udako euskal unibertsitatea

FISIKA GENERALA

IRUINEA 1978

V

Banco de Vizcayak

BABESTUTAKO ARGITARAPENA

EDICION PATROCINADA POR EL

Banco de Vizcaya

F I S I K A G E N E R A L A

LEHEN TOMOA:

MEKANIKA

J.R. ETXEBARRIA BILBAO

1977-78 IKASTURTEA

LEJOA

SARRERA

Lan hau Lejoako Zientzien Fakultatean burutu da, 1977-78 ikasturtean zehar. Kimikazko espezialitateak egin nahi dituzten ikasleek lehen ikasmailako Fisika General asignaturaren programaren lehen lauhilekoari atxikirik doa.

Lehen projektu batetan, euskara hutsez eta ofizialki eman nahi ukan genituen ikastaldiak. Hala ere zenbait oztopo zirela eta, azkenean extraofizialki eman ditugu eta ematen dihardugu.

Erabiltzen ari garen lan-metodoa hauxe da: Ikastaldi ofizialez -gaztelaniaz- gainera, astean behin mintegi bat egiten dugu euskara hutsean. Bertan eskuzkribu hauk erabiltzen ditugu -fotokopiatuz-, materiale teoriko gisa. Mintegietan, ikasleek Fisika euskaraz ikasteko aukera dute, batetik euskara landuz eta bestetik Fisikazko zalantzak argituz. Gainera, ikasleek aukeraturiko problemak ebazten eta eztabaidatzen ditugu.

Fisikazko mintegi hauekin batera, Kimika, Biologia eta Matematikari buruzkoak ere ba daude, J.Iturbe, J.M.Txurruka, I.Gurtubai eta J.M.Arregi irakasleek eta lan eskergan diharduten hirugarren, laugarren eta bostgarren kurtsuetako ikasleek parte hartzen dutelarik.

Oinharriak finkatzeko asmoz egiten ari garen lan honek, jarraitzaile hoberik edukiko ahal du

Bilbon, 1978.eko Martxoaren 19an

AURKIBIDEA

SARRERA

LEHEN GAIA: IDEIA OROKORRAK

Espazioa eta denbora Fisika Klasikoan. Magnitude fisikoak. Eskalareak eta bektoreak. Gainezarmenaren printzipioa. Oinharrizko magnitudeak eta magnitude deribatuak. Unitate-sistemak. Dimentsioen ekuazioak. 6

BIGARREN GAIA: KALKULU BEKTORIALA

Erreferentzi sistemak. Eskalareak eta bektoreak. Bektore askatuen algebra. Bektoreen batuketa. Eskalare eta bektorearen biderkaketa. Bektoreen konposatuak. Biderkaketa eskalarra eta biderkaketa bektoriala. Hiru bektoreren biderkaketa mixtoa. Kurtsoreen sistemak. Kurtsore baten momentua. Kurtsore-sistema baten erredukzioa: tortsorea. Kasu bereziak: sistema konkurrenteak, koplanariak eta paraleloak. 16

HIRUGARREN GAIA: PUNTUAREN KINEMATIKA

Puntu material baten higiduraren abiadura eta azelerazioa. Azelerazio konstanteko higidura. Azelerazioaren konposatu tangente eta normala. Higidura zirkularra. Abiadura angularra. Azelerazio angularra. Azelerazio lineala. Higidura makurduna launean. 38

LAUGARREN GAIA: HIGIDURA ERLATIBOA

Abiaduraren eta azelerazioaren izakera erlatiboa. Fransaldatzezko higidura erlatiboa. Bira uniformezko higidura erlatiboa. Higidura erlatibo generala. Coriolisen azelerazioa. 62

BOSTGARREN GAIA: MEKANIKAREN PRINTZIPIOAK
PARTIKULAREN DINAMIKA

Inertziaren printzipioa. Newtonen lehen legea. Galileoren transformakuntza eta inertziaren printzipioa. Momentu linea la. Momentu linealaren kontserbapenaren printzipioa. Indarkontzeptuaren definizioa: Newtonen bigarren eta hirugarren legeak. Kontaktu-indarrak: Indar normala eta igurtzimenduzko indarra. Igurtzimenduzko indarrak fluidoetan. Momentu angularra. Indar zentralak. Sistema ez-inertzialak. Inertzi indarrak. Lurra erreferentziazko sistema bezala. 79

SEIGARREN GAIA: LANA ETA ENERGIA

Indar baten inpultsua. Indar baten lana. Potentzia. Energia kinetikoa. Energia potentziala. Energia mekanikoaren kontser bapena. Funtzio eskalar baten gradientea. Indar zentral kontserbakorren peko higidura. Indar ez-kontserbakorrak. Energia eta ekilibrioa. 112

ZAZPIGARREN GAIA: PARTIKULA-SISTEMEN DINAMIKA

Masa-zentrua eta grabitate zentrua. Partikula-sistema baten masa-zentruaren higidura. Masa erreduzitua. Momentua angularraren teorema. Sistema baten energia kinetiko eta potentzia la. Energia propioa. Energia osoa. Txokeak. 138

ZORTZIGARREN GAIA: SOLIDO ZURRUNA

Lotur baldintzak. Sistema baten askatasun-graduak. Euler-en anguluak. Solido baten abiaduro eremua. Transaldatze eta bi ra hutsak. Solidoaren momentu angularra. Inertzi tentsorea. Inertziako ardatz eta momentu nagusiak. Inertzi elipsoidea. Inertzi momentuen kalkulua. Poinsot-en formula. Steiner-en formula. Inertziako momentu polarra. 160

BEDERATZIGARREN GAIA: SOLIDO ZURRUNAREN DINAMIKA

Solidoaren dinamikaren ekuazioak. Indarren sistemaren tortsorea, Solido zurrunaren energia kinetikoa. Bira librea. Ardatz fixoaren inguruan biratzen ari den solidoaren higidura. Zenbait adibide.

HAMARGARREN GAIA: ESTATIKA

Puntu material baten ekilibrio-baldintzak. Solido baten ekilibrio-baldintzak. Solidoak eta loturak. Lan birtualen printzipioa.

1. GAIA - IDEIA OROKORRAK

1.1 ESPAZIOA ETA DENBORA FISIKA KLASIKOAN
1.2 MAGNITUDE FISIKOAK, ESKALAREAK ETA BEKTOREAK
1.3 GAINEZARMENAREN PRINTZIPIOA
1.4 OINHARRIZKO MAGNITUDEAK ETA MAGNITUDE DERIBATUAK
1.5 UNITATE-SISTEMAK
1.6 DIMENTSIOEN EKUAZIOAK

1.1 ESPAZIOA ETA DENBORA FISIKA KLASIKOAN

Fisika Klasikoaren oinharrian espazio eta denboraren ideia dago. Bi kontzeptu hauk intuitiboki edo definitzen ditugu eta absolututzat jotzen ditugu. Fisika Klasikoaren arlotik irteten ez garen bitartean, espazioak eta denborak orain aipatuko ditugun propietateak dituztela onhartuko dugu. Horrek, ordea, ez du esan nahi horrelakoak direnik; eta Mekanika Kuantikoaren edo Fisika Erlatibistaren arloetara pasatzean, kolokan jarriko dira.

Geometria euklidearrean finkatuz, espazioari buruzko ideia intuitiboa dugu. Espazioak hiru dimentsio dituela, isotropoa dela -hots direkzio guztietan berez propietate berdinak dituela- eta infinitua dela onhartzen dugu. Halaber, bi punturen arteko distantziarik laburrena, bi puntuak lotzen dituen zuzenaren direkzioan neurtzen dena dela, eta gainera distantzia hori neurri absolutua dela. Absolutua dela esatean, zera esan nahi dugu, halegia, edozein behatzailek denbora une berean bi puntuen posizioa kontsideratzean, distantzia hori berbera dela. Zer esanik ez, absolututasun honek mugatu egiten du Fisika Klasikoaren arloa, zeren eta, Erlatibitatearen teorian sartuz, bi punturen arteko diotantzia behatzailearen abiaduraren funtzioan baitago (erlatibitate espeziala) eta, bestalde, espazioaren kurbatura ere kontutan hartu behar baita (erlatibitate generala).

Denborarekin ere berdintsu gertatzen da. Intuitiboki jokatuz, denbora etengabe handituz doan magnitude bat dela kontsideratzen dugu, Magnitude hori erlojuen bidez neurtzen da. Kasu honetan ere, denbora zerbait absolututzat hartzera jotzen dugu, eta egin ere, horrela egiten dugu Fisika Klasikoan. Hau da, bi gertakariren artean pasatzen den denbora, berdina izanen dela edozein behatzalek neurturik kontsideratzen dugu. Ba dakigu, hala ere, Erlatibitatearen Teoriaren arauera, bi gertakariren simultaneitatea bera ere kontzeptu erlatibo bat dela.

Dena den, Fisika Klasikoan erabiltzen diren espazio eta denbora absolutuak guztiz zehatzak ez badira ere, esan beharra dago, ezen kontzeptu horien erlatibotasuna abiadura handien kasuan baino ez dela nabaritzen. Hain zuzen ere, erlatibotasuna nabari dadin, abiadurek argiaren abiadurarekin konparatzeko modukoak izan behar dute. Eta Fisika Klasikoaren arloan abiadura ttikiak aztertuko ditugunez, ez dugu inolako problemarik ukanen, denbora eta espazioa absolututzat hartzeagatik.

Bestalde, Erlatibitatearen Teoria ez doa Fisika Klasikoaren aurka; aitzitik, berearen osagarri da. Eta Erlatibitatearen Teorian ageri diren formula eta adierazpenak, limitean, abiadura ttikien kasuan halegia, Fisika Klasikoan ageri diren berberak dira. Honek ez gaitu harritu behar, zeren azken batez Fisikan azaltzen diren legeak errealitatearen hurbilketa baino ez baitira, eta denak batituzte zenbait muga beren aplikapenerako.

1.2 MAGNITUDE FISIKOAK. ESKALAREAK ETA BEKTOREAK

Magnitude hitza etengabe agertuko zaigunez, lehenik eta behorrekin adierazi nahi dugun kontzeptua definituko dugu. Zer da magnitude fisikoa? Laburki esanik, «magnitude fisikoa neurtu egin daitekeen edozer gauza da, berarен izaera gizonaren eraginetik aparte geratzen delarik».

Bi faktore daude, beraz, magnitude kontzeptuaren definizioan. Batetik, neurtu egin daitekeen zerbait dela. Bestetik, gizonak parte hartu gabe ere ba direla; honek ez du esan nahi, noski, gizonak alda ez ditzakeenik, izaeraz gizonaz kanpokoa dela baizik.

Zenbait magnitude aipatzearren, hona hemen batzurenizenak: abiadura, masa, denbora, indarra, lana, ...

Matematikoki kontsideratuz, ordena desberdineko tentsoreak direla esan dezakegu. Zero ordenekoak, eskalare deitzen dira,

eta hurrengo gaian ikusiko dugunez, numero batez adierazten dira osorik. Eskalareen artean, denbora, lana, masa eta beste ditugu. Lehen ordenekoak, bektore deitzen dira. Hauk geometrikoki definitzeko, numero batez gainera, zein direkziotakoak diren ere esan behar da. Hauen artean abiadura eta indarra ditugu, adibidez. Ba dira magnitude konplikatuagoak ere, baina oraingoz ez du merezi horretan sakontzerik.

Edozein modutan, lege fisikoak agertzen dituzten expresioetako magnitudeei buruzko zenbait ohar egitea komeni da. Fenomeno fisikoak eredu matematikoen bidez aztertzen dira, Matematika baita fenomenook aztertzeko erabiltzen den hizkuntza. Hori egitean sortzen diren ekuazioek kobariante izan behar dute: Hau da, ekuazioaren parte biek maila eta era bereko tentsoreak izan behar dute. Sinpleago esanik, honek zera esan gura du, hala legia, lehen partea bektorea bada, bigarrenak ere bektore izan behar duela, eta lehena eskalare bada, bigarrenak ere eskalare izan beharko duela.

1.3 GAINEZARMENAREN PRINTZIPIOA

Printzipio hau askotan erabiliko dugu Fisikako edozein arlotan. Fenomeno ber baten iturburu edo sortzaile desberdinak gaudenean erabiltzen da. Zera dio: "Sortzaile desberdinen ondorioak gainezarri edo batu egiten dira, magnitudeari dagokion moduan". Hau da, ondorioa adierazten duen magnitudea eskalarea bada, eskalarki batzen dira; eta bektorea bada, bektorialki batu beharko dira.

Adibideak milaka jar daitezke. Demagun, kasu batetarako, gorputz ber baten gainean eragiten ari diren indarrak. Gainezarmenaren printzipioaren arauera -gorputza elastikoa ez bada behitzat- gorputza indar erresultantearen eta beronekin doan momentuaren eraginpean (ikus hurrengo gaiko "kurtsoreen sistemak") higituko da. Baina indarrak (eta berauen momentuak) bektorialki batu beharko dira, noski.

Modu berean elektrostatikan, karga multzo batek sorturiko ere mu elektrikoa, bakoitzak sorturikoaren batuketa bektoriala da. Eta horrela, beste adibide asko.

1.4 OINHARRIZKO MAGNITUDEAK ETA MAGNITUDE DERIBATUAK

Gertakari fisikoen behaketa kualitatiboki eta kuantitatiboki egin daiteke. Eta egin ere horrela egiten da. Kualitatiboki aztertuz, gertakariaren tasun edo kualitate bakoitza magnitude moeta bat da. Eta magnitude bakoitza kuantitatiboki neurtzen da. Izatez, gutti gorabehera, horixe izan da magnitudearen definizioa:

«neurtu egin daiteken zerbait»

kuantitatea — kualitatea

Has gaitezen ikuspegi kuantitatiboa aztertzen. Ikuspegi honen sostengua, neurketa da.

Neurketak. Magnitude moeta bakoitzari dagokionez, teknika egokiak daude neurketak egiteko.

Magnitude batzuren kasuan, propietatea patroi batekin -unita tearekin- konparatuz neurtzen da. Horrela numero bat lortzen da, patroiaren unitateetan adierazten dena.

Beste kasu batzutan neurketaren definizio operazionala egiten da. Adibidez, abiaduraren kasuan, lehenik luzera eta gero denbora neurtuz (biak batera, hobeki esanik), bi magnitude horien zatiketaz lortzen da abiadura.

Neurketetako perturbaketak. Sarri, neurtzerakoan aldatu egiten ditugu inguruko baldintzak eta neurketa ez da, beraz, izan behar zuena. Honelako kasuetan perturbaketa bat gertatu dela esan ohi da. Demagun, adibidez, termometro baten bidez edalontzi batetako uraren tenperatura neurtu nahi dugula. Baina termometroa uretan sartzean, urarenaz bestelako

tenperatura badu, aldatu eginen da pixka bat uraren tenperatura, eta termometroak neurtuko duena ez da izanen aurretik zegoèn berbera.

Perturbaketez gainera, errore esperimentalak ere hartu behar ditugu kontutan. Neurgailua perfektua ez dela edo gaizki erreglaturik dagoela, nekaturik gaudela, metodoa egokia ez dela, eta beste mila arrazoi dela, okerrak ageri dira gure neurketetan gu konturatu gabe: errore esperimentalak. Neurketak gure mugen barnean ongi egon daitezen, edozein modutan perturbaketek errore esperimentalek baino ttikiagoak izan behar dute.

Perturbaketa sistematikoa denean, kalkulatu egiten da eta gero korrekzio edo zuzenketak egiten dira neurketetan. Adibidez termometro eta kalorimetroen kasuan, bien bero espezifikoak kontutan hartuz oso erraza da zuzenketak egitea.

Dena den, perturbaketen balio erlatiboa oso kontutan edukitzekoa da zuzenketak egiterakoan. Fenomenoaren eta neurgailuak sortzen duen perturbaketaren mailak konparagarriak badira, hots, maila berdinekoak badira, orduan beharrezkoa da zuzenketa egitea. Baina, perturbaketa erlatiboki ttikia bada, ez du merezi zuzenketarik egitea. Adibidez, termometro batek gela baten tenperatura neurtzean sortzen duen perturbaketa, guztiz arbuiagarria.

Sistema mikroskopikoetan, jadanik Mekanika kuantikoaren arloan sartuz, prezisioaren kontzeptuak beste bat hartzen du, erditik inzertidumbrearen printzipioa baitago:

$$\Delta x \cdot \Delta p \geq \hbar$$

Honen arauera ez da posible magnitude konjokatuetan zehaztasun osorik lortzea.

Ikuspegi kuantitatiboa nolabait landu ondoren, goazen orain magnitudeen izakera kualitatiboa aztertzera.

. Oinharrizko magnitudeak. Kualitatiboki era askotako magnitude fisikoak dauden arren, beren artean era desberdinetako erlazioak daude. Magnitude batzu, ordea, ezin dira gehiago simplifikatu, eta horregatik oinharrizkoak direla esaten da. Sei dira Fisikaren oinharrizko magnitudeak:

- luzera
- masa
- denbora
- korronte elektrikoaren intentsitatea (batzutan oinharrizko magnitude gisa karga elektrikoa hartzen da)
- tenperatura termodinamikoa
- argi-intentsitatea

. Magnitude deribatuak. Beste magnitude fisiko guztiak lehengoen konbinaketez lortzen dira. Mekanikaren arloan agertzen diren oinharrizko magnitude bakarrak, lehen hirurak dira (luzera, masa eta denbora). Honela, indarra masa eta azelerazioaren biderketaz lortzen da:

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

azelerazioa, abiaduraren denborarekiko deribatua izanik, eta abiadura, posizio-bektorearen (luzera) denborarekiko deribatua:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} \qquad \vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

$\vec{a}$: azelerazioa
$\vec{v}$: abiadura
t : denbora

1.5 UNITATE SISTEMAK

Oraintsu arte era askotako sistemak erabili badira ere, gaur egun mundu osoko zientzilariek unitateen sistema internazionala erabiltzen dute ia exklusiboki. Sistema hau MKSAKC siglez ezagutzen da, sei oinharrizko unitateen sinboloak direlarik:

M : Metro (luzera)
K : Kilogramo (masa)
S : Segundu (denbora)
A : Ampere (korronte elektrikoaren intentsitatea)
K : Kelvin gradua (tenperatura)
C : Kandela (argi-intentsitatea)

Batzutan, amperea erabili beharrean coulomb izeneko unitatea (karga elektrikoa) erabiltzen da.

Sistema internazional hau, Giorgi sistema ere izan da deitua, lehen lau unitateei dagokienez behintzat.

Lehenago cgs sistema ere erabili izan da.

c : (cm) zentrimetro
g : gramo
s : segundu

Zenbait liburutan sistema teknikoa ere erabili izan da. Honetaz, ez da masa oinharrizko magnitude gisa erabiltzen. Masaren ordez, pisua (indarra) hartzen da oinharritzat.

Sistema anglosaxoietan unitateak konplikatu egiten dira, pulgadak (luzera), libak (masa) eta antzerako gauzak erabiltzen baitziren.

1.6 DIMENTSIOEN EKUAZIOAK

Dimentsioen ekuazioek edozein magnitudek oinharrizko magnitudeekiko duen konposizioa adierazten dute. Mekanikaren arloan hiru oinharrizko magnitudeak honela adierazten dira

masa M
luzera L
denbora T

Magnitude fisikoen dimentsioen ekuazioak, magnitude hori adierazten duen letra kortxete artean jarriz adierazten da. Demagun, adibidez, indarra:

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

Beronen dimentsio-ekuazioa hauxe da:

$$[F] = [ma] = [m][a] = M\,L\,T^{-2}$$

Hau da, masa, luzera eta denboraren bigarren potentzia negatiboa biderkatuz lortzen da indarra. Beraren unitateak, MKS sisteman, hauxek izanen dira:

$$\text{indar unitatea} \longrightarrow K \cdot m\, s^{-2}$$

$$\left(\frac{\text{Kilogramo. metro}}{\text{segundu}^2}\right)$$

Ikus ditzagun zenbait magnituderen dimentsio-ekuazioak:

. Pisu espezifikoa

$$[\gamma] = \left[\frac{\text{Indarra}}{\text{Bolumena}}\right] = \frac{M\,L\,T^{-2}}{L^3} = M\,L^{-2}\,T^{-2}$$

. Dentsitatea (masa espezifikoa)

$$[\rho] = \left[\frac{\text{Masa}}{\text{Bolumena}}\right] = \frac{M}{L^3} = M\,L^{-3}$$

Ikusten denez, sarri nahasturik erabiltzen diren bi magnitude hauk, oso desberdinak dira dimentsionalki.

. Lana

$$[W] = \left[\vec{F} \cdot \Delta\vec{\ell}\right] = M\,L\,T^{-2}\,L = M\,L^2\,T^{-2}$$

. Energia kinetikoa

$$[E_k] = \left[\frac{1}{2}mv^2\right] = M\left(L\,T^{-1}\right)^2 = M\,L^2\,T^{-2}$$

. Energia potenziala

$$[E_p] = [mgh] = M[a]L = MLT^{-2}L = ML^2T^{-2}$$

Kasu honetan, ostera, izen desberdineko hiru magnitude hauek dimentsio-ekuazio berbera dute.

Dimentsio-ekuazioek garrantzia dute lege fisikoak idaztean, zeren eta ekuazioen parte biek kobariante izan behar duten modu berean, dimentsio-ekuazio berbera eduki behar baitute.

Bukatzeko, zenbait magnitude erlatiboren kasua aipatuko dugu. Hauk, dimentsio-ekuazio berbera duen beste magnitude batetiko definitzen dira eta horrela ez dute dimentsiorik. Zenbait adibide jarriko ditugu:

. Dentsitate erlatiboa: Uraren dentsitatearekiko definitzen da

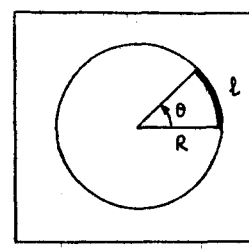
$$[\rho_e] = \frac{[\rho]}{[\rho_{ura}]} = \frac{ML^{-3}}{ML^{-3}} = M^0L^0T^0$$

Ez du dimentsiorik.

. Angulua. Radian-etan honela neurtzen da angulua

$$\theta = \frac{\ell}{R}$$

$$[\theta] = \frac{[\ell]}{[R]} = \frac{L}{L} = M^0L^0T^0$$



Gauza bertsua gertazen da estereoradiana definitzean (angulu solidoa, halegia).

Honelako magnitude erlatibo batzutatik beste magnitude batzu atera daitezke. Adibidez, abiadura angularra, angulua denboraz zatitzean lortzen da:

$$\omega = \frac{\theta}{t}$$

$$[\omega] = \frac{[\theta]}{[t]} = T^{-1}$$

2. GAIA - KALKULU BEKTORIALA

2.1 ERREFERENTZI SISTEMAK

2.2 ESKALAREAK ETA BEKTOREAK

2.3 BEKTORE ASKATUEN ALGEBRA

- BEKTOREEN BATUKETA
- ESKALARE ETA BEKTOREAREN BIDERKAKETA
- BEKTOREEN KONPOSATUAK
- BIDERKAKETA ESKALARRA ETA BIDERKAKETA BEKTORIALA
- HIRU BEKTORERENBIDERKAKETA MIXTOA

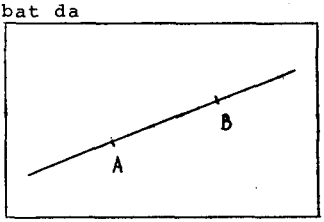
2.4 KURTSOREEN SISTEMAK

- KURTSORE BATEN MOMENTUA
- KURTSORE-SISTEMA BATEN ERREDUKZIOA: TORTSOREA
- KASU BEREZIAK: SISTEMA KONKURRENTEAK, KOPLANARIAK ETAPARALELOAK

2.1 ERREFERENTZIAZKO SISTEMAK

Fisikazko gertakarien azterketa matematikorako, guztiz beharrezkoa da puntuak lekutzen jakitea eta horretarako erreferentzi sistema bat eduki behar da. Lehen mailan sistema cartesiarrak erabiliko ditugu. Horrelako sistemak puntu batetatik pasatzen diren hiru direkzio elkarrekiko perpendikularren bidez adierazten dira, eta sistema bakoitzak triedro izena hartzen du. Erreferentzi sistemen kontzeptua argi edukitzeko, zenbait kontzeptu sinpleago adierazi behar dira aurretik.

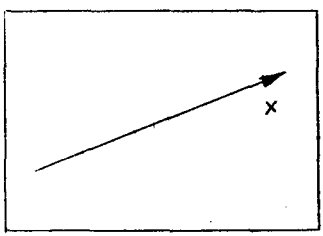
- Direkzioa zer den. Hitz laburrez esanik, zuzen orientatu bat da



AB zentzuan hartzen bada, $+a$ izanen da

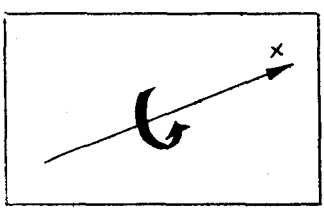
BA zentzuan harturik, $-a$

Honela errepresentatzen da x direkzioa

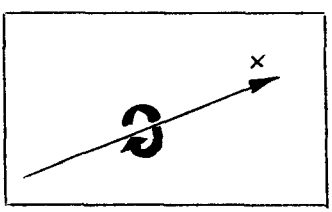


Oharra: Izatez, zenbait textutan direkzio eta sentiduaren arteko desberdintasuna markatzen da. Beste batzutan sinonimotzat hartzen dira.

- Ardatz baten inguruko birak. Hemen dagoen problema bakarra, hitzarmen (konbenio) bat egin beharra da.



bira direktua
torloju arruntek duten erregelaren arauerakoak



bira inbertsua
torlojuaren erregelaren aurkakoa

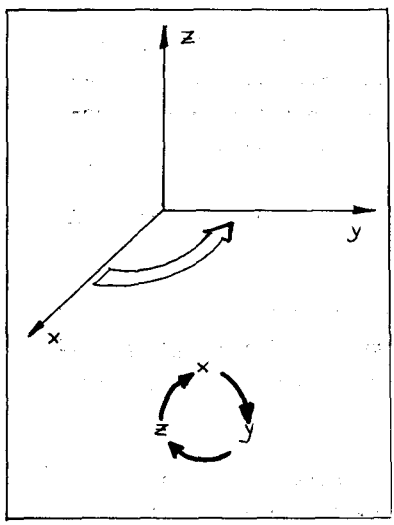
Biren kasuan beste sinbologia hau ere erabiltzen da

⊗ : bektorea paperean perpendikularra eta barrurantz sartzen

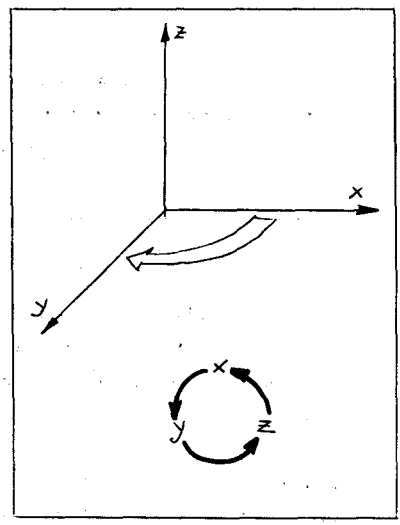
⊙ : paperaren perpendikularra eta kanporantz irteten.

- Triedroak. Dakigunez, Fisikaren espazio klasikoak hiru dimentsio ditu. Horregatik hiru direkzio perpendikular hartzen dira oinharritzat (cartesiar koordinatuak).

  Biren kasuko hitzarmenak kontutan hartuz, bi eratako triedoak har daitezke



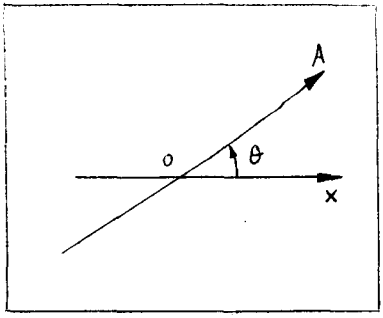
hitzarmen direktua
triedro direktua



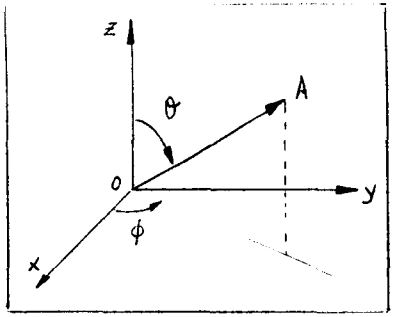
hitzarmen inbertsua
triedro inbertsua

Gaur egunean, Fisikaren arloan triedro direktua da nagusi. Bestea ez da ia erabiltzen.

Erreferentzi sistemekin bukatzeko, eta behar ditugun kontzeptuak definiturik ditugularik, launean eta espazioan direkzioak nola definitzen diren ikusiko dugu:



Launean, OA direkzioa angu lu baten bidez definitzen da



Espazioan, ordea, bi angulu eman behar dira direkzio hori zehazteko.

2.2 ESKALARE ETA BEKTOREAK

Magnitude fisiko batzu adierazteko, nahikoa da numero bat eta beronen unitatea adieraztea. Eta gainera, magnitude horrek balore berbera du edozein erreferentzi sistematatik ikusiz. Horrelako magnitude fisikoak, eskalare deitzen dira.

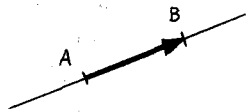
Adibide batzu jartzearren, denbora, masa, lana, eta abar aipatuko ditugu.

Beste magnitude fisiko batzuren kasuan, kantitateaz gain direkzioa ere adierazi behar izaten da. Magnitude horik bektore deitzen dira. Hauen artean, posizio-bektorea, abiadura, indarra eta abar ditugu.

Liburuetan, eskalareak letra arruntez idazten dira eta bektoreak letra bereziz. Apunteetan, bektoreei gezi bat jartzen zaie gainean

Eskalareak		Bektoreak	
m	(masa)	$\mathbb{F}$ edo $\vec{F}$	(indarra)
t	(denbora)	$\mathbb{v}$ $\vec{v}$	(abiadura)
W	(lana)	$\mathbb{r}$ $\vec{r}$	(posizio-bektorea)

Bektoreak honela ere idazten dira



$$\vec{AB} = (B - A)$$

Bektoreen ezagugarrietako bat modulua da. Honela adierazten da

$$\vec{V} \longrightarrow |\vec{V}| = V \quad (\vec{V}\text{-ren modulua})$$

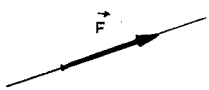
Modulu unitatea duten bektoreak bektore unitari deitzen dira. Ardatzen direkzioetan daudenak honela adierazten dira:

$$\left.\begin{array}{ll} x & \vec{i} \\ y & \vec{j} \\ z & \vec{k} \end{array}\right\} \text{ Alonso-Finn liburuan } \left\{\begin{array}{l} \vec{u}_x \\ \vec{u}_y \\ \vec{u}_z \end{array}\right.$$

Hiru moetatako bektoreak daude.

. Bektore askatuak. Espazioko edozein puntutan aplika daitezke. Guztion ordezkari gisa, bat har daiteke, gero paraleloki edonora eramateko. Bektore hori ekipolente deitzen da. Adibide gisa, ardatz cartesiarren direkzioko bektore unitariak askatutzat jotzen dira.

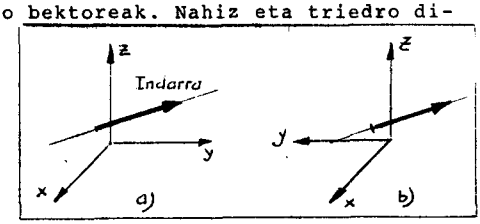
. Bektore labainkorrak (deslizanteak). Hauk zuzen baten edozen puntutan aplika daitezke.
Kurtsore izenaz ere ezagutzen dira
Hauen artean indarrak ditugu.



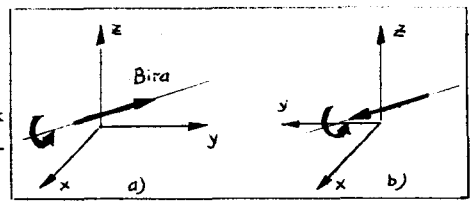
. Bektore lotuak. Puntu bakar batetan aplikaturik baino ez dute zentzurik. Aplikazio-puntu finkoa dute beraz. Hauen artean, puntu baten abiadura aipa dezakegu.

Bestelako sailkapen batzu ere egin daitezke. Adibidez, ondoko hau:

. Bektore polareak. Benetako bektoreak. Nahiz eta triedro direktutik inbertsura pasa, direkzio etasentido berberaz ageri dira. Indarra adibidez



. Ardatz bektoreak, edo bektore axialak, sasibektoreak ere deituak. Hauk hitzarmen batetan finkaturik dute sentidoa eta direktutik inbertsura aldatzean, hitzarmena aldatzen denez, sentidoz aldatzen dira. Hauen artean birak ditugu.



Bukatzeko, lege **fisikoen kobariantzia** aipatu behar dugu. Lege fisiko baten formulaketan agertzen diren termino guztiek kobariantzia izan behar dute, hau da, lehen zatian bektore bat badago, bigarrenean ere bektorea egon beharko da

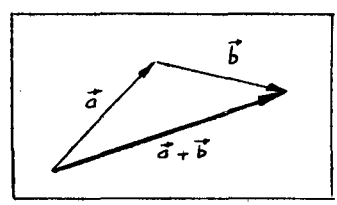
bektore = bektore
eskalare = eskalare

2.3 BEKTORE ASKATUEN ALGEBRA

Puntu honetan geometrikoki azalduko ditugu bektore askatuekin egin daitezkeen eragiketen propietateak. Banan banan aztertuko ditugu.

. Bektore batuketa

Bi bektoreren baketa egiteko bata bestearen atzetik jartzen dira irudian bezala



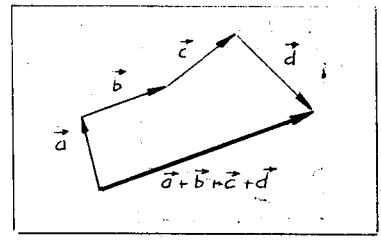
Bektoreen batuketak bi propietate ditu:

a) Konmutakorra (trukakorra)

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$$

b) Asoziakorra (elkarkorra)

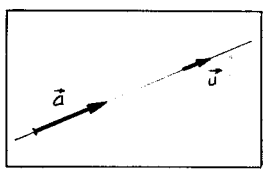
$$\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$$



. Eskalare eta bektore baten arteko biderkaketa

f eskalarearen eta $\vec{a}$ bektorearen arteko biderkaketa egitean, $\vec{a}$ -ren direkzioko bektore bat lortzen da, baina modulua f aldiz handiagoa da eta sentidoa berdina f positiboa bada eta alderantzizkoa, f negatiboa bada

$$\left.\begin{matrix}\vec{a}\\ f\end{matrix}\right\} \quad f\vec{a} \longrightarrow |f\vec{a}| = f|\vec{a}| = fa$$

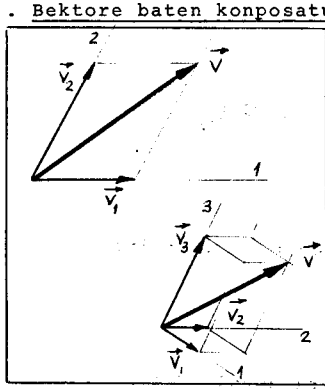


$\vec{u}$ bektorea $\vec{a}$ direkzioko bektore unitaria bada

$$|\vec{u}| = 1$$

$$\vec{a} = |\vec{a}|\,\vec{u} = a\,\vec{u}$$

. Bektore baten konposatuak



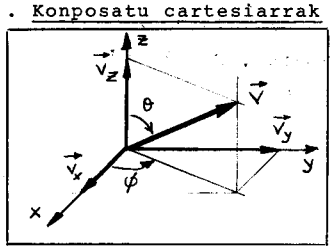
Bi direkzio hartuz (1,2), direkzio horik edukiz beren batuketa $\vec{V}$ bada, $\vec{V}_1$ eta $\vec{V}_2$, $\vec{V}$ bektoreak bi direkzio horietan dituen konposatuak direla esaten da

$$\vec{V} = \vec{V}_1 + \vec{V}_2$$

Espazioaren hiru direkzio ez-koplanario hartu behar ditugu

$$\vec{V} = \vec{V}_1 + \vec{V}_2 + \vec{V}_3$$

. Konposatu cartesiarrak



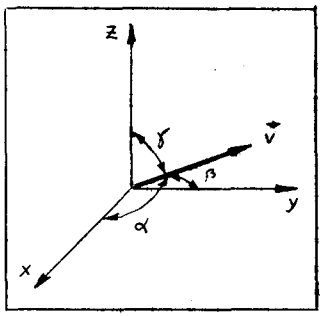
Ardatz cartesiarrei buruzko konposatuak dira

$$\begin{cases} V_x = V \sin\theta \cos\phi \\ V_y = V \sin\theta \sin\phi \\ V_z = V \cos\theta \end{cases}$$

Erraz froga daitekeenez

$$V^2 = V_x^2 + V_y^2 + V_z^2$$

. Kosinu direktoreak



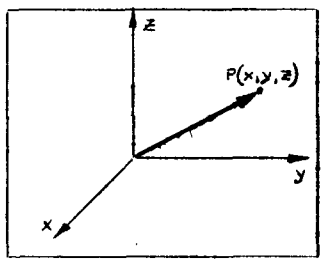
Beste batzutan, ardatz koordinatuekiko anguluak erabiltzen dira: α, β, γ. Hauen kosinuak, kosinu direktore deitzen dira:

$$\begin{cases} V_x = V \cos\alpha \\ V_y = V \cos\beta \\ V_z = V \cos\gamma \end{cases}$$

Hemen:

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$

. Posizio-bektorea



Sistemaren origenetik (0-tik) puntu batetara (P-ra) doan bektorea da. $\vec{r}$ letraz adierazten da

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

. Bektoreen batuketaren konposatuak

$$\vec{V} = \vec{V}_1 + \vec{V}_2 + \vec{V}_3 + \ldots \qquad \text{izanik}$$

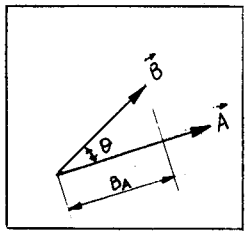
$$\begin{cases} V_x = V_{1x} + V_{2x} + V_{3x} + \ldots = \sum_i V_{ix} \\ V_y = \sum_i V_{iy} \\ V_z = \sum_i V_{iz} \end{cases}$$

Hots, batuketaren konposatuak, konposatuen batuketak dira

. Biderkaketa eskalarra

Bi bektoreren arteko biderkaketa eskalarra honela definitzen da: Eskalare bat da, bektore bien moduluaren eta formatzen duten anguluaren kosinuaren biderkaketaz lortua. Honela adieda

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = AB \cos(\vec{A}, \vec{B})$$



Definizio honen esangura geometrikoa oso sinplea da.

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = A\,B_A = A_B\,B$$

hemen B_A , $\vec{B}$ bektoreak $\vec{A}$ direkzioan duen projekzioaren modulua izanik.

Argi dagoenez

$$B_A = B\cos(\vec{A},\vec{B}) = B\cos\theta$$

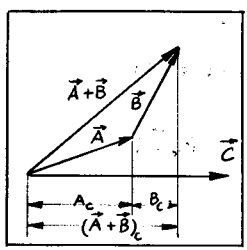
Biderkaketa eskalarrak ondoko propietate operazionalak ditu:

- <u>Konmutakorra</u> (trukakorra) da $\vec{A}\cdot\vec{B} = \vec{B}\cdot\vec{A}$

  Propietate hau definizioz ulertzen da

- <u>Distribuikorra</u> (banakorra) da bektorearen batuketari dagokionez:

$$(\vec{A}+\vec{B})\cdot\vec{C} = \vec{A}\cdot\vec{C} + \vec{B}\cdot\vec{C}$$



Honen frogapena alboko irudiaren laguntzaz egin daiteke erraz. Ikusten denez:

$$(\vec{A}+\vec{B})_c = A_c + B_c$$

Eta honetan finkatuz, goikoa frogaturik geratzen da.

Bi bektoreren biderkaketa eskalarraz hainbeste ohar egin daiteke:

I) Bi bektoreren biderkaketa eskalarra zero bada, eta ez bata ez bestea nulu ez badira, bi bektore horik perpendikularrak (ortogonalak) dira

$$\left.\begin{array}{l}\vec{A}\cdot\vec{B} = 0\\ \vec{A}\neq 0\ ,\ \vec{B}\neq 0\end{array}\right\} \longrightarrow \vec{A}\perp\vec{B}$$

zeren eta $\cos(\vec{A},\vec{B}) = 0$

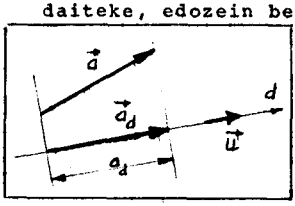
II) Erraz ikus daitekeenez, bektore unitarien biderkaketa eskalarrak ondokoak dira:

$$\begin{cases}\vec{i}\cdot\vec{i} = 1\\ \vec{j}\cdot\vec{j} = 1\\ \vec{k}\cdot\vec{k} = 1\end{cases} \qquad \begin{cases}\vec{i}\cdot\vec{j} = 0\\ \vec{j}\cdot\vec{k} = 0\\ \vec{k}\cdot\vec{i} = 0\end{cases}$$

III) Bektore ber baten biderkaketaz, moduluaren koadratua lortzen da

$$\vec{A} \cdot \vec{A} = A^2$$

IV) Direkzio baten bektore unitaria ezagutuz, erraz kalkula daiteke, edozein bektorek direkzio horretan duen projekzioa



$$a_d = \vec{a} \cdot \vec{u}$$

$$\vec{a}_d = (\vec{a} \cdot \vec{u})\ \vec{u}$$

Honetaz finkatuz, edozein bektoreren konposatu cartesiarrak honela lortzen dira

$$V_x = \vec{V} \cdot \vec{\imath} \qquad V_y = \vec{V} \cdot \vec{\jmath} \qquad V_z = \vec{V} \cdot \vec{k}$$

V) Bi bektoreren arteko biderkaketa eskalarra honela kalkulatzen da konposatuen funtzioan

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = (A_x \vec{\imath} + A_y \vec{\jmath} + A_z \vec{k}) \cdot (B_x \vec{\imath} + B_y \vec{\jmath} + B_z \vec{k})$$

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z$$

Edozein modutan komeni da gogora eraztea, ezen hau konposatu errektangularren kasuan gertatzen dela soilik.

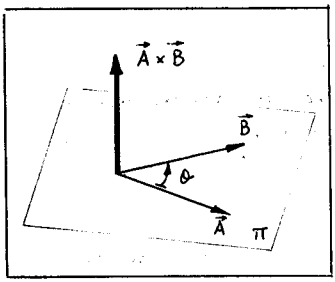
VI) Bektore bat bi bektoreren batuketa denean, honela kalkulatzen da bere koadratua

$$\vec{V} = \vec{V}_1 + \vec{V}_2$$

$$V^2 = (\vec{V}_1 + \vec{V}_2) \cdot (\vec{V}_1 + \vec{V}_2) = V_1^2 + V_2^2 + 2\,\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2$$

. **Biderkaketa bektoriala**

Definizioz, bi bektoreren arteko biderkaketa bektorialaz beste bektore bat lortzen da, haiek osotzen duten launaren perpendikularra dena, sentidoa torlojuaren aurrerapenarena (lehen bektoretik bigarrenera bira egitean) duena eta modulua bi bektoreen moduluaren eta formatzen duten anguluaren sinuarena

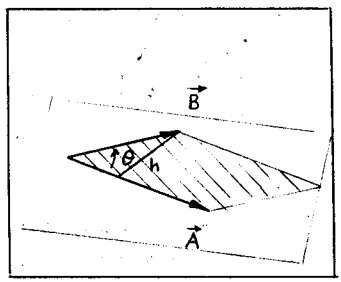


$$|\vec{A}\times\vec{B}| = A\,B\,\sin\theta$$

$\vec{A}\times\vec{B}$ edo $\vec{A}\wedge\vec{B}$ sinboloez adierazten da.

Izatez sasibektorea da

Beraren moduluari esangura geometriko argia eman dakioke. Alboko irudian ikusten denez,



$h = B\sin\theta$ izanik

$$|\vec{A}\times\vec{B}| = A\,B\sin\theta = A\,h$$

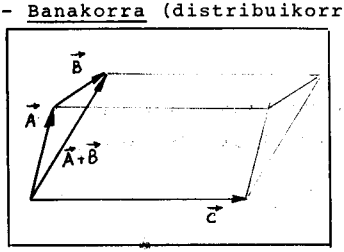
iruditurik dagoen paralelogramoaren area da.

Biderkaketa bektoriala ondoko propietateak ditu:

- Antikonmutakorra (antitrukakorra) da

$$\vec{A}\times\vec{B} = -\vec{B}\times\vec{A}$$ (definizioz ikusten da)

- Banakorra (distribuikorra) da batuketarekiko



$$(\vec{A}+\vec{B})\times\vec{C} = \vec{A}\times\vec{C} + \vec{B}\times\vec{C}$$

irudian ageri da frogapena, hiru bektoreak laun berean daudenean.

- Ez da asoziakorra (elkarkorra)

$$(\vec{A}\times\vec{B})\times\vec{C} \neq \vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C})$$

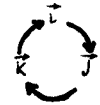
Biderkaketa bektorialaz ere hainbeste ohar egin daitezke:

I) Bi bektore nulu ez izanik beraien arteko biderkaketa b. zero bada, bi bektoreok paraleloak dira:

$$\left.\begin{array}{l}\vec{A}\times\vec{B}=0\\ \vec{A}\neq 0\ ,\ \vec{B}\neq 0\end{array}\right\}\longrightarrow\ \vec{A}\parallel\vec{B}$$

II) Sistema cartesiarraren bektore unitarien arteko biderkaketa bektorialak ondokoak dira

$$\left.\begin{array}{l}\vec{\imath}\times\vec{\jmath}=\vec{k}\\ \vec{\jmath}\times\vec{k}=\vec{\imath}\\ \vec{k}\times\vec{\imath}=\vec{\jmath}\end{array}\right\}$$



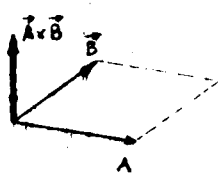
$$\left\{\begin{array}{l}\vec{\imath}\times\vec{\imath}=0\\ \vec{\jmath}\times\vec{\jmath}=0\\ \vec{k}\times\vec{k}=0\end{array}\right.$$

III) Bi bektoreren biderkaketa bektoriala honela adierazten da haien konposatuen funtzioan

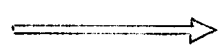
$$\vec{A}\times\vec{B}=\left(A_y B_z-A_z B_y\right)\vec{\imath}+\left(A_z B_x-A_x B_z\right)\vec{\jmath}+\left(A_x B_y-A_y B_x\right)\vec{k}$$

$$\vec{A}\times\vec{B}=\begin{vmatrix}\vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k}\\ A_x & A_y & A_z\\ B_x & B_y & B_z\end{vmatrix}$$

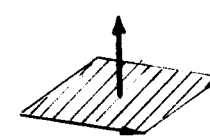
IV) Biderkaketa bektorialaren definizioan oinharriturik, eta hitzarmen bat eginez, areak bektoreen bidez adieraziko ditugu:



paralelogramoaren area da

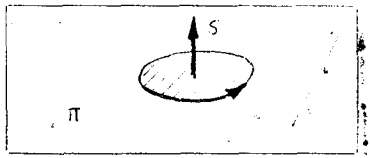


Analogiaz, area laun bati bektore bat lotzen diogu



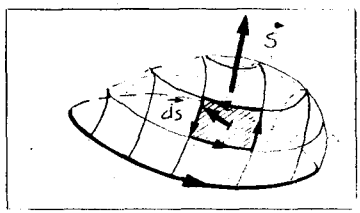
Modulua: arearena direkzioa: perpendikularra sentidoa: hitzarmena (torlojuarena)

Analogian beste pauso bat emanik, berdin egiten dugu beste edozein area launez, nahiz eta ingurumaria paralelogramoa ez izan.

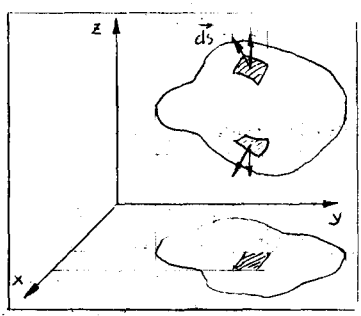


Aurrera joanik, area launa ez den kasurako ere generaliza dezakegu lehengo hitzarmena. Elementu infinitesimaletan banatuz, hauk launtzak jo daitezke eta bakoitzari $\vec{ds}$ bektore bat lot dakioke. Denetara

$$\vec{S} = \sum \vec{ds_i} = \int \vec{ds}$$



Azal guztiz hertsien kasuan denetara lortzen den arearen bektorea, nulua da, zeren eta konposatuak anulatu egiten baitira.



. Hiru bektoreren biderkaketa mixtoa

Definizioz, $\vec{A}$, $\vec{B}$ eta $\vec{C}$ bektoreen biderkaketa mixtoa honela lortzen da:

$$\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C})$$

Errazki ikus eta froga daitekeenez

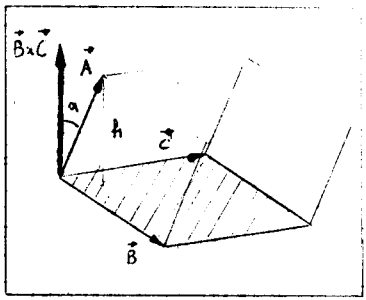
$$\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) = \begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix}$$

Goiko determinantearen hedapena kontutan harturik

$$\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B} \cdot (\vec{C} \times \vec{A}) = \vec{C} \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) = -\vec{A} \cdot (\vec{C} \times \vec{B})$$

Hau da, ordena aldatu arren, biderkaketa mixtoa ez da aldatzen

permutazioaren zentzua aldatzen ez bada.



Esangura geometrikoari dagokionez, $\vec{A}$, $\vec{B}$ eta $\vec{C}$ bektoreek osotzen duten paralelepipedoaren bolumena adierazten duela esan behar da, $|\vec{B}\times\vec{C}|$ oinharriaren superfiziea izanik eta $A\cos\alpha$ paralelepipedoaren garaiera (h)

Esangura geometrikoan finkatuz, erraz ikusten da ezen hiru bektoreak launkide edo koplanariak direnean,

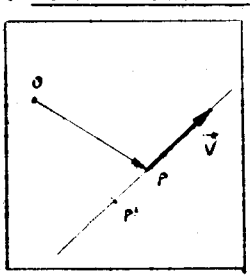
$$\vec{A}\cdot(\vec{B}\times\vec{C})=0$$ dela.

2.4 KURTSOREEN SISTEMAK

Bektoreen sailkapena egitean ikusi genuen bezala, kurtsoreak bektore labankorrak dira, hots, direkzioa eta modulua ezagunak ditugu baina aplikazio puntua zuzen baten edozein da.

Adibide gisa, indarra eta abiadura angularra aipa ditzakegu (azken hau, sasibektorea da).

. Kurtsore baten momentua



Zuzena kalkuluetarako erabiltzea nahastagarria denez, kurtsoreak erreduzitu egiten dira puntu batetara. Horretarako magnitude berri bat definitzen da: momentua edo hoberki eta zehazkiago esateko, puntu batekiko momentua.

Honela definitzen da $\vec{M}_o = \vec{OP}\times\vec{V}$

Hemen $\vec{OP}$, O puntutik zuzeneko edozein puntutara doan posizio-bektorea izanik.

P puntuaren ordez beste edozein puntu bat (P') hartuz, berdina da momentua. Ikus dezagun hori

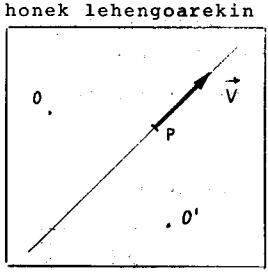
$$\vec{M}'_0 = \vec{OP'} \times \vec{V} = (\vec{OP} + \vec{PP'}) \times \vec{V} = \vec{OP} \times \vec{V} + \vec{PP'} \times \vec{V}$$

Baina $\vec{PP'} \times \vec{V} = 0$ zeren eta bi bektore hauk paraleloak baitira. Beraz:

$$\vec{M}'_0 = \vec{OP} \times \vec{V} = \vec{M}_0$$

Ikusten denez, emandako definizioa bakarra da eta balio berdina du edozein puntu harturik.

Aurrera beste pauso bat emateko, orain beste puntu desberdin batekiko (O') kalkulatuko dugu momentua. Eta halaber, momentu honek lehengoarekin duen erlazioa



$$\vec{M}_{O'} = \vec{O'P} \times \vec{V} =$$

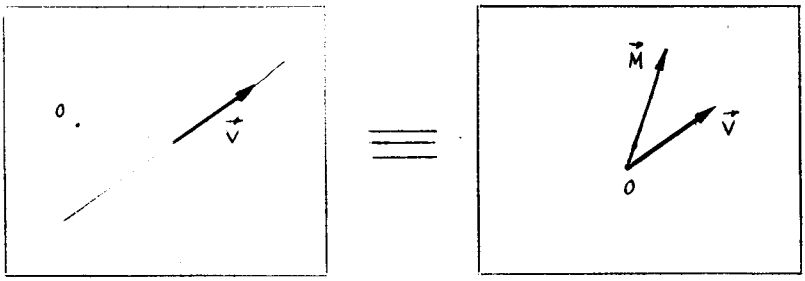
$$= (\vec{O'O} + \vec{OP}) \times \vec{V} = \vec{O'O} \times \vec{V} + \vec{OP} \times \vec{V}$$

$$\vec{M}_{O'} = \vec{M}_0 + \vec{O'O} \times \vec{V}$$

Azken formula honetan oinharrituriK, zera esan dezakegu: kurtsore batek edozein punturekiko duen momentua lortzeko, nahikoa dugu kurtsorea bera eta beste puntu batekiko momentua ezagutzea. Goiko formula irakurriz:

> "O' puntuarekiko momentua lortzeko, lehenik O puntuarekikoa lortzen da eta gero honi gehitu egiten zaio $\vec{V}$ kurtsorearen O' puntuarekiko momentua, baina $\vec{V}$ kurtsorea O puntuan aplikaturik balego bezala"

Honek ondorio berezia du, halegia kurtsorea puntu batetara erreduzi daitekeela, puntu horrekiko momentua emanik. Eta honek zera esan nahi digu, halegia, kurtsorearen efektuak espazio osora hedatzen badira, ondoko sistema biak baliokideak direla.

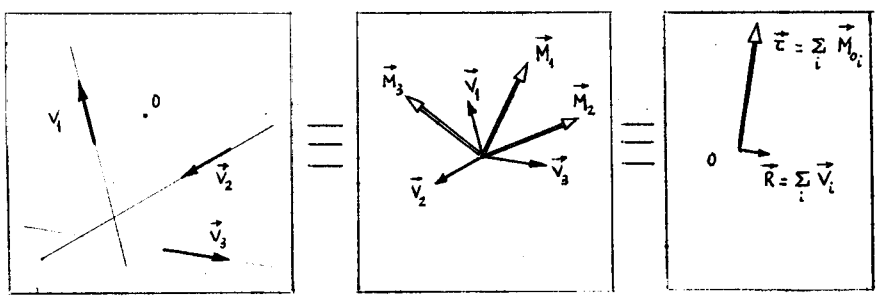


Kurtsorea bere laban tze-zuzenean

Kurtsorea puntu batetara erreduziturik

Baliokidetasun hori oso interesgarri eta lagungarri gertatzen zaigu, kurtsore askoz osoturik dagoen kurtsore sistema bat erreduzitzeko. Banan banan, kurtsoreak puntu batetara erreduzitzen dira, eta gero gainezarmenaren (superposizioaren) printzipioan oinharriturik, bektoreak eta momentuak batuz, kurtsore sistema osoa bektore bakar batez eta momentu bakar batez osoturik dagoen sistema batetara erreduzitzen da. Honela, asko sinplifikatzen da sistema.

Eskematikoki, honela adieraz daiteke erredukzio prozesua



Kurtsore sistema

Kurtsoreak banan banan erreduziturik

Sistema erreduzitu baliokidea.

$\vec{\tau}$: momentua

$\vec{R}$: erresultantea

Erraz ikus daitekeenez, momentu erresultanteak ere transformakuntz lege berberak betetzen ditu. Hara:

$$\vec{\tau}_O = \sum_i \vec{M}_{Oi}$$

$$\vec{\tau}_{O'} = \sum_i \vec{M}_{O'i} = \sum_i \left(\vec{M}_{Oi} + \vec{O'O} \times \vec{V}_i \right)$$

$$\vec{\tau}_{O'} = \sum_i \vec{M}_{O'i} + \sum_i \vec{O'O} \times \vec{V}_i = \vec{\tau}_O + \vec{O'O} \times \left(\sum_i \vec{V}_i \right)$$

Beraz $$\vec{\tau}_{O'} = \vec{\tau}_O + \vec{O'O} \times \vec{R}$$

. Espazioko inbarianteak. Espazioan kurtsoreen sistema bat kontsideratzean, espazioko puntu guztietan balore berdina duten magnitude batzu daudela konturatzen gara. Magnitude hauk inbariante deitzen dira.

Bi dira nagusiki:

- Batetik, inbariante bektoriala. Hau sistemaren erresultantea da, $\vec{R}$. Sistemá edozein puntutara erreduzitzean, erresultantea beti da berbera

$$\vec{R} = \sum_i \vec{V}_i$$

- Bestetik, inbariante eskalarra: $\vec{\tau} \cdot \vec{R}$. Magnitude hau konstantea dela ikusteko, egin dezagun operazio hori bi puntu desberdinetan:

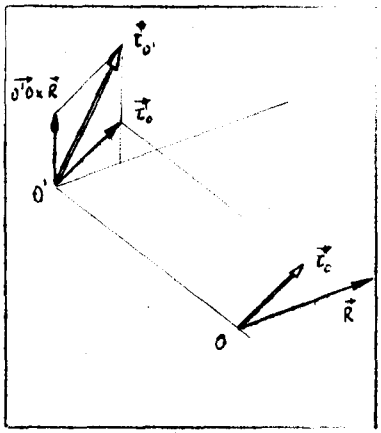
O puntuan $\quad \vec{\tau}_O \cdot \vec{R}$

O' puntuan $\quad \vec{\tau}_{O'} \cdot \vec{R} = \left(\vec{\tau}_O + \vec{O'O} \times \vec{R} \right) \cdot \vec{R} =$

$$= \vec{\tau}_O \cdot \vec{R} + \left(\vec{O'O} \times \vec{R} \right) \cdot \vec{R} = \tau_c \cdot \vec{R}$$

Ikusten denez, bi kasuetan balore berbera hartzen du, eta beraz, inbariantea da.

Inbariante eskalarraren esangura, geometrikoki ere azter dezakegu.

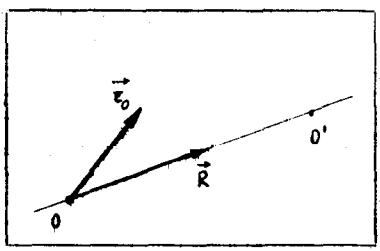


O puntuan $\quad \vec{\tau}_c \cdot \vec{R}$

O' puntuan $\quad \vec{\tau}_{O'} = \vec{\tau}_c + \vec{O'O}\times\vec{R}$

Baina $\vec{O'O}\times\vec{R}$ eta $\vec{R}$ elkarren perpendikularrak dira eta beraz, $\vec{O'O}\times\vec{R}$ delakoak $\vec{R}$ delakoaren direkzioan duen projekzioa nulua da. Beste hitz batzuz esateko, $\vec{\tau}_c$ eta $\vec{\tau}_{O'}$ momentuek $\vec{R}$ erresultantearen direkzioan duten konposatua (edo projekzioa) berbera da, hots inbariantea da.

Aurrera joanik, ikus dezagun beste inbariantzia berezi bat. Demagun orain, OO' zuzenak (O eta O' puntuetatik pasatzen den zuzenak), erresultantearen direkzioa duela.



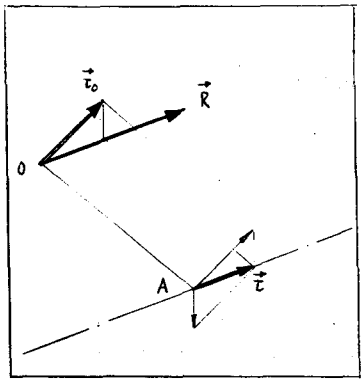
$$\vec{\tau}_{O'} = \vec{\tau}_O + \vec{O'O}\times\vec{R} = \vec{\tau}_c$$

Hots, O eta O' puntuekiko momentua berdina da.

Hau honela adieraz dezakegu: "Erresultantearen direkzioa duten zuzenak, momentu berdineko puntuen **leku geometrikoak dira**".

. Momentu minimoa eta ardatz zentrala

Inbariante eskalarra aztertzean ikusi dugunez, momentuak erresultantearen direkzioan duen projekzioa konstantea da. Honek esan nahi du, espazio osoan egon daitekeen momenturik ttikienaren modulua,projekzio hori dela. Bestalde beraren direkzioa erresultantearena da. Momentu ttikien hori momentu minimo deitzen da.



Modulua:

$$\tau = \frac{\vec{\tau}_o \cdot \vec{R}}{R}$$

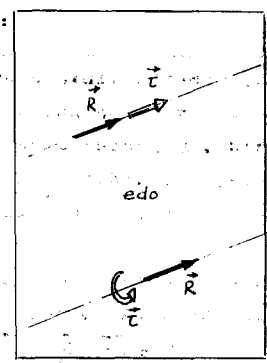
Direkzioa

$$\vec{u}_\tau = \frac{\vec{R}}{R}$$

$$\vec{\tau} = \frac{\vec{\tau}_c \cdot \vec{R}}{R^2}\,\vec{R}$$

Bestalde, erresultantearen direkzioko zuzenak, momentu berdineko puntuen leku geometrikoak direnez, momentu minimoa dutenak zuzen bat osotzen dute: zuzen hori <u>ardatz zentrala</u> deitzen da.

Ikusitako puntuak kontutan harturik, ikus dezagun zenbat modu tan erreduzi daitekeen kurtsoreen sistema:



i). Kasurik generalenean, ardatz zentraleko puntuetan erresultantea eta momentu minimoa izanen ditugu, biak direkzio berekoak

$$\vec{\tau} \neq 0 \qquad \vec{R} \neq 0$$

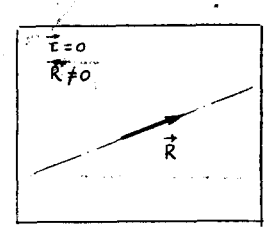
Sistema hau <u>tortsore</u> izenez ezagutzen da.

ii). Erresultantea nulu denean, $\vec{R} = 0$, momentua berdina da espazioko puntu guztietan

$$\vec{\tau}_{O'} = \vec{\tau}_O + \overrightarrow{O'O} \times \vec{R} = \vec{\tau}_O$$

Sistemá momentu batez adierazten da espazioko edozein puntutan. Kurtsoreen sistema momentu bakar baten baliokidea da.

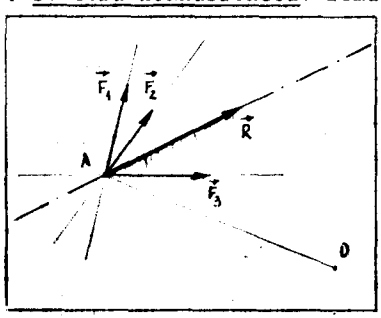
iii). Momentu minimoa nulua bada, $\vec{\tau} = 0$ erresultantea nulu ez izanik, sistema kurtsore bakar batez adieraz daiteke, kurtsore hori erresultantea delarik, ardatz zentralean aplikaturik.



iv). Momentu minimoa eta erresultantea nuluak badira, espazioko puntu guztietan ere nuluak dira eta sistema ekilibrioan dagoela esaten da.

ZENBAIT KASU BEREZI

. Sistema konkurrentea. Demagun konkurrentzi puntua A dela.



$\vec{F}_1, \vec{F}_2, \ldots \vec{F}_i, \ldots$ kurtsoreak A puntutik pasatzen dira. Erresultantea zera da

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \cdots = \sum_i \vec{F}_i$$

Bestalde, bektoreak A puntutik pasatzen direnez, A puntuarekiko momentua nulua da:

$$\vec{\tau}_{iA} = 0 \longrightarrow \tau_A = 0$$

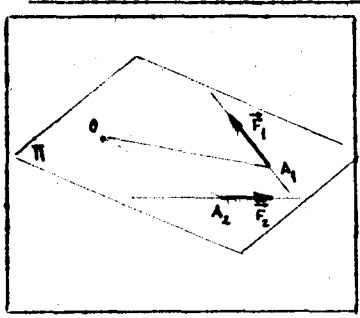
Beraz, momentu minimoa nulua da $\vec{\tau}=0$, eta honek esan nahi du, ezen sistema osoa kurtsore bakar batez errepresenta litekeela. Bestalde, A puntua ardatz zentralekoa da ($\vec{\tau}_A = 0 = \vec{\tau}$ baita). Horrela, ba, ardatz zentrala A puntutik pasatuz $\vec{R}$ erresultantearen direkzioa duen zuzena da.

Espazioko edozein puntutan momentua eta erresultantea perpendikularrak dira; ondoko balorea du momentuak:

$$\vec{\tau}_o = \vec{OA} \times \vec{F}_1 + \vec{OA} \times \vec{F}_2 + \vec{OA} \times \vec{F}_3 + \cdots$$

$$\vec{\tau}_o = \vec{OA} \times (\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \cdots) = \vec{OA} \times \vec{R}$$

. Sistema launkidea (bektore koplanariak)



Bektoreak daudeneko zuzenak laun batetan daude. Ikusiko dugunez, momentuak laun horren direkzio perpendikularra du.

$$\vec{OA}_1 \times \vec{F}_1 \qquad \perp \pi$$
$$\vec{OA}_2 \times \vec{F}_2 \qquad \perp \pi$$
$$\cdots\cdots$$

$$\vec{\tau}_o = \sum_i \vec{OA}_i \times \vec{F}_i \qquad \perp \pi$$

Bestalde, erresultantea bera Π launean dago

$$\vec{R} = \sum \vec{F}_i$$

Beraz $\vec{R}$ eta $\vec{\tau}_o$ perpendikularrak dira:

$$\vec{R} \cdot \vec{\tau}_o = 0$$

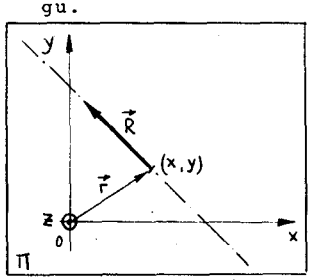
Eta honek esan nahi du, momentu minimoa nulua dela:

$$\vec{\tau}_o = 0$$

Egia esan, hau honela da, $\vec{R} \neq 0$ bada.

$\vec{R}=0$ baldin bada, ez da zertan $\vec{\tau}=0$ izan behar. Horrelatan, bi kasu aztertuko ditugu.

a) $\underline{\vec{R} \neq 0}$. Esan bezala, kasu honetan $\vec{\tau}=0$. Kasu hau kurtsore bakar baten baliokidea da. Ardatz zentrala kalkulatuko dugu.



$0x$, $0y$ ardatzak Π launean hartuko ditugu. $0z$ perpendikularra da. Momentua eta erresultantea bektore unitarien funtzioan ipiniko ditugu:

$$\begin{cases} \vec{\tau}_o = \tau_o \vec{k} \\ \vec{R} = R_x \vec{\imath} + R_y \vec{\jmath} \\ \vec{r} = x \vec{\imath} + y \vec{\jmath} \end{cases}$$

Hori posible izan dadin, $\vec{r} \times \vec{R} = \vec{\tau}_o$ izan behar da

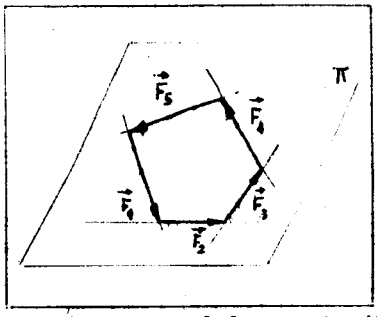
$$\begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ x & y & 0 \\ R_x & R_y & 0 \end{vmatrix} = \left(x R_y - y R_x\right) \vec{k} = \tau_o \vec{k}$$

$$\tau_o = x R_y - y R_x$$

$\vec{\tau}_o$ eta $\vec{R}$ ezagutuz, azken espresio honek ardatz zentralaren ekuazioa ematen digu.

b) $\underline{\vec{R}=0}$ eta $\underline{\vec{\tau} \neq 0}$ baldin bada, sistema momentu batez adieraz daiteke. Espazio guztian momentu berdina da

$$\vec{\tau} = \vec{\tau}_{O'} = \vec{\tau}$$

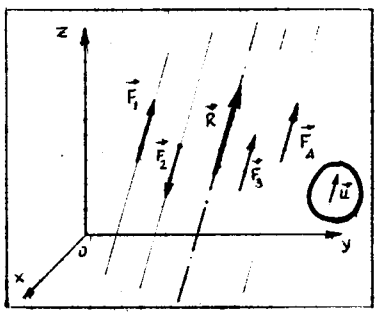


Adibidez, alboko irudiko sistemaren kasuan

$$\vec{R} = \sum_i \vec{F}_i = 0$$

$$\vec{\tau} \neq 0$$

. Kurtsore paraleloz osoturiko sistema



Kasu honetan kurtsore guztiek direkzio berbera dute eta honela adieraz daitezke.

$$\vec{F}_i = F_i \vec{u}$$

Beraz, erresultanteak ere direkzio berbera du.

$$\vec{R} = \sum_i \vec{F}_i = \sum_i F_i \vec{u} = \left(\sum_i F_i\right) \vec{u}$$

Momentua eta erresultantea perpendikularrak dira

$$\vec{\tau}_0 = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{u} F_i =$$

$$\vec{\tau}_0 = \left(\sum_i \vec{r}_i F_i\right) \times \vec{u}$$

Ikusten denez, $\vec{\tau}_0 \perp \vec{R}$

Eta $\vec{\tau}_0 \cdot \vec{R} = 0$ denez gero, ondoko posibilitateak ditugu:

a) $\vec{R} \neq 0$ bada, $\vec{\tau}_0 \cdot \vec{R} = 0$ denez, momentu minimoa nulu da, eta **sistema kurtsore bakar batetara erreduzi daiteke (ardatz zentralean aplikaturik, noski)**

b) $\vec{R} = 0$ bada, espazioko puntu guztietan momentu berbera dugu.

3. GAIA - PUNTUAREN KINEMATIKA

3.1 PUNTU MATERIAL BATEN HIGIDURAREN ABIADURA ETA AZELERAZIOA

- ABIADURA
- AZELERAZIOA

3.2 AZELERAZIO KONSTANTEKO HIGIDURA

3.3 AZELERAZIOAREN KONPOSATU TANGENTE ETA NORMALA

3.4 HIGIDURA ZIRKULARRA

- ABIADURA ANGULARRA
- AZELERAZIO ANGULARRA
- AZELERAZIO LINEALA

3.5 HIGIDURA MAKURDUNA LAUNEAN

Gertakari fisikoen artean, ongien ikusten eta antzematen duguna higidura da. Gorputz arruntak, planetak, haizea, elektroiak, gas baten molekulak ....., guztiak ari dira higitzen. Gainera, gorputzen arteko elkarrakzioek mugatu egiten dute nolabait, higidura nolakoa izanen den.

Mekanikaren helburua gorputzen higidura aurrikustea da. Horretarako lehenik eta behin higidura bera deskribatzen eta adierazten jakin behar du. Nolabait esateko, hizkuntza matematikoaren bidez, higiduren deskribapena egin beharko du. Eta horixe da lehen pausoa, Kinematikan ematen dena hain zuzen ere. Bigarren pausoa, elkarrakzioak ezagutzea da; eta gero, elkarrakzioak ezagutuz, gertatzeko den higidura nolakoa izanen den aurrikustea. Azken bi pauso hauk Dinamikan ematen dira.

Honela, ba, bi arlo nagusitan banatzen da Mekanika.

I) Kinematika. Arlo honetan higidura bera aztertzen da soilik. Higidura ongi deskribatzeko erabiltzen diren magnitude eta teknika matematikoak lantzen dira, higidura sortzen dutenako kausetaz arduratu gabe.

II) Dinamika. Dinamikan higidura sortzen duteneko kausak aztertzen dira: elkarrakzioak edo indarrak. Eta halaber indarron eta magnitude kinematikoen artean dauden erlazioak ere.

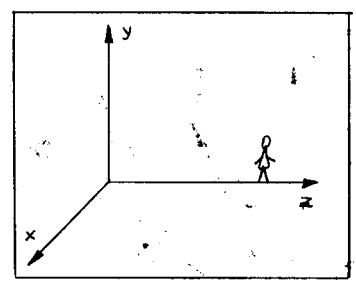
3.1 PUNTU MATERIAL BATEN HIGIDURAREN ABIADURA ETA AZELERAZIOA

Ezer baino lehen, argi utzi behar da, zer erreferentziarekiko neurtu eta deskribatuko den higidura. Eta zergatik hori? Higidura gauza erlatiboa delako.

Pausagunea eta higidura gauza erlatiboak dira. Hau argi ikus daiteke adibide sinplerekin. Demagun hegazkin batetan doan bidaiari bat. Hegazkin berean doazenekiko, geldi dago; aldiz, lurrean geldi daudenekiko, abiadura handiz higitzen ari da.

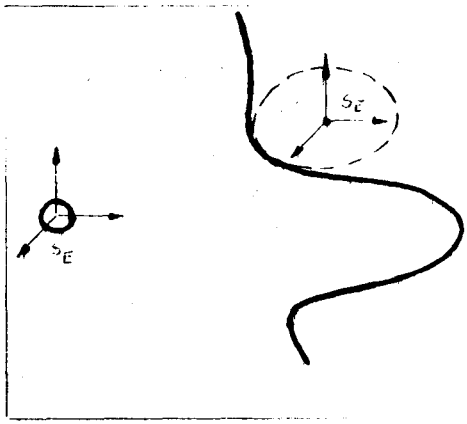
Honelatan, ba, higidur neurketak eta deskribapenak egiteko, lehenik eta behin erreferentzi sistema bat hartu behar da. Eta bertan kokatu behar da, neurketak eginen dituen behatzailea.

Sistema desberdinetan dauden behatzaileek, modu desberdinez ikusiko eta deskribatuko dute higidura berbera. Horregatik, higidura bat bakarra da. Hau argi ikusteko, adibide bat jarriko dut. Baina, ezer baino lehen, erreferentzi sistema nola adierazten diren azalduko dugu.



. Erreferentzi sistemak adierazteko, nahikoa da, triedro bat ematea eta bertan behatzaile bat kontsideratzea

. Ipin ditzagun, ba, adibideok. Demagun hilargiaren higidura. Higidura hau eguzkian dagoen sistematik (S_E) eta lurrean egonik S_E-ren paraleloa den sistematik (S_L) aztertuko dugu.

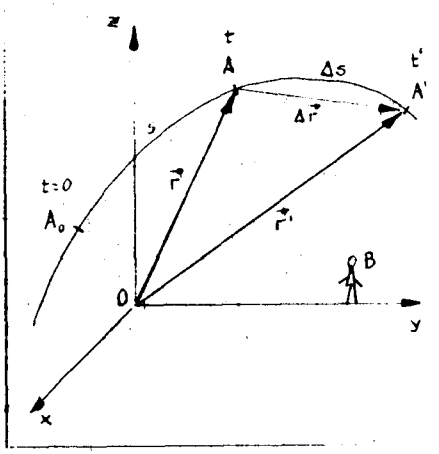


S_L sistematik, hilargiak elipse bat (ta-ta zirkunferentzia bat) deskribatzen duela ikusten da (irudian puntuka dago)

S_E sistematik ordea, uhin antzeko batzu dituen ibilbide bat ikusten da.

Hurrengo gaian, higidura erlatiboa aztertzean, erreferentzi sistema desberdinetako behatzaileen neurketen arteko erlazioak aztertuko ditugu. Baina oraingo honetan, erreferentzi sistema bakar bat hartuko dugu oinharritzat. Eta horretatik higiduraren ezagugarri nagusiak aztertuko ditugu: abiadura eta azelerazioa. Hauetaz gainera, ibilbidea kontsideratu behar dugu, noski. Eta hasteko, kasu generala aztertzeko, ibilbidea makur bat dela kontsideratuko dugu.

. Abiadura



Lehenik eta behin, irudian ageri diren elementuak definituko ditut.

$\overset{\frown}{A_0 A A'}$: ibilbidea

A_0 : Lehen unean ($t=0$) partikula dagoeneko puntua

A : t aldiunean partikula dagoeneko puntua.

$\vec{r}$: A puntuaren posizio-bektorea.

$A_0 A = s$: arku-luzera

$\Delta\vec{r}$: AA' baina bektorialki neurturik

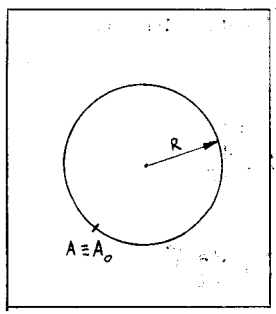
Δs : AA' baina arkuan zehar neurturik

Lehenik batezbesteko abiadurak definituko ditugu; eta gainera bi modu desberdinez.

a) Eskalarki $\quad \bar{v} = \dfrac{\Delta s}{\Delta t}$

b) Bektorialki $\quad \langle \vec{v} \rangle = \dfrac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$

Izatez, bi hauen artean ez dago harreman finkorik. Adibide batez, zein desberdin izan daitezkeen ikusiko dugu.



Demagun ibilbide zirkular bat, eta kontsidera ditzagun bira oso bat ematean lortzen ditugun batezbesteko abiadurak

$$\bar{v} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{2\pi R}{\Delta t}$$

$$\langle \vec{v} \rangle = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = 0$$

Batezbesteko abiadurak definitu ondoren, orain aldiuneko abiadurak (abiadura instantaneoak) definituko ditugu. Eta lehen bezala, bi moduz eginen dugu.

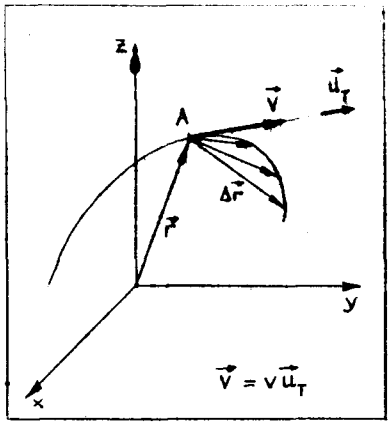
a) Eskalarki. Batezbesteko abiadura eskalarraren limitea da, Δt-k zerorantz jotzean.

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \bar{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt}$$

Hauxe da prezeski autoen belozimetroak adierazten duen abiadura.

b) Bektorialki. Aldiuneko abiadura batezbesteko abiadura bektorialaren limitea da, denbora tarteak zerorantz jotzean:

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \langle \vec{v} \rangle = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$



Beraz, bektore bat da.

Direkzioa, kurbaren tangenteare na da, zeren eta $\Delta\vec{r}$ bektorearen direkzioa limitean horixe baita, irudian ikusten den bezala.

Eta modulua, aldiuneko abiadura eskalarra (v) da:

$$|\vec{v}| = \left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right| = \frac{ds}{dt} = v$$

Zeren eta $|d\vec{r}| = ds$ baita.

Honelatan, ba, aldiuneko abiadura ondoko hau da :

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

Honen konposatuak ondokoak dira:

$$\vec{v} = \frac{d(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k})}{dt} = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k}$$

zeren $\frac{d\vec{i}}{dt} = \frac{d\vec{j}}{dt} = \frac{d\vec{k}}{dt} = 0$ baitira

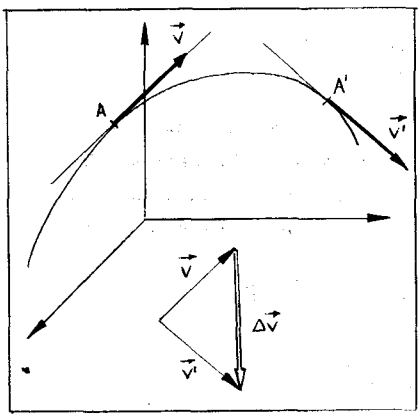
Abiaduraren modulua hauxe da:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$$

$$\begin{cases} v_x = \frac{dx}{dt} \\ v_y = \frac{dy}{dt} \\ v_z = \frac{dz}{dt} \end{cases}$$

$$v = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}$$

. Azelerazioa. Generalki, puntuaren abiadura aldatuz doa denborarekin. Aldaketa hori adierazteko, magnitude berri bat erabiltzen da: azelerazioa. Honek, denbora unitateko abiadu raren aldaketa adierazten du. Azelerazioa magnitude bektorial bat da eta moduluz eta direkzioz abiadurak duen aldakuntza neurtzen du.

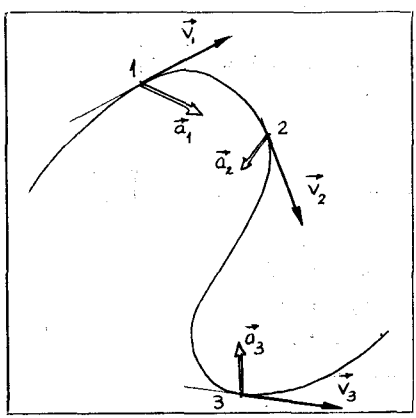


Lehenik, batezbesteko azelerazioa definitudo dugu

$$\langle \vec{a} \rangle = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{v' - v}{\Delta t}$$

Ondoren, aldiuneko azelerazioa definituko dugu, aurrekoaren limite gisa, denbora tarteak zerorantz jotzean:

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \langle \vec{a} \rangle = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$



Lehenengo ikusi dugunez, abiadura ibilbidearen tangentea da. Azelerazioak ez du direkzio hori. Azelerazioaren direkzioaz esan daitekeen gauza bakarra, ibilbidearen barru aldeko sentidoa duela da, hots alde konkaboranzkoa.

Analitikoki honela adierazten da azelerazioa:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$$

$$\vec{a} = \frac{d^2x}{dt^2}\vec{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\vec{j} + \frac{d^2z}{dt^2}\vec{k}$$

3.2 AZELERAZIO KONSTANTEKO HIGIDURA

Higidura hau oso interesgarria da, grabitatearen erakarpenaren pean gertatzen dena baita (lurraren azalean). Matematikoki problema honetan datza: Azelerazioa ezagutuz eta lehen uneko baldintzak ezagutuz, higidura osoa eta abiadura ezagutzean.

Demagun azelerazioa konstantea dela $\vec{a} = K\vec{k}$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} \quad \text{denez,} \qquad d\vec{v} = \vec{a}\,dt$$

Eta integratuz:

$$\int_{\vec{v}_0}^{\vec{v}} d\vec{v} = \int_{t_0}^{t} \vec{a}\,dt = \vec{a}\int_{t_0}^{t} dt = \vec{a}\,(t - t_0) = \vec{v} - \vec{v}_0$$

Beraz:

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a}\,(t - t_0) \qquad [1]$$

Hemen
- t_0 : haserako aldiunea (A_0 puntuan)
- $\vec{v}_0$: haserakoabiadura (A_0 puntuan)
- t : edozein aldiune (A puntuan)
- $\vec{v}$: A puntuan duen abiadura

Integratuz, aurrera jo dezakegu:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} \quad \text{denez,}$$

$$\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} d\vec{r} = \vec{r} - \vec{r}_0 = \int_{t_0}^{t} \vec{v}\,dt = \int_{t_0}^{t} \left[\vec{v}_0 + \vec{a}\,(t - t_0)\right] dt$$

Honela, azkenean hauxe lortzen dugu:

$$\vec{r} = \vec{r}_o + \vec{v}_o (t - t_o) + \frac{1}{2} \vec{a} (t - t_o)^2 \qquad [2]$$

Hemen
$$\begin{cases} \vec{r}_o : A_o \text{ puntuaren posizio-bektorea} \\ \vec{r} : A \text{ puntuaren posizio-bektorea} \end{cases}$$

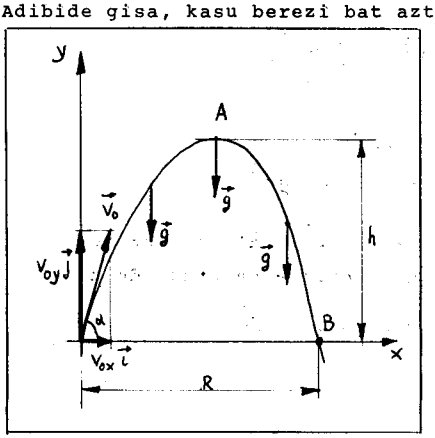
[1] eta [2] espresioak aztertuko ditugu.

[1] : Bertan ikusten denez, generalean $\vec{v}_o$ eta $\vec{a}$ bektoreen direkzioak desberdinak direlarik, bi bektore hauen artean laun bat osotzen dute, eta $\vec{v}$ abiadura laun horretan dago.

[2] : $\vec{r}$ bektorearen extremua, $\vec{r}_o$ bektorearen extremutik pasatuz $\vec{v}_o$ eta $\vec{a}$ bektoreek sortzen duten launaren paralelo den laun batetan aurkitzen da.

Bi ondorio horik, zera esan nahi dute, azelerazio konstantez sortzen den higidura launa dela, hots ibilbidea laun batetan dagoela. Horretaz gainera, erraz froga daitekeenez, [2] adierazpena parabola baten ekuazioa da, beronen ardatza $\vec{a}$ delakoaren direkziokoa delarik.

Adibide gisa, kasu berezi bat aztertuko dugu: grabitatearen eraginpean higitzen den puntu materialarena.



Higidura launa denez, $0xy$ launa aukeratuko dugu higidura deskribatzeko.

$$\begin{cases} 0y : \text{bertikala} \\ 0x : \text{horizontala} \end{cases}$$

$$\vec{a} = \vec{g} = -g\vec{j}$$

Kalkuluak errazteko,

$$\begin{cases} \vec{r}_o = 0 \\ t_o = 0 \end{cases}$$

eginen ditugu. Halaber

$$\vec{v}_0 = v_{0x}\vec{i} + v_{0y}\vec{j}$$

$$\begin{cases} v_{0x} = v_0 \cos\alpha \\ v_{0y} = v_0 \sin\alpha \end{cases}$$

izanik

[1] espresio erabiliz, eta $\vec{v} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j}$ eginik:

$$v_x\vec{i} + v_y\vec{j} = v_{0x}\vec{i} + v_{0y}\vec{j} - gt\vec{j}$$

Eta konposatuak banatuz

$$\begin{cases} v_x = v_{0x} \\ v_y = v_{0y} - gt \end{cases}$$

Honek zera esan nahi digu, x direkzioan abiaduraren konposatua denbora guztian berbera dela, hots, konstantea dela. Aldiz, y direkzioan higidura uniformeki azeleratua (edo dezeleratua) dugu.

. Kalkula dezagun, goiko punturaino (A) igoteko behar duen denbora (t_1)

A puntuan $v_y = 0$

Beraz $0 = v_{0y} - gt \longrightarrow t_1 = \frac{v_{0y}}{g}$

. Kalkula dezagun, orain, edozein punturen koordinatuen adierazpena. [2] espresioa harturik:

$$x\vec{i} + y\vec{j} = \left(v_{0x}\vec{i} + v_{0y}\vec{j}\right)t - \frac{1}{2}gt^2\vec{j}$$

Eta konposatuak banaturik

$$\begin{cases} x = v_{0x}t \\ y = v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2 \end{cases}$$

. Azken hauetan finkatuz, garaierarik altuena (h) lor dezakegu. Horretarako, t_1 denbora y-ren formulara pasatuko dugu:

$$y_1 = h = v_{0y}\frac{v_{0y}}{g} - \frac{1}{2}g\frac{v_{0y}^2}{g^2} = \frac{1}{2}\frac{v_{0y}^2}{g}$$

Edo bestela idatzirik $$h = \frac{v_o^2 \sin^2\alpha}{2g}$$

. Modu berean, OB=R alkantzea kalkula dezakegu. B puntuan, $y = 0$. Beraz :

$$0 = v_{oy} t_2 - \frac{1}{2} g t_2^2$$

t_2 , B puntuan dagoeneko aldiunea izanik.

$$t_2 = 2 \frac{v_{oy}}{g} = 2 t_1$$

Honela, alkantzea B puntuaren x koordinatua denez,

$$R = v_{ox} t_2 = v_{ox} \frac{2v_{oy}}{g} = \frac{2 v_o^2 \sin\alpha \cos\alpha}{g}$$

Azkenean hauxe geratzen zaigu

$$R = \frac{v_o^2 \sin 2\alpha}{g}$$

. Aurreko puntuan kalkulaturiko formulan finkatuz, alkantze horizontalaren balore maximoa kalkula dezakegu. Bertan ikusten denez

$$R = f(\alpha)$$

Beraz, balore maximoa lortzeko $\frac{dR}{d\alpha} = 0$ egin behar dugu

$$\frac{dR}{d\alpha} = \frac{v_o^2}{g} 2 \cos 2\alpha = 0$$

Hau gerta dadin, $\cos 2\alpha = 0$ izan behar da :

$$2\alpha = \frac{\pi}{2} \longrightarrow \alpha = \frac{\pi}{4} = 45^\circ$$

Beraz, alkantze maximoa $\alpha = 45^\circ$ anguluari dagokio. Kasu honetan : $\sin 2\alpha = 1$

$$R = \frac{v_o^2}{g}$$

. Kalkuluekin bukatzeko, ibilbidearen ekuazioa lortuko dugu. Horretarako $x = x(t)$ eta $y = y(t)$ adierazpenetik, denbora eliminatu behar dugu, $y = y(x)$ gera dakigun.

$$\begin{cases} x = v_{ox}\, t \\ y = v_{oy}\, t - \frac{1}{2} g t^2 \end{cases} \longrightarrow t = \frac{x}{v_{ox}}$$

Honela, $$y = v_{oy} \frac{x}{v_{ox}} - \frac{1}{2} g \frac{x^2}{v_{ox}^2}$$

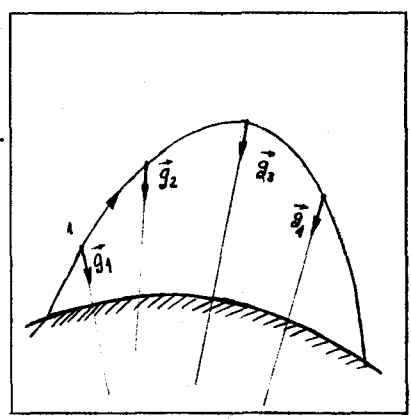
$$y = -\left(\frac{1}{2} \frac{g}{v_o^2 \cos^2\alpha}\right) x^2 + (\operatorname{tg}\alpha)\, x$$

Hau parabola baten ekuazioa da ($y = ax^2 + bx + c$) Ardatzak y-ren direkzioa du eta konkabitatea beherantz begira dago.

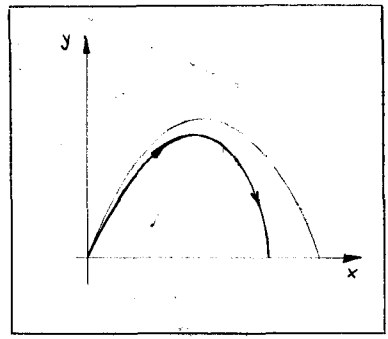
OHARRAK:

Grabitatearen eraginpean gertatzen den higidura aztertu dugularik, interesgarria da zenbait ohar egitea benetako higidura errealari buruz. Izatez zenbait korrekzio egin beharko lirateke hiru arrazoi nagusirengatik: Lurra esfera bat (izatez elipsoidea) delako, atmosferan airea dagoelako eta Lurra bere ardatzaren inguruan biraka ari delako.

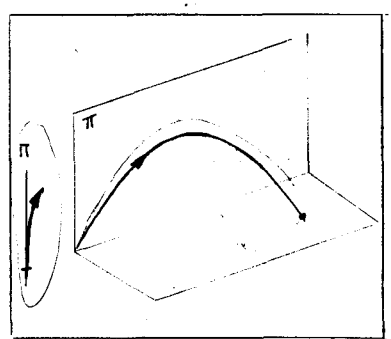
1) Higidura oso luzea denean, kontutan eduki behar da Lurraren kurbatura. Honen kausaz aldatuz doa direkzioz. Honela lortzen den ibilbidea ez da parabola, elipsea baizik.



2) Airearen igurtzimendua kontutan harturik, gorputzak (edo projektilak) egiten duen bidea laburragoa da



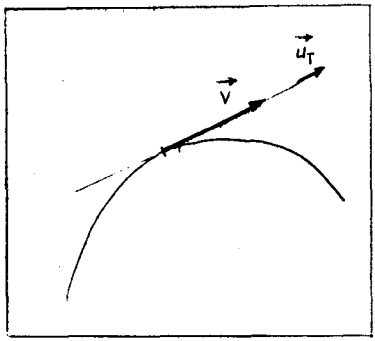
3) Coriolis-en indarra dela eta, Lurraren bira higidurarren kausaz, Ipar Hemisferioan abiadura guztiak eskuinetarantz desbidatzen dira (Hego Hemisferioan, ezkerretarantz). Horrela, higidura ez da launa. Dena den, puntu hau hurrengo gai batetan aztertuko dugu.



3.3 AZELERAZIOAREN KONPOSATU TANGENTE ETA NORMALA

Demagun higidura laun eta kurboa. Izatez, higidurarik generalena ez da zertan launa izan behar, kasurik generalenean alabeatua baita. Dena den, hemen esanen duguna guztiz generala da, zeren eta ibilbide alabeatuen kasuan, laun muntzailea harturik, higidura launa bailitzen azter baitaiteke. Ohar hau eginez, aurrera eginen dugu.

Azelerazioaren definizioa ematean, beraren direkzioa kurbaren barru alderanzkoa dela esan dugu. Honela, ba, orokorki, bi konposatu ditu, bata kurbaren tangentearen direkzioan eta bestea kurbaren normalaren direkzioan.



Higidura makurdunaren kasuan, lehenago esan dugun legez, abiadurak tangentearen direkzioa du

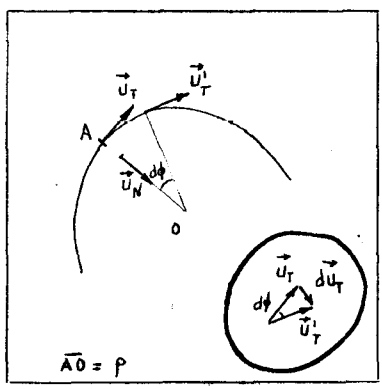
$$\vec{v} = v\,\vec{u}_T$$

$\vec{u}_T$: bektore unitaria

Deribazioz, azelerazioa kalkulatuko dugu:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dv}{dt}\,\vec{u}_T + v\,\frac{d\vec{u}_T}{dt}$$

Baina zenbat balio du $\frac{d\vec{u}_T}{dt}$ delakoak?



Lehenik, beronen direkzioa kalkulatuko dugu

$$\vec{u}_T \cdot \vec{u}_T = 1$$

Deribatuz

$$\frac{d\vec{u}_T}{dt}\cdot\vec{u}_T + \vec{u}_T\cdot\frac{d\vec{u}_T}{dt} = 0$$

$$\vec{u}_T \cdot \frac{d\vec{u}_T}{dt} = 0$$

Eta ez bata ez bestea nulu ez direnez, perpendikularrak izan behar dute: $\vec{u}_T \perp \frac{d\vec{u}_T}{dt}$

Beraz, $\frac{d\vec{u}_T}{dt}$ delakoak $\vec{u}_N$ bektorearen direkzioa du,hots, normalaren direkzioa. Bestalde, barru aldeko sentidoa du.

Kalkula dezagun orain modulua. Aurreko irudian dauden bi triangeluak antzekoak (?) (semejanteak) dira. Beraz:

$$\frac{|d\vec{u}_T|}{|\vec{u}_T|} = \frac{ds}{\rho} \longrightarrow |d\vec{u}_T| = \frac{ds}{\rho}$$

Hemen ρ kurbatura erradioa izanik. Aurrera eginez:

$$\left|\frac{d\vec{u}_T}{dt}\right| = \frac{|d\vec{u}_T|}{dt} = \frac{1}{\rho}\frac{ds}{dt} = \frac{v}{\rho}$$

Denetara, bektorialki idatziz:

$$\frac{d\vec{u}_T}{dt} = \frac{v}{\rho}\vec{u}_N$$

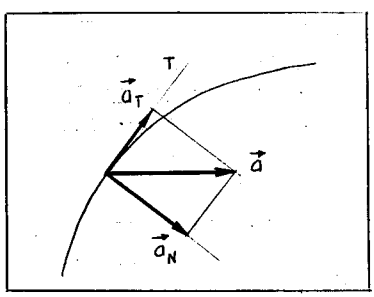
Erresultatu hau azelerazioaren espresiora eramanik:

$$\vec{a} = \frac{dv}{dt}\vec{u}_T + v\frac{v}{\rho}\vec{u}_N$$

$$\vec{a} = \frac{dv}{dt}\vec{u}_T + \frac{v^2}{\rho}\vec{u}_N$$

Azken espresio hau aztertzea oso interesgarri da. Alde batetatik, azelerazioak bi konposatu dituela esaten digu: bata makurraren tangentearen direkzioa, eta bestea, normalaren direkzioan. Bi konposatu hauk $\vec{a}_T$ eta $\vec{a}_N$ deituko ditugu errespektiboki.

$$\vec{a} = \vec{a}_T + \vec{a}_N$$



Bi konposatu hauen modulua hauxe da

$$a_T = \frac{dv}{dt}$$

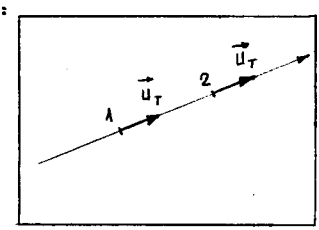
$$a_N = \frac{v^2}{\rho}$$

$\frac{dv}{dt}$: abiaduraren aldaketa adierazten digu

$\frac{v^2}{\rho}$: abiaduraren direkzioaren aldaketa adierazten digu.

Ikus ditzagun zenbait kasu berezi:

. <u>Higidura zuzena</u>. Kasu honetan $\vec{u}_T$ bektorea ez da aldatzen Beraz, $\frac{d\vec{u}_T}{dt} = 0$



Honek esan nahi du $a_N = 0$ dela. Hori logikoa da, zeren eta kurbatura-erradioa $\rho = \infty$ baita.

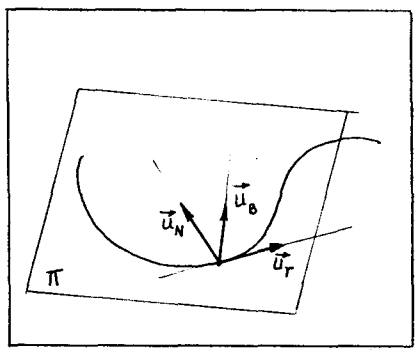
. Higidura zuzen eta uniformea

Kasu honetan $\vec{v} = K\vec{u}$ da

Beraz $a_T = 0$ eta $a_N = 0$

Generalean, edozein makur alabeaturen kasuan ere definitzen dira $\vec{u}_T$ eta $\vec{u}_N$

$\vec{u}_T$ eta $\vec{u}_N$ bektoreen artean laun bat definitzen da (π) ibilbidearen edozein puntutan. Laun hori laun muntzailea deitzen da.



Bi bektore horietan oinharrituriik, triedro bat defini daiteke ibilbidearen edozein puntutan. Hirugarren direkzioa binormala deitzen da eta beraren bektore unitaria honela definitzen da:

$$\vec{u}_B = \vec{u}_T \times \vec{u}_N$$

Hiru direkzio hauek sistema intrintsikoa deiturikoa osotzen dute. Eta direkzio hauekiko edozein bektorek dituen konposatuak, konposatu intrintsikoak deitzen dira.

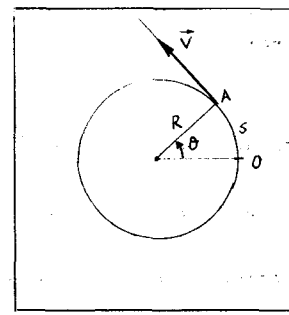
Aurretik ikusi dugunez, azelerazioak ez du konposaturik binormalaren direkzioan. Azelerazioaren modulua hauxe da:

$$a = \sqrt{a_T^2 + a_N^2} = \sqrt{\left(\frac{dv}{dt}\right)^2 + \left(\frac{v^2}{\rho}\right)^2}$$

3.4 HIGIDURA ZIRKULARRA: ABIADURA ANGULARRA ETA AZELERAZIO ANGULARRA

Orain higidura berezi bat aztertuko dugu: ibilbidea zirkunferentzia laun bat da. Noski, abiadura denbora guztian tangentea izanen da. Bi magnitude berezi berri definituko ditugu: abiadura eta azelerazio angularrak.

. Abiadura angularra. Lehen pauso batetan eskalarki definituko dugu. Dakigunez, $\vec{v}$ bektorea erradioaren perpendikularra. Haren modulua ondoko hau da:



$$v = \frac{ds}{dt} = \frac{d(R\theta)}{dt} = R\frac{d\theta}{dt}$$

$\frac{d\theta}{dt} = \omega$ abiadura angularra (eskalarra) deituko dugu

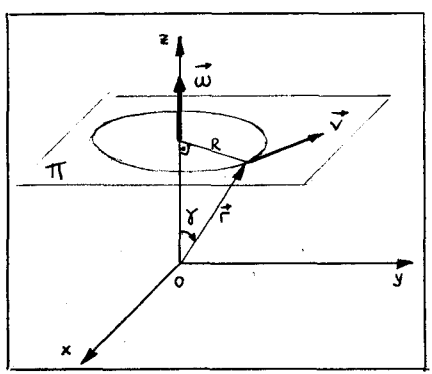
Magnitude berri(aren) unitatea ondoko hau da:

$$[\omega] = s^{-1}$$

Beraz, abiaduraren moduluaren eta abiadura angularraren arteko erlazio hauxe da:

$$v = \omega R$$

Orain bektorialki definituko dugu:



Higidura π launean gertatzen da. π launa $0xy$ launaren paraleloa dela pentsatuko dugu (beti aukera ditzakegu ardatz egokiak).

Kontsidera dezagun $\vec{\omega}$ bektorea.

. Direkzioa $0z$ ardatzarena da; beraz π launaren perpendikularra. $\vec{\omega} \perp \pi$

. Modulua $|\vec{\omega}| = \omega$

Baldintza hauekin, erraz froga daitekeenez, hauxe gertatzen da:

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

Hau horrela da zeren

$$\begin{cases} |\vec{v}| = v = |\vec{\omega} \times \vec{r}| = \omega r \sin\gamma = \omega R = v \\ v\text{-ren direkzioa: zirkunferentziaren tangentea} \end{cases}$$

Honelatan, ba, $\vec{\omega}$ modu honetan definituz, abiadura lineal eta angularraren arteko erlazioa hauxe da:

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

Abiadura angularra ($\vec{\omega}$) sasibektore bat da izatez, zeren eta bere sentidoa hitzamen batetan (torlojuarenean) finkatzen bai ta. Kasu honetan hitzarmen direktua erabili dugu.

. Kasu berezi gisa, higidura zirkular uniformea aztertuko dugu.

Uniformea bada, $\omega = k^{te}$, eta higidura hori periodikoa da.

Bira osoa emateko behar den denbora, <u>periodoa</u> deituko dugu eta P letraz adieraziko.

Denbora unitatean osotzen diren periodo edo zikloak adierazten dituen magnitudea, <u>frekuentzia</u> deitzen da eta ν letraz adierazten.

Argi dagoenez $$\nu = \frac{1}{P}$$

Magnitude hauen unitateak ondokoak dira

P ⟶ segundoa (s)

ν ⟶ hertz (ziklo segunduko) s^{-1}

Abiadura angularraren modulua honela erlazionatzen da periodo eta frekuentziarekin

$$v = \frac{2\pi R}{P} = \omega R$$

$$\omega = \frac{2\pi}{P} = 2\pi\nu$$

Bestalde, θ anguluarekin duen erlazioa kontsideratuz:

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} \longrightarrow d\theta = \omega\, dt$$

Eta integrazioari limite egokiak jarriz:

$$\int_{\theta_o}^{\theta} d\theta = \int_{t_o}^{t} \omega\, dt = \omega \int_{t_o}^{t} dt$$

$$\theta = \theta_o + \omega\left(t - t_o\right)$$

Hemen $\theta_o = 0$ eta $t_o = 0$ eginez

$$\theta = \omega t$$

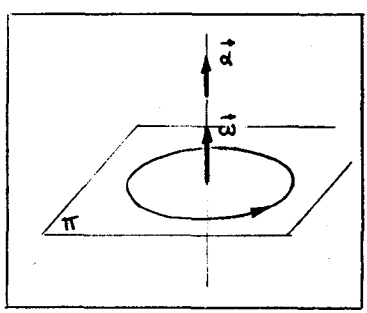
. Azelerazio angularra

Magnitude bektorial honen definizioa ondoko hau da:

$$\vec{\alpha} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}$$

Hots, azelerazio angularra abiadura angularraren denborarekiko deribatua da.

Kasu honetan higidura laun eta zirkularra aztertzen ari garenez, $\vec{\omega}$ bektorearen direkzioa ez da aldatzen.
Beraz, kasu honetan $\vec{\alpha}$ eta bektoreen direkzioak berdinak dira; hain zuzen ere, higidura gertatzen deneko launaren perpendikularrak dira. Hori kontutan harturik, azelerazio angularraren modulua ondokoa da:



$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2}$$

Adibide gisa, α konstantea dela kontsideratuko dugu. Orduan:

$$d\omega = \alpha\, dt$$

$$\int_{\omega_0}^{\omega} d\omega = \int_{t_0}^{t} \alpha\, dt = \alpha \int_{t_0}^{t} dt$$

$$\omega = \omega_0 + \alpha (t - t_0)$$

$$d\theta = \omega\, dt = \omega_0 dt + \alpha (t - t_0)\, dt$$

$$\int_{\theta_0}^{\theta} d\theta = \int_{t_0}^{t} \omega_0 dt + \alpha \int_{t_0}^{t} (t - t_0)\, dt$$

$$\theta = \theta_0 + \omega (t - t_0) + \frac{1}{2} \alpha (t - t_0)^2$$

Lorturiko formulak lehen azelerazio konstanteko higiduraren kasuan lorturikoen antzekoak dira.

. Azelerazio lineala. Bukatzeko, higidura zirkularraren azelerazio lineala aztertuko dugu.

Dakigunez, edozein higiduraren kasuan, azelerazioak bi konposatu ditu: tangentziala eta normala

$$\vec{a} = \frac{dv}{dt} \vec{u}_T + \frac{v^2}{\rho} \vec{u}_N$$

Higidura zirkularra denez

$$a_T = \frac{dv}{dt} = \frac{d(\omega R)}{dt} = R \frac{d\omega}{dt} = R\alpha$$

$$a_N = \frac{v^2}{\rho} = \frac{v^2}{R} = \frac{(\omega R)^2}{R} = \omega^2 R$$

Azken konposatu hau azelerazio zentripetua deitzen da.

Higidura zirkular uniformaren kasuan :

$\alpha = 0$ zeren eta $\omega = K^{te}$ baita

Beraz $a_T = 0$ baina $a_N \neq 0$

Beste modu batetara ere idatz dezakegu bektorialki azelerazio bektoriala. Hara

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

Eta $\vec{r}$ bektorea bira ardatzean hasten bada

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

Beraz

$$\vec{a} = \frac{d(\vec{\omega} \times \vec{r})}{dt} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{\alpha} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \vec{v}$$

Azkenean hauxe geratzen da:

$$\vec{a} = \vec{\alpha} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$$

Erraz ikus daitekeenez

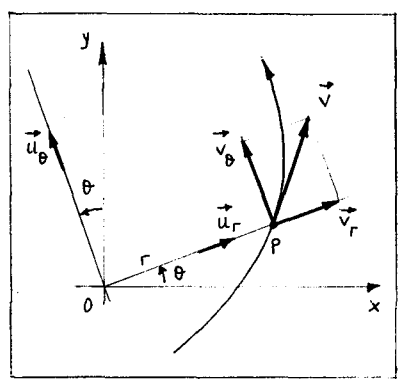
$\vec{\alpha} \times \vec{r} = \vec{a}_T$ ⟶ konposatu tangentziala

$\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) = \vec{a}_N$ ⟶ konposatu zentripetua

3.5 HIGIDURA MAKURDUNA LAUNEAN

Demagun partikula bat laun batetan higitzen. Bi koordinatuz (x,y) nahiko da, beraren posizioa ezagutzeko.

Dena den, (x,y) koordinatu cartesiarrak dira. Baina bestelako koordinatu modu batzu ere aukera daitezke, adibidez, koordinatu zilindriko edo esferikoak.



Guk, P puntuaren posizioa adierazteko, r eta θ erabiko ditugu:

r : OP distantzia da

θ : OP zuzenak Ox ardatzarekin formatzen duen angulua.

Izatez koordinatu esferiko zein zilindrikoak dira, bi dimentsio tan. Bektore unitari gisa, espazioko, edo hobe esateko ibilbi deko edozein punturentzat $\vec{u}_r$ eta $\vec{u}_\theta$ hartuko ditugu

$\vec{u}_r$: $\vec{OP}$ bektorearen direkziokoa

$\vec{u}_\theta$: direkzio perpendikularra, θ angulua hasten deneko sentidoan

Horrela eginik, hauxe geratzen zaigu

$$\vec{r} = r\,\vec{u}_r \qquad (P \text{ puntuan, noski})$$

Deribatuz:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = r\,\frac{d\vec{u}_r}{dt} + \vec{u}_r\,\frac{dr}{dt}$$

Kalkula dezagun orain $\dfrac{d\vec{u}_r}{dt}$

$$\left.\begin{aligned}\vec{u}_r &= \cos\theta\,\vec{i} + \sin\theta\,\vec{j}\\ \vec{u}_\theta &= -\sin\theta\,\vec{i} + \cos\theta\,\vec{j}\end{aligned}\right\} \quad \begin{matrix}\text{bien modulua}\\ 1 \text{ baita}\end{matrix}$$

Lehena deribatuz:

$$\frac{d\vec{u}_r}{dt} = -\frac{d\theta}{dt}\sin\theta\,\vec{i} + \frac{d\theta}{dt}\cos\theta\,\vec{j} = \frac{d\theta}{dt}\left(-\sin\theta\,\vec{i} + \cos\theta\,\vec{j}\right)$$

Beraz $$\frac{d\vec{u}_r}{dt} = \frac{d\theta}{dt}\,\vec{u}_\theta$$

Honela, ba, abiaduraren adierazpenera eramanez

$$\vec{v} = \frac{dr}{dt}\vec{u}_r + r\frac{d\theta}{dt}\vec{u}_\theta$$

Beraz, espresio honek dioskunez, abiadurak bi konposatu ditu. Konposatu hauk honela deitzen dira:

$\frac{dr}{dt} = v_r$: konposatu erradiala, $\vec{r}$ erradioaren ($\vec{u}_r$ -ren) direkzioa baitu

$r\frac{d\theta}{dt} = v_\theta$: konposatu transbertsala

$$\vec{v} = \vec{v}_r + \vec{v}_\theta$$

. Abiadura zirkularraren kasuan, origena zirkunferentziaren zentruan harturik, $R = K^{te}$

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = 0 \longrightarrow v_r = 0$$

Hots, abiadura erradiala nulua da

. Azelerazioaren konposatu erradiala eta transbertsala ere berdinki kalkula daitezke

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\left(\frac{dr}{dt}\vec{u}_r + r\frac{d\theta}{dt}\vec{u}_\theta\right)}{dt}$$

eta deribatuz

$$\vec{a} = \frac{d^2r}{dt^2}\vec{u}_r + \frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt}\vec{u}_\theta + \frac{dr}{dt}\frac{d\vec{u}_r}{dt} + r\frac{d^2\theta}{dt^2}\vec{u}_\theta + r\frac{d\theta}{dt}\frac{d\vec{u}_\theta}{dt}$$

Hemen $\frac{d\vec{u}_\theta}{dt}$ ezagutzea falta zaigu. Aurreko horrialdean jarri dugun $\vec{u}_r$ eta $\vec{u}_\theta$ bektoreen balorean finkatuz:

$$\frac{d\vec{u}_\theta}{dt} = -\frac{d\theta}{dt}\cos\theta\,\vec{i} - \frac{d\theta}{dt}\sin\theta\,\vec{j} = -\frac{d\theta}{dt}\vec{u}_r$$

Goiko espresiora eramanez eta konposatuak banatuz:

$$\begin{cases} a_r = \dfrac{d^2r}{dt^2} - r\left(\dfrac{d\theta}{dt}\right)^2 \\ a_\theta = 2\dfrac{dr}{dt}\dfrac{d\theta}{dt} + r\dfrac{d^2\theta}{dt^2} \end{cases}$$

Noski, azelerazioa honela idazten da bektorialki:

$$\vec{a} = a_r \vec{u}_r + a_\theta \vec{u}_\theta$$

4. GAIA - HIGIDURA ERLATIBOA

4.1 ABIADURAREN ETA AZELERAZIOAREN IZAKERA ERLATIBOA

4.2 TRANSALDATZEZKO HIGIDURA ERLATIBOA

4.3 BIRA UNIFORMEZKO HIGIDURA ERLATIBOA

4.4 HIGIDURA ERLATIBO GENERALA

- CORIOLIS-EN AZELERAZIOA

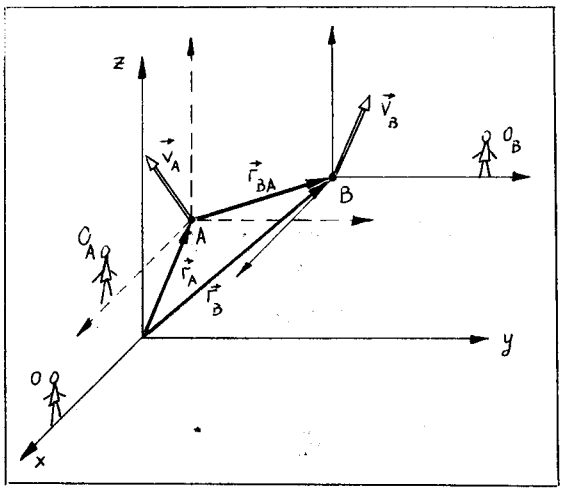
Aurreko gaian ikusi dugun bezala, higiduraren kontzeptua -eta halaber abiadura eta azelerazioarena- gauza erlatiboa da.

Erreferentziazko sistema desberdinetan dauden behatzaileek, behaketa eta neurketa desberdinak egiten dituzte. Fisikariek ez dute beti erreferentziazko sistema berbera erabiltzen; aitzitik, kasu bakoitzean sistemarik egokiena eta sinpleena aukeratzera jotzen dute. Batzutan Lurrarekin batera doan sistema ez-inertziala -biraka ari baita- erabiltzen dute; bestetan, eguzkiarekin edo izar fixoekin doana; bestetan, estudiatzen ari den sistemaren masa-zentruarekin doana; eta abar.

Hala ere, gertakari fisikoak bakarrak dira, berberak dira, nahiz eta sistema desberdinetan itxura desberdinez ageri. Horregatik, sistema desberdinetatik egiten diren neurketa desberdinak elkarrekin erlazionatzea komeni da, sistema desberdinetako behaketak modu berean interpretatu ahal izateko.

Gaur eguneko fisikariek dakitenez, ez du zentzurik pausagunean dagoen sistema absoluturik edo pausagune absolutuan dagoen sistemarik bilatzeak. Sistema guztiak erlatiboki kontsideratu behar dira. Eta horregatik, garrantzi handikoa da, sistema desberdinetako neurketak konparatzen jakitea. Horixe da, hain zuzen ere, gai honetan eginen duguna; sistema desberdinetako neurketak (magnitudeak) erlazionatu.

4.1 ABIADURAREN ETA AZELERAZIOAREN IZAKERA ERLATIBOA



Demagun A eta B puntuak higitzen ari direla. Demagun, bestalde, XYZ erreferentzi sisteman dagoen O behatzailea.

Azter ditzagun, O_A eta O_B behatzaileek egiten dituzten neurketa kinematikoak, O behatzaileak egiten dituenekin konparatuz.

. Posizio-bektoreak

O behatzaileak { A ren posizio-bektorea : $\vec{r}_A$
B ren posizio-bektorea : $\vec{r}_B$

O_A behatzailea, origena A puntuan eta ardatzak XYZ sistemaren paraleloak diren sistema batetan doa. Honek zera neurtzen du:

{ A ren posizio-bektorea : $\vec{r}_{AA} = 0$
B ren posizio-bektorea : $\vec{r}_{BA} = \vec{r}_B - \vec{r}_A$

O_B behatzaileak hauxe neurtzen du

{ A ren posizio-bektorea : $\vec{r}_{AB} = \vec{r}_A - \vec{r}_B$
B ren posizio-bektorea : $\vec{r}_{BB} = 0$

. Abiadurak

Denbora magnitude absolutu gisa jotzen da, hots behatzaile guztiek modu berean neurtzen dute

$$t = t_A = t_B$$

O behatzaileak:

$$\begin{cases} A \text{ puntua} \longrightarrow \vec{v}_A = \dfrac{d\vec{r}_A}{dt} \\ B \text{ puntua} \longrightarrow \vec{v}_B = \dfrac{d\vec{r}_B}{dt} \end{cases}$$

O_A behatzaileak:

$$\begin{cases} A \text{ puntua} \longrightarrow \vec{v}_{AA} = 0 \\ B \text{ puntua} \longrightarrow \vec{v}_{BA} = \dfrac{d\vec{r}_{BA}}{dt} = \dfrac{d\vec{r}_B}{dt} - \dfrac{d\vec{r}_A}{dt} = \vec{v}_B - \vec{v}_A \end{cases}$$

Hauxe da B puntuak A puntuarekiko duen abiadura.

O_B behatzaileak:

$$\begin{cases} A \text{ puntua} \longrightarrow \vec{v}_{AB} = \dfrac{d\vec{r}_{AB}}{dt} = \vec{v}_A - \vec{v}_B \\ B \text{ puntua} \longrightarrow \vec{v}_{BB} = 0 \end{cases}$$

Argi ikusten denez:

$$\vec{v}_{BA} = -\vec{v}_{AB}$$

. <u>Azelerazioak</u>. Hauekin ere berdintsu gertatzen da.

O behatzaileak:

$$\begin{cases} \vec{a}_A = \dfrac{d\vec{v}_A}{dt} \\ \vec{a}_B = \dfrac{d\vec{v}_B}{dt} \end{cases}$$

O_A behatzaileak:

$$\vec{a}_{BA} = \frac{d\vec{v}_{BA}}{dt} = \frac{d\vec{v}_B}{dt} - \frac{d\vec{v}_A}{dt} = \vec{a}_B - \vec{a}_A$$

O_B behatzaileak:

$$\vec{a}_{AB} = \frac{d\vec{v}_{AB}}{dt} = \frac{d\vec{v}_A}{dt} - \frac{d\vec{v}_B}{dt} = \vec{a}_A - \vec{a}_B$$

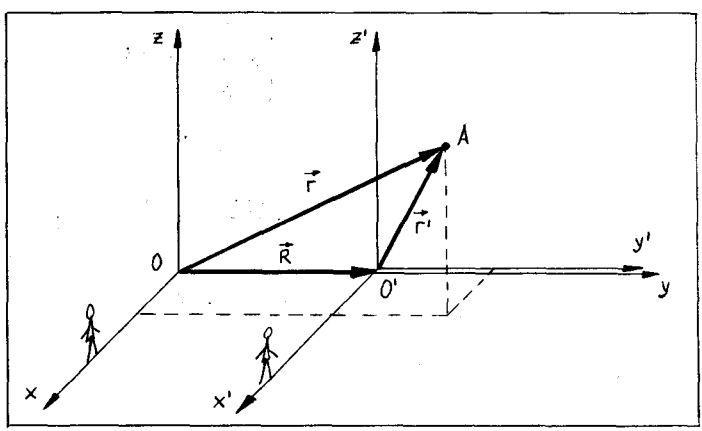
Hemen ere, argi dagoenez:

$$\vec{a}_{BA} = -\vec{a}_{AB}$$

Lorturiko erlazioak honela interpreta daitezke: Partikula bat $\vec{v}$ abiaduraz eta $\vec{a}$ azelerazioz higitzen bada, partikula horrekin batera eta paraleloki higitzen ari den behatzaileak, bere inguruko mundu osoa (partikula guztiak) duten higiduraz gain, $-\vec{v}$ abiaduraz eta $-\vec{a}$ azelerazioz higitzen ikusten ditu. Hots, geldi dauden partikulak, $-\vec{v}$ abiaduraz eta $-\vec{a}$ azelerazioz higitzen direla ikusten ditu. Hauxe da trenean goazela gertatzen zaiguna: Geltokian trena higitzen hastean, kaiko pertsonak atzerantz doazela uste dugu, gu geldi gaudela pentsatuz.

4.2 TRANSALDATZEZKO HIGIDURA ERLATIBOA

Elkarrekiko abiadura konstantez higitzen ari diren bi behatzaile kontsideratuko ditugu. O sistemarekin doan behatzaileak, $\vec{V}$ abiaduraz ikusten du higitzen O' sistema. Adibide gisa eta kalkuluak errazteko, bi sistemen ardatzak paraleloak direla kontsideratuko dugu, eta halaber, abiadurak ($\vec{V}$-k) Oy ardatzaren direkzioa duela, eta $t_o=0$ aldiunean ardatz sistema biek leku berean daudela.



A partikula puntualaren azterketa kinematikoa eginen dugu. Lehenik eta behin, erabiltzen ari garen nomenklatura azalduko dugu:

- Azenturik gabeko magnitudeak, $Oxyz$ sistematik neurtzen direnak dira. Neurri "absolutuak" deitzen dira.

- Majuskulaz idatzirik daudenak, O' puntuari dagozkio (sistemen arteko higidura adierazten dute).

- Magnitude azentuatuak $Ox'y'z'$ sistematik neurtzen direnak dira. Neurri "erlatiboak" deritze.

Demagun bi behatzaileen erlojuak sinkronizaturik daudela. Beraz, $t = t'$. Lehen unean $t_o = 0$. Honela:

$\vec{R} = \vec{OO'} = \vec{V}\,t$ zeren $\vec{V}$ konstante baita.

Posizio-bektoreak. Bi sistemetan A partikulak dituen posizio-bektoreen arteko erlazioa, ondokoa da

$$\vec{r} = \vec{R} + \vec{r'} = \vec{V}t + \vec{r'}$$

Eta konposatuen funtzioan ipiniz, $\vec{V} = V\vec{j}$ denez:

$$\begin{cases} x = x' \\ y = y' + Vt \\ z = z' \end{cases}$$

$$t = t'$$

Lau ekuazio eskalar hauek tranformakuntza galilear bat osotzen dute.

Abiadura. Aurreko espresioa denborarekiko deribatuz

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{R}}{dt} + \frac{d\vec{r'}}{dt} = \frac{d\vec{R}}{dt} + \frac{d\vec{r'}}{dt'}$$

Hots:

$$\vec{v} = \vec{V} + \vec{v'}$$

Eta konposatuen arteko erlazioak hauxek dira

$$\begin{cases} v_x = v'_{x'} \\ v_y = V + v'_{y'} \\ v_z = v'_{z'} \end{cases}$$

. Azelerazioak. Berriro ere denborarekiko deribatuz:

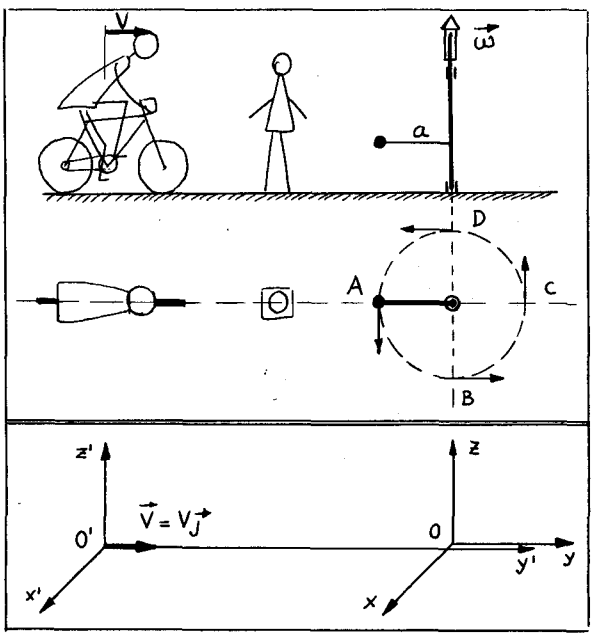
$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\vec{V}}{dt} - \frac{d\vec{v'}}{dt} = \frac{d\vec{v'}}{dt}$$

$(\vec{V}$ konstante baita)

Hau da : $\vec{a} = \vec{a'}$

Ikusten denez, bi behatzaileek azelerazio berbera neurtzen dute. Azelerazioa, ba, inbariantea da sistemen transaldatze uniformearekiko ($\vec{V} = K^{te}$). Inbariantzia hau oso garrantzizkoa da fisikaren arloan, eta inbariantzia galilearra deitzen da. Hurrengo gaian, Dinamikaren oinharrizko printzipioak lantzean, inbariantzia horretan finkatuko gara, bai indar kontzeptua definitzean eta bai inertzi sistemak definitzean ere. Inbariantzia hau oso baliagarria izanen da Mekanika Klasikoan zehar, nahiz eta erlatibitate teorian aldatu egin beharko den, Lorentz-en transformakuntza sartuz.

Goiko sistema arteko transformakuntzak nolakoak diren ulertzeko, adibide bat jarriko dugu.



Demagun abiadura konstantez higitzen ari den ziklista bat ($\vec{V} = K$) Beste behatzaile bat geldi dago.

Bi behatzaileok abiadura angular konstantez biratzen ari den gorputz bat ikusten ari dira.

Zeintzu dira bi behatzaileek neurtzen dituzten abiadurak,

higitzen ari den gorputza A , B , C eta D puntuetan dagoenean?

Soluzioa lortzeko, bi koordenatu-sistema aukeratuko ditugu: Bata ziklistarekin doa ($O'x'y'z'$), eta bestea geldi dago ($Oxyz$). Bi sistemetako ardatz bikoteak, paraleloak dira.

$O'x'y'z'$ sistema $\vec{V} = V\vec{j} = K^{te}$ abiaduraz higitzen da sistemarekiko. Abiaduren arteko erlazioa ondokoa da, teorian azaldu dugunaren arauera:

$$\vec{v} = \vec{V} + \vec{v'}$$

. Azter dezagun, ba, A puntuaren kasua

- <u>$Oxyz$ sisteman</u>: $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$, higidura zirkularra baita.

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{\omega} = \omega \vec{k} = K^{te} \\ \vec{r} = -a\vec{j} \end{array} \right\} \longrightarrow \vec{v} = \omega a \vec{i}$$

- <u>$O'x'y'z'$ sisteman</u>: $\vec{v'} = \vec{v} - \vec{V}$

Beraz $\vec{v'} = \omega a \vec{i} - V\vec{j}$

Honen modulua hauxe da

$$v' = \sqrt{\omega^2 a^2 + V^2}$$

. Gauza bera egin dezakegu B puntuan

- <u>$Oxyz$ sisteman</u>:

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r} \left\{ \begin{array}{l} \vec{\omega} = \omega \vec{k} \\ \vec{r} = a\vec{i} \end{array} \right\} \longrightarrow \vec{v} = a\omega\vec{j}$$

- <u>$O'x'y'z'$ sisteman</u>: $\vec{v'} = \vec{v} - \vec{V}$

$$\vec{v'} = \omega a\vec{j} - V\vec{j} = (\omega a - V)\vec{j}$$

Beronen modulua ondokoa da:

$$v' = \omega a - V$$

. C puntuan $\begin{cases} \vec{v} = -a\omega\,\vec{i} \\ \vec{v}' = -a\omega\,\vec{i} - V\vec{j} \end{cases}$

Eta modulua $v' = \sqrt{a^2\omega^2 + V^2}$

. D puntuan $\begin{cases} \vec{v} = -a\omega\,\vec{j} \\ \vec{v}' = (-a\omega - V)\,\vec{j} \end{cases}$

$v' = a\omega + V$

Ikusten denez, nahiz eta behatzaile biak higidura berbera behatzen ari diren, gauza desberdinak neurtzen dituzte.

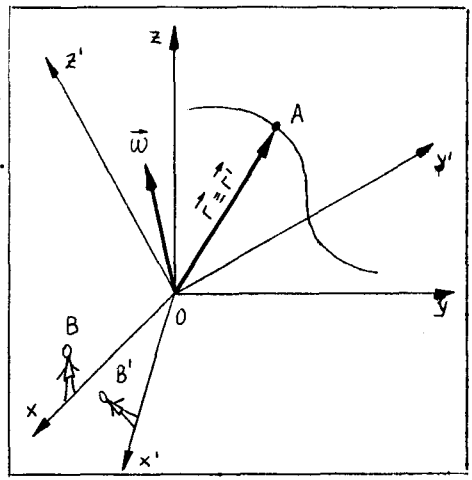
- Geldi dagoen behatzaileak, higidura zirkular uniformea ikusten du. $\vec{v}$ abiadurak modulu konstantea du, ωa halegia
- Ziklistak neurtzen duen abiaduraren ($\vec{v}'$-ren) modulua, ordea, aldatuz doa etengabe.

4.3 BIRA UNIFORMEZKO HIGIDURA ERLATIBOA

Orain beste kasu berezi bat aztertuko dugu. Elkarrekiko biraka baina transaldapenik gabe higitzen ari diren bi sistema aztertuko ditugu.

- Batetik, $Oxyz$ sistema, non B behatzailea baitago. Sistema hau geldi dagoela kontsideratuko dugu
- Bestetik, $O'x'y'z'$ sistema, B' behatzailearekin. Ikusten denez, sistema bientzako origen bakarra aukeratu dugu, kalkuluak errazteko. Bigarren sistema hau $\vec{\omega}$ abiadura angularraz higitzen ari da lehen sistemarekiko. $\vec{\omega}$ hau, bektore konstantea dela kontsideratuko dugu, eta beronen direkzioa O puntutik iragaten da, noski.

Puntu material bat -A delakoa- higitzen ari da. B eta B' behatzaileek higidura horren magnitude kinematikoak neurtzen dituzte. Guk horien artean dauden erlazioak kalkulatu nahi ditugu. Hau da, lehenago egin dugun bezala, bi behatzaileek neurtzen dituzten posizio-bektoreak, abiadurak eta azelerazioak elkarrekin erlazionatuko ditugu.



. Posizio-bektoreak. Origen bereko sistemak direnez gero,

$$\vec{r} \equiv \vec{r}'$$

Baina sistema desberdinak direnez, bektore honek konposatu desberdinak ukanen ditu batean eta bestean:

$Oxyz$ sisteman: $\vec{r} = x\,\vec{\imath} + y\,\vec{\jmath} + z\,\vec{k}$

$O'x'y'z'$ sisteman: $\vec{r}' = x'\,\vec{\imath}' + y'\,\vec{\jmath}' + z'\,\vec{k}'$

. Abiadurak.

Azter dezagun, lehenik, B behatzaileak ikusten duena

$\vec{v} = \left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)_B$ Azpiindize horrekin, deribatzen duena B behatzailea dela esan nahi da. Beraz:

$$\vec{v} = \frac{d}{dt}(x\,\vec{\imath} + y\,\vec{\jmath} + z\,\vec{k}) = \frac{dx}{dt}\vec{\imath} + \frac{dy}{dt}\vec{\jmath} + \frac{dz}{dt}\vec{k}$$

zeren eta B behatzailearentzat

$$\frac{d\vec{\imath}}{dt}=\frac{d\vec{\jmath}}{dt}=\frac{d\vec{k}}{dt}=0$$

baitira:

B' behatzaileak honela deribatzen du denborarekiko:

$$\vec{v}'=\left(\frac{d\vec{r}'}{dt}\right)_{B'}=\frac{d}{dt}\left(x'\vec{\imath}'+y'\vec{\jmath}'+z'\vec{k}'\right)=\frac{dx'}{dt}\vec{\imath}'+\frac{dy'}{dt}\vec{\jmath}'+\frac{dz'}{dt}\vec{k}'$$

zeren eta B' behatzailearentzat

$$\frac{d\vec{\imath}'}{dt}=\frac{d\vec{\jmath}'}{dt}=\frac{d\vec{k}'}{dt}=0$$

baitira,

B' behatzaileak $\vec{\imath}'$, $\vec{\jmath}'$ eta $\vec{k}'$ konstanteak direla ikusten du eta. Zer esanik ez, eta Mekanika Erlatibistan sartu gabe, $t=t'$ dela kontsideratu dugu, hots, B eta B'-ren erlojuak sinkronizaturik dabiltzala. Halaber, $dt=dt'$ izanen da.

Zer erlazio dago B-k eta B'-k neurtzen dituzten abiaduren artean, hau da $\vec{v}$-ren eta $\vec{v}'$-ren artean?

Dakigunez

$$\vec{r}=\vec{r}'$$

B behatzaileak berdingo hau deribatuz:

$$\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)_B=\left(\frac{d\vec{r}'}{dt}\right)_B$$

Kalkula dezagun $\left(\frac{d\vec{r}'}{dt}\right)_B$

$$\left(\frac{d\vec{r}'}{dt}\right)_B=\left[\frac{d}{dt}\left(x'\vec{\imath}'+y'\vec{\jmath}'+z'\vec{k}'\right)\right]_B=$$

$$=\frac{dx'}{dt}\vec{\imath}'+\frac{dy'}{dt}\vec{\jmath}'+\frac{dz'}{dt}\vec{k}'+x'\left(\frac{d\vec{\imath}'}{dt}\right)_B+y'\left(\frac{d\vec{\jmath}'}{dt}\right)_B+z'\left(\frac{d\vec{k}'}{dt}\right)_B$$

Hemen $\frac{dx'}{dt}\vec{\imath}'+\frac{dy'}{dt}\vec{\jmath}'+\frac{dz'}{dt}\vec{k}'=\vec{v}'$

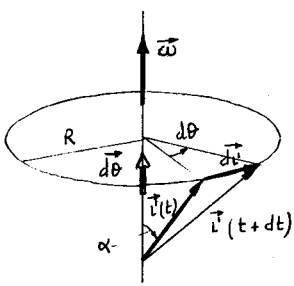
eta bestalde, B behatzailearekiko $\vec{i}'$, $\vec{j}'$ eta $\vec{k}'$ konstante ez direnez, generalean

$$\left(\frac{d\vec{i}'}{dt}\right)_B \neq 0 \qquad \left(\frac{d\vec{j}'}{dt}\right)_B \neq 0 \qquad \left(\frac{d\vec{k}'}{dt}\right)_B \neq 0$$

dira.

Zenbat balio dute deribatu hauek?

B behatzailearen eritziz, $\vec{i}'$ (eta berdin $\vec{j}'$ eta $\vec{k}'$) biraka ari da, $\vec{\omega}$ abiadura angularraz. Beraz, dt denbora tartean duen aldakuntza, alboko irudian ageri dena da.



B behatzaileak dakusan $d\vec{i}'$ bektorea

Ikusten denez

$$d\vec{i}' = d\vec{\theta} \times \vec{i}'$$

zeren

$$\left|d\vec{\theta} \times \vec{i}'\right| = d\theta \cdot 1 \cdot \sin\alpha = d\theta \cdot R$$

eta $d\vec{i}'$ bektorea, $\vec{i}'$-k eta $d\vec{\theta}$-k osotzen duten lauaren perpendikularra baita.

Beraz,

$$\left(\frac{d\vec{i}'}{dt}\right)_B = \frac{d\vec{\theta}}{dt} \times \vec{i}' = \vec{\omega} \times \vec{i}'$$

Modu berean

$$\left(\frac{d\vec{j}'}{dt}\right)_B = \vec{\omega} \times \vec{j}'$$

$$\left(\frac{d\vec{k}'}{dt}\right)_B = \vec{\omega} \times \vec{k}'$$

Eta $\left(\frac{d\vec{r}'}{dt}\right)_B$ delakoaren adierazpenean substituituz (ordezkatuz):

$$\left(\frac{d\vec{r}'}{dt}\right)_B = \vec{v}' + x'\vec{\omega} \times \vec{i}' + y'\vec{\omega} \times \vec{j}' + z'\vec{\omega} \times \vec{k}'$$

$$\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)_B = \left(\frac{d\vec{r}'}{dt}\right)_{B'} = \vec{v}' + \vec{\omega} \times \left(x'\vec{i}' + y'\vec{j}' + z'\vec{k}' \right)$$

Hau da, azkenean zera geratzen zaigu:

$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{\omega} \times \vec{r}'$$

Hauxe da, ba, B eta B' behatzaileek neurtzen dituzten abiaduren arteko erlazioa.

. Azelerazioak

B behatzaileak neurtzen duen azelerazioa hauxe da:

$$\vec{a} = \left(\frac{d\vec{v}}{dt}\right)_B = \frac{dv_x}{dt}\vec{i} + \frac{dv_y}{dt}\vec{j} + \frac{dv_z}{dt}\vec{k} \qquad \text{edo bestela}$$

idatzirik : $\vec{a} = \frac{d^2x}{dt^2}\vec{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\vec{j} + \frac{d^2z}{dt^2}\vec{k}$

B' behatzaileak hauxe ikusten eta neurtzen du:

$$a' = \left(\frac{d\vec{v}'}{dt}\right)_{B'} = \frac{dv_{x'}}{dt}\vec{i}' + \frac{dv_{y'}}{dt}\vec{j}' + \frac{dv_{z'}}{dt}\vec{k}'$$

Erlaziona ditzagun B eta B' behatzaileen neurketak. Horretarako, abiaduren arteko erlazioa hartuko dugu

$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{\omega} \times \vec{r}'$$

Kontsidera dezagun B behatzaileak adierazpen honen parte biak deribatzen dituela.

$$\left(\frac{d\vec{v}}{dt}\right)_B = \left(\frac{d\vec{v}'}{dt}\right)_B + \left[\frac{d}{dt}\left(\vec{\omega} \times \vec{r}'\right)\right]_B$$

Eta $\vec{\omega}$ konstantea dela esan dugunez

$$\left(\frac{d\vec{v}}{dt}\right)_B = \left(\frac{d\vec{v}'}{dt}\right)_B + \vec{\omega} \times \left(\frac{d\vec{r}'}{dt}\right)_B$$

$$\left(\frac{d\vec{v}'}{dt}\right)_B = \left[\frac{d}{dt}\left(v'_{x'}\vec{i}' + v'_{y'}\vec{j}' + v'_{z'}\vec{k}'\right)\right]_B =$$

$$= \frac{dv'_{x'}}{dt}\vec{i}' + \frac{dv'_{y'}}{dt}\vec{j}' + \frac{dv'_{z'}}{dt}\vec{k}' +$$

$$+ v'_{x'}\frac{d\vec{i}'}{dt} + v'_{y'}\frac{d\vec{j}'}{dt} + v'_{z'}\frac{d\vec{k}'}{dt} =$$

$$= \vec{a}' + v'_{x'}\vec{\omega}\times\vec{i}' + v'_{y'}\vec{\omega}\times\vec{j}' + v'_{z'}\vec{\omega}\times\vec{k}' =$$

$$= \vec{a}' + \vec{\omega}\times\left(v'_{x'}\vec{i}' + v'_{y'}\vec{j}' + v'_{z'}\vec{k}'\right)$$

$$\left(\frac{d\vec{v}'}{dt}\right)_B = \vec{a}' + \vec{\omega}\times\vec{v}'$$

Eta aurreko puntuan oinharriturik

$$\left(\frac{d\vec{r}'}{dt}\right)_B = \vec{v} = \vec{v}' + \vec{\omega}\times\vec{r}'$$

Erresultatu hauk lehengo adierazpenera eramanik:

$$\left(\frac{d\vec{v}}{dt}\right)_B = \vec{a} = \vec{a}' + \vec{\omega}\times\vec{v}' + \vec{\omega}\times\left(\vec{v}' + \vec{\omega}\times\vec{r}'\right)$$

Eta azkenik

$$\vec{a} = \vec{a}' + \vec{\omega}\times\left(\vec{\omega}\times\vec{r}'\right) + 2\,\vec{\omega}\times\vec{v}'$$

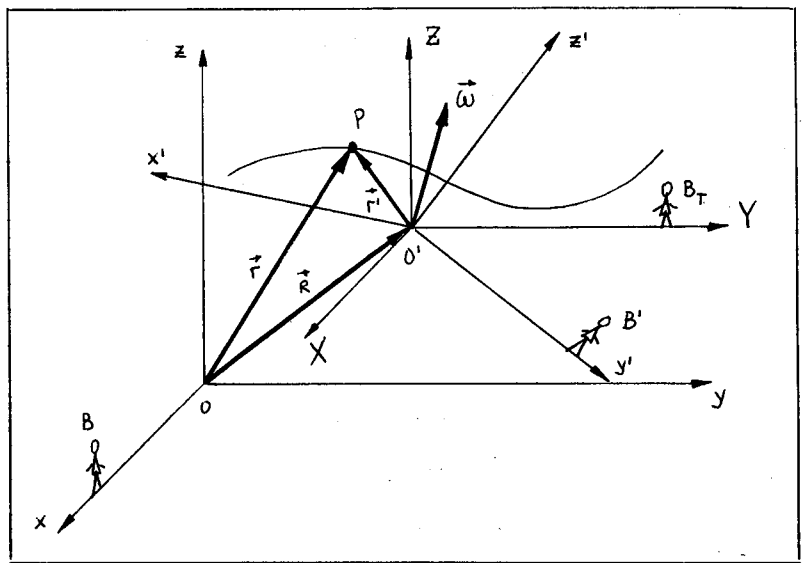
Hauxe da, ba, B eta B' behatzaileek neurtzen dituzten azelerazioen arteko erlazioak. Termino horiei izen berezia ematen zaie:

$\vec{\omega}\times\left(\vec{\omega}\times\vec{r}'\right)$: azelerazio zentripetua

$2\,\vec{\omega}\times\vec{v}'$: Coriolis-en azelerazioa

4.4 HIGIDURA ERLATIBO GENERALA

Aurretik aztertu ditugun higidura erlatibo biak -transaldatzekoa eta birazkoa- kasu partikularrak dira. Horregatik, kasurik generalena aztertzea ere komeni zaigu. Dena den maila honetarako konplikatuegia denez, lortzen diren erresultatuak eta planteiamendu orokorra aztertuko ditugu soilik.



Kasurik generalenean B' behatzailea doaneko erreferentzi sistemaren origena (O') transaldatu egiten da B behatzailearekiko eta halaber, O'x'y'z' sistema biraka ari da, abiadura angular ez-konstantez. Ondoko sistemak ditugu.

Oxyz : B behatzailea doaneko sistema.

O'XYZ : Beronen ardatzak eta Oxyz sistemarenak paraleloak dira denbora guztian, baina origena higitu egiten da B behatzailearekiko, edozein ibilbidea edukiz. B_T behatzailearena

O'x'y'z': B' behatzailea doaneko sistema. O'XYZ sistemaren origen berbera du, baina biraka ari da harekiko $\vec{\omega}$ abiadura angularraz.

$\mathcal{B}$ eta $\mathcal{B}'$ behatzaileek egiten dituzten neurketa kinematikoak azentuatu gabe eta azentuaturik agertuko dira errespektiboki. Bi behatzaile hauk P puntu materialaren higidura aztertzen ari dira kinematikoki. Aurkitzen eta neurtzen dituzten magnitude kinematikoen arteko erlazioak, ondokoak direla froga daiteke.

$$\begin{cases} \vec{r} = \vec{R} + \vec{r}' \\ \vec{v} = \vec{V} + \vec{v}' + \vec{\omega} \times \vec{r}' \\ \vec{a} = \vec{A} + \vec{a}' + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}' + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') + 2\,\vec{\omega} \times \vec{v}' \end{cases}$$

Ekuazio hauek edozein bi behatzaileren neurketa kinematikoak erlazionatzeko balio digute. Adibide gisa, transaldatzezko eta birazko kasuak, kasu honen kasu partiularrak direla ikusiko dugu.

. Transaldatzezko kasua. Kasu honetan $\vec{\omega} = 0$

eta, bestalde, transaldapena uniformea bada, $\vec{A} = 0$

Beraz goiko ekuazioak honela geratzen zaizkigu

$$\begin{cases} \vec{r} = \vec{R} + \vec{r}' \\ \vec{v} = \vec{V} + \vec{v}' \\ \vec{a} = \vec{a}' \end{cases}$$

Hots, Galileoren transformakuntzaren kasuan lortzen genituen, espresio berberak.

. Birazko kasua. Origen berberezkobira uniformea izanik:

$$\begin{cases} \vec{A} = 0 & \vec{R} = 0 & \vec{V} = 0 \\ \vec{\omega} = K^{te} & \dfrac{d\vec{\omega}}{dt} = \dot{\vec{\omega}} = 0 \end{cases}$$

Beraz hauxe geratzen zaigu:

$$\begin{cases} \vec{r} = \vec{r}' \\ \vec{v} = \vec{v}' + \vec{\omega} \times \vec{r}' \\ \vec{a} = \vec{a}' + \vec{\omega} \times \left(\vec{\omega} \times \vec{r}'\right) + 2\vec{\omega} \times \vec{v}' \end{cases}$$

Bukatzeko, iruzkiń labur bat eginen dugu Coriolis-en azelerazioari buruz.

. Coriolisen azelerazioa

Aurreko horrialde batetan esan dugun bezala, $2\vec{\omega} \times \vec{v}'$ terminoari Coriolisen azelerazioa deritza. Ikusten denez, biraka ari diren sistemekiko abiadura erlatiboa duten higiduren kasuan kontsideratu behar da soilik.

Lurrean bizi garenez, eta Lurra bere ardatzarekiko biraka ari delarik, Lurrean higitzen ari diren gorputzen kasuan, kontutan hartzekoa izanen da azelerazio hau. Hurrengo gaian partikularen dinamikaz hitz egitean ikusiko dugunez, Coriolisen efektuak garrantzi handia edukiko du haizeen higiduretan, zikloi eta antizikloien izakeran eta abarretan. Dena dela, aurrerago egiteko utziko dugu puntu hau.

5. GAIA - MEKANIKAREN PRINTZIPIOAK: PARTIKULAREN DINAMIKA

5.1 INERTZIAREN PRINTZIPIOA. NEWTONEN LEHEN LEGEA

- GALILEOREN TRANSFORMAKUNTZA ETA INERTZIAREN PRINTZIPIOA

5.2 MOMENTU LINEALA

5.3 MOMENTU LINEALAREN KONTSERBAPENAREN PRINTZIPIOA

5.4 INDAR KONTZEPTUAREN DEFINIZIOA: NEWTONEN BIGARREN ETA HIRUGARREN LEGEAK

5.5 KONTAKTU-INDARRAK: INDAR NORMALA ETA IGURTZIMENDUZKO INDARRA

5.6 IGURTZIMENDUZKO INDARRAK FLUIDOETAN

5.7 MOMENTU ANGULARRA

5.8 INDAR ZENTRALAK

5.9 SISTEMA EZ-INERTZIALAK. INERTZI INDARRAK

5.10 LURRA ERREFERENTZIAZKO SISTEMA BEZALA

Aurreko gaietan partikularen higiduraren deskribapenaz arduratu izan gara. Eta sistema desberdinen arteko erlazioak ere lortu ukan ditugu. Hala ere, kinematikoki aztertu dugu soilik higidura, hau da, higidura horren kausetaz kezkatu gabe. Orain go gai honetan, higiduraren kausetaz arduratuko gara, hau da, Dinamikaren arloan arituko gara. Eta interakzioak aztertuko ditugu, edo beste hitz batez esateko, indarra. Dinamika, azken batez, indarren eta higidur aldaketen arteko erlazioen azterketa da.

5.1 INERTZIAREN PRINTZIPIOA (NEWTON-EN LEHEN LEGEA)

Printzipio hau eman baino lehen, partikula askatua zer den definitu behar dugu. Labur esanik, partikula askatua, inolako elkarrrakziorik pairatzen ez duen partikula dela esan dezakegu. Zehazki hitz eginez, unibertsuan ez dago partikula askaturik, denen arteko elkarrakzioak baitaude, ttikiak badira ere. Gainera, partikula askatuak ezin dirateke obserba, zeren eta behaketan behatzaile eta partikularen arteko elkarrakzioa baitago. Honela, ba, partikula askatuak unibertsutik aparte egon behar du edo guztiz isolaturik. Dena den, puntu teoriko horik alde batetara utzirik, praktikan partikula batzu askatuak baliren kontsidera ditzakegu, haien gainean egiten diren elkarrakzioak mezpreziagarriak baitira. Oraingoz, ba, partikula askatuak ezagutzen ditugula kontsideratuko dugu eta gerorako utziko dugu partikula horik zeintzu diren aurkitzea.

Partikula askatuen higiduran finkatuz, inertziaren printzipioa (beste era batetara, Newton-en lehen legea deitua) adieraziko dugu. Hauxe da:

> "Partikula askatuak abiadura konstantez higitzen dira inertziazko sistema erreferentzialekiko"

Beste modu batez esateko, partikula askatuen azelerazioa nulua da. Edozein modutan, higidura gauza erlatiboa dela dakigu -aurreko gaian aztertu dugunez-, eta horregatik sistema konkre

tu batetiko definitu beharko da, honela gero beste edozein sistemarekiko definitu ahal izateko. Goian inertziazko sistema erreferentzialak definitu ditugu. Baina zer dira horik? Honela definituko ditugu:

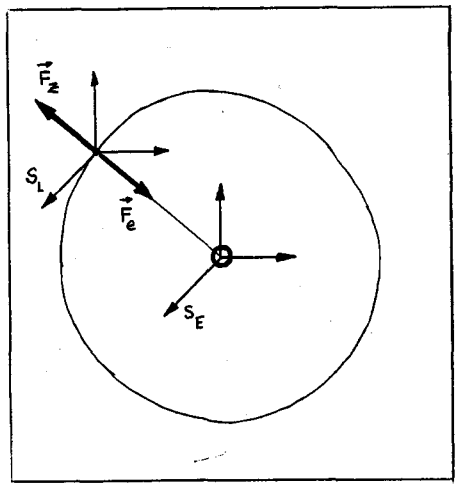
"Erreferentziazko sistema inertzialak, partikula askatu batekin loturik eta birarik gabe doazen sistemak dira"

Dena den, definizio hau ematean, gurpil ero bat sortu dugu zeren eta partikula askatua sistema inertzial baten laguntzaz definitu dugu, eta berau partikula askatu baten laguntzaz. Gurpil ero hau eteteko bide bakarra, partikula askatu bat aurkitzea edo sistema inertzial bat definitzea da. Horretarako hitzarmen bat egin beharko dugu. Horixe da, hain zuzen ere, hurrengo pauso gisa eginen duguna.

Gu Lurrean bizi gara, eta dakigunez, Lurra biraka ari da bere ardatzaren inguruan. Beraz, gurekin doan sistema ez da inertziala. Lehen sistema inertzial bat aurkitzeko izar fixo deitzen direnetara jo behar dugu. Izarrak elkarretik oso urrun daudela ba dakigu. Bestalde, Naturan ezagutzen ditugun hiru interakzio nagusiak -grabitatearena, elektromagnetikoa eta nuklearra- ttikiagotu egiten dira, guttienez distantziaren koadratuaren arauera. Horrela, ba, izarrak partikula askatuak bailiren kontsidera ditzakegu, eta horixe da prezeski, hitzarmenez egiten dena: hots, izar fixoekin doan sistema, inertziala dela onhartzen da. Aproximazio hau oso ona da, zeren eta beren galaxiaren zentruaren inguruan duten azelerazio zentripetua guztiz arbuiagarria da ($3\times10^{-8}\ cm\cdot s^{-2}$ ordenekoa, eguzkiaren kasuan).

Eguzkia bera ere, izar bat den aldetik, azelerazio oso ttikiz higitzen da galaxiaren zentruarekiko. Horrela, partikula askatutzat jo dezakegu.

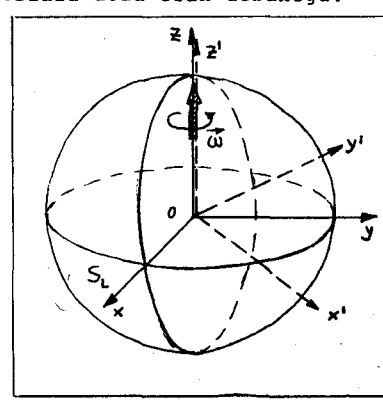
Modu honetan eginik, eguzkiarekin joanik eta izar fixoei paraleloki higituz doan sistema (S_E delakoa) inertziala dela onhartzen dugu.



Eta Lurrean ba ote dago inertziazko sistemarik? Izatez, ez dago, zeren eta Lurrak eguzkiaren inguruan duen higidura eliptikoa (ia-ia zirkularra) baita, eta beraz azelerazio bat du.

Hala ere, hurkilketa batez S_L sistema inertzialtzat har dezakegu. Eta zein da S_L sistema? S_L sistema Lurrarekin batera higitzen da, baina beraren ardatzak S_E sistemaren ardatzen paraleloak dira etengabeki. Honela izan arren, S_L sistema ez da inertziala, zeren eta beraren origenak elipse bat deskribatzen baitu. Exzentrizitate ttikiko elipse hori zirkunferentzia dela kontsideratuz (hau hurbilketa nahiko egokia da), eta sistema ezinertziala izanagatik agertzen den indar zentrifugoa ($\vec{F}_z$) eta eguzkiaren erakarpenez sortutako indarra ($\vec{F}_e$) berdinak direla kontutan harturik, indar bi horik existituko ez bailiren lan eginez gero, S_L sistema inertziala dela esan dezakegu.

Honelatan, bi sistema kontsidera ditzakegu Lurrean. Bata, S_L , "geldi" dagoena eta inertziala dena, eta bestea, S ($0x'y'z'$) lehenarekiko biraka ari dena eta beraz ezinertziala. Biraren abiadura angularra ($\vec{\omega}$), egunean 2π radianetakoa (bira bat) da.



Edozein modutan, ikusi dugunez, sistema inertziala aukeratzean hurbilketa bat egin dugu, sistemaren azelerazioa arbuiatuz. Hurbilketa hori baliagarri izanen da, prezisio horrekin lan egitea nahiko den kasuetan. Bestela azterketa zehatzago baten premia ukanen dugu.

Horixe da, azken batez, Fisika osoan egiten dena. Adierazpen eta formula matematikoak errealitatearen aproximazio edo hurbilketa bat dira. Fenomenoak hurbilketa horrekin ongi ulertzen eta adierazten badira, aurrera. Prezisio gehiago behar izanez gero, teoria landuago bat eraiki behar.

Honela, makinen higidura aztertzean, nahikoa da Lurrarekin doan sistema $(0x'y'z')$ inertzialtzat hartzea; eta berdin gertatzen da alkantze ttikiko projektilen kasuan. Hala ere haizeen higidura (zikloiak, antizikloiak, haize-korronteak eta beste aztertzeko), kontutan eduki behar da Lurraren bira-higidura, eta horrela ez du balio $0x'y'z'$ sistema inertzialtzat hartzeak, $0xyz$ sistema kontsideratzeak baizik.

. Galileoren transformakuntza eta inertziaren printzipioa

Aurreko gaian ikusi genuen bezala, Galileoren transformakuntza, transaldatze uniformezko higidura erlatiboari dagokiona da. Kasu honetan zera geratzen zitzaigun:

$$\vec{a} = \vec{a}'$$

Hau da, bi behatzaileek azelerazio berbera neurtzen dute. Eman dezagun, adibidez, bi behatzaileetako bat sistema inertzial batetan doala (β behatzailea, kasu). Horrela bada, β behatzaileak $\vec{a}=0$ azelerazioaz ikusiko du higitzen partikula askatu bat. Baina lehengo erlazioa erabiliz, $\vec{a}'=0$ izanen da. Beraz, β' behatzaileak ere uniformeki ikusiko du higitzen partikula askatua, eta beraz, β' behatzailea ere inertziazkoa da eta bera doaneko sistema, inertziala izanen da.

Beste hitz batzu esanez, sistema bat inertziala bada, berarekiko uniformeki transaldatzen diren beste sistema guztiak ere inertzialak dira.

5.2 MOMENTU LINEALA

Dinamikaren munduan abiatzeko, magnitude berri bat behar dugu: momentu lineala. Definizioz, momentu lineala masa eta abiadura biderkatuz lortzen den magnitudea da:

$$\vec{p} = m\vec{v}$$

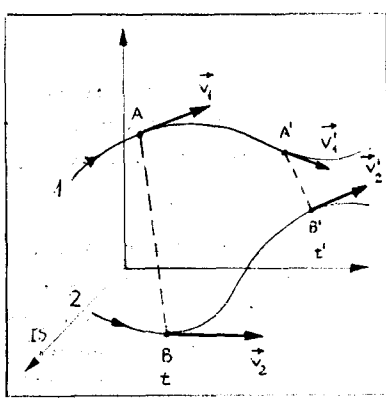
Momentu lineala $\vec{p}$ letraz adierazten da eta abiaduraren direkzio berbera duen bektore bat da.

Mekanika klasikoan masa (m) ez dela abiadurarekin aldatzen kontsideratuko dugu, hau da, erreposoan zein higituz, partikulak beti masa berbera duela kontsideratuko dugu. Erlatibitatearen teoriaren arloan lan egitean -hots abiadura handien kasuan- ordea, hipotesi hori ez da erabilgarri izanen. Dena den, gu Mekanika ez-erlatibistaren arloan ari garenez, m konstantetzat joko dugu.

Momentu linealaren definizioan finkatuz, honela defini dezakegu inertziaren printzipioa:

"Partikula askatuak momentu lineal konstantez higitzen dira sistema inertzialetan"

5.3 MOMENTU LINEALAREN KONTSERBAPENAREN PRINTZIPIOA



Kontsidera dezagun bi partikulaz osoturiko sistema isolatu bat. Beraien artean elkarrakzioa dago. Beraz, ez dira partikula askatuak. Honela, kanpoko inertzi sistema batetiko (IS -kiko), partikulen higidura ez da uniformea izanen, eta generalean, ez da zuzena izanen.

t denbora unean, 1 partikula A puntuan dago eta $\vec{v}_1$ abiadura du; eta 2 partikula B puntuan, $\vec{v}_2$ abiaduraz higitzen da.

t' denbora unean, 1 partikula A' puntuan dago eta $\vec{v}_1'$ abiaduraz higitzen ari da; eta 2 partikula B puntuan eta $\vec{v}_2'$ abiaduraz.

Definizioz, bi partikulok osoturiko sistemaren momentu lineala, partikula bien momentu linealen batuketa da. Beraz, bi denbora unetan hauxe izanen da:

$$t: \quad \vec{P} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2$$

$$t': \quad \vec{P}' = \vec{p}_1' + \vec{p}_2 = m_1\vec{v}_1' + m_2\vec{v}_2'$$

Ikusten denez, adibide honetan m_1 eta m_2 masak konstante bezala jotzen ditugu.

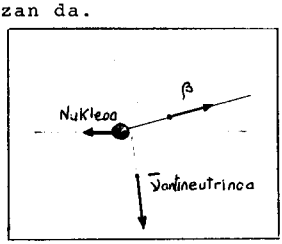
Esperimentalki egin diren aproba guztietan ikusi denez, printzipio hau betetzen da:

"Partikula biek elkarren eragina baino pairatzen ez badute, hots, biek osoturiko sistema isolaturik badago, sistemaren momentu linealak konstante irauten du"

Printzipio hau momentu linealaren kontserbapenaren printzipioa deitzen da. Gainera, printzipio hau ez da soilik bi partikularen kasurako betetzen, edozein partikula multzoz osoturiko sistema isolaturen kasuan ere betetzen baita.

$$\vec{P} = \sum_i \vec{p}_i = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \cdots + \vec{p}_i + \cdots = K^{te}$$

Esan bezala, orain arte ezagutzen diren fenomeno guztietan betetzen da printzipio hau. Inoiz betetzen ez dela pentsatu izan da, baina fenomenoa ongi ezagutzen izen ez delako zela ikusi izan da.



Demagun adibidez β izpien kasua. Nukleo batzuren desintegrapenean agertzen diren β izpiak elektroiak dira izatez. Dena den, Wilson-en kamaren bidez, nukleo erresiduala eta β izpia direkzio desberdine-

tan higitzen zirela ikusten zen. Nola zitekeen hori? Sistema isolatu bat osotzen zutenez, momentu lineala kontserbatzeko, abiadura biak direkzio berberekoak eta aurkako sentidokoak izan behar zuten. Ez ote zen, ba, momentu lineala betetzen? Arrazoia zera zen, halegia, ordurarte ezagutzen ez zen partikula berri bat ere sortzen zela: antineutrinoa. Erreakzio hau xe zen

$$n \longrightarrow p^{+} + e^{-} + \bar{\nu}$$

($\bar{\nu}$, antineutrinoa)

Antineutrinoaren momentu lineala kontutan hartuz, esandako printzipioa ongi betetzen zela ikusi zen.

Aurrera eginez, azter dezagun gehitxoago partikula biren kasua:

$$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = K^{te}$$

Hots: $$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{p}_1' + \vec{p}_2'$$

Eta hemendik: $$\vec{p}_1' - \vec{p}_1 = -\left(\vec{p}_2' - \vec{p}_2\right)$$

$$\Delta\vec{p}_1 = -\Delta\vec{p}_2$$

Ikusten denez, partikula bakoitzaren momentuaren aldakuntza bat agertzen da. Zergatik?. Partikulen artean elkarrakzioa da goelako, noski:

Azken adierazpen honek, masaren birdefinizio operazionala ematen balioko digu.

$$\Delta\vec{p} = \Delta\left(m\vec{v}\right) = m\,\Delta\vec{v}$$

partikula bakoitzaren masa konstantetzat hartuz. Eta lehenago ikusi dugunaren arauera

$$\Delta\vec{p}_1 = -\Delta\vec{p}_2$$

$$m_1\,\Delta\vec{v}_1 = -m_2\,\Delta\vec{v}_2$$

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{|\Delta\vec{v}_2|}{|\Delta\vec{v}_1|}$$

Formula honen arauera, m_1 masa-unitatea baldin bada (edo masa ezagun bat), erraz lortuko dugu m_2 masa, modu operazional batez.

5.4 INDAR KONTZEPTUAREN DEFINIZIOA: NEWTONEN BIGARREN ETA HIRUGARREN LEGEAK

Espazioan partikula asko eta interrelazionatuak egon arren, partikula bakar bat aztertu nahi izaten da. Orduan ez dira kontsideratu behar espazioko beste partikulak. Baina, edozein modutan, hauek eragin bat dute partikula hartan. Eragin hori matematikoki materializatzeko, INDAR izeneko magnitudea definitzen da.

Indar kontzeptua, momentu linealaren kontserbapenaren printzipiotik aterako dugu.

Har dezagun, ba, lehen pauso batetan lehengo bi partikulen kasua. Ikusi dugunez:

$$\Delta \vec{p}_1 = -\Delta \vec{p}_2$$

Aldakuntza hau Δt denbora tartean gertatzen bada:

$$\frac{\Delta \vec{p}_1}{\Delta t} = -\frac{\Delta \vec{p}_2}{\Delta t}$$

Eta limitean $\Delta t \to 0$ eginez

$$\frac{d\vec{p}_1}{dt} = -\frac{d\vec{p}_2}{dt}$$

Definizioz, denbora unitateko partikula batek duen momentu linealaren aldakuntza, edo hobeki esateko, partikularen momentu linealaren denborarekiko deribatua, INDARRA deitzen da. $\vec{F}$ sinboloaz adierazi ohi da.

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

Lehen pauso batetan behintzak, deribatua sistema inertzial batetatik egiten dena da.

Izatez, definizio hori Newton-en bigarren legea deitzen da. Baina segitu dugun prozesua kontutan hartuz, legea baino areago definizio bat dela aitortu behar dugu, hain zuzen ere, indarraren definizio matematikoa.

Bestalde, masa konstante gisa harturik

$$\vec{F} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} = m\frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{a}$$

Ekuazio hau Dinamikaren oinharrian dago. Ekuazio bektoriala da eta, beraz, bektorialki aplikatu behar da. Ikusten denez, bi modutara irakur daiteke:

- Partikula baten gainean indar bat eragitean, partikula horrek azelerazio bat pairatzen du
- Edo alderantziz esanik, partikula bat sistema inertzial batetatik azelerazioz higitzen ikusten bada, partikula horren gainean indar batek eragiten duelako da.

Noski, $\vec{F}$ konstantea bada, $\vec{a}$ ere konstantea izanen da. Eta $\vec{F}=0$ bada, $\vec{a}=0$ izanen da, edo bestela esanik $\vec{p}=K^{te}$ izanen da. Hots, Newtonen lehen legea agertzen zaigu.

Ikusten denez, ba, indarra elkarrakzioari ematen zaion izen tekinikoa da. Indarrik ez badago, partikula askatua dugu, elkarrakziorik gabea.

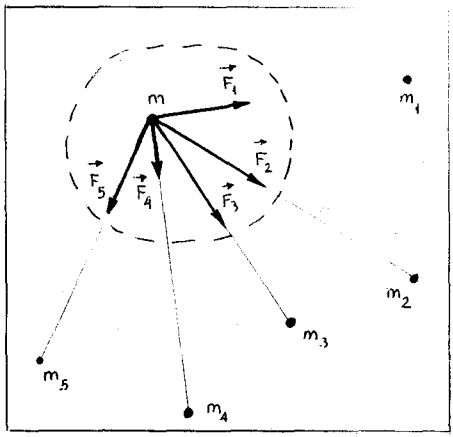
Emandako definizioaren arauera, 1 eta 2 partikulak batera kontsideratzen baditugu:

$$\vec{F}_1 = -\vec{F}_2$$

Hauxe da, prezeski, Newtonen hirugarren legea:

"Bi partikula elkarrekin interakzionatzean, lehenak bigarrenaren gainean sortzen duen indarra, bigarrenak lehenean egiten duen indarraren berdina da, baina aurkako sentidoa du"

Sarri, lege hau akzio-erreakzio legea deitzen da



Masa batek beste masa askoren eragina jasaten badu bakoitzaren eraginari (hau da, bakoitzak egiten dion indarrari) momentu linealaren aldaketa bat dagokio. Honelako aldaketa bakoitza $\vec{F}_i$ sinboloaz adieraziko dugu.

Denetara, ondoko momentu-aldaketa jasaten du m masak, gainezarmenaren printzipioan oinharrituz:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \dots = \sum_i \vec{F}_i = \vec{F}$$

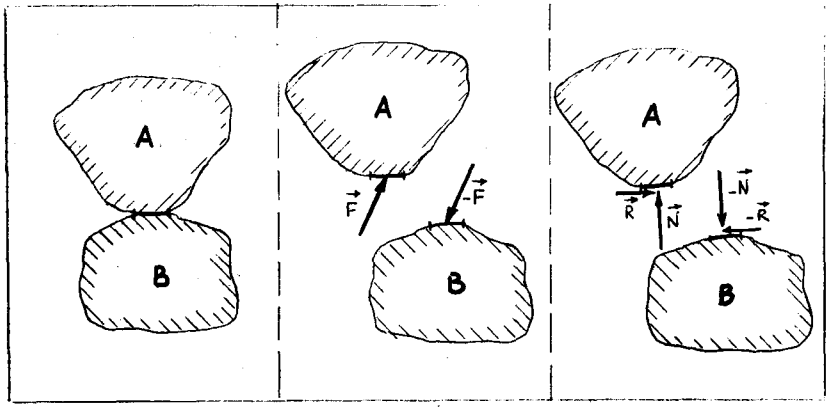
$\vec{F}$ delakoa indar erresultantea deitzen da, eta indar guztien batuketa bektorialaz lortzen da.

5.5 KONTAKTU-INDARRAK: INDAR NORMALA ETA IGURTZIMENDUZKO INDARRA

Partikulen dinamikan, indarrek partikulen posizio-bektore erlatiboen dependentzia dute. Indarra elkarrakzioa da, distantzia batetara agertzen den elkarrakzioa. Partikulek ez dute elkar "ukitu" behar, beren arteko indarra ager dadin. Honela, ba, atomoen artean indarrak sortzen dira "ukitzen" egon ez arren.

Gorputzen arteko "ukitzea" kontzeptu makroskopiko bat da. Atomo eta molekulen artean ez da beharrezkoa, eta horregatik, kasu honetan distantzia batetara eragiten duten indarrak kontsideratzen dira. Hala ere, gure gorputzaren mailara pasatzean, gure begiek gorputz askok elkar ukitzen dutela ikusten dute. Ukitzean, kontaktuan egotean, elkarren aurkako indar bat sor

tzen da, bi gorputzak kontaktuan daudeneko superfiziean.



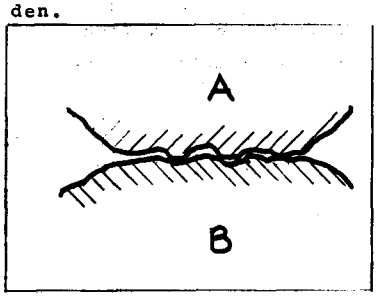
Akzio-erreakzio printzipioz, bi indar horik berdinak dira moduluz eta direkzioz, baina aurkako sentidoa dute. Honela B gorputzak A gorputzari $\vec{F}$ indarra egiten badio, A gorputzak $-\vec{F}$ indarra egiten dio B gorputzari denbora une berean. indarrak kontaktu-indarrak dira.

Bi konposaturen bidez adieraz daitezke:

$\vec{N}$: Konposatu normala. Superfizien perpendikularra da. Gorputz bakoitzak besteari bere barnean sartzen ez uzteko jartzen duen eragozpenaren neurria da

$\vec{R}$: Kontaktu-superfizien tangentearen direkzioa du. Adhesioaren eta superfizien laztasunaren kausaz sortzen da. Igurtzimenduzko indarra deitzen da (errozamenduzko indarra).

Ikus dezagun bi konposatu hauen artean dagoen erlazio zein den.



Errozamenduak bi gorputzen labantze erlatiboaren aurka jokatzen du. Lehen ikustaldi batetan superfizieak guztiz leunak direla pentsa dezakegu. Baina mikroskopoz begiratuz, gorabehera handiak dituztela ikusiko dugu.

Igurtzimendu-fenomenoa oso korapilatsua da eta estatistikoki aztertu behar da. Zenbait faktorek garrantzi handia dute:

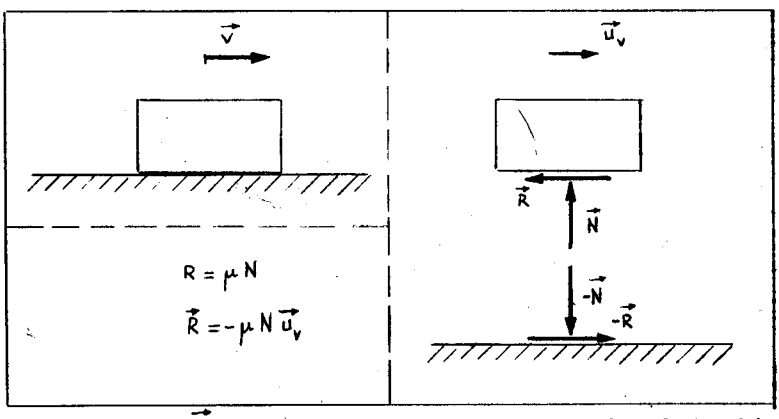
- materialeak zeintzu diren
- superfizieak nola landurik dauden (amaiera mikroskopikoa eduki behar da kontutan)

Edozein modutan, bi superfizie ezagun eta konstante emanez, esperimentalki ikusi eta frogatu denez, R eta N indarren artean proportzionalitate konstantea ageri da. Hain zuzen ere

$$R = \mu N$$

μ delako konstantea <u>igurtzimenduzko koefizientea</u> deitzen da.

Bestalde $\vec{R}$ bektorearen sentidoa beti da gorputza higitzen denekoaren edo higitzeko joera duenekoaren aurkakoa. Adibidez:



Goiko irudian $\vec{v}$ bektoreak gorputzak zoluarekiko duen abiadura adierazten du, eta $\vec{u}_v$ delakoak, direkzio horretako bektore unitaria.

Bi igurtzimendu-koefiziente moeta desberdin kontsideratu behar ditugu:

igurtzimendu estatikoa (μ_s) Bi gorputzak elkarrekiko geldirik daudenean agertzen dena. Izatez, μ_s koefizientea gorputzak justuki higitzen hasten direnean definitzen da. Limitera heldu aurreko igurtzimendua ttikiagoa da eta, horregatik, honela adierazten da.

$$R \leq \mu_s N$$

Kasu honetan R indarra higitzen hastean hartuko lukeen sentidoaren aurkakoa da.

. igurtzimendu kinetikoa (μ_k) Gorputzak elkarrekiko higitzen ari direnean. Lehenago esan dugun bezala

$$\vec{R} = -\mu_K N \vec{u}_v$$

Orain arte beti agertu izan denez

$$\mu_K \leq \mu_s$$

Horrek esan nahi du ezen gehiago kostatzen dela gorputzak higi erazten hastea, higituz daudela higi erazten irautea baino.

Adibidea. Igurtzimendu kontzeptuak problemetan nola erabiltzen diren ikusteko, problema bat eginen dugu.

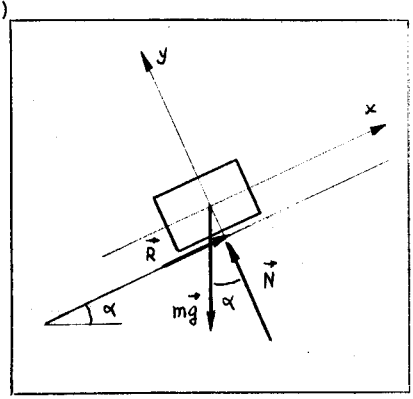
≪Demagun laun aldapatsu batetan dagoen 1kg-tako gorputz prismatiko bat (kaxa bat adibidez). Kaxa eta zoluaren arteko igurtzimendu-koefizienteak ondokoak dira: $\mu_s = \mu_K = 0{,}3$

a) Zein da laun horrek horizontalarekin forma dezakeen angulurik handiena, masa berez jaisten has ez dadin?

b) Kaxa gainean eta launaren direkzioan F=1Nw-eko indar bat eginez, zein izanen da angulurik handiena?

c) Launa 45°-z altxatuz eta F= 1 Nw indarra eginez, zein azelerazioz jaitsiko da? ≫

a)



Geldi egon behar duenez

$$R \leq \mu N$$

Eta angulurik handienean

$$R = \mu N$$

Bestalde, azelerazioa nulua da. Indarren konposatuak adieraziko x eta y direkzioak hartuz.

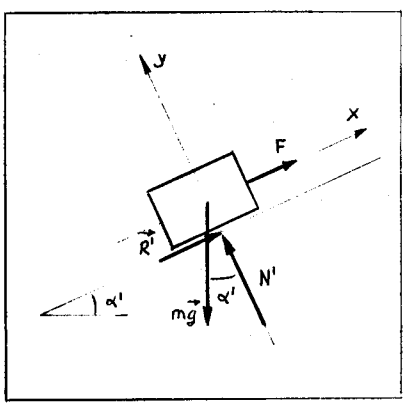
x direkzioan: $-mg \sin\alpha + \mu N = 0$

y direkzioan: $N - mg\cos\alpha = 0$

Hemendik: $-mg\sin\alpha + \mu mg\cos\alpha = 0$

$$tg\,\alpha = \mu \longrightarrow \alpha = arctg\,\mu$$

b)



Kasu honetan

$$R' = \mu N'$$

$$\begin{cases} x: & \mu N' + F - mg\sin\alpha' = 0 \\ y: & N' - mg\cos\alpha' = 0 \end{cases}$$

c) Irudi berberak balio digu, $\alpha'' = 45°$ eginez.
Oraingoan, ordea, a azelerazioa dugu x direkzioan

$$\begin{cases} x: & R'' + F - mg\sin\alpha'' = ma \\ y: & -mg\cos\alpha'' + N'' = 0 \end{cases}$$

$$N'' = 1 \cdot 9{,}8 \cos 45 = 9{,}8\,\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$R'' = \mu N'' = 0{,}3 \cdot 9{,}8 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Beraz $$ma = 1 \cdot a = -9{,}8\frac{\sqrt{2}}{2} + 1 + 0{,}3 \cdot 9{,}8 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$a = -3{,}86 \ m/s^2$$

Azelerazioaren signu negatiboak benerantz (x negatiborantz ha legia) doala esan nahi du.

5.6 IGURTZIMENDUZKO INDARRAK FLUIDOETAN

Esperientziak frogatzen duenez, gorputz solido bat fluido baten barnean abiadura ttikiz (erlatiboki) higitzen denean, bertan higiduraren kontra sortzen den igurtzimenduzko indarra abiaduraren proportzionala da, direkzio berekoa eta aurkako sentidokoa. Honela adieraz dezakegu igurtzimenduzko indarra:

$$\vec{R} = -k\eta\vec{v}$$

Hemen ageri diren k eta η koefizienteek ondoko esangura dute:

- k delakoak gorputzaren eitearen dependentzia du, eta bai for marekiko higitzen deneko direkzioarena.
  Esferaren kasuan

  $$k = 6\pi R$$

  Azken hau Stokes-en legea izenaz ezagutzen da. k delakoa igurtzimendu-koefizientea deitzen da eta ondoko dimentsio-ekuazioa du:

  $$[k] = [6\pi R] = [R] = L$$

  Hots luzeraren dimentsioak ditu.

- η delakoak barne-igurtzimendua adierazten du eta biskositate-koefizientea deitzen da. Beronen dimentsioak ondokoak dira:

  $$[\eta] = \left[\frac{F}{kv}\right] = \frac{M L T^{-2}}{L L T^{-1}} = M L^{-1} T^{-1}$$

Beraz unitateak ondokoak dira:

- MKSA sisteman, $kg \cdot m^{-1} \cdot s^{-1}$ edo $N \cdot s \cdot m^{-2}$
- cgs sisteman, $g \cdot cm^{-1} \cdot s^{-1}$ = Poise

Erraz ikusten denez:

$$1\ kg \cdot m^{-1} \cdot s^{-1} = 10\ g \cdot cm^{-1} \cdot s^{-1} = 10\ \text{Poise}$$

Biskositate-koefizienteak fluidoaren tenperaturaren dependentzia du

$$\eta = \eta(T)$$

Likidoen kasuan, tenperatura altxatzean biskositatea baxatu egiten da

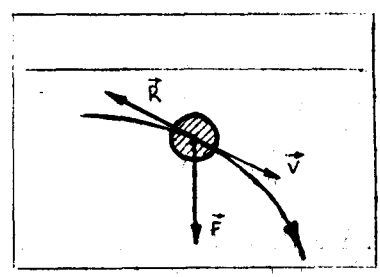
$$T \uparrow \Longrightarrow \eta \downarrow$$

Gasen kasuan ordea, tenperatura altxatzean biskositatea altxatu egiten da

$$T \uparrow \Longrightarrow \eta \uparrow$$

Fluidoen barneko igurtzimendua nolakoa den ikusi ondoren, interesgarri gerta daiteke higidur ekuazioa nolakoa den aztertzea.

Demagun gorputza $\vec{F}$ indarraren eraginpean higitzen ari dela. $\vec{v}$ abiaduraren kausaz, igurtzimendua sortzen da. Denetara geratzen den azelerazioa hauxe da:



$$m\vec{a} = \vec{F} - k\eta\vec{v}$$

Azter dezagun, ekuazio honek denborarekien duen eboluzioa.

Demagun $\vec{F}$ konstantea dela (hauxe da, adibidez, atmosferan higitzen ari diren gorputzen kasua. Orduan $\vec{F} = m\vec{g}$ da, (Arkhimedesen indarra kontutan hartu gabe). Demagun, halaber, lehen unean $\vec{v} = 0$ dela.

i)- Hasieran $k\eta\vec{v} = 0$, $m\vec{a} = \vec{F}$

Beraz, $\vec{v}$ handituz doa $\vec{F}$-ren direkzioan

ii)- $\vec{v}$ handituz doanez, $k\eta\vec{v}$ ere handituz doa, eta $\vec{F}$-ren direkzioa duenez,

$\vec{F} - k\eta\vec{v}$ ttikituz doa

eta $\vec{F} - k\eta\vec{v} = m\vec{a}$ denez, azelerazioa ere ttikiagotuz doa, baina beti direkzio eta sentido berberaz, eta $\vec{v}$ handituz doa

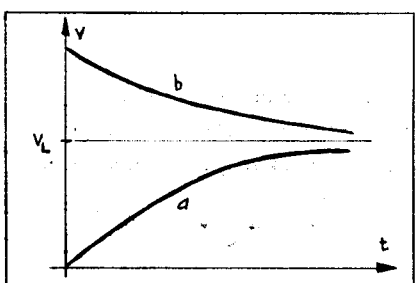
iii)- Azkenean $\vec{F} - k\eta\vec{v} = 0$ egiten da

Orduan $\vec{a} = 0$

Eta $\vec{v} = K^{te}$

Eta gero ere horrela irauten du. Beraz, abiadura limite bat dago $\vec{F} - k\eta\vec{v}_L = 0$ egiten duena hain zuzen ere

$$\vec{v}_L = \frac{\vec{F}}{k\eta}$$



Abiaduraren eboluzioa fluidoan

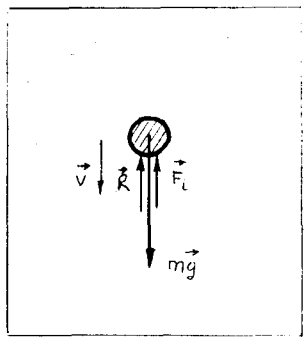
a) $v_o < v_L$ denean

b) $v_o > v_L$ denean

Lehen uneako abiadurá, abiadura limitea baino handiagoa bada, abiadura motelduz doa abiadura limitera heldu arte.

Kasu bietan abiadurak denborarekin duen aldakuntza alboko irudian adierazten da.

Gorputza grabitatearen eraginpean jausten ari denean, Arkhimides-en goranzko indarra ere eduki behar da kontutan. Berori ia arbuiagarria da airearen kasuan baina oso handia gerta daiteke likidoen kasuan.



Irudian bertikalki erortzen ari den gorputz baten kasua adierazten da.

$\vec{F}_i$ = flotatze indarra (Arkhimides)

$$\vec{F}_i = -m_f \vec{g}$$

m_f : fluidoaren masa desplazatua

Honela, higidur ekuazioa hauxe da:

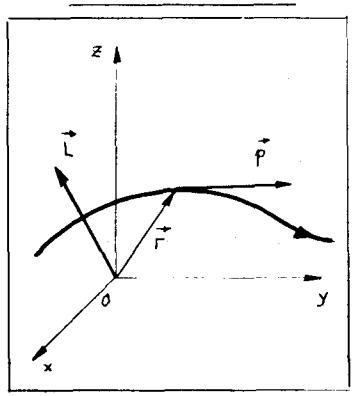
$$m\vec{g} - m_f\vec{g} - K\eta\vec{v} = m\vec{a}$$

Eta abiadura limitea:

$$v_L = \frac{(m - m_f)\,g}{K\eta}$$

Honetaz oso interesgarria gerta daiteke parakaidisten kasua.

5.7 MOMENTU ANGULARRA



Magnitude berri hau oso lagungarri gertatuko zaigu zenbait higiduraren dinamikaren azterketan. Ondoko eran definitzen da:

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$$

- $\vec{L}$: puntu batetiko momentu angularra da (0 puntuarekiko)
- $\vec{r}$: posizio-bektorea
- $\vec{p}$: momentu lineala

Hau da, ardatz sistemaren originekiko momentu angularra, partikularen posizio-bektorea eta momentu lineala bektorialki bi derkatzean lortzen den magnitudea da.

Konposatuen funtzioan honela idatz daiteke:

$$\vec{L} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ p_x & p_y & p_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ mv_x & mv_y & mv_z \end{vmatrix}$$

Azter dezagun magnitude honen balioa zenbait kasu berezitan.

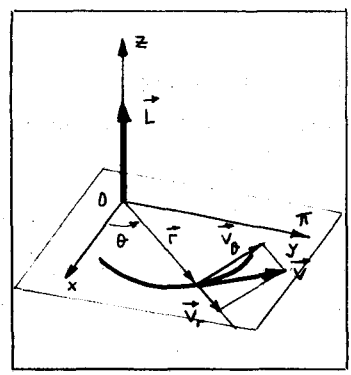
- Higidura launa (π launa)

  Lehenik eta behin ardatz sistema egokia aukeratuko dugu

  Oxy launa ⟶ π launa

  Oz ardatza ⟶ π-rekiko perpendikularra

  Honela eginik $\vec{r}$ bektorea π launean egonen da, eta bai halaber $\vec{v}$ bektorea ere.



Eta momentu angularra bai $\vec{r}$ -ren eta bai $\vec{p}$ -ren perpendikularra denez, $\vec{L}$, π launaren perpendikularra izanen da. Hots, $\vec{L} \perp \pi$ eta gainera $\vec{L}$-k soilik izanen du konposatu bat, Oz direkzioan halegia.

Bestalde $\vec{v}$ abiadurak bi konposatu ditu

$$\begin{cases} \vec{v}_r : \text{konposatu erradiala} \\ \vec{v}_\theta : \text{konposatu transbertsala} \end{cases} \quad \text{(ikus 3. gaia)}$$

Beraz:

$$\vec{L} = \vec{r} \times m\left(\vec{v}_r + \vec{v}_\theta\right) = m\vec{r} \times \vec{v}_r + m\vec{r} \times \vec{v}_\theta$$

Baina $\vec{r} \times m\vec{v}_r = 0$ $\vec{r}$ *eta* $\vec{v}_r$ paralelo baitira.

Honela, ba: $\vec{L} = m\vec{r} \times \vec{v}_\theta$

Eta $\vec{v}_\theta$ *eta* $\vec{r}$ perpendikularrak direnez:

$$L = m r v_\theta \longrightarrow \vec{L} = m r v_\theta \vec{k}$$

Eta 3. gaian ikusi genuenez,

$$v_\theta = r \frac{d\theta}{dt}$$

Azkenean zera geratzen zaigu

$$L = m r^2 \frac{d\theta}{dt}$$

- <u>Higidura zirkularra</u>

Dakigunez, higidura honetan

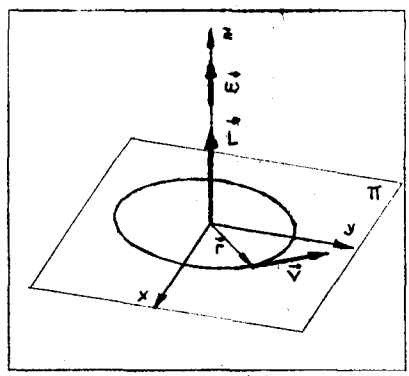
$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

$$\vec{L} = m\vec{r} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$$

$\vec{r}$ *eta* $\vec{\omega}$ perpendikularrak izanik

$$L = m\omega r^2$$

Direkzioz, $\vec{L}$ *eta* $\vec{\omega}$ paraleloak dira



Beraz: $\vec{L} = m r^2 \vec{\omega}$

Ikusitako kasu bereziak alde batetara utzirik, momentu angularrak beste magnitude batzurekin duen erlazioa aztertzera saiatuko gara, konkretuki, indarraren momentuarekin duena.

Dakigunez (ikus 2. gaia), honela definitzen da indar baten momentua puntu batekiko $\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$

Kasu honetan sistemen origenarekiko momentua kontsideratu dugu.

Zer erlazio dago $\vec{\tau}$ eta $\vec{L}$ magnitudeen artean?
Hau ikusteko, kalkula dezagun $\frac{d\vec{L}}{dt}$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\vec{r} \times \vec{p}\right) = \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p} + \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt}$$

$\frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p} = 0$ da zeren eta bi bektoreok paraleloak baitira

Bestalde inertzi sistematan, $\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$

Oharra: Sistema ez-inertzialen kasuan kontutan eduki beharko da puntu hau, interpretazio okerrik ez egiteko

Beraz, hauxe geratzen zaigu

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{\tau}$$

Erlazio hau momentu angularraren teorema da.
Bi eratara irakur daiteke:

i) "Partikula baten momentu angularraren denborarekiko deribatua, beraren gain eragiten ari den indarraren momentuaren berdina da"

Edo bestela esateko:

ii) "Partikula baten gainean egiten den indarraren momentuak, partikula horren momentu angularraren aldakuntza sortzen du"

Indarraren momentua zero(nulu) denean, $\vec{\tau}=0$, goiko adierazpena sinplifikatu egiten da:

$$\vec{\tau}=0 \longrightarrow \frac{d\vec{L}}{dt}=0$$

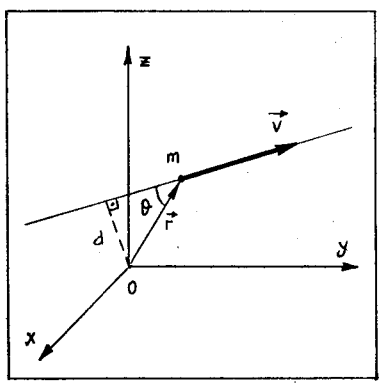
$$\vec{L}=K^{te} \quad \text{(bektorialki)}$$

Hauxe da, hain zuzen ere, momentu angularraren kontserbapenaren printzipioa:

i) "Partikula baten gainean eragiten ari den indarraren momentua nulu bada (indarra nulu bada, ere bai), partikula horren momentu angularrak konstante irauten du"

Edo beste esateko:

ii) "Partikula baten momentu angularrak konstante irauten badu, beraren gainean indarren momenturik ez du eragiten"



Beste kasu partikular bat aipatzearren, $\vec{F}=0$ kontsideratuko dugu.

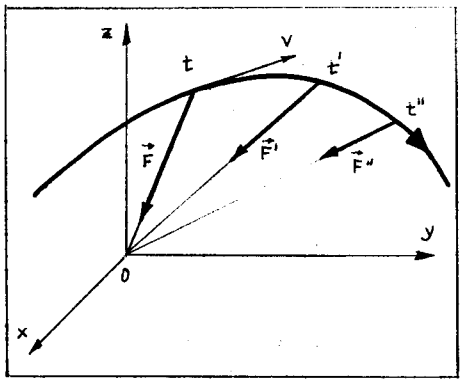
Batetik, higidura hori zuzena da

$$L = mvr\sin\theta = mvd = K^{te}$$

$\begin{cases} d : \text{distantzia} \\ v : \text{konstantea} \end{cases}$

5.8 INDAR ZENTRALAK

Puntu honetan, Naturan sarri ageri den kasu bat aztertuko dugu: indar zentralena. Ikusiko dugunez, indar zentralen eraginpean gertatzen den higidurak berezitasun interesgarriak ditu.



Lehenik eta behin definitu eginen ditugu indar zentralak. Indar hauen direkzioa beti dago puntu konkretu bati zuzendurik. Puntu hori indarren zentrua deitzen da, eta gehienetan bertan kokatzen da ardatzen origena.

Esan bezala, ardatz sistemaren origena indar zentruen harturik, indarraren momentua nulua da edozein denbora unean:

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} = 0 \quad \text{zeren} \quad \vec{r} \text{ eta } \vec{F}$$

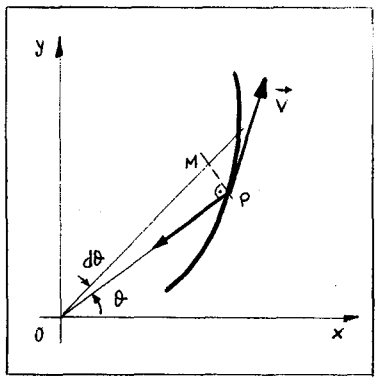
bektoreak elkarren paraleloak baitira.

Honela izateak, inplikazio fisiko interesgarriak ditu. Momentu angularraren kontserbapenaren printzipioaren arauera.

$$\vec{L} = K^{te}$$

Eta $\vec{L} = \vec{r} \times m\vec{v}$ delarik, $\vec{r}$ eta $\vec{L}$ elkarren perpendikularrak dira. Bestalde $\vec{L}$ delakoak direkzio konstantea duenez, $\vec{r} \perp \vec{L}$ izateak esan nahi du, $\vec{r}$ laun batetan dagoela, $\vec{L}$ -ren perpendikularra den launean hain zuzen ere.

Laun horrek 0 puntua dauka. Horrela, indar zentralen eraginpeko higidura, launa da. Eta azterketa sinplifikatzeko $0x$ eta $0y$ ardatzak laun horretan kontsideratuko ditugu.



Dakigunez,

$$L = m r^2 \frac{d\theta}{dt}$$

Eta gainera $L = k^{te}$

Beraz,

$$r^2 \frac{d\theta}{dt} = K$$

Ikus dezagun konstante honen esangura zein den.

Irudiko $\widehat{OPM}$ trianguluak ondoko area du

$$dA = \frac{1}{2} \overline{OP} \cdot \overline{PM} = \frac{1}{2} r \cdot r\, d\theta$$

Hots, bigarren ordeneko infinitesimoak arbuiatuz, irudian marraturik ageri den areak balio hau du

$$dA = \frac{1}{2} r^2 d\theta$$

Eta dt elementuaz zatituz

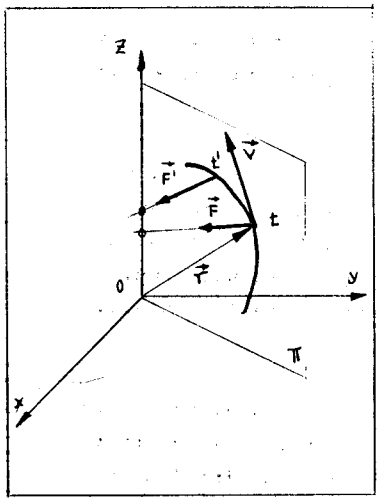
$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \frac{d\theta}{dt} = K^{te}$$

Baina, ser da $\frac{dA}{dt}$ deribatua? $\frac{dA}{dt}$ abiadura areolar izenaz ezagutzen da, eta posizio-bektoreak denbora unitatean zapaltzen duen area adierazten du. Ikusten denez, ba, indar zentralen kasuan abiadura areolarrak konstante irauten du denborarekin. Izatez, horixe da Keplerren bigarren legea.

Indar zentralen kasua eguzki eta planeten artekoa da, atomoko elektroiena eta, hitz batez, bi gorputzen arteko problema mekanikoa adierazten duena.

Indar zentralen kasuaren jarraipen modura, ardatz-indarraren kasua ere aztertuko dugu.

Ardatz-indarrak (indar axialak)



Kasu honetan indarraren direkzioa beti pasatzen da ardatz fixo batetik. Demagun, ardatz hori $0z$ ardatza dela.

Ikus dezagun, kasu honetan indarraren momentua nolakoa den:

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$$

Eta une bakoitzan partikula eta $0z$ ardatza dauzkan π laun bertikala kontsideratuz, bai $\vec{r}$ eta bai $\vec{F}$ laun horretan ikusten dugu. Horrela, $\vec{\tau}$ eta π launa perpendikularrak dira, eta noski $\vec{\tau}$ eta $0z$ ardatza ere perpendikularrak dîra.

Beraz, $\vec{\tau}$ momentuak $0z$ ardatzean duen konposatua nulua da.

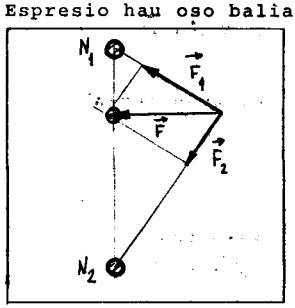
$$\tau_z = 0$$

Eta momentu angularraren printzipioaren arauera:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\tau} \qquad \text{(bektorialki)}$$

$$\left(\frac{d\vec{L}}{dt}\right)_z = \frac{dL_z}{dt} = \tau_z = 0$$

Espresio hau oso baliagarria gertatzen da.



Indar axialen kasua molekula biatomikoen elektroiekin gertatzen da. Irudian azaltzen da nolakoak diren indarrak

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$$

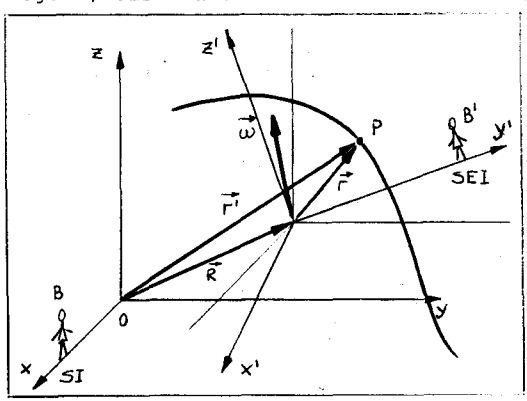
Ikusten denez, bi indar zentralen bilketaz sortzen da indar axiala.

5.9 SISTEMA EZ-INERTZIALAK. INERTZI INDARRAK

Kinematikaren arloan, eta konkretuki 4.gaian, edozein bi sistematatik eginiko behaketa kinematikoen arteko erlazioak lortzera saiatu izan ginen.

Goazen orain Dinamikaren arlora, eta demagun, sistema bietarik bat inertziala dela. Gauzak konkretatzeko, har dezagun aurreko gaiko 4.4 puntuan ageri den kasurik generalena. Azentuatu gabeko sistemá, inertziala dela kontsideratuko dugu. Bestea -azelerazio desberdina neurtzen baitu- ez da inertziala, noski.

Lehen sisteman -azentugabean- zuzenki aplikatu ahal ukanen dugu Newtonen bigarren legea, inertziala da eta. Hori egintzat joz, ikus dezagun orain, nola aplikatzen dituen Dinamikaren legeak, sistema ez-inertzialean doan behatzaileak.



4.4 puntuan aztertzen genuenez, ondoko erlazioa dago, behatzaile biek neurtzen dituzten azelerazioen artean:

$$\vec{a} = \vec{a}' + \vec{A} + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}' + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') + 2\vec{\omega} \times \vec{v}'$$

Ikus dezagun, ba,nola aplikatzen dituzten Dinamikaren legeak B eta B' behatzaileek:

B behatzaileak: $\vec{F} = m\vec{a}$

B' behatzaileak ikusten duena (kinematika) zera da:

$$\vec{a}' = \vec{a} - \vec{A} - \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}' - \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') - 2\vec{\omega} \times \vec{v}'$$

Eta $\mathcal{B}'$ behatzaileak, ikusten duen higidura hori Newtonen biga rren legearen bitartez azaldu nahi badu, ondoko indarren eragina "ikusten" du.

$$\vec{F}' = m\vec{a}' = m\vec{a} - m\vec{A} - m\dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}' - m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') - 2m\vec{\omega} \times \vec{v}'$$

Azter ditzagun banan-banan indarrok:

$m\vec{a}'$: Hauxe da, sistema ez-inertzialean dagoen behatzaileak ($\mathcal{B}'$-k) ikusten duen indar erresultantea $m\vec{a}' = \vec{F}'$

$m\vec{a}$: Behatzaile inertzialak ikusten duen indar bakarra da ($\vec{F} = m\vec{a}$). Beste edozein sistematatik —inertzial zein ez-inertzialetatik— ere ikusten da indar hau. Horregatik benetako indarra izenaz ezagutzen da.

: Beste indar guztiak $\mathcal{B}'$ behatzaileak baino ez ditu ikusten. Horregatik indar fiktizioak edo irudikoak direla esaten da. Sistemaren ez-inertzialtasun gabeziaz sortzen direnez gero, inertzi indarrak deitzen dira.

Inertzi indarren artean, bereziki aipatzea merezi duten bi indar daude: Coriolis-en indarra eta indar zentrifugua.

$-2m\vec{\omega} \times \vec{v}'$: Coriolisen indarra. Biraka ($\vec{\omega}$) ari diren sistema ez-inertzialetan, higitzen ari diren gorputzetan ($\vec{v}'$) ageri da.

$-2m\,\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}')$: Indar zentrifugua. Honela deitzen da zeren birá ardatzaren direkzio erradial, perpendikular eta kanpo alderanzkoa baita.

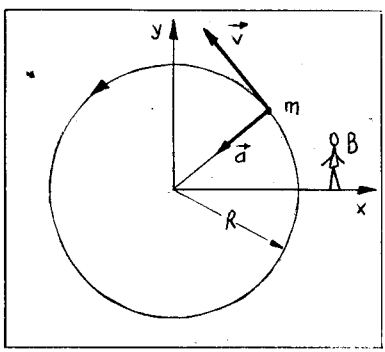
Puntu honetara helduz, argi utzi behar da zentrifugu eta zentripetu hitzen artean dagoen desberdintasun eta erlazioa. Era biltzen diren kontzeptuak, indar zentrifugua eta azelerazio zentripetua dira, eta orain ikusiko dugunez, txanponaren bi aurpegiak dira, nolabaiteko errealitatea ikuspuntu desberdinetik adierazia.

. Indar zentrifugua. Sistema ez-inertzialetan agertzen da. Inertzi indar bat da, hots, sistema ez-inertzialetan Newtonen bigarren legea zuzenki aplikatzean agertzen da.

. Azelerazio zentripetua. Sistema inertzialetan, higidura zirkularra aztertzean azelerazio bat dagoela ikusi genuen. Izatez, azelerazioa denez, kontzeptu kinematikoa da. Dena den, Dinamikaren arloan azelerazio hori sortzen duen indar bat kontsideratu behar da, eta nolabait egitearren, indar "zentripetua" deitu behar genuke. Indar hau "benetako" indar bat da, ordea, sistema guztietatik ikusten baita.

Adibide bat jarriko dugu:

Demagun higidura zirkular uniforme bat.

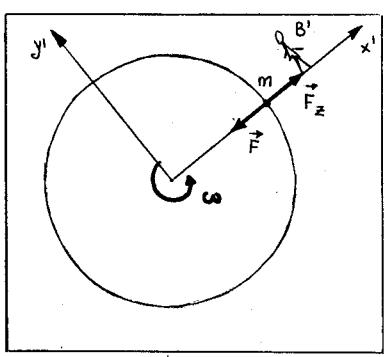


Azter dezagun, lehenik, sistema inertzial batetik. Partikula $\vec{v}$ abiaduraz higitzen ari da, ibilbide zirkularra osotuz. Hori posible izan dadin, partikulak azelerazio zentripetua du

$$\vec{a} = -\omega^2 R\, \vec{u}_r = -\frac{v^2}{R}\, \vec{u}_r$$

Eta hori sortzeko indar erradial zentripeto "erreal" bat dago

$$\vec{F} = -m\, \frac{v^2}{R}\, \vec{u}_r$$



Har dezagun orain partikularen posizio-bektoreari loturik doan sistema. Sistema hau partikularekin biraka ari da $\vec{\omega}$ abiaduraz. Sistema honetan partikula geldi dago $x'=R$, $y'=0$ puntuan. Partikula ekilibrioan dago

$$\vec{a}' = 0$$

Baina zeintzu indar daude?

$\vec{F}$: Benetako indarra $\qquad \vec{F} = -m\frac{v^2}{R}\vec{i'} \qquad (\vec{v_r} = \vec{i'})$

$\vec{F_z}$: Inertzi indarra; indar zentrifugua

$$\vec{F_z} = -m\ \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r'})$$

Eta $\vec{\omega} = \omega\vec{k}$ denez $\qquad (\omega = \frac{v}{R}$ izanik),

$$\vec{F_z} = m\,\omega^2 R\,\vec{i'} = m\frac{v^2}{R}\vec{i'}$$

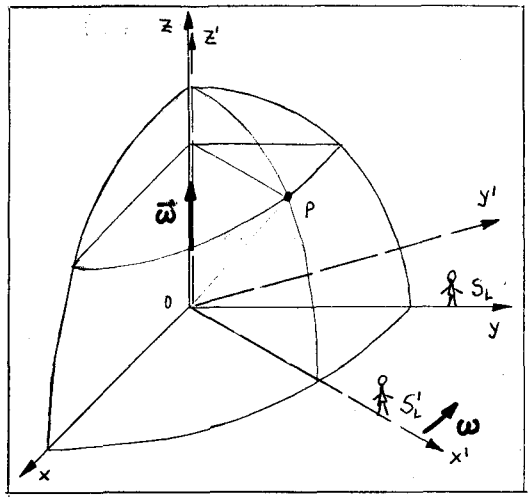
Azken batez $\mathcal{B}'$ behatzaileak ikusten duena zera da:

$$\vec{F} + \vec{F_z} = 0 = m\vec{a'}$$

5,10 LURRA ERREFERENTZIAZKO SISTEMA BEZALA

Gai honetako 5.1 puntuan ikusi dugunez, Lurrarekin biraka doan sistema - $S'_L(0x'y'z')$ delakoa- ez dela inertzialа ikusi dugu. Hala ere, $S_L(0xyz)$ sistema inertzialtzat har dezakegu la ikusi dugu.

S_L sistemaren origena Lurraren zentruan dago eta beraren ardatzak eguzkian fixo daudenen (S_E -ren) paraleloak dira.

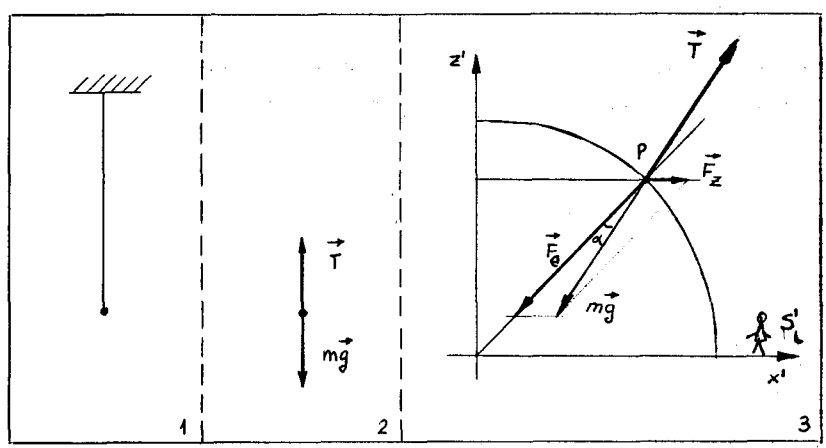


S'_L delakoak origen berbera du eta $0z'$ ardatza $0z$ ardatz berbera da.

Baina $\vec{\omega}$ abiadura angularra (bira oso bat eguneko) du S_L sistemarekiko.

Gu S'_L sisteman gaude; P puntuan hain zuzen ere. Beraz gure sistema ez da inertziala, eta beraz inertzi indarrak ere eduki beharko ditugu kontutan.

Hala ere, P puntuan gaudenez, ez dugu zuzenki S'_L sistema erabiltzen, gure latitude eta longitudeari dagokiona baizik. Normalki z ardatz gisa, tokiko bertikala hartzen dugu. Baina zein da bertikalaren direkzioa? $\vec{OP}$ delakoa ote? Ikusiko dugunez, ez.



Hizkuntza arruntean esaten denez, bertikala plomuak markatzen duen direkzioa da. Azter dezagun, ba, plomua S'_L sistematik (1, 2, 3 irudiak).

Bi indarrek eragiten dute: $\vec{T}$ eta $m\vec{g}$ direlakoek, sokaren tentsioak eta pisuak halegia. Baina zer da pisua?
Ipin dezagun, B' behatzaileak erabiltzen duen Dinamikaren ekuazioa:

$$m\vec{a}' = \vec{F} - m\vec{A} - m\dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}' - m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') - 2m\vec{\omega} \times \vec{v}'$$

Hemen

$$\begin{cases} \vec{A} = 0 \\ \dot{\vec{\omega}} = 0 & \text{bira uniformea baita} \\ \vec{v}' = 0 & \text{plomua geldi baitago } S'_L \text{ sisteman} \\ \vec{a}' = 0 & \text{" " " " "} \end{cases}$$

Beraz:

$$0 = \vec{F} - m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}')$$

. $\vec{F}$: benetako indarren erresultantea. Bi indarrez osoturik dago:

$\vec{F}_e$: Lurraren erakartze indarra, Grabitazio unibertsalaren kausaz sortua. Lurra esferikotzat hartuz, zentruranzko direkzioa du (ikus 3. irudia).

$\vec{T}$: Sokaren tentsioa. Bertikalaren direkzioa definitzen du.

. $-m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') = \vec{F}_z$: S'_L ez-inertziala delako ageri den indar zentrifugua.

Baina bestalde, 2. irudian ikusten denez:

$$\begin{cases} \vec{T} + m\vec{g} = 0 \\ \vec{F}_e - m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') + \vec{T} = 0 \end{cases}$$

Honek zera esan nahi du, halegia, <u>grabitatearen indarra</u> ($m\vec{g}$) Lurraren erakarpenaren ($\vec{F}_e$) eta indar zentrifuguaren ($-m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}')$) batuketaz sortzen dena dela.

3. irudian ikusten denez, bertikala desbidatu egiten da pixkatxo bat Lurraren erradioaren direkziotik, α angulua hain zu-

zen ere. Dena den, α angulua oso ttikia da zeren eta $\vec{F}_e$ -ren modulua 1000koa izanik, $-m\,\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}')$ delakoa $0\div5$ tartean dago Lurraren azalean. Horrela, lehen hurbilketa batetan, tokiko bertikalak Lurraren erradioaren direkzioa duela esan ohi da.

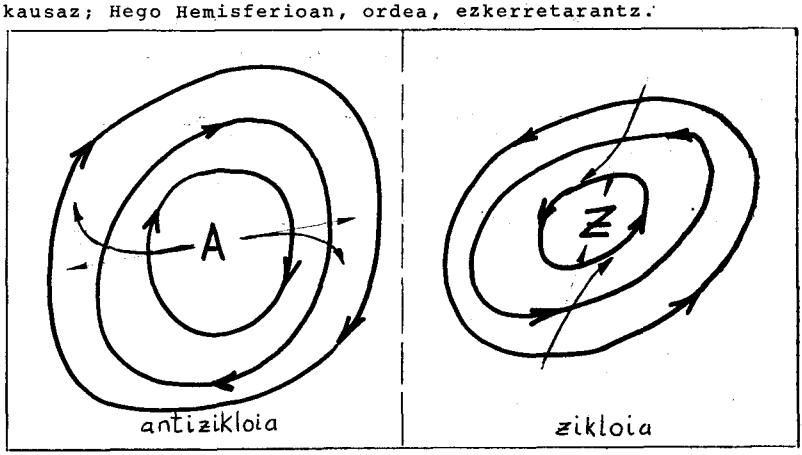
. Lurra eta Coriolis-en indarra

Aurreko kasuan (plomuarenean), gorputza geldi zegoela ($\vec{v}'=0$) kontsideratu dugu. Baina higitzen ari bada, Coriolis-en indarra kontsideratu behar da.

$$\vec{F}_c = -2\,m\,\vec{\omega}\times\vec{v}'$$

Ikusten denez $\vec{F}_c$ eta $\vec{v}'$ perpendikularrak dira. Horrela Coriolisen indarrak desbidatu egiten ditu gorputzak beren direkzio zuzenetik.

Higidura horizontalari dagokionez, Ipar Hemisferioan higidura guztiak eskuinetarantz desbidatzen dira Coriolisen indarraren kausaz; Hego Hemisferioan, ordea, ezkerretarantz.



Arrazoi honengatik Ipar Hemisferioan antizikloien inguruko haizeak torlojuaren sentidoan higitzen dira. Zikloien inguruko, alderantziz, noski.

6. GAIA - LANA ETA ENERGIA

6.1 INDAR BATEN INPULTSUA
6.2 INDAR BATEN LANA
6.3 POTENTZIA
6.4 ENERGIA KINETIKOA
6.5 ENERGIA POTENTZIALA
6.6 ENERGIA MENAKIKOAREN KONTSERBAPENA
6.7 FUNTZIO ESKALAR BATEN GRADIENTEA
6.8 INDAR ZENTRAL KONTSERBAKORREN PEKO HIGIDURA
6.9 INDAR EZ-KONTSERBAKORRAK
6.10 ENERGIA ETA EKILIBRIOA

6.1 INDAR BATEN INPULTSUA

Partikularen Dinamikarekin segituz, gai honetan bestelako magnitude dinamikoak aztertuko ditugu. Aurreko gaian esan dugunez, partikula horrek bere kanpoko unibertsuarekin dituen elkarrakzioak indar terminoaz adierazten ditugu. Indar kontzeptuaren definizioa Newtonen bigarren legea dela ikusi dugu:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

Kasu batzutan, indarrak denborarekiko duen aldaketa eta erlazioa ezagutzen dugu, hots, indarraren denborarekiko aldakuntza

$$\vec{F} = \vec{F}(t) \quad \text{ezaguna}$$

Honela denean, zera egin dezakegu

$$d\vec{p} = \vec{F}\,dt$$

Eta hau limite egokien artean integratuz

$$\int_{\vec{p}_o}^{\vec{p}} d\vec{p} = \int_{t_o}^{t} \vec{F}\,dt$$

$(t_o, \vec{p}_o)$ lehen uneko baldintzak dira, eta $(t, \vec{p})$ edozein denbora uneri dagozkionak. Azkenean:

$$\vec{p} - \vec{p}_o = \int_{t_o}^{t} \vec{F}\,dt = \vec{I}$$

$\int_{t_o}^{t} \vec{F}\,dt$ terminoa, inpultsua deitzen da eta $\vec{I}$ letraz adierazpen. Aurreko espresioan ikusten denez, bestalde:

"Partikula baten momentu linealaren aldaketaren balioa, inpultsuaren balioaren berdina da"

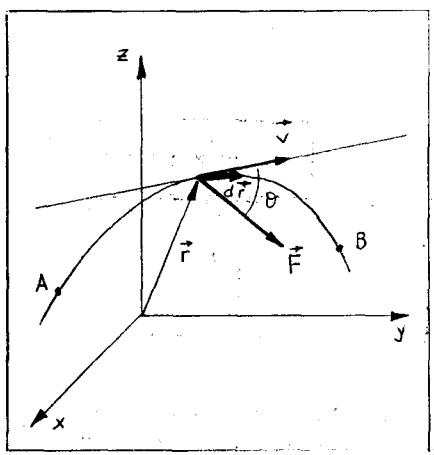
Honela, $\vec{F}(t)$ ezagutzen dugun kasuetan, metodo honetaz ebatz dezakegu problema:

1. Lehenik inpultsua kalkulatuz

2. Eta gero, inpultsuaren bidez momentu lineal berria lortuz

6.2 INDAR BATEN LANA

Hala ere, gehienetan ez dugu $\vec{F}(t)$ ezagutzen. Askoz ere normalagoa da, indarren eremua posizio-bektorearen funtzioan ezagutzea, hots, $\vec{F} = \vec{F}(\vec{r})$ ezagutzea, $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ izanik. Honelako kasuetan, inpultsua erabili ordez, bestelako magnitude batzu erabiltzea komeni zaigu, hala nola lana eta energia. Goazen, ba, magnitude hauk banan-banan definitzera eta kasu konkretutan erabiltzera.



Lehenik indar batek partikularen gainean eragitean egiten duen lana definituko dugu.

Demagun, $\vec{F}$ indarraren eraginpean higitzen ari den partikula bat. dt denbora-tartean, $d\vec{r}$ desplazamendua du. Bitartean, indarraren balioa $\vec{F}$ da.

Definizioz, denbora-tarte horretan indarrak eginiko lan infinitesimala, ondoko hau da:

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{r} \quad \text{(produktu eskalarra)}$$

Erraz ikusten den bezala:

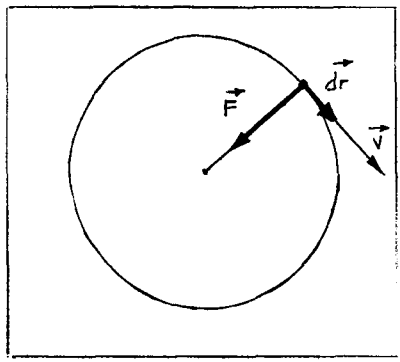
$$dW = F\,ds\,\cos\theta \qquad \text{zeren} \qquad |d\vec{r}| \cong ds$$

Emaniko definizioaren arauera, $\vec{F}$ delakoa ibilbidearen perpendikularra bada, ez da lanik egiten

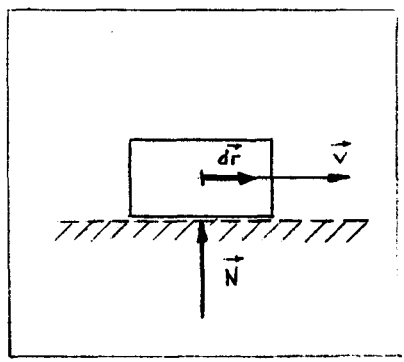
$$\theta = 90^\circ = \frac{\pi}{2} \quad \text{bada,} \quad \cos\theta = 0 \quad \text{eta} \quad dW = 0$$

Honelako zenbait adibide jar ditzakegu.

. Higidura zirkular uniformearen kasuan, $\vec{F}$ eta $d\vec{r}$ perpendikularrak dira. Indar horrek ez du lanik egiten



. Gorputz bat superfizie baten gainean igurtzimendurik gabe higitzen bada, zoluak egiten duen indar bakarra, normala da, eta honek ez du lanik egiten, $\vec{N}$ eta $d\vec{r}$ perpendikularrak baitira.



Bi punturen arteko (A eta B -ren arteko) lan totala bitartean egiten diren lan infinitesimal guztien batuketa (kasu honetan, integraketa) eginez lortzen da.

$$W = \int_A^B dW = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

Ikusten den bezala, $\vec{F}(\vec{r})$ ezagutzen denean, erraz kalkula daiteke indar horrek egiten duen lana. Lan hau honela idazten da indarraren konposatuen funtzioan

$$W = \int_A^B (F_x\,dx + F_y\,dy + F_z\,dz)$$

Puntu honekin bukatzeko, kontsidera dezagun partikula horren gainean indar askok eragiten dutela, eta kalkula dezagun guztien artean egiten duten lana, indarren erresultantearen funtzioan.

Gainezarmenaren printzipioaren arauera, lan totala indar guztiek egiten dituzten lanen batuketa izanen da

$$W = \int_A^B \vec{F}_1 \cdot d\vec{r} + \int_A^B \vec{F}_2 \cdot d\vec{r} + \dots$$

Partikula bat bakarra denez, higidura ere bat bakarra da, eta indar guztiak multiplikatuz ageri den $d\vec{r}$ desplazamendua bat bakarra eta guztientzat berbera da. Faktore komuna eginik:

$$W = \int_A^B (\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots) \cdot d\vec{r} = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \cdots$ indar erresultantea da.

Honela izanik: "Indar askok partikula batetan egiten duten lana, beraien erresultanteak egiten duen lanaren berdina da".

6.3 POTENTZIA

Indar batek egiten duen lana zein den jakitea interesgarri ba da ere, honekin batera, lan hori zenbat denboratan egiten den jakitea ere komeni da, edo eta lana zein arintasunez egiten den. Horretarako lana eta denbora batera adierazten dituen magnitude berri bat erabiltzen da: Potentzia.

Definizioz, aldiuneko potentzia (potentzia instantaneoa) indarrak egiten duen lanaren deborarekiko deribatua da.

$$P = \frac{dW}{dt}$$

Definizio honetan finkatuz, eta $dW = \vec{F} \cdot d\vec{r}$ denez:

$$P = \vec{F} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v}$$

Hitz batez, potentzia indarraren eta abiaduraren biderkaketa eskalarraz lortzen da.

Zer esanik ez, t denbora-tartean egiten den batez-besteko potentzia ($\bar{P}$), hauxe da

$$P = \frac{W}{t}$$

Lanaren eta potentziaren dimentsio-ekuazioak eta unitateak ondokoak dira

$$[W] = [\vec{F}][d\vec{r}] = M\,L\,T^{-2}\,L = M\,L^2\,T^{-2}$$

MKS sisteman: $kg \cdot m^2 \cdot s^{-2} = \text{joule} = N \cdot m$

$$[P] = [\vec{F}][\vec{v}] = M\,L\,T^{-2}\,L\,T^{-1} = M\,L^2\,T^{-3}$$

Unitatea: $kg \cdot m^2 \cdot s^{-3} = \text{joule} \cdot s^{-1} = \text{watt}$

6.4 ENERGIA KINETIKOA

Kalkula dezagun indar batek puntu biren artean egiten duen lana

$$W = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

Erreferentzi sistemá inertziala bada

$$\vec{F} = m \frac{d\vec{v}}{dt}$$

Beraz:

$$W = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_A^B m \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v}\, dt = \int_A^B \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2} m \vec{v} \cdot \vec{v}\right) dt$$

Magnitude berri bat definituko dugu: energia kinetikoa. Definizioz, partikula baten energia kinetikoa (E_k) honela lortzen den magnitudea da:

$$E_k = \frac{1}{2} m \vec{v} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} m v^2$$

Beronen dimentsioak, lanarenak dira

$$\left[E_k\right] = \left[\frac{1}{2} m v^2\right] = M L^2 T^{-2}$$

Lehengo adierazpenera pasatuz:

$$W = \int_A^B \frac{d}{dt}\left(E_k\right) dt = E_{k,B} - E_{k,A}$$

Beraz, azken expresio hau irakurriz, zera ikus dezakegu: "Gorputz baten gainean egiten den lana, gorputz horren energia kinetikoa gehitzean erabiltzen da". Edo bestela esanik: "Gorputz baten gainean lana egitean, gorputz horren energia kinetikoa handitu egiten da".

Puntu honetara heldurik, konparatu eginen ditugu ondorio hauk, inpultsua aztertzean lortutakoekin.

$W = E_{k,B} - E_{k,A}$ Hemen espazioarekiko aldakuntza adierazten da. $\vec{F} = \vec{F}(\vec{r})$ ezagutzen dugunean erabiltzen da. Ibilbideko bi punturen artean gertatzen da.

$\vec{I} = \vec{p} - \vec{p}_o$ Itxura berdintsukoa da, baina denborarekiko aldakuntza adierazten du. $\vec{F} = \vec{F}(t)$ ezagutzen dugunean erabiltzekoa.

Dena den, gehienetan $\vec{F}(\vec{r})$ ezagutzen da, eta horregatik, energia kinetikoaren kontzeptua oso baliagarri gertatzen da praktikan.

6.5 ENERGIA POTENTZIALA

Puntu honetan indar berezi batzu aztertuko ditugu: indar kontserbakorrak (kontserbatikoak). Nolabait, berauen definiziotik hasiko gara.

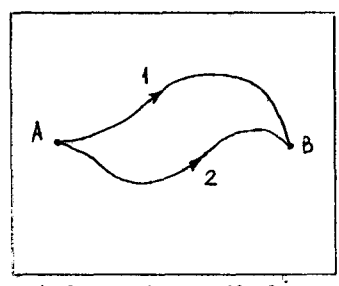
Indarren eremu bat kontserbatiboa dela esaten da, baldin eta indarrak egiten duen lana, $E_p(x,y,z)$ funtzio eskalar baten bidez adieraz badaiteke. Honela hain zuzen:

$$W = \int_A^B \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = E_{p,A} - E_{p,B}$$

E_p delako funtzio eskalar hori, <u>energia potentziala</u> deitzen da.

Ikusten denez, indar kontserbatiboen kasuan, lana A eta B puntuetan E_p funtzioak hartzen duen baloreaz kalkulatzen da. Beraz, lanak ez du eramaten den bidearen dependentziarik, haste eta bukatze puntuena baizik.

$$\int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r}$$
$$(1) \qquad (2)$$

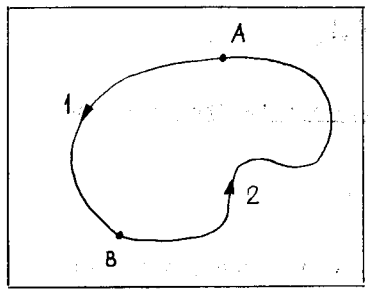


Energia potentziala konstante batetan indeterminaturik dago, zeren eta lana bi energiaren diferentziaz lortzen baita

$$E_p = E_p(x,y,z) + K$$

$$W = (E_p + K)_A - (E_p + K)_B = E_{p,A} - E_{p,B}$$

Konstante horrek balio desberdinak eduki ditzake, energia potentzialen origenaren (zero mailaren) hautatze moduaren araue ra.



Ibilbidea hertsia denean, hots A puntutik irten eta A puntura heltzen bada, ez da lanik egiten indarrak kontserbatibo direnean.
Hain zuzen ere hortik dator kie izena, ibilbide zarratuetan ez baita lanik galtzen. Ikus dezagun hori:

$$\oint \vec{F}\cdot d\vec{r} = \underset{(1)}{\int_A^B \vec{F}\cdot d\vec{r}} + \underset{(2)}{\int_B^A \vec{F}\cdot d\vec{r}} = \underset{(1)}{\int_A^B \vec{F}\cdot d\vec{r}} - \underset{(2)}{\int_A^B \vec{F}\cdot d\vec{r}} = 0$$

Praktikan, igurtzimenduzko indarrak kenduta, besteak kontserbatibo direla esan dezakegu. Horregatik, oso baliagarria gertatzen da energia potentziala.

6.6 ENERGIA MEKANIKOAREN KONTSERBAPENA

Aurreko galdereten ikusi dugunez, lana beste funtzio berri baten bidez adieraz daiteke

$$W = \int_A^B \vec{F}\cdot d\vec{r} = \begin{cases} E_{k,B} - E_{k,A} \\ E_{p,A} - E_{p,B} \end{cases}$$

$E_{k,B} - E_{k,A}$: hau beti betetzen da, indarra edozein moetatakoa izanik

$E_{p,A} - E_{p,B}$: hau soilik gertatzen da indarren eremua kontsebatiboa denean.

Beraz, eremu kontserbatiboa badugu (eta soilik kasu honetan):

$$E_{k,B} - E_{k,A} = E_{p,A} - E_{p,B}$$

$$E_{k,B} + E_{p,B} = E_{k,A} - E_{p,A}$$

$$(E_K + E_P)_A = (E_K + E_P)_B$$

$E = E_K + E_P$ delako magnitudea <u>energia mekanikoa</u> deitzen da.

$$E = \frac{1}{2} m v^2 + E_p(x,y,z)$$

Indarrak kontserbatibo direnean, partikularen energia mekanikoa berdina da ibilbideko puntu guztietan, hau da, energia mekanikoak konstante irauten du.

6.7 FUNTZIO ESKALAR BATEN GRADIENTEA

Energia potentziala definitu dugularik, fisikaren hizkuntza matematiko gisa, oso baliagarri gertatuko zaigu funtzio eskalar baten gradientea zer den adieraztea.

Lehenik eta behin eremu eskalarra definituko dugu. Espazioko puntu bakoitzean balore eskalarra duen funtzio bat (V) kontsideratuko dugu. Funtzio horrek puntuaren posizio-bektorearen dependentzia badu, espazioan eremu eskalar bat dugula esanen dugu eta honela adieraziko:

$$V = V(\vec{r}) = V(x,y,z)$$

Espazioko puntu bakoitzean, eremu eskalar horren gradientea defini daiteke matematikoki, ondoko eragiketak eginez:

$$\text{grad } V = \nabla V = \frac{\partial V}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial V}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial V}{\partial z}\vec{k}$$

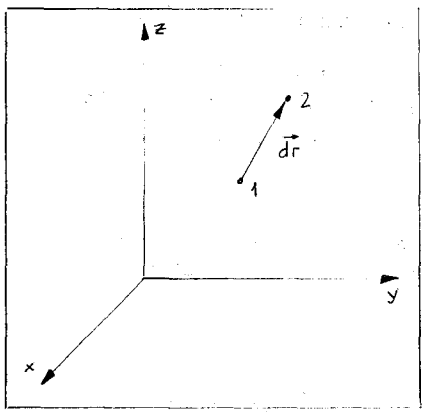
Ikusten denez, gradientea espazioko puntu bakoitzean definitzen den bektore bat da. Nabla (∇) izeneko operatzailearen bidez, eremu eskalarretik eremu bektorial bat lortzen da. ∇ operatzailea honela adierazten da:

$$\nabla = \vec{i}\frac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial}{\partial z}$$

eta kasu honetan V funtzioari aplikatzen zaio.

Ikus dezagun orain, gradienteak duen esangura fisikoa zein den. Definizioaren arauera, puntu bakoitzean gradientea bektore bat da. Nolakoa den, ikusteko, direkzioa, modulua eta sentidoa zehaztu beharko ditugu.

Kalkula dezagun lehenik, bi puntu infituki-hurbilen artean V funtzioak duen aldakuntza (dV halegia)



$$dV = V_2 - V_1 = \frac{\partial V}{\partial x} dx + \frac{\partial V}{\partial y} dy + \frac{\partial V}{\partial z} dz$$

Baina bestalde:

$$\begin{cases} \text{grad } V = \dfrac{\partial V}{\partial x}\vec{i} + \dfrac{\partial V}{\partial y}\vec{j} + \dfrac{\partial V}{\partial z}\vec{k} \\ \vec{dr} = dx\,\vec{i} + dy\,\vec{j} + dz\,\vec{k} \end{cases}$$

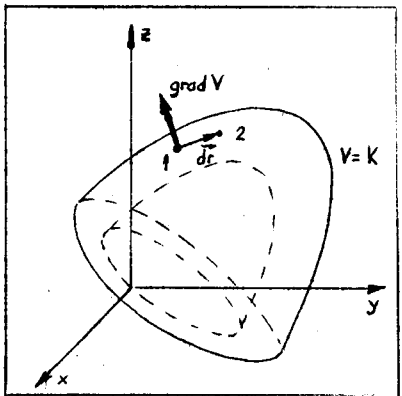
Beraz

$$dV = \text{grad } V \cdot \vec{dr}$$

Honetan finkatuz, gradientearen direkzioa kalkulatuko dugu. Kontsidera ditzagun, espazioan, ondoko superfizieak

$$V(x, y, z) = K^{te}$$

Konstantearen balore bakoitzeko superfizie bat dugu. Superfizie hauk, galga (edo nibel) superfizieak deitzen dira. Superfizie ekipotentzialak ere deitzen dira.



Gradientea superfizie ekipotentzialen perpendikularra da

Kontsidera ditzagun horrelako superfizie batetan dauden bi puntu 1 eta 2:

Superfizie berekoak direnez

$$dV = 0 = \text{grad}\, V \cdot \vec{dr}$$

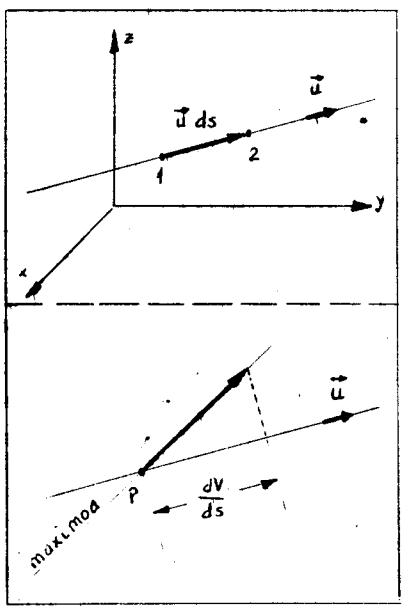
Bestalde, generalean

$$\text{grad}\, V \neq 0 \quad \text{eta} \quad \vec{dr} \neq 0$$

Beraz hori gerta dadin, grad V eta $\vec{dr}$ perpendikularrak izanen dira.

Beraz puntu batetan gradienteak duen direkzioa, puntu beretik iragaten den superfizie ekipotentzialaren perpendikularra da.

Kalkula dezagun orain gradientearen modulua.



Demagun $\vec{u}$ direkzioan alineaturik dauden bi puntu, 1 eta 2.

$$\vec{dr} = ds\,\vec{u}$$

$\vec{u}$ bektore unitaria izanik, noski.

Kasu honetan

$$dV = \text{grad}\, V \cdot ds\, \vec{u}$$

$$dV = (\text{grad}\, V \cdot \vec{u})\, ds$$

$$\frac{dV}{ds} = \text{grad}\, V \cdot \vec{u}$$

$\frac{dV}{ds}$ delakoa, $\vec{u}$ direkzioan eginiko deribatu direkzionala da.

Ikusten denez, deribatu direkzionalak, direkzio horretan gradienteak duen projekzioaren ($\text{grad}\, V \cdot \vec{u}$) balorea du. Honela gradientearen modulua deribatu direkzional maximoaren berdina da; edo, beste modu batetara esanik, deribatu direkzional maximoa superfizie ekopotentzialen perpendikularraren direkzioan lortzen da eta beroren balorea gradientearen moduluarena da.

Honela, ba, gradientea era honetakoa da:

- Gradientearen direkzioa superfizie ekopotentzialen perpendikularra da
- Sentidoa potentzialak haziz doazenekoa
- Eta modulua, deribatu direkzional maximoarena.

Gradientearen esangura fisikoa azaldu ondoren, Fisikaren elementu matematiko gisa duen garrantzia aipatuko dugu. Energia potentzialaren definitzean, eremu kontserbakorrak erabili ditugu. Orain hauxe esanen dugu:

"Indarren eremua kontserbakorra izan dadin, baldintza beharrezko eta nahikoa da, $\vec{F} = \text{grad}\, V$ izatea"

Guk ez dugu hemen frogatuko baldintza beharrezkoa denik, maila honetarako gehiegitxo gerta ez dadin. Dena den, erraz froga daiteke baldintza nahikoa dela. Hara

$\vec{F} = \text{grad}\, V$ baldin bada,

$$\int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_A^B \text{grad}\, V \cdot d\vec{r} = \int_A^B dV = V_B - V_A$$

Beraz $\vec{F} = \text{grad}\, V$ bada, lanak ez du ibilbidearen dependentzia rik, ibilbidearen extremuen dependentzia soila edukiz. Beraz, indarren eremua kontserbakorra da, frogatu nahi genuen legez.

Fisikaren arloan $\vec{F} = \text{grad}\, V$ egin beharrean, $\vec{F} = -\text{grad}\, E_p$ egiteko ohitura dago, gero energia mekanikoa energia kinetikoaren eta energia potentzialaren batuketa izan dadin. Zer esanik ez, horrek ez du esangurarik aldatzen, signu kontua hitzarmen bat baita.

. Adibideak: Aurrera segitu baino lehen eta gradientearen kontzeptua zerbait finkatzeko adibide pare bat eginen dugu.

1.- Grabitatearen kausaz sufritzen dugun indarra $\vec{F} = -mg\vec{k}$ dela, eta grabitatearen indar-eremua kontserbakorra dela kontutan hartuz, zein da indar horren iturburuan dagoen eremu potentziala?

Errazki ikus daitekeenez, $E_p = mgz$ izan behar du, zeren eta kasu honetan

$$\vec{F} = -\text{grad}\, E_p = -mg\vec{k}$$

2.- Demagun $V = x^2yz^3$ delako eremu potentziala

a) Lor bedi gradientea edozein puntutan

b) Zein da (1,0,1) puntuko gradientea?

c) Zein da V-ren deribatua $2\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$ direkzioan?

d) Zenbat balio du deribatu horrek (1,0,1) puntuan?

a) $\text{grad}\, V = \frac{\partial V}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial V}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial V}{\partial z}\vec{k} = 2xyz^3\vec{i} + x^2z^3\vec{j} + 3x^2yz^2\vec{k}$

b) (1,0,1) puntuan

$$\text{grad}\, V = 0\,\vec{i} + \vec{j} + 0\,\vec{k} = \vec{j}$$

c) Lehenik direkzio horretako bektore unitaria kalkulatuko dugu:

$$\vec{u} = \frac{2\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}}{\sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2}} = \frac{2}{3}\vec{i} + \frac{2}{3}\vec{j} + \frac{1}{3}\vec{k}$$

Eta teoria aplikatuz

$$\frac{dV}{ds} = \text{grad}\, V \cdot \vec{u} = \frac{4}{3}xyz^3 + \frac{2}{3}x^2z^3 + x^2yz^2$$

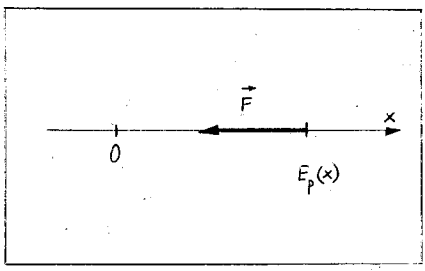
d) (1,0,1) puntuan

$$\left(\frac{dV}{ds}\right)_{(1,0,1)} = \frac{2}{3}$$

6.8 INDAR ZENTRAL KONTSERBAKORREN PEKO HIGIDURA

Kasu honetan, kontserbapen printzipioak eta energiaren definizioak erabiliz, partikulen higidura aztertu nahi dugu. Bi pausotan eginen dugu azterketa hau; lehenik, dimentsio beharreko problema batetan, eta bigarrenik, laun batetan, hots, bi dimentsiotan (kontutan har ezen indar zentralen eragipean sortzen den higidura launa dela; honetaz, ikus 5.7. puntua).

Has gaitezen, ba, higidura zuzen kontserbakorra aztertzen. Dimentsio bakar bat kontsideratuko dugu: x



Indarren eremua kontserbakorra bada, eremu potentzial bat egonen da: $E_p(x)$

$$\vec{F} = -\operatorname{grad} E_p$$

$$\vec{F} = -\frac{dE_p}{dx}\vec{i}$$

Indarra kontserbakorra izanik, energia mekanikoa kontserbatu eginen da:

$$E = E_k + E_p = \frac{1}{2} m v^2 + E_p(x) = \text{konstante}$$

Eta $v = \frac{dx}{dt}$ izanik

$$E = \frac{1}{2} m \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + E_p(x)$$

$$\frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{2}{m}\left[E - E_p(x)\right]}$$

Aldakariak banatuz:

$$\frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}\left[E - E_p(x)\right]}} = dt$$

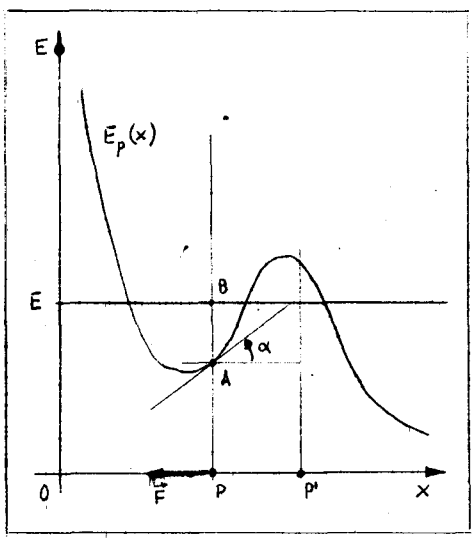
Ekuazio diferentzial honetan, aldakariak bereizirik daude. Beraz, baldintza egokiak (hasierakoak eta edozein unetakoak) ipiniz, integratu eginen dugu:

$$\int_{x_0}^{x} \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}\left[E - E_p(x)\right]}} = \int_{t_0}^{t} dt = t - t_0$$

Modu honetan, ebatzirik geratzen da problema, zeren eta, izatez, aurreko expresioan $x = x(t)$ lortu baitugu.

Honelatan, ba, energia mekanikoa (E), energia potentziala $E_p(x)$, eta hasierako baldintzak (t_0, x_0) ezagutuz, guztiz ebatzirik geratzen da problema, zeren eta $x = x(t)$ ezagutuz gero, erraz kalkula baitezakegu edozein unetako abiadura eta azelerazioa (indarra zuzenki ere ezaguna dugu, E_p-ren bidez).

Problema hau analitikoki ebatzi ondoren, goazen orain grafikoki aztertzera. Horretarako energia potentziala grafikoa erabiliko dugu. Ikus dezagun nola egiten den.



Alboko irudian zera adierazten dugu:

. Abszisatan partikularen posizioa

. Ordinatuetan energia

- $E_p(x)$ kurba
- $E = K$ energia mekaniko konstantea

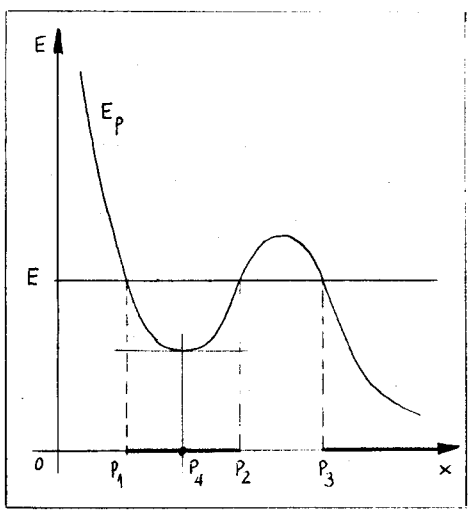
Zer adierazten du irudiko elementu bakoitzak, partikula P puntuan dagoenean?

- $\overline{OP} = x$
- $\overline{PA} = E_p(x)$ ——► energia potentziala
- $\overline{PB} = E$ ——► energia mekanikoa
- $\overline{AB} = E_k(x)$ ——► energia kinetikoa $\qquad v = \sqrt{\frac{2E_k}{m}}$
- $\left.\begin{array}{l} \vec{F} = -\frac{dE_p}{dx}\,\vec{i} \\ \frac{dE_p}{dx} = tg\,\alpha \end{array}\right\} \quad \vec{F} = -tg\,\alpha\,\vec{i}$

Kasu honetan $\qquad tg\,\alpha > 0 \Longrightarrow \vec{F}$ negatiboa.

Elementu hauen interpretapenean finkatuz, higidura nolakoa izanen den ikus dezakegu.

Partikula ezin egon daiteke P' puntuan zeren eta kasu honetan $E_p > E$ denez, E_k negatiboa izanen bailitzateke eta hori ez baita posible, $E_k = \frac{1}{2} m v^2$ baita, hots, E_k kantitate positiboa baita.



Horrela izanik, partikularen higidura $P_1 \leftrightarrow P_2$ eta $P_3 \leftrightarrow \infty$ tarteetan baino ez da posible.

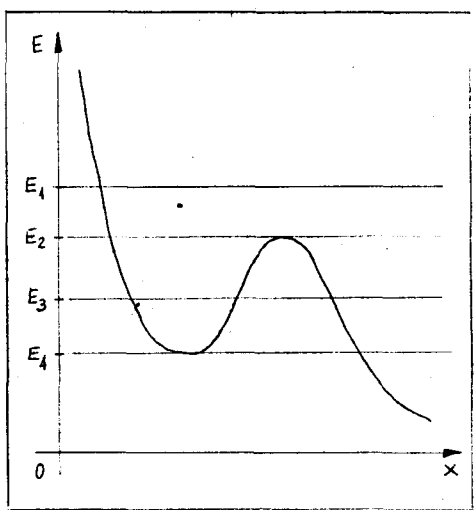
Eta $P_1 \leftrightarrow P_2$ tartean dagoen partikula, ezin pasa daiteke $P_3 \leftrightarrow \infty$ tartera. Horrelako tarteak, potentzial-putzuak deitzen dira.

Mekanika klasikoaren arloan ez da posible potentzial-putzuetatik irtetea. Mekanika kuantikoan, ordea, bai. $P_1 \leftrightarrow P_2$ tartean dagoen partikula etengabe arituko da bi puntu horien artean higitzen.

- P_1 puntuan, abiadura zero izanen da, baina indarra, positiboa (P_2 -rantz)
- P_4 puntuan, abiadura maximoa izanen da; indarrik ez da egonen, ordea, $\frac{dE_p}{dx} = 0$ baita.
- P_2 puntuan, abiadura zero izanen da ($E_k = 0$) etaindarra, negatiboa (P_1 -erantz)

$P_3 \leftrightarrow \infty$ tartean dagoen partikula infiniturantz joanen da

- P_3 puntuan, abiadura zero da ($E_k = 0$) eta indarra, positiboa (∞-rantz)
- Infinituan ukanen duen abiadura, ondokoa izanen da

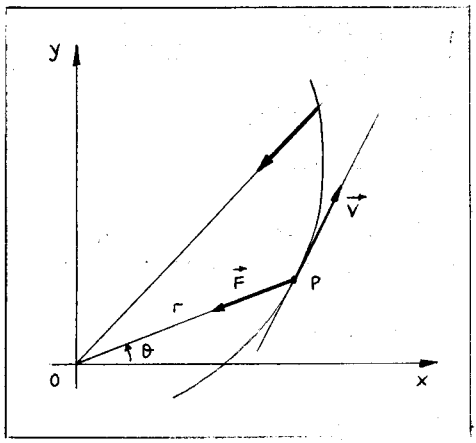


$$E_k = \frac{1}{2} m v^2 = E$$

zeren $E_p(\infty) = 0$ baita

Ariketa modura, ikasleek E_1, E_2, E_3 eta E_4 energia totalen kasuetako higidurak azter ditzakete.

Azter dezagun orain kasu generala, hots, bi dimentsiotakoa. Esan dugunez (ikus 5.7.), indar zentralen kasuan, higidura launa da.



Beraz

Bi kontserbapen-printzipio daude:

i) Indar kontserbatiboak direnez

$$E = E_p + E_k$$

Gainera, kasu honetan $E_p = E_p(r)$, indarra zentrala izan dadin

$$\vec{F} = -\nabla E_p = F\vec{u}_r$$

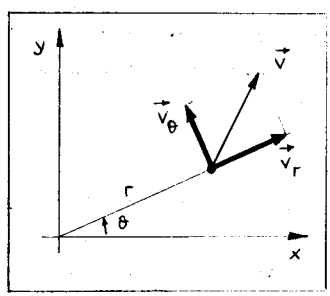
$$E = \frac{1}{2} m v^2 + E_p(r) = \text{Konstante} \qquad [I]$$

(Oharra: Hemendik, E eta E_p ezagutuz, abiaduraren modulua kalkula dezakegu edozein puntutan)

ii) Bestalde, indarrak zentral izanik, momentu angularra ere kontserbatzen da

$$\vec{N} = \vec{r} \times \vec{F} = 0 \quad \text{denez,} \quad \frac{d\vec{L}}{dt} = 0 \Longrightarrow \vec{L} = K^{te}$$

Oharra:



koordinatu polareak erabiliz (ikus 3.)

$$v_r = \frac{dr}{dt} \qquad v_\theta = r\frac{d\theta}{dt}$$

$$v^2 = \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 \qquad [II]$$

$$\vec{L} = \vec{r} \times m(\vec{v}_r + \vec{v}_\theta) = \vec{r} \times m\vec{v}_\theta$$

zeren eta $\vec{r}$ eta $\vec{v}_r$ paralelo baitira

Indar zentralen kasuan, ba, $\vec{L} = K^{te}$ (moduluz eta direkzioz). Modulua kontsideratuz, eta $\vec{r}$ eta $\vec{v}_\theta$ perpendikularrak direnez:

$$|\vec{L}| = L = m\,r\,v_\theta = m\,r^2\frac{d\theta}{dt}$$

Hemendik

$$r^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = \frac{L^2}{m^2r^2}$$

Eta [II] expresiora eramanik:

$$v^2 = \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \frac{L^2}{m^2r^2}$$

Lorpen hau [I] expresiora eramanik

$$E = \frac{1}{2}m\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \frac{L^2}{2mr^2} + E_p(r) \qquad [III]$$

Hemen aldakari bakar bat ageri da: r delakoa.

Eta berau denborarekin erlazionaturik ageri zaigu. Geroago ikusiko dugun legez, $r = r(t)$ kalkula dezakegu adierazpen honetatik. Baina hori egin aurretik, lortutako aiderazpen horren interpretapen fisikoa eginen dugu.

Direkzio bakarreko higidurarekin konparatuz (ikus 126. horrialden goiko partea), berdintsu agertzen zaigu baldin eta ondoko energia potentzial efektiboa kontsideratzen badugu.

$$E_{p,ef}(r) = \frac{L^2}{2mr^2} + E_p(r)$$

Ikusten denez, gehiagarri gisa, $\frac{L^2}{2mr^2}$ sartu dugu. Termino hau <u>energia potentzial zentrifugua</u> deitzen da

$$E_{p,z} = \frac{L^2}{2mr^2}$$

Zergatik? Hara. Ikus dezagun, zenbat balio duen eremu potentzial horrek sorturiko indarrak zenbat balio duen.

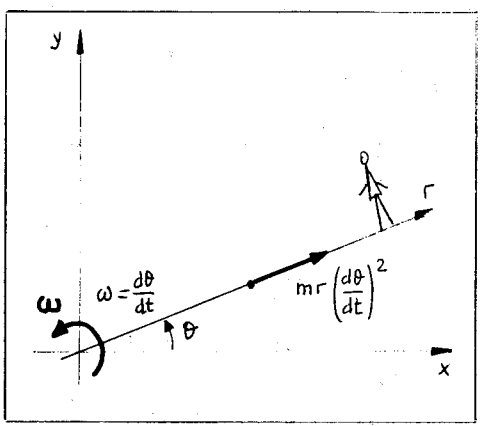
$$\vec{F}_z = -\frac{dE_{p,z}}{dr}\vec{u}_r \quad \text{(hots erradioaren direkzioan)}$$

$$F_z = -\frac{dE_{p,z}}{dr} = \frac{L^2}{mr^3}$$

Eta $L = mr^2\frac{d\theta}{dt}$ delarik $\left(\frac{d\theta}{dt} = \omega\right)$

$$F_z = m r \omega^2 \qquad \vec{F}_z = m r \omega^2 \vec{u}_r$$

Hau da, $\vec{F}_z$ indarrak indar zentrifuguaren antza du. Baina, zein indar zentrifugu?



Izatez, higidura launa direkzio bakar batetan (r-renean) ikusten duena, etengabe erradioarekin higitzen den behatzailea da. Baina beroren sistema ez da inertziala, biraka ari baita.

Beraz, inertziazko indarrak kontsideratu behar ditu. Eta ardatzaren direkzioan ikusten duen inertzi indarra, indar zentrifugua da (Coriolisenak beste direkzio bat du, partikula

r-ren direkzioan higitzen baita). Bestalde, indar zentrifugu hau kontserbatibotzat har dezakegu, $\frac{L^2}{2mr^2}$ eremu potentzia la hartuz.

Interpretapenarekin bukatuz, goazen orain [III] adierazpena integratzera.

$$E = \frac{1}{2} m \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + E_{p,ef}(r)$$

$$\frac{dr}{dt} = \sqrt{\frac{2}{m}\left[E - E_{p,ef}(r)\right]}$$

Eta r eta t banatuz eta integratuz:

$$\int_{r_0}^{r} \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m}\left[E - E_{p,ef}(r)\right]}} = \int_{t_0}^{t} dt = t - t_0 \qquad [IV]$$

Honela $r = r(t)$ lortu dugu. Pixka bat ohartuz, 126. horrialdeko prozesu berbera eraman dugula konturatuko gara.

Goikoan finkatuz, $\theta = \theta(t)$ ere lor dezakegu

$$L = m r^2 \frac{d\theta}{dt} \Longrightarrow \frac{d\theta}{dt} = \frac{L}{mr^2} \qquad (L = k\vec{L})$$

$$\int_{\theta_0}^{\theta} d\theta = \int_{t_0}^{t} \frac{L}{m\left[r(t)\right]^2}\, dt \qquad [V]$$

$r(t)$ delarik, $\theta = \theta(t)$ lortuko dugu.

Kalkulu analitiko hauekin bukatzeko, ibilbidearen ekuazioa lortuko dugu. [IV] eta [V] erabiliz:

$$\begin{cases} [IV] \longrightarrow dt = \dfrac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m}\left[E - E_{p,ef}(r)\right]}} \\ [V] \longrightarrow dt = \dfrac{mr^2}{L}\, d\theta \end{cases}$$

Biak berdinduz, eta lorpena integratuz:

$$\int_{r_0}^{r} \frac{L\,dr}{mr^2\sqrt{\frac{2}{m}\left[E - E_{p,ef}(r)\right]}} = \int_{\theta_0}^{\theta} d\theta$$

Horrela ibilbidearen ekuazioa lortu dugu

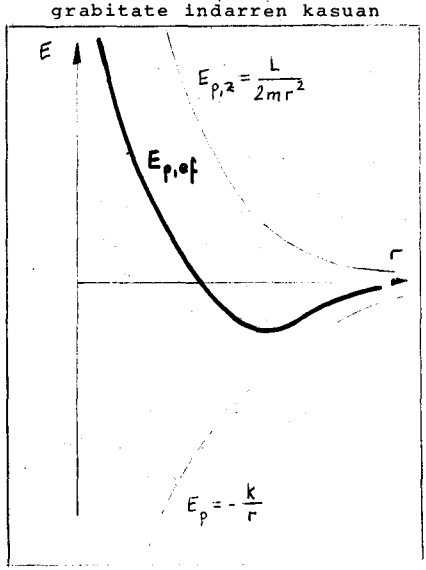
$$r = r(\theta)$$

. Azken oharrak

- Prozesu oso honetan bi kontserbapen-printzipio erabili ditugu: energiarena eta momentu angularrarena.

- Aurreko kasuan bezala oraingo honetan ere potentzial-kurben bidez azter dezakegu higidura.

  Direkzio bakar batetan egin behar da (r -nean) eta gero bi dimentsiotako interpretapenak problema bereziak ageri ditu. Ikus dezagun adibidez, nolakoa den potentzial-kurba grabitate indarren kasuan



Energia potentzial efektiboa kontsideratu behar da

$$E_p = -\frac{k}{r}$$

$$E_{p,z} = \frac{L}{2mr^2}$$

$$E_{p,ef} = -\frac{k}{r} + \frac{L}{2mr^2}$$

6.9 INDAR ÉZ-KONTSERBAKORRAK

Indar guztiak ez dira kontserbakorrak. Izan ere, bostgarren gaian igurtzimendu-indarrak aipatu ditugu. Hauen kasuan higiduraren aurkako indarra egiten da etengabe. Beraz, $\vec{F}_r \cdot d\vec{r} \neq 0$ denez denbora guztian ($\vec{F}_r$ igurtzimendu-indarra), $\oint \vec{F}_r \cdot d\vec{r} \neq 0$ eta horretan lana galtzen da.

Kasu honetan, eginiko lan externo guztia energia kinetiko bihurtuko da, baina jadanik ezin gaitezke energia potentzialaz mintza, ez eta energia mekanikoaz.

Dena den, bi kontzeptu horik erabiltzeko ohitura dagoenez, kasurik generalenean indar kontserbatibo eta ez-kontserbatiboak daudela kontsideratzen da eta honela adierazten da lanaren eta energiaren arteko erlazioa

$$W = E_{k,B} - E_{k,A} = E_{p,A} - E_{p,B} + W'$$

lan osoa	Hau beti esan daiteke	Indar kontserbakorrei dagokien energia potentziala	Indar ez-kontserbakorrek egiten duten lana

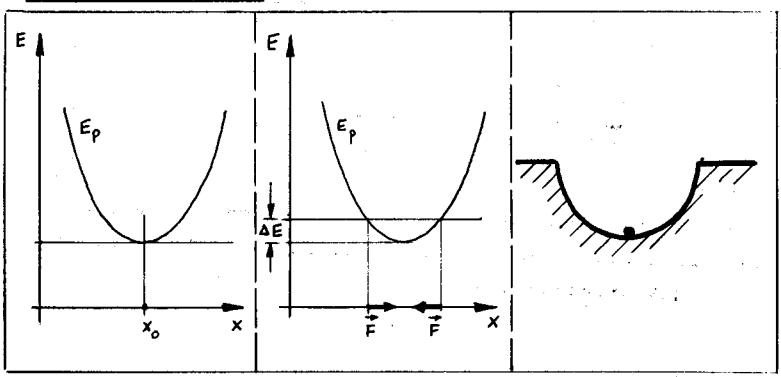
Argi dagoenez, kasu honetan ezin mintza daiteke energia mekanikoaz. Baina, bertan indar kontserbakorrak soilik kontsideratuz, eta $E_k + E_p$ eginez sistemaren energia mekanikoa definitzen bada, energia hori ez dela kontserbatzen ikusiko da, terminoa aldatuz baitoa.

Nolabait esateko, "galtzen" den energia hori bero-energia eta deformazio-energia bilakatzen da. Eta zer esanik ez, energia moeta hauk ere kontsideratuz, energia totala kontserbatu egiten da.

6.10 ENERGIA ETA EKILIBRIOA

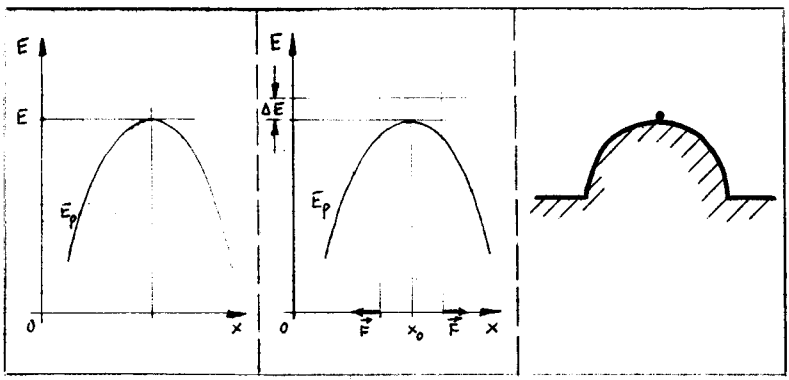
Eman dezagun partikula bat orekan dagoela, indarren eremu kontserbakor baten eragin pean. Potentzialaren kurbak aztertuz, ekilibrio hori nolakoa den ikus dezakegu.

. Ekilibrio egonkoia (establea)



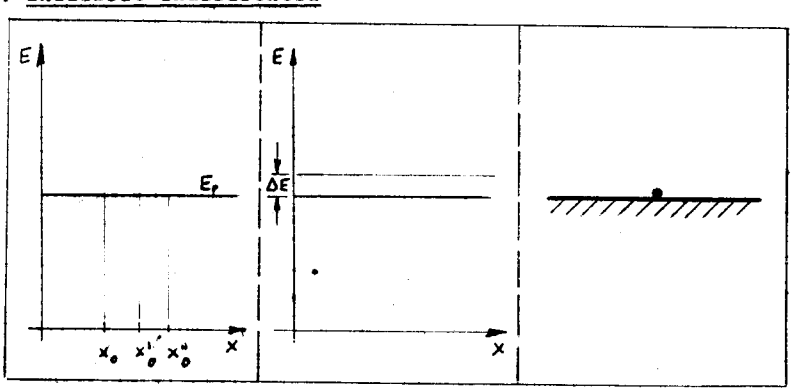
Ekilibrio-posizioan potentzialaren kurbak minimo bat du. Honela izanik, perturbazio bat gertatzen bada (ΔE), partikulá potentzial-putzu batetan dago irten ezinik, eta sortzen diren indarrek ekilibrio-pozisioranzkoak dira. Horixe da lehen bi irudietan adierazten dena. Hirugarrenean analogia mekaniko bat egiten da, problema intuitiboki ulertu ahal ukateko. Zer esanik ez, pertubaketaren ondoren ekilibrioa (geldiunea) lortzeko, igurtzimendu-indarrek egon behar dute. Bestela, ekilibrio-posizioaren inguruan arituko litzateke etengabe.

. Ekilibrio ez-egonkoia (inestablea)



Kasu honetan modu berean eramaten da arrazonamendua. Baina perturbaketaren bidez guztiz apurtu egiten da ekilibrioa, indarrek -tik urruntzera baitaramate partikula.

. Ekilibrio indiferentea



Guztiak dira ekilibrio-posizioak

ΔE emanez, igurtzimendurik ez balego, partikula abiadura konstantez higituko litzateke.

7. GAIA - PARTIKULA-SISTEMEN DINAMIKA

7.1 MASA-ZENTRUA ETA GRABITATE-ZENTRUA

7.2 PARTIKULA-SISTEMA BATEN MASA-ZENTRUAREN HIGIDURA

7.3 MASA ERREDUZITUA

7.4 MOMENTU ANGULARRAREN TEOREMA

7.5 SISTEMA BATEN ENERGIA KINETIKO ETA POTENTZIALA

- ENERGIA PROPIOA
- ENERGIA OSOA

7.6 TXOKEAK

Orain arteko gaietan partikula puntualak aztertu ukan ditugu. Gorputz finituak ere puntualak bailiren erabili ditugu.

Oraingo gai honetan, partikula askoz osoturiko sistemak aztertuko ditugu. Lehenik lotura berezirik gabe, eta gero solido zurrun gisa bildurik dauden partikula-sistemak (hurrengo bi gaietan).

7.1 MASA ZENTRUA ETA GRABITATE ZENTRUA

Partikula bat definitzean, beraren posizioa ezagutzeko, posizio-bektorearekin nahikoa zen. Orain partikula asko ditugularik, ezin dezakegu banan banan bakoitzaren posizio-bektorea azal. Eta sistema osorako puntu berezi batzu definitzen dira -masa-zentrua eta grabitate-zentrua- gero hauen posizio-bektoreak erabiltzeko.

. Masa-zentrua. m_i partikula $\vec{r}_i$ puntuan egonik sistemaren masa-zentrua honela definitzen da

$$\vec{r}_{MZ} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}$$

M sistemaren masa osoa izanik

$$M = \Sigma\, m_i$$

$$\vec{r}_{MZ} = \frac{\Sigma\, m_i \vec{r}_i}{M}$$

Masa kontinuo gisa hartzen bada, elementu diferentzial bakoitzaren masa dm izanen da, posizio-bektorea $\vec{r}$ eta sumatorioa integrala izanen da.

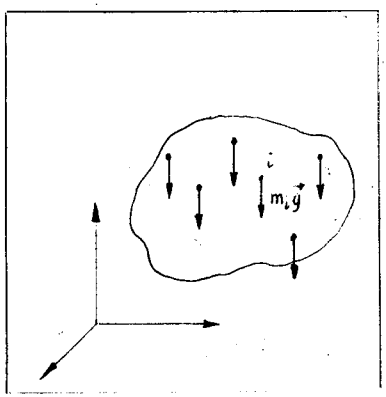
Orduan

$$\vec{r}_{MZ} = \frac{\int \vec{r}\, dm}{\int dm} = \frac{\int \vec{r}\, dm}{M}$$

Bektore honen hiru konposatu cartesiarrak hauxek dira:

$$x_{MZ} = \frac{\sum m_i x_i}{M} \qquad y_{MZ} = \frac{\sum m_i y_i}{M} \qquad z_{MZ} = \frac{\sum m_i z_i}{M}$$

. Grabitate-zentrua. Masa zentruaren kontzeptuaren antzerakoa da, guztiz berdina ez bada ere. Hara nola sortzen den.



Partikula-sistema bakoitzaren gainean, grabitateak $m_i\vec{g}$ indarra egiten. $m_i\vec{g}$ bektoreez (kurtsoreez) osoturiko sistemaren erresultantea $M\vec{g}$ da $M=\sum m_i$ izanik. Erresultante hau aplikatzen den puntua, sistemaren orientazioa zeingura delarik, grabitate-zentrua deitzen da.

Zer esanik ez,

$$M\vec{g} = \sum m_i \vec{g}$$

Grabitatea bektore konstantea denean, masa-zentrua eta grabitate-zentrua puntu berberean daude, eta bi hitz hauk sinonimotzak har daitezke. Hauxe izanen da kasurik arruntena.

Dena den, $\vec{g}$ aldatuz doanean grabitate-zentrua eta masa-zentrua ez dira zertan puntu berberean egon behar.

Ikusi denez, ba, kontzeptualki, definizioaren arauera, bi gauza oso desberdin dira masa-zentrua eta grabitate-zentrua. Lehena, masen posizioen arauera matematikoki definitu dugun puntu bat da. Bigarrena, ostera, indar batzuren zentrua. Hala ere, praktikan berdintzat hartzen dira, zeren eta baldintza oso arraruak ez badira, biak puntu berean baitaude.

7.2 PARTIKULA-SISTEMA BATEN MASA ZENTRUAREN HIGIDURA

Goazen orain masa-zentruarekin zerikusirik duten beste magnitude batzu aztertzera. Masa-zentruaren abiadurarekin hasiko gara. Aurreko puntuan ikusi dugunez:

$$\vec{r}_{MZ} = \frac{\Sigma_i m_i \vec{r}_i}{M}$$

Denborarekiko deribatuz:

$$\frac{d\vec{r}_{MZ}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\Sigma_i m_i \vec{r}_i}{M}\right) = \frac{\Sigma_i m_i \frac{d\vec{r}_i}{dt}}{M} = \frac{\Sigma_i m_i \vec{v}_i}{M}$$

Definizioz, deribatu hori masa-zentruaren abiadura da eta $\vec{v}_{MZ}$ adierazten da. Beraz:

$$\vec{v}_{MZ} = \frac{\Sigma_i m_i \vec{v}_i}{M}$$

Erlaziona dezagun orain sistemaren momentu lineala masa zentruaren abiadurarekin. Partikula bakoitzaren momentu lineala kontutan hartuz:

$$\vec{p}_i = m_i \vec{v}_i$$

Eta gainezarmenaren printzipioz, hauxe izanen da sistema osoaren momentu lineala:

$$\vec{P} = \Sigma \vec{p}_i = \Sigma_i m_i \vec{v}_i = M \vec{v}_{MZ}$$

(Azkenean masa-zentruaren definizioa erabili dugu)

Ikusten denez

$$\vec{p} = M \vec{v}_{MZ}$$

Hau da, "Partikula-sistemaren momentu lineala, masa guztia masa-zentruan kontzentraturik bailegoen kalkula daiteke".

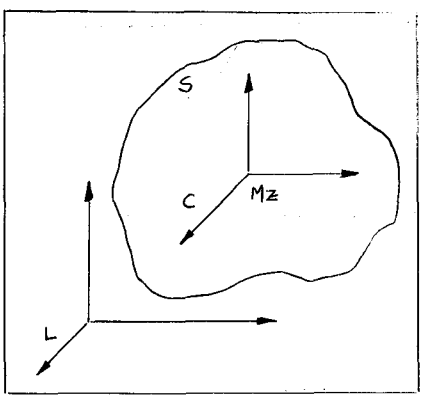
Hemendik ondorio interesgarriak atera daitezke.

Demagun S sistemá isolaturik dagoela. Momentu linealaren kontserbapenaren printzipioaren arauera:

$$\vec{P} = K^{te}$$

Beraz

$$M\vec{v}_{Mz} = K^{te} \Longrightarrow \vec{v}_{Mz} = K^{te}$$



Beraz, masa-zentrua abiadura konstantez higitzen da edozein inertzi sistemarekiko.

Bestalde, origena masa-zentruan duen erreferentziazko sistema bat hartuz, lehengoaren paraleloa izanik, sistema berri hori ere inertziala da.

Masa zentruan definitu dugun sistema inertzial hori, masa zentruaren sistema deitzen da eta C letraz adierazten. Sistema hau sarritan erabiltzen da Fisikan.Sistema honetan:

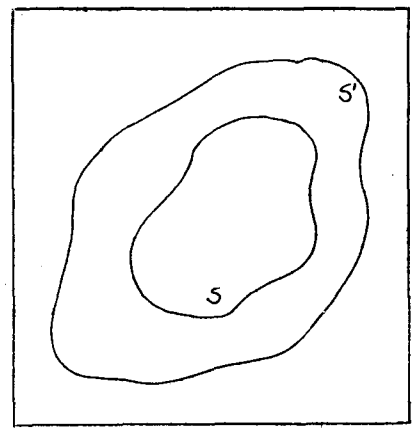
$$\vec{v}_{Mz} = 0 \qquad \text{da eta horrela}$$

$$\vec{P} = 0$$

Partikula-sistematik aparte dagoen erreferentziazko sistema, laborategiko sistema deitzen ohi da eta L letraz adierazten.

. Azelerazioa eta indarra

Demagun, orain S sistema ez dagoela isolaturik. Beraz ezin aplikatu diezaiokegu goikoa.



Dena den, S' sistemarekin batera kontsideratuz, $S+S'$ sistemá isolaturik dagoela esan dezakegu. (Oharra: beti egin dezakegu horrelako aukerarik; besterik ezean, S' unibertsua osotzeko falta den beste guztia izan daiteke).

Bi sistemek osoturiko multzoa hartuz:

$$\vec{P}_S + \vec{P}_{S'} = K^{te}$$

eta denborarekin gertatzen diren aldakuntzak aztertuz

$$\Delta\vec{P}_S = -\Delta\vec{P}_{S'}$$

Denbora tarteaz zatituz eta limitera eramanez

$$\frac{d\vec{P}_S}{dt} = -\frac{d\vec{P}_{S'}}{dt}$$

Bostgarren gaian emaniko definizioaren arauera (ikus 5.4 puntua)

$$\frac{d\vec{P}_S}{dt} = \vec{F}_K$$

$\vec{F}_K$ delakoa S sistemaren gain S' sistemak egiten duen indar osoa da. Kanpo indar osoa deituko dugu. Baina

$$\vec{P}_S = M\vec{v}_{MZ}$$

denez gero,

$$\frac{d\vec{p}_s}{dt} = M\,\frac{d\vec{v}_{MZ}}{dt} = M\,\vec{a}_{MZ}$$

$$\vec{F}_k = M\,\vec{a}_{MZ}$$

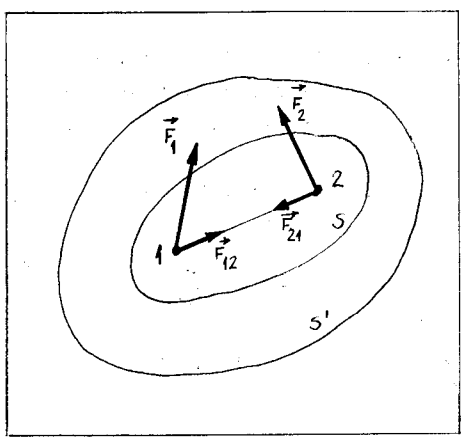
$\vec{a}_{MZ}$ masa-zentruaren azelerazioa da

$$\vec{a}_{MZ} = \frac{d\vec{v}_{MZ}}{dt}$$

Honek zera esan nahi du:

Sistema baten gainean kanpo indarrak eragiten ari diren kasuetan, sistemaren masa-zentrua, masa guztia bertan kontzentratu rik bailegoen eta indar bakarra erresultantea bailitzen higitzen da. Hau da, sistemaren masa bereko partikula bat masa-zentruan egonik eta kanpo indar erresultantearen eragin pean, sistemaren masa-zentruak duen higidura berbera edukiko luke.

Sinplifikatzeko, eta aurreko kontzeptuak adibide gisa erabiltzeko, bi partikulaz osoturiko sistema aztertuko dugu.



Bi partikula horiek (1 eta 2) kanpo barneko eragina pairatzen dute. $S + S'$ sistemen multzoa isolaturik dago.

$\vec{F}_{12}$: 2-k 1-en gainean egiten duen indarra

$\vec{F}_{21}$: 1-ek 2-ren gainean egiten duena

$\vec{F}_{12}$ eta $\vec{F}_{21}$ barne indarrak dira eta Newtonen hirugarren legea betetzen dute $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$

$\vec{F}_1$ eta $\vec{F}_2$ kanpo indarrak dira, S' sistemaren eraginez sortuak.

Kanpoko inertzi sistema batetan:

$$\frac{d\vec{p}_1}{dt} = \vec{F}_1 + \vec{F}_{12}$$

$$\frac{d\vec{p}_2}{dt} = \vec{F}_2 + \vec{F}_{21}$$

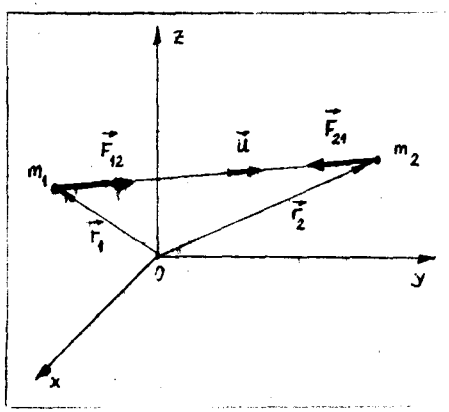
$$\frac{d\vec{P}_s}{dt} = \frac{d\vec{p}_1}{dt} + \frac{d\vec{p}_2}{dt} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = F_k$$

Ikusten denez, kanpo indar osoa, kanpo indar guztien batuketa edo erresultantea da

$$\vec{F}_k = \sum_i \vec{F}_i$$

7.3 MASA ERREDUZITUA

Demagun, orain, bi partikulaz osoturiko sistema isolatua. Barne indarrek eragiten dute soilik. Demagun indar horiek akzio-erreakzioaren legea betetzen dutela eta horretaz gainera $\vec{r}_{12}$ delakoaren direkzioa dutela



$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$$

$$\vec{F}_{12} = F_{12}\,\vec{u}$$

Inertzi sistema batetan dagoen behatzaileak zera ikusten du:

$$m_1 \frac{d\vec{v}_1}{dt} = \vec{F}_{12}$$

$$m_2 \frac{d\vec{v}_2}{dt} = \vec{F}_{21}$$

Ekuazio bien kenketa eginik

$$\frac{d\vec{v}_1}{dt} - \frac{d\vec{v}_2}{dt} = \frac{\vec{F}_{12}}{m_1} - \frac{\vec{F}_{21}}{m_2}$$

Hortik zera lortzen da:

$$\frac{d}{dt}\left(\vec{v}_1 - \vec{v}_2\right) = \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right)\vec{F}_{12}$$

Azter dezagun gehitxoago expresio hau

$$\frac{d}{dt}\left(\vec{v}_1 - \vec{v}_2\right) = \frac{d\vec{v}_{12}}{dt} = \vec{a}_{12}$$

4.1 puntuan azaldu genuen bezala, $\vec{a}_{12}$ delakoa m_1 masak m_2 masarekiko duen azelerazio erlatiboa da.

$\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} = \frac{1}{\mu}$ egiteko ohitura dago

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$

Honela sorturiko μ elementu berria, masa erreduzitua deitzen da. Erraz froga daitekeenez, masaren dimentsioa du. Ikus dezagun zein den horren esangura fisikoa.

. Goiko expresiora eramanik, hauxe geratzen da:

$$\vec{F}_{12} = \mu \vec{a}_{12}$$

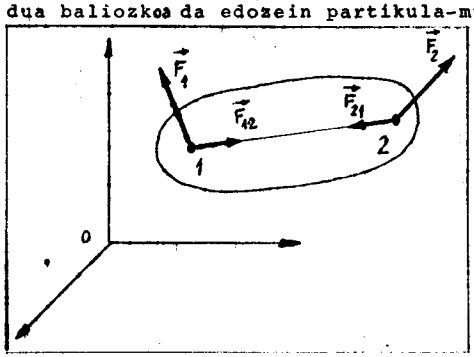
Hau da, "elkarrekiko, masa biak masa erreduzitua bailuten higitzen dira, elkarrakziozko indarraren eragin pean". Honela, bi gorputzen sistemá gorputz bakarraren sistemara erreduzitu dugu. Sistema berri honetan, behaketak, partikula batekin eta inertzi sistemaz paraleloki higitzen den sistema batetaik egiten dira; bertatik, beste partikularen higidura erlatiboa aztertzen da, beronen masa, masa erreduzitua bailitzen.

Bi gorputzen problema hau sarri ageri da Fisikan, problema korapilatsuagoren laburpen gisa. Honela hilargia-Lurra sistema modu honetan azter daiteke Lurretik. Berdinki azter daiteke eguzki inguruko sistema planetarioa edo eta hidrogenoaren atomoa (mekanika kuantikoan sartu gabe).

7.4 MOMENTU ANGULARRAREN TEOREMA

Oraingo puntu honetan, partikula-sistema baten momentu angularraren teorema aztertzera saiatuko gara.

Demagun bi partikulaz osoturiko sistema bat. Azterketa errazteko asmoz hartu dugu sistema sinple hau, baina arrazonamendua baliozkoa da edozein partikula-multzotarako.



Barne eta kanpo indarrak kontsideratuko ditugu

Barne indarrak: $\vec{F}_{12}$ eta $\vec{F}_{21}$

Kanpo indarrak: $\vec{F}_1$ eta $\vec{F}_2$

Barne indarrei dagokienez, akzio-erreakzioaren printzipioa betetzen dutela kontsideratuko dugu, hots $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$ dela; eta halaber indar hauek $\vec{r}_{12}$ bektorearen direkzioa dutela, irudian ageri den bezala.

$Oxyz$ sistema, inertziala dela kontsideratuko dugu. Sistema honen origenekiko momentuak kontsideratuz, eta partikulen momentu angularraren teorema (5.7.) kontutan hartuz:

$$\frac{d\vec{L}_1}{dt} = \vec{\tau}_1 \qquad \frac{d\vec{L}_2}{dt} = \vec{\tau}_2$$

$\left\{ \begin{array}{l} \vec{L}_1 \text{ eta } \vec{L}_2 \text{: 1 eta 2 partikulen momentu angularrak} \\ \vec{\tau}_1 \text{ eta } \vec{\tau}_2 \text{: 1 eta 2 partikuletan errespektiboki eragiten ari diren indarren momentuak} \end{array} \right.$

Bi espresioak batuz

$$\frac{d}{dt}\left(\vec{L}_1 + \vec{L}_2\right) = \vec{\tau}_1 + \vec{\tau}_2$$

Gainezarmenaren printzipioaren arauera $\vec{L}_1 + \vec{L}_2 = \vec{L}$ partikula-sistemaren momentu angular osoa da.

Ikus dezagun zenbat balio duen $(\vec{\tau}_1 + \vec{\tau}_2)$ delakoak:

$$\vec{\tau}_1 = \vec{r}_1 \times \left(\vec{F}_1 + \vec{F}_{12}\right) = \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{F}_{12}$$
$$\vec{\tau}_2 = \vec{r}_2 \times \left(\vec{F}_2 + \vec{F}_{21}\right) = \vec{r}_2 \times \vec{F}_2 + \vec{r}_2 \times \vec{F}_{21}$$

$$\vec{\tau}_1 + \vec{\tau}_2 = \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{F}_2 + \left(\vec{r}_1 - \vec{r}_2\right) \times \vec{F}_{12}.$$

Eta $\left(\vec{r}_1 - \vec{r}_2\right) \times \vec{F}_{12} = \vec{r}_{12} \times \vec{F}_{12} = 0$ zeren eta $\vec{r}_{12}$ eta $\vec{F}_{12}$ paraleloak baitira.

Beraz hauxe geratzen zaigu azkenean:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{F}_2$$

Hauxe da, hain zuzen ere, partikula-sistema baten momentu angularraren teorema:

"Partikula-sistema baten momentua angularraren aldakuntzak, kanpo indarren momentuaren dependentzia du soilik"

Matematikoki esateko, momentu angularraren denborarekiko deri batua, kanpo indarren momentuaren berdina da.

Esan bezala, teorema hau bi partikulaz osoturiko sistemaren kasurako frogatu dugu soilik. Dena den, errazki froga daiteke edozein partikula-kopuruz osoturiko sistemaren kasurako ere.

. Kanpo indarren momentu osoa nulua bada

$$\vec{\tau} = 0$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = 0$$

$$\vec{L} = \text{konstantea}$$

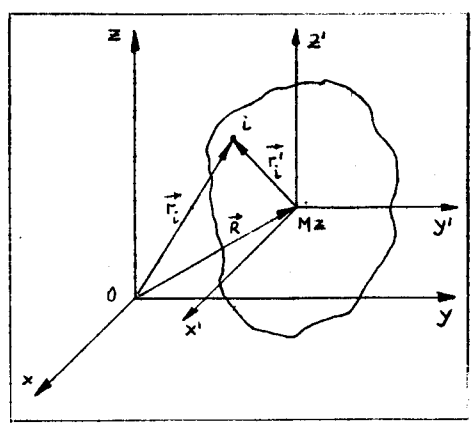
Kasu honetan, momentu angularrak konstante irauten du denborarekin.

. Momentu angularraren adierazpena, masa-zentruaren koordinatuen bidez

$Oxyz$ sistema inertziala da. Beronen origenarekiko, partikula-sistemaren momentu angularra ondokoa da:

$$\vec{L} = \sum_i \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i$$

Hemen i delakoak partikula generiko bat adierazten du.



Origena masa zentruan duen beste sistema bat kontsideratuko dugu ($O'x'y'z'$) $O' \equiv Mz$. Sistema honen ardatzak $Oxyz$ sistemaren ardatzen paraleloak dira denbora guztian.

Masa-zentruaren posizio-bektorea $\vec{R}$ deituko dugu. $Oxyz$ sistema egiten diren neurketak azentuatu gabe adieraziko ditugu, eta $O'x'y'z'$ azentuatua.

i partikula $\begin{cases} \vec{r}_i & Oxyz \text{ sisteman} \\ \vec{r}'_i & O'x'y'z' \text{ sisteman} \end{cases}$

Irudian ikusten denez:

$$\vec{r}_i = \vec{R} + \vec{r}'_i$$

Deribatuz, $O'x'y'z'$ sistemak birarik egiten ez duela kontutan hartuz:

$$\vec{v}_i = \vec{V} + \vec{v}'_i$$

$\vec{V}$ masa zentruaren abiadura da.

Momentu angularra honela azalduko da

$$\vec{L} = \sum_i \left(\vec{R} + \vec{r}'_i\right) \times m_i \left(\vec{V} + \vec{v}'_i\right)$$

Espresio hau desarroilatuz, lau eratako terminoak ageri zaizkigu:

- $\sum_i \vec{R} \times m_i \vec{V} = \vec{R} \times \left(\sum_i m_i\right) \vec{V} = \vec{R} \times M \vec{V}$
- $\sum_i \vec{R} \times m_i \vec{v}'_i = \vec{R} \times \left(\sum_i m_i \vec{v}'_i\right) = \vec{R} \times \frac{d}{dt}\left(\sum_i m_i \vec{r}'_i\right)$

  Baina $\sum_i m_i \vec{r}'_i = 0$ zeren eta origena masa zentruan duen sisteman masa zentruaren posizio bektorea nulua baita

$$\vec{r}'_{Mz} = \frac{\sum m_i \vec{r}'_i}{M} = 0 \Longrightarrow \sum_i m_i \vec{r}'_i = 0$$

- $\sum_i \vec{r}'_i \times m_i \vec{V} = \left(\sum_i m_i \vec{r}'_i\right) \times \vec{V} = 0$
- $\sum_i \vec{r}'_i \times m_i \vec{v}'_i$

Azkenean zera geratzen zaigu

$$\vec{L} = \vec{R} \times M\vec{V} + \sum_i \vec{r}'_i \times m_i \vec{v}'_i$$

Beraz, partikula-sistema baten momentu angularra masa-zentruaren koordinatuen bidez adieraztean, bi terminoz osotzen dela ikusten dugu. Lehen terminoak ($\vec{R} \times M\vec{V}$ delakoak) masa guztia masa-zentruan trinkoturik balego edukiko lukeen momentu angularra aiderazten du. Bigarren terminoak ($\sum_i \vec{r}'_i \times m_i \vec{v}'_i$ delakoak) masa-zentruarekin doan sistemaren origenarekiko -masa-zentruarekiko halegia- duen momentu angularra adierazten du.

7.5 SISTEMA BATEN ENERGIA KINETIKO ETA POTENTZIALA

Lehen pauso gisa, definitu eginen dugu energia kinetikoa, eta masa-zentruaren koordinatuen bidez adieraztera saiatuko gara.

Definizioz, sistemaren energia kinetikoa, sistemako partikulen energia kinetikoen batuketa da

$$E_K = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2$$

Ipin dezagun hau masa-zentruaren koordinatuen bidez. Aurreko puntuan ikusi dugunez:

$$\vec{v}_i = \vec{V} + \vec{v}'_i$$

$$v_i^2 = \vec{v}_i \cdot \vec{v}_i = \left(\vec{V} + \vec{v}'_i\right) \cdot \left(\vec{V} + \vec{v}'_i\right)$$

Beraz:

$$E_K = \sum_i \frac{1}{2} m_i \left(\vec{V} + \vec{v}'_i\right) \cdot \left(\vec{V} + \vec{v}'_i\right)$$

Hau desarroilaturik ondoko terminoak geratzen zaikigu:

$$\cdot \sum_i \frac{1}{2} m_i V^2 = \frac{1}{2} V^2 \left(\sum_i m_i\right) = \frac{1}{2} M V^2$$

$$\cdot \sum_i m_i \vec{V} \cdot \vec{v}'_i = \vec{V} \cdot \left(\sum m_i \vec{v}'_i\right) = \vec{V} \cdot \frac{d}{dt}\left(\sum_i m_i \vec{r}'_i\right) = 0$$

$$\cdot \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i'^2$$

Azkenean hauxe geratzen zaigu:

$$E_k = \frac{1}{2} MV^2 + \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i'^2$$

Hots, partikula-sistema baten energia kinetikoa bi terminoren batuketaz adierazten da. Lehenak, masa guztia masa-zentruan trinkoturik edukiko lukeen energia kinetikoa adierazten du, eta bigarrenak, sistemak masa-zentruaren inguruko higiduran duen energia kinetikoa.

Energia kinetikoaren adierazpena ezagutu ondoren, indarrek egiten duten lanaren eta sistemaren energia kinetikoaren artean dagoen erlazioa aztertuko dugu.

Azalpenak errazteko, bi partikulaz osoturiko sistema aztertuko dugu.

(ikus hurrengo horrialdeko irudia)

. t_A aldiunean sistema A egoeran dago

$$\begin{cases} \vec{F}_{12} \text{ eta } \vec{F}_{21} \text{ barne indarrak dira} \\ \qquad \vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21} \\ \vec{F}_1 \text{ eta } \vec{F}_2 \text{ kanpo indarrak dira} \end{cases}$$

1 eta 2 partikulak higitzen ari dira

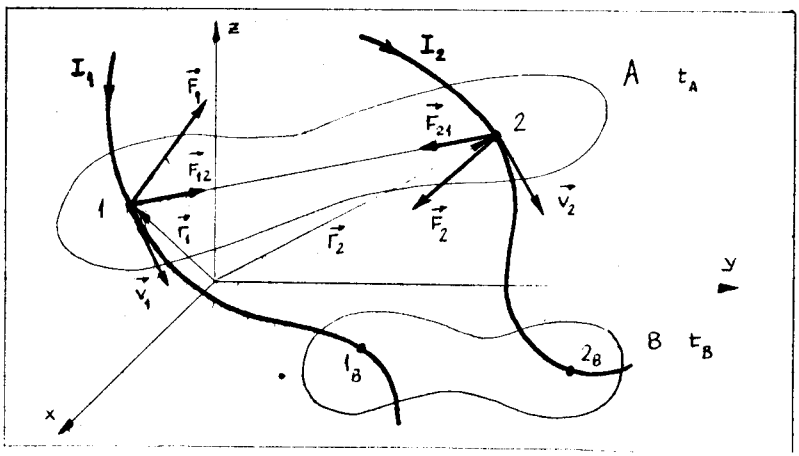
. t_B aldiunean sistema B egoeran dago, partikulak 1_B eta 2_B puntuetan daudela

I_1 eta I_2 bi partikulen ibilbideak dira.

$Oxyz$, sistema inertziala da.

Aurreko gai batetik dakigunez (ikus 6.2) honela adierazten da indarrek egiten duten lana

$$W = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r}$$


z
I_1
I_2
$\vec{F}_1$
$\vec{F}_{21}$
A t_A
2
$\vec{F}_{12}$
1
$\vec{v}_2$
$\vec{r}_1$
$\vec{r}_2$
$\vec{F}_2$
y
$\vec{v}_1$
1_B
2_B
B t_B
x

Beraz, sistema honetan indar guztiek egiten duten lana hauxe izanen da:

1 partikulan: $\int_A^B \left(\vec{F}_1 + \vec{F}_{12}\right) \cdot d\vec{r}_1$ (I_1 ibilbidean integraturik)

2 partikulan: $\int_A^B \left(\vec{F}_2 + \vec{F}_{21}\right) \cdot d\vec{r}_2$ (I_2 ibilbidean integraturik)

Termino hauk honela bil ditzakegu

$$\int_A^B \vec{F}_1 \cdot d\vec{r}_1 + \int_A^B \vec{F}_2 \cdot d\vec{r}_2 = W_{ext}$$

Hau kanpo indarrek egiten duten lana da.

Bestetik:

$$\int_A^B \vec{F}_{12} \cdot d\vec{r}_1 + \int_A^B \vec{F}_{21} \cdot d\vec{r}_2 = \int_A^B \vec{F}_{12} \cdot d\vec{r}_1 - \int_A^B \vec{F}_{12} \cdot d\vec{r}_2 =$$

$$= \int_A^B \vec{F}_{12} \cdot \left(d\vec{r}_1 - d\vec{r}_2\right) = \int_A^B \vec{F}_{12} \cdot d\vec{r}_{12} = W_{int}$$

Hau barne indarrek egiten duten lana da. Beraz, lan osoa kanpo indarrek eta barne indarrek egiten duten lanen batuketa izanen da

$$W = W_{ext} + W_{int}$$

Baina zertarako erabiltzen da lan hau? Hara! Kontsidera dezagun Newtonen bigarren legea, bi partikula horien kasurako.

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_{12} = m_1 \vec{a}_1$$

$$\vec{F}_2 + \vec{F}_{21} = m_2 \vec{a}_2$$

$$\int_A^B \left(\vec{F}_1 + \vec{F}_{12}\right) \cdot d\vec{r}_1 + \left(\vec{F}_2 + \vec{F}_{21}\right) \cdot d\vec{r}_2 = W_{ext} + W_{int} = \int_A^B m_1 \vec{a}_1 \cdot d\vec{r}_1 + m_2 \vec{a}_2 \cdot d\vec{r}_2$$

Kalkula dezagun azken terminoen balioa

$$\underset{(I_1)}{\int_A^B m_1 \vec{a}_1 \cdot d\vec{r}_1} + \underset{(I_2)}{\int_A^B m_2 \vec{a}_2 \cdot d\vec{r}_2} =$$

$$= \int_A^B m_1 \frac{d\vec{v}_1}{dt} \cdot \vec{v}_1 \, dt + \int_A^B m_2 \frac{d\vec{v}_2}{dt} \cdot \vec{v}_2 \, dt =$$

$$= \int_A^B m_1 \frac{1}{2} d\left(v_1^2\right) + \int_A^B \frac{1}{2} m_2 \, d\left(v_2^2\right) =$$

$$= \left[\frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 \right]_A^B = E_{k,B} - E_{k,A}$$

Hau da, energia kinetikoaren inkrementua adierazten da. Denetara hauxe geratzen zaigu

$$W_{ext} + W_{int} = E_{k,B} - E_{k,A}$$

Hots, barne eta kanpo indarren artean egiten duten lana, sistemaren energia kinetikoa gehitzean erabiltzen da.

Esandakoak edozein indar moetaren kasurako balio du, kontserbakorrak izan zein izan ez.

Energia propioa. Demagun barne indarrak kontserbakorrak direla. Kasu honetan barne indarrek egiten duten lana funtzio potentzial baten bidez adierazi ahal izanen dira.

$$W_{int} = \int_A^B \vec{F}_{12} \cdot d\vec{r}_{12} = E_{p,12,A} - E_{p,12,B}$$

Eta aurreko adierazpenera eramanik

$$\left(E_K + E_{p,12}\right)_B - \left(E_K + E_{p,12}\right)_A = W_{ext}$$

$(E_{p,12} + E_k)$ kantitatea energia propioa deitzen da eta U letraz adierazten

Ikusten denez, barne indarrak kontserbakorrak direnean definitzen da energia propioa. Bestalde, kasu honetan

$$W_{ext} = U_B - U_A = \Delta U$$

hots, kanpo indarrek egiten duten lana energia propioa gehitzeko erabiltzen da.

Partikulen-sistema isolaturik badago:

$$W_{ext} = 0$$

$$U_B - U_A = 0$$

$$U_B = U_A = K^{te}$$

Hau da, sistema isolatuen kasuan, energia propioak konstante irauten du,

Energia propioarekin bukatzeko, ohar bat eginen dugu. Orain arte, bi partikularen kasuan hitz egiten ari gara. Dena den, edozein partikula-kopururen kasurako ere defini daiteke energia propioa, barne indarrak kontserbakorrak badira. Honela:

$$U = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} m_i v_i^2 + \sum_{i \neq j} E_{p,ij}$$

Bigarren batuketan konbinazio guztiak adierazi nahi dira, hau da, partikula-bikote guztiak.

. Energia mekaniko osoa. Demagun orain, kanpo indarrak ere kontserbakorrak direla

$$W_{ext} = E_{p,ext,A} - E_{p,ext,B}$$

Eta aurreko puntuko adierazpenera eramanez

$$W_{ext} = U_B - U_A$$

$$\left(U + E_{p,ext}\right)_A = \left(U + E_{p,ext}\right)_B$$

Honela, denborarekin konstante irauten duen magnitude berri bat sortu da

$$E = U + E_{p,ext} = E_K + E_{p,int} + E_{p,ext}$$

Magnitude berri hau sistemaren energia osoa deitzen da. Ikusi dugun legez, indar guztiak (barnekoak eta kanpokoak) kontserbakorrak direnean, partikula-sistemaren energia osoak konstante irauten du. Hauxe, energiaren kontserbapenaren teoremaren generalpena da.

7.6 TXOKEAK

Hizkuntza arruntean txoke hitzak esangura nahiko konkretua du: Bi gorputz desberdin higitzen ari dira erlatiboki eta une batetan elkar jo egiten dute; kolpe ondoren deformatuak ager daitezke edo ez, baina hasieran zutèn higidur egoera aldaturik geratzen da.

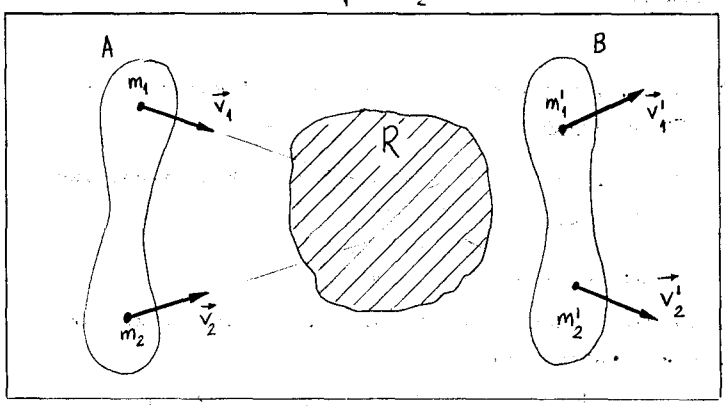
Fisikan ere horrelako zerbait adierazi nahi da. Dena den, ez da zertan gertatu behar "kontaktu fisikoa". Izatez mikroskopikoki hitz horrek ez baitu zentzurik. Edozein modutan, bi gorputz edo partikula higitzen ari dira eta espazioalde batetan bien arteko elkarrakzioa gertatzen da. Elkarrakzioaren kausaz, aldatu egin daitezke partikulak berak ere (berau hala beharrezko izan ez arren) eta edonola ere, partikulen higidura aldatu egiten da. Kasu honetan txoke bat gertatu dela esaten da.

Txoke aurretik eta ondotik dauden partikulak berberak direnean, dispertsio izena ematen zaio txokeari.

Txoken azterketa oso garrantzizkoa da Fisikan. Hainbat gertakari txoke gisa azter daitezke, hauen artean Fisika Atomikoaren arlokoak nagusi direlarik. Hor ditugu partikula elementalekin egiten diren esperimentu gehienak; izan ere oinharrizko partikula gehienak txokeen bidez lortu eta aztertu izan dira.

Laborate . txoke gisa muntatzen diren esperimentuetan, ikertzaileek aldez aurretik ezagutzen dituzte txoka aurreko baldintzak -zeintzu partikula diren eta zein abiaduraz higitzen diren- zeren eta berek nahi duten moduan prestatzen baitute txokea. Esperimentua egitean, txoke ondoko partikulak identifikatu behar izaten dituzte, berauen magnitude dinamikoak neurtuz eta problemaren azterketa mekanikoa eginez.

Goazen, ba, txokeen azterketa fisikoa egitera. Demagun, txoke aurretik m_1 eta m_2 partikulak $\vec{v}_1$ eta $\vec{v}_2$ abiadurez higitzen ari direla. R eremualdean bien arteko interakzioa gertatzen da; eta gero m'_1 eta m'_2 partikulak ageri dira -lehengo berberak izan daitezke edo ez- $\vec{v}'_1$ eta $\vec{v}'_2$ abiadurez (ikus irudia).



Demagun, txokatzen duten partikulek sistema isolatua osotzen dutela. Barne indarrik baino ez dago. A, partikula-sistema txoke aurrean da. B, txoke ondoan.

Sistema isolaturik egonik, momentu linealaren kontserbapenaren printzipioa betetzen da

$$m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = m'_1 \vec{v}'_1 + m'_2 \vec{v}'_2$$

Modu berean $W_{ext} = 0$, isolaturik baitago. Beraz

$$W_{int} = E_{K,B} - E_{K,A}$$

Liburu batzutan barneko indarrek egiten duten indar hori Q letraz adierazten da. Q magnitude berri honen arauera, ondoko eran sailkatzen txokeak

. $Q=0$ denean $\qquad E_{k,B} - E_{k,A} = 0$

$$E_{k,B} = E_{k,A}$$

Hau da, txokean kontserbatu egiten da sistemaren energia kinetikoa. Txokea <u>elastikoa</u> izan dela esaten da.

. $Q \neq 0$ denean, $\qquad E_{k,B} \neq E_{k,A}$

Txokea <u>inelastikoa</u> dela esaten da. Bi eratako txoke inelastikoak daude

$Q<0$ denean, galdu egiten da energia kinetikoa txokean. Txokea <u>endoergikoa</u> dela esaten da,

$Q>0$ denean, irabazi egiten da energia kinetikoa. Txoke <u>exoergikoa</u> deitzen da.

Bukatzeko, zenbait ohar eginen ditugu:

a) Sistema isolatua bada, etabarne indarrak kontserbakorrak badira, zera geratzen zaigu

$$E_{k,B} - E_{k,A} = W_{int} = E_{p,int,B} - E_{p,int,A}$$

$$\left(E_k + E_{p,int}\right)_A = \left(E_k + E_{p,int}\right)_B$$

$$U_A = U_B$$

Hau da, kasu honetan, kontserbatu egiten da energia propioa

b) Puntu honetan egin dugun azterketan, laborategiko sistema erabili dugu behatze-sistema gisa, $\mathcal{L}$ sistema halegia. Dena den, berdin egin liteke, masa zentruaren sistema erabiliz ($\mathcal{C}$ delakoa, halegia).

8. GAIA - SOLIDO ZURRUNA

8.1 LOTUR BALDINTZAK. SISTEMA BATEN ASKATASUN-GRADUAK

8.2 EULER-EN ANGULUAK

8.3 SOLIDO ZURRUN BATEN ABIADUR EREMUA. TRANSALDATZE ETA BIRA HUTSAK

8.4 SOLIDOAREN MOMENTU ANGULARRA. INERTZI TENTSOREA

8.5 INERTZIAKO ARDATZ ETA MOMENTU NAGUSIAK

8.6 INERTZI ELIPSOIDEA

8.7 INERTZI MOMENTUEN KALKULUA

- POINSOT-EN FORMULA
- STEINER-EN FORMULA
- INERTZIAKO MOMENTU POLARRA

Aurreko gaian partikula-sistemen dinamika aztertu dugu, edozein sistema moetari buruzko magnitudeak aztertu ditugu. Orain go gai honetan sistema konkretu bat aztertuko dugu: solido zurruna. Geroago zehazki definituko badugu ere, diogun ezen solido zurruna bere forma kontserbatzen duen partikula sistema dela. Ikusiko dugunez, sistema berezi honen azterketan teknika bereziak erabiltzen dira, eta kalkuluak bideratzeko, magnitude bereziak definitzen dira, hala nola inertzi momentua. Solido zurrunari buruzko lehen gai honetan, magnitude berri horien prestaketan arituko gara, gero bigarren gai batetan solido zurrunaren dinamika aztertzeko.

8.1 LOTUR BALDINTZAK. SISTEMA BATEN ASKATASUN-GRADUAK, SOLIDO ZURRUNA

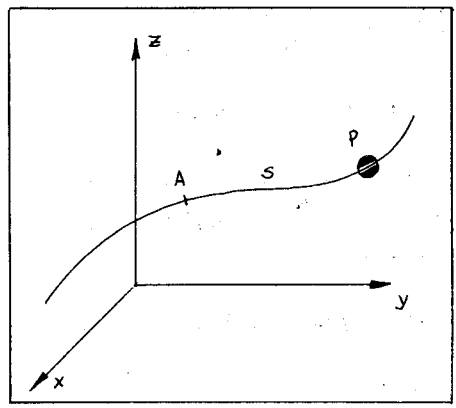
Sistema baten egoera adierazteko behar diren aldakari askatuak, sistema horren askatasun-graduak deitzen dira. Honela, sistema partikula bakar batez osoturik badago, 3 askatasun gradu dituela esanen dugu: partikularen hiru koordinatu cartestarrak hain zuzen ere.

Baina demagun, partikula horren higidurari mugaren bat jartzen diogula. Kasu horretan 3 koordinatuak ezin daitezke edonolakoak izan; beren artean erlazio konkretu bat ageri da. Koordinatuen artean lotura bat jarri dugula esanen dugu. Lotura, ba, higidurari jartzen zaion muga edo baldintza bat da, eta horregatik lotur baldintzen bidez adierazten da.

Adibide baten bidez, hobeki ulertuko dugu arazoa.

Demagun partikula bat dugula, eta partikula hori ibilbide konkretu batekin higitzera behartzen dugula. Ideia hau materialtzeko, burdin hari batetan zehar higitzen den bola zulatu bat kontsidera dezakegu.

Berez, partikulak hiru askatasun-gradu ditu: x, y, z Baina kasu honetan ezin daiteke edozein modutan higi: Burdinhariak mugatu egiten du partikularen higidura. Horixe da, hain zuzen ere, partikulak duen lotura.



Lotura hau, matematikoki, burdinhariak formatzen duen kurbaren ekuazioen bidez adierazten da. Dagikunez, kurba bat bi ekuazioren bidez adierazten da espazioan

$$\begin{cases} f_1(x, y, z) = 0 \\ f_2(x, y, z) = 0 \end{cases}$$

Ekuazio hauk, x, y eta z koordinatuek bete behar dituzten lotur baldintzak dira. Halaber, burdinhariak partikularen gain egiten duen indarra, lotur indarra deitzen da.

Lotur baldintzen bidez ikus daitekeenez, x, y eta z ez dira jadanik askatu edo independienteak, beren artean bi lotur baldintza baitaude. Beraz, jadanik askatasun-graduak ez dira 3 izanen, 1 baizik (3-2 = 1). Prezeski, honela adierazten dira partikula batek dituen askatasun-graduak:

Askatasun-graduen kopurua = 3 - lotur baldintzen kopurua.

Guk ipini dugun adibidean, argi dago ezen partikulak askatasun-gradu bakarra duela, zeren puntu fixo batekiko (A) burdinharian zehar dagoen distantzia ($\widehat{AP} = s$) emanez gero, guztiz definiturik geratzen baita partikularen posizioa.

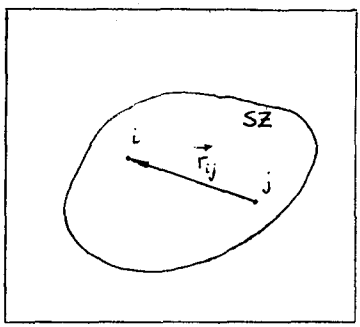
Demagun orain, n partikulaz osoturiko sistema bat. Loturarik gabe, $3n$ askatasun-gradu ditu. Sistema honek m lotur baldintza baditu, askatasun-graduen kopurua ondokoa izanen da.

Askatasun-graduen kopurua = $3n - m$

Zer esanik ez, $m < 3n$ izan behar da.

$m = 3n$ bada, ez du higitzeko posibilitaterik eta sistema osoa eta partikula bakoitza geldi egotera beharturik daude.

. Solido zurruna. Askatasun-graduak eta loturak zer diren azaldu ondoren, goazen orain solido zurruna definitzera. Zer da solido zurruna?



Solido zurruna n partikulaz (kontaezinak) osoturiko sistema bat da, edozein bi partikularen arteko distantziak konstante irauten duelarik. Hots:

$$|\vec{r}_i - \vec{r}_j| = |\vec{r}_{ij}| = k_{ij} = k^{te}$$

Naturan ez dago erabat zurrun den gorputzik, baina lehen hurbilketa batetan, solido deformagaitzak solido zurruntzat har ditzakegu.

Zenbat askatasun-gradu dituzte solido zurrunek?

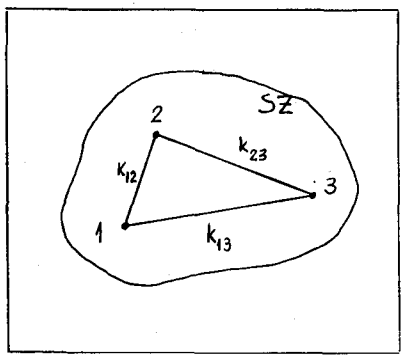
Harai Batetik, n partikula izanik, $3n$ askatasun-gradu ditugu. Baina $|\vec{r}_{ij}| = k_{ij}$ erako lotur baldintzak ditugu tartean, eta hauk

$$\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2} \qquad \text{dira}$$

Baina $\frac{n(n-1)}{2} \gg 3n$ n handia bada

Nola izan daiteke hori?

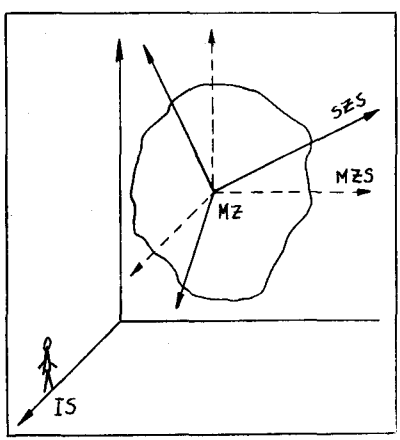
Arrazoia oso sinplea da. $|\vec{r}_{ij}| = K_{ij}$ baldintzak ez dira denak independienteak. Solido zurrun baten posizioa determinatzeko, nahikoa da hiru puntu ez alineatu determinatzea, zeren eta lotur baldintzak kontutan edukirik, beste edozein puntu automatikoki determina baitaiteke hiru puntu horien funtzioan.



Hiru puntuok 3.3 = 9 askatasun-gradu dituzte, baina solido zurrun batetakoak izanik ondoko hiru lotur baldintzak daude

$$|\vec{r}_{12}| = k_{12}$$
$$|\vec{r}_{13}| = k_{13}$$
$$|\vec{r}_{23}| = K_{23}$$

Beraz, denetara, 9 - 3 = 6 askatasun-gradu geratzen zaizkigu. Hots, solido zurrun libreak 6 askatasun-gradu ditu.



Gehienetan, honela aukeratzen dira 6 askatasun-graduok:

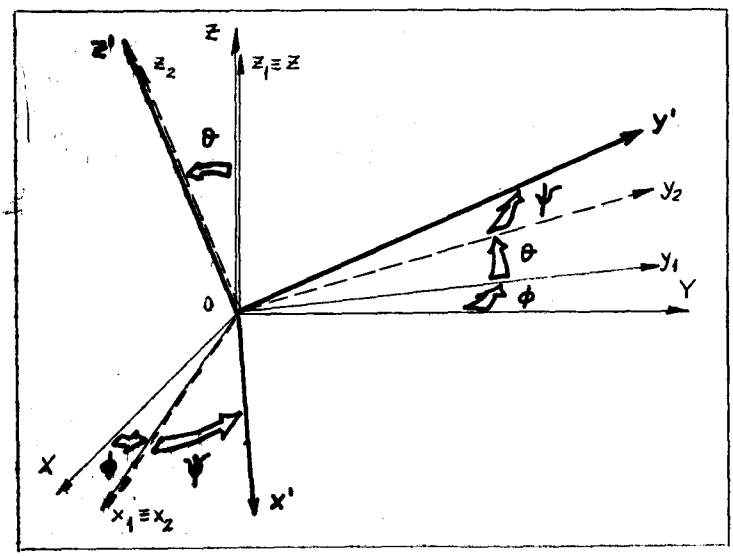
3 : masa-zentruaren koordinatu cartestarrak

3 : masa-zentruarekin eta inertzi sistemarekiko (MZS) paraleloki higitzen den sistemarekiko, solido zurrunarekin doan sistemak (SZS delakoak) duen orientazioa adierazteko (normalki, hurrengo galderan ikusiko ditugun Euler-en anguluak dira).

8.2 EULER-EN ANGULUAK

Solidoaren erreferentzi sistemaren orientazioa adierazteko erabiltzen dira. Solido zurrunaren sistema (SZS), solido zurrunean finkaturik dagoen sistema da. Beraren origena masa-zentruan dago, eta masa-zentruaren sistemarekiko definitzen da, hots MZS-rekiko. Hiru dira orientazioa adierazten duten askatasun-graduak. Eta hiru magnitude independiente definitu behar dira. Hiru magnitudeak modu desberdinez aukera daitezke, baina normalena Euler-en anguluak aukeratzea da.

Honela definitzen dira Euler-en anguluak:



Irudian, $0xyz$ sistemak MZS adierazten du, eta $0x'y'z'$ sistemak, SZS

$0x'y'z'$ sistemaren orientazioa, hiru angulu independienteren bidez adierazten da. Ikus dezagun, ba, nola hiru bira elkarren ondoan eginik, $0xyz$ sistematik $0x'y'z'$ sistemara pasatzen den.

1) Oz ardatzaren inguruan, ϕ balioko bira . Bira honen bidez, $OxYZ$ sistematik $Ox_1y_1z_1$ sistemara pasatzen da.

2) Ox_1 ardatzaren inguruan, θ balioko bira. Bira honen bidez, $Ox_1y_1z_1$ sistematik $Ox_2y_2z_2$ sistemara pasatzen da.

3) Oz_2 ardatzaren inguruan, ψ balioko bira. Bira honen bidez, $Ox_2y_2z_2$ sistematik $Ox'y'z'$ sistemara pasatzen da.

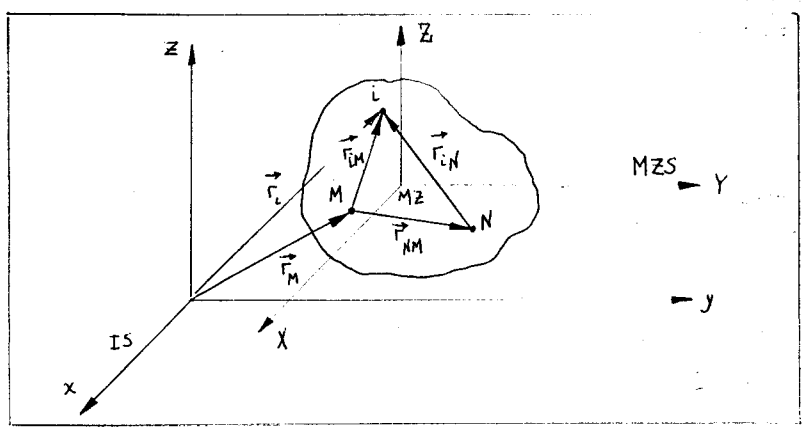
$$Oxyz \xrightarrow[(z)]{\phi} Ox_1y_1z_1 \xrightarrow[(x_1)]{\theta} Ox_2y_2z_2 \xrightarrow[(z_2)]{\psi} Ox'y'z'$$

ϕ , θ eta ψ anguluak Euler-en anguluak dira. Ondoko izenak hartzen dituzte:

ϕ : Prezesio angulua
θ : Nutazio angulua
ψ : Bira propioaren angulua

8.3 SOLIDO ZURRUNAREN ABIADUREN EREMUA. TRANSALDATZEN ETA BIRA HUTSAK

Solido zurrunaren puntuen abiadura eta abiadura hauen arteko erlazioak aztertuko ditugu



Kontsidera ditzagun i eta M puntuak. Irudian ikusten den bezala:

$$\vec{r}_i = \vec{r}_M + \vec{r}_{iM}$$

Denborarekiko deribatuz:

$$\frac{d\vec{r}_i}{dt} = \frac{d\vec{r}_M}{dt} + \frac{d\vec{r}_{iM}}{dt}$$

Baina

$$\frac{d\vec{r}_i}{dt} = \vec{v}_i \qquad eta \qquad \frac{d\vec{r}_M}{dt} = \vec{v}_M$$

Abiadura hauk inertzi sistemarekikoak dira noski.

Bestalde, solido zurrunaren puntuak izanik, $|\vec{r}_{iM}| = K^{te}$; eta 4,3 puntuan ikusi genuenez

$$\frac{d\vec{r}_{iM}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{r}_{iM}$$

Hemen $\vec{\omega}$, $\vec{r}_{iM}$ bektoreak pairatzen duen bira adierazten duen abiadura angularra da.

Denetara hauxe geratzen zaigu:

$$\vec{v}_i = \vec{v}_M + \vec{\omega} \times \vec{r}_{iM} \qquad [1]$$

Arrazonamendu berdinari jarraituz, i eta N puntuen abiadurak erlaziona ditzakegu

$$\vec{v}_i = \vec{v}_N + \vec{\omega}' \times \vec{r}_{iN} \qquad [2]$$

Hemengo formula honetan $\vec{\omega}'$ jarri dugu, ez baitakigu lehengo $\vec{\omega}$ berbera ote den. Dena den, orain $\vec{\omega}' = \vec{\omega}$ dela frogatuko dugu:

$$\vec{r}_{iM} = \vec{r}_{NM} + \vec{r}_{iN} \qquad [3]$$

Hemen [1] formulako $\vec{r}_{iM}$, [3] -ko baloreaz substituituz:

$$\vec{v}_i = \vec{v}_M + \vec{\omega} \times \left(\vec{r}_{NM} + \vec{r}_{iN}\right)$$

$$\vec{v}_i = \underbrace{\vec{v}_M + \vec{\omega} \times \vec{r}_{NM}}_{\vec{v}_N} + \vec{\omega} \times \vec{r}_{iN}$$

Beraz, zera geratzen zaigu:

$$\vec{v}_i = \vec{v}_N + \vec{\omega} \times \vec{r}_{iN} \qquad [4]$$

Eta [2] eta [4] expresioak konparatuz eta i eta N edozein bi puntu direla kontutan hartuz, $\vec{\omega}$ -keta $\vec{\omega}'$-k berdinak izan behar dutela ikusten dugu

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}'$$

Zer esan nahi du honek? Hitz arruntez esanik, solido zurruneko edozein puntutan abiadura angular berbera dagoela, hau da, solido zurruna multzo bat bezala $\vec{\omega}$ abiadura angularraz higitzen dela eta solido zurruna osotzen duten puntu guztiek parte hartzen dutela bira-higidura horretan.

Honela,ba, i puntuaren abiadura masa-zentruaren abiaduraren funtzioan adierazi nahi badugu, modu honetan eginen dugu

$$\vec{v}_i = \vec{v}_{MZ} + \vec{\omega} \times \vec{r}_{iZ} = \vec{v}_{MZ} + \vec{\omega} \times \vec{r}'_i$$

Hemen $\vec{r}'_i$, i puntuak MZS sisteman duen posizio-bektorea da, noski. Eta

$$\vec{r}_{iZ} = \vec{r}_i - \vec{r}_{MZ}$$

. Konpara dezagun orain abiaduraren adierazpen hau kurtsore-sistemak aztertzean (ikus 2.4 puntua) lortzen genuenarekin

SOLIDO ZURRUNAREN ABIADURAREN EREMUA	KURTSOREEN SISTEMAK
$\vec{v}_i = \vec{v}_{MZ} + \vec{\omega} \times \vec{r}_{iZ}$	$\vec{\tau}_{O'} = \vec{\tau}_O + \overrightarrow{O'O} \times \vec{R}$ $= \vec{\tau}_O + \vec{R} \times \overrightarrow{OO'}$

Konpara ditzagun bi expresio hauk. Ikusiko dugunez funtzio berbera betetzen duten bi adierazpen analogo dira. Letra desberdinez, baina gauza berbera direla ikusiko dugu.

i eta MŻ bi puntu dira	$0'$ eta 0 bi puntu dira
$\vec{\omega}$: solido zurruneko edozein puntutan balio berbera duen bektore bat da	$\vec{R}$: espazioko inbariantea Puntu guztietan balio berbera du
$\vec{v}_i$ delakoa $\vec{v}_{MŻ}$ delakoaren funtzioan adierazten da	$\vec{\tau}'_o$ delakoa $\vec{\tau}_o$ delakoaren funtzioan adierazten da

Analogia honetan ondoko korrespondentziak daude

abiadura lineala	$\vec{v}$	$\vec{\tau}$	momentua
abiadura angularra	$\vec{\omega}$	$\vec{R}$	erresultantea
	$\vec{r}_{iz}$	$\vec{00'}$	

Beraz, kurtsoreen sistemak aztertzean ikusi genituèn propietate eta ondorio guztiak aplikatu egin ahal ukanen ditugu solido zurrunaren abiaduren eremuaren kasuan ere:

$\Longleftarrow$

inbariante bektoriala: $\vec{\omega}$	$\vec{R}$:inbariante bektoriala
inbariante eskalarra: $\vec{\omega}\cdot\vec{v}$	$\vec{\tau}\cdot\vec{R}$:inbariante eskalarra
$\vec{v}$ eta $\vec{\omega}$ paraleloak diren puntuetan, abiadura lineala miminoa izanen da. Puntu horiek $\vec{\omega}$-ren direkzioa duen zuzen batetan daude. Nolabait sistemaren <u>ardatz zentrala da</u>.	$\vec{\tau}$ eta $\vec{R}$ paraleloak diren puntuetan, momentua minimoa izanen da. Puntu horiek $\vec{R}$-ren direkzioa duen zuzen batetan daude, eta zuzen hori <u>ardatz zentrala</u> deitzen da.
Sistema honen "momentu minimoa", <u>labantze-abiadura</u> deitzen da: v_d	m : momentu minimoa

Solido zurrunaren abiaduren eremuan agertzen den ardatz zentrala bira eta labantzearen ardatz instantaneoa deitzen da. Zergatik? Ardatz horretako puntuek $\vec{\omega}$ eta $\vec{v}_d$ dute, denek berdin; hau da, solidoak ardatz horrekiko bira bat ($\vec{\omega}$) du eta denbora berean ardatz horren direkzioan transaldatzen ari da ($\vec{v}_d$). Nolabait bira-ardatzaren direkzioan labantze bat gertatzen ari dela esan dezakegu.

Modu berean, aurreko expresioetan ikusten denez, solido zurrunaren higidura edozein puntutara (i) erreduzi daiteke, bira baten ($\vec{\omega}$) eta abiadura lineal baten ($\vec{v}_i$) konposaketa bezala. Zer esanik ez, erredukzioa egiteko hartzen den puntua , masa-zentrua izan daiteke eta normalki horixe egiten da. Baina beste edozein puntu ere har daiteke, nahi edo komeni izanez gero.

Azter ditzagun zenbait kasu berezi:

. $\vec{\omega} = 0$

Kasu honetan $\vec{v}_i = \vec{v}_{M\bar{z}}$

Puntu guztiek abiadura lineal berbera dute, eta gainera abiadura angularra 0 da edonon. Ez dago, beraz, birarik. Higidura hau transaldatze hutsezko higidura da.

Demagun orain, puntu baten abiadura nulua dela denbora guztian (bestela esateko, puntu hori finko dagoela esan nahi dugu, geldi dagoela).

Kasu honetan $v_d = 0$ zeren eta gutienez puntu horretan $\vec{v} = 0$ baita.

Beraz bira eta labantzearen ardatz instantaneoa puntu horretatik pasatzen da. Eta labantze-abiadura zero denez, ardatz zentralean ez dago labantzerik eta solido zurruna bira hutsez higitzen da, puntu finkotik pasatzen den ardatz baten inguruan.

. Higidura launa. Puntu bakoitzaren higidura laun batetan gertatzen da. Puntu desberdinak, laun paralelotan higitzen dira. Beraz abiadura guztiak π launaren paraleloa den direkzio batetan daude, eta abiadura angularrak laun horren perpendikularra izan behar du

$$\vec{\omega} \perp \pi$$

Beraz

$$\vec{\omega} \perp \vec{v}$$

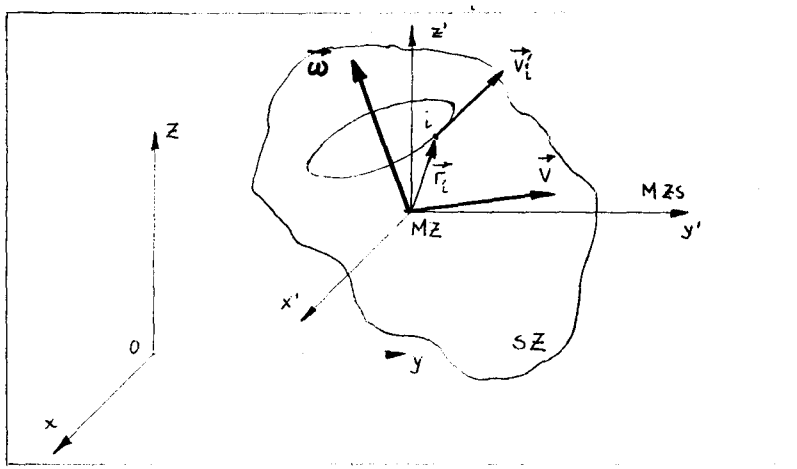
$$\vec{\omega} \cdot \vec{v} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \vec{v}_d = 0$$

Hau da, labantze-abiadura nulua da. Aldiune bakoitzean bira-ardatz bat dago. Eta bira ardatz honek $\vec{\omega}$ delakoaren direkzioa duenez, launaren perpendikularra da. Sistemaren higidura definitzeko, laun bat hartzen badugu, bira ardatzak puntu batetan ebakiko du launa aldiune bakoitzean. Puntu hori birako zentru instantaneoa deitzen da.

8.4 SOLIDOAREN MOMENTU ANGULARRA. INERTZI TENTSOREA

Aurreko gaian ikusi dugunez (ikus 7.4.), partikula-sistema baten momentu angularra modu honetan kalkula daiteke, sistemaren masa zentrua kontutan harturik.

$$\vec{L}_o = \vec{R} \times M\vec{V} + \sum_i \vec{r}_i' \times m_i \vec{v}_i'$$



Bestalde, aurreko puntuan ikusi dugunez (8.3), kurtsoreen sistemen analogiaz, edozein puntutara erreduzi dezakegu solido zurrunaren higidura. Puntu hori masa-zentrua izan daiteke. Masa-zentruak (MZ) $\vec{V}$ abiadura lineala du, eta beraren inguruan solido zurruna $\vec{\omega}$ abiadura angularraz higitzen ari da. Beraz, 0 puntuarekiko momentu angularra kalkulatzeko, lehen terminoa ($\vec{R} \times M\vec{V}$) oso erraz lortzen da. Bigarren terminoa ($\sum_i \vec{r}'_i \times m_i \vec{v}'_i$) zailagoa da kalkulatzeko.

Dena den, orain bigarren termino hori solidoaren abiadura angularraren funtzioan kalkulatzera saiatuko gara. Termino hau MZS sistemaren origenekiko (masa zentruarekiko) momentu angularra da eta $\vec{L}'$ deituko dugu

$$\vec{L}' = \sum_i \vec{r}'_i \times m_i \vec{v}'_i$$

Esan dugunez, masa zentruaren inguruan solidoak $\vec{\omega}$ abiadura angularra du. Beraz:

$$\vec{v}'_i = \vec{\omega} \times \vec{r}'_i$$

$$\vec{L}' = \sum_i \vec{r}'_i \times m_i \left(\vec{\omega} \times \vec{r}'_i\right) = \sum_i m_i \vec{r}'_i \times \left(\vec{\omega} \times \vec{r}'_i\right)$$

Biderkaketa bektorial bikoitzak honela egin daitezke:

$$\vec{A} \times \left(\vec{B} \times \vec{C}\right) = \vec{B}\left(\vec{A} \cdot \vec{C}\right) - \vec{C}\left(\vec{A} \cdot \vec{B}\right)$$

Honelatan, ba:

$$\vec{r}'_i \times \left(\vec{\omega} \times \vec{r}'_i\right) = \vec{\omega}\left(\vec{r}'_i \cdot \vec{r}'_i\right) - \vec{r}'_i\left(\vec{\omega} \cdot \vec{r}'_i\right) =$$

$$= r'^2_i \vec{\omega} - \left(\vec{\omega} \cdot \vec{r}'_i\right) \vec{r}'_i$$

Eta L'-ren adierazpenean sartuz:

$$\vec{L}' = \sum_i m_i \left[r'^2_i \vec{\omega} - \left(\vec{\omega} \cdot \vec{r}'_i\right) \vec{r}'_i \right]$$

Bektore honek $0'x'$, $0'y'$ eta $0'z'$ ardatzen direkzioetan (hots, $0x$, $0y$ eta $0z$ delakoenetan) dituen konposatuak, ondoko hauxek dira:

$$\begin{cases} L'_x = \omega_x \sum_i m_i \left(r'^2_i - x'^2_i\right) - \omega_y \sum_i m_i x'_i y'_i - \omega_z \sum_i m_i x'_i z'_i \\ L'_y = -\omega_x \sum_i m_i y'_i x'_i + \omega_y \sum_i m_i \left(r'^2_i - y'^2_i\right) - \omega_z \sum_i m_i y'_i z'_i \\ L'_z = -\omega_x \sum_i m_i z'_i x'_i - \omega_y \sum_i m_i z'_i y'_i + \omega_z \sum_i m_i \left(r'^2_i - z'^2_i\right) \end{cases}$$

Puntu honetara helduz, nomenklatur aldaketa bat eginen dugu.

$$\begin{cases} \sum_i m_i \left(r_i'^2 - x_i'^2\right) = I_{xx} : & x' \text{ ardatzarekiko inertzi momentua} \\ -\sum_i m_i\, x_i'\, y_i' = I_{xy} : & 0'x'y' \text{ launarekiko inertzi produktua} \end{cases}$$

Eta berdin, koordinatuak aldatuz.

Nomenklatur aldaketaren ondoren, honela idatziko ditugu momentu angularraren konposatuak:

$$\begin{cases} L'_x = I_{xx}\,\omega_x + I_{xy}\,\omega_y + I_{xz}\,\omega_z \\ L'_y = I_{yx}\,\omega_x + I_{yy}\,\omega_y + I_{yz}\,\omega_z \\ L'_z = I_{zx}\,\omega_x + I_{zy}\,\omega_y + I_{zz}\,\omega_z \end{cases}$$

Zer esanik ez, launekiko inertzi produktuen definizioa kontutan harturik:

$$I_{xy} = I_{yx} \qquad I_{xz} = I_{zx} \qquad I_{yz} = I_{zy}$$

Aurreko hiru konposatuen forma aztertuz, bertan $\vec{L}'$ eta $\vec{\omega}$ bektoreen koordinatuen arteko erlazioa agertzen dela ikusiko dugu. Erlazio hori matrizialki idatz daiteke. Honela hain zuzen ere

$$\begin{pmatrix} L'_x \\ L'_y \\ L'_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{xy} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{xz} & I_{yz} & I_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix}$$

Edo laburturik:

$$\vec{L}' = \mathbb{I}\,\vec{\omega}$$

$$\mathbb{I} = \begin{pmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{xy} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{xz} & I_{yz} & I_{zz} \end{pmatrix}$$

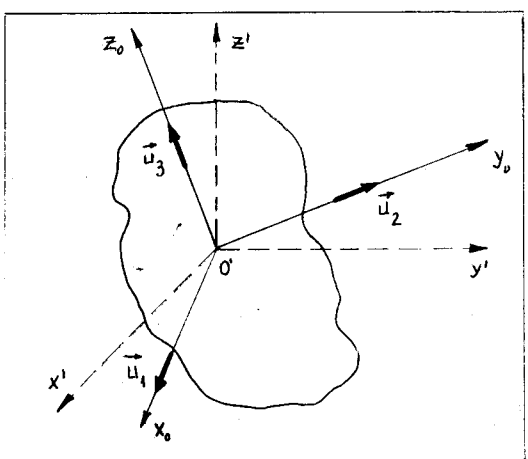
$\mathbb{I}$ delakoa bigarren ordeneko tentsore simetriko bat da eta inertzi tentsorea deitzen da. Momentu angularra eta abiadura angularra erlazionatzen ditu. Bi bektore hauk, bestalde, ez dute zertan direkzio berbera eduki behar, $\mathbb{I}$ ez baita eskalare bat tentsore bat baizik.

8.5 INERTZIAKO ARDATZ ETA MOMENTU NAGUSIAK

Aurreko puntuan esan dugun bezala, generalean $\vec{L}'$ eta $\vec{\omega}$ bektoreen direkzioak ez dira berdinak. Hala ere, $\vec{\omega}$ delakoak direkzio konkretu batzu hartzen dituenean, posible da $\vec{L}'$-k eta $\vec{\omega}$ -k direkzio berbera edukitzea.

$\vec{L}'$ eta $\vec{\omega}$ bektoreen direkzioak berdinak direnean, $\vec{\omega}$ bektorearen direkzioa duen ardatza, INERTZIAKO ARDATZ NAGUSIA dela esaten dugu.

Solido zurrunaren kasuan, eta masa-zentruari buruz lorturiko $\vec{L}'$ -ren kasuan, beti da posible, guttienez hiru ardatz nagusi aurkitzea. Hiru ardatz hauk elkarrekiko perpendikularrak dira.



Guk ez dugu frogatuko hemen, hori horrela denik, horretarako behar den erreminta matematikoa, goragoko maila batetakoa da eta. Baina ontzat hartuko dugu, eta horretan finkatuko gara; hurrengo azalpenak egitean.

Har dezagun orain, ardatz nagusiez osoturiko triedroa $(O' x_o y_o z_o)$ Sistema hau solido zurrunean fixoa da, eta solido zurrunaren sistematzat (SZS) hartuko dugu. Sistema honen ardatzen direkzioetako bektore unitariak $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$ eta $\vec{u}_3$ dira. Saiá gaitezen, $\vec{L'}$ eta $\vec{\omega}$ bektoreak sistema honetan dituzten konposatuen bidez adieraztera. Modu berean, $\bar{\bar{I}}$ inertzi tentsorea ere adierazi beharko dugu sistema berri honetan. Konposatuak $(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ eta (L_1, L_2, L_3) deituko ditugu.

Demagun orain, $\vec{\omega}$-k x_o ardatzaren direkzioa duela, hots $\vec{\omega} = \omega_1 \vec{u}_1$, dela. Ardatz nagusia izanik, $\vec{L'}$-k ere direkzio berbera eduki behar du: $\vec{L'} = L_1 \vec{u}_1$. Bestalde, 8.4 puntuan ikusi dugunez:

$$\vec{L'} = \bar{\bar{I}}\,\vec{\omega}$$

SZS sisteman adierazpen honen konposatuak idatziz:

$$\begin{cases} L_1 = I_{x_o x_o}\omega_1 + I_{x_o y_o}\omega_2 + I_{x_o z_o}\omega_3 \\ L_2 = I_{y_o x_o}\omega_1 + I_{y_o y_o}\omega_2 + I_{y_o z_o}\omega_3 \\ L_3 = I_{z_o x_o}\omega_1 + I_{z_o y_o}\omega_2 + I_{z_o z_o}\omega_3 \end{cases}$$

Eta $\vec{L'}$ eta $\vec{\omega}$ bektoreen konposatuan balioa kontutan hartuz

$$\begin{cases} L_1 = I_{x_o x_o}\,\omega_1 \\ L_2 = 0 = I_{y_o x_o}\omega_1 \\ 0 = I_{z_o x_o}\omega_1 \end{cases}$$

Beraz $I_{x_o y_o} = I_{x_o z_o} = 0$ izanen dira

$\vec{\omega}$ delakoari beste ardatz baten direkzioa emanik, $I_{y_o z_o} = 0$ dela froga daiteke.

Honela, ba, ardatz nagusiek osoturiko erreferentzi sisteman (SZS delakoan), inertzi tentsoreko elementuen artean zero ez diren bakarrak $I_{x_o x_o}$, $I_{y_o y_o}$ eta $I_{z_o z_o}$ dira. Hauk I_1 I_2 eta I_3 deitu ohi dira.

Beraz, inertziako ardatz nagusiek osoturiko sisteman, honela idazten da inertzi tentsorea

$$\mathbb{I} = \begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix}$$

Hots, diagonalizaturik dago.

I_1, I_2 eta I_3 inertziako ardatz nagusiekiko inertzi momentuak dira eta INERTZI(AKO) MOMENTU NAGUSIAK deitzen dira.

Orain oso sinpleki adieraziko dugu $\vec{L}$ eta $\vec{\omega}$ bektoreen arteko erlazioa $S\not{Z}S$ sisteman. Demagun, $\vec{\omega}$-k edozein direkzio duela. $\vec{L}$-k ere beste direkzioren bat edukiko du. Bien konposatuen arteko erlazioa hauxe izanen da:

$$\begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix}$$

Hau honela ere idatz daiteke:

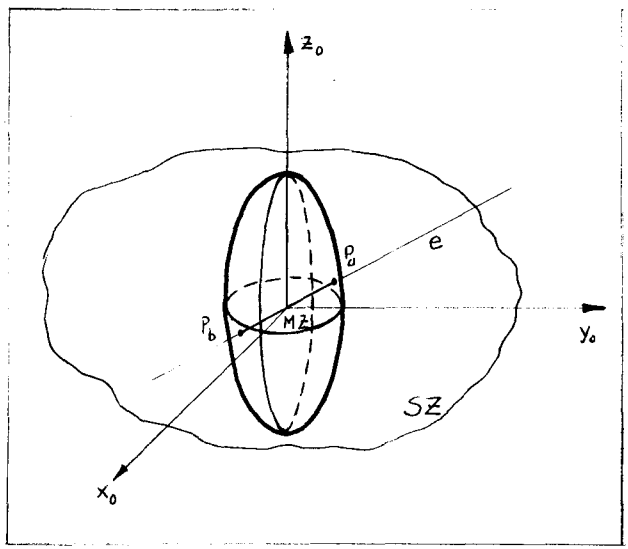
$$\vec{L} = I_1 \omega_1 \vec{u}_1 + I_2 \omega_2 \vec{u}_2 + I_3 \omega_3 \vec{u}_3 \qquad \begin{cases} L_1 = I_1 \omega_1 \\ L_2 = I_2 \omega_2 \\ L_3 = I_3 \omega_3 \end{cases}$$

Zenbait kasu bereziren aipamena eginen dugu:

- $I_1 = I_2 = I_3 \Longrightarrow \vec{L} = \lambda \vec{\omega}$ ZIBA ESFERIKOA
- $I_1 = I_2 \neq I_3$ denean, ZIBA SIMETRIKOA deitzen da. $X_c Y_c$ launеko ardatz guztiak dira nagusiak. Adibide gisa errugbiko baloia aipa dezakegu; eta ziba normalak (jostailuak).
- $I_1 \neq I_2 \neq I_3 \neq I_1$, denean, ZIBA ASIMETRIKOA deitzen da
- Gorputz batek simetri ardatzen bat badu, simetri ardatz hori inertziako ardatz nagusia da.

8.6 INERTZI ELIPSOIDEA

Orain konstrukzio geometriko berezi bat eginen dugu. Honela: Demagun masa-zentrurik pasatzen den direkzio bat (e). Masa-zentrutik hasi eta e direkzioaren alde bietara $\frac{1}{\sqrt{I}}$ segmentu bat hartuko dugu, modu honetan P_a eta P_b puntuak lortuz. I delakoa, e ardatzarekiko solidoak duen inertzi momentua da.



Maila honetan frogatuko ez badugu ere, horrela definituriko P puntuen leku geometrikoa, elipsoide bat dela froga daiteke.

Elipsoide hau masa-zentruan definitzen denean, masa-zentruko inertzi elipsoidea deitzen da. Beste edozein puntutan ere definí daiteke eta orduan inertzi elipsoide izenaz ezagutzen da, besterik gabe.

Irudian inertziako ardatz nagusiak hartu ditugu erreferentzi sistema bezala (x_0, y_0, z_0). Bertan ikusten denez elipsoidearen ardatz nagusiak inertziazko ardatz nagusiak dira (erraz froga daiteke hau). Ardatz nagusien direkzioak elipsoideak dituen erradioek (a,b,c errespektiboki), ondoko balorea dute:

$$a = \frac{1}{\sqrt{I_1}} \qquad b = \frac{1}{\sqrt{I_2}} \qquad c = \frac{1}{\sqrt{I_3}}$$

Bestalde, hiru ardatz nagusiek osoturiko erreferentzi sistema-man, elipsoidearen ekuazioa ondokoa izanen da:

$$\frac{x_o^2}{a^2} + \frac{y_o^2}{b^2} + \frac{z_o^2}{c^2} = 1$$

Eta a,b eta c-ren balorea kontutan hartuz.

$$I_1 x_o^2 + I_2 y_o^2 + I_3 z_o^2 = 1$$

Hauxe da, ba, baldintza hauetan, elipsoidearen ekuazioa. Dena den bestelako erreferentzi sistema bat hartuz, formula hori konplikatuago agertzen da.

Bukatzeko, aipa ditzagun zenbait kasu berezi:

. Ziba simetrikoaren kasuan, $I_1 = I_2$ denez, a = b da, eta beraz, inertzi elipsoidea erreboluziozkoa da, z_o ardatzaren inguruan

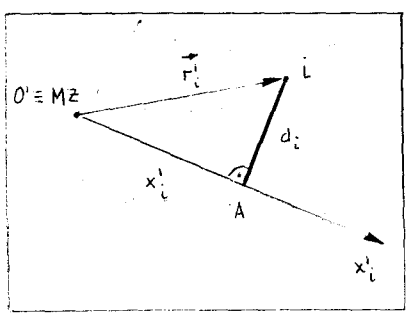
. Ziba esferikoaren kasuan, $I_1 = I_2 = I_3$ denez, a = b = c da, eta beraz, inertzi elipsoidea, izatez, esfera bat da.

8.7 INERTZI MOMENTUEN KALKULUA

8.4 puntuan ondoko modu honetan definitu genuen ardatz batekiko inertzi momentua (x' ardatzarekikoa)

$$I_{x'x'} = \sum_i m_i \left(r_i'^2 - x_i'^2 \right)$$

Ikus dezagun orain, definizio honek duen esangura:



$\overline{iA}$, Ox' ardatzaren perpendikularra da. Beraz

$$r_i'^2 - x_i'^2 = \overline{iA}^2 = d_i^2$$

d_i , i puntutik $O'x'$ ardatzera dagoen distantzia da. Beraz, inertzi momentua honela lortzen da $I_{x'x'} = \sum_i m_i d_i^2$

Edozein ardatzekiko ere, inertzi momentua partikulen masen eta berauetako bakoitzetik ardatzetara dagoen distantziaren koadratuaren biderketaz eta biderketa hauen batuketaz lortzen da.

$$I_e = \sum_i m_i d_i^2$$

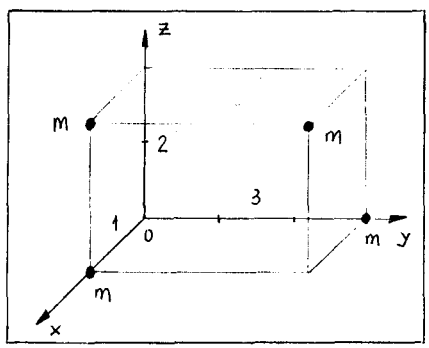
hemen d_i delakoa e ardatzera dagoen distantzia izanik.

Masa kontinuoa denean, honela egiten da kalkulua:

$$I_e = \int d^2 \, dm$$

Esandakoa argitzeko, adibide modura, bi partikula-sistemaren inertzi momentuak kalkulatuko ditugu:

. Masa diskretuez osoturiko sistema bat:



Lau masa berdin (m), ertzak 1, 2 eta 3 metrotakoak dituen paralelipipedo baten lau erpinetan daude, irudian ageri den bezala. Hiru ardatz koordinatuekiko inertzi momentuak lor. Halaber, inertzi tentsorea lor

$$I_{xx} = m \cdot 2^2 + m \cdot 0 + m \cdot 3^2 + m\left(3^2+2^2\right) = 26\,m$$

$$I_{yy} = m \cdot 1^2 + m\left(1^2+2^2\right) + m \cdot 0 + m\left(1^2+2^2\right) = 11\,m$$

$$I_{zz} = m \cdot 1^2 + m \cdot 1^2 + m\left(1^2+3^2\right) + m\,3^2 = 21\,m$$

Inertzi tentsorea kalkulatzeko (originean noski), inertzi produktuak kalkulatu behar dira

$$I_{xy} = -\sum m_i x_i y_i = -\left(m\cdot 1\cdot 0 + m\cdot 1\cdot 0 + m\cdot 1\cdot 3 + m\cdot 0\cdot 3\right) = -3m$$

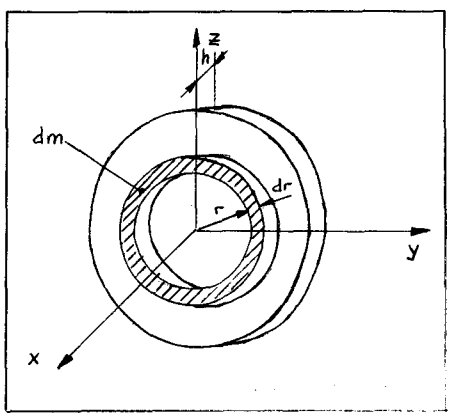
$$I_{xz} = -\sum m_i x_i z_i = -\left(m\cdot 1\cdot 2 + m\cdot 1\cdot 0 + m\cdot 1\cdot 2 + m\cdot 0\cdot 0\right) = -4m$$

$$I_{yz} = -\sum m_i y_i z_i = -\left(m\cdot 0\cdot 2 + m\cdot 0\cdot 0 + m\cdot 3\cdot 2 + m\cdot 3\cdot 0\right) = -6m$$

Beraz origineko inertzi tentsorea ondoko hau da:

$$\mathbb{I} = \begin{pmatrix} 26m & -3m & -4m \\ -3m & 11m & -6m \\ -4m & -6m & 21m \end{pmatrix}$$

. Kalkula dezagun orain masa kontinuoa duen sistema baten inertzi momentua



h lodierako disko zilindriko baten inertzi momentua kalkulatuko dugu x ardatzarekiko (ikus irudia) Erradioa R da

$$I_{xx} = \int d^2\, dm$$

dm elementuko partikula guztiek ardatzetik d distantzia berdinera egon behar dute.

Irudian agertzen den dm erakoak hartuko ditugu, hau da, x ardatza zentru duten erhaztun finak (dr zabalerakoak). Materialearen dentsitatea ρ bada

$$dm = \rho\, 2\pi r\, h\, dr$$

Eta elementu oso hau (dm) x ardatzetik r distantziara dagoenez

$$I_{xx} = \int_0^R r^2 \rho\, 2\pi\, h\, r\, dr$$

$$I_{xx} = \rho\, 2\pi h \int_0^R r^3 dr = \rho\, 2\pi h \left[\frac{r^4}{4}\right]_0^R \qquad I_{xx} = \rho\, 2\pi h\, \frac{R^4}{4}$$

Bestalde, disko osoaren masa ondokoa da:

$$M = \rho \pi R^2 h$$

Beraz

$$I_{xx} = \frac{1}{2} \left(\rho \pi R^2 h \right) R^2 \longrightarrow I_{xx} = \frac{1}{2} M R^2$$

. Bira-erradioa. Zenbait taulatan kontzeptu hau ageri ohi da eta horregatik interesgarri da beraren esangura adieraztea. Gorputz batek bira-ardatz batekiko duen bira-erradioa zera da, gorputz horren masa guztia puntu batetan kontzentraturik balego, puntu horretatik ardatzera egon behar lukeen distantzia, puntuak ardatzarekiko duen inertzi momentua gorputzak duen berbera izan dadin.

k bira-erradioa bada

$$M K^2 = I_e$$

Beraz, $$K = \sqrt{\frac{I_e}{M}}$$

Adibidez, kalkula dezagun bira-erradioa lehengo diskoaren kasuan

$$I_e = \frac{1}{2} M R^2$$

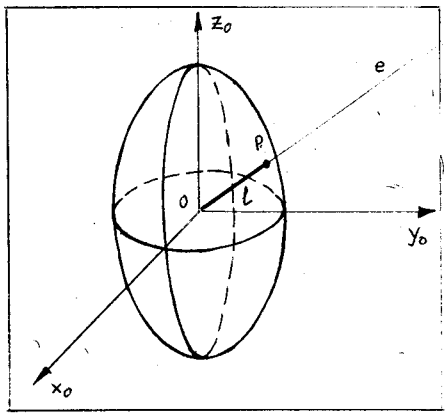
$$K = \sqrt{\frac{\frac{1}{2} M R^2}{M}} = \frac{R}{\sqrt{2}}$$

Berdin kalkula daikete beste edozein kasutan

. Poinsot-en formula

Formula honen bidez, eta inertzi elipsoidean finkaturik, edozein direkziotako ardatzarekiko inertzi momentua lortuko dugu, direkzio horren kosinu direktoreen funtzioan.

Kalkuluak errazteko, masa-zentruko elipsoidea aztertuko dugu, eta erreferentzi gisa ardatz nagusiak.



Demagun e direkzioa

$$\overline{OP} = l = \frac{1}{\sqrt{I_e}}$$

Bestalde, P puntuaren koordinatuak x_o, y_o, z_o izanik, kosinu direktoreak hauxek dira:

$$\alpha_1 = \frac{x_o}{l} \qquad \alpha_2 = \frac{y_o}{l} \qquad \alpha_3 = \frac{z_o}{l}$$

Hemendik x_o , y_o eta z_o despejatuz eta elipsoidearen ekuazioa eramanez:

$$\begin{cases} x_o = \alpha_1 l \\ y_o = \alpha_2 l \\ z_o = \alpha_3 l \end{cases} \qquad I_1 x_o^2 + I_2 y_o^2 + I_3 z_o^2 = 1$$

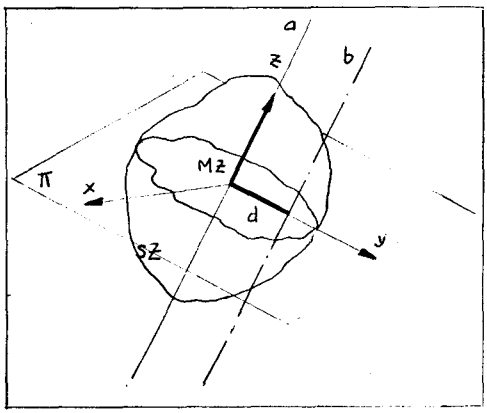
Beraz, azkenean hauxe geratzen zaigu

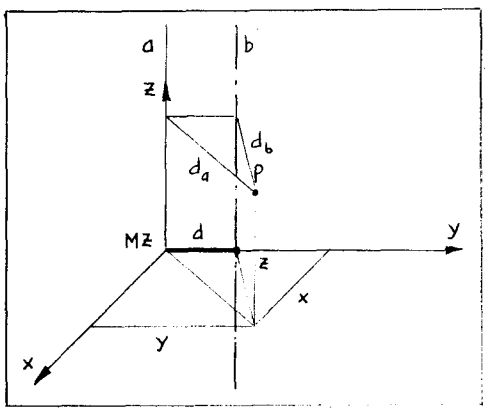
$$I_e = I_1 \alpha_1^2 + I_2 \alpha_2^2 + I_3 \alpha_3^2$$

Formula hau Poinsot-en formula deitzen da, eta ikusten denez, beronen bidez e ardatzarekiko inertzi momentua kalkulatzen da.

Steiner-en formula

Formula honen bidez bi ardatz paralelorekiko inertzi momentuen arteko erlazioa adierazten da. Konkretuki, bi ardatzetako bat masa-zentrutik pasatzen da





a ardatza masa-zentrutik iragaten da

b ardatz a ardatzaren paraleloa da.

Hauen arteko distantzia d da. I_a eta I_b erlazionatu nahi ditugu.

π launa a eta b ardatzen perpendikularra da.

Problemaren formulazioa errazteko a ardatza z sistema gisa hartuko dugu. x eta y ardatzak π launeko edozein ardatz perpendikular izan daitezke, baina, errazteko, y ardatza a eta b zuzen paraleloek osotzen duten launean hartuko dugu.

Honela eginik eta P delakoa solidoaren edozein puntu bat izanik, puntu honetatik a eta b ardatzetara dauden distantziak, ondokoak dira:

$$\begin{cases} d_a^2 = x^2 + y^2 \\ d_b^2 = x^2 + (y-d)^2 \end{cases}$$

Eta inertzi momentuak:

$$\begin{cases} I_a = \sum_i m_i\left(x_i^2+y_i^2\right) = \sum_i m_i\, d_{ai}^2 \\ I_b = \sum_i m_i\, d_{bi}^2 = \sum_i m_i\left(x_i^2+y_i^2+d^2-2y_i d\right) \\ I_b = \sum_i m_i\left(x_i^2+y_i^2\right) + \sum_i m_i d^2 - 2d\,\Sigma\, m_i\, y_i \end{cases}$$

$\sum_i m_i y_i = 0$ origena masa-zentruan baitago.

Beraz:

$$I_b = \sum_i m_i\left(x_i^2+y_i^2\right) + d^2\left(\Sigma m_i\right)$$

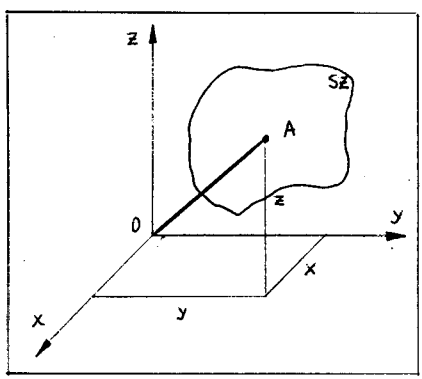
Azkenean zera geratzen zaigu:

$$I_b = I_a + M d^2$$

Hauxe da Steiner-en formula.

. Inertziako momentu polarra

Bukatzeko, magnitude berri bat definituko dugu, kalkulu askotan lagungarri gertatzen baita: Puntu batekiko inertzi momentu polarra.



Demagun 0 puntuarekiko inertzi momentu polarra. Ondoko eran definitzen da:

$$I_{po} = \int r^2\, dm$$

Hots, inertzi momentuak bezala baina puntu batetarako distantziak jarriz.

$r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ dela kontutan edukiz, zenbait erlazio jar daitezke momentu polarraren eta ardatz koordinatuekiko inertzi momentuen artean:

$$I_{po} = I_{zz} + \int z^2\,dm$$
$$I_{po} = I_{yy} + \int y^2\,dm$$
$$I_{po} = I_{xx} + \int x^2\,dm$$

$$3I_{po} = I_{xx} + I_{yy} + I_{zz} + I_{po}$$

Hau da:

$$I_{po} = \frac{1}{2}\left(I_{xx} + I_{yy} + I_{zz}\right)$$

Formula honek erraztu egiten du zenbait inertzi momenturen kalkulua.

9. GAIA - SOLIDO ZURRUNAREN DINAMIKA

9.1 SOLIDOAREN DINAMIKAREN EKUAZIOAK. INDARREN SISTEMAREN TORTSOREA

9.2 SOLIDO ZURRUNAREN ENERGIA KINETIKOA

9.3 BIRA LIBREA

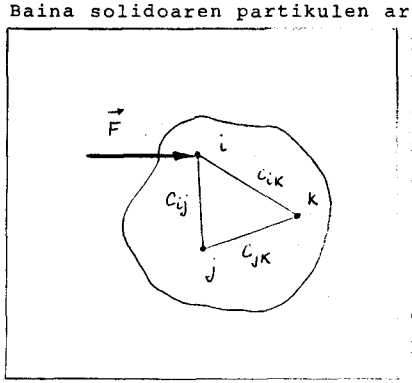
9.4 ARDATZ FIXOAREN INGURUAN BIRATZEN ARI DEN SOLIDOAREN HIGIDURA

9.5 ZENBAIT ADIBIDE

Aurreko gaian solido zurrunaren definizioa eman dugu eta bide batez, solidoaren azterketa dinamikorako beharrezko diren magnitude berezi batzu definitu eta aztertu ditugu hala nola inertzi tentsorea, inertzi momentuak eta beste. Hala ere; solidoaren abiaduren eremua aztertu dugu; hots, solido zurrunaren kinematika. Baina abiadura hauk eta berauen aldaketak (azelerazioak halegia) ez ditugu erlazionatu solidoaren gainean eragiten ari diren indarrekin. Hauxe da, hain zuzen, oraingo gai honetan solido zurrunaren Dinamika aztertzean.

9.1 SOLIDOAREN DINAMIKAREN EKUAZIOAK. INDARREN SISTEMAREN TORTSOREA

Azter dezagun lehenik eta behin solidoan eragiten duten indarren konportamoldea eta eragina. Indar batek solidoaren puntu batetan eragitean, puntu horren higidura aldatzeko joera du. Baina solidoaren partikulen arteko distantziek konstante izan behar dutenez, partikula guztiak indar horren eraginpean geratzen dira. Hau da, $\vec{F}$ indarrak i partikulan eragiten badu,



$$|\vec{r}_{ij}| = c_{ij} \quad \text{eta} \quad |\vec{r}_{iK}| = c_{iK}$$

direnez, eragina j eta K partikuletara ere hedatzen da.

Hori dela eta, berezia gertatzen da solidoaren Dinamika, beste sistemekin konparatuz, eta horregatik kasu honetan teknika bereziak erabiltzen dira higuraren azterketarako, hala nola, inertzi tentsorea eta beste.

Edozein modutan, gainezarmenaren printzipioan oinharrituz eta indarrak kurtsoreak direla kontutan hartuz, indar-sistemaren eragina aztertzean, 2.4 galderan kurtsore-sistemak aztertzean ikusi genuèn biltze modua erabili beharko dugu. Hau da, indar-

sistema osoa solidoaren edozein puntutara erreduzi daiteke, puntu horretan indar erresultantea ($\vec{F}$) eta momentu erresultantea ($\vec{\tau}$) emanik.

Kurtsore-sistemen propietateak kontutan edukiz, $\vec{F}$ eta $\vec{\tau}$ direlakoek ondoko berezitasunak dituzte:

- $\vec{F}$, espazioko inbariante bektoriala da
- $\vec{\tau}$ aldatuz doa puntuarekin. $\vec{\tau}_A$ A puntuarekiko momentua izanik, B puntuarekikoak balio hau du:

$$\vec{\tau}_B = \vec{\tau}_A + \vec{F} \times \vec{AB} = \vec{\tau}_A + \vec{F} \times \left(\vec{r}_B - \vec{r}_A\right)$$

- $\vec{F}$-ren direkzioa duten zuzenak, $\vec{\tau}$ berdineko puntuen leku geometrikoak dira.
- $\vec{\tau} \cdot \vec{F}$, espazioko inbariante eskalarra da.
- Ardatz zentralean $\vec{\tau}$ minimoa da eta $\vec{F}$-ren direkzio du.
- $\vec{\tau}$ eta $\vec{F}$ bikoteak <u>tortsore</u> izeneko multzoa osotzen du. Tortsore honek definitzen du solidoaren Dinamika, solidoak dituen loturekin batera.

Honela, ba, solido zurrunaren dinamika aztertzeko, <u>indar-sistemaren tortsorea</u> kontsideratu behar dugu; hots, higidur aldaketen sortzailea $\vec{\tau}$ eta $\vec{F}$ bektoreek osoturiko tortsorea da.

Ikus dezagun orain, tortsoreak nolako eragina duen. Solido zurruna, berez, partikula-sistema bat da. Beraz, 7.gaian partikula-sistemei buruz emandako legeak beteko ditu.

Erreferentziatzat, inertzi sistema bat hartzen badugu, 7.2 eta 7.4 puntuetan adierazitako legeak beteko ditu. Hau da:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{P}}{dt} = M \frac{d\vec{v}_{Mz}}{dt} = M \vec{a}_{Mz}$$

Eta $\vec{L}$ eta $\vec{\tau}$, ardatzen origenarekiko momentu angularra eta indarren momentua izanik:

$$\vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

Bi ekuazio hauk dira solido zurrunaren -eta beste edozein sistemaren- Dinamikaren oinharrizko ekuazioak.

. Masa-zentruarekiko ekuazioak. Aurreko ekuazio biak inertzi sistema baten origenarekiko idatzirik daude. Hala ere, askoz ere praktikoago gertatzen da ekuazio horik masa-zentruarekiko idaztea, eta horixe da orain eginen duguna.

Bi kasu aztertuko ditugu:

a) $\vec{F}=0$ denean

Kasu honetan

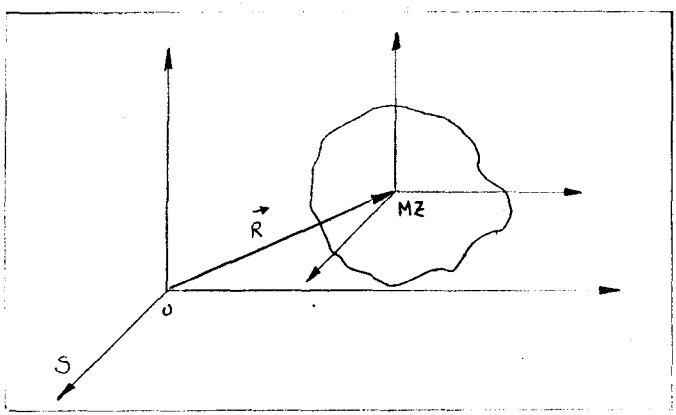
$$M\vec{a}_{MZ}=0 \Longrightarrow \vec{a}_{MZ}=0$$

Beraz masa-zentruan origena edukiz eta inertzi sistemako ardatzen ardatz paraleloak dituen erreferentziazko sistemá -7.gaian C deitzen genuen sistema-, sistema inertziala da. Beraz, masa-zentruarekiko,

$$\vec{\tau}_{MZ}=\frac{d\vec{L}_{MZ}}{dt}$$

dela erlazio beteko da.

b) $\vec{F}\neq 0$ denean. Kasu honetan masa-zentruarekin doan sistema, ez da inertziala; hori dela eta, ezin dezakegu aplika lehengo metodoa. Dena den, ondoko arrazonamenduaz ikusiko dugunez, ondorio berdintsura helduko gara.



Bi sistemetako ardatzak paraleloak dira binaka, eta S sistemá inertziala da. Beraz

$$\frac{d\vec{L}_o}{dt} = \vec{\tau}_o$$

Baina $\vec{L}_o$ eta $\vec{\tau}_o$ ondoko moduan daude erlazionaturik $\vec{L}_{MZ}$ eta $\vec{\tau}_{MZ}$ direlakoekin

$$\begin{cases} \vec{L}_o = \vec{R} \times M\vec{V} + \sum_i \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i = \vec{R} \times M\vec{V} + \vec{L}_{MZ} \\ \vec{\tau}_{MZ} = \vec{\tau}_c + \vec{F} \times \vec{R} \\ \vec{\tau}_o = \vec{\tau}_{MZ} + \vec{R} \times \vec{F} \end{cases}$$

Eta lehena denborarekiko deribatuz

$$\frac{d\vec{L}_o}{dt} = \dot{\vec{R}} \times M\vec{V} + R \times M\vec{a}_{MZ} + \frac{d\vec{L}_{MZ}}{dt}$$

Eta $\dot{\vec{R}} = \frac{d\vec{R}}{dt} = \vec{V}$ denez, $\qquad \frac{d\vec{R}}{dt} \times M\vec{V} = \vec{V} \times M\vec{V} = 0$

Beraz,

$$\frac{d\vec{L}_o}{dt} = \vec{R} \times M\vec{a}_{MZ} + \frac{d\vec{L}_{MZ}}{dt} = \vec{R} \times \vec{F} + \frac{d\vec{L}_{MZ}}{dt}$$

Eta $\left\{ \begin{array}{l} \vec{\tau}_o = \vec{\tau}_{MZ} + \vec{R} \times \vec{F} \\ \vec{\tau}_o = \dfrac{d\vec{L}_o}{dt} \end{array} \right\}$ direla kontutan hartuz, azkenean hauxe geratzen zaigu

$$\vec{\tau}_{MZ} = \frac{d\vec{L}_{MZ}}{dt}$$

Hots, adierazpen hau beti betetzen da, masa-zentrua abiadura konstantez zein azelerazioz higitzen delarik. Baldintza bakarra zera da, masa-zentruarekin doazen ardatzek ez dezatela birarik egin.

Puntu honetan solido zurrunaren oinharrizko ekuazioak aztertu ditugu. Hauxek dira prezeski:

$$\vec{F} = M\vec{a}_{MZ}$$

$$\vec{\tau}_o = \frac{d\vec{L}_o}{dt} \quad \text{edo} \quad \vec{\tau}_{MZ} = \frac{d\vec{L}_{MZ}}{dt}$$

Dena den, ekuazio hauk ez dira sinpleak. Zailtasunen iturria, solido zurrunaren kasuan momentu angularrak abiadura angularraren funtzioan hartzen duen forma da. Aurreko gaitik dakigunez

$$\vec{L} = \mathbb{I}\,\vec{\omega}$$

Hemen $\mathbb{I}$ inertzi tentsorea da (ez da beraz eskalare bat), eta horrela $\vec{L}$-ren eta $\vec{\omega}$-ren direkzioak ez dira berdinak generalean. Hori dela eta, kalkuluak konplikatu egiten dira kasurik generalenean.

Guk, lehen maila honetan, zenbait kasu berezi aztertuko ditugu, adibide gisa. Hauen artean, bira librea eta ardatz fixoaren inguruan biratzen ari den solidoa. Ikusiko dugunez, kasu honetan kalkuluak erraztu eginen dira neurri batez.

Edozein modutan, eta solidoaren Dinamika aztertzen ari garenez, oso baliagarri gertatuko zaigu, solidoaren energia kinetikoak abiadura angularraren funtzioan hartzen duen expresioa ikustea, eta horixe da hurrengo puntuan eginen duguna.

9.2 SOLIDO ZURRUNAREN ENERGIA KINETIKOA

Solido zurruna partikula-sistema bat denez, honela adierazten da beraren energia kinetikoa masa-zentruaren koordinatuen eta masa-zentruko sistemaren bidez (ikus 7.5)

$$E_K = \frac{1}{2} M V^2 + \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i'^2$$

Bigarren terminoa E'_K deituko dugu

$$E'_K = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i'^2$$

Kalkula dezagun E'_K-ren balorea.

Gorputza solido zurruna denez, 8.4 puntuan ikusitakoaren arauera

$$\vec{v}'_i = \vec{\omega} \times \vec{r}'_i$$

Bestalde

$$v_i'^2 = \vec{v}_i' \cdot \vec{v}_i' = \left(\vec{\omega} \times \vec{r}_i'\right) \cdot \left(\vec{\omega} \times \vec{r}_i'\right)$$

Oposizioak egiterakoan $\vec{\omega}$-ren eta $\vec{r}$-ren konposatuak inertziako ardatz printzipalei buruz idatziz, azkenean zera geratzen zaigu

$$E_k' = \frac{1}{2}\left(I_1 \omega_{x_0}^2 + I_2 \omega_{y_0}^2 + I_3 \omega_{z_0}^2\right)$$

Horrela egin beharrean, $\vec{\omega}$-ren eta $\vec{r}$-ren konposatuak bestelako ardatz batzuri buruz idatziz, energia kinetikoaren adierazpena konplikatuago agertzen da. Honela:

Dena den, ardatz printzipalei buruzko adierazpena erabiltzen da ia beti. Kasu honetan, ba, demagun $\vec{\omega}$ bektoreak ardatz printzipal baten direkzioa duela etengabe.

$$\left.\begin{aligned} \omega_{x_0} &= \omega \\ \omega_{y_0} &= 0 \\ \omega_{z_0} &= 0 \end{aligned}\right\} \longrightarrow \quad E_k' = \frac{1}{2} I_1 \omega^2$$

Ardatz baten inguruan biratzean $E_k' = \frac{1}{2} I_e \omega^2$

Ikusten denez, kasu honetan bso adierazpen erraza ageri da

$$E_k = \frac{1}{2} M V^2 + \frac{1}{2} I \omega^2$$

Bukatzeko, azter dezagun sistemaren gainean egiten den lanaren eta energia kinetikoaren arteko erlazioa. 7.5 puntuan ikusi genuenez, edozein partikula-sistemaren kasuan

$$W_{ext} + W_{int} = E_{k,B} - E_{k,A}$$

Baina solidoak dituen loturak kontutan harturik, $W_{int} = 0$ da, zeren eta

$$W_{int} = \sum_{ij} \int_A^B \vec{F}_{ij} \cdot d\vec{r}_{ij}$$

eta $\left|\vec{r}_{ij}\right| = c_{ij}$ denez

$\vec{F}_{ij}$ eta $\vec{dr}_{ij}$ perpendikularrak baitira eta, beraz, $\vec{F}_{ij} \cdot \vec{dr}_{ij} = 0$ baita.

Honelatan

$$W_{ext} = E_{k,B} - E_{k,A}$$

Kanpo-indarrak kontserbakorrak izanik

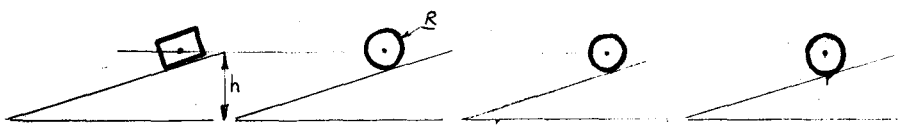
$$W_{ext} = E_{p,A} - E_{p,B}$$

Eta azkenik

$$\left(E_K + E_p\right)_A = \left(E_K + E_p\right)_B = E$$

Hauxe energiaren kontserbapenaren printzipioa da. E_p delakoa kanpo-indarrei dagokien energia potentziala da.

Adibidea: Masa bereko kubo, esfera, zilindro eta aro batzu alde dapa ber batetan behera doaz. Kuboak deslizatu egiten du igurtzimendurik gabe. Beste hirurek errodatu egiten dute energiarik galdu gabe. Zein ordenatan heltzen dira behekaldera.



1: kuboa	2: esfera	3: zilindroa	4: aroa
$E_k = \frac{1}{2} M V^2$	$I_{Mz} = \frac{2}{5} M R^2$	$I_{Mz} = \frac{1}{2} M R^2$	$I_{Mz} = M R^2$
	$\omega = \frac{V}{R}$	$\omega = \frac{V}{R}$	
	$E_k = \frac{1}{2} M V^2 + \frac{1}{2} I \omega^2$	$E'_k = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} M R^2\right)\frac{V^2}{R^2}$	$E'_k = \frac{1}{2}\left(M R^2\right)\frac{V^2}{R^2}$
	$E_k = \frac{1}{2} M V^2 + \frac{1}{2}\frac{2}{5} M R^2 \frac{V^2}{R^2}$	$E'_k = \frac{1}{4} M V^2$	
	$E_k = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{5}\right) M V^2$	$E_k = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right) M V^2$	
$E_k = \frac{1}{2} M V^2$	$E_k = \frac{7}{10} M V^2$	$E_K = \frac{3}{4} M V^2$	$E_k = M V^2$

Beraz, zentruko abiadura berdinaren kasuan (V),

$$E_{K_{kuboa}} < E_{K_{esfera}} < E_{K_{zilindroa}} < E_{K_{aroa}}$$

Azter dezagun orain energiaren kontserbapena. Kanpoko indar bakarra grabitatearena da

Beraz, $E_p = 0$ aldaparen behekaldean hartuz

$$E = E_p + E_K = \underbrace{mgh + 0}_{\text{goian}} = \underbrace{0 + E_K}_{\text{behean}}$$

Kasu guztietan, behean gorputzak duen energia (E_K) hauxe da:

$$E_K = mgh$$

$$\left\{\begin{array}{lll} \text{kuboak:} & \frac{1}{2} M V_K^2 = mgh \\ \text{Esferak:} & \frac{7}{10} M V_e^2 = mgh \\ \text{zilindroak:} & \frac{3}{4} M V_z^2 = mgh \\ \text{aroak:} & M V_a^2 = mgh \end{array}\right\} \quad V_K > V_e > V_z > V_a$$

Beraz, kuboa helduko da lehen, esfera bigarren, zilindroa hirugarren eta aroa azken.

9.3 BIRA LIBREA

Solidoaren gainean inolako indarrik ez momenturik eragiten ez badu ($\vec{F}=0$, $\vec{\tau}=0$) solido hori libreki biratzen ari dela diogu. Kasu honetan ondoko ekuazioak betetzen dira

a) $$\vec{F} = M \frac{d\vec{V}_{MZ}}{dt} = 0 \longrightarrow \vec{V}_{MZ} = K\vec{te}$$

Beraz masa-zentrua abiadura konstantez higitzen da eta bertan erreferentziako sistema inertziala aukera dezakegu

b) $\vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt} = 0 \longrightarrow \vec{L} = K\vec{te}$

Gainera, $\vec{F}=0$ denez, $\vec{\tau}$ momentuak edozein puntutan balio du zero. Beraz edozein punturekiko momentu angularrak ere konstante balio du.

c) Kanpo-indarrik ez dagoenez,

$$W_{ext} = 0$$

Beraz

$$E_k = K\vec{te}$$

hots, energia kinetikoak konstante irauten du.

Hiru horik dira, ba, solidoaren higidura askatuaren oinharrizko ekuazioak. Horik erabiliz ebazten da problema.

Ikus dezagun $\vec{L}$ -ren eta $\vec{\omega}$ -ren arteko erlazioa. Dakigunez

$$\vec{L} = \mathbb{I}\,\vec{\omega}$$

Baina hemen $\mathbb{I}$ inertzi tentsorea da, hots, ez da eskalare bat. Eta aurreko gaian ikusi genuenez -ikus 8.4- generalean $\vec{L}$-K eta $\vec{\omega}$-K direkzio desberdinak dituzte. Gainera, solidoa higitzen ari denez, $\mathbb{I}$ tentsorearen elementuak ere aldatuz doaz. Horrela, $\vec{L} = K\vec{te}$ izan arren, generalean $\vec{\omega} \neq K\vec{te}$ izaten da.

Hala ere, lehen uneko bira ardatza inertziako ardatz printzipala bada, zera gertatzen da.

$$\vec{L} = I_1\,\vec{\omega}$$

Hemen I_1 , inertzi momentu printzipala edo nagusia da. Eta definizioz, $\vec{\omega}$ eta $\vec{L}$ bektoreek direkzio berdina dute

Eta $\vec{L} = K\vec{te}$ denez, ez dago arrazoi berezirik $\vec{\omega}$-k ere konstante iraun ez dezan. Beraz, baldintza horik beteaz

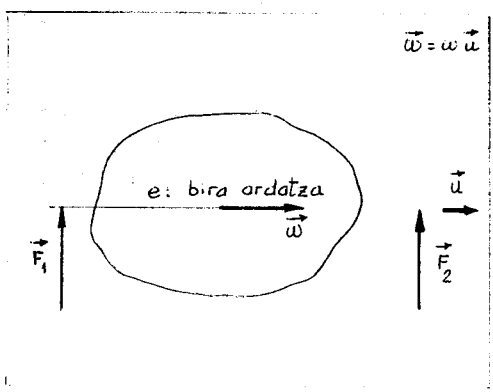
$$\vec{\omega} = K\vec{te}$$

Ikusi dugunez, $\vec{\omega}$ konstante izan dadin, lehen uneko abiadura

angularra inertziako ardatz nagusi baten inguruan gertatu behar da.

9.4 ARDATZ FIXOAREN INGURUAN BIRATZEN ARI DEN SOLIDOAREN HIGIDURA

Kasu honetan, kanpoko indarren bidez, behartu egiten da solidoa ardatz fixo baten inguruan biratzera. Beraz, bira hau ez da librea, eta generalean $\vec{F} \neq 0$ eta $\vec{\tau} \neq 0$ izanen dira.



Alboko irudian $\vec{F}_1$ eta $\vec{F}_2$ bektoreek ardatzaren euskarrietan egiten diren indarrak adierazten dituzte.

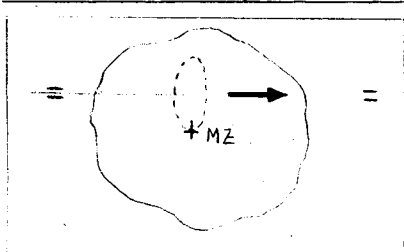
Horietaz gainera, bestelako indarrek ere eragin dezakete, hala nola grabitatearenak.

Zer esanik ez, nahiz eta irudian **e** ardatza horizontalki irudikatu dugun, bira ardatzak edozein direkzio ukan dezake.

Azterketan 9.1 puntuko ekuazio berberak erabili behar dira, generalean $\vec{F} \neq 0$ eta $\vec{\tau} = 0$ direla kontutan hartuz.

Ikus ditzagun gerta daitezkeen zenbait kasu berezi:

I. <u>Masa zentrua ez dago bira-ardatzean</u>.



Masa-zentruak ibilbide zirkularra du eta beraz

$$\vec{a}_{MZ} \neq 0$$

Eta

$$\vec{F} = M\vec{a}_{MZ} \neq 0$$

Kasu honetan konplikatu egiten da higiduraren azterketa.

II. Masa-zentrua bira-ardatzean dago

Kasu honetan $\vec{a}_{MZ} = 0$

eta $\vec{F} = M\vec{a}_{MZ} = 0$

Nola interpretatzen da hau? Honela: Nahiz eta kanpoko indarrak eragiten egon, euskarriek egiten dituzten indarrek ($\vec{F}_1$ eta $\vec{F}_2$ direlakoek) ekilibratu egiten dute sistema -indarrei dagokienez- eta erresultantea nulua da. Sistema estatikoki ekilibraturik dagoela esaten da.

Indarren erresultantea nulua izan arren, momentua ez da zertan nulua izan behar. Edozein modutan, $\vec{F} = 0$ denez, $\vec{\tau}$ inbariantea da eta balio bera du espazioko edozein punturekiko. Kasu honetan bi azpikasu berezi aztertuko ditugu:

II.a) Bira ardatza inertziako ardatz nagusia da

Ardatz nagusia izanik

$$\vec{L} = I_e \vec{\omega} = I_e \omega \vec{u}$$

Bestalde $$\vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d(I_e \omega \vec{u})}{dt} = I_e \frac{d\omega}{dt} \vec{u}$$

zeren eta I_e eta $\vec{u}$ konstante baitira

Azelerazio angularraren definiziotik

$$\vec{\alpha} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \longrightarrow \vec{\alpha} = \frac{d\omega}{dt} \vec{u} = \alpha \vec{u}$$

Beraz $$\vec{\tau} = I_e \alpha \vec{u}$$

Hemendik bi ondorio ateratzen dira:

- Euskarrietako indarrek hartzen dituzten baloreei esker, $\vec{\tau}$ momentuak bira-ardatzaren direkzioa du
- Indarren momentuaren moduluak ondoko erlazioa du solidoaren azelerazio angularrarekin : $\tau_e = I_e \alpha$

Bukatzeko, ikus dezagun $\tau_e = 0$ denean gertatzen dena:

$$\tau_e = 0 \longrightarrow \alpha = 0 \longrightarrow \omega = K^{te}$$

Prozesu hau alderantziz ere azter daiteke, hau da,

$\omega = K^{te}$ bada, $\tau_e = 0$ da.

Masa-zentrua bira-ardatzean egonik, bira-ardatza inertziako ardatz nagusia denean, ardatz fixoaren inguruan biratzen ari den solidoa, dinamikoki ekilibraturik dagoela esaten da.

Ardatza dinamikoki ekilibraturik dagoenean, euskarrietan egiten diren indarrek ez dute biraren abiadura angularraren dependentziarik eta balio bera dute $\vec{\omega}$ edozein izanik. Horregatik, makina eta motore guztietako errotoreak ekilibratu egiten dira dinamikoki.

II.b) Bira-ardatza ez da inertziako ardatz nagusia

Momentu angularraren eta abiadura angularraren arteko erlazioa hauxe da

$$\vec{L} = \mathbb{I}\,\vec{\omega}$$

Hemen $\vec{L}$-k eta $\vec{\omega}$-k direkzio desberdinak dituzte.

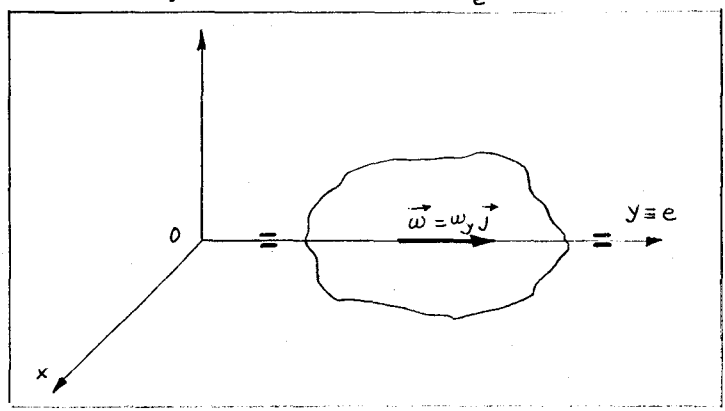
Dinamikaren ekuazioa hauxe da

$$\vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

Momentuak e ardatzaren direkzioan duen konposatua kontsideratuz

$$\tau_e = \left(\frac{d\vec{L}}{dt}\right)_e = \frac{dL_e}{dt}$$

Ikus dezagun zenbat balio duen L_e delakoak



Oy ardatza e ardatzean hartuz

$$L_e = L_y = I_{xy}\,\omega_x + I_{yy}\,\omega_y + I_{yz}\,\omega_z \qquad \text{(ikus 8.4)}$$

Baina $\vec{\omega} = \omega_y \vec{j}$ denez $\left(\omega_x = \omega_z = 0\right)$

$$L_e = I_{yy}\,\omega_y = I_e\,\omega$$

Beraz

$$\tau_e = \frac{dL_e}{dt} = I_e \frac{d\omega}{dt}$$

Hots, kasu honetan ere

$$\tau_e = I_e\,\alpha$$

Noski, kasu honetan e ardatzarekiko konposatuak baino ez ditugu kontsideratzen expresio honetan. Beste direkzioetan bestelako erlazio batzu daude.

9.5 ZENBAIT ADIBIDE

Gai honen azalpenarekin bukatzeko, problema batzu eginen ditugu, aipaturiko puntu teorikoak praktikan nola aplikatzen diren ikusteko.

i Gorputz solido bat indarrik eragiten ez duen eremu huts batetara jaurtikitzen da, lehen unean bere masa-zentruak $\vec{v}_{MZ}$ abiadura duelarik, eta abiadura angularrak $\vec{\omega}$ balio duelarik.

- Zeintzu magnitude kontserbatuko dira jaurtiki ondoren?
- Zeintzu baldintzetan kontserbatuko da $\vec{\omega}$?

Teorian estudiatu dugun bira libreari dagokio problema hau.

$$\vec{F} = 0 \qquad \vec{\tau} = 0$$

Beraz

$$\vec{F} = M\,\vec{a}_{MZ} = 0 \longrightarrow \vec{a}_{MZ} = 0 \qquad \vec{v}_{MZ} = K^{te}$$

Hau da, masa-zentruaren abiadurak konstante iraunen du.

Bestalde,

$$\vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt} = 0 \longrightarrow \vec{L} = K^{te}$$

Momentu angularrak ere konstante iraunen du.

$W_{ext} = 0$ denez, $E_K = K^{te}$

Kasurik generalenean ez da beste kontserbatze-legerik. Abiadura angularrari dagokionez

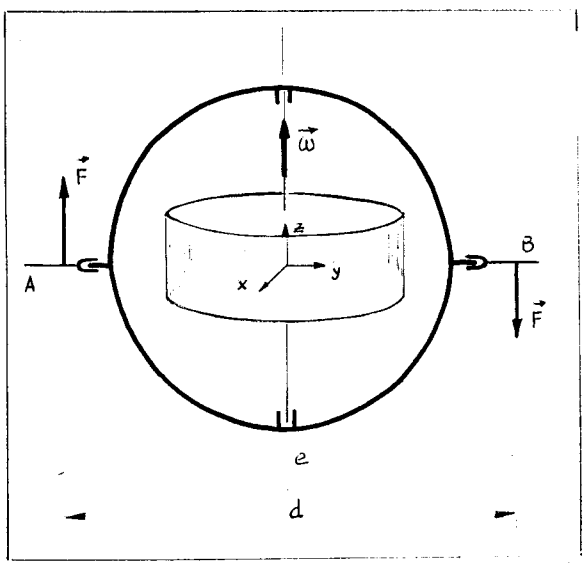
$$\vec{L} = \mathbb{I}\,\vec{\omega}$$

Eta $\vec{L} = K\vec{k}$ denez, $\vec{\omega}$-k ez du generalean konstante irauten. Hala ere, hasierako $\vec{\omega}$-K, ardatz nagusi baten direkzioa badu

$$\vec{L} = I_1\,\vec{\omega}$$

eta kasu honetan, $\vec{L}$-K eta $\vec{\omega}$-K direkzio berbera dutenez, $\vec{\omega}$ ere kontserbatu egiten da.

11 Alboko irudiak giroskopo bat adierazten du. Erdian disko bat biratzen ari da $\vec{\omega}$ abiaduraz e ardatz nagusiaren inguruan. Ekilibrio dinamikoan dagoelarik, A eta B puntuetan ($\vec{F}_1$-$\vec{F}$) bikotea aplikatzen da irudian azaltzen den eran. Nolakoa izanen da, giroskopoak pairatuko duen higidura aldaketa?



Arazoa kualitatiboki aztertzeko, diskoak baino ez duela masa kontsideratuko dugu.

Ekilibrioan diskoak duen momentu angularra hauxe da:

$$\vec{L} = \vec{L}_e\vec{\omega} = I_e\omega\vec{k}$$

zeren e ardatza inertziako printzipala baita.

Bestalde: $\vec{\tau} = \dfrac{d\vec{L}}{dt}$

Indarren momentua hauxe da

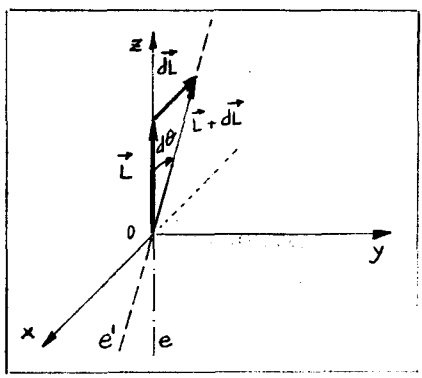
$$\vec{\tau} = -F\, d\, \vec{\imath}$$

Beraz momentu hau aplikatzean

$$-F\, d\, \vec{\imath} = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

$$d\vec{L} = -F\, d\, dt\, \vec{\imath}$$

Azken expresio honek argituko digu arazoa. $\vec{\omega}$ handia bada, $\vec{\tau}$ momentuak ez du $\vec{\omega}$ -ren modulua aldatuko. Bestalde $\vec{L}$-k $\vec{\omega}$-ren direkzioa ukanen du. Eta $d\vec{L}$ eta $\vec{L}$ perpendikularrak direnez, $\vec{L}$-k modulu berbera ukanen du. dt denbora pasatu eta gero,



$(\vec{L} + d\vec{L})$ bektoreak $d\theta$ angulua formatuko du $\vec{L}$ bektorearekin XOZ launean. Beraz, diskoaren ardatza XOZ launean higituko da, OY ardatzarekiko biratuz. Hori da e ardatzaren higidura.

Ikusten denez,sortzen den higidura, intuitiboki pentsa daitekeenaz bestelakoa da. Intuitiboki pentsatuz, lehen ikustaldi batetan e ardatzak Ox ardatzaren inguruan biratu behar duela dirudi; baina kalkuluak eginez, OY ardatzaren inguruan biratzen duela ikusten da.

10. GAIA - ESTATIKA

10.1 PUNTU MATERIAL BATEN EKILIBRIO-BALDINTZAK

10.2 SOLIDO BATEN EKILIBRIO-BALDINTZAK

10.3 SOLIDOAK ETA LOTURAK

10.4 LAN BIRTUALEN PRINTZIPIOA

Puntuaren eta partikula-sistemen Dinamika aztertzean, indarren eta higidur aldaketen arteko erlazioak aipatu ditugu. Orain Dinamikaren kasu berezi bat, mugako kasu bat aztertuko dugu: higidurarik ez dagoenekoa. Azterketa hau Estatika izeneko atalean egiten da. Hori da, hain zuzen ere Estatita: Gorputzen erreposoa estudiatzen duen Mekanikaren atala. Gai honetan ikusiko dugunez, Estatikaren muina, indar-sistemaren ekilibrioan datza, bai partikularen kasuan eta bai solido zurruna ren kasuan.

Dena den, higidurá kontzeptu erlatiboa dela dakigunez, erlatibotasun hau kontutan eduki beharko dugu. Gainera, Newton-en printzipioak inertzi sistemekiko emanak direnez, kontutan eduki beharko da hau, inertziakoak ez diren sistemak erabiltzean. Kasu honetan, 5.gaian ikusi genuen sistema ez-inertzialen Dinamikan (5.9.) finkatuko gara.

10.1 PUNTU MATERIAL BATEN EKILIBRIO-BALDINTZAK

Bi pausotan aztertuko dugu arazo hau: Lehenik, erreferentzi gisa sistema inertzial bat hartuz, eta gero, sistema ez-inertziala kontsideratuz.

a) Sistema inertziala

Partikula puntualari Newton-en legeak aplikatzen zaizkio. Ekilibrioan $\vec{a} = 0$; beraz, indarrek bete behar duten baldintza hauxe da:

$$\sum_i \vec{F}_i = 0$$

Partikula puntual baten gainean eragiten ari direnez, indarrak konkurrenteak dira, konkurrentzia-puntua partikula bera izanik. Beraz, puntu horrekiko:

$$\vec{\tau} = 0$$

Baina baldintza hau ez dugu erabiliko, beti eta hala-beharrez bete behar baita.

Beraz, indar erresultantearen baldintza baino ez dugu:

$$\sum_i \vec{F}_i = 0$$

Eta baldintza hau bektoriala denez, hiru baldintza eskalar agerri dira

$$\sum_i F_{ix} = 0 \qquad \sum_i F_{iy} = 0 \qquad \sum_i F_{iz} = 0$$

Baldintza honetaz gainera -hots $\vec{a}=0$ - puntua geldi egon dadin abiadurak ere nulu izan behar du:

$$\vec{v} = 0$$

Dena den, abiaduraren erlatibotasuna kontutan hartuz, $\vec{v} = K^{te}$ ere ekilibriotzat hartu behar dugu, kasu honetan ere indar-sistema ekilibrioan baitago.

b) Sistema ez-inertiala

Kasu honetan indar "errealez" gainera, indar "fiktizioak" hartu beharko ditugu kontutan, hau da, inertzi indarrak. Sistema ez-inertzialen dinamika aztertzean (5.9.), partikularen higidura arautzen duen ekuazioa, ondokoa dela ikusi genuen:

$$m\vec{a}' = m\vec{a} - m\vec{A} - m\dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}' - m\,\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') - 2m\,\vec{\omega} \times \vec{v}'$$

Estatikan ari bagara, $\vec{a}' = 0$

Ekuazio honetan, terminoek esangura hau dute:

$m\vec{a}$: Edozein inertzi sistematik (ta) ikusten den indarra. "Benetako" indarra edo indar erresultante "erreala" deitzen da.

$-m\vec{A}$, $-m\,\dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}'$, $-m\,\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}')$ eta $-2m\,\vec{\omega} \times \vec{v}'$

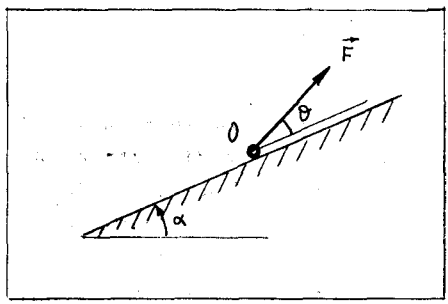
Hauk guztiok inertzi indarrak ditugu.

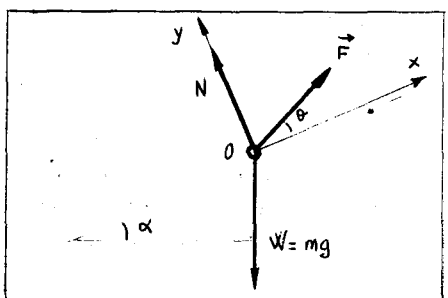
Estatika ez-inertzialean partikularen ekilibrio baldintzak hauxek dira:

$$\Sigma\ \vec{F}_{erreal} + \Sigma\ \vec{F}_{fiktizio} = 0$$

. Zenbait adibide. Aurreko lerroetan ikusitakoa hobeki ulertzeko, partikularen Estatikari buruzko adibide pare bat jarriko dugu. Lehena, inertzi sistema batekikoa, eta bigarrena sistema ez-inertzial batekikoa.

"Laun aldapatu batetan m masako partikula bat dago igurtzimendurik gabe. Launak α angulua formatzen du horizontalarekin. Zer modulu eduki behar du launarekin θ angulua formatzen duen $\vec{F}$ indarrak, partikula geldi egon dadin?"





Indarren eskema

Eragiten ari diren indarrak (partikularen gainean, noski) hauxek dira:

$\begin{cases} W = mg & : \text{pisua} \\ N & : \text{launaren normala (ez baitago igurtzimendurik)} \\ \vec{F} & : \text{kanpotik egina} \end{cases}$

Hirurak launkide edo koplanarioak dira. Beraz

$$\sum \vec{F}_i = 0 \qquad \begin{cases} \sum F_{ix} = 0 \\ \sum F_{iy} = 0 \end{cases}$$

Kalkuluak errazteko, irudian ageri den XOY sistema hartuko dugu erreferentziatzat.

$$\Sigma F_{ix} = 0 \longrightarrow F\cos\theta - mg\sin\alpha = 0$$

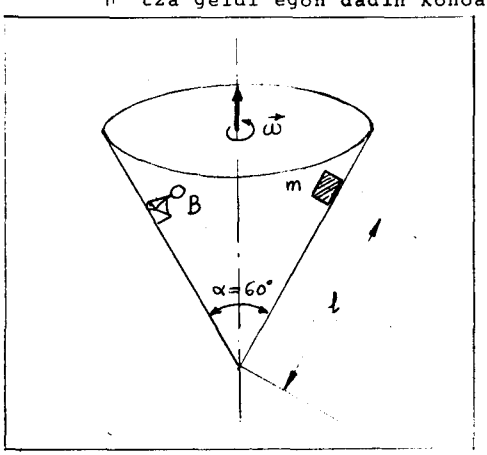
$$\Sigma F_{iy} = 0 \longrightarrow N + F\sin\theta - mg\cos\alpha = 0$$

Sistema honetatik F eta N kalkula ditzakegu

Lehen ekuaziotik $$F = \frac{mg\sin\alpha}{\cos\theta}$$

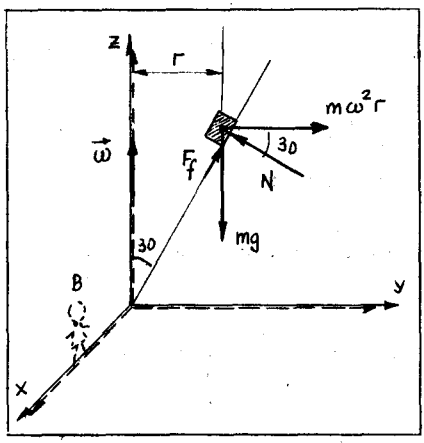
Bigarrenetik $$N = mg\cos\alpha - F\sin\theta = mg\cos\alpha - \frac{mg\sin\alpha\sin\theta}{\cos\theta}$$

"m masako gorputz bat, erpinean $\alpha = 60°$-tako angulua duen kono baten barnean dago, erpinetik ℓ distantziara. Konoa biraka ari da bere ardatzaren inguruan ω abiadura angularraz. Konoaren eta gorputzaren arteko igurtzimendu-koefizientea $\mu = 0{,}25$ da. Zertzu limiteren artean alda daiteke konoaren abiadura angularra, gorputza geldi egon dadin konoarekiko?"



Kasu hau sistema ez-inertzial batekiko estatikarena da. $\vec{\omega}$ konstante dela kontsideratuko dugu, inertzi indarren kalkulua errazteko.

i) Beherantz jausten hasten deneko muga aztertuko dugu lehenik. Konoarekin higitzen den behatzaileak (B delakoak) geldirik dakusa m masa. Beraz, indarrak (benetakoak eta inertziakoak) ekilibrioan daude.



Inertziako indar bakarra indar zentrifugua da, zeren eta

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{A} = 0 \\ \dot{\vec{\omega}} = 0 \\ \vec{v}' = 0 \end{array} \right\} \quad \text{baitira}$$

Bestalde, igurtzimendu-indarraren balorea hauxe da

$$F_f \leq \mu N$$

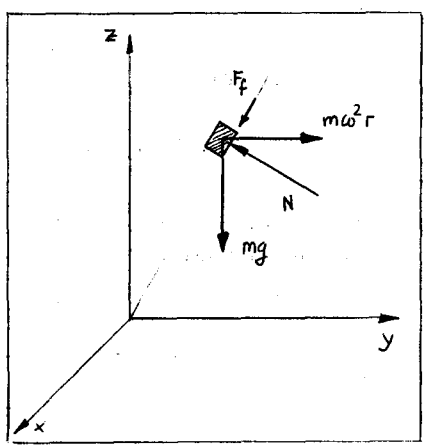
Mugan $\longrightarrow$ $F_f = \mu N$

Eta gorputza beherantz erortzeko mugan dagoenez, indar honen sentidoa goranzkoa da.

Ekilibrio-baldintzak hauxek dira:

$$\left. \begin{array}{ll} y: & \left\{ \begin{array}{l} m\omega^2 r - N\cos 30 + \mu N \sin 30 = 0 \\ -mg + N \sin 30 + \mu N \cos 30 = 0 \end{array} \right. \\ z: & \end{array} \right.$$

Bi ekuazio hauetatik ω eta N kalkula ditzakegu. ω hau ω_1 deituko dugu eta behera jausteko muga adierazten du.



ii) Kasu honetan, gorantz higitzen hasteko muga adierazten ari garenez, F_f delakoak beheranzko sentidoa edukiko du

Modulua

$$F_f = \mu N$$

(Oharra: Oraingo normalaren balioa eta lehengoa desberdinak dira. Berdin gertatzen da ω-rekin).

Ekilibrio-baldintzak hauxek dira:

$$\begin{array}{ll} y: & \left\{ m\omega^2 r - N\cos 30 - \mu N \sin 30 = 0 \right. \\ z: & \left\{ -mg + N \sin 30 - \mu N \cos 30 = 0 \right. \end{array}$$

Sistema honetatik ω eta N kalkulatuko ditugu. ω hau ω_2 deitu ko dugu eta goiko muga adierazten digu.

Beraz, partikula geldi egon dadin, abiadura angularraren balioak ondoko eran egon behar du mugaturik

$$\omega_1 \leq \omega \leq \omega_2$$

10.2 SOLIDO BATEN EKILIBRIO-BALDINTZAK

Dakigunez, bi dira solidoaren dinamika arautzen duten ekuazioak:

- $\vec{F} = \frac{d\vec{P}}{dt} = M\vec{a}_{MZ}$ — Indarren erresultanteak transaldatzezko higidur aldaketa sortzen du.

- $\vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt}$ — Birazko higidur aldaketa sortzen dutenak, indarren momentuak dira.

Beraz, ekilibrioa lortzeko, bi baldintza behar dira

$$\sum_i \vec{F}_i = 0$$

$$\sum_i \vec{\tau}_i = 0$$

Zer esanik ez, indar erresultantea nulua bada, indarren momentu erresultanteak balio berbera du puntu guztietan; eta batetan nulua bada, beste guztietan ere nulua da.

Idatzitako baldintzak bektorialak direnez, izatez, espazioan sei baldintza eskalar ditugu:

$$\sum_i F_{ix} = 0 \qquad \sum_i F_{iy} = 0 \qquad \sum_i F_{iz} = 0$$

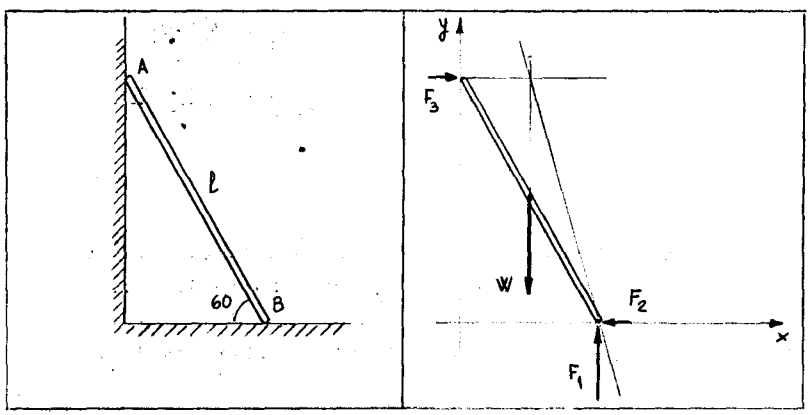
$$\sum_i \tau_{ix} = 0 \qquad \sum_i \tau_{iy} = 0 \qquad \sum_i \tau_{iz} = 0$$

Indar guztiak koplanario direnean, sei baldintza horik hiruta ra laburtzen dira. XOY delakoa launean harturik, hiru baldintza hauk geratzen zaizkigu:

$$\begin{cases} \sum_i F_{ix} = 0 \qquad \sum_i F_{iy} = 0 \\ \sum_i \tau_{iz} = 0 \end{cases}$$

. Adibideak

"Eskilara bat igurtzimendurik ez duen orma baten kontra dago, horizontalarekin 60°-tako angulua osotuz. Zoluaren igurtzimenduari esker eskilara ez da erortzen. Eskilararen pisua W bada, zenbat balio dute ormak eta zoluak egiten diôten indarrek?"



Eskuineko irudian eskilararen gainean eragiten duten indarrak adierazten dira:

W : pisua (masa-zentruan)

F_1 eta F_2 : B puntuan eragiten duen indarraren konposatu bertikal eta horizontala. Zoluak egiten duen indarra da denetára. Honek ez du normalaren direkzioa, igurtzimendua baitago.

F_3 : A puntuan ormak egiten duen indarra. Ormaren perpendikularra da, ez baitago igurtzimendurik.

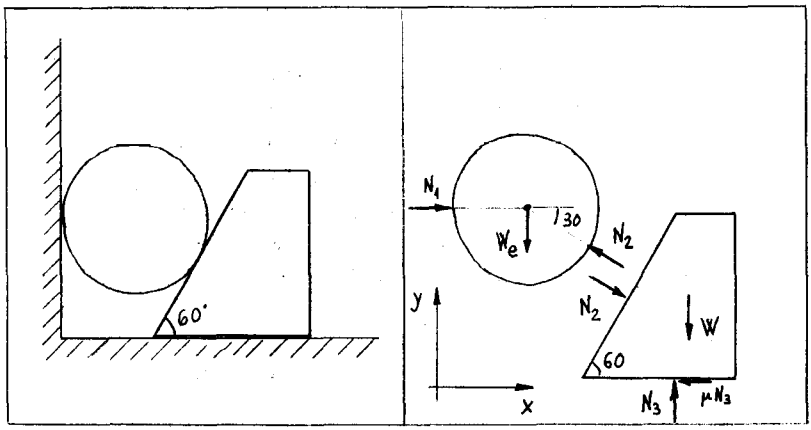
Indar guztiak launkideak dira:

$$\left.\begin{array}{ll} \Sigma F_{ix} \longrightarrow & F_3 - F_2 = 0 \\ \Sigma F_{iy} \longrightarrow & -W + F_1 = 0 \\ \Sigma (\tau_{iB})_z \longrightarrow & W \frac{\ell}{2} \cos 60 - F_3 \ell \sin 60 = 0 \end{array}\right\}$$

Sistema honetatik F_1 , F_2 eta F_3 kalkula daitezke

$$\left\{\begin{array}{l} F_1 = W \\ F_2 = \dfrac{W \operatorname{cotg} 60}{2} \\ F_3 = \dfrac{W \operatorname{cotg} 60}{2} \end{array}\right.$$

"Irudiko ziriak 10 kg-tako masa du eta lurrarekin duen igurtzimendu-koefizienteak $\mu = 0{,}3$ balio du. Kalkula bedi esferak ukan dezakeen masarik handiena, ziria higi ez dadin. Ziria ez dela irauliko onhartzen da".



Eskuineko eskeman bi solidoen gainean eragiten duten indarrak adierazten dira. Bi solidoak ekilibrioan egon behar dute.

a) Esfera: Hiru indarrak konkurrenteak dira. Beraz nahikoa da $\Sigma \vec{F}_i = 0$ egitea

$$\left.\begin{array}{ll} x: & N_1 - N_2 \sin 60 = 0 \\ y: & N_2 \cos 60 - W_e = 0 \end{array}\right\}$$

b) Ziria: Iraultzen ez dela dakigunez, ez dugu zertan $\Sigma \vec{\tau} = 0$ baldintza erabili behar. N_3 delakoak ekilibrioa lortzeko behar duen posizioa hartuko du.

$\Sigma \vec{F}_i = 0$ eginez

$$\left.\begin{array}{ll} x: & N_2 \sin 60 - \mu N_3 = 0 \\ y: & -N_2 \cos 60 + N_3 - W = 0 \end{array}\right\}$$

Honela lau ekuazio ditugu, lau inkognitarekin:

$$N_1 \ , \ N_2 \ , \ N_3 \quad \text{eta} \quad W_e$$

Sistema ebatziz, erraz lor dezakegu W_e-ren balioa.

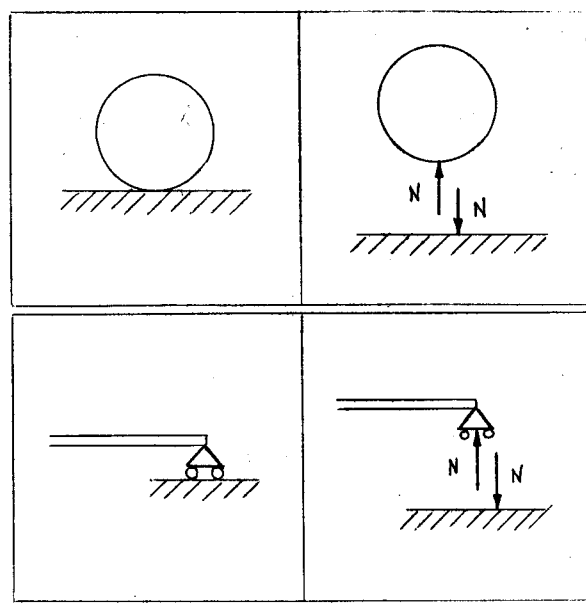
10.3 SOLIDOAK ETA LOTURAK

Solidoek harreman edo lotura bereziak ukan ditzakete beste gorputzekin. Lotura hauen bidez mugatu egiten da nolabait solidoaren higidura. Edozein modutan problemak ebazteko, kendu egiten dira loturak eta haien ordez, beste gorputzek loturan solidoari egiten dioten indarra jartzen da. Zer esanik ez, loturetako indarrek bete egiten dute akzio-erreakzioaren printzipioa, solidoen kontaktuz sortutako indarrak baitira.

Galdera honetan lotura moeten sailkapena eginen dugu, bide batez moeta bakoitzari dagozkion lotur indarrak adieraziz:

a) Kontaktu hutsezko loturak; Bi solido elkar ukitzen daude. Kontaktu hau igurtzimenduz edo igurtzimendu gabe izan daitekeenez, bi azpimoeta daude

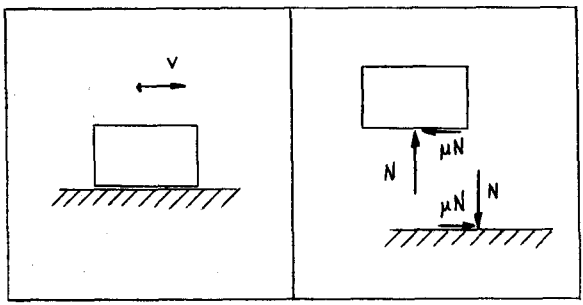
   a.1) Igurtzimendurik gabe. Kasu honetan lotur indarrek superfizien perpendikularraren direkzioa dute (Estatikan ari gara).



a.2) Igurtzimenduz. Kasu honetan indarrak ez du normalaren direkzioa. Bi konposatu jartzen dira:

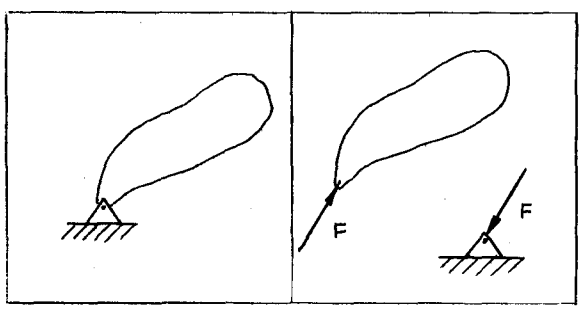
- N normala

- $F_r \leq \mu N$ (estatikan) superfiziearen tangentea eta higitzera jotzen dueneko sentidoaren kontrakoa



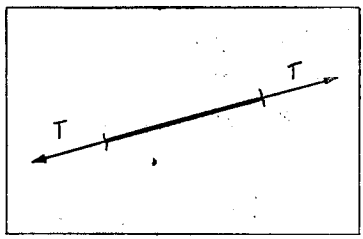
Normalaren kokatzearen arazoa ez da problema gorputza iraultzen ez bada. Behar den lekuan egonen da $\Sigma \vec{\tau} = 0$ izan dadin.

b) Puntu fixoa duen solidoa. Indarrak edozein direkzio har dezake, puntu fixotik pasatuz noski.

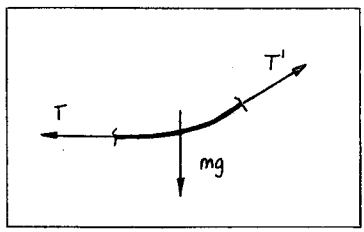


Kalkuluak errazteko, indar horren konposatuak erabiltzen dira gehienetan F_x , F_y

c) Sokak. Masa gabeko soken kasuan, sokak zuzentzat hartzen ditugu. Tentsio-indarrak egin ditzakete soilik.

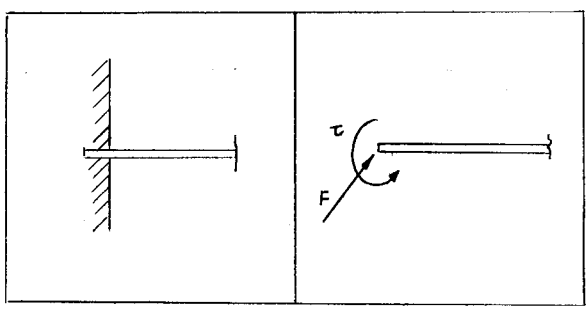


Sokaren masa kontsideratzean tentsioa aldatuz doa.

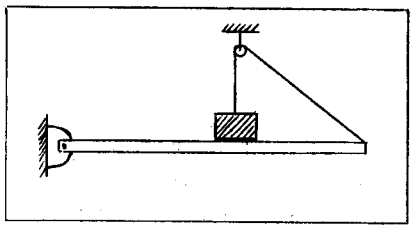


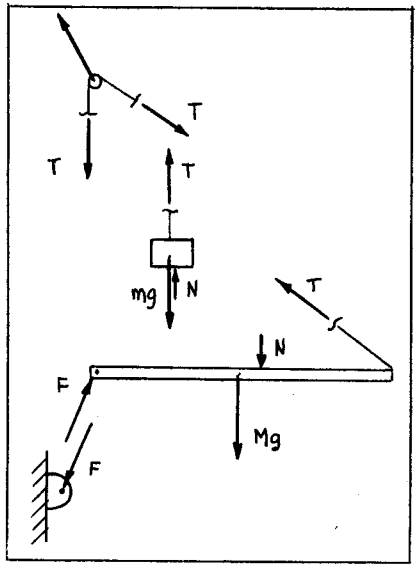
d) Barrak. Kasu honetan tentsiozko eta konpresiozko indarrak egin ditzakete, eta bai beste edozein sentidotan ere, zurruna bada.

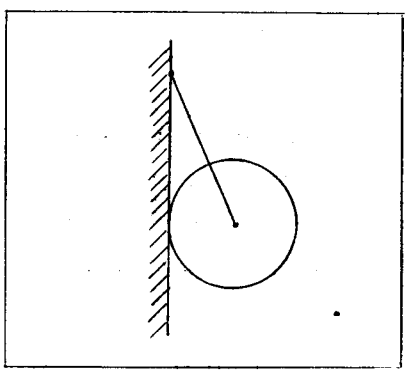
e) Barra ongi enprotaturik badago, indarraz gainera momentu bat ere ematen du

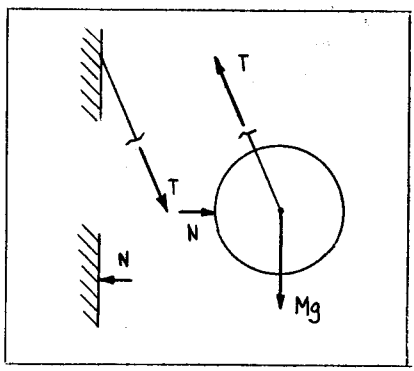


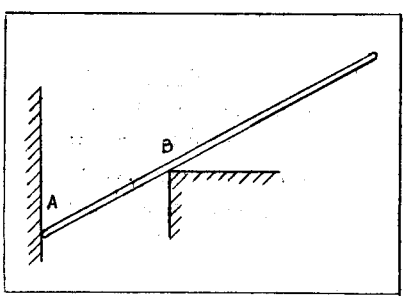
Galdera honekin bukatzeko, zenbait kasutako indarren eskemak adieraziko ditugu. Kasu hauetan guztiotan, loturak dituen solido baten estatika aztertzen da.

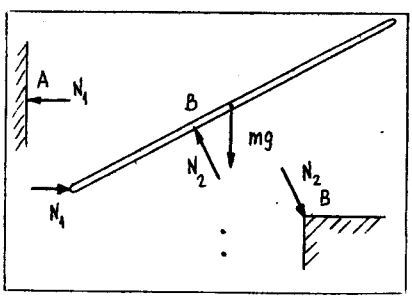



T
T
T
mg
N
T
N
F
Mg
F




T
T
N
N
Mg


B
A

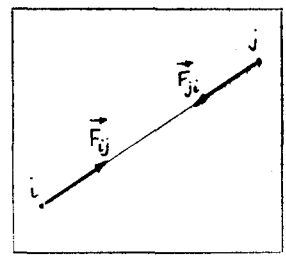

A
N1
B
mg
N2
N1
N2
B

10.4 LAN BIRTUALEN PRINTZIPIOA

Demagun ekilibrioan dagoen sistema mekaniko bat. Generalean, solidoez osoturik dagoela kontsideratuko dugu, eta solido horien artean lotura batzu daudela. Ekilibrioan egonik, sistema horretako partikula guztiak ere ekilibrioan daude. Sistema horretako i partikularen gainean hiru eratako indarrek eragiten dute:

$\vec{F}_i^{(ext}$ Kanpotik eragiten ari diren indarrak

$\vec{F}_i^{(int}$ Barne indarrak. Sistemako beste partikulen kausaz sortutakoak. i partikulari j partikulak egiten dion indarra $\vec{F}_{ij}$ deituko dugu. $\vec{F}_{ji}$, i partikulak j partikulari egiten diona da.



$$\vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ji}$$

Gainera, indar hauek $\vec{r}_{ij}$ bektorearen direkzioa dute.

$$\vec{F}_i^{(int} = \sum_j \vec{F}_{ij}$$

$\vec{F}_i^{(\ell}$ Loturetan sistemari egiten zaizkion indarrak.

Zer esanik ez, ekilibrioan

$$\vec{F}_i^{(ext} + \vec{F}_i^{(int} + \vec{F}_i^{(\ell} = 0$$

Kontsidera dezagun orain kontzeptu berri bat: <u>desplazamendu birtual infinitesimala</u>. Berau, loturak apurtu gabe gerta daitekeen desplazamendua da. Zer esanik ez, sistema ekilibrioan dagoenez, desplazamendu hori ez da goiko indarrek sortua. Nolabait esateko, asmapen matematikoa da; eta horregatik deitzen da birtual eta ez erreal.

i partikularen posizio-bektorea $\vec{r}_i$ izanik, desplazamendu birtual infinitesimala $\delta\vec{r}_i$ izendatuko dugu.

$\delta\vec{r}_i$ infinitesimala denez, eta loturak apurtzen ez direnez (definizioz), desplazamendu birtual horretan egiten den lan birtuala hauze izanen da (i partikulan):

$$\delta W = \vec{F}_i \cdot \delta\vec{r}_i = 0 = \left(\vec{F}_i^{(ext} + \vec{F}_i^{(int} + \vec{F}_i^{(\ell}\right) \cdot \delta\vec{r}_i$$

Eta sistema osoarena:

$$\sum_i \left(\vec{F}_i^{(ext} + \vec{F}_i^{(int} + \vec{F}_i^{(\ell} \right) \cdot \delta\vec{r}_i = 0$$

Azter ditzagun banan-banan termino hauk:

- $\sum_i \vec{F}_i^{(int} \cdot \delta\vec{r}_i$ Indar hauk guztiok ij bikotetan bil ditzakegu. Honela

$$\vec{F}_{ij} \cdot \delta\vec{r}_i + \vec{F}_{ji} \cdot \delta\vec{r}_j = \vec{F}_{ij} \cdot \delta\vec{r}_i - \vec{F}_{ij} \cdot \delta\vec{r}_j =$$
$$= \vec{F}_{ij} \cdot \left(\delta\vec{r}_i - \delta\vec{r}_j\right) = \vec{F}_{ij} \cdot \delta\vec{r}_{ij}$$

Eta solidoak aztertzen ari bagara, i eta j partikulen arteko distantziak konstante irauten duenez, $\vec{F}_{ij}$ eta $\delta\vec{r}_{ij}$ perpendikularrak dira. Beraz

$$\vec{F}_{ij} \cdot \delta\vec{r}_{ij} = 0$$

Eta denetara

$$\sum_i \vec{F}_i^{(int} \cdot \delta\vec{r}_i = 0$$

- $\sum_i \vec{F}_i^{(\ell} \cdot \delta\vec{r}_i$ Desplazamendu birtualak loturak apurtu gabe direnez, $\vec{F}_i^{(\ell}$ indarrek desplazamenduen perpendikularrak dira, <u>loturetan igurtzimendurik ez badago</u>. Kasu honetan lotur indarrek ez dute lanik egiten. Beraz:

$$\sum_i \vec{F}_i^{(\ell} \cdot \delta\vec{r}_i = 0$$

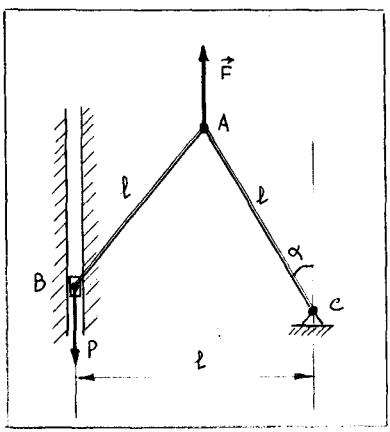
Beraz, azkenean geratzen zaiguna, hauxe da:

$$\sum_i \vec{F}_i^{(ext} \cdot \delta \vec{r}_i = 0$$

Hauxe da, hain zuzen ere, lan birtualen printzipioa: "Sistema bat ekilibrioan badago, sistema hori solido zurrunez osotu rik badago eta loturetan igurtzimendurik ez badago, kanpo-indarren lan birtuala nulua da".

Printzipio honen aplikatze modua adierazteko, adibide bat jarriko dugu.

"Lan birtualen printzipioa erabiliz, kalkula ezazue $\vec{F}$ eta $\vec{P}$ -ren arteko erlazioa, ekilibrio posizioan $\alpha = 30°$ izan dadin".



Oharra: Barrek pisurik ez dutela eta loturetan (A, B eta C puntuetan) igurtzimendurik ez dagoela onhartzen da.

Oharretako puntuak betetzen badira, lan birtualen printzipioa aplika daiteke.

$$\sum_i \vec{F}_i^{(ext} \cdot \delta \vec{r}_i = 0$$

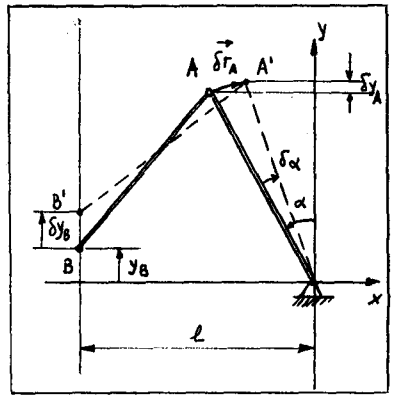
Kanpo-indarrak $\vec{F}$ eta $\vec{P}$ dira. Beraz

$$\vec{P} \cdot \delta \vec{r}_B + \vec{F} \cdot \delta \vec{r}_A = 0$$

Eta $\vec{P}$-k eta $\vec{F}$-k bertikalaren direkzioa dutenez, hurrengo irudiko erreferentzi sistema hartuz, honela geratzen zaigu:

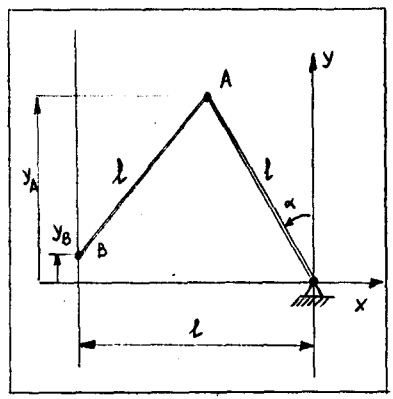
$$-P\,\delta y_B + F\,\delta y_A = 0$$

Beraz, δy_B eta δy_A kalkulatuko ditugu α-ren funtzioan, eta horretarako, lehenik y_A eta y_B kalkulatu behar ditugu.



$$\begin{cases} y_A = \ell\cos\alpha \\ y_B = \ell\cos\alpha - \sqrt{\ell^2 - (\ell - \ell\sin\alpha)^2} \end{cases}$$

Desplazamendu birtual infinitesimalak hauxek dira:



$$\delta y_A = -\ell\sin\alpha\,\delta\alpha$$

$$\delta y_B = -\ell\sin\alpha\,\delta\alpha - \frac{2(\ell - \ell\sin\alpha)\,\ell\cos\alpha\,\delta\alpha}{2\sqrt{\ell^2 - (\ell - \ell\sin\alpha)^2}}$$

P-ren eta F-ren arteko erlazioa hauxe da:

$$\frac{P}{F} = \frac{\delta y_A}{\delta y_B} = \frac{-\ell\sin\alpha\,\delta\alpha}{-\ell\sin\alpha\,\delta\alpha - \dfrac{2(\ell - \ell\sin\alpha)\,\ell\cos\alpha}{2\sqrt{\ell^2 - (\ell - \ell\sin\alpha)^2}}\,\delta\alpha}$$

Eta ekilibrioan $\alpha = 30°$ dela esan digutenez

$$\frac{P}{F} = \frac{-\ell\,\frac{1}{2}}{-\ell\,\frac{1}{2} - \dfrac{2\left(\ell - \frac{\ell}{2}\right)\ell\,\frac{\sqrt{3}}{2}}{2\sqrt{\ell^2 - \left(\ell - \frac{\ell}{2}\right)^2}}} = \frac{-\frac{\ell}{2}}{-\frac{\ell}{2} - \frac{\ell}{2}} = \frac{1}{2}$$