nahikoa izango litzateke errubioa ez den suediar bakar bat aurkitzearekin. Kontraadibide horrek esaldiaren faltsutasuna frogatuko luke.

Beste adibide batzuk:

Froga itzazu ondoko enuntziatuak faltsuak direla:

a) «Edozein zenbaki bakoiti da bi zenbaki arrunten karratuen batura» (kontraadibidea: 3 zenbakia).
b) $\forall$ x, $|x| \neq 0$ (kontraadibidea: 0).
c) $\forall$ x, $x^2 > x$ (kontraadibidea 1).

- Indukzio bidezko demostrazioa: matematikan badaude, zenbaki arrunt guztiei erreferentzia egiten dieten proposizioak. Adibidez, ezaguna den propietate hau:

«n edozein zenbaki arrunt izanda, n-ren aurretik dauden zenbaki arrunt guztien batura n (n+1) / 2 da».

Demostrazioa hiru urratsetan egiten da:

1. n = 1 baliorako proposizioa egiaztatzen da.

   Kasu honetan, zenbaki arrunt bakarra dugu, 1, orduan: 1 (1+1)/2 = 1, eta formula egiaztatzen da.

2. Formula, n = k baliorako egia dela suposatzen da, hots,

   1+2+3+ … + k = k (k+1) / 2

3. Aurrekoa suposatuta, formula, n-ren hurrengo baliorako egia dela frogatzen da.

   Hain zuzen, 1+2+3+ … + k +(k+1) = k (k+1)/2 + (k +1) = (k+1) (k/2 + 1) = (k+1) (k+2) /2 , frogatu nahi genuen bezala.

Aurreko guztiaren atzean «domino efektua» dago: formula n = 1erako egia denez, demostrazioaren 2. eta 3. urratsengatik, egia izango da n = 2rako; balio horretarako egia izateagatik ere, egia izango da hurrengorako, n = 3rako; eta orduan, n = 4rako, eta horrela jarraituz infinituraino.

• Ariketak:

1. Froga ezazu ondoko formula: $\sum_{k=1}^{k=n}(2k-1)=n^2$ (lehenengo *n* zenbaki bakoitien batura n^2 da).
2. Frogatu indukzioaren bidez ondoko formulak:

   i) $1^2+2^2+\ldots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

   ii) $1^3+2^3+\ldots+n^3=(1+\ldots+n)^2$

3. 100 m = 1 Hm

   25 m = ¼ Hm

   5 m = ½ m Absurdoa. Zergatik?

4. Laidogarria: Arartekoak azaldu digunez udalek ez dute ahalmenik kalean gertatzen diren jokabide laidogarriak zigortzeko: biluztasuna, kalean edatea, eskaletasuna. Arartekoari eskatzen diot nire eskubidea defendatzeko, bera ikusia izateko publikoaren aurrean biluzik edo bere seme-alabak (baldin baditu) kalean edaten, zeren eta jokabide horiek, bere aburuz, zintzoak bide direlako.

   (Zuzendariari eskutitza. *El Correo.* Bilbao. 2002/05/05)

   Zer iritzi duzu zuzendariaren atalean agertutako arrazoibide horretaz?

5. Bira p=«n, 6ren multiploa da» eta q=«n, 3ren multiploa da». Hitzez idatzi ondoko proposizioak eta esan egia direnetz.

   – p $\Rightarrow$ q – q $\Rightarrow$ p – Ez p $\Rightarrow$ Ez q – Ez q $\Rightarrow$ Ez p

6. Ondoko esaldien artean, zeintzuk kontsidera daitezke proposizioak?

– Noiz egongo da etxe hau konponduta?
– Horia eta urdina nahastuz berdea lortzen da.
– Legearen xedea justizia egitea da.
– Kontuz mendiekin!
– Jungfrau, mendi arriskutsua da.

7. Sailka itzazu ondoko proposizioak honela: proposizio bakuna, ukapena, bilketa, ebaketa, baldintza beharrezko, baldintza beharrezko eta nahikoa:

– Kepa altua eta atsegina da.
– Golf eta futbola bi kirol dira.
– Seguru dago baldin eta soilik baldin ibaia zeharkatzen badu.
– Aurpegian, giharretako tenkadurak beldurra adierazten du.
– Prebentzio kanpaina hasten bada, berak «rol» berezia edukiko du.

8. Ondoko proposizioak ezeztatu:

– Iruñean denda asko daude.
– Kepa zintzoa eta azkarra da.
– Iruñeko gauak oso hotzak dira.

9. Bira ondoko proposizioak:

p = Lurra planeta bat da, q = Lurraren erradioa 6.366 km-koa da

Idatz itzazu hitzez aurreko proposizioetatik eratorritako hauek:

– Ez p
– p eta q
– p edo q
– p orduan q
– p baldin eta soilik baldin q

Aurreko proposizio guztiak ezeztatu.

10. Biz p = zenbaki baten azkeneko zifra 4 bada, orduan 2ren multiploa da. Proposizio horren alderantzizkoa, kontrakoa, eta kontraalderantzizkoa idatzi eta esan egia ala gezurra diren.

11. Ikastetxe batean futbolean aritzen diren ikasleak tenisean ere aritzen dira. Ikasle bat futbolean aritzen bada, orduan B aldizkaria irakurtzen du. Aritz ikasleak ez duela B aldizkaria irakurtzen jakina da. Zer deduzitu daiteke?

12. Ondokoak dakizkigu:

– Matematika ikasten badu, ez du geografia ikasten.
– Mineralogia ikasten badu, orduan geografia ere bai.
– Fisika ikasten du, baldin eta ez badu mineralogia ikasten.
– Amagoiak matematika ikasten du.

Zer deduzitu daiteke?

13. Gizon bat kartzelan dago. Epaileak diotso: «Irteteko bi ate daude, batetik irtenda askatasuna lortzen da eta bestetik heriotza».

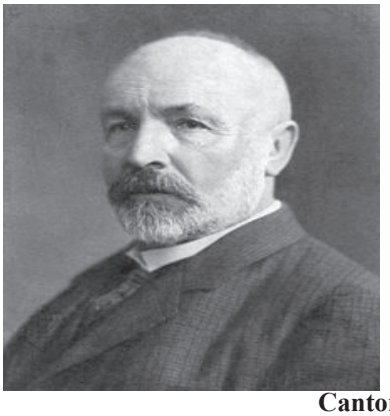
Bi zaindari daude eta biek dakite ate bakoitzak nora eramaten duen. Baina zaindariotako batek beti esaten du egia eta besteak beti gezurra.

Askatasuneko atea aurkitzeko presoak galdera bakar bat egitea dauka zaindarietako bati eta horrek bai ala ez erantungo du.

Zer galdera egin beharko luke askatasuna lortzeko? (laguntza: presoak zaindarietako bati ate bati buruz galdetuko dio esanez ea bere lankideak ate hori ona dela esango lukeen?

5.2. MULTZOAK ETA IRUDIKAPEN GRAFIKOAK

XIX. mendearen bukaeran Georg Cantor (1845-1918) matematikari alemanak matematika irauli zuen multzoen teoriari buruzko lanarekin. Multzoen teoria funtsezkoa da matematikaren bateratasunerako. Multzoa oinarrizko nozioa da eta esangura intuitiboa du (bilduma, taldekatze, bilera, meta…) eta muinean Cantor-ek emandako definizioaren antza du: «Multzoa da guztizko batean sano desberdinak diren objektuen taldekatzea; objektu horiek gure intuizioan edo buruan egon daitezke eta multzoaren elementuak deritze».



Cantor eta Hilbert.

- Notazioa. Multzoak, ez beti, hizki larriekin izendatuko dira: A, B, C…; eta haien elementuak hizki xeheekin: a, b, c,…; «a» objektua A multzoaren elementua dela adierazteko $a \in A$ idatziko dugu eta «a barne A» irakurri.
- Multzo baten zehaztapena:
  - ∗ Hedabidez: bere elementu guztiak deskribatuz.

    $A = \{a, e, i, o, u\}$
  - ∗ Ezagupidez: iritzi baten bidez, elementu bat multzoan egon dadin:

    A = bokalak

    Kasu honetan $\forall$ eta $\exists$ kuantifikatzaileak erabiltzea ohikoa da.

    Adibidez, zenbaki lehenen L multzoa adierazteko:

    $L= \{p \ \varepsilon \ N / \exists \ d \ \varepsilon \ N$ eta d p-ren zatitzailea da, $d \neq 1$ eta $d \neq p \}$

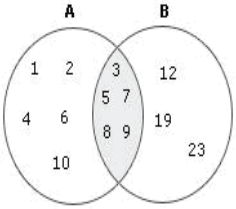
    («/» irakurtzen da «non»; N = zenbaki arrunten multzoa)

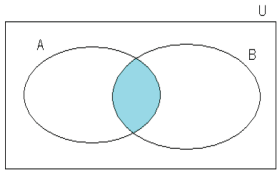
    Edo zenbaki bikoitien multzoa:

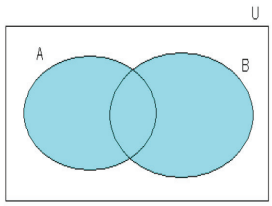
    $B= \{2.n, \ \forall n \ \varepsilon \ N \}$

• Irudikapena:

– Venn-en diagramak.

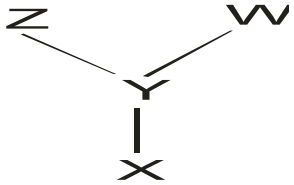






– Carroll-en diagramak

X = {x}, Y = {x, y},
Z = {x, y, z},
W = {x, y, w}



Erregela memoteknikoa: GH (Gainean Handiagoa).

• Multzo motak:

– multzo hutsa: $\varnothing$
– multzo unibertsala: U
– multzo unitarioa (desberdindu elementu bakarreko multzoa eta haren elementua; pospolo bakarra duen pospolo-kutxa eta pospolo bat)
– multzoen multzoa (pospolo-kutxak dituen kutxa handi bat; pospolo bat ez da kutxa handi horren elementua)
– multzo baten parteen multzoa (piramidea egin bere elementu kopurua ikusteko)

• Multzoen berdinketa eta multzo baten partea:

– Azpimultzoak:
A multzoa B beste multzo baten partea da baldin eta A-ko edozein elementu B-koa ere bada.

$A \subset B$ idazten da, eta A parte B irakurtzen da propietateak: $\varnothing \subset A$, $A \subset A$, transitiboa.

Ohartu zaitez, matematikan, $\subset$ ikurraren bidez, elementu batzuek propietate bat dutela adierazteko modu erraza dela; adibidez: «edozein gizaki hilkorra da», «edozein triangelu poligonoa da», eta abar.

– Multzoen berdintasuna.
Bi multzo A eta B berdinak dira baldin eta A, B-ren partea bada eta B, A-ren partea.

• Eragiketak: Unibertsoa

– Ebaketa. Izan bitez A eta B bi multzo, beraien arteko ebaketa $A \cap B$ (horrela idazten da, A bil B irakurri), A-n eta B-n dauden elementuekin osatzen da; hots,

$$A \cap B = \{x / x \in A \quad eta \quad x \in B\}$$

Baldin $A \cap B = \varnothing$ orduan A eta B disjuntuak dira.

– Bilketa. Izan bitez A eta B bi multzo, beraien arteko bilketa $A \cup B$ (horrela idazten da, A ebaki B irakurri), A-n edo B-n dauden elementuekin osatzen da; hots,

$$A \cup B = \{x / x \in A \quad edo \quad x \in B\}$$

– Biderkadura kartesiarra. Izan bitez A eta B bi multzo, beraien arteko biderkadura kartesiarra (A x B idazten da) A-ko elementu bat hartuz eta B-ko beste elementu batekin osa daitezkeen bikote guztien multzoa da, hots,

$$AxB = \{(a,b) / a \in A \quad eta \quad b \in B\}$$

Adibidea: Taberna batean eguneko menurako, lehenengo 5 plater eta bigarrengo 4 daude. Zenbat menu desberdin osa daitezke?

Lehenengo platerak: L = {sopa, indabak, lekak, pasta, entsalada}
Bigarren platerak: B = {oilaskoa, arraina, arkumea, tortilla}
LxB = {(sopa, oilaskoa), (sopa, arraina), …, (entsalada, eskalopea)}

– Bi multzoen kenketa. Izan bitez A eta B multzoak. Beraien arteko diferentzia (A – B idazten da), B-n ez dauden A-ko elementuek osaturikoa da.

$$A - B = \{x / x \in A \quad eta \quad x \notin B\}$$

– Multzo baten osagarria. A multzo baten osagarria, $\bar{A}$, A multzoan ez dauden elementu guztiek osaturikoa da.

$$\overline{A} = \{x / x \notin A\}$$

– Morganen legeak. Bi berdintza dira eta bilketaren osagarriari eta ebaketaren osagarriari dagozkie.

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B} \qquad\qquad \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

– Multzo baten kardinala: multzo horren elementuen kopurua da eta card(A) ikurrarekin adierazten da.

$$\text{card (AUB)} = \text{card (A)} + \text{card (B)} - \text{card (A}\cap\text{B)}$$
$$\text{card (AUBUC)} = \text{card (A)} + \text{card (B)} + \text{card (C)} - \text{card (A}\cap\text{B)} - \text{card (A}\cap\text{C)} - \text{card (B}\cap\text{C)} + \text{card (A}\cap\text{B}\cap\text{C)}$$

• Ariketak.

1. Definitu ezagupidez hurrengo multzoak:
   – $A = \{1,3,5,7,9\}$
   – $B = \{1.2.3.5.7.11.13.17\}$
   – $C = \{astelehena, asteartea\}$

2. Definitu hedabidez hurrengo multzoak:

– 3 eta 21 artean duden 5en multiplo bakoitiak
– izenean r hizkia daramaten urteko hilak

3. Esan ea ondokoak multzoak direnetz eta kasu bakoitzean multzoaren elementu bat aipatu:

– pospolo-kutxa bat
– pospolo-kutxak dituen pakete bat
– Liburutegi bateko liburuak
– Bergarako neskatila politen multzoa
– 5en multiploak diren zenbaki arruntak
– Euskal Herriko ibaiak
– Zeanuriko pertsona adimentsuak

4. Aseguru-konpainia batek bezeroen V multzoa du eta bezeroen zenbait ezaugarri finkatu nahi ditu. Izan bitez A nagusien multzoa, B emakumeen multzoa eta C bezero ezkonduena. Adieraz ezazu, ahoz, ondoko multzoak: A, B, C, A – B, A U B, A ∩ B, B ∩ C. Adieraz itzazu ondoko multzoak ikurren bidez: «Nagusi ezkonduak», «Mutil adingabe ez ezkonduak», «Adingabeak edo gizon ezkonduak».

5. Ikertzaile batek hiri handi bateko 1.000 biztanleko ondoko datuak plazaratu ditu: 815 langileak dira, 723 gizonezkoak, 145 unibertsitarioak, 520 gizon langileak, 100 gizon unibertsitarioak, 75 langile unibertsitarioak, 10 gizon langileak eta unibertsitarioak. Sinesgarria da? (card (AUBUC) = 998).

6. 30 ume dituen klase batean 11k betaurrekoak dituzte, 9k jertse gorria daramate eta 15ek ez daramate ez betaurrekorik ezta jertse gorririk ere. Zenbatek eramaten ditu gauza biak? (Lehen Hezkuntza).

7. Taberna batean 5 ogitarteko eta 3 edari desberdin eskaintzen dira. Zenbat modutara har daiteke askaria ogitarteko eta edari banarekin? (Lehen Hezkuntza).

8. Eskola batean egindako inkesta batean lortu dugu: ikasleen % 31k atletismoa egiten du, % 41ek futbola, % 39k igeriketa, % 14k atletismo eta futbola, % 12k futbola eta igeriketa, % 10ek atletismo eta igeriketa, eta % 8k hiru kirolak. Zer portzentajek egiten du kirol bakar bat? Eta bat ere ez?

9. Bigarren Mundu Gerrako kontzentrazio-zelai batean 10.000 preso zeuden; 5.600ek frantsesez hitz egiten zuten, 4.400ek errusieraz, 2.200ek polakoz, 100ek frantsesez eta polakoz, 2.600ek frantsesez eta errusieraz, 900ek errusieraz eta polakoz, eta 100ek hiru hizkuntzetan. Hiru hizkuntzetan mintzatzen den interpretari bat heltzen bada, zenbatekin hitz egin lezake?

10.

a) Sinplifika ezazu ondoko adierazpena: $(\overline{A \cap B}) \cap (\overline{B \cap (A \cap B)})$

b) A multzoak 23 elementu baditu, $A \cup B$-ek 41 eta $A \cap B$-ek 8, zenbat elementu edukiko dute, B-k, A-B-k, eta B-A-k?

11. «Propaganda SA» enpresak publizitaterako hiru euskarri S1, S2 eta S3 ditu, 100.000 biztanleko populazio-helburu batera heltzeko. Euskarri horien ikusle gordinak 20.000, 30.000 eta 40.000 pertsona dira. S1 eta S2 euskarrien ikusleak 5.000 dira, S2 eta S3 euskarrien ikusleak 10.000 eta S1 eta S3 euskarrien ikusleak 8.000 dira; S1, S2 eta S3 euskarrien ikusleak 1.000 pertsona dira. Zein da hiru euskarrien ikusle kopuru garbia? (emaitza: 20 + 30 + 40 – 5 – 8 – 10 + 1 = 68.000).

12. M herriko biztanleak aztertu dira jakiteko haien odoletan A, B, Rh antigeno bat edo bat baino gehiago duten. Izan bitez: $X = \{x \in M / x \quad badu \quad A\}$ $Y = \{x \in M / x \quad badu \quad B\}$ eta $Z = \{x \in M / x \quad badu \quad \mathbf{R} \}$. Orduan, ondoko zortzi azpimultzoak osa daitezke (aldamenean biomedikuntzako ohiko terminologia dago):

$X \cap Y \cap Z =$ (AB, Rh+) taldea

$X \cap Y \cap \bar{Z} =$ (AB, Rh-) taldea

$X \cap \bar{Y} \cap Z =$ (A, Rh+) taldea

……

eta horrela jarraitu zortzi talde posibleak osatu arte. Pertsona batek beste baten odola jaso dezake odol biak talde berekoak badira. X eta Y erabiliz A, B, AB, O talde bakoitzari eman diezaioketen pertsonen multzoak deskribatu.

13. Pertsona bati buruz zera dakigu, «gizona eta ezkondua dela baina ez dela Madrilen bizi». Beste bati buruz badakigu «ezkondua dela edo Madrilen bizi dela, baina ez gauza biak batera». Biotatik, nori buruz daukagu informaziorik gehien?

14. Berrogeita hamar pertsonako talde batean, 20k tenisa praktikatzen dute, 10ek futbola eta tenisa, eta 5ek ez dute praktikatzen ez futbola ezta tenisa ere. Esan zenbatek pratikatzen dute futbola?

15. Adierazi hitzez ondoko multzoak eta gero idatz itzazu hedabidez:

$A = \{Bi\ dado\ batera\ bota\ ondoren\ atera\ daitezkeen\ puntu\ batura\ guztiak\}$

$B = \{2n-1 \mid n \in \aleph,\ 2 \le n \le 8\}$

$C = \{x \mid x^2 = 4\}$

$D = \{x \mid x-2 = 5\}$

$E = \{x \mid x\ osoa,\ x\ positiboa,\ x\ bakoitia\}$

$F = \{x \mid x\ \text{“egunkaria”}\ hitzaren\ hizki\ bat\ da\}$

$G = \{x \mid x \in \aleph,\ (2x+1)(x-2)(5x-15) = 0\}$

16. Determina itzazu ezagupidez ondoko multzoak:

$A = \{larunbata,\ igandea\}$

$B = \{1,3,5,9\}$

$C = \{Bizkaia,\ Gipuzkoa,\ Araba,\ Nafarroa,\ Lapurdi,\ Zuberoa\}$

$D = \{Tigris,\ Eufrates\}$

17. A, B, C eta D multzoek zera betetzen dute: A-ko elementu guztiak C-ko elementuak dira; B-k elementu komunak ditu A-rekin; eta D-k elementu komunak ditu C-rekin, baina ez A-rekin ez B-rekin. Irudikatu multzoak Venn-en diagramak erabiliz.

18. Klase batean 100 ikasle ditugu. Kalkula ezazu irakasgairik gainditu ez dutenen kopurua, ondokoa jakinik:

    * Bi irakasgai dituzte, matematika eta fisika.
    * 54 ikaslek matematika gainditu dute.
    * 75 ikaslek fisika gainditu dute.
    * 40 ikaslek biak gainditu dituzte.

19. 120 ikaslez osaturiko eskola batean hiru kirol mota egin daitezke: atletismoa, saskibaloia eta futbola. 15 ikaslek hiru kirolak praktikatzen dituzte; 23 ikaslek futbola eta saskibaloia egiten dute; 26 ikaslek, berriz, futbola eta atletismoa; 16k atletismoa eta saskibaloia; 61 ikaslek futbola egiten dute; 64k saskibaloia, eta 37k atletismoa. Zenbat lagunek ez dute kirolik egiten?

20. Eliz hierarkiaren batzar batean 25 lagun daude Erroman. Lagun horien banaketa ondokoa da:

    * 20 artzapezpiku.
    * 12 kardinal.
    * 17 italiar.
    * 8 artzapezpiku eta kardinal.
    * 11 kardinal eta italiar.
    * 12 artzapezpiku eta italiar.

    Zenbat dira, aldi berean, italiar, artzapezpiku eta kardinal?

21. Multzo hauetatik, zeintzuk dira hutsak?:

$$A = \{x \mid x \neq x\}$$
$$B = \{x \mid x^2 = 9 \text{ eta } 2x = 4\}$$
$$C = \{x \mid x - x = 0\}$$
$$D = \{x \mid x, \text{ alfabetoan, } a\text{ -ren aurreko hitza da}\}$$

22. Multzo bat emanda definizio baten bidez, definizio horri izenlagun bat gehitzean, eskuarki multzo horren azpimultzo bat lortzen da. Horrela, «apalategi bateko liburu»en multzoa hartuz eta «apalategi bateko liburu gorri»en multzoa, bestearen azpimultzoa da. Jarri itzazu beste bi adibide.

6. Matematikaren irakaskuntzaren bilakaera. Lehen Hezkuntzako curriculuma Euskadiko Autonomia Ekidegoan

6.1. MUNDUA

Kilpatrick-ek (Kilpatrick, Rico, Sierra, 1994: 35) dioenez, matematikako hezkuntzaren sustraiek, giza jardueraren beste edozein eremu bezala, milaka urte dituzte:

- K.a. 3000. urteko sumeriar eskribauek, ordurako, eskoletan irakasten ziren matematikak sistematizatuta zituzten eta bazituzten metodoak, posiziozko balioa irakasteko, kalkuluak egiteko taulak eta zatiki hirurogeitarrak.
- Sokratesek (K.a. V. mendea), Platonen *Menon*ean esaten den bezala, jopu gazte bati egindako galderetan oinarrituz deskubrimendu-metodoa erabili zuen; horrela ikusarazi zion karratu baten diagonalaren gainean eraikitako beste karratu baten azalera, lehenengoaren bikoitza dela.
- XIX. mendearen hasieran, Pestalozzi, Froebel eta Herbart-ek, beste batzuen artean, esperientzia zehatzetan oinarritutako irakas-metodoak eta heziketa helburuak proposatu zituzten, matematikaren irakaskuntzan eragina duten buru-gaitasunak garatzeko, eskolaurretik hasita eta bigarren hezkuntzaraino.
- 1821ean, Estatu Batuetan, Colburn-ek, Pestalozzi-ren pedagogian oinarritutako aritmetikako testu bat argitaratu zuen; adibide zehatzetan oinarrituz eta indukzioa erabiliz ahalbidetzen zuen zenbait arau aurkitzea.

Kilpatrick-ek jarraitzen du: «Hala ere, soilik XIX. mendearen bukaeratik, herrialde batzuk hasi ziren matematikako irakasleak prestatzen eta orduan sortu zen matematikako hezkuntza, lanbide-arlo bezala».

Frantzian, 1810ean Napoleonek eratutako Goi-mailako Eskola Normala, ia aldaketarik gabe Bigarren Mundu Gerraraino mantendu zen. Herrialde askotako lehen hezkuntzako irakasleak hezten dira instituzio pedagogiko desberdinduetan: colleges, institutuak, mintegiak edo eskola normalak deituak; horiek guztiak bigarren hezkuntzako ikastetxeak ziren ez goi-mailakoak. «Normala» hitza frantsesetik dator, esan nahi du eredua edo erregela (araua); etorkizuneko irakasleek irakasteko erregelak jasotzen zituzten.

Estatu Batuetan ordea, 1920an hasita, eskola normalak irakasle-eskolak bihurtzen hasi ziren. Herrialde desberdinetan eskola-sistema nazionalak agertu ahala eta lehen eta bigarren hezkuntza orokortzen hasten direnetik, irakasleria kualifikatuaren horniketa handiagoa behar da. Herrialde batzuetan matematika-heziketa unibertsitateko jakintzagai bilakatu zen. Matematikako irakasleen lehenengo elkartea Britainia Handian sortu zen 1871n. Partaideak maisu-maistrak ziren eta elkarlanean unibertsitaeko irakasle batzuk ere aritzen ziren. Haren helburua zen geometria euklidearraren bestelako ikuskera batzuk esploratzea.

Beste herrialde batzuetan (AEB, Italia, Frantzia…) data horretatik hasita eta XX. mende-hasierarainoko tartean antzeko elkarteak agertu ziren. Europan eta Estatu Batuetan hezkuntza-sistemen zabalkundeak eta teknologia berrien agerpenak beste planteamendu hezitzaile batzuk eskatu eta ahalbidetu zituzten. Matematikako Hezkuntzari buruzko Nazioarteko Batzordea 1908an eratu zen Erroman eta lan garrantzitsua egin zuen Lehen Mundu Gerra hasi arte (1914), non ia-ia desagertu zen. Estreinako garai horretako lana gaiaren aurkezte-erak aztertzea izan bide zen, matematikak ikasteko prozesurako psikologiako alderdiei arreta gutxi jarrita.

Bigarren Mundu Gerraren ostean, bigarren hezkuntza orokortzen joan zen eta problema berriak planteatu zitzaizkion matematikaren irakaskuntzari; arazo horrek, arlo honetatik kanpo diharduten profesionalen elkarlana eskatu zuen, hala nola psikologoena eta pedagogoena. Garai hartan bi egile gailendu ziren: alde batetik, Piaget (adimenaren garapen-etapak, esperientzia konkretuetatik abiatuta matematika eraiki…); beste aldetik, Van Hiele senar-emazteak (geometriaren ikasketarako mailak).

1950ean matematikaren irakaskuntzaren hobekuntzarako Nazioarteko Batzordea sortu zen, haren fundatzaileak Choquet matematikari frantziarra, Piaget psikologo suitzarra eta Gattegno pedagogo britainiarra izan ziren. Batzordeak bi liburu argitaratu zituen: *Matematikaren Irakaskuntza* (1955) eta *Matematikaren Irakaskuntzarako Materiala* (1958).

1959an ELGAk (Ekonomia Lankidetza eta Garapenerako Antolakundea) 10 eguneko mintegi bat antolatu zuen, «Royaumont solasaldia» izenarekin ezagutua, Frantziako hiri horretan ospatu baitzen, eta han J. Dieudonné matematikari frantziarrak hitzaldi bat eman zuen, askorentzat matematikaren irakaskuntzarako erabakigarria izan zena, zeren eta hitzaldi horretan estrukturalismo bourbakiarrean oinarritutako bigarren hezkuntzarako programa berri bat zirriborratu zuen. Hitzaldi horretan ospetsu bilakatu den «behera Euklides» oihua jaurti zuen.

1960an, ELGAk beste bilera bat antolatu zuen Dubrovnik-en (Kroazia) eta hor bigarren hezkuntzarako programa bat eta lerro metodologikoak prestatu ziren. Horiek, ELGAk argitaratutako *Matematikako Programa Modernoa* izeneko liburuan jasota daude. 1960/70eko hamarkadan «Matematika Modernoak» herrialde guztietara hedatu ziren.

Bitxia da hurrengo aipua, 1978koa, *Cambio 16* izeneko aldizkaritik hartua:

> …Argentinako kazetariek gai harrigarri baten berri eman dute: ea matematika modernoak subertsiboak ote diren. Cordobako probintzian, agintari akademikoek baietz esan dute, badirela subertsiboak, logika formalaren postulatuei uko egiten dietelako eta horrela, subertsioari bide arriskutsua zabaltzen zaio. «Bektore» hitza marxistatzat hartzeaz gain, Dieudonné matematikariak «Euklides behera» oihukatu zuenetik, matematikak, ideia iraultzaile eta subertsiboen aldeko arma perilosa bihurtzeko arriskua dagoela diote. Ernesto Sabato eleberrigileak eztabaidan parte hartu du esanez: «Matematika modernoari uko egitea, arlo guztietan izango litzateke, baita militarrean ere, lantza eta ezpaten garaietara itzultzea, zeren misilei eta ordenagailuei ere uko egingo geniekeen (*Cambio 16,* 366. zk., 1978-12-10).

Hala ere, 1965/70 aldian, Sobietar Batasunak espazio-ontzi tripulatua jaurti ondorengo urteetan, AEBn, matematika modernotik aldentze-prozesua hasten da eta eskolan ikasi beharreko edukien zerrendara itzultzen da.

1970ean Morris Kline-ren *Matematika modernoaren porrota. Zergatik Juanitok ez daki batuketak egiten?* izeneko liburua agertzen da.

1980an AEBn nazio mailako inkesta bat burutu zen jakiteko zer-nolako matematika-maila zeukaten bigarren hezkuntzako ikasleek. 70.000 ikasleri problema anitz proposatu zitzaion. Horietako bat da «limonadaren problema» izenekoa, ospetsu bilakatu zena:

> Limonada 95 zentimo/botilako kostatzen da. Botilak 56 cm^3 ditu. Eskolako jaian Unaik 8 cm^3-ko edalontziak saldu zituen, edalontzi bakoitzeko 20 zentimo kobratuz. Zenbat diru irabazi zuen eskolak botilako?

Emaitzak etsigarriak izan ziren:

			Aurreikusi	Benetan
70.000 ikasle	% 60	12/13 urte	% 50 arrakasta	% 11
	% 40	16/17 urte	% 80 arrakasta	% 29

Beste problema bat: «Gizonezkoen eta emakumezkoen arteko erlazioa 4G=5E da. Baldin eta 20 emakumezko baziren, zenbat gizonezko ziren?» (emaitzak ere oso txarrak izan ziren).

1982an, Galeseko Parlamentuak, Cockroft-i eskatu zion matematikaren irakaskuntzaren egoerari buruzko txosten bat, bai Galesen bai eta Ingalaterran ere. Adibide gisa, Cockroft-en (Cockroft, 1985) liburuaren 34 eta 243 paragrafoak aipatu daitezke:

> 34. Garrantzitsuena da segurtasun nahikoa edukitzea, (ikasleek) dituzten trebetasun eta ezagupen matematikoak (gutxi ala asko izan) erabiltzeko.
>
> 243. Matematikaren irakaskuntzak, maila guztietan, ondoko ezaugarriak barneratu behar ditu:

– Irakaslearen azalpenak.

– Irakasle-ikasleen arteko eztabaida eta ikasleen artekoa ere bai.

– Lan-praktiko egokia.

– Oinarrizko trebetasunak eta errutinak praktikatu eta sendotu.

– Problemen ebazpena; horren barruan, matematikak eguneroko bizitzan dituen aplikazioak sartuz.

– Ikerketa-lanak burutu.

Zerrenda hau egitean jakin badakigu, lehendik esanda dauden gauzak direla. Dagoeneko agertu baitira, bai informazio ofizial askotan, baita Hezkuntza Sailaren argitalpenetan, baita Ikuskaritzako txostenetan eta matematikako elkarte profesionalen argitalpenetan ere. Hala ere, jakitun gara, esandako elementu guztiak dituen irakaskuntza, zenbait gelatan ematen dela, baina beste askotan ez da horrela egiten».

Ondorengo urteetan, herrialde desberdinen kezkak bi alderdiotan jarri ziren:

1. Matematikaren irakaskuntza ikasleen garapen psikologikoari egokitu. Material didaktiko asko agertu zen.
2. Komunikabideetan eta teknologia-arloan izandako garapenari edukiak egokitu (matematika izango da instrumentalagoa formala baino). «Matematika modernoa» alboratu.

Era berean, matematika-irakasleen elkarteen eta kongresu kopuruaren emendio handia izan da. «Matematikaren didaktika» jakintza-arlo independente legez agertzen da.

6.2. EUSKADI ETA ESPAINIA

Espainiari dagokionez, eskematikoki data eta egitate aipagarri batzuk seinalatu daitezke:

- Gorteek oniritzia ematen diote oinarri-legeari, zeinaren bidez gobernuari baimena ematen baitzaio Eskolapen (Instrukzio) Publikoaren lege bat egiteko (1857-7-17)
- Isabel II.a erregina dela, aipatutako legea promulgatzen da; lege hori Moyano Legea izenez ezagutuko da, egilea Claudio Moyano sustapen-ministroa baita (1857-9-9).
  * Lehenengo hezkuntza, oinarrizkoan eta goi-mailakoan banatzen du.
    – Oinarrizkoan «aritmetikaren hastapenak, neurri, pisu eta txanponen sistema legalarekin» sartzen dira.
    – Goi-mailakoan «oinarrizko irakaskuntzaren matematikaren zabaltze zuhurra eta geometriaren hastapenak, marrazketa lineala eta lur-neurketa». Nesken

kasuan, ikasketa horiek ondokoekin ordezten ziren: «Sexuari dagozkion berezko lanak» eta «marrazketaren elementuak lan horiexetara aplikatuta».

* Lehen oinarrizko hezkuntza derrigorrezkoa da 6 urtetik 9 urtera, salbu «instrukzio mota hau beren etxeetan edo establezimendu pribatuetan ematen bazaie».
* «Ezin ordaindu duten guraso, tutore edo enkargatuen seme-alabei doan emango zaie eskola publikoetan, horretarako erretore apaizak, herriko alkatearen oniritzia daraman ziurtagiria emango du».
* «Lehen hezkuntzako ikasketak ez daude ikasturte kopuru zehatz batera mugaturik; ikasgaiak urte osoan zehar emango dira, udaminean klase-orduak gutxituko direlarik».
* Bigarren hezkuntzari dagokionez, ikasketa orokorretan eta industriako lanbideetara aplikatutako ikasketetan banatzen da. Lehenak, berriro ere, bi alditan banatzen ziren, aurrenekoa bi urtekoa eta bigarrena lau urtekoa.
  – Lehenengo ikasturtean, «irakurketa, idazketa, aritmetika eta marrazketako ariketak» zeuden.
  – Bigarren ikasturtean, «aritmetikako, aljebrako eta geometriako elementuak»; … «psikologiako eta logikako elementuak».
  – Ikasketa aplikatuetan «merkataritzako aritmetika» agertzen zen.
* «Bigarren hezkuntzako ikasketa orokorretan hasteko baldintzak dira: 9 urte beteak izatea eta azterketa bat gainditzea».
* «Ikasketa aplikatuetara igarotzeko, 10 urte eta azterketa».
* Ez ziren programak argitaratu, editoreen eta espezialisten esku geldituz. Haiek tradizioan oinarritutako eskuliburuak argitaratzen zituzten, beren irizpideen arabera gaurkoturik.

  Adibidez, 1813an ateratako *Erresumako eskoletan erabiltzeko umeen aritmetika* deituriko liburuaren programa, 1931 baino lehen argitaratutako aritmetikako liburu gehienetan mantendu zen (Kilpatrick *et al.*: 105).

XX. mendeko matematikako geletako giroari buruz, ondoko aipua irakur daiteke:

> Matematikako irakaslea Pinillas apaiz jauna da. Apaiz bat meza kantatzear dagoenean edo kantatu duenean, ikastetxe batera bidaltzen dute eta han aurreskolan jartzen dute irakurketa irakasteko. Bere apaiz-karrerako ikasketak amaituta dituenean, beste gauza batzuk ikasteari ekiten dio eta ikasi ahala, eskolako mailaz maila igarotzen da azkenengoetaraino heldu arte. Pinillas apaiz jauna matematikako irakasle egin zutenean, bere logelan, geure liburu berberak estudiatzen zituen irakasgaia geuri eman ahal izateko. Apaizek ez dute maisu izan behar irakasteko. Horrela erretoreak apaiz bat bidaltzen du matematika edo beste ikasgai baten kargu egitera eta berak ahal duen moduan konpontzen da. Horregatik guztiagatik, behin gertatu zen, neronek, erraztasun handia dudala matematikarako, banekien apaizak berak ez zekien problema bat ebazten. Orduan amorratu zen eta haserre egon zen nirekin lauzpabost egunetan.

- Romanones (1901)
  * Estatuak maisu-maistren soldatak ordaintzea erabakitzen du.
  * Lehen hezkuntza hiru mailatan banatzen du: eskolaurrea, oinarrizkoa eta goi-mailakoa.
  * Oinarrizko eta goi-mailako lehen hezkuntza derrigorrezkoak bihurtzen ditu herritar guztientzat.
  * Derrigorrezko eskolatze-aldiak 3 urte gehiago edukiko ditu (9tik 12ra).
  * Izaera entziklopedikoa duen ikasketa-plan berri bat ezartzen du, 12 ikasgai ditu; horietako bi dira: «aritmetika» eta «geometriako nozioak».

«Romanones plana» indarrean egon zen II. Errepublikaren bukaeraraino eta «Moyano Legea»rekin gertatu bezala, ikasgaien programak ez ziren argitaratu.

- II. Errepublika

1931n, maisu-maistren prestakuntzarako ikasketa-plana agertu zen; horrek irakasle-eskolako ikasketak unibertsitateko ikasketa bilakatu zituen. Plan horretako lehenengo ikasturtean agertzen da «matematikako metodologia» izeneko ikasgaia, bi zati dituena: lehendabizikoan, umearen psikologiari buruzko ikasketak matematikaren ikasketa-prozesuari dagokionez eta metodologiako gaiak. Bigarrenean, didaktika espezifikoaren eta eskola-programen ikasketa eta gainera matematikaren historiako pasarte batzuk.

Plan honetan ere, praktiketarako sistema bat ezartzen da aldameneko eskoletan.

- 1953ko Plana: (1957an erreformatua)
  * 6 ikasturteko batxilergoa:
    – elementala 4 ikasturte (ikasturte bakoitzeko matematikako programa % 15).
    – goi-mailakoa 6 ikasturte (zientziak eta letrak) (5.ean matematika % 25 eta 6.ean % 12).
    – «Preuniversitario» (PREU).
  * Lehen Hezkuntza:
    – irakaskuntza elementala: 4 ikasturte (6/10 urte).
    – hobekuntza: 2 ikasturte (10/12 urte) (batxilergokoa ez den beste bide bati hasiera ematen zitzaion).
    – lan-hastapena: 3 ikasturte (12/15 urte).
  * Matematikako edukiak gehitu egiten dira.
  * Mailakatutako ikas-prozesua, kalkuluen mekanismoak finkatzeko etengabeko ariketak, ikas-prozesuak oinarri du gauzak errepikatzea.
  * Problemen enuntziatuei eta ebazpenari buruzko arauak ematen dira.

- Hezkuntzako Lege Orokorra (1970, «Villar Palasí Legea»)
  * Eskolaurrea: 2 urtetik 6 urtera. Ez da derrigorrezkoa.
  * OHO: 6 urtetik 14 urtera. Derrigorrezkoa eta doan. 1. eta 2. etapetan banandurik.
  * Batxilergoa (BBB): 14 urtetik 17 urtera. Bateratua (titulu bakarra) eta balioaniztuna (ikasgai komunak, hautazkoak eta jarduera bat tekniko-profesionala).
  * UBI (Unibertsitatera Bideratzeko Ikasturtea)

– Irakaskuntza biztanleria osora zabaltzen da (unibertsala) eta doakoa da. Ikastetxe berri asko zabaldu ziren eta irakasleriaren hornidura nahikoa.
– Matematika. OHOko lehenengo etapan: multzo-teoria intuitiboaren zenbait elementu, zenbakien adierazpenetara heltzeko. Bigarren etapan: matematikako formalizazioan sakondu.
– Erreforma handia egin nahi zuten, irakasle-eskoletan maisu-maistren hasierako prestakuntzaren erreformarekin batera etorri zena. Berezko irizpideen eta matematikako espezialisten gabeziak kaos metodologikora eraman zuen.
– Edukiak: lehentasuna, egitura aljebraikoak eta multzoen teoria. Kalkulua eta geometria intuitiboa alboratzen dira.

- Programa berriztatuak (1981/1982)

Edukiak bloke tematikotan antolatzen dira (multzoak eta korrespondentziak; zenbakiak eta eragiketak; neurria; geometria eta topologia), gutxieneko mailak eta iradokitako jarduerak (ez derrigorrezkoak). Lerro piagetiarrari jarraitzen saiatzen dira:

– Hasierako zikloa: (6/8 urte): pentsamendu prelogikotik eragiketa konkretuetara igaroz.
– Erdiko zikloa: (8/11 urte): eragiketa konkretuen aldia.
– Goi-zikloa: (11/14 urte): pentsamendu hipotetiko-deduktiboa.

- LOGSE – HSAOL (1990)

LOGSE (Hezkuntza Sistemaren Antolamendu Orokorrerako Legea), 1990eko urriaren 3koa, lege organikoa, indarrean zegoen hezkuntza-sistema osoa ordeztu zuen. Berrikuntzen artean honako hauek azpimarra daitezke:

– Bi iraskuntza mota daude:
  - Erregimen berezikoak:
    ◦ Irakaskuntza artistikoak eta musikalak.
    ◦ Hizkuntzen irakaskuntzak.
  - Erregimen orokorra:
    ◦ Haur Hezkuntza.
    ◦ Lehen Hezkuntza.

    - Bigarren Hezkuntza (DBH).
    - Batxilergoa.
    - Erdiko eta goi-mailako Lanbide Heziketa.
    - Unibertsitate-hezkuntza (berezko arauekin).

– Eskubidea egoteko irakaskuntzan 18 urtera arte.
– Haur Hezkuntza. Borondatezkoa. 2 ziklo:
    • 3 urte baino gutxiago
    • 3tik 6ra.
– Lehen Hezkuntza. 6 ikasturte.
    • Helburua (matematikan, 13.c artikulua): «Eguneroko bizitzako egoeretara oinarrizko prozedura logikoak eta kalkuluaren eragiketa sinpleak aplikatzea».
    • 3 ziklo, bakoitza bina ikasturtekoa.
    • Arlotan dago antolatuta, «nahitaezkoak eta izaera globalekoak eta integratzaileak». Horietako bat da «Matematika» (14. art.).
    • Maila honetako arlo guztietan gaitasuna edukiko duten maisu-maistrek emandako irakaskuntza. Musika, heziketa fisiko eta atzerriko hizkuntzaren espezialitatea duten maisu-maistrek emanda (16. art.).
– Lehen Hezkuntza ikasle kopururik handiena: 25 (xedapen gehigarria, 3.3.a).

LOGSEren ostean dokumentu batzuk idatziko dira, OCDren sorburua izango direnak (Oinarrizko Curriculum Diseinua). Hauek ere oinarri dira gutxieneko irakaskuntzak finkatzeko, non ikasle guztien gutxieneko prestakuntza komuna arautzen den Espainiako lurralde guztietarako. LOGSEren 4.2. artikuluaren arabera «gutxieneko irakaskuntzen oinarrizko edukiak inolaz ere ez dira izango ordutegi osoaren % 55 baino gehiago, berezko hizkuntza duten autonomia-erkidegoetan (besteetan % 65)».

Hortik abiatuta autonomia bakoitzak bere OCD ateratzen du (1992), non nahitaezko parte bat eta parte orientatzailea dauden. Geroago Curriculuma Garatzeko Dekretua agertzen da, 1994an, autonomia-erkidegoan derrigorrezkoa eta erkidego horretako ikastetxe guztiei exijituriko minimoa finkatzen duena. Ikastetxeek minimo horri beste eduki batzuk gehitu diezazkiokete.

Matematikaren irakaskuntzari dagokionez, Lehen Hezkuntzako OCDn, edukien lau bloke agertzen dira:

- ✓ Zenbakiak eta eragiketak: esanahiak eta estrategiak.
- ✓ Neurria. Denbora eta objektuei buruzko zenbakizko informazioa.
- ✓ Forma geometrikoak eta kokapena espazioan.
- ✓ Informazioaren antolaketa: grafikoak eta estatistikaren hastapena.

«Euskal curriculum»ean (218 EHAA, 2007/11/13. Dekretua, Euskal Autonomia Erkidegoko Oinarrizko Hezkuntzaren curriculuma sortu eta ezartzekoa), Lehen Hezkuntzarako, hiru zikloetan errepikatzen diren hurrengo blokeak finkatzen ditu:

- ✓ Zenbakiak eta eragiketak.
- ✓ Neurria: estimazioa eta magnitudeen kalkulua.
- ✓ Geometria.
- ✓ Informazioaren trataera, zoria eta probabilitatea.
- ✓ Problemen ebazpena.
- ✓ Eduki komunak.

Ikusten denez, aipagarriena da eduki-bloke berri bi agertzen direla. Lehenengoari buruz zera esaten da: «Problemen ebazpenak ardatz zentral gisa jarduten du, zeharka gainontzeko bloke guztiak korritzen dituena eta, horrexegatik, arreta berezia jarri behar zaio». Eduki komuneko blokeari buruz ondoko hau agertzen da: «Besteak beste, berariazko mintzaira matematikoari dagokio, informazio eta komunikazio teknologien erabilpenari, eta jarrerazko edukiei».

Dekretu horretan honako definizio hauek agertzen dira:

- Curriculuma: Oinarrizko Hezkuntzako jakintza-arloen eta irakasgaien gidaritzako oinarrizko gaitasunen, helburuen, edukien, pedagogia-metodoen eta ebaluazio-irizpideen multzoa.
- Diagnostiko-ebaluazioa: Lehen Hezkuntzako bigarren zikloa eta Derrigorrezko Bigarren Hezkuntzako bigarren maila amaitzean gutxienez, diagnostiko-ebaluazio bat egingo da.
- Matematika: Matematika da kopuruak, espazioa eta formak, aldaketak eta harremanak, baita ziurgabetasuna ere, deskribatzea eta aztertzea xede duen zientzia.
- Matematika unibertsala da: honako hauetaz ari gara: zenbatu, kokatu, neurtu, azaldu, jolastu, eta abarrez.
- Matematika bizirik dagoen zientzia bat da: jasotzen dugun ondarea izateaz gainera, osatu beharreko zientzia bat da. Eduki eta ezaguera berriak testuinguruan behar bezala kokatzea.
- Matematika erabilgarria da: begiratzen dugun tokira begiratzen dugula, han dugu matematika, ikusi edo ez ikusi.
- Matematika ereduen eta harremanen zientzia da.
- Matematika eta problemak: problemak ebaztea oso garrantzitsua da matematikan aurrera egiteko; egiten jakiteak zerikusi handia du hainbat trebetasunekin.
- Matematika eta informazio- eta komunikazio-teknologiak: ikerketek eta esperientziak nabarmen adierazten dute kalkulagailuak eta ordenagailuak behar bezala eta zentzuz erabiltzeak hainbat ahalmen ematen dituela.

– Matematikaren zereginak: pentsamendu arrazionala sortzen laguntzen du eta, beraz, *hezitzailea da* ikasleen garapen intelektuala bultzatzen duelako, eta, besteak beste, honako gaitasun hauek sustatzen dituelako: abstrakzioa, orokortasuna, arrazoibide logikoa. *Instrumentala* da gainerako diziplinekin duen harremanagatik.
– *Matematika Lehen Hezkuntza*ra egokitzeko, komeni da *zenbait ezaugarri* interesgarri adieraztea:
  • Intuizioa garrantzitsuagoa da abstrakzioa eta formalizazioa baino; estrategia pertsonalak erabiltzea nagusitzen da «akademikoagoak» diren beste estrategien aldean.
  • Ikasleen esperientziak erabiltzea.
  • Manipula daitezkeen materialak eta neurtzeko tresnak erabiltzea.
  • Kalkulagailua eta ordenagailua arrazoiz erabiltzea.
  • Talde-lanari garrantzia ematea, eta ikaskuntzarako oinarri hartzea.
  • Lehen mailan hastea eduki guztiak garatzen, eta problemak ebazteari eta, zentzumenak garatu ahala, geometria-edukiei garrantzi berezia ematea.
  • Hizkuntza argia eta egokia erabiltzeko joera eta beharra bultzatzea, ideiak, arrazoibideak, argudioak eta abar komunikatzeko.
– Edukiak, Oinarrizko Gaitasunak: ikus 1. eranskina.

6.3. NCTM ETA ESTANDARRAK

Irakasle talde honek ((National Council of Teachers of Mathematics) **(**www.nctm.org**)** hainbat argitalpen atera ditu, baina hemen hartuko duguna 2000. urtean plazaratu zuten: «Matematikaren Irakaskuntzarako Printzipioak eta Estandarrak». Lehen eta Bigarren Hezkuntzarako dira.

Eskola Matematikarako Printzipioak.

Sei printzipio dira,

– Berdintasuna. Matematikaren irakaskuntzan bikaintasunak berdintasuna eskatzen du: itxaropen altuak eta laguntza handia ikasle guztientzat.
– Curriculuma. Curriculuma jardueren bilduma baino zerbait gehiago da: koherentea izan behar du, matematika garrantzitsuetan zentratuta egon behar du eta maila guztietan zehar ondo artikulatuta.
– Irakaskuntza. Irakaskuntza eraginkorrak eskatzen du ikasleek dakitena eta ikasi behar dutena ezagutzea, ondoren ondo ikas dezaten ikasleei laguntza eta pizgarriak emateko.
– Ikaskuntza. Ikasleek matematika ikasi behar dute ulertzen, eta dituzten aurreezagupenetatik eta esperientziatik ezagupen berriak eraiki behar dituzte.
– Ebaluazioa. Ebaluazioak matematika garrantzitsuen ikastea suspertu beharko luke eta, halaber, informazio erabilgarria eman ikasleari nola irakasleari.

– Teknologia. Matematikaren ikaskuntza eta irakaskuntzarako teknologia beharbeharrezkoa da; eragina du irakasten den matematikan eta haren ikasketa bultzatzen du.

Etapa guztietako programek ikasle guztiak gaitu beharko lituzkete ondorengoetarako:

Estandarrak

– Zenbakiak eta Eragiketak
  - o Zenbakiak, beraiek irudikatzeko erak, beraien arteko erlazioak eta zenbakizko multzoak ulertu.
  - o Eragiketen esanahiak ulertu eta beraien arteko erlazioena.
  - o Erraztasunez kalkulatu eta arrazoizko zenbatespenak egin.

– Aljebra
  - o Ereduak, erlazioak eta funtzioak ulertu.
  - o Aljebrako ikurrak erabiliz matematikako egiturak eta egoerak irudikatu eta aztertu.
  - o Erlazio kuantitatiboak irudikatzeko eta ulertzeko eredu matematikoak erabili.
  - o Testuinguru desberdinetan aldaketa aztertu.

– Geometria
  - o Bi eta hiru dimentsioko irudi geometrikoen ezaugarri eta propietateak aztertu eta erlazio geometrikoen gaineko arrazoibide matematikoak garatu.
  - o Koordenatu geometrikoen eta irudikatzeko beste sistemen bidezko espaziozko erlazioak aurkitu eta deskribatu.
  - o Matematikako egoerak aztertzeko transformazioak eta simetria erabili.
  - o Problemak ebazteko, eredu geometrikoak, arrazoibide matematikoa eta ikusizko frogak erabili.
  - o Neurriak, sistemak, neurtzeko prozesuak eta objektuen tasun neurgarriak ulertu.
  - o Neurketak lortzeko teknika, tresna eta formula egokiak aplikatu.

– Neurria
  - o Neurriak, sistemak, neurtzeko prozesuak eta objektuen tasun neurgarriak ulertu.
  - o Neurketak lortzeko teknika, tresna eta formula egokiak aplikatu.
  - o Datuen bidez erantzun daitezkeen galderak egin eta erantzun ahal izateko datu esanguratsuak bildu, antolatu eta aurkeztu.
  - o Datuen analisirako aproposak diren metodoak aukeratu eta erabili.
  - o Datuetan oinarritutako aurreikuspenak eta inferentziak garatu eta ebaluatu.
  - o Probabilitatearen oinarrizko kontzeptuak ulertu eta aplikatu.

- Datuen analisia eta Probabilitatea
  - Datuen bidez erantzun daitezkeen galderak egin eta erantzun ahal izateko datu esanguratsuak bildu, antolatu eta aurkeztu.
  - Datuen analisirako aproposak diren metodoak aukeratu eta erabili.
  - Datuetan oinarritutako aurreikuspenak eta inferentziak garatu eta ebaluatu.
  - Probabilitatearen oinarrizko kontzeptuak ulertu eta aplikatu.

Beste estandarrak

- Problemen ebazpena
  - Problemen ebazpenaren bidez ezagupen matematiko berriak eraiki.
  - Matematikatik eta beste testuinguruetatik sortutako problemak ebatzi.
  - Problemak ebazteko estrategia anitz egokitu eta erabili.
  - Matematikako problemak ebazteko prozesua kontrolatu eta beraren gaineko hausnarketa egin.
- Arrazoibide eta Frogak
  - Arrazoibidea eta demostrazioa matematikako funtsezko alderdi bezala aitortu.
  - Aieru matematikoak formulatu eta ikertu.
  - Argudio eta froga matematikoak garatu eta ebaluatu.
  - Arrazoibide eta frogatzeko metodo desberdinak aukeratu eta erabili.
- Komunikazioa
  - Norberaren pentsamendu matematikoa komunikazioaren bidez antolatu eta finkatu.
  - Norberaren pentsamendu matematikoa ikaskideei, irakasleei eta beste pertsonei koherentziaz eta argitasunez komunikatu.
  - Gainontzekoen pentsamendu matematikoa eta estrategiak aztertu eta ebaluatu.
  - Ideia matematikoak adierazteko matematikako hizkuntza doitasunez erabili.
- Loturak
  - Ideia matematikoen arteko loturak antzeman eta erabili.
  - Ulertu nola ideia matematikoek elkarren arteko lotura duten eta batzuk besteen gainean eraikitzen diren guztizko koherente bat sortuz.
  - Testuinguru ez matematikoetan matematika antzeman eta erabili.
- Irudikapenak
  - Ideia matematikoak antolatzeko, erregistratzeko eta komunikatzeko irudikapenak sortu eta erabili.
  - Problemak ebazteko irudikapen matematikoak aukeratu, aplikatu eta haien itzulpena egin.
  - Giza fenomenoak eta fenomeno fisiko eta matematikoak modelizatzeko eta interpretatzeko irudikapenak erabili.

- Ariketak:

1. Zein urtetan argitaratzen da EAEko Oinarrizko Heziketaren Curriculuma arautzen duen dekretua?
2. Zeintzuk irakaskuntza sartzen dira Oinarrizko Heziketan?
3. Zer eta zeintzuk dira Gaitasunak? Matematika berauetako bat al da?
4. Eman curriculumaren definizio bat?
5. Zer dira ebaluazio diagnostikoak? Nork egiten ditu? Lehen Hezkuntzako zein kurtsotan egiten dira? Zein da haien helburua?
6. Eman Matematikaren definizio bat?
7. Matematika geure kulturaren parte al da? Zergatik?
8. Matematikaren hiru ezaugarri aipatu eta azaldu itzazu bi lerrotan.
9. Matematikan zer da «egiten jakitea»? Azaldu ezazu.
10. Nola ulertu behar da Matematikaren irakaskuntzan, kalkulagailuen eta ordenagailuen erabilera?
11. Zer da «pentsamendu arrazionala» eta nola laguntzen du Matematikak haren garapenean?
12. Zein da Matematikaren balio «instrumentala»? Eta «hezitzailea»?
13. Seinala itzazu Matematikaren irakaskuntzak Lehen Hezkuntzan dituen ezaugarrietako batzuk.
14. Zeintzuk dira eduki multzoak? Zenbat dira? Komunak dira ziklo guztietan? Zer esan nahi du Matematikaren irakaskuntzak ziklikoa izan behar duela?
15. Zer da buruzko kalkulua? Gaur egun, ikastea ez da beharrezkoa kalkulagiluak ditugulako?
16. Lehen zikloko eduki multzoez iruzkin bat egin (baina ez kopiatu eduki multzoetan agertzen dena, zeure ekarpena eskatzen dizugu).

7. Oharrak eta bibliografia

Cockroft, D. (1985): *Las Matemáticas sí cuentan,* MEC, Madril.

Courant, R. eta Robbins, H. (1955): *¿Qué es la Matemática? Una exposición elemental de sus ideas y métodos,* Aguilar, Madril, 226. or.

Coxeter, H.S.M. (1971): *Fundamentos de Geometría,* Limusa-Wiley, Mexiko, 26. or.

Errege Akademiaren Espainiako Hizkuntzako Hiztegia, (1992), 21. argitalpena, Madril, 905. or.

González Urbaneja, P.M. (2006): *Platón y la academia de Atenas,* Nivola, Madril. *Akademia platonikoa Atenaseko hesiz kanpo zegoen, hiritik 1.500 bat metrora. Izena datorkio bere kokapenatik, Akademos heroiari eskainitako santutegiaren lorategietan (...). Platonen benetako izena Aristocles izan zen, eta goitizena jarri zioten bere bizkar zabalagatik.*

Ifrah, G. (1987): *Las cifras: Historia de una gran invención*, Alianza, Madril.

Johnson, R. (1976): Esta*dística elemental,* Trillas, Mexiko, 18. or.

Kilpatrick, J.; Rico, L. eta Sierra, M. (1994): *Educación Matemática e investigación,* Síntesis, Madril.

Kline, M. (2000): *Matemáticas para los estudiantes de humanidades,* Fondo de Cultura Económica, Mexiko, 497. eta 498. or.

Paulos, J. A. (1990): *El hombre anumérico,* Tusquets, Bartzelona.

————, (2000): *El hombre anumérico. El analfabetismo matemático y sus consecuencias*, Tusquets, Bartzelona, 43. eta 193. or.)

Stacey, K. eta Groves, S. (1999): *Resolver problemas: estrategias*, Narcea, Madril, 57. or.

8. Eranskina (EAEko curriculum-dekretua. Matematikako edukiak)

Edukiak ere zikloaren arabera banatu dira, sei eduki multzotan, hain zuzen ere: zenbakiak eta eragiketak; neurketa; geometria; informazioa tratatzea, zoria eta probabilitatea; problemak ebaztea; eta eduki komunak. Matematika irakastean, kontuan hartu behar da edukien *ziklo-banaketa,* beren artean beti lotura izan dezaten eta bata bestearekin osa daitezen. Problemak ebaztea ardatz nagusitzat hartzen da; eduki multzo guztietan agertzen da zeharka, eta, beraz, berariazko garrantzia eman behar zaio.

Zenbakiei eta eragiketei buruzko eduki multzoaren helburua zenbakietan egoki alfabetatzea da; hau da, zenbakiak eta haien arteko harremanak agertzen dituzten egoerei arrakastaz ekiteko gaitasuna lantzea. Garrantzitsua da azpimarratzea, gaitasun hori lortzeko ez dela nahikoa paperez egindako kalkulu-algoritmoak ondo egitea. *Beharrezkoa da buruzko kalkulua* eta gutxi gorabeherako kalkuluak egiteko estrategiak ere garatzea, eta zenbakien eta kopuruen aurrean konfiantzaz aritzea; baita zenbakiak erabiltzea dakarten egoeretan erabiltzea eta haien artean dagoen harremana ezagutzea ere. Zenbakiak testuinguruaren arabera erabili behar dira, eta garbi eduki behar da erabilitako prozesuak eta emaitzen esanahia ulertzea aurretiazko eta lehentasunezko edukia dela, kalkuluak egiteko trebetasuna izatea baino haratago baitago. Garrantzitsuena zera da: hainbat kalkulu mota egiteko trebetasuna lortzea eta kasu bakoitzean egokiena zein den erabakitzen jakitea. Lehen Hezkuntzan, ikasleek kalkuluak erraz egitea eta estimazio arrazoituak egitea lortu behar da, eta kontzeptuak ulertzearen eta kalkuluak egiteko gaitasunaren artean oreka lortzen saiatu.

Neurriari buruzko eduki multzoa egoki garatzeko, nahitaezkoa da zenbaki eta eragiketa motak ezagutzea eta horiek erraz erabiltzea, eta, horrezaz gainera, hurbilketarako eta estimaziorako estrategiak izatea. Benetako egoeretan neurketak egitea da lortu beharreko helburu lehenetarikoa, eta, horretarako, unitate mota guztiak erabili behar dira: gorputz atalak (oin, arra, beso, etab.), arbitrarioak (sokak, lauzak…) eta arautuak, Sistema Metriko Hamartarra, alegia.

*Geometria*k honako eduki hauekin zerikusia dutenak biltzen ditu: orientazioa eta irudikapen espaziala, kokapena, espazioko objektuak deskribatzea eta ezagutzea; bestalde, forma lauak eta hiru dimentsiokoak ikastea ere hartzen du bere barruan

geometriak. Jolasen bidez egiten diren ariketak lagungarriak izan daitezke objektuak espazioan duten tokiaren eta posizioaren deskripzioa egiteko gaitasuna garatzeko, eta erreferentzia-sistemak eta irudikapen-ereduak osatzeko. Oso aproposa da gure ingurunea benetako egoera fisikoak aztertzeko; izan ere, geometria-kontzeptu asko abstraktuak dira, eta, haren elementuak eta ezaugarriak landuz gero, ulergarriagoak egiten dira kontzeptuak. Gainerako eduki multzoekin eta arteari edo zientziari buruzko beste arlo askorekin etengabe harremanak izateko aukera ematen du geometriak; gainera, geometria oso lagungarria da material batzuk manipulatzen ditugunean (geoplanoak eta mekanoak, puntuen bilbeak, ispilu-liburuak, poliedroak egiteko materiala…), baita gure jardueretan ari garenean ere (tolestatzeak egiteko, gauzak eraikitzeko…). Hala, benetako ereduak eginez, errazagoa da kontzeptuak ulertzea. Geometriako informatika-programak erabiltzeak ere lagundu dezake.

Informazioa Tratatzeari eta Zoriari buruzko eduki multzoak are garrantzitsuagoak dira ezagueraren beste arlo batzuekin zerikusia duten jarduerekin lotzen badira. Multzo horretako lehendabiziko edukiak informazioa biltzea eta matematikaren ikuspegitik tratatzeari buruzkoak dira, eta aipamen berezia egiten zaio adierazpen grafikoari; gainera, ausazko fenomenoak ulertzen hasteko edukiak biltzen dira. Eduki horiek, halaber, Lehen Hezkuntzako beste arlo batzuetan aplikatu eta lantzen dira; hau da, estatistika-datuak (biztanleria, inkestak, herrialdeen azalera…) eguneroko bizitzan sortzen den informazioa lantzeko erabiltzen dituzten arloetan. Eduki horiek oso egokiak dira talde-lana bultzatzeko eta jarrera kritikoa bultzatzeko. Ikasleak ezagutzen dituen ausazko jolasak (partxisa, txanpon baten bi aurkiekin jokatzea…) oso aproposak izan daitezke ausazko fenomenoak ikasten hasteko.

Problemen Ebazpena izeneko eduki multzoa funtsezkoa da, lehen azpimarratu dugunez. Matematikaren arlo guztietan aplika daitezkeen prozesu eta eduki komunak dira honako hauek: eguneroko bizimoduko arazoak identifikatzea, datuak eta haien arteko harreman garrantzitsuenak hautematea, emaitza edo soluzio zehatza edo gutxi gorabeherakoa lortzeko estrategiak sortzea, emaitzak edo usteak egiaztatzea eta emaitzak antolatzea eta jakinaraztea. Problemak ebazteko berariazko eduki multzo bat sortzeak helburu bikoitza du. Batetik, ikasgelako eginbeharren artean merezi duen adinako protagonismoa eta denbora ematea: eragiketek, neurriek, kalkuluek eta gainerako jarduerek benetako zentzua hartzen dute problemak konpontzeko erabiltzen direnean. Eta bestetik, edukia izateaz gainera, problemak ebaztea metodo bat ere bada, eguneroko lan matematikoa ulertzeko modu bat. Matematikarako gaitasuna lortzeko, oso jarduera garrantzitsuak dira, besteak beste, ikasgelan giro sortzailea lortzea eta ikasgelan ikerketak (zenbakizkoak, neurriei buruzkoak, geometrikoak…) eta proiektuak egitea; ikerketa eta proiektu horietan, informazioa tratatzea eta matematika-ezaguera berriak modu kooperatiboan aplikatzea eta ikastea dira elementu nabarmenak.

Azken eduki multzoa *eduki komunei* buruzkoa da, eta matematika lantzeko eta matematikaren jakintzan aurrera egiteko gai giltzarri batzuk jasotzen ditu. Eduki multzo horrek, besteak beste, honako alderdi hauei buruzko berariazko erreferentzia egiten du: matematika-hizkuntza, curriculumeko gai oinarrizkoa den aldetik; informazio- eta komunikazio-teknologien erabilerari buruzko alderdiak; eta jarrerari buruzko edukiak.

ARLOAREN EKARPENA OINARRIZKO GAITASUNAK BARNERATZEKO

Matematika-arloko edukien lehentasuna *matematikarako gaitasuna* bere alderdi guzti-guztietan garatzen dela bermatzea da.

Pentsamendu matematikoa garatzeak *zientzia-, teknologia- eta osasun-kulturarako* gaitasuna lantzen laguntzen du, ingurua ondo ulertzea eta hura zehatzago deskribatzea posible egiten baitu. Lehenik eta behin, irudikatzeko ahalmena garatuta (ikusmen espaziala), planoan zein espazioan, irudiak eraikitzeko eta erabiltzeko ahalmena hobetuko dute haurrek, eta ahalmen hori oso erabilgarria izango zaie mapak erabiltzeko, ibilbideak planifikatzeko, planoak diseinatzeko, marrazkiak egiteko… Bigarrenik, neurrien bidez, errealitatea behar bezala ezagutzea lortzen da; harekin harremanean aritzeko aukerak areagotu egiten dira eta inguruko alderdi kuantifikagarriei buruzko informazio gero eta zehatzagoa transmititzeko aukerak ere bai. Eta, azkenik, informazioa interpretatzeko irudikapen grafikoak erabiltzen trebea izatea oso tresna baliagarria da errealitatea bere horretan atzemateko eta ezagutzeko.

Matematikak *informazioa tratatzeko eta teknologia digitala* erabiltzeko gaitasuna lortzen laguntzen du. Batetik, zenbakien erabilerarekin zerikusia duten trebetasunak lortzen laguntzen du; besteak bete, konparazioak, hurbilketak edo adierazteko moduen arteko erlazioak egiteko; hortaz, trebetasun horiek kopuruak edo neurriak dituzten informazioak ulertzen laguntzen dute. Eta, bestetik, hain zuzen ere, Informazioaren Tratamendua izeneko eduki multzoak hizkuntza grafikoaren eta estatistikoaren erabilera hartzen du bere barruan, errealitateari buruzko informazioa interpretatzeko nahitaezkoak. Alderdi teknologikoak ere aipatu behar dira; esaterako, kalkulagailuak eta matematika-programak erabiltzea, matematika-edukiak ulertzen eta barneratzen lagun baitiezagukete.

Problemen ebazpenarekin zerikusia duten edukiek osatzen dute matematikaren arloak *norberaren autonomiarako eta ekimenerako* gaitasunari egin diezaiokeen ekarpen nagusia. Problemak ebazteak, gutxienez, matematikarako gaitasunarekin zerikusia duten hiru alderdi osagarri ditu: planifikatzea, baliabideak kudeatzea eta ebazpenak balioestea. Planifikazioak lotura du plan bat egiteko eta horretarako estrategiak bilatzeko egoera zehaztasunez ulertzearekin, eta, azken batean, erabakiak hartzearekin; baliabideak kudeatzeak, berriz, ebazpideen optimizazioa hartzen du barnean; eta, azkenik, prozesua aldian-aldian ebaluatzeak eta ebazpenak balioesteak beste problema edo egoera batzuen aurrean arrakasta lortzeko aukera gehiago izaten

laguntzen du. Matematikaren irakaskuntzak prozesu horiei garrantzia ematen badie, eta egoera irekiak eta benetako problemak proposatzen baditu, hain garrantzitsua den gaitasun hori hobetu egingo da. Egoera zailei arrakastaz aurre egiteko norberak duen ahalmenean konfiantza izatearekin zerikusia duten jarrerak curriculumaren eduki guztietan lantzen dira.

Matematikak, gainera, *ikasten ikasteko* gaitasuna lortzen ere laguntzen du. Matematikan aurrera egiteko eta hura ikasteko, nahitaezkoa da matematikako tresnen oinarrizko ezaguera izatea eta tresnok egoeraren arabera erabiltzea. Matematikarako gaitasuna garatzeko, bestalde, nahitaezkoa da matematikak garrantzia ematea autonomiarekin, saiatua izatearekin eta ahaleginarekin zerikusia duten edukiei, gero eta konplexuagoak diren egoerei aurre egiteko, sistematizatzeko, jarrera kritikoa izateko eta lanaren emaitzak eraginkortasunez komunikatzeko trebetasuna lantzeko. Eta, azkenik, ikaskuntzaren prozesua hitzez adierazteak —curriculumean askotan agertzen den edukia— laguntzen du pentsatzen zer ikasi den, zer ikasi behar dugun, eta nola eta zertarako; hau da, ikasten ikasteko estrategiak garatzea egiten du.

Matematikaren arloak *hizkuntza-komunikaziorako* gaitasuna lortzen laguntzeko, bi alderdi azpimarratu behar ditu. Batetik, matematika-hizkuntzaren funtsa hizkuntza naturalera ekartzea eta hura zehaztasun egokiz erabiltzea. Bestetik, nahitaezkoa da arrazoibideen eta prozesuen hitzezko deskripzioarekin zerikusia duten edukiei aparteko garrantzia ematea. Adierazten jakiteak eta besteek adierazten dutena entzuten jakiteak ulermena, izaera kritikoa eta komunikaziorako trebetasunak hobetzen laguntzen dute.

Matematikak giza eta arte-kulturarako gaitasuna lortzen laguntzen du; izan ere, matematikak gizadiaren kultura-garapenari ekarpen handiak egin dizkio. Bestalde, harreman eta forma geometrikoak ezagutzeak arte-lanak eta arte moduak aztertzen eta ulertzen laguntzen du.

Matematikak *gizarterako eta herritartasunerako* gaitasunari egiten dion ekarpena, beste arloetan bezala, taldean lan egiten ikastea da; izan ere, matematikan, dimentsio berezia du horrek, gurea ez den beste ikuspegia onartzen ikasten bada, batik bat, problemak ebazteko estrategia pertsonalak erabiltzerakoan.

LEHEN ZIKLOA
EDUKIAK

1. eduki multzoa. Zenbakiak eta eragiketak

1. Zenbaki arruntak eta zenbaki-alfabetizazioa
   – Zenbakien esanahia eta eguneroko bizitzan nola erabili (zenbatu, neurtu, ordenatu, kopuruak adierazi, erosi, jolastu, elkarri komunikatu…).

– Komunikazioa eta zenbakiak. Eguneroko bizitzako zenbakizko testuak interpretatzea (prezioak erakusten dituzten erakusleihoak, publizitate-liburuxkak…).
– Zenbaki-sistema hamartarra. Zenbakiak osatzeko arauak ezagutzea, baita hiru zifra arteko zenbakietako zifren posizioaren balioa ere.
– Benetako egoeretan zenbakiak nola erabili: irakurri eta idatzi, ordenatu, alderatu, zenbakizko zuzenean adierazi, deskonposizioak egin, biribildu eta jolasetan erabili.
– Zenbaki ordinalak. Testuinguru errealetan nola erabili.

2. Eragiketak
   – Batuketaren (batzeko edo eransteko egoerak) eta kenketaren (banatzeko edo kentzeko egoerak) esanahia eta nola erabili eguneroko bizitzan. Biderketetara hurbiltzea, batugai berdinen arteko batuketa gisa, eta zenbat aldiz batu behar den kalkulatzeko erabiltzea.
   – Eragiketa matematikoak ahoz eta idatziz adieraztea, eta batuketak eta kenketak kalkulatzea.
3. Kalkulu-estrategiak
   – Batuketak eta kenketak nola kalkulatzen diren ulertzeko eta haiek egiteko oinarrizko estrategiak: manipulazioa eta zenbaketak, hatzak erabiltzea, zenbakizko zuzena, jolasak…
   – Buruzko kalkulu automatikoa: 10 gehi 10 bitarteko batuketa- eta kenketa-taulak osatzea eta memorizatzea.
   – Zenbakien esanahia:
     · Buruzko kalkuluak egiteko nork bere estrategiak eta estrategia akademikoak osatzea eta horiek erabiltzea: deskonposizioa eta konposizioa, edozein zenbakiri 1, 10 eta 100 batzea eta/edo kentzea, zenbaki errazen bikoitzak eta erdiak, zenbaki segidak.
     · Hurbilketa-kalkulua. Kalkulu baten emaitza zenbatesteko eta biribiltzeko zenbait estrategia erabiltzea.
     · Buruzko eragiketak egitean, erabilitako prozesua ahoz azaltzea.
   – Kalkuluak idatziz egiteko estrategiak:
     · Batuketa- eta kenketa-algoritmo ez-akademikoak egitea, zenbakien deskonposizioa eginda eta beste estrategia pertsonal batzuk erabilita.
     · Batuketak kalkulatzea algoritmo akademikoak erabilita.
     · Bururakorik gabeko kenketak kalkulatzea, algoritmo akademikoak erabilita.
     · Kalkuluak idatziz egitean erabilitako prozesua ahoz azaltzea.

2. eduki multzoa. Neurketa: magnitudeak kalkulatzea eta estimatzea

1. Neurtzeak zer esan nahi duen eta nola erabiltzen den eguneroko bizitzan (gorputz-neurriak, neurriak, objektuak, errezetak, ontziak…).
2. Neurriekin eta haien magnitudeekin zerikusia duten eguneroko bizitzako zenbakizko testu errazak ikastea eta interpretatzea. Neurketa errazei buruzko informazioa interpretatzeko eta hura transmititzeko hiztegi egokia erabiltzea.
3. Luzera, pisua/masa eta edukiera
   - Luzera, pisu/masa eta bolumenaren arabera objektuak alderatzea, zuzenean zein zeharka.
   - Tresna eta estrategia ezkonbentzionalekin (urratsak, oinak, sokak, harriak, potoak…) eta konbentzionalekin (erregela, metroa, balantzak, ontziak) neurtzea. Neurketak egiteko tresna sinpleak taxutzea.
   - Inguruan ditugun objektuak eta distantziak neurtzeko ohiko unitateak eta tresna konbentzionalak erabiltzea.
   - Eguneroko bizitzako egoeretako neurketa-emaitzen estimazioa egitea (distantziak, tamainak, pisuak, bolumenak…).
   - Neurketa zehatzak eta gutxi gorabeherakoak egitean, erabilitako prozesua eta estrategia ahoz azaltzea.
4. Denbora neurtzea
   - Denbora neurtzeko neurri-unitateak: denbora ziklikoa eta denbora-tarteak (eguna, astea, hila, urtaroa, urtea). Ordua irakurtzea, ordu osoak eta erdiak.
   - Denbora-tarte baten iraupena zehazteko unitate egokia hautatzea eta hura erabiltzea.
5. Moneta-sistema. Txanponak eta billeteak ezagutzea eta haien balioaren eta eguneroko objektuen arteko prezioen erlazioa.

3. eduki multzoa. Geometria

1. Espazioan kokatzea, distantziak eta biraketak
   - Nork bere buruarekiko eta beste erreferentzia-puntu batzuekiko kokapena eta lekualdatzeak deskribatzea.
   - Ibilbideak deskribatzeko geometria-hiztegia erabiltzea: lerro irekiak eta itxiak; zuzenak eta kurbak.
   - Ibilbide-krokisak interpretatzea eta ahoz deskribatzea.
   - Ibilbide-krokisak irudikatzea eta horiek praktikan frogatzea.
   - Espazio-erlazioei buruzko informazioa duten mezuak interpretatzea.

2. Forma lauak eta espazialak
   - Irudiak eta haien elementuak. Irudi lauak ezagutzea ohiko objektuetan eta espazioetan.
   - Gorputz geometrikoak ezagutzea ohiko objektuetan. Horiek duten forma deskribatzea, oinarrizko geometria-hiztegia erabilita.
   - Irudi eta gorputz geometrikoen arteko konparazioa eta haien sailkapena, oinarrizko irizpideak kontuan hartuta.
   - Irudi lauak eta gorputz geometrikoak osatzea, beste batzuk abiapuntu hartuta, konposizioaren eta deskonposizioaren bidez.
3. Erregulartasunak eta simetriak
   - Irudietan eta gorputzetan erregulartasun-elementuak bilatzea, objektuak manipulatuta. Gorputz-simetriak.

4. eduki multzoa. Informazioa tratatu, zoria eta probabilitatea

1. Grafikoak eta taulak
   - Inguruko fenomenoei buruzko datu-tauletan adierazitako grafiko errazetako (barra-diagrama) eta zenbakizko testuetako elementu esanguratsuenak ahoz deskribatzea, informazio kualitatiboa lortzea eta interpretatzea.
   - Datuak biltzeko eta ordenatzeko oinarrizko teknikak. Familian eta inguru hurbilean nola erabiltzen diren. Behaketarako oinarrizko teknikak. Datu-taulak.
2. Ausazko esperientziak
   - Ausazko gertaeretara intuitiboki hurbiltzea. Ziurra denaren eta litekeena baina ziurra ez denaren arteko bereizketa, eta auziarekin zerikusia duten zenbait esamolde erabiltzea.

5. eduki multzoa. Problemak ebaztea

1. Batuketa edo kenketaren bat egitea beharrezkoa duten eguneroko bizitzako arazoak identifikatzea.
2. Batuketak eta kenketak egitea dakarten zenbakizko zenbait problema ebaztea, aldaketa-, konbinazio-, berdintze- eta alderatze-egoera erreal eta errazei buruzkoak.
3. Problema baten elementuak (enuntziatua, datuak, galdera, emaitza) eta aurre egin beharreko zailtasunak (hizkuntza ulertzea, zenbakizko datuak, kodifikazio eta adierazpen matematikoak, emaitzak, emaitza egiaztatzea, garatutako ahozko komunikazioa).

4. Batuketak eta kenketak egitea dakarten problemak ulertzeko eta ebazteko planteamenduak eta estrategiak:
   – Ahoz, grafiko bidez eta idatziz emandako problemak.
   – Problemak taldean, binaka eta bakarka ebaztea.
   – Buruz, kalkulagailu erabilita eta eragiketaren algoritmoa erabiliz ebaztea.
   – Datuak sobera edo faltan dituzten problemak, emaitza bat baino gehiago dituzten problemak eta abar.
   – Problemak asmatzea eta ikaskideei jakinaraztea.
   – Problemak ebaztean erabilitako prozesua ahoz azaltzea.
5. Egoera irekiei buruzko problemak ebaztea, eta kalkuluei, neurketei eta geometriari buruzko matematika-ikerketa errazak egitea.
6. Nork bere estrategia sortzea, problemak eta ikerketak ebazteko.

6. eduki multzoa. Eduki komunak

Matematika-hizkuntza

- Honako hauek adierazteko zehaztasuna eta argitasuna: kopuruak, zenbaki-erlazioak, zenbaki ordinal bakunak, alderatzeak, sailkapenak, neurri-unitate errazak, espazioko eta denborazko orientazioa.
- Batuketa errazak egin beharreko egoerak adierazteko hizkuntza egokia erabiltzea.
- Batuketa- eta kenketa-eragiketen ikurrak eta eragiketa horiek matematikoki nola adierazi.

Didaktika-baliabideak eta informazio- eta komunikazio-teknologiak.

- Manipula daitezkeen materialak erabiltzea, matematika-edukiak ondo ulertzeko: kartak, abakoak, erakusleihoak, irudi geometrikoak…
- Kalkulagailua. Erabilera-jarraibideak. Kalkulagailua honako hauekin erabiltzea: zenbaki-segidak, konposizioa eta deskonposizioa egiteko, kalkuluak egiteko, adimen-estrategiak ikasteko eta problemak ebazteko.
- Baliabide informatikoak erabiltzea, jarduerak egiteko eta matematika-edukiak ulertzeko.

Jarrerak

- Honako hauen aldeko jarrera izatea: matematika-edukiak ikasteko eta erabiltzeko, informazioa lortzeko eta adierazteko, mezuak interpretatzeko eta eguneroko bizitzako egoeretan problemak ebazteko.
- Kalkuluak eta emaitzak txukun eta ordenatuta aurkezteko interesa izatea, eta neurketak egitean kontu handia izatea.

– Lan kooperatiboan parte hartzea, ekitea eta elkarlanean aktiboki aritzea, problemak aurkitzeko, ebazteko eta asmatzeko, eta gainerakoen lana errespetatzea.
– Norberak dituen aukeretan konfiantza izatea eta matematika ikastearekin zerikusia duten erronkei eta akatsei aurre egiteko jarrera.

BIGARREN ZIKLOA
EDUKIAK

1. eduki multzoa. Zenbakiak eta eragiketak

1. Zenbaki arruntak eta zatikiak. Zenbaki-alfabetizazioa
   – Zenbaki arrunten eta zatikien esanahia eta haiek eguneroko bizitzan nola erabili.
   – Zenbakizko testuak eta zenbakiekin zerikusia duten eguneroko bizitzako adierazpenak (publizitate-liburuxkak, prezio-katalogoak…) interpretatzea.
   – Zenbaki-sistema hamartarra. Zenbakiak osatzeko arauak eta sei zifra arteko zenbakietako zifren posizio-balioa. Baliokidetasunak eta formak menderatzea.
   – Benetako egoeretan zenbakiak nola erabili: horiek irakurtzeai eta idaztea, ordenatzea eta alderatzea (notazioa), zenbakizko zuzenean adieraztea, deskonposatzea, biribiltzea, jolasak.
   – Zatiki-zenbakiak testuinguru errealetako banaketak eta erlazioak azaltzeko. Hiztegi egokia erabiltzea.
   – Zatiki errazak, eta zenbaki arruntak eta zatiki errazak alderatzea, horiek zenbakizko zuzenean ordenatuta eta ordezkatuta.
2. Eragiketak
   – Biderketa- eta zatiketa-eragiketen esanahia eta horiek nola erabili eguneroko bizitzan. Eragiketa eta kalkulu matematikoak ahoz eta idatziz adieraztea.
   – Eguneroko bizitzako egoeretan biderketa erabiltzea, batuketa laburtu gisa, laukizuzenetan eta problema konbinatorioetan.
   – Zatiketa testuinguru errealetan erabiltzea, banaketak eta multzoak egiteko, eta biderketaren kontrako eragiketa gisa.
3. Kalkulu-estrategiak
   – Oinarrizko estrategiak biderketa eta zatiketa errazen bidezko kalkuluak ulertzeko eta horiek egiteko: grafikoki adieraztea, neurriak errepikatzea, dirua banatzea, jolasak…
   – Buruzko kalkulu automatikoa: biderketa-taulak egin eta horiek buruz ikastea.
   – Zenbakien esanahia:

- · Batuketak, kenketak, biderketak eta zatiketak buruz kalkulatzeko nork bere estrategiak eta estrategia akademikoak egitea eta erabiltzea. Zenbakiak batuketatan eta biderketatan deskonposatzea.
- · BHurbilketa-kalkuluak egiteko zenbait estrategia sortzea eta erabiltzea. Bi zenbakiren arteko eragiketaren emaitza estimatzea, eta zentzuzkoa den ala ez balioestea.
- · BBuruzko eragiketetan erabilitako prozesua ahoz azaltzea.

– Kalkuluak idatziz egiteko estrategiak:
  - · Biderketen eta zatiketen algoritmo ez-akademikoak egitea, zenbakien deskonposizioa eginda eta nork bere estrategia erabilita.
  - · Batuketak eta kenketak egitea, bi zifrako zenbakiz biderkatzea eta zifra bateko zenbakiz zatitzea, algoritmo akademikoak erabilita.
  - · Kalkuluak idatziz egitean erabilitako prozesua ahoz azaltzea.

2. eduki multzoa. Neurketa: magnitudeak kalkulatzea eta estimatzea

1. Neurrien esanahia eta horiek eguneroko bizitzan erabiltzea.

   Neurriekin eta haien magnitudeekin zerikusia duten eguneroko bizitzako zenbakizko testu errazak ikastea eta interpretatzea.

   Neurriei buruzko informazioa interpretatzeko eta transmititzeko hiztegi egokia erabiltzea.
2. Luzera, pisua/masa eta edukiera
   – Neurketak eguneroko testuinguruetan, tresna eta neurri-unitate konbentzionalak erabilita. Neurketak egiteko tresna sinpleak taxutzea.
   – Zenbaki-sistema metriko hamartarra. Sarrera. Neurri-unitate konbentzionalak: multiplo eta azpimultiplo ohikoenak testuinguru errealetan erabiltzea. Unitate egokiena hautatzea, magnitude-ordenaren araberako neurria adierazteko.
   – Magnitude bereko unitateak eta kopuruak alderatzea eta ordenatzea.
   – Neurketak egiteko nork bere estrategia eratu eta erabiltzea.
   – Eguneroko bizitzako objektuen neurriak estimatzea.
   – Neurriak hartzean egindako prozesua eta erabilitako estrategia ahoz eta idatziz azaltzea.
3. Denbora neurtzea. Denbora neurtzeko neurri-unitateak: erloju analogikoan eta digitalean zer ordu den jakitea.
4. Moneta-sistema. Legezko erabilerako txanponak eta billeteak ezagutzea eta erabiltzea, eta baliokidetasunak ezartzea.

3. eduki multzoa. Geometria

1. Kokapena espazioan, distantziak, angeluak eta biraketak
   - Ikasleentzat ohikoa den objektu batek espazioan duen kokapena deskribatzeko, zenbait kode eratu eta erabiltzea.
   - Espazio ezagunen oinarrizko irudikapena: planoak eta maketak. Mapa eta plano errazak irakurtzea eta interpretatzea.
   - Kokapena eta lekualdatzeak testuinguru topografikoan deskribatzea. Koordenatu-ardatzak.
   - Lerroak ibilbide gisa: zuzenak eta kurbak, zuzenen arteko ebaketa eta zuzen paraleloak.
2. Forma lauak eta espazialak
   - Eguneroko bizitzako irudi lauak eta espazialak ezagutzea.
   - Poligonoak sailkatzea. Aldeak eta erpinak.
   - Zirkunferentzia eta zirkulua.
   - Gorputz geometrikoak: kuboak, esferak, prismak, piramideak eta zilindroak. Ertzak eta aldeak.
   - Objektuen forma deskribatzea oinarrizko geometria-hiztegia erabilita.
   - Irudi geometriko lauak eratzea datuak abiapuntu hartuta, eta gorputz geometrikoak eratzea garapena kontuan hartuta. Oinarrizko forma geometrikoak aztertzea.
   - Irudi eta gorputz geometrikoak alderatzea eta sailkatzea, zenbait irizpide erabilita.
   - Angeluak alderatzea eta sailkatzea.
3. Erregulartasunak eta simetriak
   - Eraldaketa metrikoak: translazioak eta simetriak. Gorputz-simetriak eta ispiluak.

4. eduki multzoa. Informazioa tratatu, zoria eta probabilitatea

1. Grafikoak eta taulak
   - Datu-taulak. Datuak zenbatzeko estrategia eraginkorrak erabiltzen hastea.
   - Ohikoak diren objektuei, fenomenoei eta gertaerei buruzko datuak biltzea eta erregistratzea, oinarrizko inkesta-, behaketa- eta neurketa-teknikak erabilita.
   - Sarrera bikoitzeko tauletan bildutako eguneroko bizitzako zenbakiak irakurtzea eta interpretatzea.
   - Eguneroko gertaerei buruzko grafiko errazetako elementu esanguratsuak interpretatzea eta ahoz deskribatzea.

- Eguneroko bizitzako objektuei, fenomenoei eta gertaerei buruzko taulak eratzea.
- Inguruan dauden objektuei, fenomenoei eta gertaerei buruzko grafiko errazak eratzea.

2. Ausazko esperientziak
   - Ausazko esperientzien emaitzak balioestea, zenbait gertaera gauzatzeko probabilitatea (handia edo txikia) dagoela ohartzeko, eta emaitza zehatza aurreikustea ezinezkoa dela ohartzeko.
   - Ausazko egoeretako hizkuntza: sarrera. Inguruko ausazko egoerak eta esperientziak deskribatzeko hizkuntza egokia erabiltzea.

5. eduki multzoa. Problemak ebaztea

1. Lau eragiketetako bat edo eragiketa batzuk eskatzen dituzten eguneroko bizitzako problemak identifikatzea, eragiketa egokiena zein izan daitekeen bereizita eta guztien aplikagarritasuna kontuan hartuta.
2. Zenbait magnitude eta neurri-unitate (luzerak, pisuak, dirua…) adierazten dituzten problemak ebaztea; problema horietan batuketak, kenketak, biderketak eta zatiketak egin beharko dira, eta, neurri eta eskala errazen truke, alderatze, berdintze eta errepikapeneko egoera errealei buruzkoak izango dira.
3. Problema baten elementuak (enuntziatua, datuak, galdera, emaitza) eta aurre egin beharreko zailtasunak (hizkuntza ulertzea, zenbakizko datuak, kodifikazio eta adierazpen matematikoak, ebazpena, emaitza egiaztatzea, garatutako ahozko komunikazioa).
4. Problemak ulertzeko eta ebazteko planteamenduak eta estrategiak:
   - Ahoz, grafiko bidez eta idatziz emandako problemak.
   - Problemak taldean, binaka eta bakarka ebaztea.
   - Problemak buruz, kalkulagailuz eta algoritmoa erabiliz ebaztea.
   - Datuak sobera edota faltan dituzten problemak, zenbait emaitza dituzten problemak, zenbaketa sistematikokoak…
   - Problemak asmatzea eta ikaskideei jakinaraztea.
   - Problemak ebaztean erabilitako prozesua ahoz azaltzea.
5. Arazo irekiak ebaztea:
   - Zenbakiei, kalkuluei, neurriei, geometriari eta informazioa tratatzeari buruzko matematika-ikerketa errazak.
   - Lan-proiektu txikiak planteatzea. Matematika-ezaguerak aplikatzea eta elkarren artean lotzea. Lankidetza-lana.

6. Estrategia heuristikoak: proba-errore bidez hurbiltzea, problema berriz formulatzea.
7. Nork bere estrategia garatzea problemak ebazteko, eta ikerketak eta lan-proiektu txikiak egiteko.

6. eduki multzoa. Eduki komunak

Matematika-hizkuntza

– Honako hauek adierazteko zehaztasuna eta argitasuna: zenbakiak eta haien arteko erlazioak, neurri-unitate errazak, orientazioa espazioan, orientazioa denboran, irudiak eta gorputz geometrikoak…
– Batuketa- eta biderketa-egoera errazak adierazteko hizkuntza egokia erabiltzea.
– Batuketa-, kenketa-, biderketa- eta zatiketa-eragiketen matematika-ikurrak eta eragiketa horiek nola adierazi, eta zatiki errazak adieraztea.

Didaktika-baliabideak eta informazio- eta komunikazio-teknologiak

– Hainbat material didaktiko erabiltzea, matematika-edukiak ulertzen laguntzeko: kartak, zenbakizko testuak, zinta metrikoak, balantzak, pisuak, ontzi graduatuak, irudi geometrikoak…
– Kalkulagailua.
  · Erabilera-jarraibideak. Kalkulagailuak erabiltzea kalkuluak egiteko, eta batuketak, kenketak, biderketak eta zatiketak egiteko estrategia mentalak ikasteko.
  · Kalkulagailua erabiltzea, eguneroko bizitzako matematika-problemak ebazteko, eta, kalkuluen konplexutasunaren arabera, kalkulagailua erabiltzea komeni den erabakitzea.
– Informatika-baliabideak erabiltzea, jarduerak egiteko eta matematika-edukiak ulertzeko.

Jarrerak

– Matematika-edukiak ikasteko eta erabiltzeko, informazioa interpretatzeko eta jakinarazteko eta eguneroko bizitzako problemak ebazteko aldeko jarrera izatea.
– Kalkuluak, emaitzak, neurria, eraketa geometrikoak, grafikoak eta ebazpen-prozesuak garbi, txukun eta argi aurkezteko interesa izatea.
– Ikuspegiei, ikerketei, ebazpen-prozesuei eta lortutako emaitzei buruz gainerako ikaskideekin batera aritzeko interesa eta gogoa izatea, gainerakoen ikuspegia errespetatuz. Lankidetza aktiboa eta arduratsua izatea, taldean lan egitean.

– Norberak dituen ahalmenetan konfiantza izatea, matematika ikastearekin zerikusia duten erronkei eta erroreei aurre egiteko gogoa eta jarrera izatea. Bere kabuz modu autonomoan ikasteko gogoa eta aldeko jarrera izatea.

HIRUGARREN ZIKLOA
EDUKIAK

1. eduki multzoa. Zenbakiak eta eragiketak

1. Zenbaki arruntak, osoak, hamartarrak eta zatikiak. Ehunekoak. Zenbaki-alfabetizazioa
   – Zenbaki arrunten, osoen, hamartarren, zatikizkoen eta ehunekoen esanahia, eta horiek guztiak eguneroko bizitzan nola erabili.
   – Zenbaki motekin zerikusia duten eguneroko bizitzako zenbakizko testuak eta adierazpenak interpretatzea.
   – Zenbaki arruntak eta hamartarrak osatzeko arauak eta posizio-balioa. Baliokidetasunak eta formak menderatzea. Sei zifra baino gehiagoko zenbaki arruntak eta bi hamartar dituzten zenbakiak irakurtzea eta idaztea, ordenatzea eta alderatzea (notazioa)… eta horiek testuinguru errealetan nola erabili.
   – Zatiki-zenbakiak. Zatiki baliokideak lortzea. Testuinguru errealetan nola erabili.
   – Zenbaki positiboak eta negatiboak. Testuinguru errealetan nola erabili.
   – Zatiak ehunekoen bidez adieraztea. Zatiki bakunen, hamartarren eta ehunekoen arteko korrespondentzia (oinarrizko zenbakizko sareak).
   – Zenbaki arruntak, osoak, hamartarrak, zatikiak eta ehunekoak ordenatzea, alderatuz, zenbakizko zuzenean adieraziz eta zenbaki mota batetik bestera pasatuz.
   – Aurreko kultura batzuetako zenbaki-sistemak eta horien eragina gaur egun.
2. Eragiketak
   – Berreketa, biderkagai berdinen biderketa gisa. Berbidurak eta kuboak.
   – Eragiketen hierarkia eta parentesiak nola erabili.
3. Kalkulu-estrategiak
   – Zenbaki hamartarrekin, zatikiekin eta ehunekoekin kalkulu errazak ulertzeko eta egiteko oinarrizko estrategiak: zenbakizko zuzena, irudikapen grafikoak…
   – Zenbakien esanahia:
      · Zenbaki arruntekin, hamartarrekin, zatikiekin eta ehunekoekin (zenbakizko sareak) zerikusia duten buruzko kalkuluak egiteko nork bere estrategia eta estrategia akademikoak lantzea eta erabiltzea. Zenbaki-segidak.

- · Biderkatze-taula erabiltzea, multiploak eta zatitzaileak identifikatzeko.
- · Zenbait estrategia landu eta erabiltzea, zenbaki mota bakoitzarekin gutxi gorabeherako kalkuluak egiteko. Kalkulu baten emaitza estimatzea kalkulatzea eta zenbakizko zentzuzko erantzunak balioestea.
- · Buruzko eragiketak egitean, erabilitako prozesua ahoz azaltzea.

– Kalkuluak idatziz egiteko estrategiak:

- · Batuketaren eta kenketaren eta bi zifrako zenbakiz egindako biderketaren eta zatiketaren algoritmo akademikoak erabiltzea mota ezberdineko zenbakiekin, eguneroko egoeretan eta problemen ebazpenetan.
- · Oinarrizko ehunekoak kalkulatzea egoera errealetan. Zenbakizko baliokideak erabiltzea (oinarrizko zenbakizko sareak).
- · Kalkuluak idatziz egitean erabilitako prozesua ahoz azaltzea.

2. eduki multzoa. Neurketa: magnitudeak kalkulatzea eta iritzira kalkulatzea

1. Neurketaren esanahia eta erabilera. Zenbakizko testuak ezagutzea eta interpretatzea, eta neurketa eta neurriak erabiltzea problemak ebazteko eta informazioa ulertzeko eta transmititzeko. Hiztegi egokia erabiltzea.
2. Luzera, pisua/masa, edukiera eta azalera
   - – Nork bere estrategia sortzea, irudiak zehatz eta gutxi gorabehera neurtzeko.
   - – Neurketak egitea tresna eta neurri-unitate konbentzionalak erabilita.
   - – Magnitude bereko unitateen arteko baliokidetasunak.
   - – Objektu eta espazio ezagunek duten luzera, azalera, pisua eta edukiera estimatzea; neurketak egiteko unitate eta tresna egokienak hautatzea, eta magnitude-ordenaren araberako neurriren bat adieraztea.
   - – Neurriak hartzean eta estimazioak egitean erabilitako prozesua eta erabilitako estrategia ahoz eta idatziz azaltzea.
   - – Irudi lauen azaleren arteko aldeak, bata bestearen gainean jarrita, deskonposizioa eginda eta haien neurriak hartuta. Azalera-unitateak erabiltzea.
   - – Oinarrizko irudien perimetroa eta azalera kalkulatzea: laukizuzenak, karratuak eta triangeluak.
3. Denbora neurtzea
   - – Denbora neurtzeko neurri-unitateak eta haien arteko erlazioak. Zehaztasuna minutuekin eta segundoekin.
   - – Orduen, minutuen eta segundoen arteko baliokidetasunak eta bihurketak, egoera errealetan.

4. Angeluen neurketa. Angelua, biraketa- edo irekidura-neurria. Angeluak neurtzea eta tresna konbentzionalak erabiltzea angeluak neurtzeko.
5. Moneta-sistema. Moneta-sistema erabiltzea, baliokidetasunak, eragiketak eta aldaketak erabilita.
6. Informazio-unitateak: byte (B), kilobyte (kB), megabyte (MB), gigabyte (Gb). Horiek testuinguru errealetan interpretatzea.

3. eduki multzoa. Geometria

1. Kokapena planoan eta espazioan, distantziak, angeluak eta biraketak
   - Angeluen posizioak.
   - Koordenatu kartesiarrezko sistema. Puntuak adieraztea eta irakurtzea. Kokapenak eta lekualdatzeak deskribatzea, koordenatuak, distantziak, angeluak, biraketak… erabilita.
   - Espazioaren, eskalen eta grafiko errazen oinarrizko irudikapena.
   - Planoak, maketak eta mapak irakurtzea, interpretatzea, eratzea eta erreproduzitzea, zenbait eskala erabilita.
   - Marrazketa-tresnak eta informatika-programak erabiltzea, irudi geometrikoak osatzeko eta arakatzeko.
2. Forma lauak eta espazialak
   - Triangelu baten aldeen arteko eta angeluen arteko erlazioak.
   - Irudi lauak eta gorputz geometrikoak osatzea, beste batzuk abiapuntu hartuta, konposizioaren eta deskonposizioaren bidez.
   - Irudi lauen eta espazialen ereduak osatzea, horretarako hainbat material erabilita.
3. Erregulartasunak eta simetriak
   - Simetriak, irudietan eta objektuetan.
   - Irudi lau baten simetrikoa marraztea, elementu jakin batekiko.
   - Antzekotasuna. Sarrera: handitzeak eta txikitzeak.

4. eduki multzoa. Informazioa tratatu, zoria eta probabilitatea

1. Grafikoak eta taulak
   - Datuak biltzea oinarrizko inkesta-, behaketa- eta neurketa-teknikak erabilita, eta datu horien guztien erregistroa egitea. Sarrera bikoitzeko taulak eta maiztasun-taulak.
   - Informazioa emateko moduak. Estatistika-grafikoak: barra-diagrama, piktogramak, maiztasun-poligonoak, sektore-diagrama.

- Informazioa lortzea eta erabiltzea, inguruko objektuei, fenomenoei eta gertaerei buruzko datuen grafikoak eta taulak egiteko.
- Batez besteko aritmetikoa, moda, mediana eta heina, eguneroko egoeretan aplikatzea.
- Estatistika-grafikoen bidez emandako informazioa ikuspegi kritikoz aztertzeak duen garrantzia balioestea.

2. Ausazko esperientziak
   - Zoria eguneroko bizitzan. Gertaera bati probabilitate-gradua egokitzea.
   - Ausazko gertaera errazen joerari buruzko usteak formulatzea, intuizioa erabilita, eta horiek egiaztatzea.

5. eduki multzoa. Problemak ebaztea

1. Lau eragiketetako bat edo eragiketa gehiago beharrezkoa duten eguneroko bizitzako problemak ezagutzea, egokiena zein izan daitekeen bereizita eta guztien aplikagarritasuna kontuan hartuta.
2. Zenbait magnitude eta neurri-unitate (luzerak, pisuak, edukierak, denbora, dirua…) erabiltzea beharrezko duten eguneroko bizitzako problemak ebaztea, zenbaki arruntak, hamartarrak, zatikiak eta ehunekoak erabilita.
3. Eguneroko bizitzako problemak ebaztea, nork bere estrategiak eta zenbakien arteko erlazioak erabilita (oinarrizko zenbaki-sareak); datuen esanahia, proposatutako egoera, prozesua, egindako kalkuluak eta lortutako emaitzak ahoz azaltzea; emaitza baten baliotasuna argudiatzeko arrazoibideak formulatzea; eta, erroreak identifikatzea, halakorik gertatuz gero.
4. Zenbait planteamendu eta estrategia erabiltzea, problemak ulertzeko eta ebazteko: irakurtzea eta iruzkinak egitea; ahozkoak, grafikoak eta idatziak; datuak sobera dituztenak, emaitza bat baino gehiago dituztenak, zenbaketa sistematikokoak; osatu, bihurtu, asmatu. Ikaskideei jakinaraztea eta erabilitako prozesua ahoz azaltzea.
5. Arazo irekiak ebaztea:
   - Zenbakiei, kalkuluei, neurriei, geometriari eta informazioa tratatzeari buruzko matematika-ikerketa errazak.
   - Lan-proiektuak planteatzea. Matematika-ezaguerak aplikatzea eta elkarren artean lotzea. Lankidetza-lana.
6. Estrategia heuristikoak: proba-errore bidezko hurbilketa; emaitzak zenbatestea; problema berriz formulatzea, taulak erabiltzea; antzeko problemekin lotzea; eskemak eta grafikoak osatzea; atzekoz aurrera ekitea.
7. Problemak ebazteko, ikerketak eta lan-proiektuak egiteko, eta, egoera jakinetan, kalkulu zehatzak edo gutxi gorabeherakoen artean egokiena hautatzeko nork bere estrategia sortzea, errore-tartea kontuan hartuta.

6. eduki multzoa. Eduki komunak.

Matematika-hizkuntza

- Zehaztasuna eta argitasuna honako hauek adierazteko: zenbakiak eta haien arteko erlazioa, baliokidetasunak, neurri-unitateak, orientazioa espazioan eta angeluak, irudi eta gorputz geometrikoak, grafikoak, ausazko egoerak…
- Hizkuntza egokia erabiltzea, hainbat zenbaki motaren eta ehunekoren batuketa- eta biderketa-egoerak adierazteko.
- Batuketa-, kenketa-, biderketa- eta zatiketa-eragiketen ikurrak eta eragiketa horiek nola adierazi, eta zatikiak, zenbaki hamartarrak eta osoak eta ehunekoak adieraztea.

Didaktika-baliabideak eta informazio- eta komunikazio-teknologiak

- Hainbat material didaktiko erabiltzea, matematika-edukiak ulertzen laguntzeko: zenbakizko testuak, zinta metrikoak, balantzak, pisuak, ontzi graduatuak, irudi eta gorputz geometrikoak, dadoak…
- Kalkulagailua.
  - · Kalkulagailua erabiltzea, kalkuluak egiteko eta eragiketa eta zenbaki-estrategia mentalak ikasteko.
  - · Kalkulagailua erabiltzea, eguneroko bizitzako matematika-problemak ebazteko, eta, kalkuluen konplexutasunaren arabera, kalkulagailua erabiltzea komeni den erabakitzea.
- Informatika-baliabideak erabiltzea, jarduerak egiteko eta matematika-edukiak ulertzeko.
- Kalkulagailua eta informatika-baliabideak erabiltzea, informazioa estatistikoki tratatzeko.

Jarrerak

- Kalkuluak, emaitzak, neurketak, eraikuntza geometrikoak, grafikoak, taulak eta ebazpen-prozesuak egiteko interesa izatea, eta horiek guztiak txukun, ordenatuta, argi eta zehatz aurkezteko interesa izatea.
- Azalpenak, esperientziak, ebazpideak eta emaitzak arrazoitzea, horiei tinko eustea, horiei buruz hausnartzea eta beste ikaskideekin hitz egitea beharrezkoa dela aintzat hartzea, problemak ebazteak berez dituen zailtasunei (baita erroreei ere) aurre egiteko.
- Parte-hartze aktiboa eta arduratsua izatea taldeko lanak egitean, eta erakustea ikasitako edukiak aplikatzea beharrezkoa duten problemak ebaztean bere kabuz aritzeko gai dela.
- Nork bere ahalmenean konfiantza duela eta autonomoa dela erakustea, edukiekin zerikusia duten erroreei, erronkei eta matematika-lanei aurre egiteko.

Bigarren gaia.
Problemen ebazpena

1. Problemen ebazpen orokorra

1.1. PROBLEMEN EBAZPEN OROKORRA

«Eskuarki onartzen da problemen ebazpenaren helburua pentsamenduaren eta arrazoibide logikoaren garapena dela; baina esanguratsua da, egon badagoela, eskola-umeen kopuru altu bat, zeinak emandako jarduera egiteko gai diren, baina ez dute erakusten proposatutako helburuarekin bat datorren garapena. Esperientzia hauetatik bi gauza deduzitu daitezke: problemen ebazpenak ez du ikaslearengan pentsamenduaren eta arrazoibide logikoaren garapena halabehartzen, edo ebazten direnak ez dira benetako problemak» (Fernández Bravo, 2008: 12).

Aipamen horrek balio du, zer den problema bat eta zer ez den galderari erantzuteko. Liburu berean, pixka bat aurrerago, definizio xume eta erabatekoa dugu: «Problema bat egoera bat da, halako moduan non aurkezten denean ez dakigun ebazten». Argudio berari jarraituz, definizio horretan, garrantzitsuena izango litzateke ikaslearen eta problemaren artean ezarritako erlazioa; egoera problematikoa, den bezalakoa, ikaslearengan azalduko da: sei urteko umearentzat problema dena agian ez da hamabikoarentzat edo nagusi batentzat problema izango.

Ordea, planteatutako egoera baten ebazpenerako bidea ezagutzen bada —lehen ikasitako tresnak erabiliz ebazten delako—, ariketa baten aurrean egongo gara. Problema bat ebaztea, algoritmo bat egitea baino gehiago da.

Ariketen ezaugarriak	Problemen ezaugarriak
Argi eta garbi ikusten da zer egin behar den	Erronka bat dira
Helburua algoritmoen aplikazio mekanikoa da	Helburua da ditugun ezagupenetan eta esperientzietan sakontzea, hortik erreskatatzeko baliagarriak direnak itxarondako soluziora heltzeko
Ebazpenak denbora erlatiboki laburra eskatzen du	Ebazpenerako denbora gehiago eskatzen dute
Ez da ariketaren eta ariketa ebazten duenaren arteko lotura berezirik sortzen	Ebazpenari ekiten diona emozionalki inplikatzen da. Hasierako blokeoak, egoerak nahastu egiten zaituelako, soluzioa aurkitzeko nahitasunari eta pertseberantziari bidea egingo die eta, azkenez, —behin soluzioa lortuz gero—, poztasunari.
Oro har soluzio bakarra dute	Soluzio bat edo bat baino gehiago eduki dezakete eta soluziobideak askotarikoak izan daitezke
Testuliburuetan oso ugariak izaten dira	Testuliburuetan urriak izaten dira

Problemen ebazpenak duen garrantziaz ohartzeko bi aipamen baino ez ditugu egingo:

– Lehenengoa:

> Problemak planteatzeko eta ebazteko gaitasuna dago jakintza zientifiko ororen oinarrian; gizabanakoarentzat erronka bat izaten da. Matematika-jarduera nagusia problemak ebaztea da —edozein matematikari bat etorriko litzateke adierazpen horrekin—, nahiz eta zerikusi gutxi duten problemaren berezko nozioak eta eskola-problemen azpian datzanak (Chamorro, 2003: 274-275).

– Bigarrena: Ez dugu hemen idatziko, baino kontsulta-gai dago, hurrengo web helbidean: <http://divulgamat.ehu.es/weborriak/RetosMatematicos/Problemas/Ficheros/importancia.pdf>.

1.2. PROBLEMA BATEN EBAZPENERAKO FASEAK ETA ESTRATEGIAK

1.2.1. Faseak

Problema baten ebazpenean ohikoa da bost fase desberdintzea:

- Problema ulertu
- Problema ebazteko plana garatu
- Lortutako emaitzaz hausnarketa egin
- Soluzioa idatzi
- Komunikazioa

1.2.1.1. Problema ulertu

Problema baten enuntziatuaren irakurketak garrantzi handia du eta, beraz, arretaz irakurri behar; eta problemari buruz hausnartu behar da, enuntziatuan agertzen den egoeraren irudikapenak eginez, zehatz-mehatz jakin, zer eskatzen den eta zer baldintza ematen diren.

Ulermenak irudikapenaren aldaketa dakar. Ulermenaren bidez, ikaslea, problemaren irudikapen desegoki eta osatugabe batetik, beste irudikapen osatu eta egokira igarotzen da.

Problema baten enuntziatua matematika-idatzi bat da, kode bereziak erabiltzen dituena eta kode horiek deszifratzeko entrenamendua behar da. Izan ere, inplizituki onartzen da, enuntziatuak ez dituela problemaren alde guztiak agerian utzi behar; alde horiek dira problemaren xedea edo egin beharreko ataza. Beraz, problemen tradiziozko idazkera hori oztopo da problema ebazterakoan, eta horrela ezinezko bihurtzen du ikasleak enuntziatuaren datuak zuzenean erabiltzea, problemaren baitako datuak deskodetu egin behar dira eta bere irudikapenean integratu.

Adib.: Ness lakuko munstroa

Ness lakuko munstroaren luzera 20 m eta bere luzeraren erdia da, baina ez da 30 m. Zenbat metro luze da? (Stacey eta Groves, 1999: 57).

1.2.1.2. Problema ebazteko plana garatu

Geroxeago, problemen ebazpenerako dauden estrategia batzuk aipatuko dira, jakina, aukera guztiak agortu gabe eta norberaren ekimenerako tokia utziz. Estrategia horiek funtsezkoak izaten dira problemaren ebazpena lortzeko eta, beraz, planaren garapena horien erabilera egokian datza.

1.2.1.3. Lortutako emaitzaz hausnarketa egin

Soluzioa zentzuduna ote den eta probleman planteaturikoari erantzuten ote dion egiaztatu behar da. Era berean, arreta ezarri behar da jarraitutako prozesuan: prozesu horretatik ikas daiteke eta baliotsua izan daiteke beste problemetarako.

1.2.1.4. Soluzioa idatzi

Ebazpen-prozesu osoa agerian jarri behar da, prozesua bera argi eta era ordenatuan idatziz, horrela beste edozein pertsonak ulertuko duelakoan.

1.2.1.4. Komunikazioa

Fase honen helburua da prozesu osoaren kontrastea egitea. Ikasleek eduki dituzten ideiak, bide okerrak, erabilitako estrategiak, egindako eragiketak… elkarri kontatzen dizkiote horrela elkarlana, ikerketarako grina, sormen- eta elkarrizketa-gaitasunak, autonomia eta gozamena bultzatuz. Komunikazioa izan daiteke idatzia nola ahozkoa eta horretan matematikako hizkuntza progresiboki erabiliko da.

1.2.2. Estrategiak

Problemak ebazteko eredu asko daude, batzuk matematikoagoak dira eta beste batzuk psikologikoagoak; lehenengoetarikoen artean ditugu Polyak eta Schoenfeld-ek proposatutakoak, eta bigarrengoen artean, IDEAL metodoa, Bransford eta Steinen-ena edo De la Granderie-ren kudeaketa mentaleko proposamena. Halaber, ebazpen-eredu asko daude, Mason, Burton eta Stacey-ren eredua, edo Lehen Hezkuntzarako Fernández Bravo-rena.

Eredu eta metodo horietan guztietan komunak diren estrategiak funtsezkoak ditugu. *Estrategia bat da, azken finean, balizko bide bat problema ebazteko;* hori bai, estrategiak emankorrak izan ohi dira, problema askoren ebazpenean baliagarriak direlako.

Estrategien bidezko problemen ebazpenak albo-pentsamendua (pentsamendu dibergentea) garatzen du, pentsamendu sortzailea sustatzen du eta oroimenari etekin handiagoa ateratzen laguntzen du.

Hauexek ditugu problemen ebazpenerako estrategia batzuk:

- *Informazioa ondo antolatu. Irudikapen grafikoa edo sinbolikoa egin (eskema, irudia, taula edo diagrama).*

Problemen ebazpenean, antolaketa garrantzitsua da eta, batzuetan, funtsezkoa emaitza on batera heltzeko, eta, sarritan, ebazpen egokiaren gakoa izaten da.

Adib.: «Zeure poltsikoan ondoko bost txanponak dituzu: 10 zm., 20 zm., 50 zm., 1 € eta 2 €. Zenbat diru kopuru desberdin eratu daitezke?».

Laguntza: Egin zuhaitz-diagrama bat. Txanpon bakoitza egongo da, ala ez, zuhaitzaren adar bakoitzean.

- *Gerta daitezkeen kasu guztiak aztertu. Kontaketa egin.*

Adib.: «Xake-taulan 204 karratu omen daude. Egia al da?».

- *Idazkera egokia aukeratu. Kodifikatu.*

Adib.: «Baditugu hiru kutxa berdin eta ezker eskuko 5 eskularru, denak berdinak. Zenbat modutara banatu daitezke hiru kutxa horietan?».

Laguntza: eskularruak A hizkiarekin irudikatuz eta kutxak B hizkiarekin, BAABABAA sekuentziak esaten digu lehenengo kutxan bi eskularru ditugula eta bigarrenean eskularru bat eta hirugarrenean bi.

- *Kasu konkretuak kontuan hartu. Errazenetik hasi. Problema samurrago bat ebatzi. Problema errazagoetan deskonposatu.*

Adib.: «Teniseko 16 jokalari zozketa batean sartzen dira txapelketa baten lehenengo faseko bikoteak egiteko. Bikote horiek, zenbat modutara antolatu daitezke?».

Laguntza: bi jokalarirekin aukera bakarra dago. 4 jokalarirekin:

12 13 14
23 24
34
6 jokalarirekin 15 modutan egin daiteke.

• *Problemaren erregulartasunak erabili (indukzioa).*

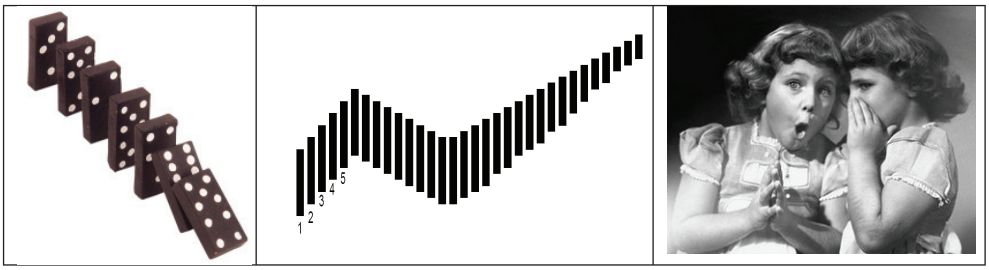
Indukzioa eta dedukzioa zientzian, eta matematikan ere, erabilitako bi metodo ahaltsu dira.

Indukzioa: Biz P(n) baieztapen bat n zenbaki arrunt bati lotua.

Adibidez: Domino fitxen ilara batean: P(n) = «n. fitxa erortzen da»

P(1) = «1. fitxa erortzen da»
P(2) = «2. fitxa erortzen da»
P(3) = «3. fitxa erortzen da»
……
P(k) = «k. fitxa erortzen da»
……

Jende ilara batean: P(n) = «n. lagunak sekretu jakin bat daki»
P(1) = «1. lagunak sekretua daki»
P(2) = «2. lagunak sekretua daki»
P(3) = «3. lagunak sekretua daki»
……
P(k) = «k. lagunak sekretua daki»
……



Adib.: «Botilako jenioa. Itsasoan noizean behin aurkitzen diren botila horietako batean geure apeta guztiak asetuko dituen jenioa dago. Botila hori erosteko aukera daukagu, baldintza bakar bat beteaz: *prezioa guk jarriko dugu baina behin botila erabilita saldu behar da, eta bigarren prezioa lehenengoa baino txikiagoa izango da.* Zenbat ordainduko genuke botila horren truke?».

Izan ere, ezin da zentimo bat ordaindu, gutxiagogatik ezin izango baikenuke saldu.

Ezta bi zentimo ere. Prezio horretan erosiko bagenu, ez genuke inor aurkituko zentimo batean botila erosteko prest, prezio horretan ezin izango bailuke saldu.

Arrazoibide berari jarraituz, 3 zentimoan ere ezin izango genuke erosi, ezta 4, 5 edo 6 zentimoan… Horrela matematikako indukzioak botilako jenioa ez erostera garamatza. Haatik, nik neuk egingo bainuke, ziur 1.000 euroan botila erosteko prest egongo zinatekeela. Noiz uzten dio sinesgarri izateari botila erostearen aurkako argudioak?

• *Deduzitu eta ondorioak atera (dedukzioa).*

Adib.: «Bi zenbaki arrunt ditugu: lehena 2 baino handiagoa eta bigarrena 3 baino handiagoa. Lehenaren bikoitza gehi bigarrenaren hirukoitza eginez, beste zenbaki bat lortuko dugu. Zein da azken zenbaki hori baino txikiagoa den zenbakirik handiena?».

Lehen zenbakia	3	3	4	4
Bigarren zenbakia	4	5	4	5
Hirugarren zenbakia	2x3+3x4=18	2x3+3x5=21	2x4+3x4=20	2x4+3x5=23

Hemendik hirugarren zenbaki hori baino txikiagoa den zenbakirik handiena 17 dela deduzitu daiteke.

Beste era batera: lehenengo zenbakia $x \geq 3$, bigarren zenbakia $y \geq 4$, beraz, hirugarren zenbakia $z=2x+3y \geq 2 \cdot 3+3 \cdot 4=18$; beraz, hori baino txikiagoa den zenbakirik handiena 17 da.

Zein da erantzuna, zenbakiak edozein izanda?

• *Haztamuka (hainbestean) jo (saio-erroreak).*

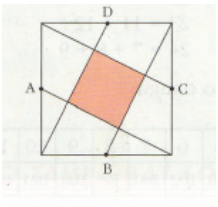
Adib.: «Aurkitu ezazu zenbakia zeinak 6rekin biderkatzean eta 7 gehituz 55 ematen duen».

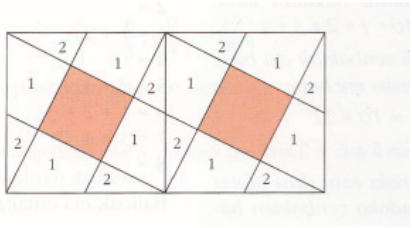
• *Problema bat atzetik aurrera egin.*

Adib.: «Hiru pertsona txanponekin jolasten ari dira. Txanpon bana jaurtikitzen dute eta bik emaitza bera lortzen badute eta hirugarrenak ez, azken horrek beste biei une horretan duten beste diru eman behar die. Hiru jokaldiren ondoren egoera hauxe da: bakoitzak behin galdu du eta 240na euro dute. Zenbat zituen bakoitzak hasieran?».

• *Simetriari probetxua atera.*

Adib.: «Kalkulatu beheko irudian agertzen den zati ilunduaren azalera zein den, karratu handiaren aldea l = 9 cm dela jakinda. A, B, C, eta D karratuaren aldeen erdiguneak dira».





• *Absurdora eraman.*

Zerbaiten bila bagabiltza, haren egiazkotasuna frogatzeko, batzuetan errazagoa da ez dela egia suposatzea eta aieru horretatik zerbait absurdo ondorioztatzea. Horrela kontraesan batera ailegatzen da.

Adib.: «Froga ezazu multzo hutsa ø edozein beste X multzoren azpimultzoa dela».

Horrela ez balitz, ø multzoaren elementu bat existitu beharko litzateke, X multzokoa ez dena. Baina ø multzoan ez dago inolako elementurik, beraz, egin dugun aierua absurdoa da eta ø, X multzoaren partea da.

Adib.: «Frogatu n^2 bikoitia bada, orduan n bikoitia dela».

• *Usategiaren printzipioa.*

Hurrengo ideian oinarritzen da: «20 uso 19 zulotan sartzen badira, halabeharrez egongo da zuloren batean uso bat baino gehiago».

Adib.: «Zenbat aldiz jaurti behar da dado bat, gutxienez birritan, puntuazio berdina lortzeko?».

Kasu posibleak (zuloak) 6 dira (1, 2, 3, 4, 5, 6) eta jaurti beharreko gutxieneko kopurua horrenbestez izango da: 7.

• *Jolasak eta problema logikoak.*

Adib.: «Artzain bat, aza handi batekin, ardi handi batekin eta otso handi batekin, ibai batera ailegatzen da eta hau zeharkatzeko txalupa ñimiño bat baino ez dago non bera eta bere gauzetako bakar bat baino ez diren kabitzen. Otsoa eta ardia bakarrik utzita, otsoak ardia jango luke. Ardia eta aza utzirik, ardiak aza jango luke. Hori bai otsoa ez da landare-jalea. Gauza guztiak eraman nahi ditu ibaiaren beste aldera. Nola lortuko du?».

• *Egoera irekiak.*

Adib.: «Zenbat zenbaki daude 1.000 baino txikiago beren zifren batura 7 izanik?».

Dena dela, estrategiak ezagutzeko beharra dagoen arren, egon badaude aipatutakoak baino gehiago eta problemetan ez dira modu gardenean azaltzen. Horrek esan nahi du problema bat ebazterakoan estrategia-bide bat baino gehiago egon daitekeela edo, batzuetan, problema bat ebazteko anitz estrategia batera erabili behar direla. Halaber, problemak ez dira aurkezten taldekaturik beren ebazpenerako erabilgarri diren balizko estrategien arabera, estrategia erdiestea problemaren ulermenaren eta ebazpidearen parte delako.

1.3. PROPOSATUTAKO JARDUERAK

1. «Artzain batek bere larrean 5 m-ko aldea duen hexagono erregularreko tankera duen itxitura bat egiten du. Artzainak, egunero, ardia lotzen du itxituraren erpin desberdin batean, 2,5 m luze den soka batez, eta 7. egunean eta soka berarekin, zentroan lotzen du. Ardiak, egunero, bere irismenean dagoen belar guztia jaten du. Zer eskatzen da: egunero zenbat larre-azalera jaten du?; zein izango da, 7 egunak igaro ostean, jan gabe geldituko den eremuaren azalera?» *(Informazioa ondo antolatu. Irudikapen grafikoa edo sinbolikoa egin. Eskema, irudia, taula edo diagrama)*.
2. «Kartoizko bi fitxa ditugu, bakoitzaren aurpegian zenbaki bana idatzi dugularik. Airera jaurtiz eta bistan gelditzen diren zenbakiak batuz, hurrengo emaitzak lortu daitezke: 36, 41, 50, 55. Jaurtiketa bat egiten da eta bistan gelditutako zenbakiak dira 25 eta 30. Zeintzuk dira ezkutaturik gelditutako zenbaki biak?» *(Gerta daitezkeen kasu guztiak aztertu. Kontaketa egin)*.
3. «Patrika batean baditugu 5, 20 eta 50 zentimoko txanponak. Denetara 12 txanpon eta guztizko dirua 2,85 €. Mota bakoitzeko zenbat txanpon dago?» *(Haztamuka jo. Saio-erroreak)*.
4. «Zenbaki bat karratura jasoz eta emaitza hori zenbakiarekin batuz 132 lortzen da. Zein da zenbakia?» (*Haztamuka jo. Saio-erroreak)*.
5. Ondoko ekuazioaren bidez ebazten den problemaren bat asmatu. Problema horrek zentzua eduki behar du, testuinguru batean kokaturik eta ikaslearengandik hurbila izan behar da. Aska ezazu ekuazioa» *(Problema bat atzetik aurrera egin)*.

$$\frac{\frac{x-1}{2}-1}{3}=1$$

6. «Lau gizonezkok, haietako bat hilketa baten egile, ertzainen galdeketari erantzunez ondoko baieztapenak egiten dituzte:
   - Arturok: Davidek egin zuen.
   - Davidek: Antoniok egin zuen.
   - Gustavok: Nik ez nuen egin.
   - Antoniok: Davidek gezurra esan zuen ni egilea nintzela esatean.

   Baieztapen horietatik bat bakarrik egia balitz, nor izango litzateke erruduna? Eta bat bakarrik faltsua balitz?» *(Jolasak eta problema logikoak)*.
7. Zenbakidun fitxa batzuk ditugu, 1etik 999ra zenbakituta. Bi kaxatan banatu nahi ditugu, baina ez edonola, baizik eta kaxa bakoitzean dauden fitxa guztien batura berdina izanda. Egin daiteke?
8. Froga ezazu ezinezkoa dela zenbakiak idaztea, hamar digituetako bakoitza behin erabiliz, halako moduan non zenbaki horien batura 100 delarik *(Absurdora eraman)*.

2. Eskola-problemak

Ikasleei galdetuta ea problema bat zer den, honako erantzunak aurkituko ditugu:

– Eragiketen bidez ebazten dena.

– Zenbakiak eta galderak dituzten esaldiak asmatzeko zenbaki bat.

– Zerbait zaila ebatzi beharrekoa eta pentsatzen laguntzen duena.

Eskola-problemek bi ezaugarri garrantzitsu dituzte: *enuntziatua* eta ebazpenean sartzen den *matematikako egitura*. Enuntziatuak egoera bat deskribatzen du, eta agerikoa da ulermenerako duen garrantzia eta ebazpeneko egitura matematikoaren arabera problema mota batekoa edo bestekoa izango da. Baina eskola-problema edozein dela, kontuan hartu behar da adin horretako haurrek, problemen ebazpenerako ez dituztela soilik gaitasun kognitiboak mobilizatu behar, baizik eta motibazioa eta osagai afektiboak ere.

2.1. PROTOKOLOA

Egon badaude problemak ebazteko eta aurkezteko hainbat protokolo, antzekoak dira eta helburua dute ikasleak gauzak modu sistematiko batean egin ditzala. Guk bi aurkeztuko ditugu, biak erabilerrazak eta oso ezagunak.

Lehenengoa. Alde batetik aurkezten dira problemaren datuak, beste aldetik egin beharreko eragiketa adierazten da eta ondoan honi dagokion kalkulua egiten da, eta ondoren erantzuna idazten da. Halako moduan:

Datuak:	
Adierazpena	**Kalkulua**
Erantzuna:	

Bigarrena. Eskola-problema baten ebazpenean hurrengo hiru urratsak emango dira:

– Eskema.

– Planteamendua – Antolaketa – Eragiketak.

– Emaitzaren egiaztapena.

Eskema	Planteamendua	Emaitzaren egiaztapena
– Datu ezagunak – Zer eskatzen dute? – Problema ulertarazten duen marrazki bat egin dezaket?	– Nola antolatzen ditut datuak? – Zeintzuk urrats eman ditzaket emaitzak lortzeko? – Kalkuluak – Emaitza azpimarratu	– Soluzioa osorik dago? – Soluzio gehiago egon daitezke? – Egindakoa eta lortutakoa zentzuzkoa da?

Protokoloak jarraituz hurrengo eskola-problemen adibidea ebatz ezazu:

Adib.: «Brotxen fabrikatzaile batek 24ko kutxetan ontziratzen ditu. 15 kutxako mandatua egin diote eta brotxa baten prezioa 7 € bada, mandatua zenbat kostako da?».

Ataza didaktikoa: Bi protokoloak konparatu eta bakoitzak indartzen dituen alderdiak azpimarratu.

2.2. PROBLEMA MOTAK LEHEN HEZKUNTZAN

2.2.1. Problema aritmetikoak

Problema aritmetiko batean egoera edo gertakari arrunt bat deskribatzen da, alderdi kuantitatiboak dituen enuntziatu baten bidez. Problemaren ebazpenerako inferentziak egin behar dira, matematika-hizkuntza erabiliz.

Matematikak, hizkuntza bat den heinean, problema baten datuak bere mintzairan itzuli behar ditu, enuntziatuak adierazten duen egoera batetik zenbaki-egitura batera igaroz.

- **Lehen mailakoak**

  ✓ *Batuketak eta kenketak*

Lehen mailakoak deiturik beren ebazpenean egitura batukorreko eragiketa bakarra behar dutelako. Hurrengo motatakoak izan daitezke:

– *Aldaketa*. Hasierako egoera batetik abiatuta eta aldaketa positibo edo negatiboa emanda amaierako egoera batera helduko da. Egoera dinamikoa da eta erreferentzia egiten diote unitate bakar bati.

Ezezaguna hiru tokitan ager daiteke:

hasierako egoera = x aldaketa = x amaierako egoera = x

Ezezaguna non agertzen den eta aldaketaren izaera gorakorraren edo beherakorraren arabera, sei problema mota sortzen dira.

1. adib.: «Apirilaren lehen egunean itsulapikoan neukan dirua zenbatu nuen eta 17 € ziren. Gaur hilaren azken eguna da eta 28 € ditut. Zenbat diru aurreztu dut hil honetan?».

Hasiera = 17 €, aldaketa = x, amaiera = 28. Egitura: A − H = x

2. adib.: «Mirenek 4 madari ditu eta Jonek beste 2 ematen dizkio. Zenbat madari ditu Mirenek orain?».

Hasiera = 4 madari, aldaketa = 2 madari, amaiera = x. Egitura: H + A = x

– *Konbinazioa.* Aldatzen ez diren bi elementuetako multzoak elkartzen dira. Bi neurri konbinatzen dira hirugarren bat lortzeko. Egoera estatikoa da.

$$M_1 \leftrightarrow M_2$$

Totalari buruz edo osagaietako bati buruz galdetu daiteke, horrela bi kategoria sortuz. Kategoria bakoitzean eragiketa desberdina da.

1. adib.: «Hiri bateko autobusak bi koloretakoak izan daitezke: horiak ala berdeak. Autobus-geltokian egondako denboran 7 autobus berde eta 6 hori ikusi ditugu igarotzen. Guztira zenbat autobus igaro dira?».

2. adib.: «Zinema-saio batera 153 pertsona joan ziren. Aretoak 185 eserleku baditu, horietako zenbat zeuden hutsik?».

– *Konparazioa*. Bi kantitateren konparazioa egiten da, «gehiago baino» edo «gutxiago baino» adierazpideen bidez. Konparazio motaren arabera (positiboa edo negatiboa) eta aldagaiaren kokapenaren arabera (kantitaterik handiena, txikiena edo konparazioa bera) sei azpimota sortzen dira. Egoera estatikoa da.

1. adib.: «Miren eta Xabier animalien bilduma egiten ari dira. Mirenek 187 kromo ditu, Xabierrek baino 46 gehiago. Zenbat kromo ditu Xabierrek?».

2. adib.: «Mirenek 4 madari ditu eta Jonek 7. Zenbat madari gutxiago ditu Mirenek Jonek baino?».

✓ *Biderketak eta zatiketak*

Batzeko eta kentzeko problemetan mota bakarreko elementuak agertzen dira. Biderketako problemetan bi elementu desberdin daude: poltsak eta puxtarriak, esne-botilak eta prezioa, apalak eta jostailuak…

– *Arrazoi-problemak*

Bi magnituderen arteko proportzionaltasun-problemak dira. Biderketa, zatiketa edo proportzio baten bidez edo hiruko erregelaren bidez ebazten dira. Lau zenbakik hartzen dute parte.

1. adib.: «Zazpi poltsa puxtarri ditugu eta poltsa bakoitzean 5 puxtarri daude. Zenbat puxtarri ditugu?».

2. adib.: «3 kiloko patata-poltsa batek 4,5 € balio du. Zenbat balioko dute 5 kilo patatak?».

3. adib.: «6 botila esne erosi nituen 4,80 € ordainduz. Zenbat balio du botila bakoitzak?».

4. adib.: «Urdaiazpiko oso batengatik 152 € ordaindu ditugu. Mota horretako urdaiazpikoaren prezioa 19 €/kilo bada, zenbat kilo pisatzen ditu erosi dugun urdaiazpikoak».

Problema horiek guztiak taulen bidez adieraz daitezke:

Poltsa kopurua	Puxtarri kopurua
7	?
1	5

Esne botilak	Prezioa
1	?
6	4,80

Patata kiloak	Prezioa
3	4,5
5	?

Urdaiazpiko kiloak	Prezioa
1	19
?	152

1. adibidea hartuta, bi modutara ebatzi daiteke:

– 5 puxtarri x 7 = 5 puxtarri + 5 puxtarri + 5 puxtarri + 5 puxtarri + 5 puxtarri + 5 puxtarri + 5 puxtarri = 35 puxtarri
– 7 poltsa x 5 puxtarri/poltsa = 35 puxtarri

Bi prozedura baliokideak dira, baina lehenengoan eragilea (poltsa kopurua=7) eskalarra da eta batukorra; bigarrenean, eragilea (5 puxtarri/poltsako) dimentsioduna da.

4. adibidea hartuta, ebazpenak sinpleena da ondoz ondoko kenketak egitea:

Urdaiazpiko kiloak	Prezio-hondarrak
1	152-19 = 133
2	133-19 = 114
3	114-19 = 95
4	95–19 = 76
5	76-19 = 57
6	57-19 = 38
7	38-19 = 19
8	19-19 = 0

– *n biderkagaia.* Arrazoi-problemen kasu berezia da. Konparazioak biderketa-koefiziente bat (arrazoia) erabiltzen du.

Adib.: «Zapata batzuek 72 € balio dute. Saskibaloiko baloi batek 8 aldiz gutxiago. Zenbat balio du baloiak».

– *Konbinazio-problemak (Biderkadura kartesiarra)*

Bi neurri-eremu ditugu eta konbinatzen dira beste bat osatzeko biderkadura kartesiarraren bidez.

Adib.: «Nire alkandorak eta prakak konbinatuz 24 modu desberdinetan jantzi naiteke. Baditut 4 praka. Zenbat alkandora ditut?

• **Bigarren mailakoak**

Problema mota hauetako ebazpenean eragiketa bat baino gehiago egin behar dira eta gainera eragiketak kontzeptuzko egitura desberdinetakoak izan daitezke (kenketak eta biderketak kasu)

1. adib.: «Emakume batek 300 € daramatza bere diru-zorroan. Arropa-denda batean sartzen da eta hiru praka erosten ditu, bakoitza 72 euroan eta 2 alkandora, bakoitzak 15 euroan. Zenbat diru balio dute hiru prakek? Zenbat ordaindu du alkandorengatik? Zenbat diru gastatzen du dendan? Zenbat diru gelditu zaio dendatik irtetean».

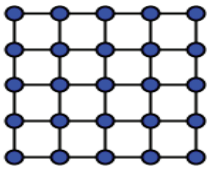
2. adib.: «Merkatari batek erosita zeuzkan 300 botila olio saldu zituen. Botila bakoitzeko 1,10 € ordaindu zituen. Salmentan 140 € irabazi zituen. Zenbatean saldu zuen botila bakoitza».

3. adib.: «Txahalki solomoaren ¾ kiloko pieza batek 21 € balio du. Okela horren bi kilorengatik zenbat ordainduko dugu».

2.2.2. Problema geometrikoak

Geometria estatikoa erabiltzeak eragozpen didaktikoak sortzen ditu eta gaur egun geometria dinamikoa inposatzen da. Dela materialekin, dela Geogebrarekin, irudiek mugimendua dute eta horrela irudien propietateak egiaztatzea eta orokortzea errazagoa da.

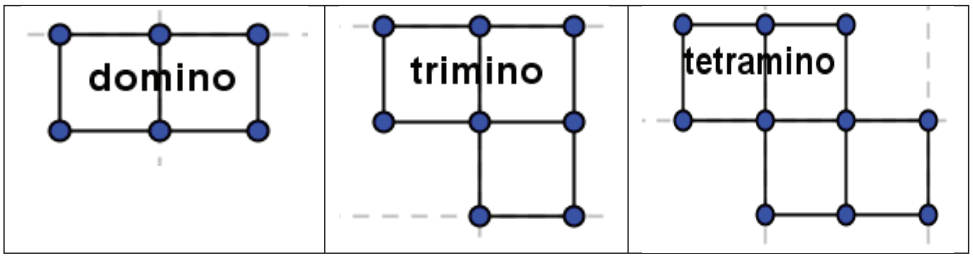
– **Geoplanoa:** Adib. 5 x 5 neurriko geoplano honetan ahalik eta karratu gehien eraiki. Geogebra programa erabili.



Ondoko helbidean «Geoplano Adimentsua» deituriko jarduera duzu: <http://ntic.educacion.es/w3/eos/MaterialesEducativos/mem2009/problematic/menuppal.html>.

- Poliminoak

Oinarrizko irakaskuntzan geometriak beti eduki du izaera deduktiboa. Baina geometria dinamikoari esker, eta materialei eta Geogebrari esker, geometriaren eite induktiboa indar daiteke. Poliminoak karratuetatik abiatuta eraikitzen dira, karratu bikoei, domino deritze, hiru karratukoei trimino, lau karratukoei, tetramino… Poliminoak, 1954an sortu zituen Golomb jaunak, «Chester Board and Polyominoes» artikulua idatzi zuenean.



Eraiki itzazu trimino guztiak. Horietatik abiatuta eta oinarrizko beste osagai bat gehituz, eraiki itzazu tetramino guztiak. Azken horietatik abiatuta, eraiki itzazu pentamino guztiak (12 dira). Hexaminoak eraikitzea dezente zailagoa da denetara 35 direlako.

Mota honetako problemekin geometriaren izaera induktiboa lantzeaz gain, problema irekia eta dibergentea planteatzen zaie ikasleei. Irudien familia bat manipulatu daiteke, mugitu, biratu, islatu eta irudiak erabili lurzorua harlauzatzeko. Irudiak konposatuaz buruhausteak ere egin daitezke.

Pentaminoekin jarduera asko egin badaitezke ere, hurrengo helbideak horietako batzuk eskaintzen ditu:

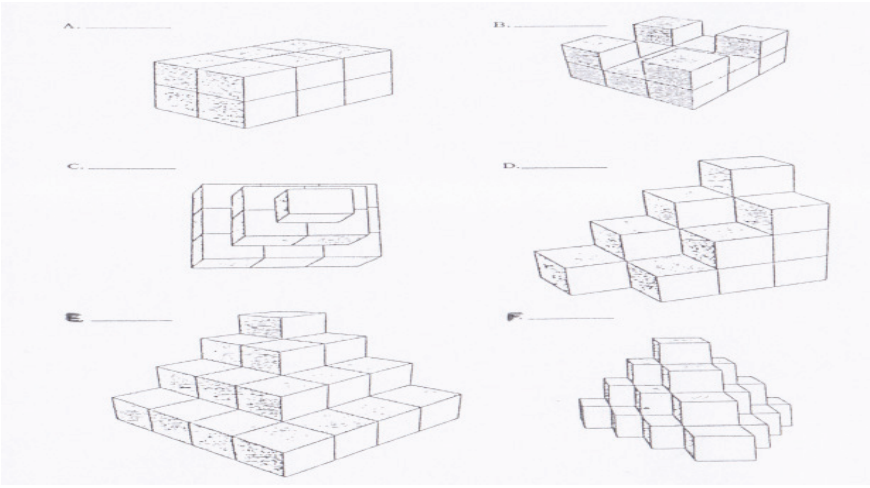
<http://ntic.educacion.es/w3/eos/MaterialesEducativos/mem2009/problematic/menuppal.html>.

2.2.3. Arrazoibide logikoaren problemak

Adib.: «Amparo eta Koldo, Olgaren aitona-amonak dira amaren partetik. Mario, Enriqueren aita, Alvaroren anaia da eta Soniaren senarra. Diego eta Markel, Soniaren osabak dira. Miren eta Andoni, Soniaren ama-aitaginarrebak dira. Datu horiekin guztiekin familiaren zuhaitz genealogikoa irudikatu».

2.2.4. Zenbaketa sistematikoaren problemak

Adib.: «Zenbat bloke daude eraikin bakoitzean? Azaldu ezazu zure ebazpidea».



2.3. ESKOLA-PROBLEMEN ZAILTASUNA

Problema baten zailtasuna aldagai askoren menpe dago eta kontzeptu erlatiboa da. Baina ikerketek frogatu dutenez, problema bat zailago bihurtzen duten ezaugarri batzuk daude.

Lehenengo zailtasuna izan daiteke *problema ez ulertzea*, planteatutako egoera (ez da hurbila) edo erabilitako hizkuntza, ikasleek ezagutzen ez dituztelako.

Adibidez, ikerketek frogatu dutenez, *konbinaziozko* problemak errazagoak dira *aldaketazkoak* eta *konparaziozkoak* baino.

Era berean **«a + b = ?»** egitura duten problemak errazagoak dira **«? + b = c»** egitura duten problemak baino.

Ataza didaktikoa: Zeintzuk izan daitezke baieztapen horiek berresten dituzten zioak?

Problema baten zailtasuna baldintzatzen duten beste aldagai batzuk ondokoak ditugu:

- Problemaren tamaina
- Gramatikako konplexutasuna
- Datuak eta haien kokapena enuntziatuan
- Eragiketa kopurua

Ikusi ditzagun horietako garrantzitsuenak.

• *Problemaren tamaina*

«Enuntziatuaren esaldi kopuruaren eta bere tamainaren araberako zailtasun gorakorra».

Hots, hiru esaldi dituen enuntziatua errazagoa da bi dituena baino eta azken hori errazagoa da esaldi bakar bat duena baino.

Hiru esaldi labur		Bi esaldi labur		Esaldi bat	
Erraza	→		→	→	Zaila

1. adib.: «Hirurogeita hamar ume ilaran jartzen dira. Ilara bakoitzean 7 ume daude. Zenbat ilara daude?».

2. adib.: «Hirurogeita hamar ume zazpinako ilaratan esertzen dira. Zenbat ilara daude?».

3. adib.: «Zenbat ilara daude hirurogeita hamar ume zazpinako ilaratan jarriz gero?».

• *Gramatikako konplexutasuna*

«Enuntziatuaren gako-hitz (izenondoak eta aditzak, eragile semantikoak) kopuruaren eta motaren araberako zailtasuna».

Matematikako gako-hitzak agertzen badira, ikasleak eragiketa batekin lotzen ditu eta horrela problema errazago bihurtzen da.

Matematikako terminoak: gehitu, bildu, kendu, gutxitu, errepikatu, zatitu		Eguneroko mintzaira (ez matematikako terminologiakoa): bete, sartu, hartu, erosi, galdu, merkatu		
Erraza	→	→	→	Zaila

1. adib.: «Ekainek 20 puxtarri zituen. 7 kendu dizkiote. Zenbat ditu?».

2. adib.: «Ekainek 20 puxtarri zituen. 7 galdu ditu. Orain zenbat ditu?».

3. adib.: «Liburu-saltzaile batek 48 liburu jaso ditu. Berdinak diren zazpi ataletan banandu nahi ditu. Zenbat liburu jarriko ditu apal bakoitzean?».

4. adib.: «Liburu-saltzaile batek 48 liburu erosi ditu. Apaletan jarri nahi ditu, apal guztietan liburu kopuru bera egonik. Zenbat liburu jarriko ditu apal bakoitzean?».

• *Datuen aurkezte-hurrenkera*

«Datuak eragiketetan erabiltzen diren hurrenkera berean agertu ala ez, horren araberako zailtasun gorakorra».

Eragiketetan duten hurrenkera berean			Hurrenkera desberdinean	
Erraza	→	→	→	Zaila

1. adib.: «Ane zinemara joan da 30 eurorekin eta orain 18 euro ditu, zenbat diru gastatu du?».

2. adib.: «Ane orain baditu 18 € eta lehen bazituen 30 €. Zenbat gastatu du?».

Hots, ikasleek zailtasun gutxiago dute, enuntziatuaren egoerak denboran ordenatuta daudenean.

Zailtasun hauetatik guztietatik *errore batzuk* eratortzen dira, eta ikasleek egiten dituzten usuenak hauexek ditugu:

– Emaitza bat lortzea, edozein eragiketa eginda, nahiz eta absurdoa izan.
– Eragiketak eragile semantikoen (gako-hitzak) aplikazio automatikoaren arabera egitea.
– Datu guztiak erabiltzea, beharrezkoak izan gabe.
– Klasean ikasitako azken prozedura edo eragiketa erabiltzea.

Aipa dezagun Bernardo Atxagaren *Obabakoak* eleberrian eragiketei pertsonaia batek ematen dien zentzu bitxia: «Harrisen arabera batuketak amaiera zoriontsua duten ipuinen sorburu dira. Haatik, kenketek eragindakoak, amaiera tragikoak izaten ohi dituzte».

Ikerketa asko daude errore horiek arruntak direla berresten dutenak; adibidez, Suitzan Lehen Hezkuntzako 101 haurrekin egindako ikerketa batean, honako problema hau jarri zieten:

«Artzain batek 125 ardi eta 5 txakur ditu. Zein da artzainaren adina?».

Ikasle bakar batek esan zuen problema ebatzi ezina dela, gainontzekoek zenbakizko emaitza bat eman zuten. Horien artean egon zen bat, datuen arteko oinarrizko eragiketa posible guztiak egin zituena eta ilogikoenak baztertuz emaitza aukeratu zuen. Holako moduan:

125 x 5 = 625, ez
125 + 5 = 130, ez
125 – 5 = 120, ez
125 : 5 = 25, hau bai

Badirudi ikasleek sinesmen bat dutela, hots, testuliburuetan dauden eskola-problemak kalkulu-eragiketa baten bidez askatu behar direla. Edota zenbakirik gabeko erantzunak txarto daudela.

Problema horren tankerako asko daude baino aurrekari ospetsua da, Flaubert-ek bere arreba Caroline-ri jarri ziona.

> Geometria eta trigonometria ikasten duzunez, problema bat proposatuko dizut: Itsasontzi bat ozeanotik doa nabigatzen. Bostonetik artilezko kargarekin abiatu zen. Bere kargaren pisua 200 tona dira. Bere helmuga Le Havre da. Masta nagusia puskatzen da; kabinako marinela zubian dago; itsasontzian 12 bidaiari daude. Haizeak EIE norabidean jotzen du. Erlojuak hirurak eta laurden ditu. Maiatzean gaude. Zein da kapitainaren adina (Puig eta Cerdán,1988: 39 sig. [511 PUI]).

Problema hau «kapitainaren adina» izenburuarekin ezagun da, eta soberako datu pilo bat (erredundanteak) testuinguru batean edukitzeaz gain, beraietako bakar batekin ere erlaziorik ez duen galdera egiten du, hartara problema ezin ebatzizkoa bihurtuz.

«Matematikaren esentzia arrazoibideetan dago eta ez zenbakietan».

2.4. ENUNTZIATUEN LANKETA

Atal honetan eskola-problemak ikasterakoan dauden zenbait teknika agerraraziko ditugu. Teknika horien bidez problemak ebaztea ez da mekanismo automatikoa, ez da mugatzen prozedurak erabiltzera, baizik eta ikasleari pentsarazten zaio, dela enuntziatua ondo ulertzeko eragile aktibo bihurtzen delako, dela sormena erabili duelako osatu gabeko egoerak birplanteatzeko edo dela testuinguruan jarritako problemak ulertu, irudikatu eta hausnartu egin behar dituelako. Halaber, tresna didaktikoak dira eta haien mailakatutako aplikazioaren bidez problemen ebazpenerako lagungarri.

2.4.1. Enuntziatuak landu

Enuntziatuak lantzean bilatzen duguna da ulermenean sakontzea. Hau ez da lortzen enuntziatuaren irakurketa hutsarekin, edota datuak edo galderak ateratzearekin. Horrek guztiak laguntzen du, baina hemen proposatzen dena, lan sistematikoa da, enuntziatuaren ulermen aktiboa eta sakona lortzeko. Horretarako, problema osatugabeak planteatuko dira eta osatzea izango da lana. Baina falta diren osagaiak era askotakoak izan daitezke. Falta daitezke datuak, edo galderak, edo enuntziatuaren ukapena egin behar da, edo baldintza batzuei dagokien enuntziatu osoa eraiki.

– *Zenbakirik gabeko egoera kualitatiboak*

Lehendabiziko egoerak dira, horietan ikaslea problema ireki baten aurrean jartzen da, eta hasieran zerbait falta zaiola iruditu arren, helburua da problemaren ulermen askotarikoak lantzea eta, kasua bada, problema osatzea.

Adib.: «Koaderno batek errotuladore batek baino gehiago balio du. Bi errotuladore erosteko adina diru baduzu, koaderno bat eros dezakezu».

Ataza: Zeintzuk dira interpretazio posible batzuk? noiz eman daiteke soluzio bat? problemaren aldaera bat egin.

– *Enuntziatuari dagozkion datuak jarri*

Alde batetik enuntziatua osatu gabe dago eta berridatzi behar da emandako datuak txertatuz, baina hau modu koherentean eginda eta, beraz, arrazoibidea erabiliz.

Adib.: «Koaderno eta errotuladore bana erosi ditut; errotuladore merkeagoa da. Zenbat diru itzuli didate? (Datuak: 7 €, 3 €, 4 €; zeuk ipini enuntziatuaren barruan)».

Ataza: Jarri beste adibide bat, beste testuinguru batetik aterata.

– *Galderak emanda enuntziatua eraiki*

Berriz ari gara enuntziatua berridatzi nahian, edo problema, neurri batean, atzetik aurrera eginez. Sormena, hizkuntza eta komunikazioak landu behar dira problema irekia delako.

Adib.: «Zenbat minutu gehiago itxaron zuen Anderrek Jaionek baino? Eta zenbat minutu gutxiago itxaron zuen Jaionek Irenek baino?».

Ataza: Gutxienez bi enuntziatu desberdin idatzi.

– *Enuntziatu batetik abiatuta galderak egin*

Hemen ere enuntziatua osatu gabe dago, galderak enuntziatuaren parte direlako. Atal honek aldaera asko eduki ditzake, galderak jartzeko unean bete beharreko baldintzak askotarikoak izan daitezkeelako.

Adib.: «Prezio bereko bi liburuk kalkulagailu batek baino 8 € gehiago balio dute. Bi liburuak eta kalkulagailua erosi ditut eta ordaintzeko 50 €-ko billetea erabili dut eta itzulketa 6 € izan da.

a) ? (emaitza: 44 €)
b) ? (emaitza: 26 €)
c) ? (emaitza: liburua)
d) ? (emaitza: Ez)

Ataza: Ezer egin aurretik aztertu proposatzen diren emaitzak eta lotu galdera motarekin eta eragiketekin. Galderak planteatu aurretik problema ebatzi duzu? Aurki itzazu atal honetako beste aldaera posible batzuk eta jarduera bana proposatu.

– *Enuntziatuan agerturiko adierazpideak juntagailu logikoen bidez lotu eta problema berreraiki*

Logikaren eragiketen bidez juntagailuak alda daitezke halako moduan non enuntziatuaren esanahia guztiz desberdina izango den. Horrek beste ebazpen zeharo diferente batera garamatza eta horrela ulermen sakon baterako beste urrats bat da.

Adib.: «Andreak Araitzek baino diru gehiago xahutu zuen. Araitzek Anek baino diru gehiago xahutu zuen. Zeinek xahutu zuen diru gehien».

Ataza: Berridatzi enuntziatua, enuntziatuaren ukapena eginez.

– *Enuntziatuaren ahozko adierazpena zaindu*

Problemak ebazteko azken fasea komunikazioa da. Komunikazioa izan daiteke bai idatzia bai ahozkoa. Problemaren soluzioa eta jarraitutako prozesua idaztean komunikazioaren lehenengo arloa lantzen da, baina matematikan, prozesuak, irudikapenak, blokeoak eta, azken finean, ebazpidean gertaturiko guztia ahoz adierazteak komunikazio-gaitasuna garatzeko laguntzen du. Horretarako oso aproposak dira geometriako problemak, irudiak deskribatu egin daitezkeelako, edo plano batean dortoka batek, puntu batetik beste batera joateko, egindako ibilbidearenak.

Ataza: «Norberak planteatu dezala egoera didaktiko bat non plano baten gainean eskema bat irudikatu behar den eta eskema horren barruan ibilbide bat marraztu. Ondoren taldekideei ahoz adierazi, agindu zehatzak emanez, zein den problema eta nola egin irudikapena. Konparatu besteek egindako irudia eta jatorrizkoa. Hemendik aztertu ahozko komunikazioan egondako akatsak, ea erabilitako aginduak argiak izan diren, eta igorle eta hartzailearen arteko distantziak eragindako zehaztapen-beharra».

2.4.2. Ebazpena eta enuntziatuaren arteko erlazioa landu

– *Ebazpen bati dagokion problema enuntziatu*

Ataza: «Honako ebazpen hau duen problema bat asmatzea: 3 x (16 - 4) : 4 = zaldi».

«Problema bat atzetik aurrera ebatzi» estrategiaren parekoa da. Testuingurua bilatu behar da, agian ez da beharrezkoa eragiketen ordena errespetatzea baina ezinbestekoa da ebazpena eta enuntziatua aldi berean eraikitzea. Askotan, ikasleek, eragiketen bihurketa hutsa eginez, enuntziatua eraikitzen dute eta hori dela-eta funtsezkoa izaten da ez eraikitzea zentzu bako ariketa huts bat.

– *Enuntziatuaren datuak aldatu baldintza batzuk bete daitezen*

Datuen garrantzia azpimarratzen da egoera hauen bidez; datuak aldatu baino lehen problemaren ebazpena egin behar da eta datuak aldatuta ebazpenaren eta datuen arteko erlazioa modu sakonagoan ulertuko da.

Ataza: «Larak baditu 25 € eta bere aitonak beste 12 € ematen dizkio. Larak kromotan 7 € gastatzen ditu. Zenbat diru edukiko du orain?». Alda itzazu enuntziatutik bi datu emaitza aldatu barik. Emaitza mantenduz, enuntziatuaren datu guztiak aldatu. Enuntziatuaren datu bakar bat alda liteke emaitza aldatu gabe.

– *Problema batzuen artetik, emandako ebazpen bati dagokion problema aurkitu*

Ataza: Honako problema hauetatik, zeinetan egin behar da 25 – 9 + 4 eragiketa, ebazpena lortzeko?

1. problema: Nire anai zaharrak 25 urte ditu eta nik bederatzi. Ni jaio nintzenean, nire etxean beste lau anai-arreba ziren. Zenbat urte dauzkagu guztion artean?

Proposa itzazu beste hiru problema eta berauetako bat ebazpenarekin bat datorrena. Kontrola itzazu problema bakoitzeko datuak, eta ebazpeneko eragiketak.

– *Ebazpenetik abiatuta enuntziatuan falta diren datuak osatu*

Beste aldaera bat da, enuntziatuaren eta ebazpenaren arteko erlazioa ulertzeko lagungarri gerta daitekeena. Komenigarria da ebazpeneko zenbakiak aldatzea ikusteko nola modu berean aldatzen diren enuntziatuaren datuak.

Ataza: «Urtzi litxarreriak erostera joan da. Bananak _____ko poltsatan datoz. _____poltsa erosi ditu baina horietako ____ hutsik zeuden. Zenbat banana ditu».

4– 1 = 3 3 x 6 = 18; 18 banana

Jar itzazu beste bi ebazpen posible eta horiei egokitu enuntziatua.

– *Emandako zenbait ebazpenaren artetik ebazpen zuzena aukeratu*

Ataza: Mazedonia egiteko errezeta, 4 lagunentzat:

- 6 madari
- 2 sagar
- kg erdi marrubi
- 3 muxika
- 1 banana

Mazedonia sei lagunentzat izango balitz, bakoitzetik zenbat erabili beharko litzateke?

1. ebazpena	2. ebazpena	3. ebazpena
6 + 6 = 12 madari 2 + 6 = 8 madari kg erdia seirentzako 3 kg 3 + 6 = 9 muxika 1 + 6 = 7 banana	6 x 3/2 = 9 madari 2 x 3/2 = 3 sagar 0,5 kg x 3/2 = 0,75 kg marrubi 3 x 3/2 = 4,5 muxika 1 x 3/2 = 1,5 banana	6 – 4 = 2 6 + 2 = 8 madari 2 + 2 = 4 sagar kg erdia x 2 = 1 kg marrubi 3 + 2 = 5 muxika 1 + 2 = 3 banana

Zein da ebazpen zuzena?

Ataza egiteko arrazoizko urrats batzuk egin daitezke, hala nola ebazpen bakoitzeko datuak kontrolatu eta zentzugabeko ebazpenak alboratu. Ebazpenen arteko konparazioa eginez, zentzurik gabeko datuak atzeman. Matematika-logikaren ikuspuntutik inkongruentziak seinalatu. Horrela saia zaitez ebazpen bakoitzaren azpian dagoen logika ulertzen, eta idatzi zeintzuk izan daitezkeen logika oker horiek erabiltzeko egon daitezkeen eredu didaktikoak.

– *Sormena landu*

Eskola-problemen ulermenerako hainbat egoera planteatu daitezkeenez, haien arteko aldaera gutxiko diferentziarekin, ia infinituraino luza genezake hemen proposatutako aukeren zerrenda. Baina egoera batzuk itxiagoak dira besteak baino, eta modu bakar batean ebatz daitezke, nahiz eta ebazpena lortzeko pentsamenduari eragin behar, eta atal honetan sormenari bidea ireki nahi diogu, enuntziatuak askotarikoak izan daitezen. Guk bat proposatzen dugu eta zuk beste hiru egoera ireki planteatu behar dituzu. Hona hemen gurea:

«Asma ezazu egoera bat, jakinik soluzioa 45 dela eta galdera honetatik abiatuta: zenbat puxtarri dituzte hiru lagunen artean».

2.4.3. Testuinguruan jarritako problemak

Ikaskuntza esanguratsua izan dadin, problemak ikaslearen egoera hurbiletatik, eguneroko bizitzako egoeretatik edota matematikaren aplikazioetatik atera behar dira. Hots, problemak ariketa hutsak ez izateaz gain, zentzua eduki behar dute ikaslearentzat. Ikasleak ikusi behar du problemaren praktikotasuna.

Adibidea. «Pertsona batek jogurtak erosi behar ditu. Astean zehar 14 jogurt jaten ditu. Supermerkatuan badaude bi eskaintza: 8naka jarritako jogurtak, zeinetatik gutxienez 5 kaxa eraman behar diren eta 4naka jarritako jogurtak zeinetatik ez dagoen eraman beharreko kopuru minimorik. Jogurtek berdin irauten dute. Lehenengoen 8ko kaxa bat 3 € eta erdi kostatzen da; bigarrengoen 4ko paketeak 2 euro eta 20 zentimo. Pertsona horrek ahalik eta diru gehien aurreztu eta ahalik eta denbora gehien egon nahi du supermerkatura joan gabe. Zer jogurt mota erosi beharko luke?».

Ataza didaktikoa: Testuingurua edo aurkezpen desberdinetan aurkeztea. Testuingurua alda daiteke, antzeko beste enuntziatu bat osatuz, ikaslearengandik hurbilago edo urrutiago egon daitekeena. Adibidez, jogurtak izan ordez plantea litezke farmazia bateko medikamentuak izatea edo paper-denda bati egindako eskaera bat. Aurkezpen formala alda daiteke, adibidez manipula daitekeen materiala sartuz (jogurtak eta kaxak), irudikapen ikonikoak eginez (jogurtak eta kaxak), irudikapen grafikoa eginez (diagrama bat) eta, azkenik, irudikapen sinbolikoaren bidez (matematikako mintzaira, sinboloak).

2.5. PROPOSATUTAKO JARDUERAK

2.5.1. Problema aritmetikoak

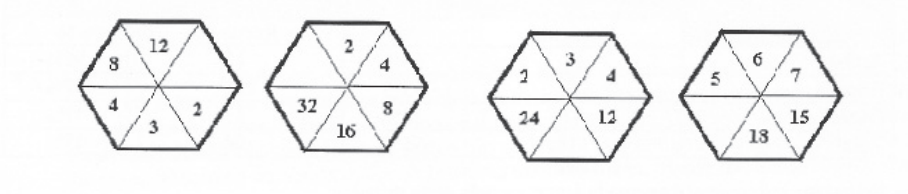
1. «Santurtziko antzerki-jardunaldietan, erositako bi sarrerako beste bat oparitzen dute». Eskaintza hori kontuan hartuz, ondoko taula bete ezazu:

Ordaindu	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Eraman										

Nola sailkatuko zenuke didaktikoki ariketa hau? Zein matematikako kontzeptu indartzen da ariketa honen bidez.

2. «Bi herritan ohitura da txapliguak jaurtitzea; lehenengoan 10 egunik behin jaurtitzen dira eta bigarrenean 12 egunik behin. Abuztuaren lehenean herri biotan txapliguak bota baziren, noiz gertatuko da berriz aldi berean txapliguak botatzea». Matematikako kontzeptu baten aplikazioa da. Zein da kontzeptu hori? Taula bat egitea aproposa litzateke?

3. Lehen Hezkuntzako ikasgela batean jarduera hau proposatzen da: *Idatzi hexagono bakoitzean falta den zenbakia.*
   - Burutu ezazu jarduera, zenbakiak nola aurkitu dituzun azalduz.
   - Zure ustez, zein da jarduera honen helburua?



4. «Ikasgela batean neskak mutilak baino gehiago dira. Bien artean 15 daude. Zenbat neska egon daiteke gela horretan? Zer gehituko zenioke enuntziatuari erantzuna bakarra izateko?» *(enuntziatuak landu).*

5. «Idatz ezazu honako datu hauek dituen problema baten enuntziatua: beharrezko datuak, beharrezkoak ez direnak, datu inplizituak eta esplizituak, zuzeneko eta alderantzizko eragile semantikoak, galdera. Ebatz ezazu problema. Alda ezazu enuntziatua laburragoa izan dadin. Alda ezazu enuntziatua testuinguru batean jartzeko, nahiz eta enuntziatua luzeagoa izan» *(enuntziatuak landu)*.

6. «Bi zenbaki batuz emaitza 11 da; zein izango da hiru zenbaki batuz lortuko dugun emaitza?» Hau ariketa baten enuntziatua izan daiteke, hausnartu erantzuna eta beste holako bi adibide jarri. Problema hauen helburu didaktikoa finkatu *(egoera kualitatiboak)*.

7. «Ikastetxera janaria ekartzen duen kamioiak egunero 3 joan-etorri egiten ditu bere egoitzatik ikastetxera. Jantokiaren egoitza ikastetxetik 12 km-ra dago. Lehenengo bidaian 200 ogitarteko eta 50 l esne ekartzen ditu. Bigarren bidaian 250 pertsonentzako janariak. Eta hirugarren bidaian eguneko soberakinak eta ontziak eramaten ditu. Joan-etorriko bakoitzak 80 € balio ditu».

Enuntziatu horretatik abiatuta galdera batzuk egin eta beharrezkoa balitz enuntziatua osatu. Galderen artean batek ez du ebazpenik eduki behar, eta beste batek jada erantzunda egon behar du enuntziatuan bertan. Beste galderak logikoak izan behar dira *(enuntziatu batetik abiatuta galderak egin)*.

8. «Sevillako katedrala 1402. urtean egiten hasi zen eta bukatu 1519an. Laukizuzeneko oina du. Santiagoko katedrala, 1075ean hasi zen egiten eta bukatu 1128an». Bila itzazu Bilboko katedralari dagozkion datuak. Planteatu zenbakizko erantzunak dituzten hiru galdera eta hitzezko erantzunak dituzten beste hiru.

   (274 urte, 4.692 hil, ez, Santiagoko katedrala, ditugun datuekin ezin da jakin) *(enuntziatuari eta emandako eragiketei dagozkien galderak egin)*.

9. «Fruta-dendara joango naiz eta bi kilo laranja erosiko ditut eta kilo bat sagar edo hiru kilo madari. Laranjak kiloko 1,20 euroan daude, sagarrak 0,90 euroan eta madariak, 1,99 euroan. Zenbat diru gastatuko dut?» *(konjuntzioa disjuntzioagatik aldatu eta emaitzak alderatu)*.

10. «Baditut 15 €. Panpina bat 8 € kostatzen da, bigarren eskuko jolas bat 7 € eta hondeamakina jostailua 24 €. Bi gauza erosi ditut eta soberakinak eduki ditut. Zer erosi dut?» *(enuntziatuaren datuak okerreko tokian daude)*.

11. «Jonek bere 6 lagunak gonbidatu ditu bere urtebetetzera. Denon artean 42 bonboi jan dituzte. Zenbat bonboi jan ditu bakoitzak? Emaitza: 7» *(enuntziatuaren datu okerra atzeman eta berau aldatu emaitza zuzena izan dadin)*.

12. *Galderak eta dagozkien emaitzak emanda enuntziatua eraiki*

    (Zenbat litro ardo daude hiru upeletan? 290 l; zenbat litro ardo gehiago dago A upelean C upelean baino? 10 l; upel horietako bitan zenbat litro ardo daude? 200 l)

13. «Proposa ezazu lau eragiketak dituen problema bat, jada emanda datorren ebazpen batetik abiatuta, eta zehaztu ezazu testuingurua» *(ebazpen bati dagokion problema enuntziatu).*

14. Lau gelaxka dituen taula jarriko dugu. Gelaxka bakoitzean, emandako eragiketa bakar bati dagokion ezaugarri bat deskribatu behar da. Idatz itzazu problemaren ezaugarriak, problema ebatzi, eta finka ezazu bere helburu didaktikoa.

    19 x 6 9 x 25 36 x 6 11 x 7

Ezaugarria:	Ezaugarria:
Emaitza zenbaki bat da	Ezaugarria:

15. «Asma ezazu problema bat, + eta – eragiketekin ebazten dena, jakinik emaitza 340 dela eta enuntziatuan agerturiko datu bat ez dela ebazpenerako beharrezkoa. Beste halako bi adibide jarri. Problema hauen helburu didaktikoa finkatu».

16. «Asma ezazu problema bat, "bikoitz, berogailu, maiatz" hitzak dituen enuntziatuarekin eta galderan "hilabete, egun, elektrizitate". Beste halako adibide bat jarri. Problema hauen helburu didaktikoa finkatu».

17. Demagun egoera hau daukagula: «Ikastaldeko tutoreek eguneko txangoa antolatu nahi dute goi-zikloko ikasleekin. Ziklo horretan 10 gela daude, eta gela bakoitzean hurrengo ikasle kopuruak:

1. maila	25	23	24	20	18
2. maila	24	23	24	25	12

Txango horretarako autobusak kontratu behar dira, eta bi motatakoak izan daitezke: txikiak, 20 ikaslerentzat, eta handiak, 50 ikaslerentzat (irakasleak ez dira zenbatzen aurreko bi eserlekuetan baitoaz). Autobusen alokairua egun osorako hauxe da: txikiena 150 € eta handia 200 €. Maila desberdinetako ikasleak ezin dira nahastu.

- Proposa itzazu problema honi egin dakizkiokeen galderak.
- Erabili problemaren ulermenerako lagungarri izan daitezkeen bi irudikapen mota.
- Ebatz ezazu problema erabilitako irudikapen sinbolikoa adieraziz.
- Enuntziatua berregituratu, beste problema desberdin bat eginez

(testuinguruan jarritako problemak)».

18. «Ikastetxean, atsedenaldian, ikasle batzuek jolaserako erabiltzen dituzten kromoak —futbolarienak, eta "etorkizuneko ibilgailuak" izenekoak, gehi ikasleek eskuz egindako eskumuturrak eta belarritakoak— trukatzen dituzte. Egunero truke-aldaketa desberdina da. Gaur, truke-aldaketa tasa, honela zegoen:

Kromo-trukea	Eskulanak
3 futbolari-kromoren truke, 4 kromo etorkizuneko ibilgailuena	Belarritako pare biren truke, eskumuturreko bat

Alaitzek 8 eskumuturreko ditu eta bere nebak emandako 12 futbolari-kromo. Zenbat belarritako eta etorkizuneko ibilgailuren kromo lortuko ditu?».

Ataza: ebazpen manipulagarria egin, egoera eszenaratu, ebazpen grafikoa egin, ebazpen sinbolikoa egin. Alda ezazu enuntziatua eta beste truke-tasak jarri, plantea itzazu galdera berriak, eta egoerak muturrera eraman *(testuinguruan jarritako problemak)*.

19. «Txango batean, Kepak lehendabiziko hiru egunetan 24na argazki atera zituen. Horietatik 6 kalitate eskasekoak. Ondorengo bi egunetan 12na argazki atera zituen, horietako 3 oso ilunak, balio gutxikoak. Kepak nahi du egun bakoitzeko bost argazkirik onenak aukeratu eta horiekin muntaia egin. Argazkiak sarean zintzilikatzen ditu aplikazio batean. Aplikazio horrek baditu muga tekniko batzuk: orrialde bakoitzean 6 argazki besterik ezin dira zintzilikatu eta gehienez 10 orrialde erabili daitezke. Argazki guztiak aplikazioan zintzilikatzerik izango al du?».
    - Egoera horretatik abiatuta egin beharreko atazak.
    - Datu inplizituak esplizitu bihurtu.
    - Beharrezkoak ez diren datuak ezabatu.
    - Zenbaki-datuak berregituratu, datu gutxiago emateko.
    - Eragile semantikoak eta problemaren galdera birlandu.

20. «Frutazko eta txokolatezko 50 pastel erosi ditut. Frutazkoak 2 euroan daude, eta txokolatezkoak 3 euroan. Guztira 133 € gastatu baditut, klase bakoitzeko zenbat erosi nituen?». Ebatz ezazu problema modu askotara. Irudikapen grafikoak eta sinbolikoak erabili *(saio-errorea)*.

21. «Anek eta Ekaitzek oihalezko 16 m dituzte inauterietako mozorroa egiteko. Anek Ekaitzek baino 6 m gehiago beharko ditu. Zenbat metro oihal beharko ditu bakoitzak? Egin ezazu irudikapen grafikoa eta irudiaren gainean arrazoitu».

22. «Merkatura noa. Arrandegian diru osoaren 1/3 gastatzen dut, fruta-dendan 2 €, okindegian gelditzen zaidanaren erdia, eta barazki-dendan 4 €. Orain 2 € baino ez ditut. Zenbat diru nituen etxetik irtetean? Zein estrategiarekin lotuko zenuke problema aritmetiko hau?».

23. Lehen Hezkuntzako ikasgela batean jarduera hau proposatzen da: *Idatzi hamargarren tokian egongo den zenbakia.*

    – Burutu ezazu jarduera, eta azaldu zenbakia nola aurkitu duzun.

    – Zure ustez, zein da jarduera honen helburua?

1	2	3	4	5	6	7	8
↓	↓	↓	↓	↓			
x 2	x 2	x 2	x 2	x 2			
↓	↓	↓	↓	↓			
+ 1	+ 2	+ 3	+ 4	+5			
↓	↓	↓	↓	↓			
3	6	9	12	15	…		

24. Batuketaren eta kenketaren adierazpen grafikoa. Behean dauden bi batura horietan falta diren zifrak osatu behar dira.

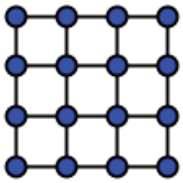
	3		2			2	3	5
+	8	5			+	1	1	
___	___	___	___			—	—	—
		2	9					8

Mendi-zenbakiak: aurkitu lau zifrako zenbakia, 5.000 baino handiagoa, 5ean bukatua eta ehunekoen eta hamarrekoen zifrak 5 baino handiagoak dituena. Marraztu ezazu zenbaki hori halako moduan non mendi-kera ikusten den.

Haran-zenbakiak: aurkitu lau zifrako zenbakia, 3an bukatua, 5.000 baino txikiagoa, ehunekoen eta hamarrekoen zifrak 3 baino txikiagoak dituena. Marraztu ezazu zenbaki hori halako moduan non haran-kera ikusten den.

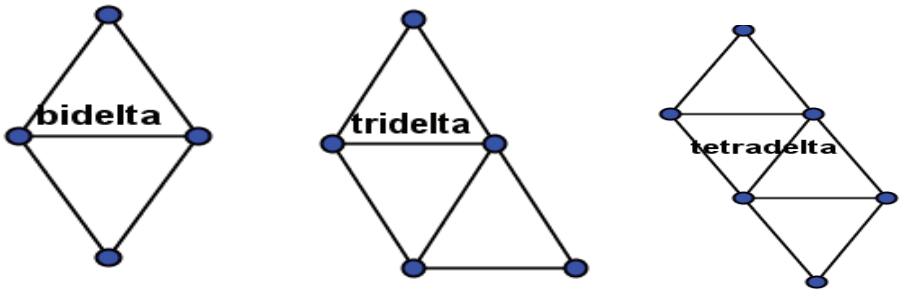
2.5.2. Problema geometrikoak

1. Zenbat triangelu zuzen eraiki daitezke 4 x 4 geoplano baten gainean?



2. Polideltak

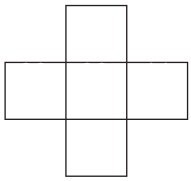
«Triangelu aldekideetatik abiatuta polideltak eraikitzen dira. Triangelu bikoei bidelta deritze, hiru triangelukoei tridelta…».



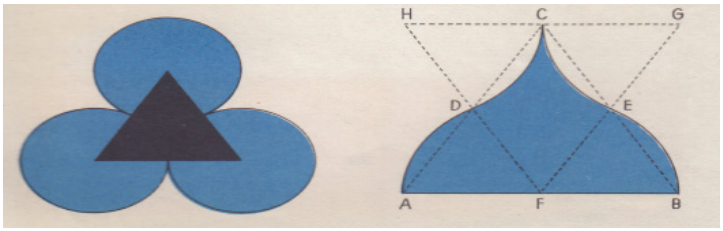
Irudika itzazu pentadelta bat eta hexadelta bat, eta kalkula itzazu dauden hexadelta guztiak.

Gehiago jakiteko eta jarduera gehiago egiteko kontsulta-gai duzu ondoko helbidea:
<http://ntic.educacion.es/w3/eos/MaterialesEducativos/mem2009/problematic/menuppal.html>.

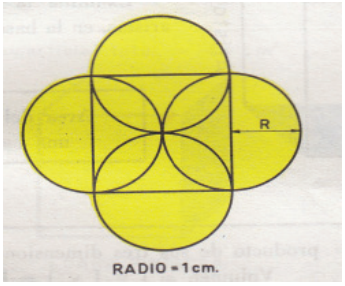
3. «Bost karratu berdinekin karratu bat osatu».



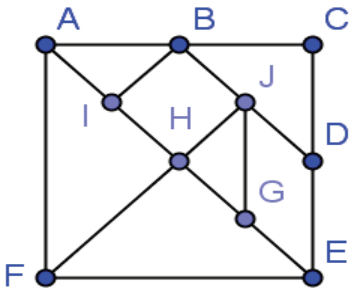
4. «Marraztu itzazu ondoko irudiak marrazketako tresnak edo Geogebra erabiliz».

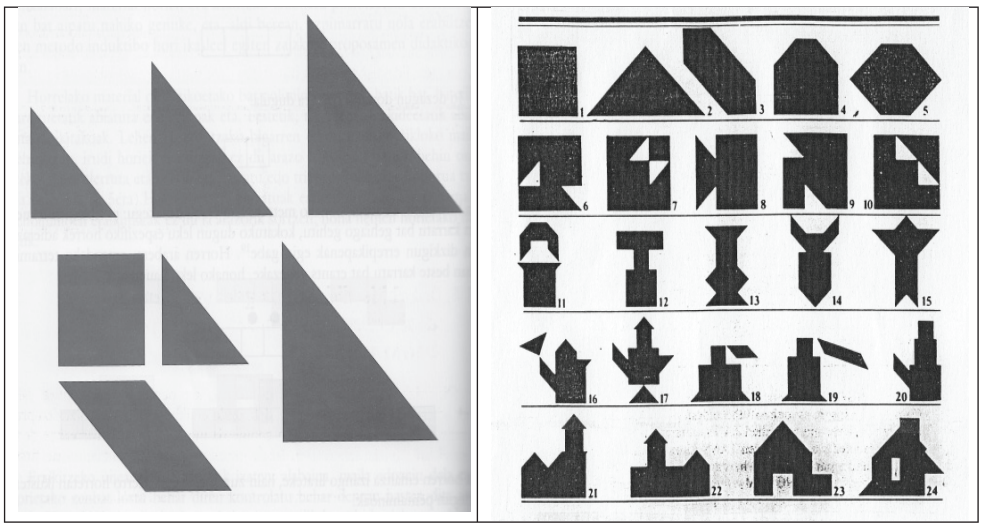


5. «Kalkula ezazu ondoko irudiaren azalera».



6. Tangrama irudi laua zatitzean lortzen den puzzlea da. Piezak elkartuz jatorrizko irudia edo beste irudi batzuk egitean datza jolasa. Tangram desberdin asko daude, ospetsuena eta lehena jatorri txinatarrekoa da, karratu batetik lortzen da, karratua 7 piezatan deskonposatuz: karratu bat, paralelogramo bat, eta azalera desberdineko 5 triangelu zuzen. Jolasaren funtsa da, zazpi osagaietatik abiatuta azalera bereko irudiak sortzea.

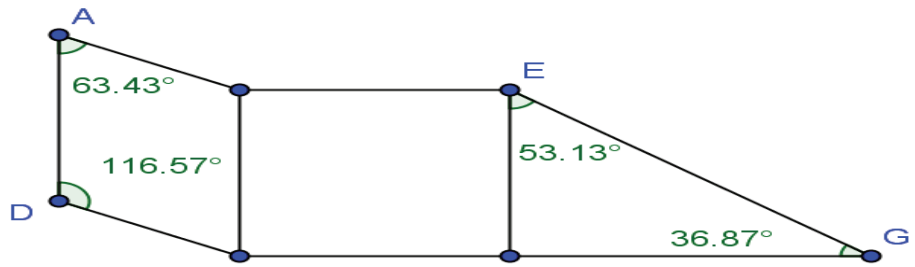




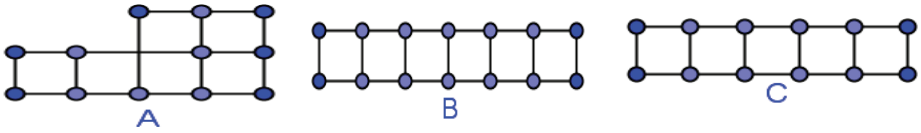
Aurki itzazu pieza horien ezaugarriak eta haien arteko antzekotasuna. Jolas hau atsegina izateaz gain pertzepzioa eta irudimena lantzeko balekoa da. Goiko eskuineko irudiaren lehenengo 15 marrazkiak eraiki tangrameko 7 piezak erabiliz.

7. «Irudiak diktatzea: hizkuntza geometrikoa garatzeko, bi ikasleren arteko jarduera didaktiko bat planteatuko da non batek irudi bat marraztuko duen eta irudiaren deskribapen zehatza egingo dion besteari, horrela azken hori gai izango da irudia berreraikitzeko. Ondoren, igorritako eta jasotako irudien artean alderaketa egingo da».

Adibidea: deskriba ezazu oinarrizko hizkuntza geometrikoa erabiliz ondorengo irudia:



8. «Perimetroa eta azalera: poliminoak azalera eta perimetroaren arabera sailkatu daitezke. Hori egin ondoren azalera perimetroarekin erlazionatu daiteke. Hurrengo irudietan A eta B poliminoek azalera bera baina perimetro desberdina dute eta A eta C poliminoek perimetro bera eta azalera desberdina».



Har itzazu tetramino guztiak eta azalera eta perimetroaren arabera sailkatu. Bila ezazu erlazioa azaleraren eta perimetroaren artean.

9. Azalera eta bolumena:

– Egun hotz batean pertsona nagusi bat eta haur bat kalean daude. Biak daude modu berean jantzirik. Zeinek edukiko du hotz gehien? Zergatik? (kontuan hartu gauza guztiek beren azaleraren bidez beroa igortzen dutela).

– Suposa dezagun 2 cm-ko aldeko kubo bat dugula, 1 kg-eko pisua duena. Material berdinez egindako beste kubo bat edukiko bagenu, haren neurri guztiak aurrekoaren erdia izanda, zein izango litzateke bere pisua?

– Irakurri ezazu Gulliverren istorioa:

> Gulliverren bidaietan —Jonathan Swiftek XVIII. mendearen hasieran idatzitako lana— protagonista Samuel Gulliver da: hondoratze baten ondoren Liliputera heltzen da. Herri horretako biztanle guztiak bera baino 12 aldiz txikiagoak dira, beraz Gulliverren luzera 1,80 m bada, liliputiar baten batez besteko luzera 15 cm-koa da. Gainera, animalien eta landareen artean ere proportzio bera mantentzen da, halako moduan non zaldi baten altuera 12 cm diren, ardi batena 4 cm, eta abar.
>
> Bigarren bidaia batean Gulliver berriz hondoratuko da, Brobdingnag-eko kostaldera helduz. Herri horretako biztanle guztiak bera baino 12 aldiz handiagoak dira eta, beraz, Gulliver ipotxa da.
>
> Ia bi mende lehenago (XVI. mendea) Galileok baieztatu zuen gizakiaren eredu zabalduak edo murriztuak ez zirela posibleak. Ikusi dezagun arrazoia:

Soka, hari edo zutabe baten apurketaren kontrako erresistentzia bere sekzioarekiko proportzionala da. Hezurrekin berdin gertatzen da. Brobdingnageko erraldoiekiko Gulliver, bai sekzioan bai forman, antzekoa da. Haien altueren arteko erlazioa 12/1 da. Haatik, haien zangoetako hezurren erresistentzia-arrazoia, bere zuzeneko sekzioaren azalarekiko proportzionala da, hots 12^2 / 1^2 , edo gauza bera dena, 144/1. Beste aldetik, zangoek eutsitako pisua, materiaren kantitatearekiko, hots, bolumenarekiko proportzionala da; hau da pisuen arteko arrazoia 12^3 / 1^3, edo gauza bera dena, 1728 / 1.

Horrela, erraldoiaren erresistentzia Gulliverrena baino 12 aldiz txikiagoa da; beste modu batean esanda, beren pisuari eusteko egin beharreko ahalegina, guk geuk ibiltzeko geure bizkarrean 11 pertsona eramanda egin beharko genukeen beste ahalegin egin beharko lukete. Egokitzapenaren adibide franko ditugu Naturan: elefantearen zango lodi-lodiak, edo balearena, soilik uretan bizi daitezkeenak, hortik kanpo beren pisu azpian atrapaturik geldituko liratekeelako. Eraikinek ere gero eta material erresistenteagoak dituzte, hala ere ezin izango da 6 km luze duen bat eraiki, mendi bat bezalakoa, azken hauek trinkoak baitira. Pelikuletako amaraun erraldoiak ere ez dira posibleak.

Eta alderantzizko kasuan, liliputiarrenean, odol beroko edozein animaliak beroa jaregiten duenez, dituen elikatzeko beharrak, jaregite horrekiko proportzionalak dira eta, beraz, beren gorputzeko azalerarekiko ere proportzionalak. Horrela, Gulliverrek egunean oilasko bat beharko balu elikatzeko, liliputiar batek, bere azalarekiko proportzionala den elikagai kopuru bat beharko luke, hots, Glliverrek baino 144 aldiz gutxiago. Baina Liliputeko oilasko baten pisua 1.728 aldiz txikiagoa izango litzateke, eta, beraz, liliputiar nanoak 12 oilasko eguneko beharko lituzke gosea asetzeko.

Eta zer esanik ez, liliputiar bat itsasoan bainatzeari buruz; bere larruazalean aterako lukeen ura, geruza uniformea da, eta, beraz, bere gorputzeko azalarekiko proportzionala. Ondorengo proportzioak edukiko genituzke:

Gulliverren pisua / Liliputiarraren pisua = 1 / 1728
Gulliverrek ateratako uraren pisua / Liliputiarrak ateratako uraren pisua = 1 / 144
Liliputiarrak aldean daraman uraren pisua / Liliputiarraren pisua = 12 / 1

Hots, Gulliverrek aldean daraman ura eta bere pisuaren arteko erlazioa 1 / 1 dela kontsideratuaz, liliputiarrak aldean eramandako urak, berak baino hamabi aldiz gehiago pisatuko luke. Horretarako ere, Naturak adibide: euli bat bustitzen denean, urak atrapaturik dagoela dirudi.

Haatik, izaki horiek beste aukera batzuk zertu lituzkete, hala nola gainean berak baino pisu bat hainbat aldiz handiagoari eutsi; edota, altuera handi batetik erori min hartu gabe (haien masa hain da txikia non grabitazio-erakarpena minimoa izango litzatekeen).

2.5.3. Beste jarduera batzuk

1. «Tomasi bere osabak urrezko txanpon bat eskaini dio baldin eta, txanpo horren berdinak diren brontzezko beste 23 txanponen artean aurkitzen baldin badu. Brontzezko txanponek zertxobait gutxiago pisatzen dute, baina beste ezaugarri guztiak berdinak dituzte. Balantza bat erabiliz eta hiru pisaldi eginez, nola aurki daiteke urrezko txanpona».

2. Makinak eta balantzak.

Oso jarduera interesgarriak plantea daitezke bai balantzekin bai eta makinekin ere. Alde batetik, diagrama edo irudiarekin lagunduta datozelako, eta, bestetik, aproposak direlako aritmetikan eta logikan, eragiketak lantzeko eta logikako arrazoibideak irudikatzeko.

– *Makinak* bi motatakoak izan daitezke: *eragileak eta kontrolatzaileak.*

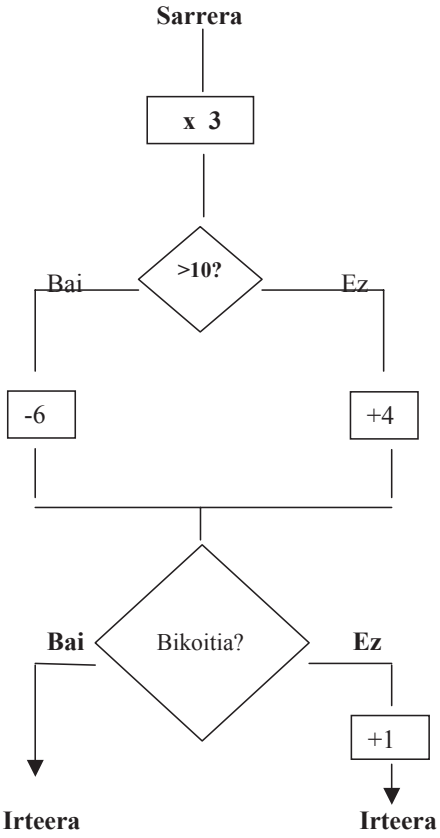
Eragileek lotura dute aritmetikako eragiketekin eta, beraz, kalkuluen irudikapen sinbolikoa dira. Haien egitura hau da:

Sarrera ⟶ eragiketa ⟶ irteera

Kontrolatzaileek eragiketak edo beste zenbait kontzeptu barneratu ditzakete, baina beti emandako irizpide baten araberako konparazioa egin behar da eta erantzunaren arabera bide desberdinetatik joaten da. Haien egitura hau da:

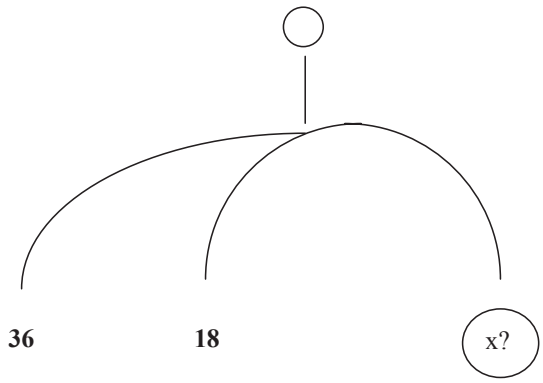
Sarrera ⟶ konparazioa ⟶ irteera

Adib.:



Ataza didaktikoa: Eraiki mota bakoitzeko makina bana eta aipa ezazu zein helburu didaktikoa duten.

– *Balantzak edo mugikariak.*



Zer kalkulatu behar da? zer baldintza bete behar du x zenbakiak? zer eragiketa egin behar da x zenbakia kalkulatzeko? nola irudikatu aurreko balantzaren egoera ekuazio sinbolikoaren bidez?

Zein da balantza horren helburu didaktikoa? Beste bi balantza desberdin eraiki.

3. Problemen ebazpenak eta oinarrizko gaitasunen garapena

Matematika-gaitasuna zenbakiak erabiltzeko eta horien arteko eragiketak egiteko trebetasuna da, eta, orobat, arrazoibide matematikoaren ikurrak eta horiek adierazteko moduak erabiltzeko, hainbat informazio mota ekoitzi eta interpretatzeko, errealitatearen alderdi kuantitatibo eta espazialen gaineko ezagupena zabaltzeko, eta eguneroko bizitzatik edo lan-arlotik ateratako problemak ebazteko trebetasuna.

Atal honetan, testuliburu-bildumetatik oinarrizko gaitasunak garatzeko baliozkoak izan litezkeen adibideak jarriko ditugu. Adibideak, gaitasunez gaitasun azalduko ditugu.

- *Zientzia, teknologia eta osasun-kulturarako gaitasuna*

Kalkulagailuen erabilera, higienea edo medikuntzarekin erlazionatutako adibideak, edo zientziari buruzko informazioa ematen duten jarduerak aproposak izan daitezke gaitasun hau lortze aldera.

Adib.: «Ba al zenekien? Jaioberriek 350 hezur dituzte, baina helduek 206, gutxi gorabehera. Izan ere, jaiotzen garenean gure hezurretako asko bananduta daude. Ba al dakizu zein den gure gorputzeko hezurrik luzeena».

Jarduera horren inguruan informazio osagarria bilatu daiteke, sailkapenen bat egin, eta hezurretako neurriak konparatu. Matematikaren erabilera txikia bada ere, ikasleak konturatuko dira, Natur Zientzian ere zenbakiak eta sailkapenak ezagupen sakonagoa lortzeko lagungarri direla.

Ataza didaktikoa: Bila edo asma itzazu gaitasun hau garatzen lagundu dezaketen matematikako beste jarduera batzuk, hala nola nutrizioarekin edo denboraren neurketarekin (egutegiak) erlazionatuta egon daitezkeenak (edo beste batzuk). Esan zertan eta nola laguntzen duten gaitasuna lortzen?

- *Ikasten ikasteko gaitasuna*

Logikako ariketak dira gaitasun honi gehien egokitzen zaizkionak. Horretaz gain, eskemak, diagramak eta makinak dituzten ariketak. Makinen ariketetan, aurreko hiru kategoriak biltzen dira, diagramak, eskemak eta logika baitaraturik dituztelako.

Adib.: «Makinak: Eragileak eta kontrolatzaileak dira. Makina eragileek eragiketak egiten dituzte eta honako egitura hau dute: sarrera-eragiketa-irteera. Makina kontrolatzaileek baldintza batzuk betetzen diren aztertzen dute eta honako egitura hau dute: sarrera-konparazioa-bi irteera (bai ala ez)».

Jarri itzazu mota bakoitzeko adibide bana eta azaldu nola laguntzen duten gaitasun hau garatzen.

Ataza didaktikoa: Jarri gaitasun hau lortzera bideratutako beste jarduera batzuk, hala nola logikakoak edo eskemak eta diagramak barnean dituztenak (edo beste batzuk). Esan zertan eta nola laguntzen duten gaitasuna lortzen?

- *Matematikarako gaitasuna*

Gaitasun hau errazena da, *«ariketa guztien bidez»* lantzen omen delako. Egia izan arren, adibideak jartzean, oro har, aritmetikako ariketetara jo ohi da.

Adib.: «Zer neurtuko zenuke zentimetrotan?: etxe baten altuera, paperontzi baten altuera, liburu baten zabalera, bi hiriren arteko distantzia».

Estimazioak egitean aplikazioetarako matematikak duen erabilera praktikoa balioesten da.

Ataza didaktikoa: Bila itzazu aritmetikakoak ez diren beste jarduera batzuk gaitasun hau jorratzeko lagungarri direnak. Ez bilatu edozein, baizik eta esanguratsuak direnak.

- *Hizkuntza-komunikaziorako gaitasuna*

Hasiera batean pentsa daiteke gaitasun hau zaila dela lantzen matematikan. Matematikan, egiten jakitea garrantzitsua izan da eta tradizionalki ariketak egin izan dira baina betidanik matematikaren irakaskuntzari horixe leporatu zaio, ikasleek ez zutela aukerarik izaten egindakoa berbaz adierazteko. Egoera hori guztiz gainditua dago gaurko irakaskuntzan eta, oro har, ariketa askotan, denon aurrean edo talde txikian, egindakoa adierazteko eskatzen zaio ikasleari. Tankera askotako adibideak ditugu, batez ere komikiak edo antzerkia, edo planoen irakurketari dagozkionak. Adibidez, ondokoak:

– Dortokei aginduak eman.
– Komikiak.
– Testu baten hutsuneak bete proposatutako hitzekin eta irudi baten aginduei jarraituz.
– Antzerkia.

Adib.: «Azaldu ahoz nola emango zenukeen erantzuna kilometrotan eta metrotan». «Azaldu ahoz zergatik izan daitekeen lagungarria marrazki bat egitea, problema batean». «Deskribatu turistak, plano batean, oinez egingo duen ibilbidea». «Problema baten enuntziatu bererako bi galdera asmatu».

• *Informazioa tratatzeko eta teknologia digitalak erabiltzeko gaitasuna*

Gaitasun hau hasiera-hasieratik lantzen da hainbat jardueraren bidez; testuinguru batetik ateratako grafiko estatistikoak erabiltzean, edo kalkulagailuaren erabilera adimentsua helburu duten jardueretan, edo Interneteko web orrialde baten erabilerarekin loturiko ariketetan.

Adib.: «Irudika itzazu puntuen grafiko batean, eskolako jantokian jan diren mota bakoitzeko postreak edo dentista batek astebetean hartzen dituen bisitak».

Ataza didaktikoa: Aurki ezazu jarduera bat informazioa tratatzeko gaitasunarekin lotura duena eta beste bat teknologia digitalak erabiltzearekin lotura duena. Azter itzazu teknologia digitalaren erabilera indartzeko egon daitezkeen jarduera motak eta Interneteko baliabide batzuk aipatu.

Ataza didaktikoa: Oro har, salbuespenak salbuespen, kalkulagailuaren erabilera burutsua egin behar da. Aipa itzazu lau jarduera mota kalkulagailuaren erabilera horretarako. Non eta zertarako erabiliko zenuke kalkulagailua modu sistematikoan?

• *Gizarterako eta herritartasunerako gaitasuna*

Hau ere, erraz topa daiteke ariketa askotan. Eguneroko bizitzatik ateratako jarduera askoren bidez lantzen baita gaitasun hau. Zenbakikuntza-sistemaren antzinako aurrekariak aipatzean edo moneta-sistema edo egutegiaren erabileran, baita neurriak eta pisuak ikastean, edo mapak, planoak eta orientazioa lantzean, ikaslearen gizarteratzea bultzatzen ari da.

Adib.: «Amsterdamek 743.086 biztanle ditu, Luxenburgok 84.832 biztanle ditu eta Berlinek 3.404.037 biztanle ditu. Zenbat pertsona bizi dira Amsterdamen? eta Berlinen? zeinek du biztanle gehien? eta gutxien».

Ataza didaktikoa: Bila itzazu gaitasun hau garatzeko lagungarri izan daitezkeen Lehen Hezkuntzako ziklo bakoitzerako bina jarduera; jarduera horiek aukera askoren adierazgarri izan behar dira eta ikaslearengandik hurbilak.

• *Giza eta arte-kulturarako gaitasuna*

Gaitasun honetan geometriako ariketa gehien-gehienak sartu daitezke, eta batez ere hirietako edo naturako formetatik eratorritakoak.

Adib.: «Margotu Gabonetako apaingarri batzuk, baina kontuan izan margotutakoan simetrikoak izan behar dutela bi aldeek».

Ataza didaktikoa: Aurreko adibidean adierazitako jarduera, zein ziklotarako izan daiteke aproposa? Bila itzazu forma geometrikoak dituzten eraikin edo objektu ezagunak eta horiekin jarduera bi prestatu.

• *Norberaren autonomia eta ekimenerako gaitasuna*

Hemen azpimarratu nahi ditugu ikasleen elkarlana eta informazioaren aurkezpena eskatzen duten jarduera irekiak. Jarduera horiek «ikertu-sortu» eskemari dagozkio. Adibidez, ondokoak:

– Ordulariak: hainbat ikerketa bideratu daitezke ordulariekin (ikus Gauss proiektua).
– Kalera joan eta jendeari galdeketa bat egitea (2. maila).
– Matematikako aldizkaria.
– Nola egin irudiak erregelarekin eta konpasarekin?

Ataza didaktikoa: Esparru horietatik edo beste batzuetatik ateratako jarduera bat eraiki. Jardueraren testua idatzi, helburua zehaztu; ikasleak informazioa bilatu eta egituratu behar du lan bat aurkezteko. Erabilitako iturriak jarriko dira. Jardueraren aurkezpena denon aurrean egingo da.

Ataza didaktikoa: Bila itzazu «albo-pentsamendua»ren, «pentsamendu dibergentea»ren eta «pentsamendu konbergentea»ren definizioak. Zergatik da problemen ebazpena lagungarri pentsamendu dibergentea lantzeko? Nola lantzen da pentsamendu konbergentea?

4. Lan praktikoa

Lehen Hezkuntzako zikloka jarritako eskola-problemen bilduma aurkeztu, ondoko aldagaiak kontuan harturik:

- Problema mota guztiak agertu behar dira.
- Problema horien bidez gaitasun guztiak garatu behar dira.
- Estrategia batzuen adibide izan behar dute.
- Baten bat protokolo bati jarraituz ebatzi behar da.
- Baten bat enuntziatu bat baino gehiagorekin, ikusteko enuntziatu motaren arabera problemaren zailtasuna gutxitzen doala.
- Lanaren ahozko komunikazioa zaindu eta prestatu.

5. Oharrak eta bibliografia

Abrantes, P.; Barba, C.; Batlle, I. eta beste batzuk (2002): *La resolución de problemas en matemáticas,* Graó, Bartzelona.

Alsina, C. eta beste batzuk (1998): *Enseñar matemáticas,* Graó, Bartzelona.

Arribas, C. eta Román, J. A. (2007): *Matematika. «i.blai» proiektua,* Ibaizabal. Zornotza.

Callejo, M. L. (1994): *Un club matemático para la diversidad,* Narcea, Madril.

Castelló, M. J.; Codina, R. eta López, P. (2010): "Cambiar las actitudes hacia las matemáticas resolviendo problemas. Una experiencia en Formación del Profesorado de Educación Primaria", *Unión. Revista Iberoamericana de Educación Matemática,* Mexiko.

Chamorro, M. C. (2003): *Lehen Hezkuntzako matematikaren didaktika,* UPV-EHU, Leioa, 274-275.

Corbalán, F. (1995): *La matemática aplicada a la vida cotidiana,* Graó, Bartzelona.

————————, (2011): *Mates de cerca,* Graó, Bartzelona.

Fernández Bravo, J. A. (2008): *Técnicas creativas para la resolución de problemas matemáticos,* Wolters Kluwer, Madril, 12. or.

Goñi, J. M. (2003): *«Baga Biga» matematikako «txanela» proiektua,* Elkar, Donostia.

Juidías, J. eta Rodríguez, I. (2007): "Dificultades de aprendizaje e intervención psicopedagógica en la resolución de problemas matemáticos", *Revista de Educación,* MEC, Madril.

Luceño Campos, J. L. (1999): *La resolución de problemas aritméticos en el aula,* Aljibe, Malaga.

Pereda, L. (2003): *Problemak ebazteko tailerrak. 1., 2. eta 3. zikloak,* Erein, Donostia.

Puig, L. eta Cerdán, F. (1988): *Problemas aritméticos escolares,* Síntesis, Madril.

Relime. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa. Mexiko.

Rizo, C. eta Campistrous, L. (1999): *Estrategías de resolución de problemas en la escuela.*

Segarra, L. (2001): *Problemates. Colección de problemas matemáticos para todas las edades,* Graó, Bartzelona.

Schoenfeld, A. H. (1985): *Mathematical problem solving,* Academic Press, San Diego.

Stacey, K. eta Groves, S. (1999): *Resolver problemas: Estrategias,* Narcea, Madril, 57. or.

Helbide elektronikoak:

http://divulgamat.ehu.es/weborriak/RetosMatematicos/Problemas/Ficheros/importancia.pdf

http://ntic.educacion.es/w3/eos/MaterialesEducativos/mem2009/problematic/menuppal.html

Hirugarren gaia.

Teknologia berriak eta matematikaren irakaskuntzarako baliabideak

1. Matematikaren irakaskuntza eta IKTak

1.1. GAITASUN DIGITALA

Ezagupenaren gizartearen kontzeptua hezkuntza-esparrua baino haratago doa; kontzeptua orokortua dago eta «sare-gizartea» edo «informazioaren gizartea» izenekin ere ezagutzen da.

Informazio eta ezagupenaren gizartea, gizartearen eta herritarren elementu guzti-guztiak ukitzen ari da, batik bat gazteenak, haien giza eta lan-jarduera guztietan, dela lanean edo komunikazioan, dela aisia eta elkarren arteko harremanetan.

Ezagupenaren gizarte honek hezkuntza-sistemaren baitako ondoko aldaketak erakarri ditu:

– Irakasle lanbidearen rola eta praktika eraldatzea. Irakaslea aholkulari eta ikas-irakaskuntza prozesuaren erraztatzaile bihurtu da.
– Ikaslea jada ez da ezagupenen erreproduzitzailea, haatik informazioaren erabiltzaile adimentsua eta kritikoa bihurtu da.
– Eskolan ikaskuntzako ingurune birtualak sortu behar dira, banakako eta elkarren arteko ikaskuntza erraztuz.

Teknologia digitalei buruzko zenbait datu:

– Google Espaina: eguneko 100 milioiko bisitak.
– Wikipedia: 13 milioi artikulu, 680 milioi bisita, 120 hizkuntzetara itzulia.
– Blogak: webean 200 milioi inguru.
– You tube: egun batean 100 milioi bideo baino gehiago ikusten dira; sorreratik 100.000 bideo/urte ikusi izan dira.
– 2010eko bukaeran giza sareek 1.000 milioi erabiltzaile baino gehiago zituzten mundu osoan.

1.2. IKT-AK MATEMATIKAREN IRAKASKUNTZAN

Matematikaren antzinatasuna 4.000-5.000 urtekoa da baina eskoletan irakasten den curriculum praktikoa gutxi gorabehera denboran zehar egonkor mantendu da. Ezaguna da esaera hau: «Eskolatik bost gauza jakinda irteten da, lau erregelak eta

hiruko erregela», eta benetako curriculuma, irakasten dena, nahiko egonkortuta dago: aritmetika askotxo, kalkulua, aljebra eta analisi nahikoa, geometria gutxi eta estatistika eta probabilitatea ia deus ez.

NCTMren iritziz (National Council of Teachers of Mathematics) eskolan landu beharrekoa, matematikan oinarrizkoena izan beharko litzateke, hauxe:

- Problemen ebazpena.
- Egoerak kuantifikatu eta zenbakien gainean hausnarketa egitea.
- Baliabideak erabiliz eragiketak egitea nolabaiteko erraztasunarekin.
- Neurriaren gaian gaitasuna edukitzea.
- Testuinguruetan emandako problema geometrikoen ebazpena.
- Arrazoibide proportzionala.
- Elkar komunikatzeko sinboloak.
- Taulak eta grafikoak. Funtzioen mintzaira.
- Ziurgabetasuna.
- Aljebrako mintzaira.
- IKTak.

Arthur Benjamin matematikari estatubatuarrak matematikako parteen garrantziari buruz berba egiten duen bideoa kontsultatu daiteke; horretan probabilitatea eta estatistika garrantzitsuenak direla azpimarratzen du.

http://www.ted.com/talks/arthur_benjamin_s_formula_for_changing_math_education.html (ingelesez)
http://www.youtube.com/watch?v=9O6dYmqthF0 (gaztelaniaz)

Matematika komunikatzeko eta erabiltzeko erak eta tresnak, baita haien ezagupenak ere, etengabe garatzen ari dira. Gure gizartearen eskakizunek eragiten dute matematika eguneroko bizitzarako eta lanerako erabiltzeko eta ulertzeko ahalmenak gero eta ate gehiago zabaltzea.

Informatika eta matematika, lehenengoaren jaiotzetik bertatik elkarren artean erlazionaturik daude. Informatikak matematikari ebazpideak ekartzen dizkio eta alderantziz. IKTek eskolan duten zalantzarik gabeko eragina atzera gabeko erronka izatea dakarte baita matematikaren irakaskuntzan ere.

Horri buruz diharduen Antonio Perez-en (ITEko zuzendaria eta matematikaren ikus-entzunezkoen egilea) ondoko bideoa ikusgai dago; bideo horretan, berak Sestaoko Berritzegunean emandako «matematika eta IKTak» izeneko hitzaldia dago.

http://platea.pntic.mec.es/aperez4/matetic/matetic.html

Irakasle horren arabera, «IKTek zientzia esperimentala bihurtzen dute matematika».

2. Heziketa-softwarea matematikaren irakaskuntzarako

2.1. LOGO

Logo, goi-mailako programazio-mintzaira da, neurri batean funtzionala baina beste batean egituratua; ikasterraza da eta zio horregatik umeekin eta gazteekin lan egiteko aukeratua izaten da. Bobrow, Feurzeig eta Papert-ek diseinatua helburu didaktikoekin, Lisp mintzairaren ezaugarrietan oinarrituz. Papert-ek hartu zuen 60koen hasieran Piaget-ekin izandako esperientzia ikuspuntutzat. Haren muina umeei Logo programen bidez askatzen diren adimen-erronkak aurkeztean datza. Errakuntzak berraztertzeko eskuzko prozesuak laguntzen du autozuzenketaren prozesuak praktikan jartzean umeak trebetasun metakognitiboak gara ditzan. Ezagun da dortoka-grafikoak, zerrendak, fitxategiak eta errekurtsibitatea erabiltzeagatik.

Dortoka alegiazko dortoka da eta aginduak eman dakizkioke irudiak egin ditzan. Zenbait bertsiotan dortoka triangelu bat da, beste batzuetan goitik begiratutako dortoka baten itxura du. Agindu mota dira adibidez: aurrera 100, Biratu eskumara 90, Biratu ezkerrera 30.

Logon, aginduen sekuentzia bat, bloke bat legez erabiliko den programa bakuna bihurtzen da. Berrerabiltze-ezaugarri modular horrek oso malgu bihurtzen du Logo, errekurtsibo eta modulukako eran lan egiteko gai.

Logoren bertsio batzuk daude, adibidez Logoren bertsio askea «Mswlogo» izendatua, edo «WinLogo» programa komertziala (1993an sortua).

Agindurik errazenak marraztearekin erlazionatutakoak dira, horietako batzuk hurrengo taulan agertzen dira:

Sintaxia	Laburdura	Adibidea	Azalpena
aurrera *zenb*	**av** *num*	av 20	Dortokak 20 urrats egiten ditu bere buruaren norabidean, luzera horretako lerroa irudikatuz
atzera *zenb*	**re** *num*	re 35	Dortokak 35 urrats egiten ditu atzerantz bere buztanaren norabidean, luzera horretako lerroa irudikatuz
biraeskumara *gra*	**gd** *gra*	gd 72	Bere posizioa eskumatara 72º biratzen du
biraezkerrera *gra*	**gi** *gra*	gi 23	Bere posizioa ezkerretara 23º biratzen du
igoarkatza	**sl**	sl	Arkatzaren punta altxatzen du dortokak marraztu ez dezan
jaitsiarkatza	**bl**	bl	Arkatzaren punta jaisten du dortokak marraztu ahal izateko
jarrilodiera zenb	**pong** *num*	pong 4	Arkatzaren lodieraren balioa 1etik 10ra doa
jarri arkatzkolorea zenb	**poncl** *num*	poncl 7	Arkatzaren kolorea 0tik 256ra doa
ezabapantaila	**bp**	bp	Grafikoen pantaila ezabatzen du eta dortoka jatorri-puntuan jartzen du 0ranzko norabidean
jarrinorabidea *gra*	**-**	ponrumbo 45	Dortoka 45º-ko norabiderantz jartzen du, bertikaletik eta eskumatara zenbatzen hasita
ezabagoma	**-**	goma	Dortokak ezabagoma bezala lan egiten du eta ez, ordea, arkatz bezala
ezkutadortoka	**ot**	ot	Dortoka ikusezin bihurtzen du
erakusdortoka	**mt**	mt	Dortoka ikusgai bihurtzen du
bete	**-**	rellena	Dortoka irudi itxi baten barruan badago, irudia dortokaren kolorearekin beteko da

Jatorrizko agindu horiekin, jada, grafikoen leihoan edozein marrazki egin daiteke. Adibidea, «CUADRADO» programak 40ko aldea duen karratu bat marrazten du, irudian agertzen den bezalakoa:

2.2. GEOMETRIA DINAMIKOA

Geometrian aurrerapen garrantzitsuak lortu dira. Geometria dinamikoaren izenburupean geometriaren ikas-irakaskuntzako ahalera handiko programa batzuk sartzen dira, halako moduan non modu errazean, objektu geometrikoak eraiki, mugitu eta biratu daitezkeen, haietan dauden zenbait eite, hala nola simetria edo proportzioak, aztertu ahal izateko. Objektu matematikoak ikusi eta manipulatu daitezke, haatik geometria klasikoan ohikoak diren zenbait zailtasun, hala nola trinkotasuna edo eraikitzeko zailtasuna, problema bere orokortasunean ikusi ahal izateko gabezia eta abar, saihestuz. Animazio-tresnak eraikuntza bateko anitz elementu batera mugimenduan jartzea ahalbidetzen du, halako moduan non irudiaren elementu aldakorretan atentzioa jartzean, irudiaren propietateak arakatu daitezkeen, matematikako kontzeptuen garapena erraztuz, bistarapena erraztuz, esperimentatuz, propietateak kontsultatuz eta erregulartasunak deskubrituz, besteak beste. Programa mota hauekin ikaslea miaketatik ulermenera igarotzen da.

Geometria dinamikoko programen komuneko elementu batzuk ondorengoak ditugu:

- Geometriako oinarrizko elementuak nahastuz planoko edo espazioko irudi geometrikoak eraiki: puntuak, zuzenak, zuzenkiak, zirkunferentziak, planoak, solidoak, transformazioak…
- Geometria eta aljebra lotu, luzerak, angeluak, azalerak, bolumenak… neurtuz. Zenbaki-datuotara atzitu daiteke zuzenean irudian bertan, geroxeago kalkuluetan edo adierazpen aljebraikoetan erabiltzeko.
- Irudi baten propietateak miatu, irudiaren elementu aldakorretan eraginez. Deformazio , txikiagotze eta handiagotze dinamikoen eraginak behatuz, bere propietateei buruzko aieruak ezarri daitezke, zeinak irudiaren manipulazioaren bidez egiaztatuko diren.
- Nozio berrien sarbidea eta asimilazioa errazten dute, teoremen demostrazioen hastapenak errazten dituzte eta egoera errealen gaineko modeloak egiten laguntzen dute.
- Eraikuntzak web orrietan jarri daitezke.

2.2.1. Cabri

80ko hamarkadaren hasieran, Frantziako Grenobleko Leibniz Laborategiko EIAH taldeak Cabri-Graph sortu zuen, grafikoen teoria lantzeko helburuarekin. Urte batzuk geroago, denbora errealean irudi geometrikoen manipulazioa, eraldaketa eta sorkuntza erraztuko zuen pakete batean pentsatu zen. Cabri-Géomètre, Jean-Marie Laborde-k garatu zuen Frank Bellemain-ekin elkarlanean. Ondoren, programa hau zenbait kalkulagailutan jarri zen, hots, kalkulagailu geometriko deiturikoetan.

Cabrirekin, geometriako gai batzuk, hala nola planoko transformazioak, leku geometrikoak eta problemen ebazpen grafikoa, matematikako ezagupen gutxirekin tratatu daitezke, ikaslea bere ikasketa-prozesuan modu aktiboan parte-hartzaile izateko errazte aldera, eta bere aurkikuntza propioen garrantzia nabarmenduz. Adibidez, posiblea da irudiak neurtzea, dagozkien ekuazioak adieraztea, haien propietate geometrikoak egiaztatzea eta horiekin lotutako kalkuluak egitea.

Cabri 3D-k hiru dimentsioko bistaratze-tresnak ditu, hala nola:

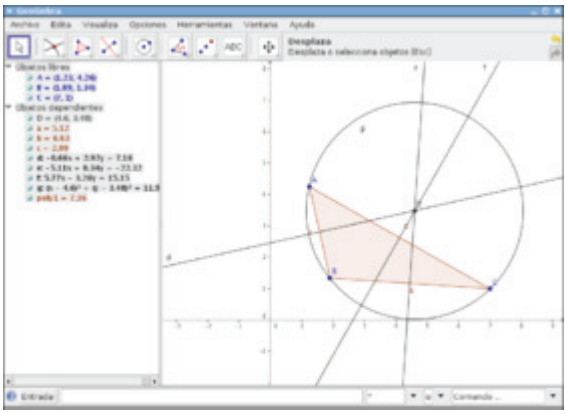
– Eszenatokiaren inguruan biratu, modu jarraituan bistako angelu batetik beste batera igaroaz. Sakontasuneko efektua balioztatzen du.
– Irudi beraren irudikapen eta perspektibak bistaratu: marrazketa teknikoaren 3 bistak, cavaliere perspektiba…

2.2.2. Geogebra

Geogebra matematikaren irakaskuntzarako eta hezkuntzarako diseinaturiko software matematiko askea eta elkarreragilea da. Sortzaileak, Markus Hohenwarter-ek, proiektuari hasiera eman zion 2001ean Salzburgoko Unibertsitatean eta Floridako Atlantic Unibertsitatean jarraipena.

Oinarri-oinarrian Geogebra «prozesadore geometriko» eta «prozesadore aljebraikoa» da, eta hortik datorkio izena, baina azken bertsioetan kalkulu-orria ere badago.

Geogebrarekin eraikuntzak egin daitezke puntuetatik, zuzenetatik, zuzenerdietatik, zuzenkietatik, bektoreetatik, koniketatik… eta abarretatik abiatuz, arratoiaren bidez edo komandoen bidezko tresnen erabiltze zuzenarekin. Trazaturiko guztia aldagarria da era dinamikoan: hots, B edozein objektu A-ren menpekoa bada, A aldatuz, B doituko eta freskatuko da, horrela A-rekiko dituen erlazioak mantenduz.



Geogebraren web orri ofizialetik bai programa bai eskuliburua jaitsi daitezke: <http://www.geogebra.org/>.

4.0 azken bertsioak hobekuntzak dakartza, hala nola objektu baten barruko puntu bat aukeratzea, editagarriak diren botoiak eta testu-eremuak eskaintzea, eskua altxatuta marraztu ahal izateko tresnak (arkatza), poligono trinkoak edo polilerroak marraztea. Aldagai bat baino gehiagoko funtzioen irudikapena egiteko ahalmena, logaritmoak eta Lehen Hezkuntzako ikasleentzako GeoGebraPrim deituriko bertsioa ere eskaintzen ditu.

Programaren hiru dimentsioko bertsioa prestatzen ari dira, eta planoak, piramideak, zilindroak eta esferak irudikatu ahal izango dira.

3. Matematikaren irakaskuntzarako baliabide didaktikoak

3.1. INTEF-EN PROIEKTUAK (HEZKUNTZA-TEKNOLOGIEN ETA IRAKASLEEN PRESTAKUNTZAREN INSTITUTU NAZIONALA)

Hezkuntza Teknologien eta Irakasleen Prestakuntzaren Institutu Nazionala Hezkuntza eta Zientzia Ministerioko erakundea da; azken urteotan informazioaren teknologiak hezkuntza-munduan txertatzeko proiektuak lantzen ari dira.

Helburuen artean, «heziketarako material digitalerako sarbidea» erraztea dago, eta matematikari dagokionez, «tresna digital berriekin matematika ikasteko eta irakasteko modu desberdin eta sortzaile bat» erakartzearena dago.

INTEFek bultzaturiko zenbait proiektu ondokoak ditugu edo izan ditugu:

- Descartes proiektua.
- PI proiektua: arbela elkarreragilea (Lehen Hezkuntza).
- CANALS proiektua: 150 jarduera Haur eta Lehen Hezkuntzarako.
- Curriculumeko material sarituak.
- Agrega proiektua: 140.000 objektu digital, 4 agregazio-mailarekin.
- Gauss proiektua.
- Praktika onak argitaratzeko sare soziala eta esperientziak elkarrekin trukatzeko materialak.
- Software askerako sarbidea.

3.1.1. Gauss proiektua

Matematikaren irakaskuntzari begira diseinatuta dagoen Gauss proiektua azpimarratu behar da; 500 jarduera baino gehiagorekin, asmo handiko «Eskola 2.0» izeneko proiektuaren barruan dago.

- Horrela dago egituratuta:
  - Proiektuak oinarrian du Geogebra.
  - Sarrerako materialak.
  - Erabiltzaileen foroa.

  - Ikasteko materialak.
  - Baliabide osagarriak.
  - Irakasleriaren prestakuntza.
  - Geogebrari buruzko informazio gaurkotuaren sarbiderako posta-zerrenda.
  - Jarduerak web orrian jarri daitezke.
- Proiektua ondoko printzipioek gidatzen dute:
  - Egiten ikasten da.
  - Matematika baliagarria eta ereduak aurkezten dituen matematika.
  - Testuinguru bati atxikitako estrategia zehatzak: zenbait aspektu orokortzen dira ikasketa formalago eta sintetizatuagoa lortzeko.
  - Konektibitatea: kontzeptuen arteko lotura eta prozeduren konbinazioa.
  - Komunikazioa: ideien eztabaida eta idatzitako txostena.
  - Orientabidea: epe ertain eta luzeari begirako helburuak.

Egoera aberatsak sortzea du helburu, halako moduan non manipulazioak matematika egitea eta ikastea ahalbidetuko duen (aldatu, behatu, esploratu). Erabilera askoko egoerak, testuinguru desberdinetatik eratorriak. Betidanik material egituratu hauekin planteaturiko arazoa izan da ikasle eta materialen arteko elkarreragina; adibidez, Google-n «matematika elkarreragileak» idatziz gero, helbide batzuk agertuko dira, elkarreragile izatetik urrun daudenak.

- Joan gaitezen, azaletik bada ere, proiektua azaltzera:

Lehen Hezkuntzan arretagunea jarriz, hiru zatitan banatzen da, eta horietako bakoitzak atal batzuk ditu:

  - Aritmetika: zenbaki arruntak, patroiak, zenbaki hamartarrak, buruzko kalkulua.
  - Geometria: asmakizunak, prozedurak, neurtu, angeluak, poligonoak, eskalak eta planoak, kurbak, simetriak, gorputzak.

Estatistika eta probabilitatea: zenbaketa, neurriak, estimazioa.

- Jarduerak:

Jarduera bat item didaktikoa da, halaber objektu digital deitua. Ikaslearen ekintza lagun-gai duten galdetegiekin datoz lagunduta; galdetegiak jarduera ebazteko lagungarriak dira. Bi botoirekin daude hornituta, bat erabilera-arauak lortzeko, eta, bestea, informazio osagarria lortzeko. Jarduera bakoitzari orientazio-maila bat esleitu zaio. Dena da irekia, jarduerak aldatu daitezke, jardueraren testua beste hizkuntza batera itzuli daiteke eta jarduera datzan Geogebraren eraikuntza aldatu. Lizentzia «creative commons» da, halako moduan non aldaketak baimenduta dauden baldin eta jatorrizko objektua aipatzen bada.

Lehen Hezkuntzarako 150 jarduera inguru daude, horietako zenbait DBHko beste batzuekin loturik (hori, jardueraren ondoan + ikurra jarriz adierazten da)

Jardueren adibideak:

– Tolestaketaren bidez adierazten den irudiren bat lortu.
– Triangeluaren zenbait puntu garrantzitsu ikasi.
– Karratuak diruditen irudi batzuk agertzen dira (8), baina manipulatzean bat baino ez dela karratua ikusarazten da.
– Zatigarritasuna ikasteko lagungarri den erlojua.
– Eskuaira, kartaboia eta angelu-garraiagailuak maneiatzeko jarduerak.
– Euritako baten funtzionamenduaren atzetik dauden matematikak, edo cassette zinta batenarena.
– Problema baten soluzioaren interpretazioa.
– Mateipuinak: istorio baten barruan kokaturiko problemak. Kontaketei ipuina jarri.

Adibidez, «Izardun poligonoak» izeneko jardueran, bost puntako poligono bat aurkezten da eta lau ekintza proposatzen zaizkio ikasleari:

1. Puntetako angeluak zirkuluerdiarekin neurtu.
2. Angeluak batu ikusteko 180º lortzen dela.
3. Errepikatu beste antolaera batekin.
4. Analisia: aieruak, ondorioak.

Jardueraren bigarren zatia, idatzizko txostenaren bidez, egindakoaren eta ikusitakoaren komunikazioan datza.

«Baliabide osagarriak», izeneko atalaren barruan eraikuntza solte asko daude eta mailakatutako jarduerak, Haur Hezkuntzatik hasita.

• Zenbait galdera:

Lehen Hezkuntzarako aplikazio elkarreragiletan ez ohi da curriculuma edukien blokeka jarduten, haatik jarduerakako tratamendua ematen zaio (interesguneak). Horrek, matematikaren irakaskuntzak, edo beste edozein ikasgairenak, erakarritako itaun praktiko batzuk sorrarazten ditu. Adibidez, hurrengoak:

– Non kokatzen da testuliburuen eta IKTen bidezko lanaren arteko oreka?
– Zer tratamendu ematen zaio ezagupenen sakabanatzeari?
– Ikasleek badakite, ikerketak egin ondoren, zer ikasi duten? (ikerkuntza-metodoan ikasketak finkatzea).

3.2. MATEMATIKARI BURUZKO WEB ORRIAK

3.2.1. Divulgamat

http://divulgamat.ehu.es/weborriak/RetosMatematicos/index.asp

Dituen atalen artean ondokoak azpimarratu behar dira:

- Matematikako erronkak: Hamabostaldiko problema (Santi Fernandez).
- Matematikaren historia: matematikari ospetsuen biografiak, matematikaren historian egindako lan nagusiak, matematikaren historia irudiaren bidez, Espainiako matematikarien biografiak eta karikaturak, XVI. eta XIX. mendeetako Espainiako matematikako liburuak eta egileen katalogoa.
- Matematikako umore grafikoa.
- Dibulgaziozko argitalpenak: matematikaren dibulgaziozko liburuak, bideo didaktikoak, matematika komunikabideetan…
- Irakurgaiak on-line: emakumeak eta matematika, 13 erretratu, matematikaren eskola-eguna…
- Erakusketa birtualak: argazkigintza eta matematika, artea eta matematika…
- Kultura eta matematika: papiroflexia eta matematika, musika eta matematika, antzerkia eta matematika, zinea eta matematika, literatura eta matematika…
- Internet-eko baliabideak: didaktikoak, Internet eta Lehen Hezkuntzarako matematika.

3.2.2. Matemáticas en tu mundo

http://catedu.es/matematicas_mundo/

Dituen atalen artean ondokoak azpimarratu behar dira:

- Matematika non?: artean, zineman, kiroletan, poesian, gizartean…
- Argazki matematikoak: fraktalak, espiralak, mosaikoak, natura…
- Umorea: txisteak, matematikariak eta beste gremioak, hanka-sartzeak (okerrak), umore grafikoa, ohi ez bezalako prentsa.
- Multimedia: Power-point eta bideoak.
- Sare sozialak: Eduardo Punset-ek matematikari bati elkarrizketa egiten dio (bideoa).
- Zinema: matematikariak intimitatean, matematika zineman eta telebista-saioetan (gelarako oparia).

3.2.3. Recursos de matemáticas en Internet

http://www.recursosmatematicos.com/redemat.html

Dituen atalen artean ondokoak azpimarratu behar dira:

- Eguneko matematikaria.
- Hezkuntza-mailaren arabera sailkatutako baliabideak: Haur Hezkuntza, Lehen Hezkuntza…
- Hezkuntzako legeak.
- Lotura batzuk.

3.2.4. Matematika: Antonio Perezen web orria

http://platea.pntic.mec.es/aperez4/

- Gauss proiektua.
- Eskola 2.0
- Matematika eta IKTak: Sestaoko Berritzegunean egindako elkarrizketa (http://platea.pntic.mec.es/aperez4/).
- Serie matematikoak bideotan: jakitearen abentura, gehiago gutxiagogatik.
- Matematikako ikur nagusien historia.

3.2.5. Geogebrari buruzko Manuel Sadaren web orria

Orri honetan geometria ikasteko Geogebrak eskaintzen dituen aukera didaktikoen adibide asko aurkitu daitezke

http://docentes.educacion.navarra.es/msadaall/geogebra/index.htm

3.2.6. Zientzianet :Elhuyar-en web orria

http://www.zientzia.net/

- Telebistako zientzia-saioa: Teknopolis.
- Irratiko zientzia-saioa: Norteko Ferrokarrila.
- Artikulua: Bazen behin zirkua (http://www.zientzia.net/informazioa/elhuyar/1996/114/pdf/A114_O09.pdf).
- Dosierrak (tabakoa, populazioaren bilakaera, petrolioa…).
- Zein da Pi zenbakiaren jatorria (grabazioa).

http://www.zientzia.net/multimedia_bist.asp?Multi_Kodea=18&formatua=galdera

3.2.7. Beste batzuk

– UNESCOren orria, matematikako gaien erakusketa aurki daiteke:

http://www.experiencingmaths.org/

– Hezkuntza-arlo eta maila guztietako irakasleek katalogaturiko eta iruzkinduriko baliabideak:

http://www.educacontic.es/

– Kuriositate matematikoak:

http://jakinmate.wordpress.com/

euskaraz planteaturiko aritmetika, geometria, jokuak eta problema batzuk planteatzen ditu (bloga).

– Pi zenbakiaren orria:

http://webs.adam.es/rllorens/pihome.htm

– RSMEren orria (Espainiako matematikako errege elkartea):

http://www.rsme.es/component/option,com_weblinks/catid,43/Itemid,23/

– J. Godinoren orria: maisu-maistrentzako matematika:

http://www.ugr.es/~jgodino/edumat-maestros/welcome.html

www.ugr.es/jgodino

– «Educared» orria:

http://www.educared.net/

– NCTMren orria:

www.nctm.org

– Maths Thesaurus:

http://thesaurus.maths.org

Datu-base eleaniztuna (egun 9 hizkuntza) sarbide askeko sarean, 4.000 baino kontzeptu matematiko gehiagorekin eta haien arteko 14.000 baino erlazio-lotura gehiagorekin. Bertsio ingelesa Cambridgeko Unibertsitatean garatzen da; Espainiakoa, Kantabriako Unibertsitatean.

3.3. TESTULIBURU DIGITALAK

Gaur egun argitaletxe gehienek beren heziketa material guztiak edo batzuk formatu digitalean ipini dituzte; horrek, neurri batean edo bestean, ikaslearekiko elkarreragina ahalbidetzen du, baita testuliburuaren diseinu pertsonalizatua ere, zeren eta ikasleak berak egindako elementu berriak barneratu baitaitezke. Egia

da, hastapenetan dagoen merkatua dela, 2011ko argitalpen-merkatu osoaren % 2 baino ez delako izan, haatik etorkizuneko aukera da, dagoeneko herrialde batzuetan hartutako erabakia baita, eta testuen garapenerako zenbait argitaletxerekin sinatutako akordioen bidez gauzatuko dena.

Testu digitalak dituzten argitaletxeetako batzuk ondokoak dira:

3.3.1. Digital-text

Zenbait ikasgaitako, horien artean matematika, Lehen Hezkuntzako 5. eta 6. mailetarako testuliburuak dituzte. Web orrian materialen laginen bat dago kontsultagai.

http://www.digital-text.com/

3.3.2. Argitaratzaileen nazio-elkartea (Asociación nacional de editores - ANELE)

Matematika ikasgairako eta irakaskuntza mota orokorrerako kontsulta eginez, 95 titulu agertzen dira, Lehen Hezkuntzakoak nola Bigarrenekoak.

http://anele.org/

3.3.3. INTEF

Wikididaktikan, «praktika onak» izeneko atalaren barruan, zenbait material dago, horien artean Lehen Hezkuntzarako matematikako batzuk, «objektu digital elkarreragile» izenburupean bataiaturik. Ondoko helbideetan daude:

http://recursostic.educacion.es/buenaspracticas20/apls/MediaWiki/index.php/P% C3% A1gina_Principal

http://recursostic.educacion.es/buenaspracticas20/apls/MediaWiki/index.php/ Categor% C3% ADas_de_Primaria

http://recursostic.educacion.es/buenaspracticas20/apls/MediaWiki/index.php/ Categor% C3% ADas_de_Matem% C3% A1ticas_en_Primaria

(azken helbidean matematikakoak daude)

4. Jarduerak

1. Egiazta itzazu aukeratutako web orriak existitzen direla eta badituztela seinalatutako atalak. Horrela ez bada, desberdintasunak azpimarratu. Baita azpimarratu orrialde bakoitzeko berezitasunak ere. Lehen Hezkuntzan, ikasgaia irakasteko, orrialdeen erabilera didaktikoarekiko erkaketa eta analisi kritikoa egin.
2. Bila itzazu, hizkuntza desberdinetan, interesgarri izan daitezkeen beste web orri batzuk. Seinala itzazu haien ezaugarriak eta berezitasunak.
3. INTEF dituen baliabideak, ikusi ahal izan duzunez, oso ugariak eta sailkatzen gaitzak dira. Haren barruan badaude berariazko proiektuak, materialak, blogak… eta abar. Sakontasunez aztertzea, sailkatzea eta Lehen Hezkuntzarako interesgarri deritzezunak aukeratzea proposatzen dizugu.
4. Liburu digitalei dagokienez, azter itzazu Lehen Hezkuntzarako aurki ditzakezun testuetako laginak eta azpimarra itzazu haien ezaugarri nagusiak eta paperezko testuliburuekiko dituzten desberdintasunak, abantailak eta eragozpenak. Benetan elkarreragileak al dira?
5. Marraz itzazu Logoren bidez, dortokari agindu egokiak emanez, hiru, lau, bost edo sei aldeko poligono batzuk.
6. Zenbait testuliburutan dortoka erabiltzen da planoko orientazioaren sarbide gisa. Bila ezazu jardueraren bat helburu hori duena eta Logo mintzairaz transkribatu. Diseina ezazu helburu bera duen beste jarduera bat. Zer beste aukera didaktiko ikusten dizkiozu Logo erabiltzeari?
7. Seinala itzazu Geogebra programaren elementu nagusiak. Adieraz ezazu nola eraiki daitezkeen zenbait oinarrizko eraikuntza (poligonoa, erdibitzailea…). Azter itzazu Lehen Hezkuntzarako prestatutako aplikazio didaktiko aniztunak eta seinala itzazu haien balizko ahalmen didaktikoak.
8. Bila eta sailka itzazu Geogebrarekin erlazionatutako eta interesgarri deritzezun zenbait orri.
9. Adieraz ezazu zure iritzia, txosten txikia idatziz kontrako eta aldeko alderdiekin, ezaguna den ondoko iritziari buruz: «Informatika eta IKTak ondo daude elementu motibatzaile eta laguntza gisa, baina beti testuliburuari lagunduz».

Sailean argitaratu diren beste liburu batzuk

Giza zientziei egokitutako Estatistika
Juan Etxeberria
1989n argitaratua
ISBN: 84-86967-12-0

Bioestatistika
Arantza Urkaregi
1991n argitaratua
ISBN: 84-86967-37-6

Kalkulu diferentziala eta integrala I
Joserra Aizpurua eta Patxi Angulo (koord.)
1992an argitaratua
ISBN: 84-86967-47-3

Kalkulu diferentziala eta integrala II
Joserra Aizpurua eta Patxi Angulo (koord.)
1992an argitaratua
ISBN: 84-86967-48-1

Ekuazio diferentzialak. Aplikazioak eta ariketak
Elena Agirre (euskaratzailea)
1994an argitaratua
ISBN: 84-86967-63-5

Optimizazioa. Programazio lineala
Victoria Fernandez eta Ana Zelaia
1992an argitaratua
ISBN: 84-86967-65-1

Estatistikarako Sarrera
Karmele Fernandez
1996an argitaratua
ISBN: 84-86967-70-8

Estatistikarako Sarrera. Ariketak
Karmele Fernandez, Josu Orbe, Marian Zubia
1997an argitaratua
ISBN: 84-86967-80-5

Estatistika I eta Estatistika II. Ariketak

Karmele Fernandez, Josu Orbe, Marian Zubia
1996an argitaratua
ISBN: 84-86967-79-1

R Hasiberrientzat

Gorka Azkune eta Yosu Yurramendi (itzul.)
2005ean PDFn argitaratua
ISBN: 84-86967-077-7

Estatistikaren oinarriak. Ariketak

Elena Agirre Basurko
2006an argitaratua
ISBN: 84-86967-079-3

Kalkulu diferentziala eta integrala (2. argitalpena)

Patxi Angulo
2009an argitaratua
ISBN: 978-84-8438-236-2

Erregresio lineala, bariantza-analisiak eta hipotesi-testak. Datu-analisirako lanabesak

Xabier Isasi Balanzategi
2010ean argitaratua
ISBN: 978-84-8438-290-4

Estatistikaren Oinarriak. Ariketak (2. argitalpena)

Elena Agirre Basurko
2010ean argitaratua
ISBN: 978-84-8438-288-1

Ekuazio diferentzial arruntak askatzeko zenbakizko metodoak

Elisabete Alberdi Celaya
2012an argitaratua
ISBN: 978-84-8438-419-9

R Commander eta Datuen Analisia

Paula Elosua Oliden eta Juan Etxeberria Murgiondo
2013an argitaratua
ISBN: 978-84-8438-443-4