udako
euskal
unibertsitatea

OPTIKA

IRUINEA 1980

Banco de Vizcayak
BABESTUTAKO ARGITARAPENA

EDICION PATROCINADA POR EL
Banco de Vizcaya

OPTIKA

TEXTOA : FUNDAMENTOS DE OPTICA BRUNO ROSSI

REVERTE S.A.

EGILEA : JUANJO PEÑA JAUREGI

AURKIBIDEA

1. IKASGAIA: OPTIKA GEOMETRIKA ..... 1. ORRIALDEA

1.1. Sarrera eta optika geometrikoaren aplikazioa

1.2. Argiaren eredu gorpuzkularra eta ondulatorioa

1.3. Uhin-frontea eta izpia

1.4. Fermat-en printzipioa

1.5. Irudi erreal eta alegiazkoak

1.6. Irudien formazioa gainazal laun eta esferikoetan, errefrakzioz.

2. IKASGAIA: OPTIKA GEOMETRIKOAREN APLIKAZIOAK ..... 12. ORRIALDEA

2.1. Sistema optikoaren ezaugarri orokor batzuk

2.2. Lenteak

2.3. Prismak

2.4. Dispertsioa

2.5. Prisma akromatikoa

3. IKASGAIA: UHINEN ARTEKO INTERFERENTZIAK ..... 22. ORRIALDEA

3.1. Zenbait kontzeptu uhin mekanikoez, dimentsio batean

3.2. Zenbait kontzeptu uhin mekanikoez, hiru dimentsiotan

3.3. Kontsiderazio orokorrak

3.4. Uhin sinusoidalak

3.5. Uhin sinusoidalen hedakuntza

3.6. Anplitudearen eta fasearen arteko erlazioak isladapenean eta errefrakzioan

3.7. Funtzio sinusoidalen batuketa

3.8. Bi uhin esferikoren arteko interferentzia

3.9. Fresnel-en ispilu bikoitza; Lloyd-en ispilua eta Young-en zirrikitua

4. IKASGAIA: INTERFERENTZIAK MINTZ MEHEETAN 41.ORRIALDEA

4.1. Sarrera

4.2. Newton-en eraztunak

4.3. Interferentzia anizkoitzak;interferentzi zerrendak plaka laun paraleloetan

4.4. Interferentzia multiplearen azterketa matematikoa

4.5. Fabry-Perot-en interferometroa

5. IKASGAIA: HUYGENS-EN PRINTZIPIOA 57.ORRIALDEA

6. IKASGAIA: DIFRAKZIOA 67.ORRIALDEA

6.1. Huygens-Fresnel-en printzipioa

6.2. Uhin esferikoen propagazioa,bibrazio-kurba

6.3. Fresnel-en zonak

6.4. Difrakzioa,irekidura zirkularretan

7. IKASGAIA: FRAUNHOFER-EN DIFRAKZIO-FENOMENOAK ... 79.ORRIALDEA

7.1. Fraunhofer-en difrakzio-fenomenoak irekidura angeluzuzen batean

7.2. Fraunhofer-en difrakzio-fenomenoak irekidura zirkular batean.Tresna optikoen erabaki-muga

7.3. Fraunhofer-en difrakzio-fenomenoa bi irekiduretan

7.4. Difrakzio-sarea

8. IKASGAIA: POLARIZAZIOA 99.ORRIALDEA

8.1. Uhin argitsuen polarizazioa

8.2. Bi uhin polarizaturen gainezarmena : polarizazio eliptikoa eta zirkularra

8.3. Oinarrizko propietate optikoak,ingurune anisotropikoetan

8.4. Argi zirkularki eta eliptikoki polarizatuaren lorbidea

I.IKASGAIA

OPTIKA GEOMETRIKA

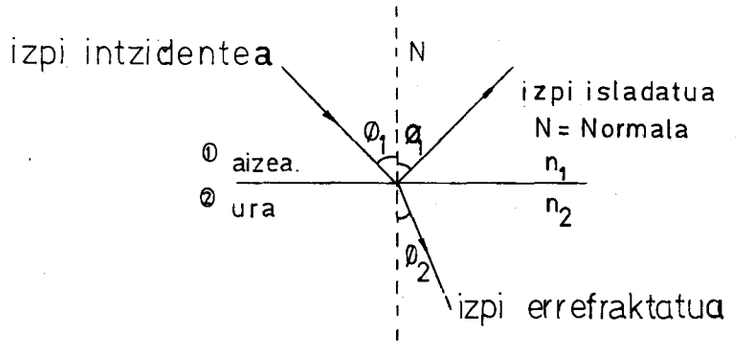
1.1. SARRERA ETA OPTIKA GEOMETRIKOAREN APLIKAZIOA

1.1.1. Optika geometrikoaren hiru legeak:

-Propagatze zuzenaren legea: Argia, ingurune homogeno batean, ibilbide zuzenean hedatzen da.

-Isladatzearen legea: Isladatzea eta nahiz errefraktatzea gertatu ahal izateko, baldintza hauek bete behar dira: bi ingurune desberdin eta gainazal laun batez bereziak edukitzea: gainera, bi ingurune horiek homogenoak eta isotropoak izan behar dute: hau da, zuzenbide guztietan propietate berdinak gorde behar dituzte.

-Errefraktatzearen legea: Isladatzea baino kasu orokorragoa da hau. Izpi intzidente batek izpi errefraktatu bat emango digu generalean, baina, kasu berezi batzuetan, izpi isladatua.



1.1.2. Izpiek bete behar dituzten propietateak:

a) Izpi intzidentea, isladatua eta errefraktatua plano berdinean daude, eta plano hori gainazal launarekin elkartzuta da: "intzidentzi planoa" esaten zaio.

b) Izpi intzidentearen eta normalaren arteko angelua, eta beronek izpi isladatuarekin duena, berdinak dira.

c) Izpi errefraktatuaren eta normalaren arteko angeluari $\emptyset_2$ esaten badiogu, ondoko erlazio hau beteko du:

$$\frac{\sin \emptyset_1}{\sin \emptyset_2} = \frac{n_2}{n_1}$$

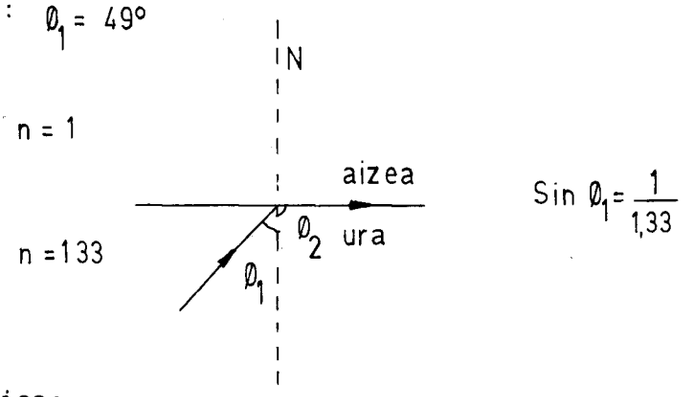
"Snell-en legea"

1.1.3. Isladatze osoa:

$n_2/n_1 < 1$ bada, eta $\emptyset_2=90°$, izpi errefraktatua eta gainazal leuna paraleloak izango dira.Une honetan dugun angelu intzidenteari, "angelu gorena" edo "muga angelua" esaten zaio ($\emptyset_1$).Fenomeno honi, berriz, isladatze osoa esango diogu.

Angelu gorena haunditzea nahi izango bagenu,Snell-en legea ez litzateke beteko: izpi intzidentea,errefraktatu ordez,isladatu egingo litzateke.

Adibidez,uretan: $\emptyset_1 = 49°$



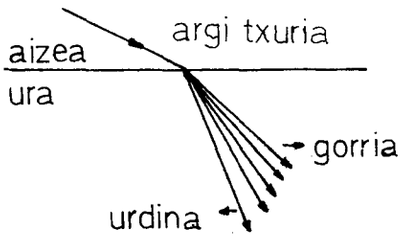
1.1.4. Dispertsioa:

Fenomeno hau errefrakzio-indize desberdineko inguruneen artean argiaren koloreak hartzen dituen aldakuntzak ikusiz aurkitu zen.

Saiakuntza bat egin dezagun:ingurune batetik n handiagoa duen beste batera bidal ditzagun kolore ezberdineko bi izpi(urdina eta gorria adibidez).Hasieratik bertatik zera ikus genezake,urdina gorria baino gehiago okertzen dela.

Bestalde, izpi txuria bidaliz gero bigarren ingurunean izpi-sorta bat ikusiko genuke,eta sorta hori kolore desberdineko izpiez osatua egongo litzateke.Saiakuntza honetatik ondoko emaitza atera genezake: argi txuria kolore desberdineko izpiez osatua dagoela.

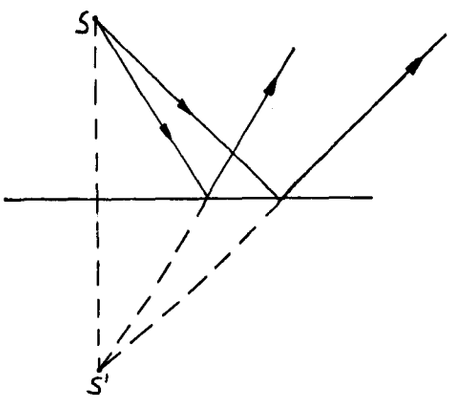
Aurrerantzean,gure lanetarako,argi monokromatikoa erabiliko dugu, hots, kolore bakar batekoa.



1.1.5. Isladatzearen propietate bat:(ispilu-irudia)

Gainazal leun bat izanez gero, eta bere baitan S iturri puntual bat,zera ikus genezake:izpi isladatuak luzatzen baditugu S' puntu batean elkar ebakitzen dutela eta,gainera,S eta S' gainazal horrekiko simetrikoak direla.

S'-ri "S-ren ispilu-irudia" esaten zaio.



1.2. ARGIAREN EREDU GORPUZKULARRA ETA ONDULATORIOA

1.2.1. Eredu gorpuzkularra:

Eredu honek dioenez,argia partikula-pila bat bezala kontsideratu behar da.Iturri batek(gorputz argiduna) bidaltzen ditu partikulok abiadura handi batez.

Ingurune homogeno batean,partikula horien artean ez da indarrik azaltzen,eta horregatik hedatzen dira ibilbide zuzenean.Baina, partikula horiek gainazal batera hurbiltzen direnean,beren artean indar txiki batzu agertzen dira.Indar horiek bi eratakoak izan ditezke: erakarpen-indarrak ala aldarapen-indarrak.

Erakarpen-indarrek errefrakzioaren fenomenoa emango digute,eta aldarapen-indarrek isladatzearena.

Partikula batzu zergatik elkartzen diren eta beste batzu zergatik urruntzen,ez dugu orain ikusiko.

1.2.2. Eredu ondulatorioa:

Eredu hau uhinak uretan nola hedatzen ziren ikusiz sortuko zen seguraski.

Guk badakigu gorputz bat uretara botaz gero uhinak zirkularki hedatzen direla.Horretxegatik,iturri argitsu bat badugu,iturri horrek bidalitako uhinak ginazal esferiko bat bezala hedatuko dira,bere erdigunea iturri puntuala izanik.

Optika Geometrikoaren fenomeno guztiak, eredu gorpuzkularraren bitartez ezin esplika daitezke.Eredu ondulatorioak,ordea,Optikaren fenomeno guztien azalpena eskaintzen digu.Ikusten dugunez,eredu ondulatorioa bestea baino orokorragoa dugu.

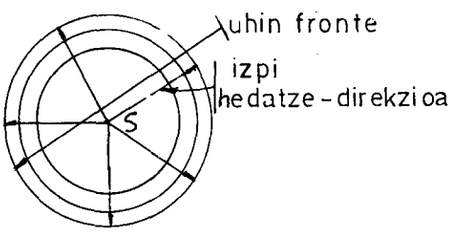
1.3. UHIN-FRONTEA ETA IZPIA

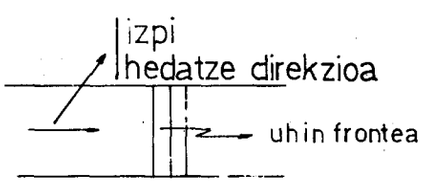
Zuzen-zuzen lan egitekotan,uhinekin egin beharko genuke; baina uhin--frontea eta izpiekin egingo dugu lan,halaz ere.

-Definizioa: Fase berdina duten puntu guztien ingurune geometrikoa da uhin-frontea.

Definizio hau kontuan harturik,iturri argitsu batetik uhinak zuzenbide guztietara hedatzen badira,edozein gainazal esferiko uhin-frontea izango da;esferaren erdigunea eta iturria puntu berean badaude.

-Uhin launa: Uhinen hedatzea direkzio batean gertatzen da,eta uhin--frontea plano horrekin elkartzuta da.Eredu ondulatorioan,uhin planoak berau zein direkziotan hedatzen den adierazten diguten lerro batzu dira.





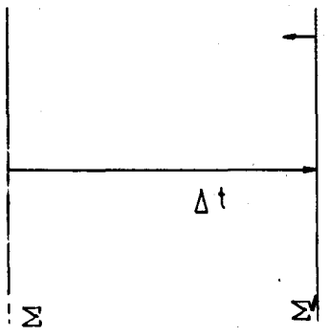
Lehen kasuan, uhin esferikoa dugunean,gainazal esferiko baten edozein erradioa izango litzateke izpi.Gainera,izpia eta hedatze-direkzioa berdinak dira.

1.4. FERMAT-EN PRINTZIPIOA

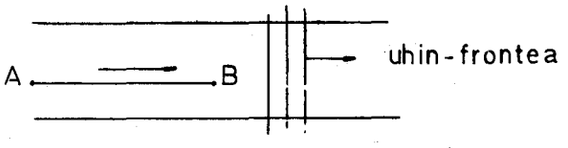
Hau ikusi baino lehen,beste bi printzipio ikus ditzagun:

a) Bide optikoen itzulgarritasunaren printzipioa: "Une batean uhin--fronte bat posizio batean badugu (Σ adibidez), denbora Δt neurriz aldatuz gero uhin-frontea Σ'-ra aldatuko da.Orain,hedatze-direkzioa

alderanztuz gero,eta denbora Δt berdinean aldatuz gero, uhin-frontea Σ'-tik Σ-ra pasako da.



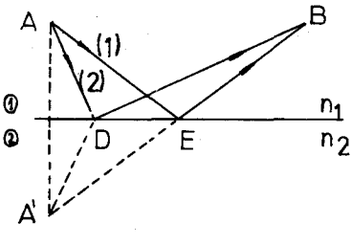
b) <u>Bide optikoaren printzipioa</u>: "Bi uhin-fronte lotzen dituzten izpi guztiek bide optiko berdina dute".Hau da: bi puntu(A,B) marra zuzen batez lotuak baditugu,bide optikoa,definizioz,zera izango da: $1 = n.\bar{AB}$



<u>Fermat-en printzipioa</u>:"Argia,puntu batetik bestera joateko,denbora gutxiena behar duen ibilbidetik joaten dela suposatuz,hedatze zuzenaren legea lor dezakegu:hots, argia, bide optiko txikiena duen ibilbidetik joango dela".

Hipotesi honekin,isladapenaren eta errefraktatzearen legeak lor ditzakegu:

1.-<u>Isladapenaren legeak</u>:Demagun gainazal batek bi ingurune desberdin erdibitzen dituela.



(1) A-tik izpi bat bidali,E-n isladatu eta B-ra doa.

(2) Beste edozein ibilbide,A-tik B-raino doana.

Lehen ibilbidean: $1_1 = n_1.\bar{AE} + n_1\bar{EB} = n_1(\bar{AE} + \bar{EB})$

$$1_2 = n_1.\bar{AD} + n_1\bar{DB} = n_1(\bar{AD} + \bar{DB})$$

Geometriaz: $\bar{A'D} = \bar{AD}$ eta $\bar{A'E} = \bar{AE}$

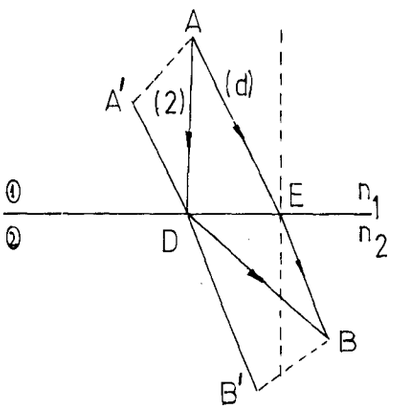
gainera, A'DB triangeluan,alde bat beste bien batura baino txikiagoa denez: $\bar{A'B} < \bar{A'D} + \bar{DB} \Rightarrow \bar{A'E} + \bar{EB} < \bar{A'D} + \bar{DB}$

orduan: $\bar{A'B} = \bar{A'E} + \bar{EB} \Rightarrow \bar{AE} + \bar{EB} < \bar{AD} + \bar{DB}$

hots: $1_1 < 1_2$ frogatu nahi genuenez-

Guzti honek zera esan gura du: bi puntuak ingurune berdinean egonez gero, beraiek lotzen dituzten ibilbide guztietatik,bide optiko txikiena duenak beteko duela isladatze legea.

2.-Errefraktatzearen legea:Aurrean ikusitako demostrazioaren antzekoa da hau ere:



(1) -tik: $1_1 = n_1 . \bar{A}\bar{E} + n_2 \bar{E}\bar{B}$

(2) -tik: $1_2 = n_1 . \bar{A}\bar{D} + n_2 \bar{D}\bar{B}$

D-tik bi izpi bidaliko ditugu,bata $\bar{A}\bar{E}$-rekiko paraleloa,eta bestea $\bar{E}\bar{B}$-rekiko paraleloa.

A-tik uhin intzidentearen frontea dibujatuko dugu, lehen marraztutako zuzena A'-n mozten delarik.B eta B' -rekin ere berdin gertatzen da.

Lehen emandako printzipioa dela bide:

$$1_1 = n_1 \bar{A}'\bar{D} + n_2 \bar{D}\bar{B}'$$

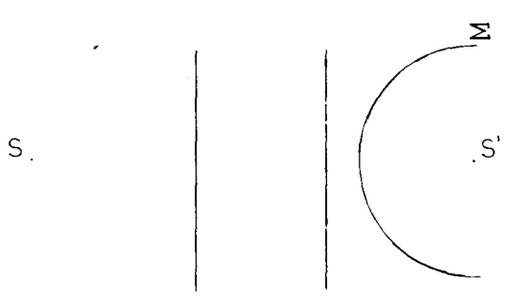
Begira dezagun triangelu hau: $\overset{\triangle}{A'DA}$ eta beste hau $\overset{\triangle}{DBB'}$

beraz: $\left.\begin{array}{l} \bar{A}'\bar{D} < \bar{A}\bar{D} \\ \bar{D}\bar{B}' < \bar{D}\bar{B} \end{array}\right\} \; 1_1 < 1_2$

A eta B ingurune desberdinetan baditugu.biek lotzen dituzten ibilbide guztietatik,bide optiko txikiena duenak,errefrakzioaren legea beteko du.

1.5. IRUDI ERREAL ETA ALEGIAZKOAK

Eman dezagun sistema optiko hau dugula: bi marra paraleloz irudikatua



Gainera, S iturri puntual bat. S-tik ateratako izpiek,sistema optikoa zeharkatu ondoren S' puntu batetik igaroko dira eta puntu honi S-ren irudia esango diogu.

Ba liteke, S'-tik barrena izpiak benetan pasatzea,eta orduan S'-ri "irudi erreala" deritzo.

Baliteke,ordea,S'-tik izpiak ez pasatzea,baina bai beren luzadura: orduan,S'-ri S-ren"alegiazko irudia"deritzo.

S' S-ren irudi erreala bada, S'-an iturri puntuala ipiniz gero,S izango litzateke S'-ren irudi erreala; honetxegatik, S eta S'-ri "puntu konjokatuak" deritze.

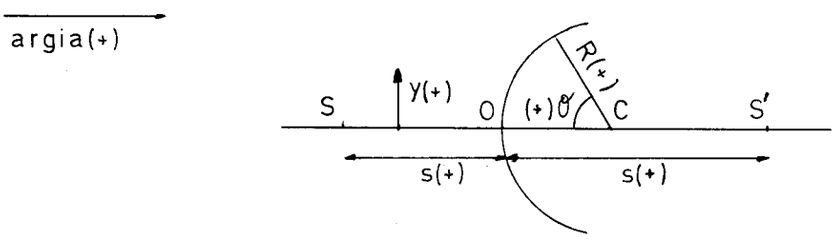
Suposa dezagun orain S eta S' uhin-fronte esferikoak direla,beren erradioa oso txikia izanik.Orduan, S eta S' lotzen dituzten ibilbide guztiek bide optiko berdina dute.Baita ere S eta S'-ren artean uhin-frontea (Σ) badugu: Σeta S' lotzen dituzten izpi guztiek bide optiko berdina dute.

1.6. IRUDIEN FORMAZIOA GAINAZAL LAUN ETA ESFERIKOETAN, ERREFRAKZIOZ

(ikus "Sears-Zemansky 41-8)

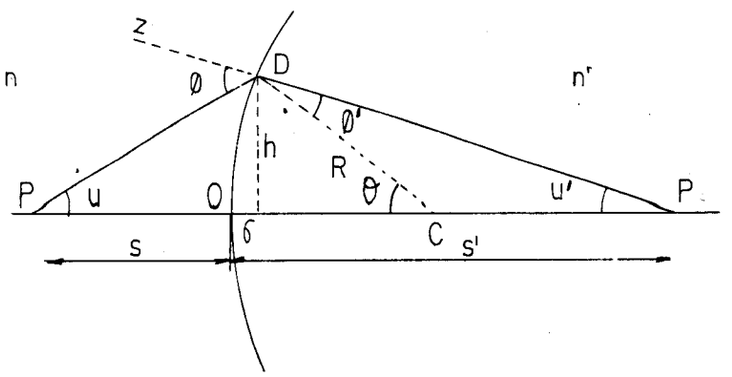
1.6.1. Ikurren hitzarmena:

1. Normalean,argia ezkerretatik eskuinetara hedatzen dela kontsideratuko dugu.
2. Objektuaren s distantzia erpinaren ezkerrean dagoenean,positibotzat hartuko dugu.
3. Irudiaren s' distantzia erpinaren eskuinean dagoenean,positibotzat hartuko dugu.
4. Kurbadura-zentrua erpinaren eskuinean dagoenean, kurbadura-erradioa positibotzat hartuko dugu.
5. Izpiaren ardatzarekiko edo normalarekiko malda positiboa denean angelu bat positiboa izango da.
5. Zeharkako dimentsioak (ardatzarekiko elkartzutak),goraka doazenean positiboak izango dira.



1.6.2. Irudien sortzea Optika Paraaxialean:

Eman dezagun azpian agertzen den irudia dugula:



non : n,n' : errefrakzio-indizeak diren

C : kurbadura-zentrua

R : (OC) kurbadura-erradioa

P,O,C,P' hartzen dituen lerroa: ardatza.

-<u>Snell-en legearen antzaldatzea</u>:

Berez,legeak itxura hau du: $n.\sin \emptyset = n'.\sin \emptyset'$

Geometriaz: $\text{tg } u = h/ s+\delta$

$\text{tg } u' = h/ s'-\delta$

$\text{tg } \theta = h/R-\delta$

begira ditzagun triangelu hauek : $\widehat{PDC}$ eta $\widehat{CDP'}$

dakigunez,kanpoko angeluak eta bi barneko angeluen baturak berdinak izan behar dute; hots: $\emptyset = u + \theta$ eta $\theta = u' + \emptyset'$

Optika Paraaxialean gaudenez gero,hurbilketa hauek egin ditzakegu

$\sin \emptyset \cong \emptyset \cong \text{tg}\emptyset$

$\sin \emptyset' \cong \emptyset' \cong \text{tg}\emptyset'$

Beraz, Snell-en legea: $n\emptyset = n'\emptyset' \Longrightarrow \boxed{\emptyset' = (n/n')\emptyset}$

Orain, $\theta = u' + \emptyset'$ adierazpenean ipiniaz:

$$\theta = u' + n/n'\emptyset \longrightarrow \theta = u' + n/n'(u+\theta) \longrightarrow n\theta = n'u' + nu + n\theta$$

$$\boxed{\theta(n'-n) = n'u'+nu} \qquad (1)$$

Gainera, $\delta \to 0$ (oso txikia denean) beste hurbilketa hauek egin ditzakegu:

$$u = h/s \qquad u' = h/s' \qquad \theta = h/R$$

(1)-an sartuz gero:

$(n'-n)\,h/R = n'\,h/s' + n\,h/s$ eta h-ez zatituz gero:

$$\boxed{n/s + n'/s' = (n'-n)/R} \qquad (2)$$

Hemendik,irudi-distantzia ezagutuz gero objektu-distantzia aurki dezakegu,eta alderantziz.

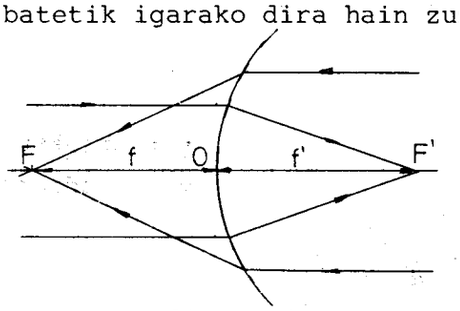
-Gainazala leuna balitz: Gainazal esferiko baten kasu berezia baizik ez litzateke izango (R =∞). Orduan:

$$n/s + n'/s' = 0 \longrightarrow \boxed{s'/s = -n'/n}$$

1.6.3. Objektu irudi distantziak eta fokuak:

Definizioa: Lehendabiziko ingurunetik ardatzari paraleloak diren izpiak bidaltzen baditugu,errefraktatzean denak puntu batetik pasako dira: F' puntu honi "irudi fokua" deritzo.

Bigarren ingurunetaik gauza berdina egiten badugu,izpiak errefraktatzean beste puntu batetik igarako dira hain zuzen :F "objektu fokutik"



OF' edo f' distantziari "irudiaren distantzia fokala" deritzo
OF edo f distantziari "Objektuaren distantzia fokala" deritzo.
f eta f' elkarrekin lotzeko (2) adierazpen erabiliko dugu.

s = ∞ denean, s'=f' da. beraz $n'/f' = (n'-n)/R$ $\quad f' = \frac{n'}{n'-n}\cdot R$

s'= ∞ denean, s= f da, hots, $n/f = (n'-n)/R$ $\quad f = \frac{n}{n'-n}\cdot R$

n eta n' bakanduaz : $n' = f'(n'-n)/R$

$n = f(n'-n)/R$

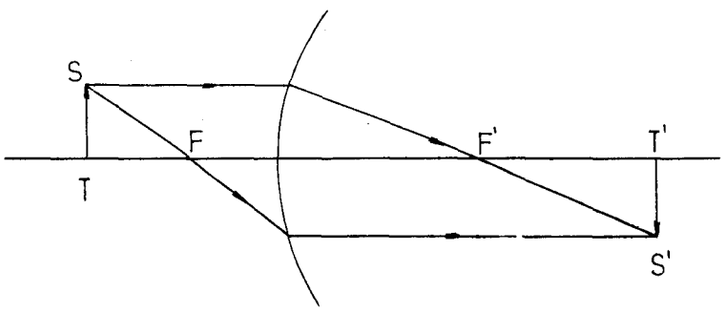
(2)-n n eta n'-ren adierazpenak ipiniaz:

$$\frac{n'-n}{Rs}\cdot f + \frac{n'-n}{R\cdot s'}\cdot f' = \frac{n'-n}{R}$$

(n'-n)-z zatituz:

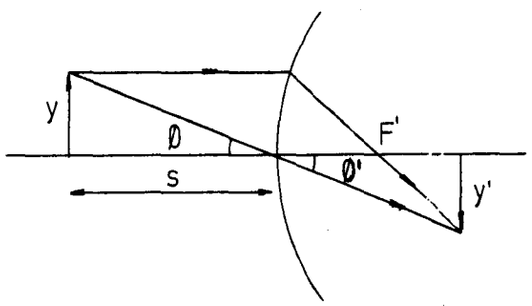
$$\boxed{f/s + f'/s' = 1}$$

Orain,fokuen posizioak ezaguturik iturri baten irudia grafikoki aurkitu nahi izango bagenu, arazoa asko erraztuko da,izpiak fokuetatik pasako bait dira



Iturria puntuala izan beharrean TS dimentsiokoa izango balitz, bere puntu bakoitzarekin s-rekin egin duguna egin ahal izango genuke. Eragiketa hauen emaitza T'S' beste irudi dimentsionala da.

1.6.4. Aldetako handipena:



y = objektuaren luzera

y'= irudiaren luzera

Definizioa, aldetako m handipena zera da: $m = y'/y$

Snell-en legea betetzen denez gero: $n.\sin \varnothing = n'.\sin \varnothing'$

gainera: $\operatorname{tg} \varnothing = y/s$ eta $\operatorname{tg}\varnothing' = -y'/s'$

eta, lehen egindako hurbiļketak kontutan harturik:

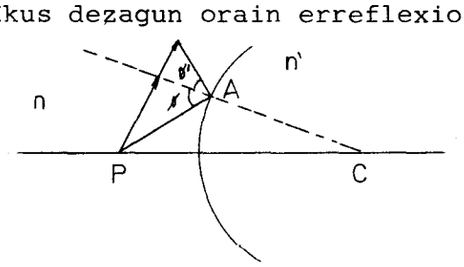
$$n \operatorname{tg} \varnothing = n' \operatorname{tg} \varnothing' \quad \text{edo} \quad n\frac{y}{s} = -n'\frac{y'}{s'}$$

hau da:

$$\boxed{m = \frac{y'}{y} = \frac{-n\,s'}{n's}}$$

1.6.5. Erreflexioa gainazal esferikoetan:

Ikus dezagun orain erreflexioa, errefrakzioaren kasu berezia bezala.



Ardatzeko puntu batetik izpia gainazal esferikorantz bidaliko dugu:

$n \sin \varnothing = n' \sin(180 - \varnothing')$

$n \sin \varnothing = n' \sin \varnothing'$

Erreflexio-legetik badakigu $\varnothing$

eta $\emptyset'$ balio absolutuz berdinak direla.

Begira dezagun beren sinuak berdinak diren ala ez.Horretarako, izpia bi osagaitan zatituko dugu; $\emptyset$ positibotzat harturik,$\emptyset'$ negatiboa izango litzateke,eta hain zuzen:

$$\sin \emptyset = -\sin \emptyset' \quad \text{hots} \quad \boxed{n=-n'}$$

Orain, errefrakzioarentzat aurkitu ditugun adierazpen guztietan n-ren ordez, -n' ipiniko dugu:

$$n/s + n'/s' = (n' - n)/R \longrightarrow -n'/s + n'/s' = (n' + n')/R \longrightarrow$$

$$\longrightarrow n'/s + n'/s' = 2n'/R \longrightarrow \boxed{1/s - 1/s' = -2/R}$$

Aurki dezagun orain objektu eta irudiaren distantzi fokala:

$s = \infty \rightarrow s' = f'$ eta $1/\infty - 1/f' = 2/R$ hots $1/f' = s/R$ $\boxed{f'=R/2}$

$s' = \infty \rightarrow s = f$ eta $1/f = -2/R$ eta azkenean $\boxed{f=-R/2}$

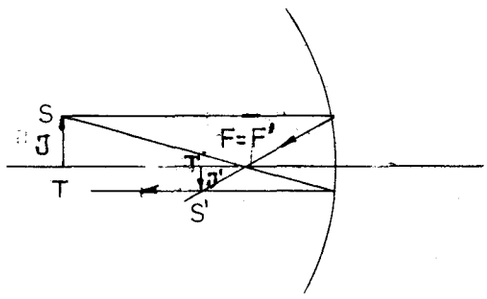
(F=F') Aurrerantzean,ispilu-distantzia fokala,positibotzat hartuko dugu, objektuaren distantzia fokalarekin bat datorrenean.

$$1/s - 1/s' = 1/f$$

Gainazal leun bat baldin badugu ($R=\infty$)

$$1/s - 1/s' = 0 \longrightarrow 1/s = 1/s' \quad \text{beraz,} \quad \boxed{s = s'}$$

Fokuaren posizioa ez dugunean, irudiarena ere ezin dugu jakin



s' s-ren irudia da.
iturria dimentsionala bada,irudia ere berdin.

Aldetako m handipena kalkutatu nahi badugu:

$m = y'/y = -n.s'/n'.s$ (errefrakzioarentzat)
($n=-n'$) beraz,

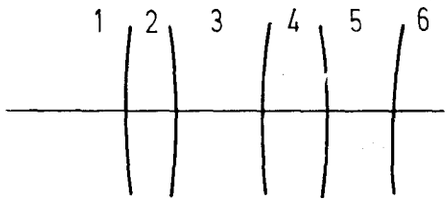
$$m = \frac{y'}{y} = \frac{n' \cdot s'}{n \cdot s} = \frac{s'}{s}$$

II.IKASGAIA

OPTIKA GEOMETRIKOAREN APLIKAZIOAK

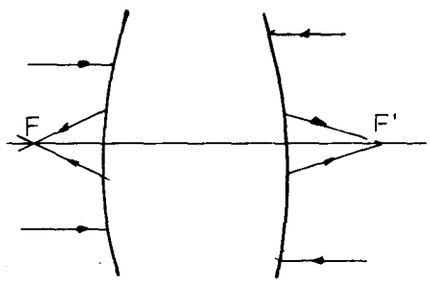
II.I SISTEMA OPTIKOAREN EZAUGARRI OROKOR BATZU:

Kontsidera dezagun orain ingurune desberdin pilo bat dugula, bakoitza gainazal optiko batzuren bidez berezia.Eman dezagun gainazal esferiko horien kurbadura-zentruak lerro zuzen batean daudela: "ardatza" deritzon lerroan,hain zuzen ere. Sistema honek emaniko irudia aurkitzeko,gainazal bakoitzak emango lukeen irudia,hurrengoaren objektua kontsideratuko dugu gainazal guztiekin.Honela egin ondoren aurkitzen dugun azken irudia,hura izango da sistema osoak emandakoa.



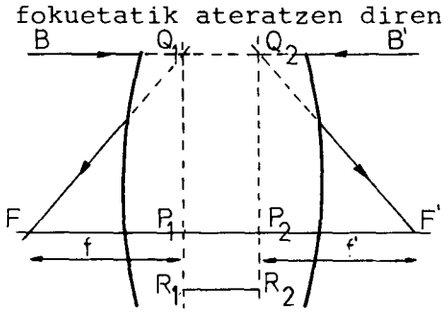
Argi dago,metodo hau luzeegi eta neketsuegia gertatzen dela.

Beste metodo bat lortu behar dugu;horretarako,4 puntu ezagutu beharko ditugu: bi puntu fokal eta bi puntu nagusi.



F nahiz F' aurkitzeko,gainazal bakoitzari izpi paraleloak bidaltzea da komenigarriena;honela, izpi-sorten ebaki-puntuak fokuak izango dira.

Puntu nagusiak lortzeko,BB' lerro zuzena marraztuko dugu,eta baita fokuetatik ateratzen diren izpien irudiak ere.



Lehen eta bigarren inguruneetan zehar dabiltzan izpiak luzatzen baditugu,BB' zuzena puntu batzutan ebakiko dute(Q_1 eta Q_2).

Orain, bi puntu hauetan BB' zuzenarekiko elkartzutak diren bi plano marrazten baditugu bai Q_1-an eta bai Q_2-an,ardatz nagusia puntu berezi batzutan moztuko dute: P_1-ean eta P_2-an hain zuzen.

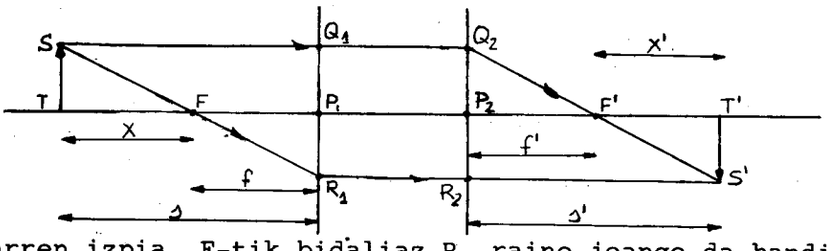
P_1-i eta P_2-ri "puntu nagusiak"deritze,eta planoei,"plano nagusiak".

Q_1 eta Q_2 konjokatuak dira.Honek zera esan nahi du: Q_1 Q_2-ren irudia dela,eta alderantziz.

Frogaketa: $\overline{BQ_1} \longrightarrow \overline{Q_2F'}$ Ikusten dugunez,bi izpi horiek Q_2-tik
$\overline{FQ_1} \longrightarrow \overline{Q_2B'}$ pasatzen dira,eta Q_2 Q_1-en irudia izango da.

Propietate hau hedakorra da:lehendabiziko plano nagusian dagoen edozein puntuk,badu bere konjokatua edo homologoa bigarren plano nagusian.Puntu hori bilatzeko lerro zuzen bat marraztu behar dugu,eta lerro honek bigarren plano nagusia puntu batean moztuko du:puntu homologo edo konjokatuan.Adibidez,R_1-ek R_2-an.

Demagun,irudiaren posizioa grafikoki aurkitu beharrean gaudela,bi fokuen posizioa eta plano nagusia non dagoen ezagutuz.Horretarako s iturri puntuala izanik,Q_1-erantz ardatzarekiko izpi paralelo bat botako dugu.Izpi honek, lehen plano nagusia Q_1-an moztu ondoren,Q_2-tik igaro,eta s'-raino joko du.Q_1 eta Q_2 elkarrekiko homologoak direnez gero,F'-tik pasa beharko bait du izpiak.



Bigarren izpia, F-tik bidaliaz,R_1-raino joango da,handik R_2-raino eta bigarren plano nagusiarekiko elkartzutik aterako da.

Bi izpiak s' puntuan elkarrenganatuko dira;hots,s' s-ren irudia izango da.

Beti bezala,iturria puntuala bada,irudia ere horrelakoa izango da, eta dimentsionala balitz,ST-ri S'T'-legokio.

s : "objektu-distantzia" dugu.
s': "irudi-distantzia" dugu.

Definizioa:

$$s - f = x$$
$$s' - f' = x'$$

Begira ditzagun orain bi triangelu hauek: $\widehat{SQ_1R_1}$ eta $\widehat{FP_1R_1}$

non: $s/f = \dfrac{Q_1R_1}{P_1R_1}$ $\qquad$ $\boxed{f/s = \dfrac{P_1R_1}{Q_1R_1}}$

eta beste honekin $\widehat{Q_2R_2S'}$ eta $\widehat{Q_2P_2F'}$

non: $\boxed{f'/s' = \dfrac{Q_2P_2}{Q_2R_2}}$

gainera: $Q_1R_1 = Q_2R_2$ batura zera izango da:

$$f/s + f'/s' = \frac{P_1R_1 + Q_2P_2}{Q_1R_1} \qquad \boxed{f/s + f'/s' = 1} \qquad (1)$$

Sar ditzagun orain s eta s8-ren balioak (1) formulan:

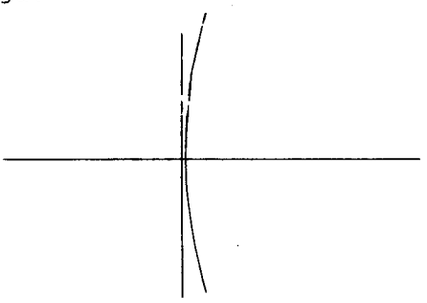
$f/(f+x) + f'/(f'+x') = 1 \quad f(f'+x') + f'(f+x) = (f+x).(f'+x')$

Beraz: ~~$f\cdot f'$~~ + ~~$f\cdot x'$~~ + $f'\cdot f$ + ~~$f'\cdot x$~~ = ~~$f\cdot f'$~~ + ~~$f\cdot x'$~~ ~~$+x\cdot f'$~~ $+x.x'$

eta,azken batean: $\boxed{x.x' = f.f'}$ (2) Newton-en formula.

(1) eta (2) oso orokorrak dira eta gure sisteman.gainazal esferikoen artean,beste gainazal launak izan bagenitu erabilgarriak ziratekeen.Are gehiago,Q_1 eta Q_2-ren artean dagoen sisteman gainazal bakarra besterik ez bagenu ere,baliogarriak izango lirateke.

Gainazal bakar hori, erreflektagarria nahiz errefraktagarria izan daiteke.Errefraktagarria bada,lehen ikusitakoaren arauera moldatuko gara.<u>Erreflektagarria</u> izanez gero,aldiz, bi plano nagusiek bat egiten dute,eta bere posizioa ezagutzeko ardatzarekiko elkartzuta eta gainazal esferikoaren erpinetik pasatzen den planoa marraztu beharko dugu.



a) Gainazala <u>errefraktagarria</u> dugunean,bi adierazpen horiek bat etortzen dira,f objektuaren distantzia fokala eta f' irudiaren distantzia fokala izanik.

b) Gainazala erreflektagarria dugunean, f=-f' da. Beraz, (1)-ek honelako itxura hartuko du:

$$f/s - f/s' = 1$$

f-z zatituz: $1/s - 1/s' = 1/f$ guztiz ezaguna dugun formula.

(2) adierazpenak, berriz, itxura hau hartuko luke:

$$x.x' = f.(-f) = -f^2$$

c) Beste kasu batean f=f' izan daiteke, eta orduan:

(1) : $1/s + 1/s' = 1/f'$

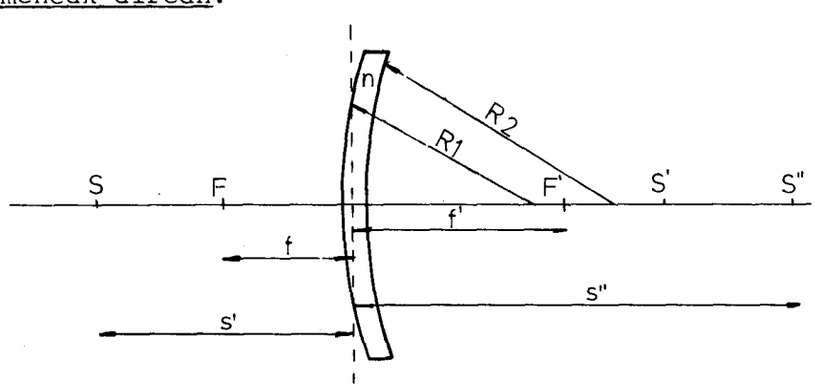
(2) : $x.x' = f^2$

II.2 LENTEAK

Definizioz, lentea zera da: bi gainazal esferikoen edo gainazal laun eta esferikoen artean edozein material gardenek osatzen duen sistema optikoa.

Kasu batzutan, bi gainazal horien artean dagoen distantzia beraien kurbadura-erradioak baino askoz txikiagoa izango da, eta "lente mehea" izendatuko dugu. Beste kasu guztietan, "lente lodia" izenez bataiatuko dugu.

a) Lente meheak airean:



Lehen gainazalak ematen digun irudia kalkula dezagun: $1/s + n/s" = \frac{n-1}{R_1}$

Orain, irudia, objektu bezala jar dezagun, bere distantzia -s"izanik.

Kalkula dezagun orain bigarren gainazalak emandako irudia:

$$n/-s" + 1/s' = (1-n)/R_2$$

Bien batuketa eginaz:

$$\boxed{1/s + 1/s' = (n-1)\ (1/R_1 - 1/R_2)}$$

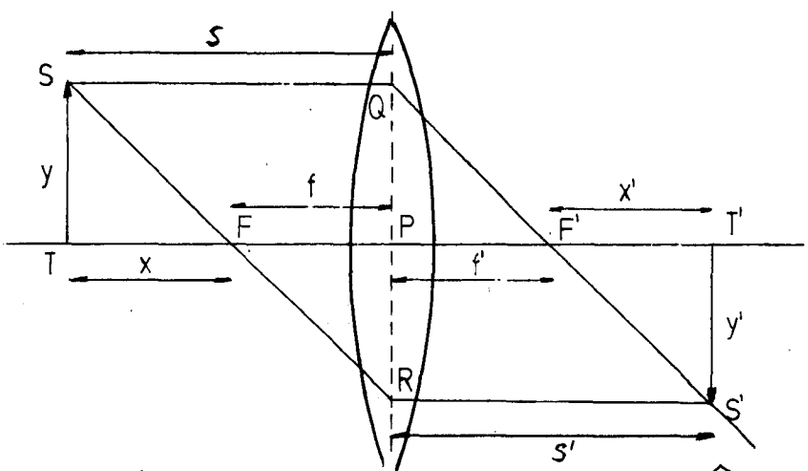
Fokuak aurki ditzagun:

$$\left.\begin{array}{l} s=\infty \quad s'=f' \\ s'=\infty \quad s=f \end{array}\right\} \quad \text{eta} \quad \begin{array}{l} 1/f=(n-1)(1/R_1-1/R_2) \\ 1/f'=(n-1)(1/R_1-1/R_2) \end{array}$$

hau da, distantzia fokalak berdinak dira:

$$1/s + 1/s' = 1/f$$

1/f-ri "Ahalmen dioptrikoa" deritzo.f metrotan neurtuaz gero, ahalmen diotrikoa dioptriatan neurtzen da.



Irudi honetan, triangelu hauek begira ditzagun: $\widehat{SQR}$ eta $\widehat{FPR}$

ikusten denez: $SQ/QR = f/PR$; eta, alderantziz, $QR/SQ = PR/f$.
gainera $\widehat{QRS'}$ eta $\widehat{QPF'}$ begiratuaz: $QR/RS' = QP/f$
non: $QR = y-y'$ eta $\dfrac{y-y'}{s} = \dfrac{-y'}{f}$

$$\frac{y-y'}{s'} \qquad \frac{y}{f}$$

Elkarrekin zatituz: $\dfrac{(y-y')/s}{(y-y')/s'} = \dfrac{-y'/f}{y/f} \Rightarrow \dfrac{y-y'}{s} \cdot \dfrac{y}{f} = \dfrac{y-y'}{s'}(-y'/f)$

$$\boxed{m = \frac{y'}{y} = -s'/s}$$

b) Aldetako hadipena f(x.x') bezala?

Triangelu hauek kontutan harturik" $\widehat{TSF}$ eta $\widehat{FPR}$

beraz: $y/x = PR/f == y/x = -y'/f \Rightarrow \boxed{m= y'/y = -f/x}$

beste bi triangelu hauek begiratuz: $\widehat{QPF}$ eta $\widehat{FT'S'}$

hots: $y/f = -y'/x' \Rightarrow \boxed{m=y'/y = -x'/f}$

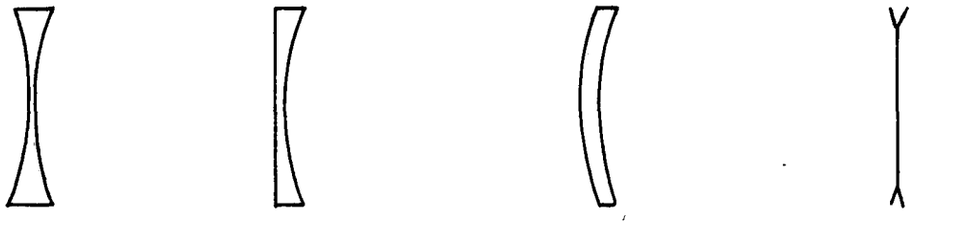
LENTE MOTAK

a) Konbergenteak: distantzia fokala positiboa dute.



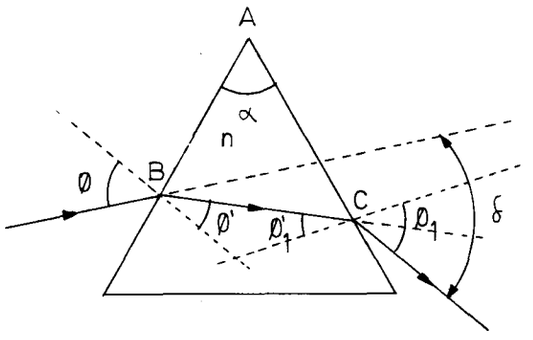
bikonbexua laun-konbexu menisko-konbergentea irudia

b)· Diberfenteak: distantzia fokala negatiboa dute.



bikonkaboa laun-konkabo menisko-dibergentea irudia

II.3 PRISMAK



Eman dezagun izpi bat prisma batean zehar pasatzen dela.Izpi honek bi errefrakzio izango ditu (B eta C-n) δ : "Desbidazio-angelua":izpi intzidenteak eta prismatik ateratzen denak osatutakoa.

δ Gehienetan, α , n eta Ø-ren funtziopekoa izango dugu.non:

α : prismaren angelua den

n : prismaren errefrakzio-indizea.

hain zuzen ere: $\boxed{\delta = (\emptyset - \emptyset') + (\emptyset_1 - \emptyset'_1)}$ (1)

Triangelu honetan : $\widehat{ABC}\ \alpha + (\frac{1}{2}\pi - \emptyset') + (\frac{1}{2}\pi - \emptyset'_1) = 180° = \pi$

Eragiketak egin ondoren:

$$\alpha + \pi - \emptyset' - \emptyset'_1 = \pi \Longrightarrow \boxed{\emptyset' + \emptyset'_1 = \alpha} \quad (2)$$

(2)-tik : $\emptyset' = \alpha - \emptyset'_1$

(1)-etik: $\delta = (\emptyset - \alpha + \emptyset'_1) + (\emptyset_1 - \emptyset'_1) \Longrightarrow \boxed{\delta = \emptyset + \emptyset_1 - \alpha}$ (3)

Gainera, B-n eta C-n Snell-en legea aplika dezakegu:

$\boxed{\sin \emptyset / \sin \emptyset'} = n$ (4) $\qquad \boxed{\sin \emptyset_1 / \sin \emptyset'_1 = n}$ (5)

(2), (3), (4), eta (5)-etik zera lor dezakegu: $\delta = f(\alpha, n, \emptyset)$ bezala

Kasu orokorra ez dugu ikusiko, kasu berezia baino: angeluak oso txikiak direnean hurbilketa hauek egin ditzakegu: $\sin \emptyset \simeq \emptyset$

(4)-tik $\emptyset/\emptyset' = n$ eta (5)-etik $\emptyset_1/\emptyset_1' = n$

beraz: $\emptyset' = \emptyset/n \quad \emptyset_1' = \emptyset_1/n$

(2)-n sartuz: $\emptyset/n + \emptyset_1/n = \alpha \longrightarrow \boxed{\emptyset + \emptyset_1 = n\alpha}$ (6)

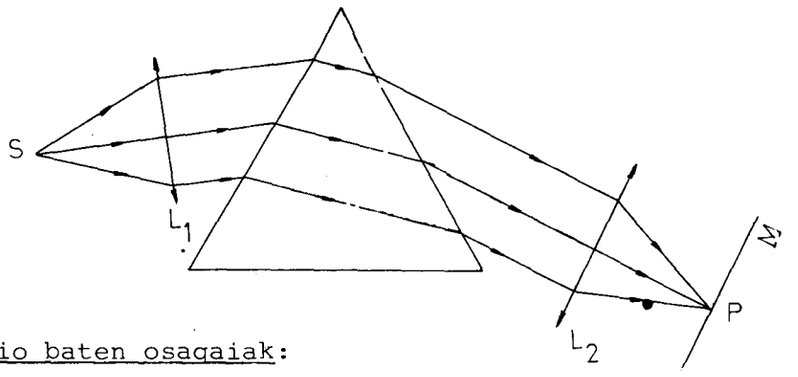
(3)-n sartuz

$$\delta = n\alpha - \alpha = \boxed{\alpha(n-1) = \delta}$$

azkenean, δ, α-ren funtzio bakarra da.

II-4 DISPERTSIOA:

Lehen ere aipatu dugu substantzia baten errefrakzio-indizea argiaren kolorearen bidez aldatu egiten dela. Adibidez, errefrakzio-indizea urdinarentzat gorriarentzat baino handiagoa da. Fenomeno honi "dispertsioa" deritzo eta, prisma baten baitan izpi txuria bidaliz gero, kolore-espektroa lortuko dugu. Espektroak ikusteko espektroskopioa erabiltzen da.



Espektroskopio baten osagaiak:

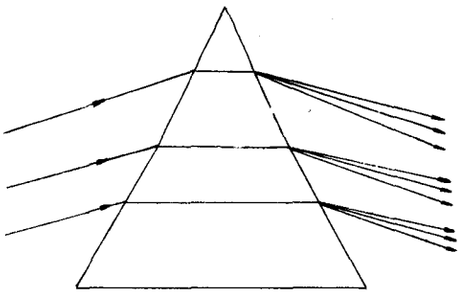
-Lente bi. Konbergenteak (L_1, L_2)
-Prisma bat.
-Iturri puntuala (s), L_1-en objektuaren plano fokalean dagoena.
-Pantaila (Σ), irudiaren plano fokalean dagoena.

Funtzionamendua:

s-k argi monokromatikoa ematen badigu, L_1 lentetik paraleloak aterako dira. Prismak, izpi horiei desbidazio berdina ematen die (zeren $\delta = (n-1)\alpha$ eta α eta n konstanteak baitira), eta prismatik paraleloak irtengo dira Σ irudiaren plano fokalean dagoenez gero, izpi

guztiek P puntutik pasa beharko dute,eta irudia erreala izango dugu.

s-k hiru kolore desberdin emango balizkigu(urdina,horia eta gorria, adibidez),prismaraino iritsi artean ez genuke problemarik izango: baina,behin prismaren barruan sarturik,n aldakorra gertatzen da kolore bakoitzarentzat,eta -azkenean-hiru izpi aterako zaizkigu hasierako bakarraren ordez: hau da, Σ-n hiru irudi erreak bereiztu ahal izango ditugu.



Suposa dezagun orain s iturriak hiru koloretako argia ematen digula(urdina,horia eta gorria,adibidez).Bitez:

λ_F: urdinaren uhin-luzera n_F: prismaren errefrakzio-ind.urdinarentzat
λ_D: horiaren uhin-luzera n_D: " " " .horiarentzat
λ_C: gorriaren uhin-luzera n_C: " " " .gorriarentzat

Gainera, prismak bi motatakoak izango ditugu:Flint eta Crown. Biek propietate eta errefrakzio-indize desberdinak dituzte.Hona hemen balore batzu:

	n_F	n_D	n_C
Flint	1,665	1,650	1,644
Crown	1,527	1,520	1,517

II.4.1 Dispertsio-ahalmena $W = \dfrac{n_F - n_C}{n_D - 1}$ (definizioz)

Aurki ditzagun w-ren balioak Flint eta Crown beira-motentzat:

$$w_f = \frac{1,665 - 1,644}{1,650 - 1} = 0,032$$

$$w_c = \frac{1,527 - 1,517}{1,520 - 1} = 0,019$$

Suposa dezagun orain prismaren angelua txikia dela,eta bitez:

δ_F: desbidazio-angelua urdinarentzat
δ_D: " " horiarentzat
δ_C: " " gorriarentzat

II.4.2. Definizioz,espektroaren dispertsioa: $\delta_F - \delta_C$

eta δ_D: espektroaren batezbesteko desbidazioa.

dakigunez:

$\delta_F = (n_F - 1)\alpha$
$\delta_C = (n_C - 1)\alpha$

orduan $\delta_F - \delta_C = \left[(n_F - 1) - (n_C - 1)\right]\alpha \Longrightarrow$

$$\boxed{\delta_F - \delta_C = (n_F - n_C)\alpha}$$

non: $\delta_D = (n_D - 1)\alpha$ eta: $\dfrac{\delta_F - \delta_C}{\delta_D} = \dfrac{(n_F - n_C)\alpha}{(n_D - 1)\alpha} = w$

beraz; $\boxed{\delta_F - \delta_C = w\,\delta_D}$

Kalkula dezagun orain batezbesteko desbidazioaren balioa, bai Flint eta bai Crown-entzat.Gure kalkuluak aurrera eramateko,prismaren angelu zorrotzena 10°-koa dela suposatuko dugu.Orduan:

$$\delta_D(f) = (n_D - 1)\alpha = (1{,}650 - 1)\cdot 10° = 6{,}5°$$

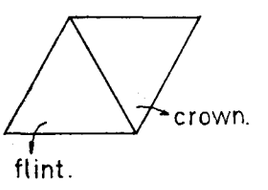
eta: $\delta_D(c) = (n_D - 1)\alpha = (1{,}520 - 1)\cdot 10° = 5{,}2°$

$$(\delta_F - \delta_C)_f = 0{,}032 . 6{,}5 = 0{,}208°$$

$$(\delta_F - \delta_C)_c = 0{,}019 . 5{,}2 = 0{,}098°$$

II.5 PRISMA AKROMATIKOA

Bi prismaz osatutakoa da: bata flint eta bestea crown;erpina gora begira duela bata,eta beherazkoa bestea.Prisma berezi honetan,flint--ezko beirak ematen digun dispertsioa crown-ezkoak konpentsatzen du.



$$(\delta_F - \delta_C)_f = (\delta_F - \delta_C)_c$$

dakigunez:

$$\delta_F - \delta_C = (n_F - n_C)\alpha$$

demagun flint-en angelua10°dela, hots: $\alpha_f = 10°$.Kalkula dezagun zenbatekoa izan beharko duen crown-en angeluak,prisma hori akromatikoa izan dadin:

$$(n_F - n_C)_f \alpha_f = (n_F - n_C)_c \alpha_c$$

eta zenbakitan:

$$(1{,}665 - 1{,}644).10° = (1{,}527 - 1{,}517).\alpha_c$$

ekuazioa askatuz: $\alpha_c = 21°$

Honek zera esan nahi du: 10°-ko fint-eko prisma eta 21º-ko crown-eko prismak osatutako sistema, λ_F eta λ_C uhin-luzerentzat akromatikoa dela.

Desbidazio orokorraren balioa aurki dezagun:

$$\delta_F = (n_F - 1)_f \alpha'_f - (n_F - 1)_c \alpha_c = -4{,}41^\circ$$

$$\delta_D = (n_D - 1)_f \alpha_f - (n_D - 1)_c \alpha_c = -4{,}42^\circ$$

$$\delta_C = (n_C - 1)_f \alpha_f - (n_C - 1)_c \alpha_c = -4{,}41^\circ$$

F eta C-ren desbidazio orokorrak berdinak dira, eta δ_D ez da piska-bat desberdina besterik.

Formula nagusiak:

Bi inguruneren artekoak:

$$\boxed{\frac{n' - n}{R} = \frac{n'}{S'} + \frac{n}{S}} \qquad \boxed{m = \frac{y'}{Y} \quad \frac{-n \bullet s'}{S\, n'}}$$

Esferikoa $\xrightarrow{R = \infty}$ Launa

Errefakzioa $\xrightarrow{n' = (-n)}$ Isladapena

Distantzia fokalak

$$\frac{S = \infty \quad S' = f'}{S' = \infty \quad S = f} \longrightarrow \frac{f}{S} + \frac{f'}{S'} = 1$$

3. IKASGAIA

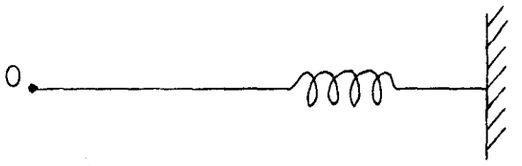
UHINEN ARTEKO INTERFERENTZIAK

3.1 ZENBAIT KONTZEPTU UHIN MEKANIKOEZ,DIMENTSIO BATEAN

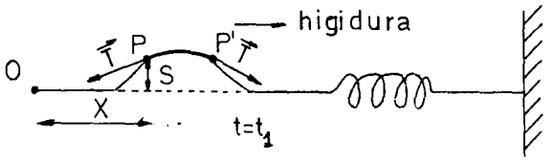
3.1.1. Zeharkako uhinak soka batean:

Lehen oharra hauxe izango da, eredu ondulatorioa erabiliko dugula aurrerantzean.

Suposa dezagun soka luze bat dugula, eta soka hori O puntutik eusten dugula.Gainera, malguki baten bidez, tentsio konstantea eragingo dugu sokarengan.



Indarren bat ezarriz, O puntua mugitzen badugu, desplazamendua sokarekiko elkartzuta delarik, eta berriz, bere O tokian uzten badugu,perturbazioa sortu dugu. Saiakuntza honek beste gauza bat ere erakutsiko digu: perturbazioa denborarekin hedatu egiten dela, eta v abiaduraz hedatu ere.



Perturbazioa definitu ahal izateko,puntu bakoitzean oreka-posiziotik s-raino eramango dugu soka.Desplazamendua hedatze-direzkzioarekiko elkartzuta denez gero, "zeharkako uhina" izenarekin ere ezagutzen da.

Matematikoki ikusita, s desplazamendua t eta x-en menpekoa izango da.

$$s = s(t,x)$$

non, s ordenatua baita, eta x abzisa.

Har dezagun orain PP',sokaren elementua:
P-tik ezkerrera dagoen sokaren zatiak PP'-ra indar tangentziala eragiten du,bere balioa $\vec{T}$ izanik (malgukiaren tentsioa).

P-tik eskuinera dagoen zatiak,beste $\vec{T}$ aurka-tentsioa eragingo du. PP'-ak kurbadura duenez gero, $/\vec{T}/=/\vec{T}/$ izango dira.Baina,hala eta guztiz ere, ez dira konpentsatzen;hots,PP' higitu egingo da denborarekin eta perturbazioa hedatu egingo da.

Konklusioak:

a) Sokaren baitan hedatzen ari den uhinaren itxura ez da denborarekin aldatzen.

b) Perturbazioa abiadura konstante batez hedatzen da.Kasu honetan:

$V=\sqrt{T/\mu}$ μ : masa luzera unitateko.
T : tentsioa.

Konklusio hauek zera esan nahi digute: P_1,P_2 bi puntu izanez gero, x_1 eta x_2 beraien abzisak direla; bi puntu horien mugimendua berdina izango dela,baina ez berdina denbora berdinean.Gure kasuan,P_2 puntuaren higidura piska bat atzeraturik joango da P_1-en higiduarekin parekatzen badugu.Bien arteko diferentzia

$$\frac{x_2-x_1}{v}$$ izango da.

a) eta b) konklusioak betetzekotan,perturbazioaren formulak ondoko hau izan behar du:

$$\boxed{s = f(t-x/v)}$$

f: funtzio ezezaguna delarik
x: puntuaren abzisa
v; perturbazioaren abiadura

Orain, bi denbora (t_1,t_2) eta bi posizio (x_1,x_2) elkarrekin erlazionatzen baditugu,horrelako zerbait lor dezakegu:

$$t_2-x_2/v = t_1 -x_1/v$$

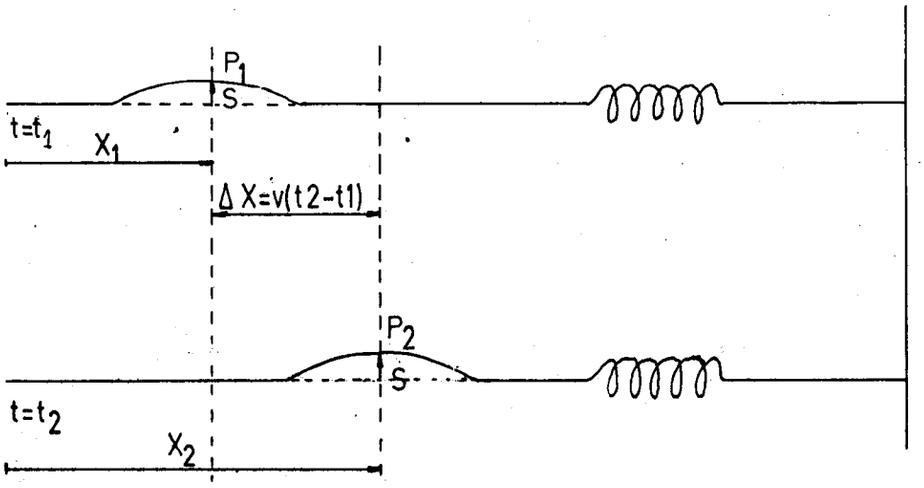
hots: $f(t_2-x_2/v) = f(t_1-x_1/v)$ eta: $s(t_2,x_2)=s(t_1,x_1)$

Honek badu bere esangura: bi puntu baditu,P_2-ren desplazamendua t_2 denboran,eta P_1-ena t_1-ean berdinak direla.

Adierazpen orokorrenean: $s(t,x) = f(t-x/v)$

$t = t_1$ denean: $s(t_1,x) = f(t_1-x/v)$
$t = t_2$ denean: $s(t_2,x) = f(t_2-x/v)$

Bi funtzio hauek irudikatuaz,sokaren deformazioa t_1 eta t_2 denboretan lortu ahal izango dugu:



Bi desplazamenduak berdinak badira(diren bezala), berdintza hau beteko dugu:

$$x_2-x_1 = v(t_2-t_1)$$

Beraz, sokaren deformazioa t_1 denboran ezaguna bazaigu,t_2 denboran ere kalkula dezakegu.Hori lortzeko,x ardatzean traslazio positiboa egin beharko dugu,eta honelako balioarekin: $v.(t_2-t_1)$

Guzti honek zera esaten digu: perturbazioaren hedakuntza x positiboen direkzioan gertatzen dela.

Orain arte egindakoaren arauera,beste ekuazio hau ere sor dezakegu:

$$s = g(t + x/v)$$

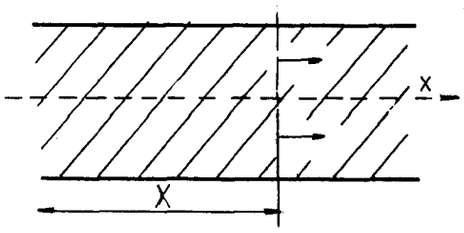
Baina, kasu honetan,perturbazioaren hedakuntza x negatiboen direkzioan izango litzateke.

Eta, azkenik,baita beste hau ere:

$$\boxed{s = f(t-x/v) + g(t + x/v)}$$

Ekuazio honek bi perturbazio azaltzen ditu,biak v abiadura berdinez hedatuz: baina, bata x positiboen direkzioan doan bezala,bestea x negatiboen direkzioan doa.

3.1.2. Soinu-uhinak tutu zilindriko batean:



Esan beharrik ez,tutuak fluidoren bat daramala bere barruan.

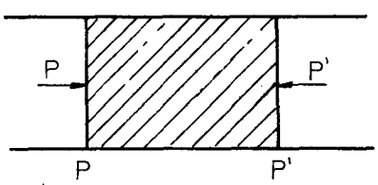
Soinu-uhinak tutuaren barrutik igarotzen direnean,fluidoko partikulak higitu egiten dira.Higidura honen direkzioa tutuaren ardatzarekiko paraleloa da,eta horixe hartuko dugu x ardatztzat.

Partikulak higitzen direnean,presioa ere aldatu egiten da.

Jo dezagun,orain,plano batean dauden puntu guztiek higidura berdina dutela eta presio-aldaketa berdina jasaten dutela.Plano hori,hedatze-direkzioarekiko elkartzuta izango da.

Kontsidera ditzagun, x distantziara dauden puntu guztiak, t denboran, s(x,t) izango litzateke puntu guzti horien desplazamendua,eta p(x,t) presio-aldakuntza.Uhinik ez bada igarotzen,s(x,t)=0 eta p(x,t)=0.

Azter dezagun fluido elementu berezia (P,P'):



Soinu-uhinak fluidoa zeharkatzen dutenean,bi indar agertuko dira:gainazal bakoitzean eragindako presioak.

Badakigu,jakin,presioa p(x) dela, eta P≠ P' dela.

Sokarekin gertatzen zen bezala,PP' higitu egingo da v abiaduraz. Propagazioa PP' elementuaren forma aldatu gabe egingo da,eta bere abiadura:

$$v=\sqrt{\frac{1}{k\,\rho_0}}$$

non: K: gasaren konprimagarritasuna den
ρ_0: fluidoaren dentsitatea

Gainera, lehen bezala : $p(t,x)=F(t-x/v)$ x positibotan
$p(t,x)=G(t+x/v)$ x negatibotan

Ekuazio orokorra:

$$\boxed{p(t,x)=F(t-x/v)+G(t+x/v)}$$

3.1.3. Uhinen energia:

Uhina sortzearren energia beharrezkoa da:bai zinetikoa,bai potentziala.Orain arte ikusitako uhinekin lan eginez gero:

$s = f(t-x/v)$

$s = g(t+v/v)$ $\quad E_{tot} = 2E_k \quad$ hots: $\quad E_k = E_p$

Uhinaren formula orokorra dugunean ez da erabilgarria izaten.

Defini dezagun puntu bateko zeharkako abiadura s abszisetan eta t denboran:

$$U(t,x) = \frac{\partial s}{\partial t}$$

Eta, Energia luzera unitateko:

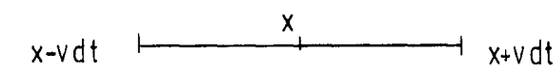
Orain, berdintza hau beteko da: $U(t,x)$ $E_{tot} = 2E_k$

eta, hain zuzen $U.dx = 2(\frac{1}{2}\mu.dx.u^2)$

azkene koz: $\boxed{U = \mu.u^2}$

3.1.4. Energi fluxua: $\emptyset$

Definizioz zera da: puntu batetik, denbora-unitateko pasatzen den energia.



Hori dela eta, puntu batetik, dt denboran igarotzen den energia, $\emptyset.dt$ izango da. Gainera, uhina v abiadura konstante batez hedatzen bada energia hori sokaren zuzenki batean egongo da. Zuzenki edo segmentu horren mugak x eta x + v.dt izango dira, uhina x positiboen direkzioan doanean; eta x-v.dt, direkzio negatiboan doanean.

Zuzenkiaren luzera: v.dt

hau da: $\emptyset.dt = U.v.dt$ beraz $\boxed{\emptyset = U.v}$

3.2. ZENBAIT KONTZEPTU UHIN MEKANIKOEZ, HIRU DIMENTSIOTAN

a) Uhin launak: Uhin laun batean, perturbazioak balio berdina du plano berean hauden puntu guztientzat; eta plano hori, hedatze-direkzioarekiko elkartzuta da.

Ardatz Cartesiarrak ezarriaz, hedatze-direkzioa x bada, orduan perturbazioa x eta t-ren funtzioa izango da, eta ez y edo z-rena.

Soinu-uhin launa badugu, perturbazioaren itxura horrelakoa dugu:

$$P(t,x,y,z) = F(t-x/v)$$

Adierazpen honek uhina x positiboen direkzioan hedatzen dela adierazten digu.Magnitude berri batzu defini ditzagun:

U : energia,luzera-unitateko (ezaguna)

e : energia, bolumen-unitateko

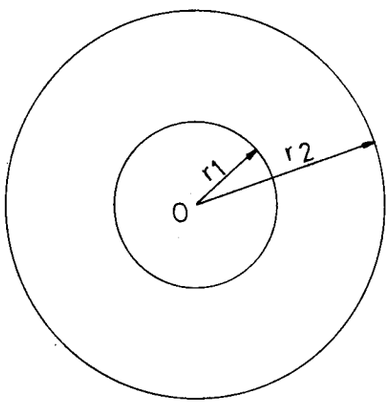
μ : masa,luzera-unitateko

ρ : masa, bolumen-unitateko

$U=\mu \cdot u^2$ bada,orduan: $\boxed{e=\rho \cdot u^2}$

eta $\Phi = U \cdot v$ bazen,orain: $\boxed{\Phi = e \cdot v}$

b) <u>Uhin esferikoak</u>: Uhin esferiko baten perturbazioa definitzeko, puntu bakoitzarentzat presioaren aldaketa,desplazamendua edo abiadura emango dugu.



Simetriaz,desplazamendua direkzio erradialean dela ikus dezakegu;horrexegatik p,s eta u, r eta t-ren funtzioak izango dira.

Beti bezala, uhina abiadura konstante batez hedatuko da:

$$v = \sqrt{\frac{1}{k\rho_0}} \qquad \text{(dakigunez)}$$

Har ditzagun bi gainazal esferiko, bata r_1 erradiokoa ,eta bestea r_2-koa'Demagun une batean energia batek lehendabiziko gainazala zeharkatzen duela,eta -handik berehala bigarrena.Bi une horien artean, dt denbora guztiz txikia igarotzen da.

Orduan: $\Phi_1 = \dfrac{E}{4\pi r_1^2}$ eta $\Phi_2 = \dfrac{E}{4\pi r_2^2}$

hots: $\boxed{\Phi \propto \dfrac{1}{r^2}}$ (1)

Bestalde: $\Phi = e.v$ eta $e = \rho u^2$ Beraz $\boxed{\Phi = \rho \cdot u^2 v}$

Azken adierazpen hau erabilgarria da uhin launetan eta erradio handia duten uhin esferikoetan.

hots: $\boxed{\Phi \propto u^2}$ (2)

(1) eta (2) kontutan harturik: $u \propto \dfrac{1}{r^2} \longrightarrow \boxed{u \propto \dfrac{1}{r}}$

Beste hainbeste gertatzen da p eta s-rekin.

Guzti honen arauera,uhin esferikoentzat erabiliko ditugun adierazpenak hauexek izango dira:

$$p = \frac{F(t-r/v)}{r} \qquad s = \frac{f(t-r/v)}{r}$$

3.3. KONTSIDERAZIO OROKORRAK

Iturri batetik bi izpi ateratzen direnean,bide desberdinak eramanaz, eta espazioaren puntu berdinera iristen direnean,interferentzi fenomenoa ikus daiteke.

Eredu gorpuzkularrak ez du fenomeno hau esplikatzen,eta horregatik eredu ondulatorioa erabiliko dugu.

Bi izpi gainezartzean ikusten dugun fenomenoak zerikusi handia du uretara bi harri botatzerakoan gertatzen denarekin.

Hemendik aurrera, askotan erabiliko dugu "uhinen gainezarmenaren printzipioa"

Printzipio honek zera dio:

-Puntu batera uhin baten maximoa eta bestearen maximoa iristen badira,maximo handiago bat emango dute(bien batura).
-Puntu batera uhin baten minimoa eta bestearen minimoa iristen badira,emaitza beste minimo bat izanen da: bien batura.
-Puntu batean,maximoak eta minimoak elkar aurkitzen badute,deusezatu egingo dira.

Izpiekin ere gauza berdina gertatu ohi da:zenbait tokitan intentsitate handia izango dugu eta,beste zenbaitetan,oso txikia.Baina,uhin argitsuetan,perturbazioa ikusgaitza da,denborarekin guztiz azkar aldatzen baita.Beraz,guk egin dezakegun gauza bakarra perturbazioa eta argi-intentsitatea erlazionatzea da.

Bien arteko erlazioa hauxe dugu:

$$\boxed{I = Kte.(E^2)_{pr}}$$

non: E^2_{pr} : Batezbesteko perturbazioa ber bi.
I : Argi-intentsitatea.

3.4. UHIN SINUSOIDALAK

Eman dezagun,uhin laun sinusoidala dugula,eta x positiboen direkzioan hedatzen dela.Badakigu,perturbazioa,horrelako zerbait izango

dela: $E = f(t - x/v)$

Bestalde, f sinua nahiz kosinua izango bada:

$$E = \cos.\left[w(t - x/v) + \varphi\right] A$$

non: A, w, φ iturriaren konstanteak baitira.

A : uhinaren anplitudea

w : frekuentzia angeluarra $w = \frac{2\pi}{T}$ (T : periodoa)

$-\frac{wx}{v} + \varphi$ adierazpenean, uhinaren fasea deritzo.

$\lambda = v \cdot t$ uhin luzera.

Hau dela eta, perturbazioak honelako itxura hartuko du:

$$E = A \cdot \cos.\left[\frac{2\pi}{T}(t - x/v) + \varphi\right] = A \cos.\left[2\pi(t/T - x/vT) + \varphi\right] =$$

$$E = A \cdot \cos.\left[2\pi(t/T - x/\lambda) + \varphi\right] \quad E = f(\lambda)$$

Kalkula dezagun uhinaren intentsitatea. Horretarako, E^2pr aurkitu behar dugu. Definizioz, f(t) funtzio baten batezbesteko balioa:

$$f(t)_{pr} = \frac{1}{(t+t_o) - t} \int_t^{t+t_o} f(t')\, dt'$$

Gure kasuan:

$$(E^2_{pr} \quad 1/t_o \int_t^{t+t_o} A^2 \cos.^2\left[2\pi(t'/T - x/\lambda) + \varphi\right] dt'$$

Erlazio geometriko hau erabiliaz: $\cos^2\alpha = 1/2(1 + \cos 2\alpha)$

$$E^2_{pr} = \frac{1}{t_o} \int_t^{t+t_o} A^2/2 \left\{1 + \cos\left[4\pi(t'/T - x/\lambda) + 2\varphi\right]\right\} dt' =$$

$$= \underbrace{\frac{A^2}{2t_o} \int_t^{t+t_c} dt'}_{C} + \underbrace{\frac{A^2}{2t_o} \int_t^{t+t_o} \cos\left[4\pi(t'/T - x/\lambda) + 2\varphi\right] dt'}_{B}$$

$$C = \frac{A^2}{2t_o}(t')_t^{t+t_o} = \frac{A^2}{2t_o}(t+t_o-t) = A^2/2 \qquad B = \frac{A\,T}{2t_o\,4\pi} \int_t^{t+t_o} \cos.\left[4\pi(t'/T - x/\lambda) + 2\varphi\right] dt' \frac{4\pi}{T}$$

Oharra: $4\pi/T$gaia sartzea interesatzen zaigu

$$B = \frac{A^2 T}{8\pi t_o} \sin\left[4\pi(t'/T - x/\lambda) + 2\varphi\right]_t^{t+t_o} = \frac{A^2\,T}{8\pi t_o}\left\{\underbrace{\sin\left[4\pi((t+t_o)/T - x/\lambda) + 2\varphi\right]}_{\text{balio handiena } 1}\right.$$

$$\left.\underbrace{- \sin\left[4\pi(t/T - x/\lambda) + 2\varphi\right]}_{\text{balio txikiena } -1}\right\} \quad \text{(absolutoki, handiena)}$$

Beraz, B-ren balio maximoa:

$$\frac{1 - (-1)A^2 T}{8\pi t_o} = B_{max.}$$

Guk erabiliko ditugun uhinetan, $t_o \gg T$ izango da, eta $B \to o$; hots;

$$E^2_{pr} = \frac{A^2}{2} \qquad \text{eta} \quad I = Kte(E^2_{pr}) = Kte\frac{A^2}{2} = \boxed{K.A^2 = I}$$

Hau da, uhin laun sinusoidala dugunean, anplitude eta intentsitateak balio konstante bat dute hedatze-direkzioaren puntu guztietan.

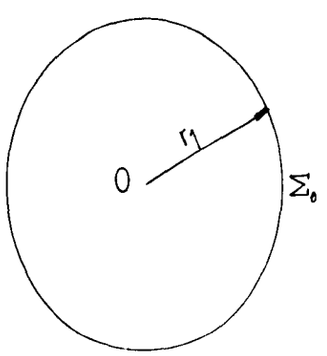
Uhina, esferikoa balitz (sinusoidala, noski) anplitudea, 1/R-rekin zuzenki proportzionala litzateke, eta intentsitatea, $1/R^2$-rekin.

$E = B/r \cdot \cos\left[w\left(t - r/v\right) + \varphi\right]$ eta: $A = \frac{B}{r}$

$I = KA^2$ bada, $I = K.B^2/r^2$ hots: $I \propto 1/r^2$

3.5. UHIN SINUSOIDALEN HEDAKUNTZA

Bedi $\sum_o$ gainazala. Beude bere puntu guztiak fase berdinean. Har dezagun iturria O puntuan; orduan, edozein gainazal esferikok, bere zentrua O izanik, ondoko propietate hau beteko du:

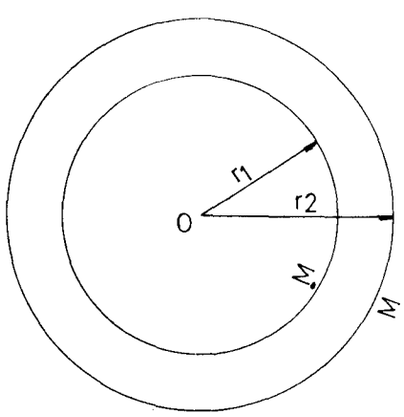


$$E_{\Sigma_o} = B/r_1 \cos\left[w(t - r_1/v) + \varphi_1\right] \qquad (1)$$

Hemen, $\sum_o$ uhin-frontea dugu; r_1 erradioa, eta φ fasea. $\varphi = -\frac{r_1 w}{v} + \varphi_1$

Balore hau, (1) ekuazioan ordezkatzen badugu:

$$E_{\Sigma_o} = B/r_1 \cos(wt + \varphi) = B/r_1 \cos\left(\frac{2\pi t}{T} + \varphi\right)$$



Denbora aurrera doalarik, uhin-frontea $\sum$-raino iritsiko litzateke. Bi uhin-frontek lotzen dituzten izpi guztiek bide optiko berdina dutenez gero (demagun 1 dela), $\sum_o$-an perturbazioa atzeratuta egongo da $\sum$-tik: eta atzerapen horren balioa 1/c izango da. (Suposa dezagun uhinak hutsean hedatzen direla, eta argiaren abiadura hutsean c dela).

Guzti hori dela eta:

$$E_{\Sigma} = B/r_2 \cos\left[\frac{2\pi}{T}(t - \ell/c) + \varphi\right] = B/r_2 \cos\left[2\pi(t/T - \ell/cT) + \varphi\right]$$

Bestalde, badakigu jakin: $\lambda = v.T$ dela, eta $\lambda_o = c.T$

λ_o : uhin-luzera hutsean.

Eta. azken batean: $\boxed{E_{\Sigma} = B/r_2 \cos\left[2\pi(t/T - \ell/\lambda_o) + \varphi\right]}$

3.6. ANPLITUDEAREN ETA FASEAREN ARTEKO ERLAZIOAK ISLADAPENEAN ETA ERREFRAKZIOAN

Izan bedi bi ingurune bereizten dituen gainazala.Kasu orokor batean uhin intzidente batek bi uhin emango dizkigu : bat isladatua eta bestea errefraktatua.Uhin horien anplitudeak eta faseak ez ditugu ezagutzen.

Problema hau askatzeko,erabil dezagun Teoria Elektromagnetikoa.

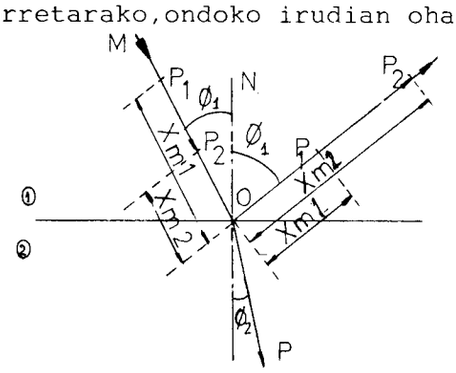
Delako teoria hau aztertuko bagenu,erizpide hauetara iritsiko ginateke:

-Uhin errefraktatua eta intzidentea, gainazalean,fase berdinean daudela.

-Uhin intzidenteak eta isladatuak,gainazalean fase berdina edo desberdina eduki dezaketela.Fase berdina izango dute,bigarren inguruneko hedatze-abiadura lehenagokoa baino handiagoa denean; eta desberdina,alderantziz gertatzen bada.

Orain,itzulgarritasun-printzipioa erabiliz, zera kalkulatu nahi dugu: Anplitudea nola erlazionatzen den uhin intzidentean,errefraktatuan eta isladatuan.

Horretarako,ondoko irudian ohar batzuk egingo ditugu:



Bedi X_m: izpi intzidentearen direkzioan, O-raino dagoen distantzia.

X_n: berdin, izpi isladatuan
X_p: " " errefraktatuan

$\varphi = 0$ dela suposatuko da.

Perturbazioaren balioa:

$$\underset{MO}{\overrightarrow{E}} = A\cdot\cos\left[w(t - Xm/v_1)\right]$$

Adierazpen horren zeinuan,problema izan genezake.Honetaz, erabaki hau onartzen da:

$Xm_2 < Xm_1$ bada, zeinu positiboa (+); eta alderantziz.

Hau dela eta,gure kasuan:

$$\underset{MO}{\overrightarrow{E}} = A\cos\left[w(t+Xm/v)\right]$$

Defini ditzagun:

$$\rho = \frac{A\ \text{isladt.}}{A\ \text{intzid.}} \Longrightarrow A_{isl.} = \rho A$$

$$\gamma = \frac{A\ \text{errefrt}}{A\ \text{intzid.}} \Longrightarrow A_{err.} = \gamma A$$

Definizio hauetatik, (1) eta (2) inguruneak bereizten dituen gainazalean:

$\rho > 0$ bada, ez dago fase-aldaketarik.

$\rho < 0$ bada, fasea aldatzen da.

eta:

$\gamma > 0$ bada, ez dago fase-aldaketarik

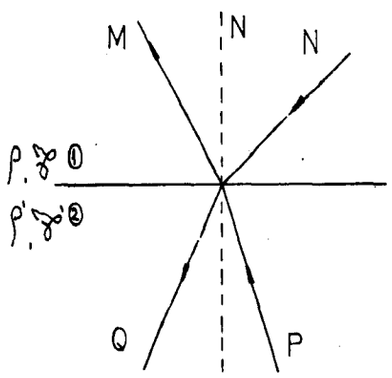
$\gamma < 0$ bada, fasea aldatzen da.

Hori dena dela bide:

$$E_{\overline{ON}} = \rho \cdot A \cdot \cos\left[w(t - Xn/v_1)\right]$$

$$E_{\overline{OP}} = \gamma A \cos\left[w(t - Xp/v_2)\right]$$

Itzulgarritasun-printzipioa erabiliz:



$$E_{\overline{NO}} = \rho \cdot A \cdot \cos.\left[w(t + Xn/v_1)\right]$$

$$E_{\overline{OM}} = \rho^2 A \cdot \cos.\left[w(t - Xm/v_1)\right]$$

$$E_{\overline{OQ}} = \rho\gamma \cdot A \cos.\left[w(t - Xq/v_2)\right]$$

Gai horien jatorria adierazpen hauetatik dator:

$$\rho = \frac{A_{isl}}{A_{int}} = \frac{A_{isl}}{A \cdot \rho} \Longrightarrow A_{isl} = \rho^2 A \qquad \gamma = \frac{A_{errf}}{A_{int}} = \frac{A_{errf}}{A\,\gamma} \Rightarrow A_{errf} = \gamma \cdot \rho \cdot A.$$

Defini ditzagun beste bi koefiziente (ρ' eta γ') (2) eta (1) inguruneak bereizten dituen gainazalean:

$$\rho' = \frac{A_{isl}}{A_{intz}} = \frac{A_{isl}}{A\gamma} \qquad \gamma' = \frac{A_{errf.}}{A_{int.}} = \frac{A_{errf.}}{\gamma \cdot A}$$

Beraz:

$$E_{\overline{PO}} = \gamma A \cdot \cos.\left[w(t + Xp/v_2)\right]$$

$$E_{\overline{OM}} = \rho\gamma A \cdot \cos.\left[w(t - Xm/v_1)\right]$$

$$E_{\overline{ON}} = \rho'\gamma A \cdot \cos.\left[w(t - Xq/v_2)\right]$$

Irudian, OM direkzioan bi izpi daude, eta - alderantziz- MO direkzioan bat bakarra; hots, emaitza, izpi bat, OM direkziokoa izango da. Froga dezagun hau egia dela:

$$\rho^2 \cdot A \cdot \cos.\left[w(t - Xm/v_1)\right] + \gamma\gamma' \cdot A \cdot \cos.\left[w(t - Xm/v_1)\right] = A \cos\left[w(t - Xm/v_1)\right]$$

(norantza aurkakoa)

Hots: $\boxed{\rho^2 + \gamma\,\gamma' = 1}$

Gainera, bi izpien baturak 0 izan behar baldin badu:

$$\rho\gamma \cdot A \cos\left[w(t - Xq/v_2)\right] + \gamma \cdot \rho' A \cos\left[w(t - Xq/v_2)\right] = 0$$

Edota: $\rho\gamma + \gamma\rho' = 0$ hau da: $\boxed{\rho = -\rho'}$

Honen ondorio bezala, (1)-etik, (2)-ra igarotzean, fasea ez da aldatzen, (2)-tik (1)-era bai, edo alderantziz.

3.7. FUNTZIO SINUSOIDALEN BATUKETA

Uhin sinusoidalen interferentziak beraien gainezarmen edo baturan oinarritzen direnez gero, ikus ditzagun batuketa honen arauak:

-Bi, hiru, etab funtzio sinusoidal frekuentzia berdinekoak baditugu, funtzio ordezkariak ere frekuentzia berdina izango du.

-Hau dela eta:

$$A_1 \cos(wt+\alpha_1) + A_2\cos(wt+\alpha_2) + A_3\cos(wt+\alpha_3) = A\cos(wt+\alpha)$$

Azkenean, gure problema A eta α aurkitzea izango da. Hortarako, hiru metodo daude:

a) <u>Metodo zuzena</u>:

Kasu honetan, garapena egiten da:

$$A_1\cos wt\cos\alpha_1 - A_1\sin wt\sin\alpha_1 + A_2\cos wt\cos\alpha_2 - A_2\sin wt\sin\alpha_2 + A_3\cos wt\cos\alpha_3 - A_3\sin wt\sin\alpha_3 =$$

$$= A\cos wt\cos\alpha - A\sin wt\sin\alpha$$

Hau da:

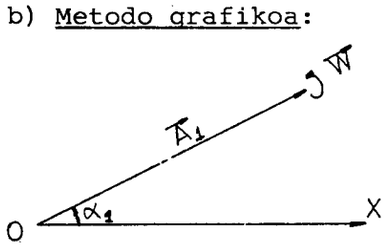
$$\cos wt(A_1\cos\alpha_1 + A_2\cos\alpha_2 + A_3\cos\alpha_3) - \sin wt(A_1\sin\alpha_1 + A_2\sin\alpha_2 + A_3\sin\alpha_3) = \cos wt\, A\cos\alpha - \sin wt\, A\sin\alpha$$

t ororentzako erbilgarriak izan daitezen, koefiziente berdinak behar dituzte, bai sin w t eta bai cos w t -ek. Beraz:

$$\left.\begin{aligned} A_1\cos\alpha_1 + A_2\cos\alpha_2 + A_3\cos\alpha_3 &= A\cos\alpha \\ A_1\sin\alpha_1 + A_2\sin\alpha_2 + A_3\sin\alpha_3 &= A\sin\alpha \end{aligned}\right\}$$

Ekuazio-sistema hau askatuz, A eta α lor ditzakegu.

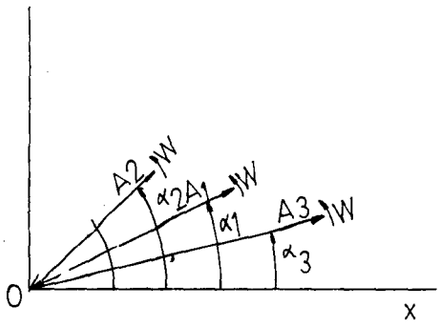
b) <u>Metodo grafikoa</u>:



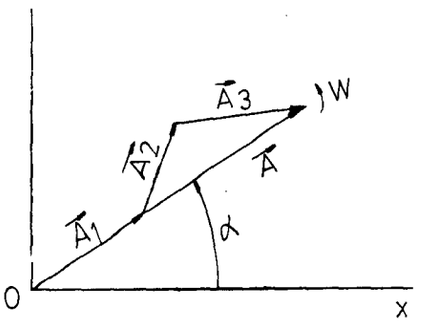
Eman dezagun $\vec{A_1}$ bektorea $\vec{w}$ abiadura angeluarraz biraka dabilela. Gainera, $\vec{A_1}$ bektoreak α_1 angelua osatzen du X-ekiko denbora t=0 denean.

t denboran, $\vec{A}_1$ bektorearen projekzioa OX ardatzean : $A_1.\cos(wt+\alpha_1)$

Egin dezagun gauza ber-bera hiru bektorerekin:



hiru bektoreak



beren batura bektoriala

Bektore ordezkariaren luzera A izango da,bere abiadura angeluarra w eta t=0 denean, OX ardatzarekin, α angelua osatuko du.

Bektore baten projekzioa eta bere osagaien projekzioen batura berdinak direnez gero, t denboran, $\vec{A}$ -ren projekzioa:

$$A\cos(wt+\alpha) = A_1\cos(wt+\alpha_1) + A_2\cos(wt+\alpha_2) + A_3\cos(wt+\alpha_3)$$

Hots, bai A eta bai α kalkulagarriak dira.

c) <u>Funtzio konplexuen metodoa:</u>

Bedi horrelako funtzio konplexu bat: Erreal $(A_1e^{iwt+\alpha_1}) = A_1\cos(wt+\alpha_1)$

Funtzio konplexuen baturaren zati erreala eta funtzio konplexuen zati errealen batura berdinak direnez gero,funtzio sinusoidalen batura egin beharrez,funtzio konplexuena egin dezakegu:

$$A_1\cos(wt+\alpha_1) + A_2\cos(wt+\alpha_2) + A_3\cos(wt+\alpha_3) = A\cos(wt+\alpha)$$

$$A_1e^{i(wt+\alpha_1)} + A_2e^{i(wt+\alpha_2)} + A_3e^{i(wt+\alpha_3)} = Ae^{i(wt+\alpha)}$$

Orain, e^{iwt} -az zatitzen badugu:

$$\left.\begin{aligned} A_1e^{i\alpha_1} + A_2e^{i\alpha_2} + A_3e^{i\alpha_3} &= Ae^{i\alpha} \\ \text{Eta, bere konjokatua:}\quad & \\ A_1e^{-i\alpha_1} + A_2e^{-i\alpha_2} + A_3e^{-i\alpha_3} &= Ae^{-i\alpha} \end{aligned}\right\}$$

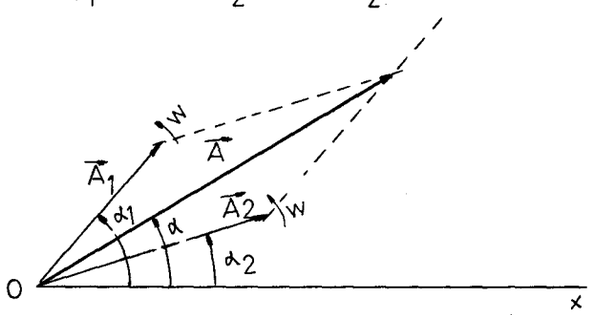
Bien arteko biderkadura lotuz:

$$(A_1e^{i\alpha_1} + A_2e^{i\alpha_2} + A_3e^{i\alpha_3})(A_1e^{-i\alpha_1} + A_2e^{-i\alpha_2} + A_3e^{-i\alpha_3}) = A^2$$

Egin dezagun orain, adibide gisa,bi funtzio sinusoidalen arteko batuketa:

$$A_1\cos(wt+\alpha_1) \quad \text{eta} \quad A_2\cos(wt+\alpha_2)$$

<u>Grafikoki</u>:



Funtzio konplexuen bidez:

$$A^2 = (A_1 e^{i\alpha_1} + A_2 e^{i\alpha_2})(A_1 e^{i\alpha_1} + A_2 e^{i\alpha_2})$$

$$A^2 = A_1^2 + A_1 A_2 e^{i(\alpha_1+\alpha_2)} + A_2 A_1 e^{i(\alpha_2-\alpha_1)} + A_2^2$$

Bestalde, A^2-ren zati erreala:

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + A_1 A_2 \cos(\alpha_1 - \alpha_2) + A_2 A_1 \cos(\alpha_2 - \alpha_1)$$

Angelu hauek $(\alpha_1 - \alpha_2)$, balio absolutuz berdinak dira, nahiz zeinuz aurkakoak izan; hau da, kosinu berdina izango dute:

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1 A_2 \cos(\alpha_1 - \alpha_2)$$

A^2, maximoa izan dadin: $(\alpha_1 - \alpha_2) = 0$ edo, , π-ren multiploa bikoitia

Balio maximo hau:

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 - 2A_1 A_2 \qquad \text{hots: } \boxed{A = A_1 + A_2}$$

A^2, minimoa izan dadin: $(\alpha_1 - \alpha_2) = 0$ π-ren multiplo bakoitia denean.

Balio minimo hau:

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 - 2A_1 A_2 \qquad \text{hots: } \boxed{A = A_1 - A_2}$$

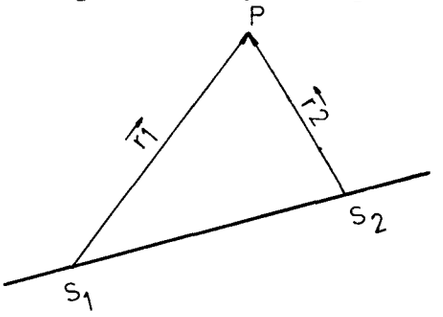
Metodo zuzenaren bidez:

$$\left.\begin{aligned} A\sin\alpha &= A_1\sin\alpha_1 + A_2\sin\alpha_2 \\ A\cos\alpha &= A_1\cos\alpha_1 + A_2\cos\alpha_2 \end{aligned}\right\} \quad \text{Elkarrekin zatituz: } tg\alpha = \frac{A_1\sin\alpha_1 + A_2\sin\alpha_2}{A_1\cos\alpha_1 + A_2\cos\alpha_2}$$

eta, hemendik, A eta α kalkulagarriak dira.

3.8. BI UHIN ESFERIKOREN ARTEKO INTERFERENTZIA

Bi iturri puntual dugula suposa dezagun. biek uhin sinusoidal esferikoak ematen dizkigutelarik. Orain kalkulatu nahi duguna zera da: P puntuan eragingo den perturbazioa.



S_1-ek, P-en eragindakoa:

$$E_1 = \underbrace{B_1/r_1}_{A_1} \cos\left[w(t - r_1/v) + \varphi_1\right]$$

S_2-k, P-en eragindakoa:

$$E_2 = \underbrace{B_2/r_2}_{A_2} \cos\left[w(t - r_2/v) + \varphi_2\right]$$

Gainera, badakigu jakin: $A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1 A_2 \cos(\alpha_1 - \alpha_2)$ dela.

non: $\alpha_1 = \frac{w r_1}{v} + \varphi_1$ eta $\alpha_2 = \frac{w r_2}{v} + \varphi_2$

Beraz: $\alpha_1 - \alpha_2 = \frac{w(r_2 - r_1)}{v} - (\varphi_2 - \varphi_1)$

Adierazpen honetan, w-ren baliokidea ordezkatuz:

$$\alpha_1 - \alpha_2 = \frac{2\pi(r_2 - r_1)}{vT} - (\varphi_2 - \varphi_1) = \frac{2\pi(r_2 - r_1)}{\lambda} - (\varphi_2 - \varphi_1)$$

Eta, honen ondorioz:

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos\left[\frac{2\pi(r_2-r_1)}{\lambda} - (\varphi_2-\varphi_1)\right]$$

Lehenik ezaguna dugu: $I=K.A^2$ I: argi-intentsitatea.

Kontsidera ditzagun I_1, I_2 eta I argi-intentsitateak:

I_1 : S_1-ek P puntuan emandako intentsitatea.
I_2 : S_2-k P puntuan emandako intentsitatea.
I : S_1 eta S_2-k P puntuan emandako intentsitatea.

Eta: $I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1.I_2}.\cos\left[\frac{2\pi}{\lambda}(r_2-r_1)-(\varphi_2-\varphi_1)\right]$

Kasu berezia: $I_1 = I_2$ denean.

$$I = 2I_1 + 2I_1\cos\left[\frac{2\pi}{\lambda}(r_2-r_1)-(\varphi_2-\varphi_1)\right] = 2I_1\left\{1+\cos\left[\frac{2\pi}{\lambda}(r_2-r_1)-(\varphi_2-\varphi_1)\right]\right\}$$

Berdintza hau aplikaturik: $\cos^2\alpha = \frac{1}{2}(1+\cos 2\alpha)$

$$\boxed{I = 4I_1\cos^2\left[\frac{\pi}{\lambda}(r_2-r_1)-\frac{(\varphi_2-\varphi_1)}{2}\right]}$$

Intentsitatea <u>maximoa</u> izatearren, kosinuak 1 balioa hartu behar du,

$$I_{max.} = 4I_1 \equiv I_o$$

Eta:

$$\boxed{I = 4I_1\cos^2\left[\frac{\pi}{\lambda}(r_2-r_1)-\frac{(\varphi_2-\varphi_1)}{2}\right]}$$

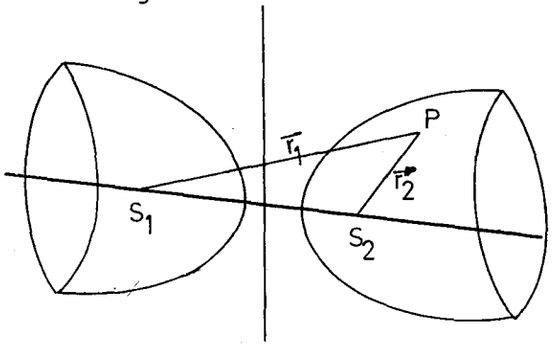
Azter dezagun $\cos^2$ gaia, I maximoa izan dadin. Baldintza hau beteko bada, $\pi/2$-ren multiploak bikoitia izan beharko du:

$$\frac{\pi}{\lambda}(r_2-r_1)-\frac{(\varphi_2-\varphi_1)}{2} = K\cdot\pi \Longrightarrow \boxed{\frac{(r_2-r_1)}{\lambda} - \frac{(\varphi_2-\varphi_1)}{2\pi} = K} \quad (1)$$

Intentsitate <u>minimoa</u> izatearren, angeluak $\pi/2$-ren multiplo bakoitia izan behar du:

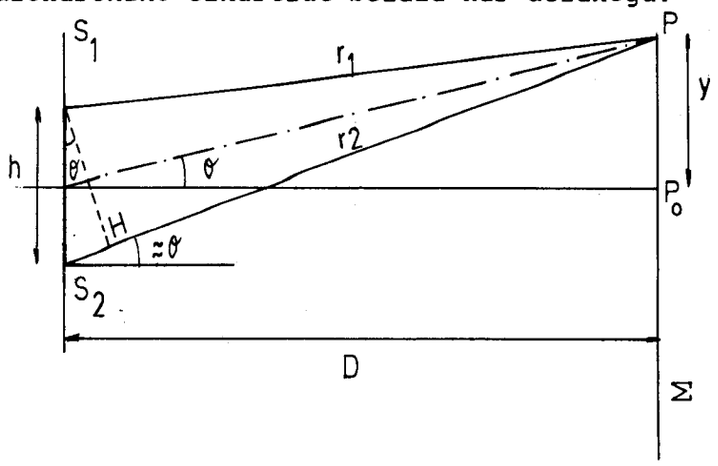
$$\frac{\pi}{\lambda}(r_2-r_1)-\frac{\varphi_2-\varphi_1}{2} = (2K+1)\pi/2 \Longrightarrow \boxed{\frac{r_2-r_1}{\lambda} - \frac{\varphi_2-\varphi_1}{2\pi} = K+1/2} \quad (2)$$

(1) eta (2) ekuazioak irudikatzen baditugu, S_1 eta S_2 fokuko hiperboloideak aurkituko ditugu:



Bi iturri horien tartean pantaila bat ezarriko bagenu, banda argi eta ilunak ikusiko genituzke. Banda horiei "<u>Interferentzi zerrendak</u>" deritze. Pantailaren planoa eta S_1-S_2 lotzen dituen zuzena elkartzutak direnean, interferentzi zerrendak zirkuluak izango dira. Al-

diz, pantaila eta lerroa paraleloak direnean, interferentzi zerrendak hiperbolak izango dira. Gainera, S_1-S_2 lotzen dituen zuzena oso motza bada r_2 eta r_1 bektoreekin konparatuz, interferentzi zerrendak zuzenarekiko elkartzut bezala har dezakegu.



Kontsidera dezagun orain beste kasu bat: $\varphi_1 = \varphi_2$ denean.

$$I = I_0 \cos^2\left[\frac{\pi}{\lambda}(r_2 - r_1)\right]$$

Kasu bereziak:

Minimoa $\boxed{\frac{r_2 - r_1}{\lambda} = K + 1/2}$

Maximoa $\boxed{\frac{r_2 - r_1}{\lambda} = K}$

Azter ditzagun perturbazioak pantailan:

(P = Po) edo $r_1 = r_2$ beraz, K=0 denean, Maximoa

(P = P) P-tik P_0 -raino y distantzia dago.

$$tg\theta = \frac{y}{D} \Longrightarrow tg\theta \cong \theta = \frac{y}{D}$$

Eman dezagun orain S_1PH triangelua isoszelea dela: $r_2 - r_1 = S_2H$

Beste S_1S_2H triangelutxoan:

$$\sin = \frac{S_2H}{h} \cong \theta = \frac{r_2 - r_1}{h}$$

Bakanduaz: $y = D\theta$ eta: $\boxed{y = \frac{r_2 - r_1}{h}}$

Orain: Maximoa izateko (argia) $y = D\frac{K\lambda}{h}$

Minimoa izateko (iluna) $y = D\frac{(K+\frac{1}{2})\lambda}{h} = (K+\frac{1}{2})\frac{\lambda D}{h}$

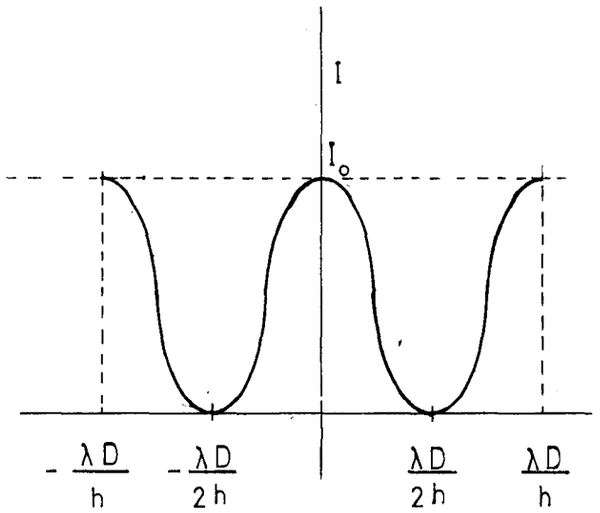
eta, K=0, ± 1, ± 2 .....

Honen ondorioz, bi zerrenda argiren artean, $\frac{\lambda D}{h}$ distantzia izango dugu.

Intentsitatearen aldaketa jakiteko:

$$I = I_0 \cos^2\left[\frac{\pi}{\lambda}(r_2 - r_1)\right] \xrightarrow[r_2 - r_1 = y \cdot h/D]{} I = I_0 \cos^2\left(\frac{\pi}{\lambda}\cdot\frac{yh}{D}\right)$$

I/y irudikatuz:



$$I_{max.} \longrightarrow \frac{y.h}{\lambda D} = K\pi \qquad \boxed{y = \frac{K\lambda D}{h}}$$

$$I_{min.} \longrightarrow \frac{\pi y h}{\lambda D} = (2K+1)\frac{\pi}{2}$$

$$\boxed{y = (K+\tfrac{1}{2})\frac{\lambda D}{h}}$$

minimoa $\begin{cases} K=0 \\ K=1 \end{cases}$

3.9. FRESNEL-EN ISPILU BIKOITZA; LLOYD-EN ISPILUA ETA YOUNG-EN ZIRRIKITUA

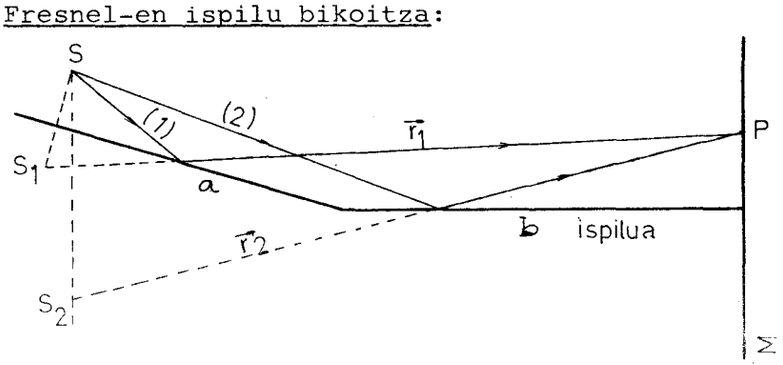
S_1 eta S_2 bi iturri ez-koherenteak direla esango dugu, beraiek emandako $\varphi_2 - \varphi_1$ fase-diferentzia denborarekin oso azkar aldatzen denean.

Maximo eta minimoen posizioa $\varphi_2 - \varphi_1$-en funtzioa denez gero, t denboran, puntu batean maximoa baldin badugu, handik une txiki batera, puntu horretan minimoa izango dugu. Begiak eta instrumentu optikoek horrelako aldaketa biziak ezin dituztelako bereizi, pantailan intentsitate bat ikusiko dugu.

Hau dela eta, interferentzi fenomenoak ikusi ahal izateko, iturri koherenteak erabili behar dira; hots, fase diferentzia konstantea ematen dutenekin.

Iturri koherente arruntenak, S eta bere irudia, edota, iturri baten bi irudi desberdinak dira.

a) Fresnel-en ispilu bikoitza:



Interferentziak sortzeko tresna hau nahiko xinplea dugu: angelu oso txiki batez inguratutako bi ispilu eta pantaila bat.Iturri koherenteak S_1 eta S_2 ditugu.

Pantailako zerrendak, lerro zuzenak izango dira.P puntuan,interferentzi fenomenoak ikusiko ditugu.Izpien trajektoriak hauexek dira:

(1) : a ispiluan isladatu eta pantailara.
(2) : b ispiluan isladatu eta pantailara.

Bi izpi horiek luzatzen baditugu, S iturriaren S_1 eta S_2 iturri koherenteak lortuko ditugu.Orduan, $r_1=S_1P$ eta $r_2=S_2P$ .Gainera $\varphi_2=\varphi_1$ bi izpiak S-tik ateratzen baitira.

Ikus dezagun,orain, non dauden maximo eta minimoak:

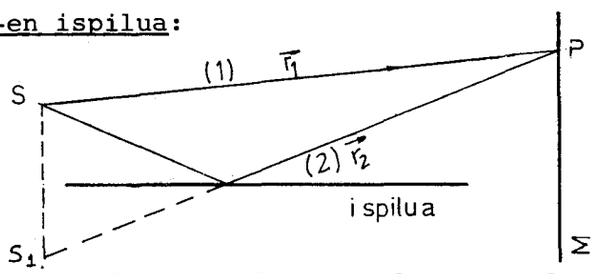
Minimoak: $\frac{r_2-r_1}{\lambda} = K+1/2$ Maximoak: $\frac{r_2-r_1}{\lambda} = K$

P puntuan: $r_1=r_2$ bada Max.(K=0) zero mailako interferentziaren maximoa

$r_2-r_1=\lambda$ bada Max.(K=1) bat mailako interferentziaren maximoa.

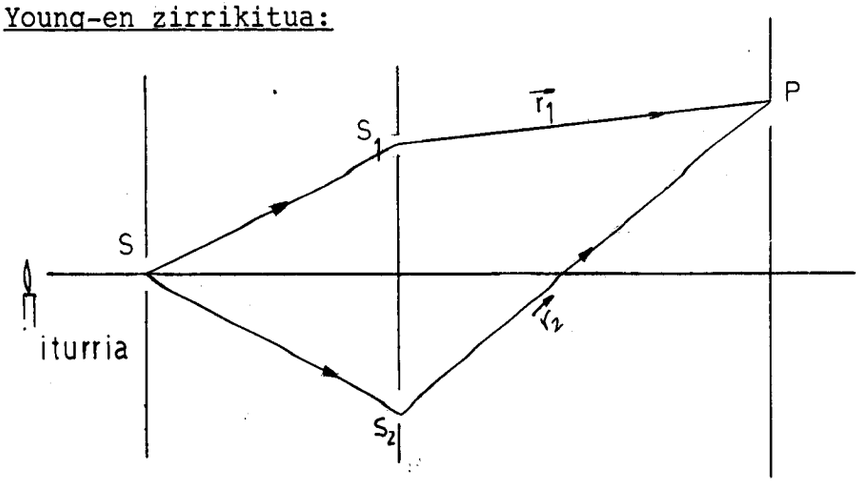
orokor, $r_2-r_1= k\lambda$ bada Max.(K=K) K mailako interferentziaren maximoa.

b) Lloyd-en ispilua:



P puntuan,interferentzi fenomenoak izango ditugu.(1) izpia, S-tik P-raino doa zuzen-zuzen,eta (2) ispilu batean isladatuz.Gainontzekoan,lehen ikusitakoa bezalakoa izango da.

c) Young-en zirrikitua:



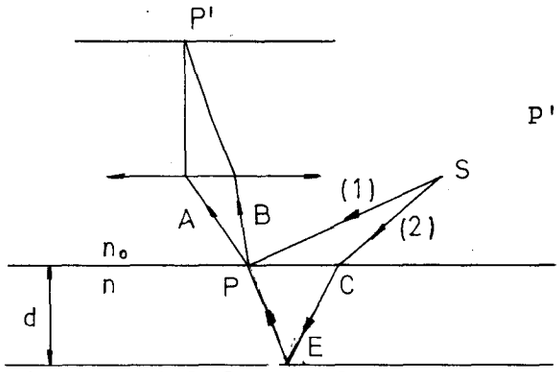
Interferentziak gertatuko badira, S_1-ek eta S_2-ek zirrikitu simetrikoak izan behar dute.

4.IKASGAIA

INTERFERENTZIAK MINTZ MEHEETAN

4.1. SARRERA

Mintz mehe garden bat dugunean,isladapena bi gainazaletan gertatu ohi da,eta honek interferentziak sorrerazten ditu.



P',P-ren irudia da.

(1) izpia, P-n isladatzen da.

(2) izpia, beheko gainazaletik pasatzen da.eta E puntuan isladatzen da

(1)-en bide optikoa l_1 bada: $E_1 = A_1 \cos \left[2\pi (t/T - l_1/\lambda_o) + \varphi_1 \right]$

(2)-ren bide optikoa l_2 bada: $E_2 = A_1 \cos \left[2\pi (t/T - l_2/\lambda_o) + \varphi_1 \right]$

Ikus dezagun orain perturbazio horien faseari zerbait batu behar diogun ala ez.Kontutan izan behar dugu, nolanahi ere,3. ikasgaiko galdera ("anplitudearen eta fasearen arteko erlazioa isladapenean eta errefrakzioan" zeritzana).

Hangoa berrituz, gainazalean uhin intzidentea eta errefraktatua, beti fase berdinean zeuden;uhin intzidentea eta errefraktatua,fase berdinean egongo ziren,hedatze-abiadura 2.ingurunean 1.goan baino handiagoa bazen.Hau betetzen ez zenean, fasea desberdina zen.

Azter ditzagun E eta P puntuak:

P puntuan: $v_1 = c/n_o$, $v_2 = c/n$

	$n > n$	$n < n_o$
	$v_2 < v_1$	$v_2 > v_1$
	(fasea π-n ald.)	(fasea, berdina)

E puntuan: $v_1 = c/n$, $v_2 = c/n_o$

	$n > n_o$	$n < n_o$
	$v_2 < v_1$	$v_2 > v_1$
	(fasea, berdina)	(fasea π-n aldatzen da)

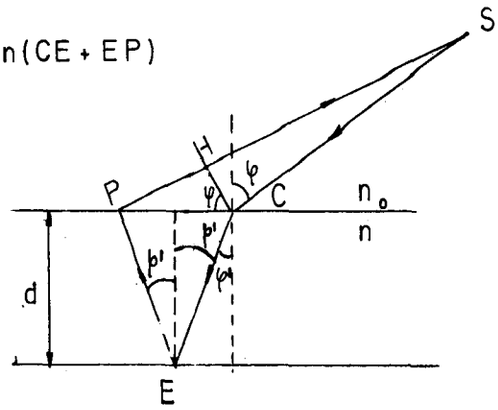
Orain, E_2 perturbazioa era honetara jar dezakegu:

$$E_2 = A_1 \cos\left[2\pi\,(t/T - l_2/\lambda_0) + \varphi_1 + \pi\right]$$

hots:
$$\left.\begin{aligned}\alpha_1 &= -2\pi\, l_1/\lambda_0 + \varphi_1 \\ \alpha_2 &= -2\pi\, l_2/\lambda_0 + \varphi_2 + \pi\end{aligned}\right\} \quad \alpha = \alpha_1 - \alpha_2 = 2\pi\left(\frac{l_2 - l_1}{\lambda_0}\right) - \pi$$

Saia gaitezen $(l_2 - l_1)$ kalkulatzen, P eta P' lotzen dituzten izpi guztiek bide optiko berdina dutenez gero:

$$l_1 = n_0\, SP$$
$$l_2 = n_0\, SC + n(CE + EP)$$



Beraz: $l_2 - l_1 = n_0(SC - SP) + n(CE + EP) = -n_0(SP - SC) + n(CE - EP)$

$\alpha = 2\pi\,\dfrac{(l_2 - l_1)}{\lambda_0} - \pi$ denez gero:

$\widehat{SHC}$ isoszeletzat joko dugu $SP - SC \cong PH$

$\widehat{PHC} \longrightarrow \sin\varphi = PH/PC \longrightarrow PH = PC\,\sin\varphi \cong SP - SC$

$\operatorname{tg}\varphi' = \dfrac{PC/2}{d} \longrightarrow PC = 2d\cdot\operatorname{tg}\varphi'$

orain: $PH = 2d.\operatorname{tg}\varphi'.\sin\varphi$

Snell-en legetik: $n_0 \sin\varphi = n \sin\varphi' \longrightarrow \sin\varphi = n/n_0\ \sin\varphi'$

Ordezkatuz:

$$PH = 2d\,\operatorname{tg}\varphi'\, n/n_0 \sin\varphi'$$

Bestetik:

$$CE + EP = 2CE \longrightarrow \cos\varphi' = d/CE \longrightarrow CE = d/\cos\varphi'$$

Azkenekoz:

$$l_2 - l_1 = -n_0\, 2d\,\frac{\sin\varphi'}{\cos\varphi'}\, n/n_0 \sin\varphi' + n\, 2d/\cos\varphi' =$$
$$= -2dn\,\frac{\sin^2\varphi'}{\cos\varphi'} + 2dn/\cos\varphi' = \left[\frac{2dn}{\cos\varphi'}\right]\left[1 - \sin^2\varphi'\right]$$

Balio hau dugularik:

$$\boxed{l_2 - l_1 = 2dn\cos\varphi'}$$

$$\alpha = 2\pi\,\frac{2dn\cos\varphi'}{\lambda_0} - \pi \qquad \varphi = 0 \text{ eta } \varphi' = 0 \text{ direnean,}$$

$$\alpha = 2\pi\,\frac{2dn}{\lambda_0} - \pi \longrightarrow \alpha = 2\pi\left(\frac{2dn}{\lambda_0} - \frac{1}{2}\right)$$

Maximoa: $\alpha = 2K\pi = 2\pi(2dn/\lambda_0 - 1/2) \longrightarrow 2dn/\lambda_0 = K+1/2 \quad d = \frac{(K+1/2)\lambda_0}{2n}$

kontutan harturik $\frac{\lambda_0}{n} = \lambda$ (uhin-luzera mintzean) dela

$$d = (K+1/2)\frac{\lambda}{2} = \boxed{(2K+1)\frac{\lambda}{4} = d}$$

Honen esangura: lodiera, $\lambda/4$-ren multiplo bakoitia denean, maximoa

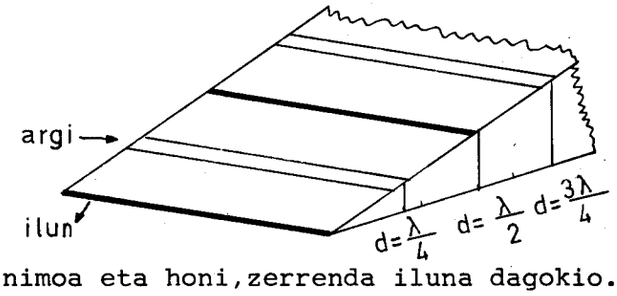
Minimoa:

$$\alpha = (2K-1)\pi = 2\pi(2dn/\lambda_0 - 1/2) = 2\pi(K-1/2) \longrightarrow \frac{2dn}{\lambda_0} = K$$

$$d = K\lambda_0/2n = K\lambda/2 \qquad \boxed{d = K\lambda/2}$$

$d, \lambda/4$ -ren multiplo bikoitia denean, minimoa izango dugu.

Demagun,orain, lodiera ez-konstante bat dugula.Erpinean,d=0 da; eta minimoaren baldintza, K=0 denean betetzen da:zerrenda ilun ikusiko dugu.

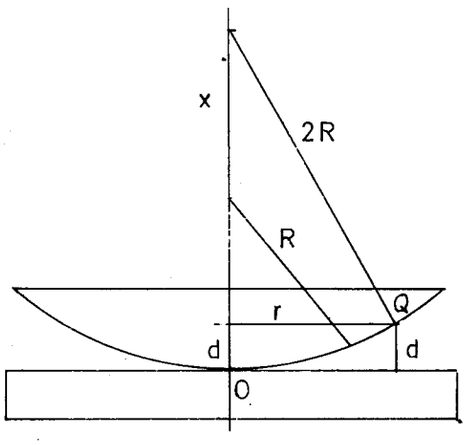


d=λ/4denean, maximoaren baldintza K=0 denean betetzen da,eta zerrenda argi agertuko da.

d= λ /2 denean, K=1 bada, minimoa eta honi,zerrenda iluna dagokio.Etab.....

4.2. NEWTON-EN ERAZTUNAK

Jo dezagun lente laun-konbexua dugula. bere kurbadura-erradioa handia dela,eta beirazko plaka baten gainean dagoela.



Generalean,lentea eta plaka elkarren ukipenean egongo dira lentearen erpinetik abiatuz.

Plaka eta lentearen tartean dagoen aireak,lodiera ez-konstanteko mintz baten papera egiten du.

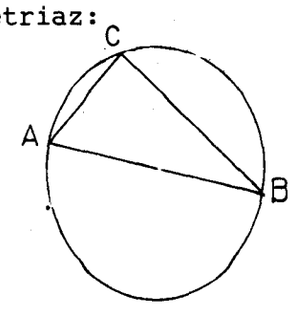
Kasu honetan, intzidentzia normal batez,zerrenda argi eta ilunak ikusi ahal izango dira: are gehiago,zirkuluak izango dira.

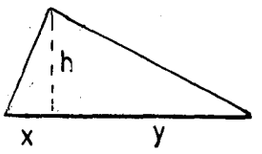
Fenomeno hau lehenengo aldiz,Newton-ek aztertu zuelako,"Newton-en eraztuna" deritzo saiakuntza honi.

Kalkula dezagun Q puntuan zer ikusiko dugun (eraztun argia ala

iluna)

Geometriaz:





$h^2 = x\,y$ $\quad r^2 = (2R-d)\,d$ eta $d \ll R$ bada $r^2 = 2Rd$

Maximoa: $r^2 = 2R(2K+1)\lambda/4 = (2K+1)R\lambda/2$

Minimoa: $r^2 = 2RK\lambda/2 = KR\lambda$

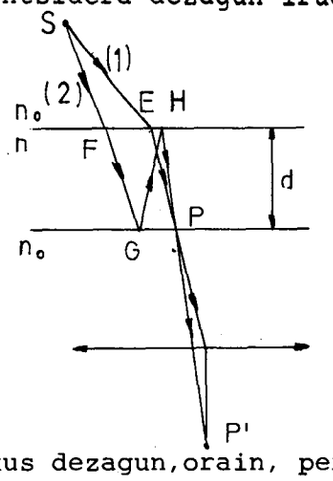
0 puntuari, eraztunaren zentrua deritzo.

Lentea eta plaka ukitzen direnean, d=0 eta r=0.Beraz, minimo baten baldintzak betetzen dira K=0 baldin bada; puntu iluna izango dugu.

Lentea eta plaka elkarrengandik urruntzen baditugu,distantzia $\lambda/4$ neurriz aldatuaz,eraztun iluna argia bihurtuko da; eta alderantziz.

Interferentzi fenomenoa izpi errefraktatuetan:

Kontsidera dezagun irudian agertzen den sistema optikoa:



Izpien bide optikoak 1_1 eta 1_2 izaki,bakoitzari dagozkion perturbazioak hauek izango dira:

$E_1 = A_1 \cos\left[2\pi(t/T - l_1/\lambda_o) + \varphi_1\right]$

$E_2 = A_2 \cos\left[2\pi(t/T - l_2/\lambda_o) + \varphi_1\right]$

Bi puntuek emandako φ_1 berdina izango da,iturri ber-beretik ateratzen direlako.

Ikus dezagun,orain, perturbazioari zerbait batu behar diogun ala ez.Horretarako,azter dezagun G eta H puntuetan gertatzen dena.

		$n > n_o$	$n < n_o$
G puntuan :	$v_1 = c/n$	$v_2 > v_1$	$v_2 < v_1$
		fase berdina	π batu behar
	$v_2 = c/n_o$		
H puntuan:	$v_1 = c/n$		
		$v_2 > v_1$	$v_2 < v_1$
		fase berdina	π batu behar
	$v_2 = c/n_o$		

Beraz, oro har, 2π batu beharko diogu perturbazioari.Baina, dakigunez, 2π-ko fase-aldaketa eta aldaketarik eza gauza berdinak dira.

Honen ondorioz: $\alpha_1 = -2\pi l_1/\lambda_0 + \varphi_1$
$\alpha_2 = -2\pi l_2/\lambda_0 + \varphi_1$

$\alpha = \alpha_1 - \alpha_2 = 2\pi(l_2 - l_1)/\lambda_0$ hots: $l_2 - l_1 = 2\,dn\cos\varphi'$

Intzidentzia,normala denez $(\varphi = 0 \quad \varphi' = 0)$ $\boxed{\alpha = 2\pi\ 2dn/\lambda_0}$

Maximoa:

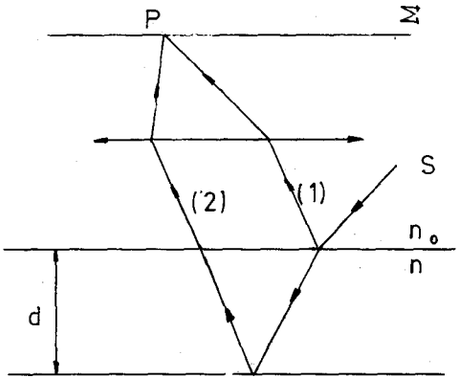
$$\alpha = 2K\pi = 2\pi\ 2\,dn/\lambda_0 \longrightarrow d = K\lambda_0/2n = \boxed{d = K\lambda/2}$$

Ikusten dugunez, izpi errefraktatuen baldintza maximorako eta izpi isladatuarena minimorako berdinak dira.

Minimoa: $\alpha = 2(K+1/2)\pi = 2\pi\ 2\,dn/\lambda_0 \longrightarrow d = (K+1/2)\lambda/2$ $\boxed{d = (2K+1)\lambda/4}$

4.3. INTERFERENTZIA ANIZKOITZAK: INTERFERENTZI ZERRENDAK PLAKA LAUN PARALELOETAN

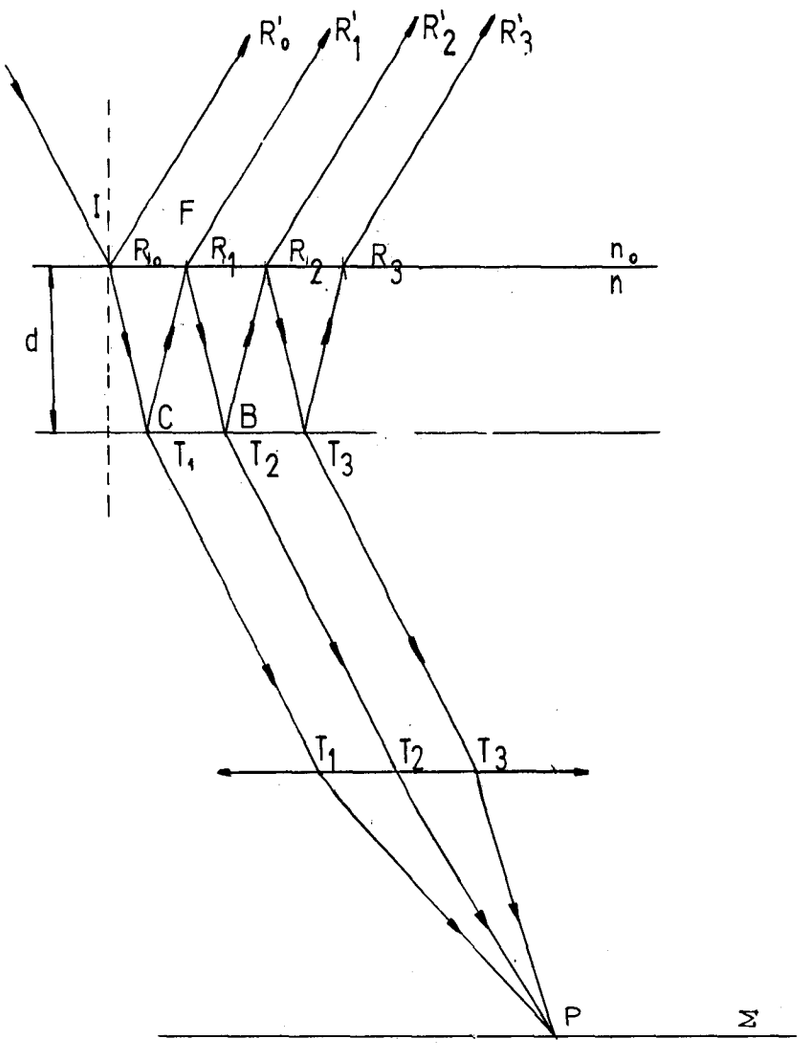
Eman dezagun plaka laun paraleloa dugula,bere d lodiera konstantea dela, eta haren errefrakzio indizearen balioa n dela.S iturritik datorren izpi baten trajektoria,irudian agertzen denaren antzekoa izango da. P puntuan interferentzi zerrendak emango dizkigularik.



Plakaren gaineko gainazaletik ateratzen zaizkigun izpi guztiek angelu ber-bera izango dute.Interferentzi zerrendak emandako irudiak, zirkunferentzia zentrukideak izango dira.

Plakaren ρ koefizientea handia edo txikia izan daiteke.Txikia denean izpia bi edo aldi gehiagotan isladatzen bada ere,ez dugu kontutan hartuko.Aldiz, ρ koefizientea handia denean,isladapen eta errefrakzio guztiak kontutan hartu beharko ditugu.

ρ handiko kasua,ondorengo irudian azaltzen da:



Orain baino lehenago ere egina dugunez,aplika diezaiogun eredu ondulatorioa fenomeno honi.Har ditzagun horretarako $T_1\ T_1'$ eta T_2T_2' izpi errefraktatuak.Hauetako bakoitzak emandako perturbazioa,horrelako zerbait izango da:

$$T_1\ T_1' \text{ ——} \quad E_1 = A_1 \cos\left[2\pi i\,(t/T - l_1/\lambda_0) + \varphi_1\right]$$

$$T_2\ T_2' \qquad E_2 = A_2 \cos\left[2\pi i\,(t/T - l_2/\lambda_0) + \varphi_1\right]$$

Beraz, faseen balioak

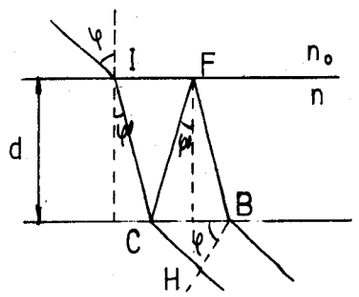
$$\alpha_1 = -2\pi i\, l_1/\lambda_0 + \varphi_1$$

$$\alpha_2 = -2\pi i\, l_2/\lambda_0 + \varphi_1$$

Eta, fase-aldaketa:

$$\alpha = \alpha_1 - \alpha_2 = 2\pi(l_2 - l_1)/\lambda_0$$

Irudia piska bat handiaraziaz:



Bertan dakusagunez, BH lerroa uhin-frontea dugu, eta P puntua uhin-fronte esferiko -erradio guztiz txikikoa- bezala kontsidera dezakegu. Ibilbide optikoaren teorema dela bide, bi uhin-fronte horiek lotzen dituzten izpi ororen bide optikoak berdinak direla badakigu.

Bide hauen balioak: $l_1 = n_0 \overline{CH}$

$$l_2 = n(\overline{CF} + \overline{FB})$$

Hots, bide-diferentzia: $l = l_2 - l_1 = n(\overline{CF} + \overline{FB}) - n_0 \overline{CH}$

$\widehat{CBH}$ triangelutik: $\sin\varphi = \overline{CH}/\overline{CB}$ edo $\overline{CH} = \overline{CB}\sin\varphi$

Gainera: $tg\varphi' = \overline{CB}/2d$ edo $\overline{CB} = 2d\,tg\varphi'$

hots: $\overline{CH} = 2d\,tg\varphi\sin\varphi$

Bistan dagoenez: $\cos\varphi' = d/\overline{CF}$ edo $\overline{CF} = d/\cos\varphi'$

Azkenerako:

$$l_2 - l_1 = 2n_0 d/\cos\varphi' + n\ 2d\,tg\varphi'\sin\varphi$$

Snell-en legea beteko bada:

$$\sin\varphi = n/n_0 \sin\varphi'$$

Antzaldatze matematikoak direla bide:

$$l_2 - l_1 = 2n_0 d/\cos\varphi - n_0\, 2d \sin\varphi'/\cos\varphi'\, n/n_0 \sin\varphi' = \frac{2dn}{\cos\varphi'}(1 - \sin^2\varphi')$$

$$\boxed{l_2 - l_1 = 2dn\cos\varphi'}$$

Fase-aldaketaren balioa:

$$\alpha = 2\pi \cdot \frac{2dn\cos\varphi'}{\lambda_0}$$

α -ren balio handiena, <u>maximoa</u>, baldintza hauekin emango da:

$$\alpha = 2\pi K = 2\pi\, 2dn\cos\varphi'/\lambda_0 \qquad \text{eta:} \quad \boxed{d\cos\varphi' = \frac{K\lambda_0}{2n} = \frac{K\lambda}{2}}$$

Sarritan, φ intzidentzi-angelua ezaguna da eta, horregatik, maximorako baldintzak bere funtzio bezala jartzea laket izango zaigu:

$$d\sqrt{1 - \sin^2\varphi'} = K\lambda/2 \qquad d\sqrt{1 - \frac{n_0^2}{n^2}\sin^2\varphi} = K\lambda/2$$

$$d\sqrt{\frac{n^2 - n_0^2\sin^2\varphi}{n^2}} = \frac{K\lambda_0}{2n} \qquad \boxed{d\sqrt{n^2 - n_0^2\sin^2\varphi} = K\lambda_0/2}$$

Suposa dezagun eraztunaren erdidunea puntu argia dela, eta K_0 mailako interferentziaren maximoa ere bai. Honen arauera: $\varphi = 0$ eta $\varphi' = 0$

Maximoaren baldintzak direla eta:

$$d = K_0 \cdot \lambda / 2$$

Berdintza honetatik, plakaren lodiera ezagutu dezakegu.

Eman dezagun, K mailako interferentziaren maximoa φ'_k angeluaz ikusten dugula; hots: $d \cos\varphi'_k = K\lambda/2$ edo $K_0 \lambda/2 \cos\varphi'_k = K\lambda/2$

$$\boxed{\cos\varphi'_k = K / K_0}$$

Angelua txikia denean, bere kosinuaren adierazpena Taylor-en formularen bidez gara dezakegu: $\cos\varphi'_k = 1 - (\varphi'_k)^2/2$ (beste gaiak arbuiatuz)

Beraz: $1 - (\varphi'_k)^2/2 = K/K_0$ eta $1 - K/K_0 = (\varphi'_k)^2/2$

hau da: $\frac{2(K_0 - K)}{K_0} = (\varphi'_k)^2$ azkenean: $\varphi'_k = \sqrt{2/K_0} \cdot \sqrt{K_0 - K}$

$K_0/2 = d/\lambda$ dela gogoratuz:

$$\boxed{\varphi'_k = \sqrt{\lambda/d} \sqrt{K_0 - K}}$$

Berriz ere, Snell-en legea dela bide: $n_0 \varphi_k = n \varphi'_k$

Horregatik:

$$\boxed{\varphi_k = n/n_0 \varphi'_k = n/n_0 \sqrt{\lambda_0/dn} \sqrt{K_0 - K}}$$

Adierazpen honen esannahia hauxe da: Lentera sartzerakoan, $K_0 - 1$ mailako eraztun argiak emango dizkiguten izpien angelua, $n/n_0 \cdot \sqrt{\lambda/dn}$ izango dela.

4.4. INTERFERENTZIA MULTIPLEAREN AZTERKETA MATEMATIKOA

Plaka laun-paraleloetan gertatzen diren interferentziak hobeto aztertzeko, funtzio sinusoidalen era konplexuak erabiliko ditugu. Baina, lehenbait lehen, defini ditzagun zenbait koefiziente:

$\rho = \frac{\text{Anpl. isladatua}}{\text{Anpl. intzidentea}}$, uhina plakatik kanporuntz badoa.

$\rho' = \frac{\text{Anpl. isladatua}}{\text{Anpl. intzidentea}}$, uhina kanpotik plakaruntz badoa.

$\tau = \frac{\text{Anpl. errefrak.}}{\text{Anpl. intzidentea}}$, uhina plakatik kanporuntz badoa

$\tau' = \frac{\text{Anpl. errefrak.}}{\text{Anpl. intzidentea}}$, uhina kanpotik plakaruntz badoa.

Gainera, uhin intzidentearen anplitudea A dela suposatuko dugu.

a) Azterketa matematikoa, izpi errefraktatuetan:

T_1T_1' izpiari dagokion perturbazioa hau izango da:

Izpi hau I eta C puntuetan errefraktatzen da (ikus irudia).

I puntuan: $\gamma' = \frac{A\,er}{A\,in} \longrightarrow A.er = \gamma'.A$

C puntuan: $\gamma = \frac{A\,er}{A\,in} = \frac{A\,er}{\gamma'A} \longrightarrow A\,er = \gamma.\gamma'A$

(azpiko izpi intzidentea lehengo errefraktatua baita) eta

$E_{t_1} = \gamma.\gamma' A\, e^{iwt}$ izango da adibidez.

T_2T_2' izpiari dagokion perturbazioa: $E_{t2} = \gamma\gamma'\rho^2 A.$(zerbait)

Lehen izpiari I_1 bide optikoa atxikitzen badiogu, eta 1_2 bigarrenari, desberdintza hau beteko da: $1_2 > 1_1$

Eta, perturbazioaren atzerapena: $(1_2 - 1_1)/c = t$

Beraz, E_{t2}-ren tankera honelakoa izango da:

$$E_{t_2} = \gamma'\gamma\rho^2 A\, e^{i\{w[t-(1_2-1_1)/c]\}} = \gamma\gamma'\rho^2 A\, e^{i\{2\pi[t/T-(1_2-1_1)/\lambda_o]\}}$$

Fase-aldaketari α baderitzogu:

$$E_{t2} = \gamma\gamma'\rho^2 A.e^{i(wt-\alpha)}$$

Hirugarren perurbazioa:

$$E_{t3} = \gamma\gamma'\rho^4 A\, e^{i(wt-2\alpha)}$$

Eta, m. izpi batentzat:

$$E_{tm} = \gamma\gamma'\rho^{2(m-1)} A\, e^{i[wt-(m-1)\alpha]}$$

Azkenik, perturbazio osoa perturbazio guztien batura izango da:

$$E_T = E_{t1} + E_{t2} + \ldots + E_{tm}$$

Edo, adierazpen matematiko zehatzago baten bidez:

$$\boxed{E_T = \gamma.\gamma' A.e^{iwt}.\sum_{m=1}^{\infty}(\rho^2 e^{-i\alpha})^{m-1}}$$

Hemen, batukaria progresio matematiko geometrikoa dugu, eta bere arrazoia $\rho^2 e^{-i\alpha}$ da. Beraz, gai guztien batura:

$$S = \frac{1}{1-\rho^2 e^{-i\alpha}}$$

Eta, honen arauera:

$$E_T = \frac{\gamma\,\gamma'}{1-\rho^2 e^{i\alpha}} \cdot A.e^{iwt}$$

Baina, $I=K.A^2$ dela badakigu. Orain, izpi errefraktatuen intentsitate totala aurkitzeko, beraien guztizko anplitudea kalkulatu beharko dugu.

Funtzio konplexuak ditugunez gero:

$$A_T^2 = \frac{\gamma\,\gamma'}{1-\rho^2 e^{-i\alpha}} A e^{iwt} \qquad \frac{\gamma\,\gamma'}{1-\rho^2 e^{i\alpha}} A e^{-iwt}$$

(funtzio konplexua) (funtzio konjokatua)

Garatuz:

$$A_T^2 = \frac{(\gamma\,\gamma')^2 A^2}{1-\rho^2 e^{i\alpha} - \rho^2 e^{i\alpha} + \rho^4} \quad \text{eta} \quad I_T = \frac{(\gamma\,\gamma')^2 K A^2}{1+\rho^4-\rho^4(e^{i\alpha}+e^{-i\alpha})}$$

Har ditzagun orain kontutan zenbait erlazio interesgarri:

$$\gamma\,\gamma' = 1-\rho^2 \; ; \quad \rho' = -\rho \quad ; \quad \cos\alpha = \frac{e^{i\alpha}+e^{-i\alpha}}{2}$$

Hau dela eta, I_T intentsitate osoaren adierazpenak erlazio hau izango du I(uhin intzidentearen intentsitatearekin):

$$\boxed{I_T = \frac{(1-\rho^2)^2}{1+\rho^4-2\rho^2\cos\alpha} I}$$

b) <u>Azterketa matematikoa, izpi isladatuetan</u>:

Interferentzia anizkoitzen irudira begiratuz, izpi bakoitzari dagokion perurbazioa horrelako zerbait izango dugu:

$R_0 R_0' \longrightarrow E_{r0} = \rho' A e^{iwt}$

$R_1 R_1' \longrightarrow E_{r1} = \gamma\gamma\rho A e^{i(wt-\alpha)}$

$R_2 R_2' \longrightarrow E_{r2} = \gamma'\gamma\rho^3 A e^{i(wt-2\alpha)}$

$\vdots \qquad\qquad \vdots$

$R_m R_m' \longrightarrow E_{rm} = \gamma\gamma'\rho^{2m-1} A e^{i(wt-m\alpha)}$

$$E_T = E_{r0} + E_{r1} + \ldots + E_{rm} = A e^{iwt}\left[\rho' + \gamma\gamma'\rho e^{-i\alpha}\sum_{m=1}^{\infty}\left(\rho^2 e^{-i\alpha}\right)^{m-1}\right]$$

Izpi errefraktatuentzat egin dugun arrazoinamendu ber-bera erabiliz:

$$E_T = A e^{iwt}\left[-\rho + \frac{(1-\rho^2)\rho e^{i\alpha}}{1-\rho^2 e^{i\alpha}}\right] = A e^{iwt}\left[\frac{-\rho+\rho^3 e^{i\alpha}+\rho e^{-i\alpha}-\rho^3 e^{i\alpha}}{1-\rho^2 e^{-i\alpha}}\right]$$

Azken batean: $$E_t = A e^{iwt}\left[\frac{\rho(e^{i\alpha}-1)}{1-\rho^2 e^{-i\alpha}}\right]$$

Berriz ere, A_T^2 -ren balioa aurkitzen badugu:

$$A_T^2 = A e^{iwt} A e^{-iwt} \cdot \left[\frac{\rho(e^{-i\alpha}-1)\rho(e^{i\alpha}-1)}{(1-\rho^2 e^{-i\alpha})(1-\rho^2 e^{i\alpha})}\right]$$

Izendatzailearen garapena: $1+\rho^4-\rho^2(e^{i\alpha}+e^{-i\alpha})=1+\rho^4-2\rho^2\cos\alpha$

Edota: $A_T^2 = A^2 \dfrac{\rho^2(1-e^{i\alpha}-e^{i\alpha}+1)}{1+\rho^4-2\rho^2\cos\alpha} = \dfrac{\rho^2(2-(e^{i\alpha}+\bar{e}^{i\alpha})A^2}{1+\rho^4-2\rho^2\cos\alpha} =$

$$= A_T^2 = \frac{\rho^2(2-2\cos\alpha)A^2}{1+\rho^4-2\rho^2\cos\alpha}$$

Intentsitate isladatu guztia:

$$I_T = \frac{2\rho^2(1-\cos\alpha)\ KA^2}{1+\rho^4-2\rho^2\cos\alpha} = \boxed{\frac{2\rho^2(1-\cos\alpha)\ I}{1+\rho^4-2\rho^2\cos\alpha} = I_T}$$

Intentsitate errefraktatua($I_{Ter.}$) eta intentsitate isladatua($I_{Tis.}$) $\sin(\alpha/2)$-ren funtzio bezala jartzea interesatzen zaigu:

$$I_{Tis} = \frac{2\rho^2(1-\cos\alpha)\ I}{1+\rho^4-2\rho^2\cos\alpha} = \frac{2\rho^2\left[1-(1-2\sin^2(\alpha/2)\right]I}{1+\rho^4-2\rho^2\left[1-2\sin^2(\alpha/2)\right]} =$$

$$= \frac{4\rho^2\sin^2(\alpha/2)\ I}{(1-\rho^2)^2+4\rho^2\sin(\alpha/2)}$$

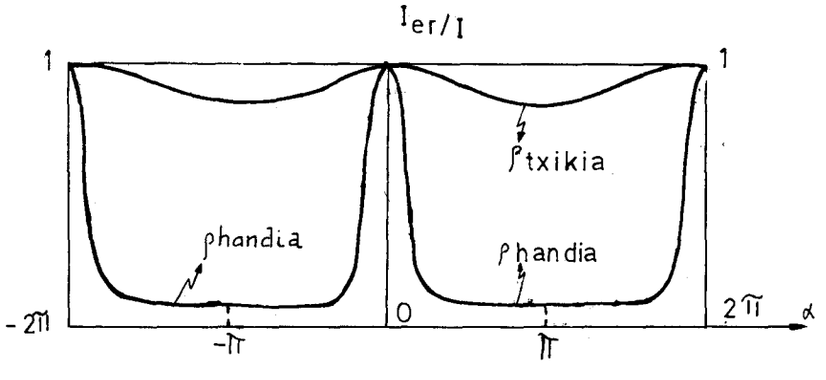
$$I_{Ter} = \frac{(1-\rho^2)^2\ I}{1+\rho^4-2\rho^2\cos\alpha} = \frac{(1-\rho^2)^2\ I}{1+\rho^4-2\rho^2\left[1-2\sin^2(\alpha/2)\right]} = \frac{(1-\rho^2)^2 I}{1+\rho^4-2\rho^2+4\rho^2\sin^2(\alpha/2)}$$

$$= \frac{(1-\rho^2)^2\ I}{(1-\rho^2)^2+4\rho^2\sin^2(\alpha/2)}$$

Hots: $\underline{I\,intz = I\,er + I\,is}$

Ikus ditzagun,orain,intentsitatea nola aldatzen den fase-diferentziaz:

a) Izpi errefraktatuetan:



Ikus dezagun maximoen eta minimoen posizioa:

-Maximoa: (baldintza, fase-aldaketa π-ren multiplo parea izatea da)

$\alpha = 2\pi$ orduan: $I_{er} = \frac{(1-\rho^2)^2 \cdot I}{(1-\rho^2)^2} = I_{intz.}$

-Minimoa: $\alpha = (2K+1)\pi$ orduan $I_{er} = \frac{(1-\rho^2)^2 I}{(1-\rho^2)^2 + 4\rho^2} = \frac{(1-\rho^2)^2}{1+2\rho^2-4\rho^2+\rho^4}$

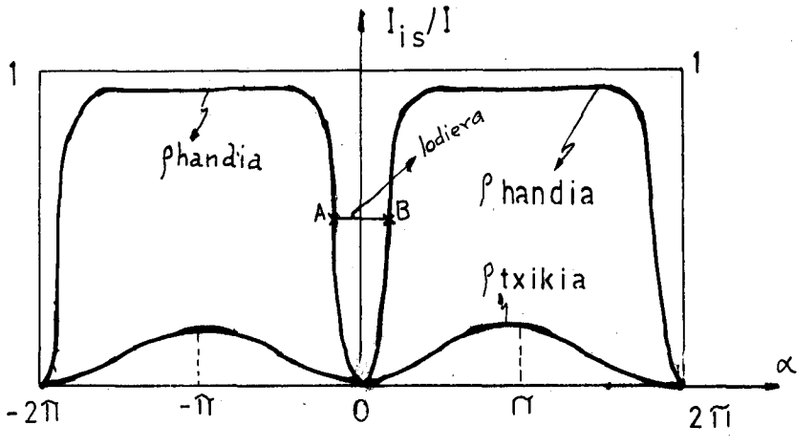
$$I_{er} = \frac{(1-\rho^2)^2 I}{(1+\rho^2)^2}$$

Balio hauen gutxi gora-beherako hurbilketak lortzeko, ρ koefizienteari zenbait balio emango dizkiogu (0,8 eta 0,2 adibidez).

$$\rho^2 = 0,9 \qquad I_{er} = \frac{0,04}{(1+0,8)^2} I = 1/81 \cdot I$$

$$\rho^2 = 0,04 \qquad I_{er} = \frac{(1-0,04)^2}{(1+0,04)^2} I = 0,85 \cdot I$$

b) Izpi isladatuetan:



Azter dezagun nola aldatzen den I_{is}. fase-aldaketaz:

-Maximoa: $\sin^2(\alpha/2) = 1$ denean $I_{is} = \frac{4\rho^2}{(1-\rho^2)^2 + 4\rho^2} I = \frac{4\rho^2}{(1+\rho^2)^2} I$

hau betetzeko: $\alpha/2 = (2K+1)\pi/2$ $\alpha = (2K+1)\pi$

-Minimoa: $\alpha = 2K\pi$ eta: $I_{is} = 0$

Lehen egin dugun bezala, ρ -ren balio konkretu batzuk erabiliko ditugu:

$$\rho^2 = 0,8 \qquad I_{is} = \frac{4 \cdot 0,8 \cdot I}{1+0,8)^2} = 80/81 \cdot I$$

$$\rho^2 = 0,04 \qquad I_{is} = \frac{0,16 \cdot I}{(1+0,04)^2} = 0,16 \cdot I$$

Puntu batean maximoa bagenu, puntu horretan eraztun argia ikusiko genuke; eta minimoa balitz, aldiz, iluna. Definizioz, eraztun bateko

maximo nahiz minimo baten lodiera zera da:"A puntutik B punturaino dagoen distantzia, A eta B intentsitate maximoko erdi-erdiko puntua izanik".

Izpi errefraktatuetan, (ρ handia denean) eraztun argiak estuak eta ikuskorrak izango dira,maximo eta minimoen artean kontraste handia baitago.

Izpi errefraktatuetan (ρ txikia denean) eraztun argi zabalak izango ditugu, eta kontraste gutxikoak: beraz, ikusteko zail samarrak.

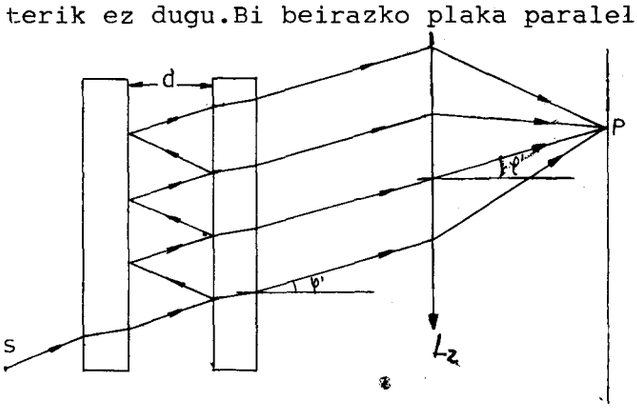
Izpi isladatuetan, (ρ handia denean) eraztun ilun estuak,eta kontraste handikoak ikusi ahal izango ditugu.

Izpi isladatuek (ρ txikikoak badira) eraztun ilun zabalak emango dizkigute,kontraste txikikoak eta ikusgaitzak.

Ondorio bezala, hauxe baiezta dezakegu:Interferentzi fenomenoa ikusi ahal izateko, ρ -ren balioak ahalik eta handiena izan behar duela.

4.5. FABRY-PEROT-EN INTERFEROMETROA

Interferometro hau interferentzi anizkoitzetako kasu berezi bat besterik ez dugu.Bi beirazko plaka paraleloz osatua dago.Plaka horien arteko distantzia d da, eta ρ handia eduki behar dute.



S iturritik izpiak bidaliaz, errefraktatze isladatze fenomenoak jasango dituzte.Gero,bi plaketatik ateratako izpiak,lente konbergente batez pantailaratzen baditugu interferentzi fenomenoak ikusiko ditugu.

Bi plaken ρ handia denez gero, eraztunak plano fokalean ikusiko ditugu,eta argiak eta estuak izango dira.Arrazoi honetxegatik,iturriak bi uhin-luzera bidaltzen baditu,plano fokalean,bi eraztun-sistema ikusiko ditugu,nahiz eta uhin-luzera horien arteko desberdintasuna guztiz txikia izan.

Bi izpi kontsekutiboren arteko fase-diferentzia (α) hauxe izango da:

$$\alpha = 2\pi\, 2dn\cos\varphi'/\lambda_0 = 2\pi\, 2d\cos\varphi'/\lambda_0 \qquad (n = 1 \text{ baita})$$

K mailako interferentzia maximoa izango badugu: $\alpha = 2\pi K$

Hots, maximoa izateko:

$$2\pi \cdot 2d \cdot \cos\varphi'_k/\lambda_o = 2\pi K \quad \text{eta} \quad \boxed{\cos\varphi'_k = K\lambda_o/2d}$$

Iturriko uhin-luzera, piska bat bakarrik aldatzen bada ere $(\lambda_o + \Delta\lambda)$ K mailako interferentziaren maximoa:

$$\cos(\varphi'_k + \Delta\varphi') = K(\lambda_o + \Delta\lambda)/2d$$

Hurbilketa hauek eginaz:

$$\cos\Delta\varphi' \simeq 1 \quad \text{eta} \quad \sin\Delta\varphi' \simeq \Delta\varphi'$$

$$1 \cdot \cos\varphi'_k - \Delta\varphi' \sin\varphi'_k = K\lambda_o/2d + K\Delta\lambda/2d$$

edo:

$$K\lambda_o/2d - \sin\varphi'_k \, \Delta\varphi' = K\lambda_o/2d + K\Delta\lambda/2d$$

hau da:

$$\boxed{\Delta\varphi' \sin\varphi'_k = K\Delta\lambda/2d}$$

Lehendik ere badakigunez, eraztunaren zentruan K_o mailako interferentziaren maximoa ikusteko baldintza hauek bete behar dira:

$$K_o = 2d/\lambda_o \qquad \varphi'_k = \sqrt{2/K_o}\ \sqrt{K_o - K}$$

φ'_k txikia bada: $\sin\varphi'_k \simeq \varphi'_k$

Orduan:

$$\Delta\varphi' = \frac{K\Delta\lambda/2d}{\sqrt{2/K_o}\sqrt{K_o - K}} = \frac{K\sqrt{K_o}\,\Delta\lambda\,\lambda_o}{2d\sqrt{2}\,\lambda_o\sqrt{K_o - K}} = K/K_o \sqrt{\frac{K_o}{2(K_o - K)}}\ \frac{\Delta\lambda}{\lambda_o}$$

<u>Adibidea:</u> Eman dezagun, Fabry-Perot-en interferometro baten datuak honako hauek direla:

$$d = 2\,cm \qquad \lambda = 5000\,\text{Å} \qquad K_o = \frac{4 \cdot 10^8}{5 \cdot 10^3} = 8 \cdot 10^4$$

Lehenengo eraztun argia (Ko-1) mailakoaren maximoa, φ'_{K_o-1} angeluaz izango dugu:

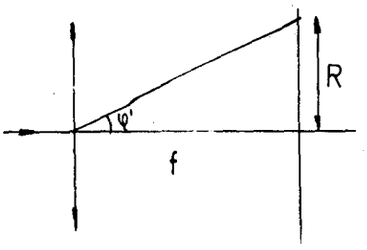
$$\varphi'_{k_o-1} = \sqrt{\frac{2}{8\,10^4}} \cdot \sqrt{\frac{1}{(K_o - (K-1)}} = \sqrt{1/4 \cdot 10^4} = 1/200$$

$$\Delta\varphi' = \frac{8 \cdot 10^4}{8 \cdot 10^4} \cdot \sqrt{\frac{6 \cdot 10^4}{2.1}} \cdot \Delta\lambda / \lambda_o = 2 \cdot 10^2 \Delta\lambda / \lambda_o$$

Angelu-alsaketa aurkitzeko: $\dfrac{\Delta\varphi'}{\Delta\varphi'_{k_o-1}} = 2 \cdot 10^2 \Delta\lambda / \lambda_o \cdot 200 = 4 \cdot 10^4 \Delta\lambda/\lambda_o$

Suposa dezagun $\Delta\lambda = 1{,}25 \cdot 10^{-2}$ Å aldatu dela. Orduan $\dfrac{\Delta\varphi'}{\varphi'_{k_o-1}} = 0{,}1$

Honen esannahia, φ'-ren balioa, %10-etan aldatu dela.



Eraztunaren erradioan duen eragina ere, %10-ekoa izango da. $tg\,\varphi' = R/f \cong \varphi'$ delako.

5.IKASGAIA

HUYGENS-EN PRINTZIPIOA

Argiaren propagazioa ingurune ez homogenoetan aztertu nahi izango bagenu: kalkulu matematiko penagarriekin egingo genuke topo.Oztopo hauek gainditu ahal izateko problemaren soluzio hurbildu bat bilatuko dugu,kalkulu matematiko errazago batzuez baliatuz.Hauxe da, hain zuzen,Huygens-en printzipioaren funtsa.

Kontsidera dezagun ondorengo sistema optikoa:Bitez S iturri puntuala, σ gainazala(bere barruan S iturria duela) eta P puntua.

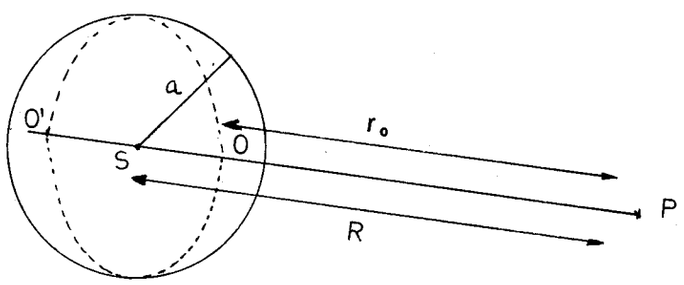


Huygens-en printzipioak zera dio:

"σ gainazaleko puntu guztiak,S-tik datozkien uhinok haienganaino iristean,bigarren mailako uhin-sortzaileak bihurtzen dira.Gainazaletik kanpora dagoen edozein puntutan S iturriak sortarazten duen perturbazioa,σ gainazaleko uhinen gainjarpena izango da".

Huygens-en printzipioaren frogapena lehenengo aldiz egin zuena Kirchhoff izan zen.Horregatik,Kirchhoff-en teorema ere esaten zaio.

Gure garapen matematikoa egiteko, gainazala esferikotzat hartuko



dugu,S iturria bere zentruan dagoelarik eta bere erradioa a delarik. P puntutik S-rainoko distantzia R izango da.PS lerroak O eta O' puntuetan moztuko du esfera; OP distantziari r_o deituko diogu.Orduan:

$$R = r_o + a$$

Hirugarren ikasgaian ikusi genuen bezala,S iturria simetrikoa zenean,

beregandik r distantziara zeuden puntu guztiko perturbazioa berdina zen, eta bere balioa:

$$P = \frac{F(t - r/v)}{r}$$

Orain, eman dezagun iturria asimetrikoa dela.Kasu honetan, perturbazioaren balioa q orientazio-funtzio baten menpekoa izango da.Hots:

$$P = \frac{F(t - r/v)}{r} q$$

P puntuko perturbazioa,E(R,t) funtzio bat izango da.S iturria simetrikoa dela suposatzen badugu,bere itxura horrelako zerbait izango da:

$$E(R,t) = \frac{\varphi(t - r/v)}{R}$$

Gure kasuan,R=a denez gero:

$$E(a,t) = \frac{\varphi(t - a/v)}{a}$$

σ gainazale-o puntu guztietan perturbazioaren balioa berdina denez gero: E(a,t)=f(t) izango da;bera:

$$E(a,t) = \frac{\varphi(t - a/v)}{a} = f(t)$$

edo:

$$\boxed{\varphi(t - a/v) = a \cdot f(t)}$$

Ekuazio hau edozein denbora batentzat bete behar da:ipini dezagun t-ren ordez $(t-r_o/v)$ balioa:

$$\varphi(t - r_o/v - a/v) = \varphi\left(t - \frac{r_o + a}{v}\right) = a\, f(t - r_o/v)$$

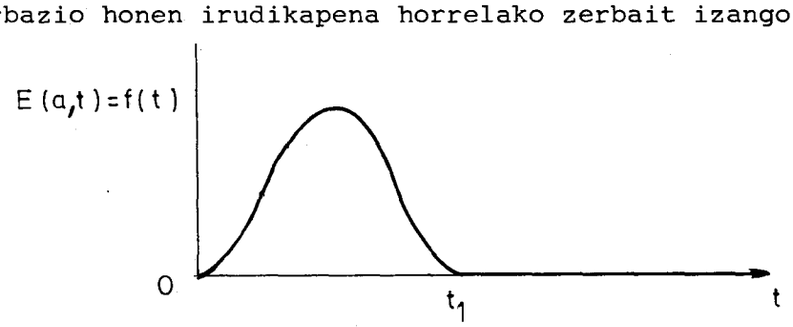
Beraz;

$$\varphi(t - R/v) = a \cdot f(t - r_o/v)$$

Orain, E(R,t) ematen digun ekuazioarekin alderatzen badugu:

$$\boxed{E(a + r_o, t) = \frac{a}{a + r_o} f(t - r_o/v)}$$

Eman dezagun orain perturbazioak gainazalean denbora-bitarte guztiz laburrean irauten duela (t=0 den unetik, $t=t_1$ egiten denerarte) Perturbazio honen irudikapena horrelako zerbait izango litzateke:



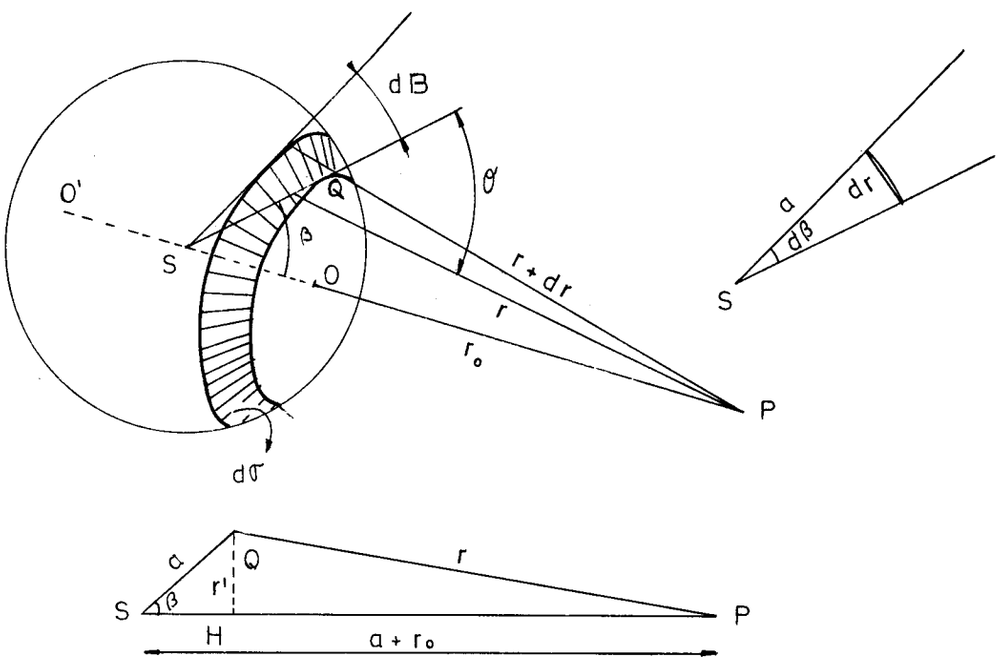
t_1 zeharo txikia denez gero, perturbazioa zona esferiko batera mu-

gatua geratuko da,zona horren lodiera v.t_1 delarik.

Gure garapen guztian, zer esanik ez, v.t_1 balioa a eta r_o baino askoz ere txikiagoa dela suposatuko dugu.

Huygens-en printzipioa dela eta, dσ elementuak bigarren mailako uhina bidaliko du t=0 eta t=t_1 denbora-bitartean.Gainazalaren elementu diferentzial honek dEs perturbazioa emango digu P puntuan.

P-tik barrengo zirkulura arteko distantziari r deitzen badiogu,ondorengo marrazkian perturbazioaren balioa aurki dezakegu:



Erabil dezagun iturri asimetriko batek emandako perturbazioaren formula.
Dakigunez,dEs, dσ azalera diferentzialarekin proportzionala izango da:

$$dE_S = \frac{\Psi(t - r/v)}{r}\, q(\theta)\, d\sigma$$

q(θ) funtzioari "makurtasun-faktore" esango diogu,eta θ angeluaren funtzio izango da. θ=0 denean, q=1 izango da.

Huygens-en printzipioak dioenez,P puntuan perturbazioa aurkitzeko gainazaleko puntu guztiek emandakoa gainezarri behar da: hots:

$$\int_{\sigma} dE_S = E(a + r_o, t)$$

Kalkula dezagun φ eta q funtzioek zein baldintza bete behar dituzten goiko berdintza egiaztatzeko.

Har dezagun $\widehat{PSQ}$ triangelua,eta aplika diezaiogun kosinuaren teorema:

$$r^2 = a^2 + (a + r_o)^2 - 2a(a+r_o)\cos\beta$$

r eta β-rekiko diferentziatuz:

$$2r \cdot dr = a(a+r_o) \cdot \sin\beta \cdot d\beta \qquad \text{edo:} \qquad r \cdot dr = a(a+r_o) \cdot \sin\beta \cdot d\beta$$

$d\sigma$ azalera aurkitzeko: $d\sigma = 2\pi r' \cdot dr'$

$\widehat{SQH}$ triangelua kontutan hartzen badugu: $r' = a \cdot \sin\beta$

Bestalde, arkua kordari hurbilduz: $dr' = a \cdot d\beta$

Eta: $d\sigma = 2\pi a \cdot \sin\beta \cdot a \cdot d\beta = 2\pi \cdot a^2 \cdot \sin\beta \cdot d\beta$

hemen: $\sin\beta\, d\beta = \dfrac{r\, dr}{a(a+r_o)}$ eta $d\sigma = \dfrac{2\pi a}{a+r_o} r\, dr$

Eta, balio hauek hasierako formulan ordezkatzen baditugu:

$$dE_s = \frac{\Psi(t - r/v)}{r} q(\sigma) \cdot \frac{2\pi a}{a+r_o} \cdot r \cdot dr$$

Hau da:

$$\boxed{dE_s = \frac{2\pi a}{a+r_o} \cdot \frac{\Psi(t - r/v)}{r} \cdot q(\sigma) \cdot dr}$$

Esan dugunaren arauera, bigarren mailako uhinek t=0 eta $t=t_1$ epean irauten dute.Baldintza hau matematikoki azalduz:

$$0 < t - r/v < t_1$$

Bitarte honen barruan ez dauden balio guztientzako Ψ funtzioa zero egingo da.Uhina,v abiadura konstante batez hedatzen denez gero,eta σ-ren elementu guztiak ($d\sigma$) P puntutik distantzia berdinera ez daudenez, t denbora baterako, P puntura iritsiko diren bigarren mailako uhinak,gainazal esferikoaren zona mugatu batekoak izango dira.

Orain, Huygens-en printzipioa bost denbora-bitarte desberdinetara aplikatuko dugu.

a) <u>Lehenbiziko bitartea</u>: $(t < r_o/v)$

Perturbazioaren balioa zero izango da, denbora-bitarte honetan gainazalean sortutako uhinek ez bait dute P puntura iristeko betarik izan, Matematikoki adieraziz:

$$E(a+r_o\, t) = f(t - r_o/v) \qquad \text{baina:} \quad t - r_o/v < 0 \quad \text{eta} \quad f = 0$$

Beraz: $E(a+r_0,t)=0$

Era berdinean:

$$dE_S \propto \Psi(t-r/v) \quad \text{nono} \quad r=r_0 \text{ eta } t-r_0/v<0 \rightarrow \Psi=0$$

Hots, gainazaleko puntu guztietan, $r>r_0$ izango da, eta $dE_S=0$

$\int_A dE_S = E(a+r_0,t)=0 \longrightarrow$ Huygens-en printzipioa betetzen da bitarte honetan.

b) <u>Bigarren bitartea:</u> $(r_0/v < t < r_0/v + t_1)$

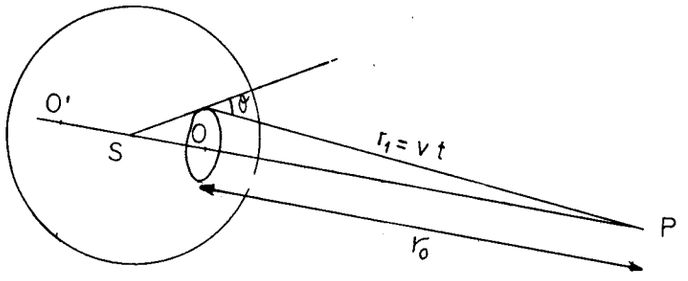
Lehen egin dugun arrazonamendu matematiko ber-bera eginaz berehala dakusagu, perturbazioaren balioa ez dela zero:

$$E(a+r_0 t) \propto f(t-r_0/v) \longrightarrow 0<t-r_0/v<t_1 \longrightarrow f\neq 0$$

beraz:

$$E(a+r_0 t)\neq 0$$

Ikus dezagun, orain, zein izango litzatekeen bitarte honetako puntuek P puntuan emango luketen perturbazioa. Horretarako, kontsidera dezagun P punturik $r_1=v.t$ distantziara aurkitzen diren puntuen multzoa. Puntu horiek, ondorengo marrazkian, ilunduta agertzen den zirkulu barruan daude:



O puntuan:

$r=r_0$ izango da, eta: $dE_S \propto \Psi(t-r/v)$ edo: $dE_S \propto \Psi(t-r_0/v)$

Beraz: $\Psi \neq 0$ eta $dE_S \neq 0$

$r=r_1$ denean:

$dE_S \propto \Psi(t-r/v) \longrightarrow \Psi(t-r_1/v)$ edo: $dE_S \propto (t-t) \Psi = \Psi(0)$

Hau da, dEs=0 izango da, zirkunferentzi mugako puntuetan.

$r>r_1$ denean

$dE_S \propto \Psi(t-r/v)$ baina $(t-r/v)<0$ eta $\Psi=0$ hots: $dE_S=0$

Aplika diezaiegun Huygens-en printzipioa zirkulu barruko puntuei:

$$E(a+r_0 t) = \int_{r_0}^{r_1} 2\pi \frac{a}{a+r_0} \Psi(t-r/v)\, q(\theta)\, dr$$

Baina, kontutan har dezagun t_1 arras txikia dela, eta q funtzioa oso gutxi aldatzen dela θ aldatu arren. Gainera, diskoaren muga 0-tik guztiz hurbil dagoenez gero, $\theta \cong 0$ izango da. Hau dena horrela izanik, Huygens-en integrala era honetara antzalda dezakegu:

$$E(a+r_0,t) = \int_{r_0}^{r_1} \psi(t-r/v)\, q(\theta)\, dr \cdot \frac{2\pi a}{a+r_0} = \frac{2\pi a}{a+r_0} \int_{r_0}^{r_1} \psi(t-r/v)\, dr$$

Gauzak piska bat errazago egitearren, integrazio-aldagaien bihurketa egingo dugu. Horretarako:

$t' = t - r/v$ (konstantea delarik) hots: $dt' = -dr/v$

$r = r_0$ denean: $t' = t - r_0/v$

$r = r_1$ denean: $t' = t - r_1/v = t - t = 0$ ($r_1 = v.t$ dela ez ahantzi)

Berriro integralera itzuliz:

$$E(a+r_0,t) = A \int_{t-r_0/v}^{0} \psi(t') \cdot (-v\, dt') = A.v \int_{0}^{t-r_0/v} \psi(t')\, dt'$$

Lehendik ere badakigunez, E-ren balioa horrela ipin dezakegu:

$$\frac{a}{a+r_0} f(t-r_0/v) = \frac{2\pi a}{a+r_0} v \int_0^{t-r_0/v} \psi(t')\, dt'$$

hau da:

$$f(t-r_0/v) = 2\pi v \int_0^{t-r_0/v} \psi(t')\, dt'$$

f funtzioa ezaguna zaigunez gero, ψ funtzio ezezaguna aurki dezakegu:

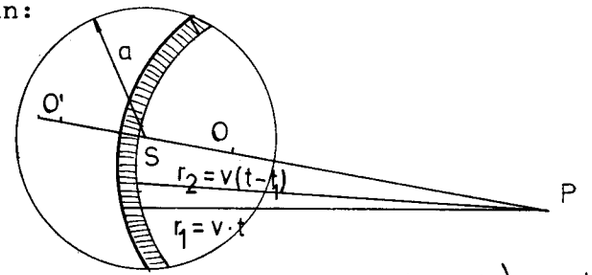
Deribatuz:

$$\dot{f}(t-r_0/v) = 2\pi v \psi(t-r/v) \quad \text{edo} \quad \psi(t-r/v) = \frac{1}{2\pi v} \dot{f}(t-r/v)$$

Huygens-en printzipioa beteko bada ψ-k ondoko balio hauek ukan behar ditu, eta ez beste inolakoak.

c) <u>Hirugarren bitartea:</u> $\left(r_0/v + t_1 < t < \frac{r_0 + 2a}{v}\right)$

Azter dezagun, beti bezala, perturbazioaren balioak zenbait puntu interesgarritan:



Bitarte hontan $E(a+r_0,t) \propto f\left(t - \frac{r_0}{v}\right) \rightarrow t - \frac{r_0}{v} > t_1 \rightarrow f = 0$

$\rightarrow E(a+r_0,t) = 0$

Kasu honetan,puntuak koroa zirkularrean egongo dira.

$r=r_2$ denean:

$$dE_s \propto \Psi(t - r/v) = \Psi(t - r_2/v) = \Psi(t-(t-t_1)) = \Psi(t) \quad \text{eta} \quad dE_s = 0$$

$r=r_1$ denean:

$$dE_s \propto \Psi(t - r/v) = \Psi(t - r_1/v) = \Psi(t-t) = \Psi(0) \quad \text{eta} \quad dE_s = 0$$

Huygens-en printzipioa ezartzen diogula:

$$E(a+r_o,t) = \int_{r_2}^{r_1} 2\pi \frac{a}{a+r_o} \Psi(t - r/v)\, q(\theta)\, dr$$

Hemen ere, t_1 bizikiri txikia denez gero, koroa zirkularra guztiz estua izango da, eta q funtzioaren balioa ia-ia ez da aldatuko aldatu arren.Bitarte horretarako,har dezagun $\bar{\theta}$ (θ batezbestekoa):

$$E(a+r_o,t) = \frac{2\pi a}{a+r_o} q(\bar{\theta}) \int_0^{t_1} \Psi(t') \cdot v \cdot dt' = A v \int_0^{t_1} \Psi(t') \cdot dt'$$

$r=r_2$ denean $\quad t' = t - r_2/v = t - (t - t_1) = t_1$

$r=r_1$ denean $\quad t' = t - r_1/v = t - t = 0$

Integrala berrikusiz:

$$\int \Psi(t') \cdot dt' = \frac{1}{2\pi v} f(t')$$

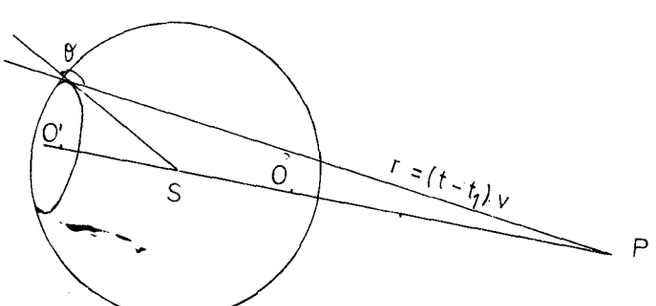
Eta,ondorioz:

$$E(a+r_o,t) = A \cdot v \cdot \frac{1}{2\pi v} \left[f(t') \right]_0^{t_1} = \frac{A}{2\pi} \left[f(t_1) - f(0) \right]_0^{t_1} = \frac{A}{2\pi} \cdot 0 = 0$$

Kasu honetan ere,Huygens-en printzipioa beti betetzen da: $\int_\sigma dE_s = E(a+r_o,t) = 0$ delako

d) <u>Laugarren bitartea</u>: $\left(\frac{r_o + 2a}{v} < t < \frac{r_o + 2a}{v} + t_1 \right)$

Hau ere, 0' puntuaren inguruan aurkitzen den puntu-multzoa izango dugu.Ikus dezagun,puntu horietatik zeintzuk emango diguten perturbazioa eta zeintzuk ez.



Bitarte hontan $E(a+r_o,t) \propto f\left(t - \frac{r_o}{v}\right) \rightarrow t - \frac{r_o}{v} >> t_1 \rightarrow f = 0 \rightarrow E(a+r_o,t) = 0$

0' puntuan: $r = r_o + 2a$ eta $\Psi \neq 0$ hots: $dE_s \neq 0$

$r=r_2$ denean: $t-r_2/v = t-\frac{v(t-t_1)}{v} = t_1$ eta: $\Psi(t_1)=0$ hots: $dE_s=0$

O' puntuak emango ligukeen perturbazioa:

$$E(a+r_o,t) = \int_{r_2}^{r_o+2a} 2\pi \frac{a}{a+r_o}\ \Psi\ (t-r/v)\cdot q(\theta)\cdot dr$$

t_1 oso txikia delako,muga O'-tik zeharo hurbil egongo da,eta $\theta \equiv \pi$ izango da.Beraz:

$$E = 2\pi \frac{a}{a+r_o}\ q(\pi) \int_{r_2}^{r_o+2a} \Psi\ (t-r/v)\, dr$$

Aldagai-aldaketa eginaz:

$$t' = t - r/v \quad \text{eta} \quad dr = -v\cdot dt'$$

Integrazio-muga berriak,hauetxek izango ditugu:

$r=r_2$ denean $\quad t' = t - r_2/v = t - \frac{v(t-t_1)}{v} = t_1$

$r=r_o+2a \qquad t' = t - \frac{r_o+2a}{v}$

Integrala berriz idatziz:

$$E = 2\pi \frac{a}{a+r_o}\ q(\pi) \int_{t_1}^{t-\frac{r_o+2a}{v}} \Psi\ (t')\, dt'(-v\, dt')$$

Mugak eta zeinuak aldatuz:

$$E = 2\pi \frac{a}{a+r_o}\ q(\pi)\ v \int_{t-\frac{r_o+2a}{v}}^{t_1} \Psi\,(t')\, dt'$$

Integral honen balioa ez da beti zero izango.Hori gerta dadin(hots, Huygens-en printzipioa bete dadin) baldintza hau bete beharko da:

$$q(\pi) = 0$$

e) <u>Boskarren bitartea</u>: $\left(t > \frac{r_o+2a}{v} + t_1\right)$

Kasu honetan: $E(a+r_o,t)=0$ izango da, $\longrightarrow t-\frac{r_o}{v} >> t_1$ delako

Beraz, $t-r/v > t_1$ erlazioa betetzen denez gero, $\Psi = 0$ eta $dE_s = 0$
Kasu honetan,Huygens-en printzipioa beti beteko da, $\int_\sigma dE_s = E(a+r_o,t) = 0$ delako

Ikasgai hau bukatzeko,egin dezagun Huygens-en printzipioaren ondorioen laburpen bat.Hona hemen labur bilduz,orain arte erabili ditugun adierazgarrienak:

$$q(0)=1 \qquad\qquad q(\pi)=0$$

$$\gamma\,(t-r/v) = \frac{1}{2\pi v}\,\dot{f}\,(t-r/v)$$

$$dE_s = \frac{1}{2\pi v\, r}\,q(\theta)\,d\sigma\,\dot{f}(t-r/v)$$

Bultzada laburra dugunean, eta baldintza hauek betetzen direnean, Huygens-en printzipioa betetzen dela esan ohi da.

$q(\theta)$ funtzioaren adierazpena saiakuntza bidez aurkitua izan da, eta hauxe dugu:

$$q(\theta) = \frac{1+\cos\theta}{2}$$

Beraz, $\theta=0$ denean, $q(\theta)=1$ izango da, eta, $\theta=\pi$ denean, $q(\pi)=0$

6.IKASGAIA

DIFRAKZIOA

6.1. HUYGENS-FRESNEL-EN PRINTZIPIOA

Propagazio zuzenaren legea ez da beti betetzen,eta lege honen salbuespenak difrakzio-fenomenoak bezala ezagutu ohi dira.

Difrakzio-fenomenoak zerbait argitzeko,"Huygens-en printzipioa" galderan azaldu ditugun kontzeptuak erabili beharko ditugu.Dena dela,hango kasua bultzada motzez sortutako uhinentzakoa zen; hemen, orokorketa bat egin beharko dugu.Horretarako,uhinen formak eta beren interferentzi moduak aztertu beharko ditugu.

Gure garapen honetan,argi monokromatiko eta uhin sinusoidalak erabiliko ditugu.Uhin-mota hauentzat,Huygens-en printzipioak honela dio: " σ-gainazal baten barruan dagoen S iturriak argi monokromatikoa ematen badigu,gainazal horretatik kanpora dagoen P puntuan perturbazioa aurkitzeko,gainazaleko puntuak bigarren mailako iturri bihurtzen direla suposatuko dugu,eta P puntuan gainjartzen direla".

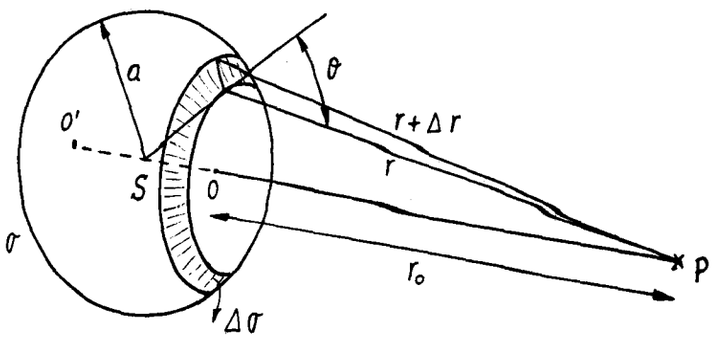
Jakina denez, bigarren mailako iturri horiek S iturriaren frekuentzia berdina izango dute,.Gainera,gainazaleko puntu horiek,uhin--frontea osatzen dutenean,fase berdina izango dute.

Lehendik badakigu funtzio sinusoidalak batzeko erabiltzen den araua: baina,difrakzioaren kasuan,uhin-pilo bat izango dugu(bakoitza intentsitate infinitesimal batekin) eta guztiz zaila izango zaigu helburu horretara iristea.Beraz, beste zerbait asmatu beharko dugu.

6.2.UHIN ESFERIKOEN PROPAGAZIOA.BIBRAZIO-KURBA

Saia gaitezen orain uhin sinusoidal esferikoa nola propagatzen den ikusten.Guri batez ere,ingurune homogenoak interesatuko zaizkigu. Aldez aurretik esan beharra dago,uhin-luzera laburra duten uhin sinusoidalentzat egiak direla bultzada motzentzako lehen aurkitu genituen ondorioak.

Bitez S iturria, σ gainazala -esferikoa- eta P puntua. Esferaren erradioa a izango da, eta PS distantziak $a+r_o$ balioko du. Aurki dezagun P puntuan sortutako perturbazioa.



Zati dezagun σ gainazala $\Delta\sigma$ balioko gainazal-elementutan (zona zirkularrak osatzen dituztela). Elementu hauek, P puntutik r eta $r+\Delta r$ distantzietara aurkituko dira. $\Delta\sigma$ elementuak, P puntuan emandako perturbazioa ΔEs izango da, eta bere balioa:

$$\Delta Es = \frac{\Psi(t-r/v)}{r} \cdot q(\theta) \cdot \Delta\sigma$$

hemen: Ψ funtzio sinusoidala dugu.

Funtzio honen anplitudea: $\Delta As = \frac{\Delta\sigma}{r} \cdot q(\theta)$

$\Delta\sigma$-ren balioa, lehendik ere ezaguna zaigu: $\Delta\sigma = \frac{2\pi \cdot a \cdot r}{a + r_o} \cdot \Delta r$

Hemendik, anplitudearen balioa atera dezakegu:

$$\Delta As = \frac{2\pi \cdot a \cdot r}{a + r_o} \cdot \frac{\Delta r}{r} \cdot q(\theta) = \frac{2\pi a}{a + r_o} \cdot q(\theta) \cdot \Delta r$$

Formula honetan, jakina, $q(\theta)$ ez da konstantea izango, baina beste guztiak bai. $\theta=0$ denean, $q=1$ izango da, eta $\theta=\pi$ denean, $q=0$. Arrazoi honengatik, P puntura iristen diren perturbazio guztietatik, O puntuko ingurutik iritsitakoek emandako anplitudea izango da handiena; era berean O'. puntutik etorritakoek perturbaziorik txikiena emango ligukete.

Hemendik aurrera -horrela komeni zaigulako, eta ez beste- perturbazioak kalkulatzeko funtzio sinusoidalen irudikapen bektoriala erabiliko dugu.

Azter dezagun bata bestearen alboan aurkitzen diren $\Delta\sigma_1$ eta $\Delta\sigma_2$ elementuak. Lehendabizikoak, P puntuan ΔEs_1 perturbazioa emango digu, eta bigarrenak ΔEs_2. Perturbazio hauen anplitudeak ΔAs_1 eta ΔAs_2 izango ditugu. Beren balioak:

$$\Delta As_1 = \frac{2\pi a}{a + r_o} \cdot q(\theta_1) \cdot \Delta r_1$$

hemen: $\theta_2 > \theta_1$

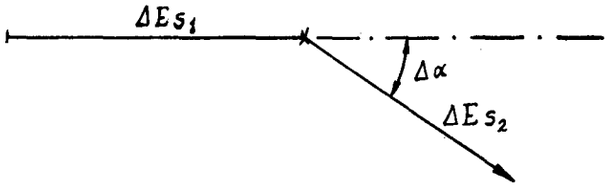
$$\Delta As_2 = \frac{2\pi a}{a + r_o} \cdot q(\theta_2) \cdot \Delta r_2$$

Geuk horrela nahi dugulako, θ_2 angelua θ_1 baino handiagoa dela suposatuko dugu. Orduan: $q(\theta_1) > q(\theta_2)$ eta $\Delta As_1 > \Delta As_2$. Hala eta guztiz ere, adierazpen hauen arteko diferentzia arras txikia da, θ angelua zeharo txikia baita.

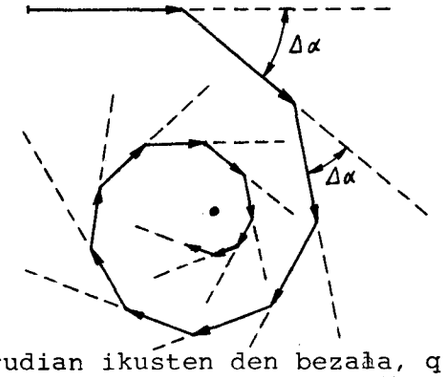
$\Delta\sigma_1$ elementutik $\Delta\sigma_2$ elementura joateko, P puntura dagoen distantzia Δr gai batean handitu beharko dugu: horregatik, bi perturbazio horien arteko fase-diferentzia $(\Delta\alpha)$ hauxe izango dugu:

$$\Delta\alpha = \frac{2\pi \cdot \Delta r}{\lambda}$$

Irudika ditzagun ΔEs_1 eta ΔEs_2 bi bektore bezala. Bigarren bektoreak duen luzera, lehenengoarena baino piska bat txikiagoa delarik, bien arteko angelua $\Delta\alpha$ izango da.



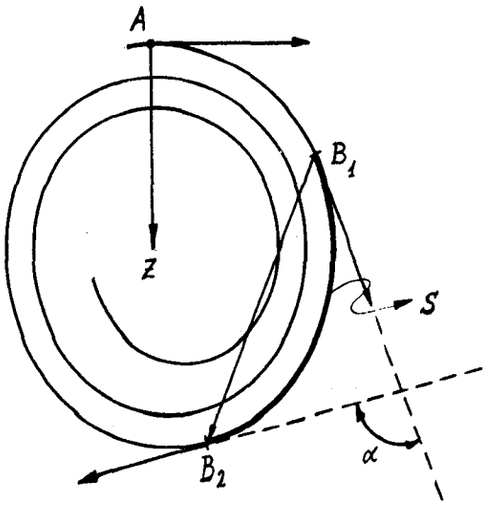
$\Delta\sigma$ elementu guztiak kontutan hartzen baditugu, P puntuan perturbazioa aurkitzeko, zuzen hautsia lortuko dugu:



$\Delta\alpha$ beti konstantea izango da, eta zuzenkien luzera txikituz joango da. (zuzenki hauen luzera berdina balitz, irudia itxi egingo litzateke, poligonoa osatuz).

Irudian ikusten den bezala, q funtzioarengatik poligono itxia ez bada osatzen ere, ia-ia hori gertatzen da, $\lambda << r_o$ delako. Makurtasun faktorearen balioa piska bat aldatu egiten da r_o-tik $(r_o + \Delta r)$-ra pasatzen garenean.

Soluzio zehatza aurkitzeko, Δr zerorantz doanean, limitea aurkitu beharko genuke. Δr laburtu ala $\Delta\alpha$ ere txikiago egiten da, eta zuzenkiak gero eta motzagoak. Azkenerako $\Delta r = 0$ bihurtzen denean, zuzen hautsia kurba bat bilakatzen da, kiribila hain zuzen.

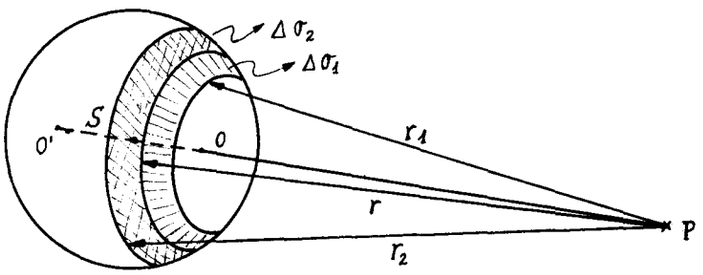


Kurba honi "bibrazio-kurba" deritzo.Kurba honek badu zenbait onura, difrakzio-fenomenotan erabilgarria egiten dutena.Ikus dezagun abantail horietariko bat edo beste:

Kurbaren B puntuari, σ gainazaleko zirkulu bat dagokio,P puntutik r distantziara dagoena.A puntua O-ri dagokio.

Har dezagun orain, B_1B_2 =s elementua.Zuzenki honek, r_1 eta r_2 erradiotara dauden zirkuluen anplitudeen batura irudikatuko digu.B_1B_2 kordak,aldiz,perturbazioen ordezkaria.

Hau da: $s \equiv$ (arkua) $\overset{\frown}{B_1B_2}$: anplitudeen batura algebraikoa
$B_1B_2 \equiv$ (korda) $\overline{B_1B_2}$: perturbazioaren ordezkaria.



Bi puntu horietan (B_1 eta B_2 alegia) kurbarekiko tangenteek α angelua osatuko dute;hots, fase-diferentziaren adierazpen grafikoa izango da.

$$\alpha = 2\pi \frac{r_2 - r_1}{\lambda}$$

Zenbait kasutan, $r_2 - r_1 = \lambda$ izango da,eta $\alpha = 2\pi$; edo,beste era batera: bibrazio-kurbak buelta osoa emango du.

Bedi ρ elipsearen kurbadura-erradioa.Definizioz:

$$\rho = \left|\frac{\Delta s}{\Delta \alpha}\right|$$

Non: Δs: arku infinitesimal baten BB' luzera

$\Delta \alpha$: bi puntu horietako tangenteek osatutako angelua.

Baina,arestian ikusi dugun bezala, Δs-ren luzerak $\Delta \sigma$elementu batek emandako perturbazioaren anplitudea irudikatzen digu;beraz:

$$\rho = \left|\frac{\Delta s}{\Delta \alpha}\right| = \frac{2\pi a}{a + r_o} \cdot q(\theta) \cdot \Delta r$$

Gainera:

$$\Delta \alpha = 2\pi \Delta r / \lambda$$

Ondorio bezala:

$$\boxed{\rho = \frac{2\pi a}{a + r_o} \cdot \frac{q(\theta) \cdot \Delta r}{2\pi \cdot \Delta r} = \frac{a\lambda}{a + r_o} \cdot q(\theta)}$$

Oraingo honetan, lehenengo faktore guztia konstantea izan arren, $q(\theta)$ aldakorra izango da.

Eman dezagun $\Delta r = \lambda$egiten dugula: θ angelua eta $q(\theta)$ funtzioa ez dira asko aldatuko,eta bibrazio-kurbak ia-ia zirkularra den espirala osatuko du.Beraz, bibrazio-kurba,oso estuki biribilkatua aurkitzen den kiribila izango dugu.

O' puntuaren inguruan,q faktorea zeroratu egingo zaigu; et, P puntuan, O'-k sortzen duen perturbazioa AZ bektoreak emango digu.

Bibrazio-kurbaren erabilpen interesgarriagoak ikusteko,hona hemen beste adibide bat:kalkula dezagun σ gainazalak P puntuan sortutako E perturbazioa.Gure kasuan,perturbazioa sinusoidala dela suposatuko dugu.Bedi azpikoa bere adierazpena:

$$E(a,t) = f(t) = A \cdot \sin \omega t$$

Dakigunez $$\Delta E s = \frac{1}{2\pi v} \dot{f}(t - r/v) \cdot \frac{\Delta \sigma}{r} \cdot q(\theta)$$

Gure kasuan: $$f(t - r/v) = A \cdot \sin \omega (t - r/v)$$

Deribatuz:

$$\dot{f}(t - r/v) = A \cdot \omega \cdot \cos \omega (t - r/v) = A \cdot \omega \cdot \sin [\omega (t - r/v) + \pi/2]$$

Gogora dezagun orain beste berdintza hau:

$$\frac{\Delta \sigma}{r} \cdot q(\theta) = \frac{2\pi a}{a + r_o} \cdot q(\theta) \cdot \Delta r$$

Perturbazioaren adierazpenari egokituaz:

$$\Delta E_s = \frac{1}{2\pi\nu} \cdot A \cdot \omega \frac{2\pi a}{a+r_0} \Delta r \cdot q(\theta) \cdot \sin\left[\omega(t-r/v) + \pi/2\right]$$

Baina:

$$\frac{\omega}{2\pi\nu} = \frac{2\pi/T}{2\pi\nu} = \frac{1}{\nu T} = \frac{1}{\lambda}$$

Eta,ondorioz:

$$\Delta E_s = \frac{2\pi A \cdot a}{a+r_0} \cdot \frac{\Delta r}{\lambda} \cdot q(\theta) \cdot \sin\left[\omega(t-r/v) + \pi/2\right]$$

Ekuazio honetan dakusagunez,bigarren mailako uhin batentzat,gainazalera sartzen den eta bertatik ateratzen diren uhinen arteko fase--diferentzia $\pi/2$-koa da.

O puntutik hurbil dagoen $\Delta\sigma$ elementu batek,P puntuan emandako perturbazioa:

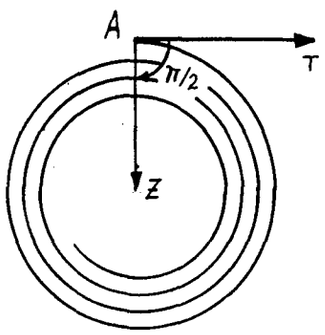
$r=r_0 \quad \theta=0 \quad q(0)=1$ direla kontutan hartzen

$$\Delta E_s = \frac{2\pi A \cdot a}{a+r_0} \cdot \frac{\Delta r}{\lambda} \sin\left[\omega(t-r_0/v) + \pi/2\right]$$

eta, bere anplitudea:

$$\Delta A_s = \frac{2\pi A \cdot a}{a+r_0} \cdot \frac{\Delta r}{\lambda}$$

Gainazal-mota hauen bibrazio-kurba eginaz:



$\vec{AZ}$ bektoreak,perturbazioa emango digu.O puntuaren inguruko kurbadura-erradioa:

$$\rho = \left|\frac{\Delta s}{\Delta\alpha}\right|$$

Δs: A puntuko inguruan,arku infinitesimal baten luzera izango da. Bestela,$\Delta\sigma$ elementu batek -O puntuaren ingurukoa- P-en ematen digun perturbazioaren anplitudea.Beraz, $\Delta s = \Delta A_s$.

Hau da:

$$\rho = \frac{\Delta A_s}{\Delta\alpha} = \frac{2\pi A \cdot a}{a+r_0} \cdot \frac{\Delta r}{\lambda} \cdot \frac{\lambda}{2\pi\Delta r} = \frac{A \cdot a}{a+r_0} = \left|\vec{AZ}\right|$$

Marraz dezagun $\vec{AT}$ bektorea(hain zuzen,A-rekiko elkartzuta dena) Bektore honen esannahia hauxe da: O puntutik hurbil dagoen $\Delta\sigma$ elementu batek, P puntuan emandako perturbazioa.Ikusten denez, AZ eta AT bektoreen arteko fase-aldaketa $\pi/2$-koa da.

Perturbazioaren adierazpena:

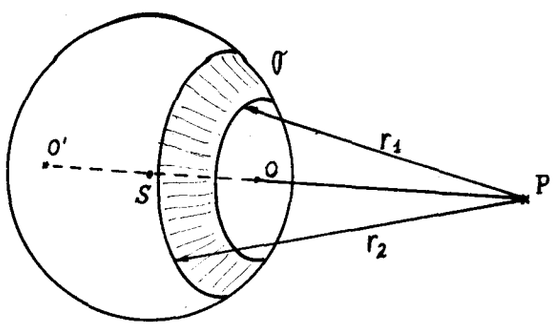
$$\Delta E_s = \frac{2\pi A \cdot a}{a + r_o} \cdot \frac{\Delta r}{\lambda} \cdot \sin\left[\omega(t - r_o/v) + \pi/2\right]$$

Edo:

$$\boxed{E(R,t) = \frac{A \cdot a}{a + r_o} \cdot \sin\left[\omega(t - r_o/v)\right]}$$

6.3. FRESNEL-EN ZONAK

Har dezagun σ gainazal esferikoa, eta marraz ditzagun P puntutik r_1, r_2 etab... distantziatara dauden zirkuluak. Beren formulak honako hauek izango dira:



$r_1 = r_o + \lambda/2$

$r_2 = r_o + \lambda$

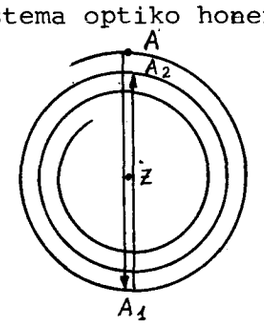
$r_3 = r_o + 3\lambda/2$

.....

.....

$r_n = r_o + n\lambda/2$

Definizioz, zirkulu horiek σ gainazala Fresnel-en zonetan zatitzen dute. Sistema optiko honen bibrazio-kurba egiten badugu, gainazaleko O puntuari A dagokio, Fresnel-en lehenbiziko zonari A_1 puntua dagokio, etab. ...



Beraz, kasu honetan:

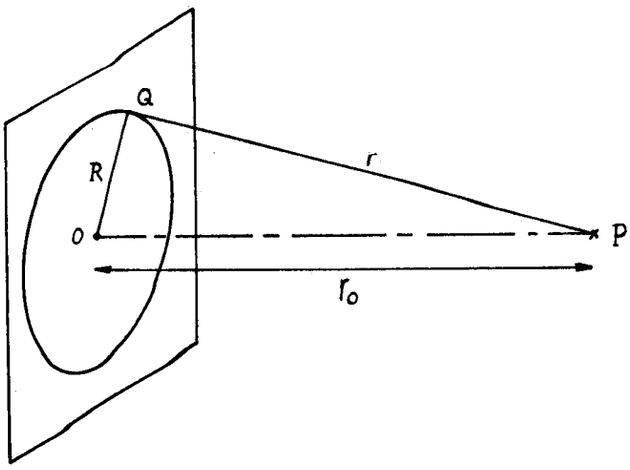
$r_2 - r_1 = \lambda$ eta $\alpha = 2\pi \frac{r_2 - r_1}{\lambda}$

Hots, $\alpha = 2\pi$ izango da.

Gainera, $r_1 - r_o = \lambda/2$ izango da, eta $\alpha = \pi$;kasu honetan.

Alboan dauden Fresnel-en bi edozein zona aurkako fasean aurkituko dira beti.

Aurki ditzagun Fresnel-en zonen erradioak kasu berezi batean: suposa dezagun S iturria P puntutik oso urrundua dagoela, eta uhin intzidentea laun bezala har dezakegula:



Eman dezagun,OP zuzenarekiko elkartuta den planoan aurkitzen dela gure Γ gainazala.Uhin-gainazaleko Q puntua eta O erdigunea R distantzia batez banatuak daude.PQ distantziari r esango diogu.

Pitagoras-en teorema dela bide:

$$r^2 = r_0^2 + R^2$$

Fresnel-en zonen definizioa erabil dezagun,eta r_1 distantzia bere aurrekoen funtzio bezala jar dezagun:

$R_1 \ldots\ldots \quad r_1 = r_o + \lambda/2$

$R_2 \ldots\ldots \quad r_2 = r_1 + \lambda/2$

. . . . . .

. . . . . .

$R_n \ldots\ldots \quad r_n = r_{n-1} + \lambda/2$

Zona hauen erradioak ondoko hauek izango ditugu:

$$R^2 = r^2 - r_o^2 \quad , \quad R_1^2 = r_1^2 - r_o^2 \quad , \quad \ldots\ldots$$

Aurki dezagun r_n^2 -ren balioa:

$$r_n^2 = r_{n-1}^2 + \lambda^2/4 + \lambda \cdot r_{n-1}$$

Baina, $\lambda << r_{n-1}$ denez gero, $r_n^2 = r_{n-1}^2 + \lambda \cdot r_{n-1}$

Hau da:

$$\lambda \cdot r_{n-1} = r_n^2 - r_{n-1}^2$$

R_n^2 erradioen adierazpenak,aldiz,hauek izango ditugu:

$$R_1^2 = r_1^2 - r_o^2 = \lambda$$

$$R_2^2 = r_2^2 - r_o^2 = (r_2^2 - r_1^2) + (r_1^2 - r_o^2) = \lambda r_1 + \lambda r_o = \lambda (r_o + r_1)$$

. . . . . .

. . . . . .

$$R_n^2 = \lambda (r_o + r_1 + r_2 + \ldots\ldots + r_{n-1})$$

n txikia denean, $r_n \cong r_o$ izango da, eta $R_n^2 = n\lambda r_o$

n handia denean, $\delta_n = R_n - R_{n-1}$ eta $\delta_n << R_n$

Fresnel-en n-garren zonaren lodiera hauxe izango da:

$$R_n = R_{n-1} + \delta_n \quad \text{eta} : \quad R_n^2 = R_{n-1}^2 + \delta_n^2 + 2\cdot\delta_n R_{n-1}$$

δ_n^2 arbuiagarria dugu:

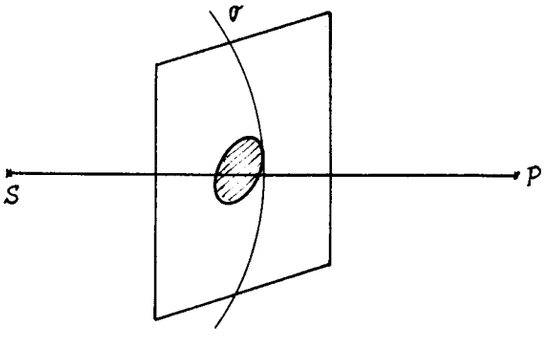
$$R_n^2 - R_{n-1}^2 = 2\,\delta_n \cdot R_{n-1}$$

Azken batean:

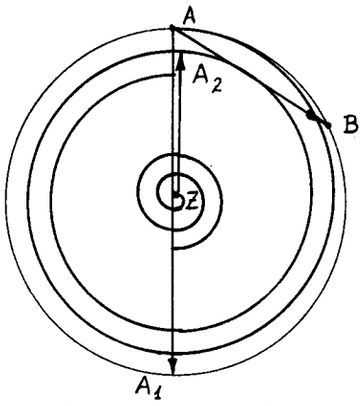
$$\boxed{\delta_n = \frac{R_n^2 - R_{n-1}^2}{2R_{n-1}} = \frac{\lambda r_{n-1}}{2R_{n-1}} = \frac{\lambda}{2}\frac{r_{n-1}}{R_{n-1}}}$$

6.4. DIFRAKZIOA, IREKIDURA ZIRKULARRETAN

Bedi irudian agertzen den sistema optikoa. Pantaila opako launak irekidura zirkularra du bere baitan. S iturria irekiduraren ardatzean dago. Gure zeregina, P puntuko perturbazioa aurkitzea izango da.



Huygens-Fresnel-en printzipioa dela medio, σ gainazalari bibrazio-kurba bat ezar diezaiokegu.



Irekidurari $\overset{\frown}{AB}$ arkua dagokio: hots, P puntuan S iturriak emandako anplitude-aldaketa.

Bestalde, $\overline{AB}$ kordak perturbazioaren erresultantea ematen digu.

Zabal dezagun, orain, irekiduraren diametroa. Berehala ohartuko gara, $B=A_1$ egiten denean, intentsitatearen maximo bat izango dugula. Perturbazioaren balioa hauxe izango da:

$$|\vec{AA_1}| \cong 2\,|\vec{AZ}|$$

Bitarte honetan, Fresnel-en lehendabiziko zonan aurkituko gara.

Dakigunez, AZ bektorea pantailarik gabe P puntuan dugun perturbazioaren irudia da. Bestalde, I intentsitatearen eta A anplitudearen ar-

teko erlazioa $I=K.A^2$ (K konstantea) dela gogoratzen badugu,ondorio honetara iritsiko gara:

$$I_p = 4\,I$$

Hemen: I_p : intentsitatea,pantailarekin

I : Intentsitatea,pantailarik gabe.

$B=A_2$ denean,Fresnel-en bigarren zonan sartzen gara,eta P puntuan ikusiko dugun perturbazioa,AA_2 bektoreak emango digu.Bibrazio-kurba oso kiribildua denez gero: $AA_2 \cong 0$ eta, I=0; hots, minimo bat izango dugu.

Prozesu hau errepikatzen badugu,Fresnel-en zonen zenbakien arauera, maximoak edo minimoak izango ditugu irekidurak emandako perturbazioan.Zenbakiak bakoitiak badira <u>maximoak</u>; aldiz,bikoitiak direnean <u>minimoak</u>.

Egin dezagun orain beste saiakuntza bat:erradioa aldaezina delarik, P-tik irekidurarako distantzia aldatu egingo dugu.Orain ere,aurrekoan bezala, maximo eta minimo batzuk izango ditugu,Fresnel-en zonen erradioa P-tik irekidurarainо dagoen distantziaren funtzio delako.

S iturria,P puntutik nahiko urrundua badago,uhin intzidentea launa dela suposa dezakegu,Fresnel-en lehendabiziko zonaren erradioa(R_1), erlazio honen bidez aurki dezakegu:

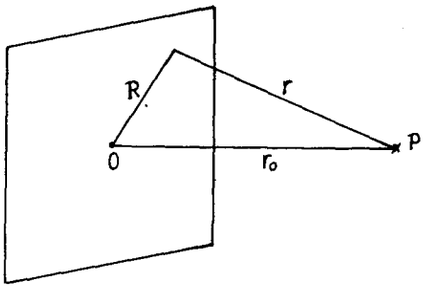
$$R_1^2 = \lambda_o \cdot r_o$$

Intentsitatearen lehen maximoa,$R=R_1$ denean ikusiko dugu.Balio honentzat,r_o distantziak honelako adierazpena bete beharko du:

$$r_o = R^2/\lambda$$

r_o distantzia,gero eta txikiago egiten badugu,Fresnel-en zona batetik bestera pasatuko gara,eta $R=R_2$ egiten denean minimo bat aurkituko dugu.... baina, saia gaitezen zenbatekoa izan behar den r_o distantziaren aldaketa,maximo batetik urrengo minimora pasatzeko.

Esan diezaiogun ℓ distantzia honi. $\ell=r-r_o$



$r^2 = r_o^2 + R^2$ dugu,eta:

$(\ell + r_o)^2 = r_o^2 + R^2$

Diferentziatuaz:

$2(\ell + r_o)\cdot(\Delta\ell + \Delta r_o) = 2\,r_o\,\Delta r_o$

Kalkuluak eginaz:

$$2\ell\,\Delta\ell + 2\ell\,\Delta r_o + 2\,r_o\,\Delta\ell + 2\,r_o\,\Delta r_o = 2\,r_o\,\Delta r_o$$

Beraz:

$$2\Delta\ell(\ell+r_o) = -2\ell\Delta r_o \rightarrow \Delta r_o = \frac{-(\ell+r_o)}{\ell}\cdot\Delta\ell$$

Hau da:

$$\Delta r_o = \frac{-r}{r-r_o}\cdot\Delta\ell$$

I intentsitatea maximoa izan dadin,ondoko baldintza hau bete beharko da: $\ell=(r-r_o)$ adierazpenaren balioa, $\lambda/2$-ren multiplo bakoitia izatea.

Ikus dezakegunez,minimoa izan dezagun, $1=(r-r_o)$ $\lambda/2$-ren multiplo bikoitia izan beharko du.Guzti honen ondorio bezala,maximo batetik hurrengo minimora igarotzeko,r_o distantzia $\lambda/2$-tan aldatu beharko dugu:

$$\boxed{|\Delta r_o| = \frac{r}{r-r_o}\cdot\frac{\lambda}{2}}$$

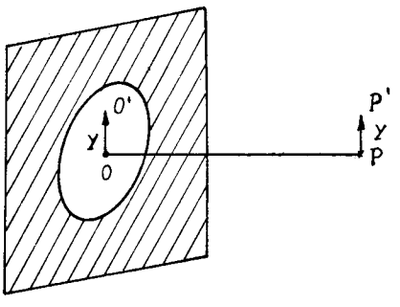
Hona hemen,garrantzi handiko zenbait ondorio:

S eta P puntuak irekiduratik R^2/λ baino distantzia handiago batera daudenean,uhinak Fresnel-en lehendabiziko zonaren zati bat besterik ez du topatuko bere bidean.Ikusten ditugun difrakzio-fenomenoei,"Fraunhöfer-en difrakzio-fenomenoak" esaten zaie.

S eta P puntuak,irekiduratik R^2/λ baino distantzia txikiago batera aurkitzen badira,Fresnel-en zona bat edo gehiago izango ditu uhinak bere bidean.Kasu honetan,"Fresnel-en difrakzio-fenomenoak" ikusten ditugula esango dugu.

Ikasgai hau bukatzeko,Fraunhöfer-en difrakzio-fenomenoen ikuspegi orokor eta xinple bat emango dugu.Kalkulu matematikoaren aldetik,bederen,ez gara zehaztasun handitan sartuko.

Pentsa dezagun,orain arte erabili dugun sistema optikoan uhin laun bat sartzen dela.Kalkula dezagun irekidurako puntu desberdinetan intentsitatea nola aldatzen den,uhina irekidurarekiko elkartzuta bada.



Hasteko,uhin-gainazalean;Fresnel-en zonak marraztuko ditugu(P'puntuari dagozkionak)

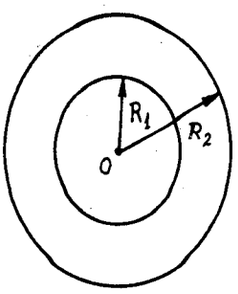
Kasu honetan,Fresnel-en zona horiek zirkuluak izango dira;baina beren zentrua 0 puntuan eduki ordez,0'puntuan izango dute,00' distantziari y esango diogu.

P. puntuan perturbazioaren anplitudea aurkitzeko,bi hipotesi egin beharrean aurkitzen gara:

1.- Fresnel-en zona batek emandako perturbazioaren anplitudea,irekiduran,zona horrek agertzen duen azalerarekin proportzionala da.

2.- Fresnel-en alboko bi zonen zeinuak aurkakoak dira.

Guzti hau gogoan dugula,eman dezagun P puntua,$R^2/2\lambda$ distantziara aurkitzen dela irekiduratik.Orduan,R_2=R,eta P puntuko anplitudea:

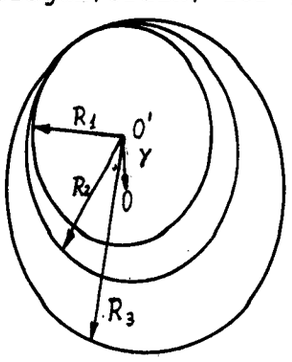


$$A_p = A_1 + A_2$$

Eta,zeinuak aurkakoak direla kontutan hartzen badugu:

$$A_p = 0$$

Ikus dezagun,orain, zer gertatzen den P' puntuan:



$A_{p'} = A_1 + A_2 + A_3$ izango dugu.

eta, zeinu eta guzti:

$A_{p'} = A_+ + A_- + A_+$

Beraz, anplitude positiboen partaidetza handitu ahala,negatiboak txikituz doaz.Beste hitzez: P' puntuan argia izango dugu.

Ardatza eta P' puntuen arteko distantzia aldatuz joango bagina, argiaren intentsitatean bai maximo eta bai minimoak izango genituzke.

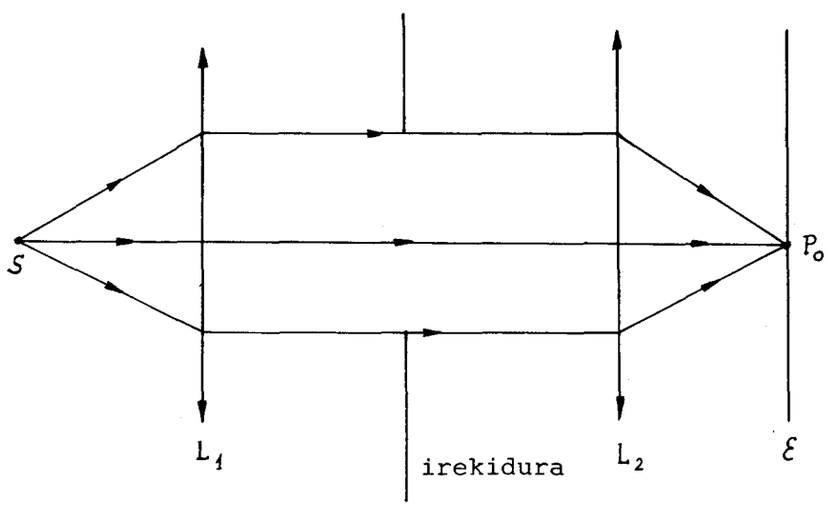
7. IKASGAIA

FRAUNHOFER-EN DIFRAKZIO-FENOMENOAK

7.1. FRAUNHOFER-EN DIFRAKZIO-FENOMENOAK IREKIDURA ANGELUZUZEN BATEAN

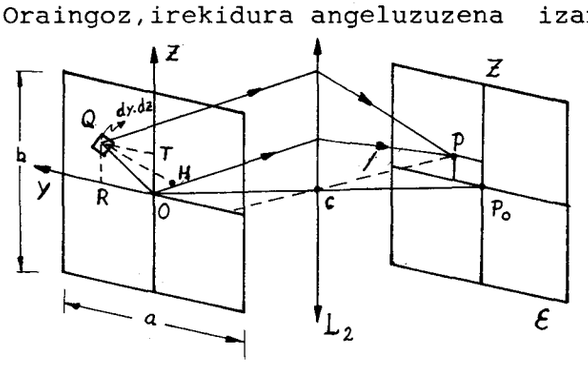
Difrakzio-fenomenoak ikusteko,lehengo batean ikusi genuen S iturriak eta pantailak irekiduratik oso urruti egon behar zutela.S iturria infinitu-an ipini beharrean lente konbergente baten foku objektuan ipiniko dugu.Eta pantaila infinitu-an ipini beharrean bigarren lentearen plano fokalean ipiniko dugu.

Orduan, Fraunhofer-en difrakzio-fenomenoak ikusteko erabiliko dugun eskema hauxe izango da:



Izpi elkartzutak irekidurara planoarekiko marraztu ditugu.Pantailaren Po puntuan mozten dira.

Oraingoz,irekidura angeluzuzena izango da;gero zirkularra,etab.



$\overline{OP_o}$ izpia irekidura angeluzuzenarekiko elkartzuta izango litzateke.

Q eta O puntuetatik bi izpi paralelo bidaliko ditugu.2 izpi horiek $\mathcal{E}$ pántaila nondik mozten duten jakiteko,beste izpi paralelo bat bidaltzen dugu,L_2 lentearen erditik pasatzen dena.Izpi honek P puntuan moztuko du pantaila eta puntu hau izango litzateke orobat,bi izpi paralelo horien mozte puntua.

Definizioz:

$$\gamma_y = \cos(\hat{R}\hat{O}H) \quad \text{eta} \quad \gamma_z = \cos(\hat{T}\hat{Q}H) \quad \text{eta} \quad \overline{OR} = Y \quad \overline{OT} = Z$$

$\overline{QH}$ perpendikularra da O-puntutik pasatzen den izpiarekin.
Irudian ikusten dugunez,honako ekuazio hau beteko da.

$$\boxed{\vec{OQ} = \vec{OR} + \vec{OT}}$$

$\vec{OQ}$ bektorearen projekzioa,$\vec{OR}$ eta $\vec{OT}$ bektoreen projekzioen batura izango dugu.

$$\boxed{\vec{OH} = y \cdot \gamma_y + Z \cdot \gamma_z}$$

O puntuaren inguruan elementu infinitesimal bat hartuz:
Suposa dezagun elementu honek P puntuan ematen digun perturbazioa

$$\boxed{dEs = A e^{i(\omega t - \varphi)} dy dz}$$ dela(hipotesia)

Q puntuaren inguruan azalera berdineko elementu infinitesimala hartzen badugu, kalkula dezagun P puntuan nolako perturbazioa emango digun.

$\overline{OP}$ izpiaren bide optikoa l_o bada,badakigu O puntuaren inguruan dagoen elementu infinitesimal batek ematen digun perturbazioa hauxe izango dela:

$$dEs = A e^{i\left[\omega\left(t - \frac{l_o}{v}\right) + \varphi_o\right]} \cdot dy \cdot dz = A \cdot e^{i(\omega t - \varphi)} dy dz$$

Ekuazio hau betetzeko:

$$\boxed{-\omega \frac{l_o}{v} + \varphi_o = -\varphi}$$

Beste alde batetik, $\vec{QP}$ izpiaren bide optikoa l_1 bada, Q puntuaren inguruan dagoen elementu infinitesimalak P puntuan ematen digun perturbazioa izango da:

$$dEs = A \cdot e^{i\left[\omega\left(t - l_1/v\right) + \varphi_o\right]} \cdot dy \cdot dz$$

l_1 eta l_o erlazionatzen baditugu:

$$l_1 = l_o - \overline{OH}$$

hots:

$$dEs = A \cdot e^{i\left[\omega\left(t - \left\{\frac{l_o - \overline{OH}}{v}\right\}\right) + \varphi_o\right]} \cdot dy \cdot dz$$

Beraz:

$$dEs = A \cdot e^{i(\omega t - \varphi)} \cdot e^{i\omega \frac{\overline{OH}}{v}} \cdot dy dz$$

$\omega = 2\pi . T$ denez gero

$v T = \lambda$ " "

$$\boxed{dEs = A . e^{i(\omega t - \varphi)} . e^{i 2\pi \frac{(\gamma_y . y + \gamma_z . z)}{\lambda}} . dy . dz}$$

P puntuko perturbazio osoa aurkitzeko integratu egin beharko dugu, eta irekidura osora integratu ere.

$$\left(-\frac{a}{2}\text{-tik} + \frac{a}{2}\text{-ra} \quad ; \quad \text{eta} \quad -\frac{b}{2}\text{-tik} + \frac{b}{2}\text{-ra}\right)$$

Integratuz:

$$Ep = A \cdot e^{i(\omega t - \varphi)} \int_{-\frac{a}{2}}^{+\frac{a}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} e^{\frac{2\pi i (\gamma_y . y + \gamma_z . z)}{\lambda}} . dy . dz$$

Integral hauek bereizten baditugu:

$$Ep = A . e^{i(\omega t - \varphi)} \int_{-a/2}^{+a/2} e^{\frac{2\pi i \gamma_y . y}{\lambda}} . dy . \int_{-b/2}^{+b/2} e^{\frac{2\pi i \gamma_z . z}{\lambda}} . dz$$

Biak (matematikoki) berdinak direnez gero, bat bakarra kalkulatuko dugu.Horretarako,bi parametro definituko ditugu:

$$\alpha = \frac{\pi . \gamma_y . a}{\lambda} \qquad \text{eta} \qquad \beta = \frac{\pi . \gamma_z . b}{\lambda}$$

eta $$Ia = \int_{-a/2}^{+a/2} e^{\frac{2\pi i . \gamma_y . y}{\lambda}} . dy = \int_{-\frac{a}{2}}^{+\frac{a}{2}} e^{2 i y \alpha/a} . dy =$$

$$= \frac{1}{2 i \alpha/a} \int_{-a/2}^{+a/2} 2 i \frac{\alpha}{a} . e^{2 i y \frac{\alpha}{a}} . dy = \frac{1}{2 i \alpha/a} \left[e^{2 i \frac{\alpha}{a} y} \right]_{-a/2}^{+a/2} =$$

$$= \frac{1}{2 i \alpha/a} \left[e^{2 i \frac{\alpha}{a} \left(\frac{a}{2}\right)} - e^{2 i \frac{\alpha}{a} \left(-\frac{a}{2}\right)} \right]$$

$$Ia = \frac{1}{2 i \alpha/a} \left[\underbrace{e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}}_{2 i \sin\alpha} \right] = \frac{1}{2 i \alpha/a} . 2 i \sin\alpha = \boxed{\frac{a . \sin\alpha}{\alpha}}$$

eta analogiaz:

$$\boxed{Ib = \frac{b . \sin\beta}{\beta}}$$

Beraz:

$$Ep = A e^{i(\omega t - \varphi)} . \frac{a . \sin\alpha}{\alpha} . \frac{b . \sin\beta}{\beta}$$

edo

$$Ep = A . a . b \frac{\sin\alpha}{\alpha} . \frac{\sin\beta}{\beta} e^{i(\omega t - \varphi)}$$

Izpi perpendikularrarentzat P_0, puntuan irekidura angeluzuzenareki-ko emandako perturbazioa kalkulatu nahi dugu.

$$\hat{TOH} = 90° = \hat{ROH} \quad \rightarrow \gamma_z = 0 \rightarrow \beta = 0$$

$$\rightarrow \gamma_y = 0 \rightarrow \alpha = 0$$

Beste aldetik:

$$\sin\alpha \approx \alpha \rightarrow \frac{\sin\alpha}{\alpha} = 1$$

$$\sin\beta \approx \beta \rightarrow \frac{\sin\beta}{\beta} = 1$$

hots:

$$\boxed{E_{p_0} = A \cdot a \cdot b \cdot e^{i(\omega t - \varphi)}}$$

Intentsitatea:

$$\boxed{I_{p_0} = K \cdot (A \cdot a \cdot b)^2 = I_0}$$

eta P puntuan:

$$I_p = K \cdot \left(A \cdot a \cdot b \cdot \frac{\sin\alpha}{\alpha} \cdot \frac{\sin\beta}{\beta}\right)^2 = \boxed{I_0 \cdot \frac{\sin^2\alpha}{\alpha^2} \cdot \frac{\sin^2\beta}{\beta^2}} \quad (1)$$

P puntuaren osagaiei Y eta Z deituko ditugu.

$\overline{CR} \perp \overline{PR}$

$$\sin\theta = \frac{Z}{\overline{CP}} \rightarrow Z = \overline{CP} \cdot \sin\theta$$

baina

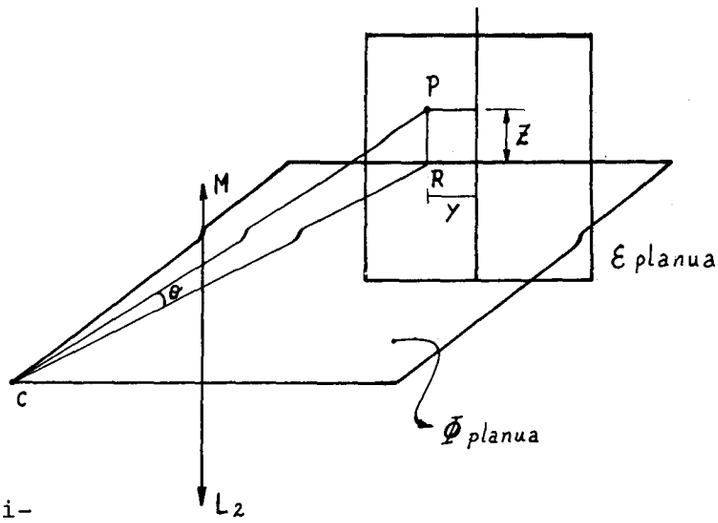
$$\sin\theta = \cos(MCP) = \gamma_z$$

Beraz:

$$Z = \overline{CP} \cdot \gamma_z$$

eta

$$Y = \overline{CP} \cdot \gamma_y$$



Erabiliko ditugun izpiei angeluak guztiz txikiak direnez gero hurbilketa hau erabil dezakegu.

$$\overline{CP} \approx f$$

f : izango litzateke L_2 lentearen distantzia fokala.

orain:

$$Y = f \cdot \gamma_y \qquad \alpha = \frac{\pi \cdot a \cdot Y}{f \cdot \lambda}$$

eta

$$Z = f \cdot \gamma_z \qquad \beta = \frac{\pi \cdot b \cdot Z}{f \cdot \lambda}$$

beraz $\alpha = f(Y)$ eta $\beta = f(Z)$

(1) ekuazioan α eta β-ren balioak ordezkatuz:

$I_p = f(Y,Z)$ bezala aurkituko dugu:

Lehen ikusi dugunez: $I = I_o \cdot \frac{\sin^2\alpha}{\alpha^2} \cdot \frac{\sin^2\beta}{\beta^2}$

Orain funtzio hauek egingo ditugu:

$\frac{\sin^2\alpha}{\alpha^2} \rightarrow D(\alpha)$

$\frac{\sin^2\beta}{\beta^2} \rightarrow D(\beta)$

Kalkula ditzagun $D(\alpha)$ eta $D(\beta)$ -ren maximo eta minimoak

Baldintza: $\frac{dD}{d\alpha} = 0$ beraz: $\frac{1}{\alpha^2} 2\sin\alpha\cdot\cos\alpha + \sin^2\alpha \cdot \frac{-1\cdot 2\alpha}{\alpha^4} = 0$

Hemendik:

$$2\left(\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right)\cdot\left(\frac{\alpha\cos\alpha - \sin\alpha}{\alpha^2}\right) = 0$$

Hau betetzeko

$$\sin\alpha = 0 \rightarrow \begin{cases} \alpha = 0 & \rightarrow \sin\alpha \approx \alpha \rightarrow D(\alpha) = 1 \\ \alpha = \pm n\pi \end{cases}$$

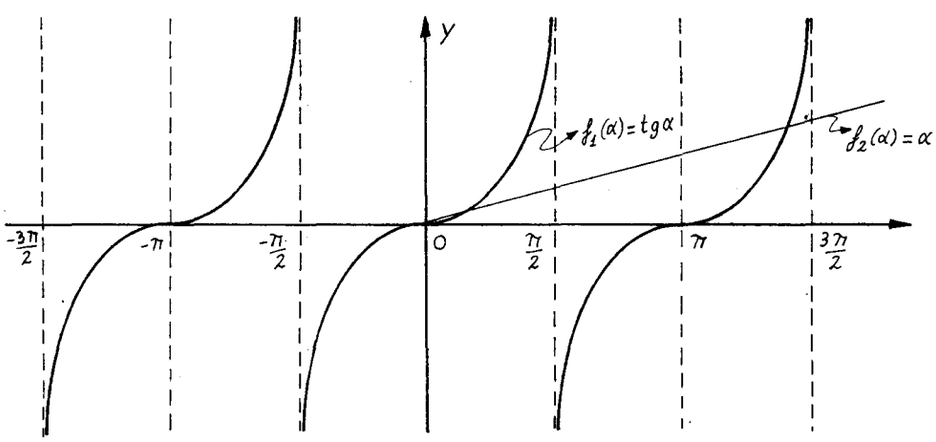
$D(\alpha)$ ez da inoiz negatiboa, eta $\alpha \neq 0$ denean $D(\alpha) < 1$ da ...., beraz, $\alpha = 0$ bada, maximoa dugu. (MAXIMO NAGUSIA)

$\alpha = \pm n\pi$ denean, $\sin\alpha = 0 \rightarrow D(\alpha) = 0 \rightarrow$ (MINIMO)

bestalde, ekuazioa ere beteko da:

$\alpha\cdot\cos\alpha = \sin\alpha$ denean.

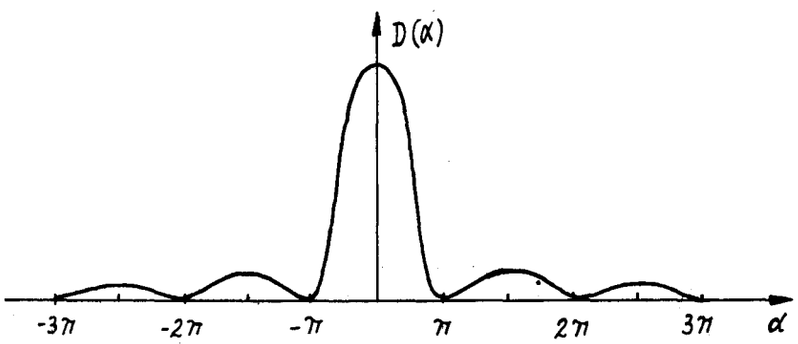
$\frac{\alpha\cdot\cos\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \rightarrow \boxed{\alpha = tg\,\alpha}$ ekuazio honen soluzioak grafikoki aurkituko ditugu.



Ekuazio honen soluzioak (ebakidurak) bi minimoen artean daude; hurbil $\frac{3\pi}{2}$ -tik eta $\frac{5\pi}{2}$ -tik

hots: $\alpha = \pm \frac{3\pi}{2}$, $\pm \frac{5\pi}{2}$ ..... (Bigarren mailako maximoak)

Irudika dezagun $D(\alpha)$ *vs* α



α handituz doalarik, maximoak txikituz doaz.

$\mathcal{E}$ pantailan difrakzio-irudiak ikusi nahi ditugu.

Dakigunez $I = Io \cdot D(\alpha) \cdot D(\beta)$ da.

P_o puntuan argia ikusiko dugu (maximoa dugulako)

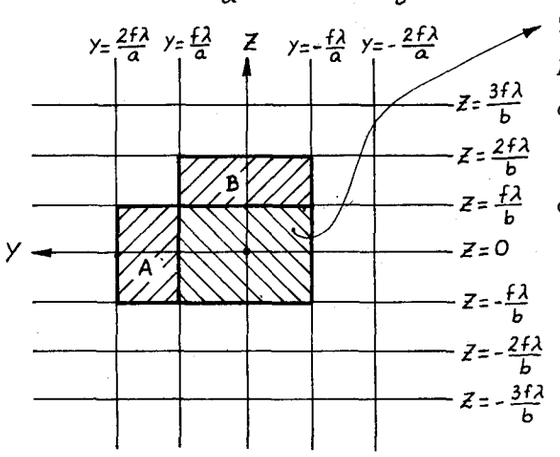
Hau $Y = 0$ eta $Z = 0 \Rightarrow \alpha = 0$ eta $\beta = 0$ direlako.

Hots $\boxed{I = Io}$ (ahal den handiena)
gainera, $I=0$ izango dugu zuzen horietan $\begin{cases} \alpha = \pm n\pi \\ \beta = \pm n\pi \end{cases}$

baina $\alpha = \frac{\pi a.y}{f\lambda} = \pm n\pi \rightarrow y = \pm \frac{nf\lambda}{a}$

$\beta = \frac{\pi b z}{f\lambda} = \pm n\pi \rightarrow z = \pm \frac{nf\lambda}{b}$

$\mathcal{E}$ pantailako argi gehiena angeluzuzen baten barruan egongo da; bere dimentsioak $\frac{2f\lambda}{a}$ eta $\frac{2f\lambda}{b}$ izango dira



Zona argitsuena.

Angeluzuzen honen mugak ilunak dira.

$\pm z$ eta $\pm y$ direkzioetan I gutxituz doa.

Har dezagun A angeluzuzena
Z direkzioan bere mugak $\frac{f\lambda}{b}$ eta $-\frac{f\lambda}{b}$ izango dira
Y " " " $\frac{2f\lambda}{a}$ eta $\frac{f\lambda}{a}$ " " "

Angeluzuzen honetan, intentsitatea

$$I = I_0 \cdot D(\alpha) \cdot D(\beta) \qquad \text{da.}$$

$D(\beta)$ balio maximoa izango du, baina $D(\alpha)$ ez eta horregatik angeluzuzen hau erdikoa baino iluntsoagoa izango da.

B angeluzuenarekin berdin gertatzen da.
Orain $D(\alpha)$ maximoa izango da, eta $D(\beta)$ ez.

Beste edozein angeluzuzenetan oraindik argi gutxiago ikusiko dugu.

Irekidura luze eta estu batean:

Ikus ditzagun irekidura angeluzuzen baten kasu berezia bezala.
Suposa dezagun: $a << b$ eta ondorioz $Y >> Z$
difrakzio-irudia, Y ardatzaren direkzioan, lerroa izango da.

Bestalde, $\beta = \frac{\pi b Z}{f\lambda} \rightarrow \beta \approx 0$

P puntuko perturbazioa $E = A.ab \ \frac{\sin\alpha}{\alpha} \cdot \frac{\sin\beta}{\beta} \ e^{i(\omega t - \varphi)}$

Beraz: $E = A.a.b. \frac{\sin\alpha}{\alpha} \ e^{i(\omega t - \varphi)}$

$$I = I_0 \cdot \frac{\sin^2\alpha}{\alpha^2} \cdot \left(\frac{\sin^2\beta}{\beta^2}\right)^{\to 1} \Rightarrow \boxed{I = I_0 \ \frac{\sin^2\alpha}{\alpha^2}}$$

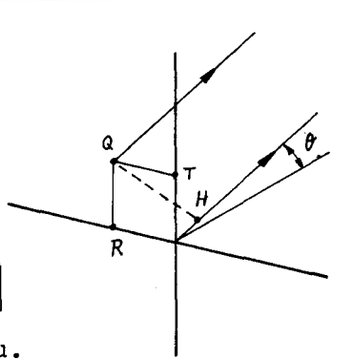
Minimoak ikusiko ditugu $\alpha = \pm n\pi$ denean.

$$\alpha = \frac{\pi . a . \gamma_y}{\lambda}$$

$\gamma_y = \cos \hat{ROH}$ $\qquad \hat{ROH} + \theta = 90^\circ$

$\gamma_y = \sin\theta$

$$\frac{\pi . a . \sin\theta}{\lambda} = \pm n\pi \Rightarrow \boxed{a \sin\theta = \pm n\lambda}$$



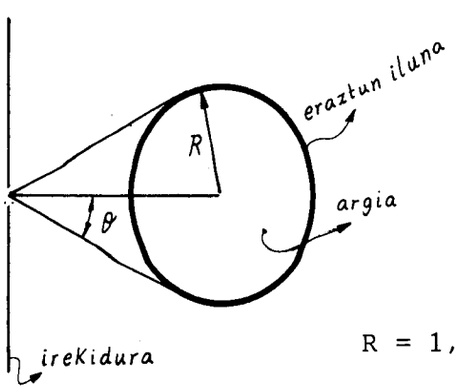
Hau betetzen denean, minimoa izango dugu.

7.2. FRAUNHOFER-EN DIFRAKZIO-FENOMENOAK IREKIDURA ZIRKULAR BATEAN TRESNA OPTIKOEN ERABAKI-MUGA.

Fraunhofer-en difrakzio-fenomenoak irekidura zirkular batean ikusteko kalkulu matematiko zailak erabili behar ditugu.Oraingo galdera honetan ez ditugu egingo;baina kalkulu horietatik aurkitzen dugun Fraunhofer-en difrakzio-banaketa disko argitsu zirkular bat da, eta bereinguruan eraztun argiak eta ilunak ditu,

Eraztun horien intentsitatea oso azkar gutxitzen da.

Irekiduraren erditik begiratuz,lehenengo eraztun iluna θ angelu batez ikusiko dugu; bere balioa $\sin\theta = 1{,}22\,\frac{\lambda}{a}$



Eraztun honen erradioari "difrakzio-diskoaren erradioa" deritzo.

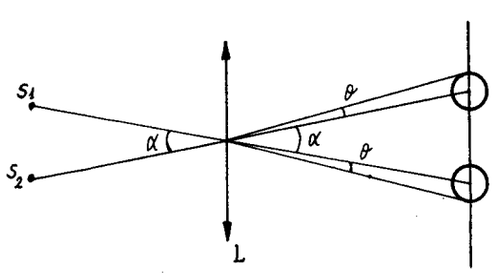
Bere balioa (θ txikia denean)

$$tg\,\theta \approx \sin\theta = \frac{R}{f}$$

$$R = 1{,}22\,\frac{f\lambda}{a}$$

a: irekiduraren diametroa da,eta f lentearen distantzia fokala.

S_1, S_2 bi iturri puntual izanik, instrumentu optiko batek iturri horiek noiz bereizten dituen ikusi nahi dugu.



α : separazio angeluarra

Kasuak

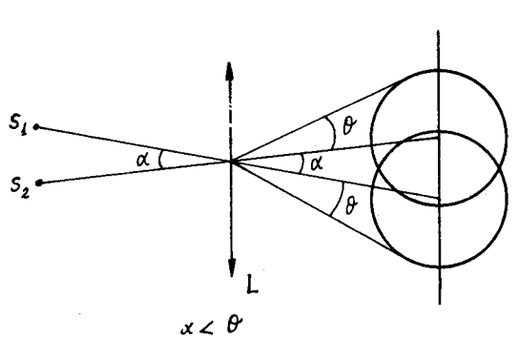
$\alpha > \theta$

$\alpha = \theta$

$\alpha < \theta$

$\alpha > \theta$ denean

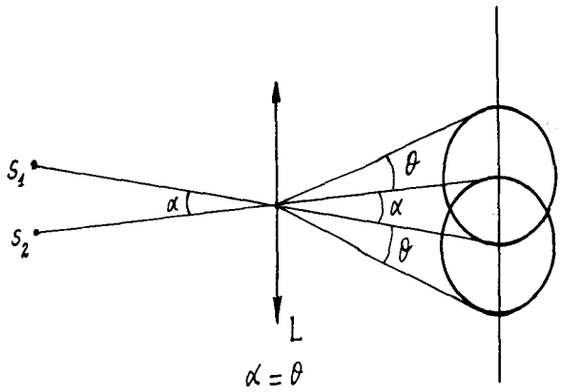
Bi difrakzio diskoak bereiztuak daude.



$\alpha < \theta$

$\alpha < \theta$ denean.

Difrakzio-diskoak nahasturik daude.



$\alpha = \theta$ denean diskoen zentro arteko distantzia R erradioa da.

Rayleigh-ek baliozko eritzia ematen digu,tresna optiko batek S_1 eta S_2 bi iturri puntual noiz bereizten digun jakiteko.

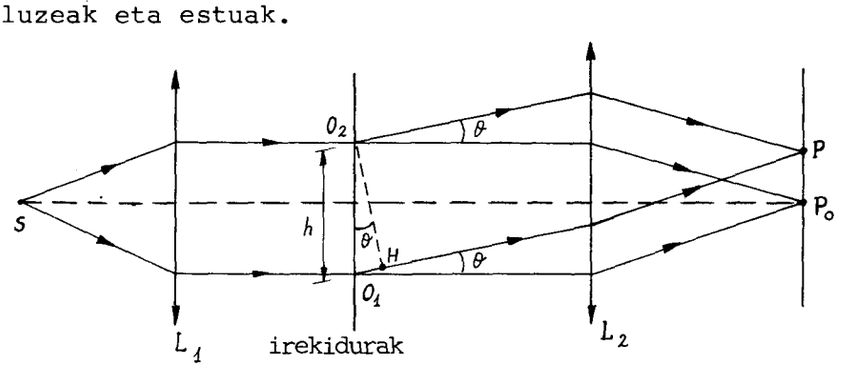
"Tresna optiko batek bereiz egingo ditu S_1 eta S_2 bi iturri puntual difrakzio-diskoen zentru artean dagoen distantzia R baino handiagoa bada.

Beraz $\alpha \geq \theta$ denean

Orduan: $\sin\theta = 1{,}22\,\frac{\lambda}{a}$ ekuazioak ematen digu bi iturrien arteko,separazio angeluar txikiena,a diametroko lente edo ispilu batek bereiztea posible duena.

7.3 FRANHOFER-EN DIFRAKZIO-FENOMENOAK BI IREKIDURETAN

Biak luzeak eta estuak.



Hau izango litzateke erabiliko genukeen eskema:

Irekiduraren lodiera a ipiniko dugu (bientzat berdina) eta bi irekidura horien arteko distantzia h bezala ipiniko dugu.

Aurki dezagun P puntuko perturbazioa

Irekidura bakoitzak berea emango digu.

$E_1 = \frac{c \sin\alpha}{\alpha} \cdot e^{i(\omega t - \varphi_1)}$ lehenengoak eta

$$E_2 = \frac{c \sin\alpha}{\alpha} \cdot e^{i(\omega t - \varphi_2)}$$ bigarrenak

φ_1 eta φ_2-ren arteko erlazioa aurki dezagun.

$\overline{O_1P}$ izpiaren bide optikoa l_1 bada orduan perturbazioa

$$E_1 = \frac{c \sin\alpha}{\alpha} \cdot e^{i[\omega(t - l_1/v) + \varphi_1']}$$ da, eta

$\overline{O_2P}$ izpiaren bide optikoa l_2 bada orduan perturbazioa

$$E_2 = \frac{c \sin\alpha}{\alpha} \cdot e^{i[\omega(t - l_2/v) + \varphi_1']}$$ da.

Orain fasea φ_1' berdina da iturri berdina dugulako.

Beste aldetik, badakigu

$$E_2 = \frac{c \sin\alpha}{\alpha} \cdot e^{i(\omega t - \varphi_2)}$$ hots: $\boxed{-\omega \frac{l_2}{v} + \varphi_1' = -\varphi_2}$

gainera $\overline{O_2H}$ uhin-frontea delako $: l_1 = l_2 + \overline{O_1H}$

Beraz: $E_1 = \frac{c \sin\alpha}{\alpha} \cdot e^{i[\omega(t - \frac{\{l_2 + \overline{O_1H}\}}{v}) + \varphi_1']} =$

$$= \frac{c \sin\alpha}{\alpha} e^{i(\omega t - \varphi_1)}$$

berdinak izateko

$$\underbrace{\left(-\frac{\omega l_2}{v} + \varphi_1'\right)}_{-\varphi_2} - \omega \frac{\overline{O_1H}}{v} = -\varphi_1$$

orain:

$$-\varphi_2 - \omega \frac{\overline{O_1H}}{v} = -\varphi_1 \Rightarrow -\varphi_2 - 2\pi \frac{\overline{O_1H}}{\underbrace{vT}_{\lambda}} = -\varphi_1$$

O_1H aurki dezagun:

$$\sin\theta = \frac{\overline{O_1H}}{h} \rightarrow \overline{O_1H} = h \cdot \sin\theta$$

hots:

$$-\varphi_2 - 2\pi \frac{h \cdot \sin\theta}{\lambda} = -\varphi_1$$

definizioz

$$\frac{\pi \cdot h \cdot \sin\theta}{\lambda} = \delta$$

eta

$$-\varphi_2 - 2\delta = -\varphi_1 \Rightarrow \boxed{\varphi_2 = \varphi_1 - 2\delta}$$

Hau da:

$$E_1 = \frac{c \sin\alpha}{\alpha} \cdot e^{i(\omega t - \varphi_1)}$$

$$E_2 = \frac{c \sin\alpha}{\alpha} \cdot e^{i(\omega t - \varphi_1 + 2\delta)}$$

} Batuaz: $E = E_1 + E_2$

$$E = \frac{c \sin\alpha}{\alpha} \cdot e^{i(\omega t - \varphi_1)} \left[1 + e^{2i\delta}\right]$$

$$1 + e^{2i\delta} = e^{i\delta}\underbrace{\left[e^{-i\delta} + e^{i\delta}\right]}_{2\cos\delta} = 2\cos\delta \cdot e^{i\delta}$$

eta:

$$\boxed{E = 2C \frac{\sin\alpha}{\alpha} \cdot \cos\delta \cdot e^{i(\omega t - \varphi_1 + \delta)}}$$

Hau izango litzateke P puntuko perturbazioa

P_0-ko perturbazioa ($\theta = 0$) bada:

$$\theta = 0 \rightarrow \delta = 0 \rightarrow \alpha = \frac{\pi \cdot a \sin\theta}{\lambda} = 0 \rightarrow \frac{\sin\alpha}{\alpha} = 1$$

hots:

$$\boxed{E_{P_o} = 2C \cdot e^{i(\omega t - \varphi_1)}}$$

Intentsitatea: $I_{P_o} = K(2C)^2 = K \cdot 4C^2 = I_o$

eta

$$\boxed{I_P = K \cdot 4 \cdot C^2 \cdot \frac{\sin^2\alpha}{\alpha^2} \cdot \cos^2\delta = I_o \frac{\sin^2\alpha}{\alpha^2} \cdot \cos^2\delta}$$

Azter dezagun ekuazio hau

$\frac{\sin^2\alpha}{\alpha^2}$: "difrakzio-faktorea" deritzo

$\cos^2\alpha$: " interferentzi faktorea" deritzo

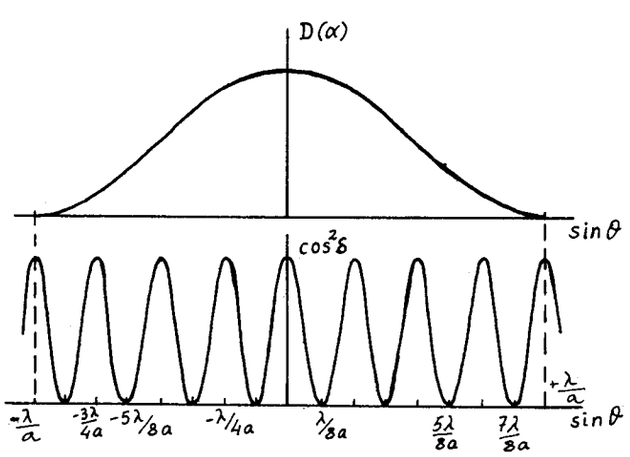
Irudikatuz $D(\alpha)$ vs $\sin\theta$, $\cos^2\delta$ vs $\sin\theta$

eta I_p/I_o vs $\sin\theta$ $h = 4a$ denean

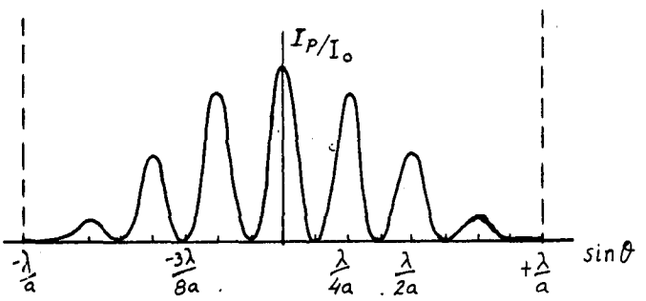
Ikasgai honetan, lehenengo galderan dagoenekoz ikusia dugu $D(\alpha)$ funtzioak lehenengo minimoa $\alpha = \pm\pi$ denean duela.
baina

$$\alpha = \frac{\pi a \sin\theta}{\lambda} \quad \text{da}$$

$$\frac{\pi a \sin\theta}{\lambda} = \pm\pi \rightarrow \boxed{\sin\theta = \pm\frac{\lambda}{a}} \quad (2)$$



(2) ekuazioa betetzen denean $D(\alpha)$ funtzioak minimo bat emango digu.



Orain, $\cos^2\delta$ funtzioaren maximoak aztertu nahi ditugu.

MAXIMOAK

$$\cos^2\delta = 1 \quad \text{denean} \rightarrow \delta = \pm k\pi \rightarrow \delta = \frac{\pi \cdot h \sin\theta}{\lambda} = \pm k\pi$$

$$\boxed{\sin\theta = \pm \frac{k\lambda}{h}}$$

MINIMOAK

$$\cos^2\delta = 0 \quad \text{denean} \rightarrow \delta = \pm (2k+1)\frac{\pi}{2} \rightarrow \delta = \frac{\pi h \sin\theta}{\lambda} = \pm (2k+1)\frac{\pi}{2}$$

$$\boxed{\sin\theta = \pm \frac{2k+1}{2}\ \frac{\lambda}{h}}$$

MAXIMOAK

LEHENENGOA	K=1 denean	$\sin\theta = \pm \frac{\lambda}{h}$	edo	$\sin\theta = \pm \frac{\lambda}{4a}$
BIGARRENA	K=2 denean	$\sin\theta = \pm \frac{2\lambda}{h}$	edo	$\sin\theta = \pm \lambda/2a$
HIRUGARRENA	K=3 denean	$\sin\theta = \pm 3\lambda/h$	edo	$\sin\theta = \pm 3\lambda/4a$
LAUGARRENA	K=4 denean	$\sin\theta = \pm 4\lambda/h$	edo	$\sin\theta = \pm \lambda/a$

MINIMOAK

LEHENENGOA	K=0 denean	$\sin\theta = \pm \lambda/2h = \pm \lambda/8a$
BIGARRENA	K=1 denean	$\sin\theta = \pm 3\lambda/2h = \pm 3\lambda/8a$
HIRUGARRENA	K=2 denean	$\sin\theta = \pm 5\lambda/2h = \pm 5\lambda/8a$
LAUGARRENA	K=3 denean	$\sin\theta = \pm 7\lambda/2h = \pm 7\lambda/8a$

I_p/I_o *vs* $\sin\theta$ irudia egiteko aurreko bi funtzio horien biderkaketa egin behar dugu.

Ikusten dugunez, irudian I_P/I_o funtzioaren maximoak eta $\cos^2\delta$ fun-

tzioaren maximoak posizio berdinetan daude eta horregatik pantailan minimoak ikusiko ditugu θ angeluak ekuazio hau betetzen badu

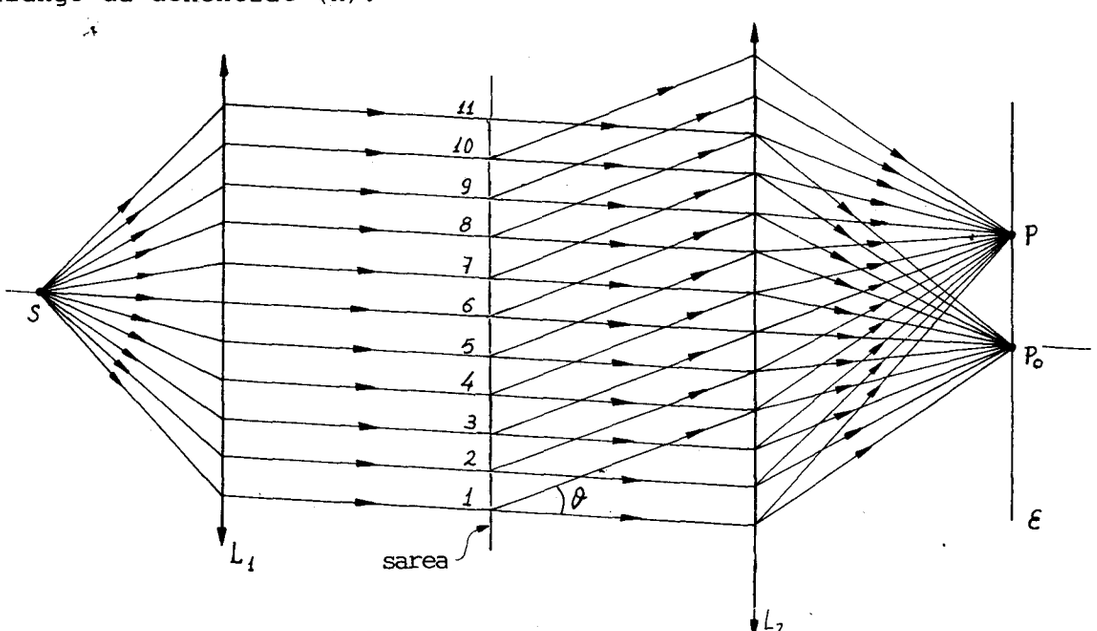
$$\boxed{\sin\theta = \pm \frac{2K+1}{2}\,\frac{\lambda}{h}}$$

eta maximoak beste ekuazio hau betetzen badu.

$$\boxed{\sin\theta = \pm K\,\frac{\lambda}{h}}$$

7.4. DIFRAKZIO-SAREA

Sarea lortzeko, pantaila batean irekidura paralelo pila bat egin behar da. Gure kasuan luzeak eta estuak izango dira, eta denak lodiera berdinekoak (a). Bestalde, bi irekiduren arteko distantzia berdina izango da denentzat (h).



Honako hau da guk erabiliko dugun eskema.

Irudi honetan izpi batzuek sarearekiko elkartzutak dira, eta besteek θ angelua osatzen dute izpi horiekin.

Aurki ditzagun perturbazioa eta intentsitatea P puntuan:
Dakigunez, irekidura luze eta estuak emandako perturbazioa:

$$E = c\,\frac{\sin\alpha}{\alpha}\,e^{i(\omega t-\varphi)}$$

$$\alpha = \frac{\pi\, a \sin\theta}{\lambda} \quad \text{da eta} \quad \delta = \frac{\pi\, h \sin\theta}{\lambda}$$

Lehenengo irekidurak emandako perturbazioa E_1 ipiniko dugu,bigarrenak E_2 etab.

$$E_1 = c\,\frac{\sin\alpha}{\alpha}\,e^{i(\omega t-\varphi_1)}$$

$$E_2 = c\,\frac{\sin\alpha}{\alpha}\,e^{i(\omega t-\varphi_2)}$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$E_{n+1} = c\,\frac{\sin\alpha}{\alpha}\,e^{i(\omega t-\varphi_{n+1})}$$

Ikus dezagun φ guzti horiek erlazionaturik daudela:

Bi irekidura ditugunean.

$$\varphi_2 = \varphi_1 - 2\delta$$

baina n+1 irekidura ditugunean:

$$\left.\begin{aligned}\varphi_3 &= \varphi_2 - 2\delta\\ \varphi_4 &= \varphi_3 - 2\delta\\ &\vdots\\ \varphi_{n+1} &= \varphi_n - 2\delta\end{aligned}\right\}$$ batuketa eginaz;

$$\boxed{\varphi_{n+1} = \varphi_1 - 2n\delta}$$

Beraz:

$$E_1 = c\,\frac{\sin\alpha}{\alpha}\cdot e^{i(\omega t-\varphi_1)}$$

$$E_2 = c\,\frac{\sin\alpha}{\alpha}\cdot e^{i(\omega t-\varphi_1)}\cdot e^{2i\delta}$$

$$\vdots$$

$$E_{n+1} = c\,\frac{\sin\alpha}{\alpha}\cdot e^{i(\omega t-\varphi_1)}\cdot e^{2in\delta}$$

Suposa dezagun,sareak N irekidura duela.Perturbazioa,P puntuan,E_p izango da:

$$E_p = E_1+E_2+\cdots+E_N = c\,\frac{\sin\alpha}{\alpha}\,e^{i(\omega t-\varphi_1)}\left[\underbrace{1+e^{2i\delta}+\cdots+e^{2i(N-1)\delta}}\right]$$

Progresio geometriko baten batura dugu.

N gai daukan progresio geometriko baten batura definizioz zera da:

$$\boxed{a\cdot\frac{c^N-1}{c-1}}$$ → a : lehenengo gaia
c → arrazoia.

gure kasuan

$$\text{Batura} = 1\cdot\frac{e^{2i\delta N}-1}{e^{2i\delta}-1} = \frac{e^{iN\delta}\overbrace{\left[e^{iN\delta}-e^{-iN\delta}\right]}^{2i\sin N\delta}}{e^{i\delta}\underbrace{\left[e^{i\delta}-e^{-i\delta}\right]}_{2i\sin\delta}} =$$

$$= \frac{e^{i(N-1)\delta} \cdot \sin N\delta}{\sin\delta}$$

hots:

$$\boxed{E_p = C\,\frac{\sin\alpha}{\alpha} \cdot \frac{\sin N\delta}{\sin\delta}\; e^{i[\omega t - \varphi_1 + (N-1)\delta]}}$$

Aurki dezagun peturbazioa, P_0 puntuan : ($\theta = 0$ denean)

$\theta = 0 \rightarrow$ $\alpha = 0 \rightarrow \sin\alpha \cong \alpha$

$\delta = 0 \rightarrow \sin N\delta \cong N\delta$

$\sin\delta \cong \delta$

Beraz:

$$\boxed{E_{p_o} = NC\; e^{i(\omega t - \varphi_1)}}$$

Intentsitatea toki berdinean aurkitzeko:

$$I_{p_o} = k\cdot(NC)^2 = I_o$$

$$I_p = KC^2\,\frac{\sin^2\alpha}{\alpha^2} \cdot \frac{\sin^2 N\delta}{\sin^2\delta} = \boxed{\frac{I_o}{N^2} \cdot \frac{\sin^2\alpha}{\alpha^2} \cdot \frac{\sin^2 N\delta}{\sin^2\delta}}$$

$\frac{\sin^2\alpha}{\alpha^2}$ " difrakzio gaia" deritzo honi

$\frac{\sin^2 N\delta}{\sin^2\delta}$ " interferentzi gaia" deritzo honi.

Lehen bezala, I-ren maximo eta minimoak interferentzi gaiak emango dizkigu.

MAXIMOAK

$$\frac{\sin^2 N\delta}{\sin^2\delta} = N^2 \text{ denean} \rightarrow \delta = \pm K\pi$$

eta $\delta = \frac{\pi h \sin\theta}{\lambda} = \pm K\pi \rightarrow \boxed{\sin\theta = \pm \frac{K\lambda}{h}}$

θ angeluak ekuazio hau betetzen duenean P puntuan maximo bat ikusiko dugu eta "MAXIMO NAGUSIA" deritzo honi.

MINIMOAK

$$I_p = 0 \rightarrow N\delta = \pm m\pi \qquad \text{denean eta} \quad \delta \neq K\pi$$

$$N\delta = \pm m\pi = \frac{N\cdot\pi\cdot h\sin\theta}{\lambda} \rightarrow \sin\theta = \pm \frac{m\lambda}{Nh}$$

Kasu honetan P puntuan minimo bat lortuko genuke.
Ikus dezagun zenbat minimo ditugun bi maximo nagusiren artean

$$\sin\theta = \pm\frac{\lambda}{Nh} \;;\; \pm\frac{2\lambda}{Nh} \;;\; \ldots\ldots \;\; \frac{(N-1)\lambda}{Nh}$$

m = N denean maximo nagusia izango dugu.
beraz, N-1 minimo izango ditugu eta N-1 minimo horien artean,N-2 maximo izango dira(horie,"BIGARREN MAILAKO MAXIMOAK" esaten zaie).

Kasu hauetan:

$$\sin\theta = \pm\frac{3}{2}\frac{\lambda}{Nh} \;;\; \pm\frac{5}{2}\frac{\lambda}{Nh} \cdots\cdots$$

Aurki dezagun orain maximo eta minimo horiek duten intentsitatea.

MAXIMO NAGUSIETAN:

$$I_p = \frac{I_o}{N^2}\;\frac{\sin^2\alpha}{\alpha^2}\cdot N^2 = I_o\cdot\frac{\sin^2\alpha}{\alpha^2}$$

MINIMOETAN: $I_p = 0$

BIGARREN MAILAKO MAXIMOETAN:

$$I_p = \frac{I_o}{N^2}\cdot\frac{\sin^2\alpha}{\alpha^2}\cdot(\text{zerbait})$$

$\sin\theta = \pm\frac{2k+1}{2}\cdot\frac{\lambda}{Nh}$ bada $\rightarrow$ $|N\delta| = \frac{N\cdot\pi h\left(\frac{2k+1}{2}\right)\lambda/Nh}{\lambda}$

hots: $\sin N\delta = \sin\left(\frac{2k+1}{2}\pi\right) = 1$

(zerbait) $= \frac{1}{\sin^2\delta}$ eta

$$\boxed{I_p = \frac{I_o}{N^2}\cdot\frac{\sin^2\alpha}{\alpha^2}\cdot\frac{1}{\sin^2\delta}}$$

Kalkula dezagun intentsitatea kasu berezi batean.Hain zuzen ere, K maximo nagusiaren ondoan dagoen bigarren mailako maximoa.

K ordenako maximo nagusia ikusteko:

$\sin\theta = \pm K\frac{\lambda}{h}$ eta ondoan dagoen bigarren mailako maximoa ikusiko dugu.

$\sin\theta = \pm K\frac{\lambda}{h} \pm\frac{3}{2}\frac{\lambda}{Nh}$ denean.

$$\sin\theta = \pm\frac{\lambda}{h}\left(K + \frac{3}{2N}\right)$$

$$\delta = \frac{\pi h \sin\theta}{\lambda} = \pm \frac{\pi \cdot h \; \lambda/h \left(k + \frac{3}{2N}\right)}{\lambda}$$

orain $|\sin\delta| = \sin\left(k + \frac{3}{2N}\right)\pi = \sin\frac{3\pi}{2N}$

N handia denez gero, $\sin\frac{3\pi}{2N} \approx \frac{3\pi}{2N}$

hots; $$I_p = \frac{I_o}{N^2} \; \frac{\sin^2\alpha}{\alpha^2} \cdot \frac{1 \cdot 4N^2}{9\pi^2} = \boxed{\frac{1}{22} \; I_o \; \frac{\sin^2\alpha}{\alpha^2}}$$

Maximo nagusia baino,22 aldiz txikiagoa izango da intentsitatez.

$$\boxed{I_p = \frac{I_o}{N^2} \; \frac{\sin^2\alpha}{\alpha^2} \cdot \frac{1}{\sin^2\delta}}$$

Ekuazio honetan ikusten dugunez, I_p minimoa izango da $\sin\delta = 1$ denean.Hau gertatzen da bi maximo nagusien bide erdian.

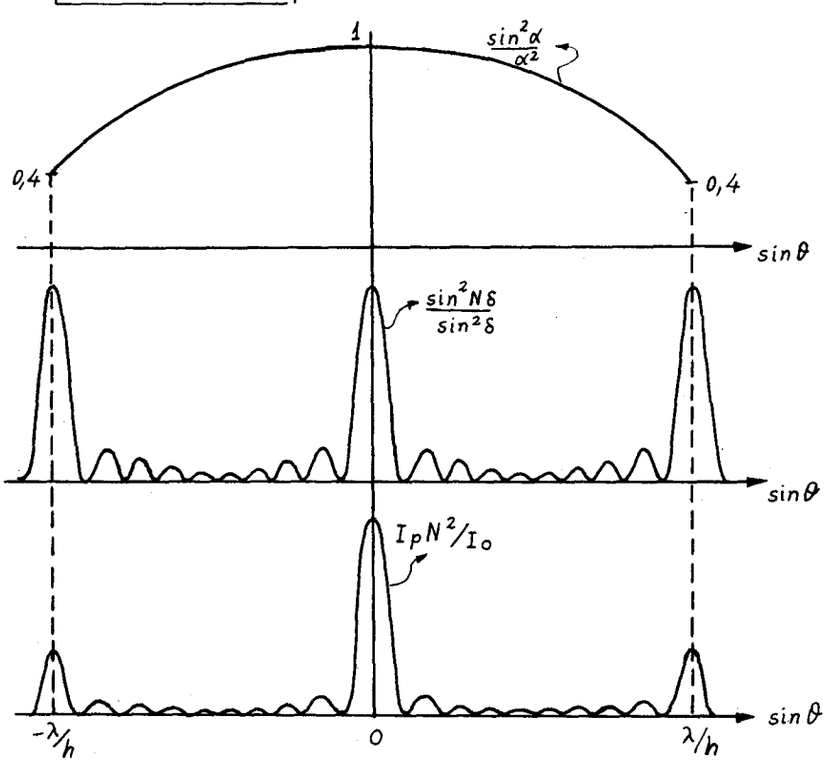
$\boxed{I_p = \frac{I_o}{N^2} \cdot \frac{\sin^2\alpha}{\alpha^2}}$ da

eta maximo nagusia baino N^2 aldiz txikiagoa izango da.

Erditik bigarren maximo nagusira bagoaz bigarren mailako maximoen intentsitatea handituz doa.

Adierazpen hauen irudikapena egingo dugu kasu berezi batentzat:

$\boxed{N = 10 \text{ eta } h = 2a}$ denean.



Lehen esana dugu D(α) funtzioak minimo bat duela $\alpha = \pm\pi$ denean.

$$\alpha = \pi \cdot \frac{a \sin\theta}{\lambda} = \pm\pi \rightarrow \quad \sin\theta = \pm\frac{\lambda}{a} = \pm\frac{2\lambda}{h}$$

Orain zera kalkulatu nahi dugu, D(α) funtzioaren balioa $\sin\theta = \pm\frac{\lambda}{h}$ denean.

$$\frac{\sin^2\alpha}{\alpha^2} = \frac{\sin^2\left(\frac{\pi a \sin\theta}{\lambda}\right)}{\left(\frac{\pi a \sin\theta}{\lambda}\right)^2} = \frac{\sin^2 \pi a \cdot \frac{\lambda}{2a\lambda}}{\left(\pi a \frac{\lambda}{2a\lambda}\right)^2} = \frac{\sin^2 \pi/2}{(\pi/2)^2} = 0,4$$

Lehen bezala, $Ip.N^2/Io$ *vs* $\sin\theta$ irudia egiteko D(α) eta $\frac{\sin^2 N\delta}{\sin^2\delta}$ funtzio horien biderkaketa egin behar dugu.

N-ren balioa handia izaten da 100.000 edo handiagoa.

Kasu horietan maximo nagusiak oso estuak dira.
Bestalde bigarren mailako maximoak, maximo nagusiaren ondoan daudenak ez ditugu ikusiko, separazio angeluarra txikia bait da bien artean.

Besteak ez ditugu ikusiko, intentsitatea oso txikia delako. Horregatik, sare bat argi monokromatikoz argituz, pantailan marra zuzen eta estu argitsuak ikusiko ditugu. Marra horiek maximo nagusia adierazten digute.

Sarea espektroskopio bezala erabiltzen da. Horretarako iturriak eman behar ditugu uhin-luzera desberdineko argia. Zero mailako maximo nagusia uhin-luzera guztientzat puntu berdinean ikusiko dugu. Beste maximo nagusietan, adibidez lehenengo ordenako maximo nagusientzat, uhin-luzera bakoitzari marra bat dagokio, eta uhin-luzera desberdin bezainbat marra estu izango ditugu.

Bigarren mailako maximo nagusiarekin beste hainbeste gertatzen da, etab.

Bat ordenako interferentziari dagokion marrak emango digu lehen mailako espektroa, etab.

Suposa dezagun bi uhin-luzera guztiz hurbilak ditugula;

λ eta $\lambda + \Delta\lambda$

Orain,K mailako maximo nagusïa (lehenengo uhin-luzerarentzat) θ angelu batez ikusiko dugu,eta bigarrenarentzat $\theta+\Delta\theta$ batez.

Angelu horiek ekuazio hauek bete behar dituzte:

$$\sin\theta = \pm k\frac{\lambda}{h}$$

$$\sin(\theta+\Delta\theta) = \pm k\frac{(\lambda+\Delta\lambda)}{h}$$

$$\sin\theta.\cos\Delta\theta + \cos\theta.\sin\Delta\theta = k\frac{\lambda}{h} + k\frac{\Delta\lambda}{h}$$

Baina: $\Delta\lambda << \lambda$ hots: $\Delta\theta << \theta$

beraz: $\cos\Delta\theta \cong 1$ $\sin\Delta\theta \cong \Delta\theta$

$$\sin\theta + \cos\theta\cdot\Delta\theta = \frac{k\lambda}{h} + \frac{k\Delta\lambda}{h}$$

eta:

$$\boxed{\frac{\Delta\theta}{\Delta\lambda} = \frac{k}{h\cdot\cos\theta}} \quad (3)$$

$\frac{\Delta\theta}{\Delta\lambda}$: "Sarearen dispertsio angeluarra" deritzo honi.

Eritzi bezala, sareak bi marra bereiztuko ditu bien arteko distantzia,marra baten lodieraren erdia baino handiagoa denean; edo, berdin dena,distantzia hori maximo nagusi batetik lehenengo minimoraino dagoen distantzia izango da.

Suposa dezagun K mailako maximo nagusia θ angeluaz ikusten dugula, eta lehenengo minimoa $\theta+\delta\theta$ angeluaz.

Dakigunez,ekuazio hau beteko da.

$$\sin\theta = k\frac{\lambda}{h}$$

$$\sin(\theta+\delta\theta) = k\frac{\lambda}{h} + \frac{\lambda}{Nh} = \frac{\lambda}{h}\left(k+\frac{1}{N}\right)$$

Lehen bezala:

$$\sin\theta.\cos\delta\theta + \cos\theta.\sin\delta\theta = k\frac{\lambda}{h} + \frac{\lambda}{Nh}$$

Baina: $\delta\theta << \theta$

beraz: $\cos\delta\theta \cong 1$ $\sin\delta\theta \cong \delta\theta$

$$\sin\theta + \cos\theta\cdot\delta\theta = k\frac{\lambda}{h} + \frac{\lambda}{Nh}$$

eta:

$$\boxed{\delta\theta = \frac{1}{Nh\cos\theta}}$$

eta (3) ekuazioarekin alderatuz:

$$\boxed{\frac{\lambda}{\Delta\lambda} = N.K}$$ "sarearen bereizmen" deritzo.

Eta ekuazio honek ematen digu K mailako interferentzientzat $\Delta\lambda$ txikiena, sare honek bereiz dezakeena ematen digu.

8.IKASGAIA

POLARIZAZIOA

8.1. UHIN ARGITSUEN POLARIZAZIOA

Interferentzietan eta difrakzio-fenomenoetan ikusi dugunez,perturbazio optikoa oso azkar aldatzen da denborarekin batera; baina ez dakigu magnitude eskalarra ala bektoriala den.Gainera,bektorea balitz,ez dakigu bere direkzioa eta uhinaren propagatze-direkzioak berdinak ala desberdinak izango liratekeen.Problema hau askatzeko saiakuntzara joko dugu,eta xafla polarizatzaileak erabiliko ditugu.

Eman dezagun xafla polarizatzaile batean zehar argi-iturri bat begiratzen dugula.Xafla hau biraarazten badugu,argiaren intentsitatea ez da inolaz ere aldatzen.Suposa dezagun,xafla bakarra izan ordez bi xafla polarizatzaile ditugula,bata geldirik eta bestea biraka.Sistema hau argi-iturri baten aurretik ipini ondoren begiratzen badugu,zera ikusiko dugu: intentsitatea aldatuz doala, bira oso bakoitzean 180°elkarrengandik alderatzen diren ilunaldiak daudela, eta posizio horietatik urrunkide diren intentsitatearen bi maximo.

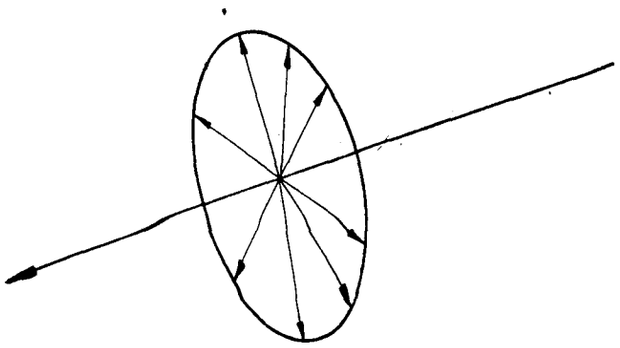
Intentsitatea neurtzen badugu,Malus-en legea beteko da:

$$I = I_o \cdot \cos^2 \varphi$$

hemen: I_o : sistema zeharkatu duen intentsitate maximoa da.
φ : puntu maximotik,xaflen arteko biraketa angelua.

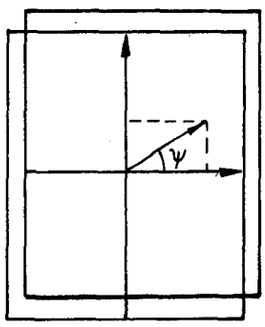
Beraz, orain arte ikusi duguna argitzeko nahi eta nahiezkoa da perturbazio optikoa bektorea dela suposatzea.Bektore honi "Bektore optiko" deritzo. Hemen ikusiko ez badugu ere,Teoria Elektromagnetikoan teorikoki frogatzen zaigu bektore honen direkzioa eta uhinaren propagazio-direkzioak elkartzutak direla.

Edozein iturri optiko bat dugunean,berak emandako uhinen bektore optikoaren direkzioa oso azkar aldatzen da denborarekin batera.Egoera honetan dugun argiari " <u>argi ezpolarizatua</u>" esan ohi zaio:



Argiaren polarizazio-ezaren arrazoia hauxe da: iturri errealak beste iturri txiki batzuz osatuak bezala kontsidera ditzakegu, eta iturri horiek emandako perturbazioak ez-koherenteak dira; beraz,iturri erreal batek ezin emango digu batpatean argi polarizaturik.

Azter dezagun,orain, xafla polarizatzaile batetara uhin argitsu bat iristen denean zer gertatzen den:



Uhinaren bektore optikoaren direkzioa eta xafla polarizatzailearen transmisio-ardatza paraleloak badira,orduan,xaflak uhina pasatzen uzten du,ezertxo ere xurgatu gabe.

Uhin intzidentearen bektore optikoaren direkzioa eta xaflaren transmisio-ardatza elkartzutak badira,xaflak uhin intzidentearen intentsitate guztia xurgatu egiten du.

Lehen aipatu ditugun horietako direkziorik ez dugunean,bektore optikoa bere bi osagaietan deskonposatu ahal izango dugu: bata xaflaren transmisio-ardatzaren direkzioan,eta bestea harekiko elkartzutik.

Bi osagai hauetatik,transmisio-direkzioarekin bat datorrena xurgatu gabe pasako da,bestea,aldiz, xaflak xurgatuko du.

Dena dela, kasu edozein batean, xaflaren transmisio-ardatzaren direkzioan ateratzen den argiari, " <u>argi linealki polarizatua</u>" esaten zaio.

Lehen ikusi dugun Malus-en legea berriz ikusten badugu, $I=I_o.\cos^2\varphi$ berehala ohartuko gara φ angelua bi xafla polarizatzaileen transmisio-ardatzen artean dagoena dela.

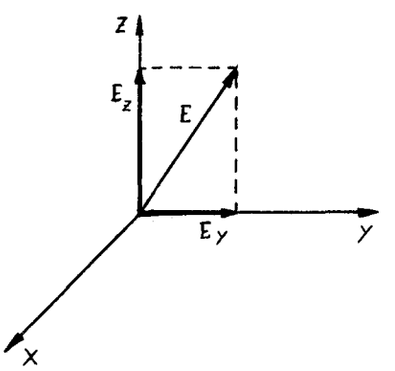
Argi polarizatuaren fenomenoak ikusteko erabiltzen den tresnari "polaroskopioa" deritzo.Polaroskopio batek bi xafla polarizatzaile ukan behar ditu:lehendabizikoari "polarizatzailea" esaten zaio, eta bigarrenari,"analisatzailea".

8.2 BI UHIN POLARIZATUREN GAINEZARMENA: POLARIZAZIO ELIPTIKOA ETA ZIRKULARRA

Suposa dezagun bi uhin sinusoidal linealki polarizatu ditugula,eta biek maiztasuna eta propagazio-direkzioa berdinak dituztele.

Bi uhin horien bektore optikoak paraleloak baldin badira,bien gainezarmena uhin linealki polarizatu bat izango da.

Kasu hau alde batera utzita,sar gaitezen orain buru-belarri bi uhin polarizatu elkartzuten azterketan.Horretarako,ardatz Cartesiarrak erabiliko ditugu.



Guretzat, uhina X ardatzaren direkzio positiboan mugituko da.Y ardatza,uhin baten bektore optikoarekiko paraleloa izango da, eta Z ardatza beste uhinarekiko paraleloa.

Gure bi uhin horien bektore optikoak,horrelako adierazpen matematikoen bidez adieraz ditzakegu:

$$E_y = A_y \cdot \cos\left[\omega(t - x/v) + \varphi_1\right] \quad (1)$$

$$E_z = A_z \cdot \cos\left[\omega(t - x/v) + \varphi_2\right] \quad (2)$$

Hemen, E_y eta E_z perturbazioak -edo bektore optikoak- Y eta Z ardatzetan dituen osagaiak izango lirateke. Edozein E une batetan, bi uhin horien gainezarmenaren bektore optikoa izango da.

Ikusten dugunez, E aldatuz doa t denborarekin batera, bai luzeran eta bai zabaleran. Bere azkon-puntak marrazten duen kurba, (1) eta (2) ekuazio parametrikoak ematen digutena da.

Saia gaitezen, orain, lerro horren itxura aurkitzen. Horretarako, bi ekuazioen artean t aldagaia baztertu beharko dugu. Defini dezagun fase-aldaketa:

$$\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$$

Suposa dezagun orain t' denbora batentzat berdintza hau betetzen dela:

$$\omega(t - x/v) + \varphi_1 = \omega . t'$$

Orduan:

$$E_y = A_y \cdot \cos(\omega t') \qquad \text{edo:} \quad \cos(\omega t') = E_y / A_y$$

$$E_z = A_z \cdot \cos(\omega t' + \varphi) = A_z \cdot \cos(\omega t') \cos\varphi - A_z \cdot \sin(\omega t') \cdot \sin\varphi$$

Ekuazio hauek moldatuz:

$$E_z / A_z = E_y / A_y \cdot \cos\varphi - \sin\omega t' \cdot \sin\varphi$$

Beraz:

$$\left(E_z / A_z - E_y / A_y \cdot \cos\varphi\right)^2 = \left(-\sin\omega t' \cdot \sin\varphi\right)^2$$

Hau da:

$$E_z^2 / A_z^2 + E_y^2 / A_y^2 \cdot \cos^2\varphi - \left(2 E_y \cdot E_z / A_y \cdot A_z\right) \cdot \cos\varphi = \sin^2\varphi \left[-\left(\frac{E_y}{A_y}\right)^2 + 1\right]$$

Azken batean:

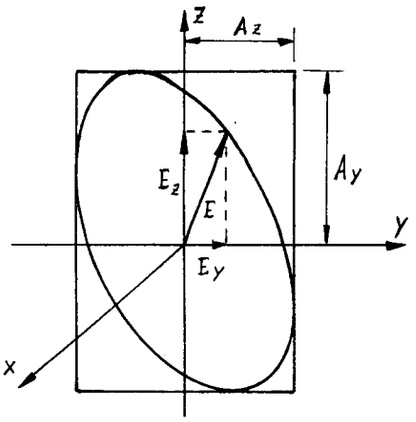
$$\boxed{\frac{E_z^2}{A_z^2} + \frac{E_y^2}{A_y^2} - \frac{2 E_y E_z}{A_y \cdot A_z} \cos\varphi = \sin^2\varphi} \quad (3)$$

Formula hau elipse batena dugu, eta uhinen gainezarmenak, beste "uhin eliptikoki polarizatu bat" eman digula esango dugu.

Dakigunez, $E^2 = E_y^2 + E_z^2$ eta I intentsitatea E^2-rekin proportzionala denez gero: uhin eliptikoki polarizatutako baten intentsitatea, bera osatzen duten bi uhin linealki polarizatuen intentsitateen batura izango da.

$$I = I_y + I_z$$

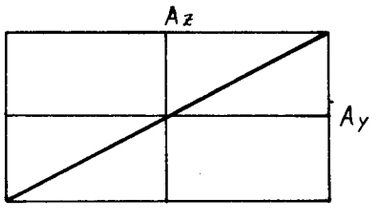
Bestalde, badakigu E_y eta E_z-ren balioak ezin izango direla anplitudeak baino handiagoak ($\pm A_y$ eta $\pm A_z$) ; eta, guzti hau kontutan hartzen dugularik, polarizazio eliptikoak honelako itxura izango du:



Ikus ditzagun (3) formularen zenbait berezitasun:

a) $\varphi = 0$ edo $2K\pi$ (π-ren multiplo parea denean):

Orduan, $\left(\frac{E_y}{A_y} - \frac{E_z}{A_z}\right)^2 = 0$ eta: $\boxed{\frac{E_y}{A_y} = \frac{E_z}{A_z}}$

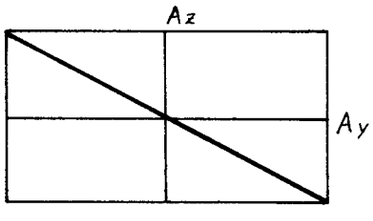


Ekuazio honek zuzen bat irudikatzen digu. Uhina linealki polarizatua egongo da, eta bektore optikoaren direkzioa lehen eta hirugarren koadranteetatik pasatzen den diagonalarena izango da.

b) $\varphi = \pi$ edo $(2K+1)\pi$ (π-ren multiplo bakoitia denean):

Orduan:

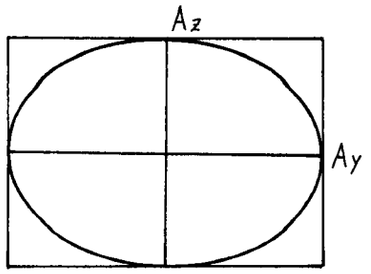
$\left(\frac{E_y}{A_y} + \frac{E_z}{A_z}\right)^2 = 0$ eta: $\boxed{\frac{E_y}{A_y} = -\frac{E_z}{A_z}}$



Uhina, linealki polarizatua egongo da. Bektore optikoaren direkzioa, bigarren eta laugarren koadranteko diagonalarena izango da.

c) $\varphi = (2k+1)\pi/2$ ($\pi/2$-ren multiplo ezparea):

Orduan: $\boxed{\frac{E_y^2}{A_y^2} + \frac{E_z^2}{A_z^2} = 1}$ honek zera esan nahi du:



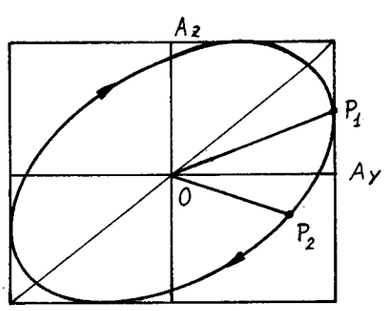
Kasu honetan, irudia, elipse bat izango da. Bere ardatzak, Y eta Z ardatzen direkziotan izango dira. $A_y = A_z$ denean zirkulu bat izango dugu, eta uhina "zirkularki polarizatua" dagoela esango da.

Defini dezagun orain bektore optiko baten biraketa-zentzua. Hau egiteko, har ditzagun t'-ren bi balio: t'=0 eta t' = τ. Bi denbora hauentzako, OP_1 eta OP_2 zuzenkiak definituko ditugu. (1) eta (2) ekuazioak t'-ren balioekin perturbazioaren balio batzuk emango dizkigu:

$t'=0 \quad E_y = A_y \quad$ eta $\quad E_z = A_z \cdot \cos\varphi$

$t'=\tau \quad E_y = A_y \cdot \cos(\omega\tau) \quad$ eta $\quad E_z = A_z \cdot \cos(\varphi + \omega\tau)$

Berehala ikus dezakegunez, kosinuaren balioa 0 eta π-ren artean dagoenean, funtzio osoa txikiago egingo da. Aldiz, π eta 2π-ren artean dagoenean, funtzioa handitu egingo da.



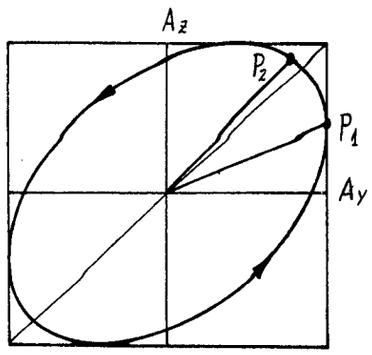
Erlojuaren direkzioan doan biraketa-zentzu honi positiboa deritzo

Desberdintza hau betetzen denean: $0 < \varphi < \pi \qquad (E_z)_{t'=0} > (E_z)_{t'=\tau}$

P_2, P_1 baino txikiagoa denean, uhina, positiboki polarizatua dagoela esango dugu.

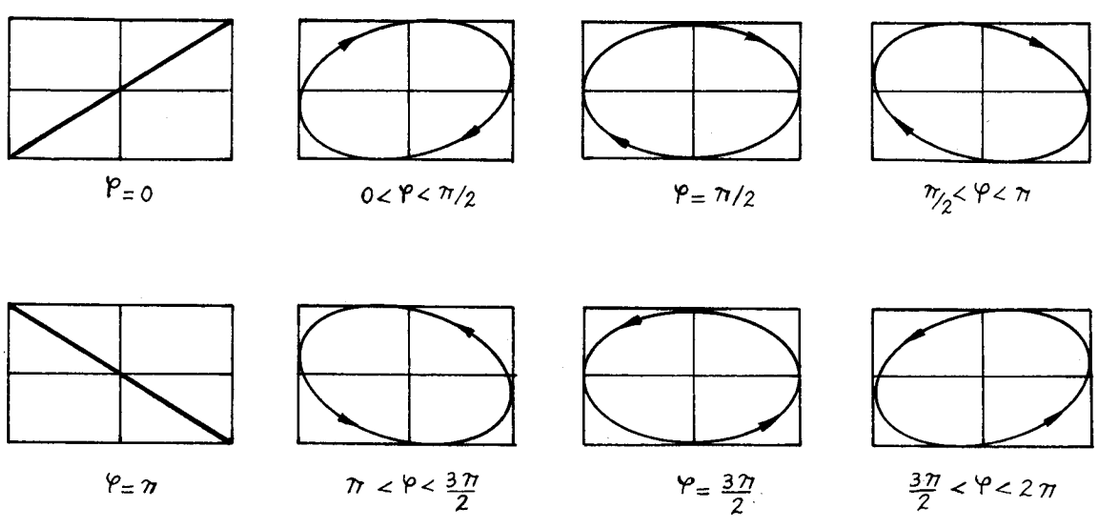
Beste desberdintza hau betetzen bada:

$$\pi < \varphi < 2\pi \qquad (E_z)_{t'=0} < (E_z)_{t'=\tau}$$



Erlojuaren direkzioaren aurka doan biraketa-zentzua, negatiboa.

Hona hemen kasu orokor edozein batean agertuko zaizkigun polarizazio-irudiak.Goian biraketa-zentzu positibokoak,eta azpian, negatibokoak.



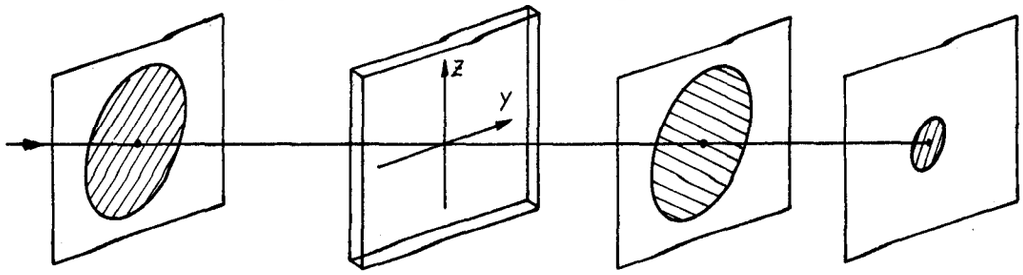
8.3. OINARRIZKO PROPIETATE OPTIKOAK,INGURUNE ANISOTROPIKOETAN

Orain arte medio isotropikoak -hots, direkzio guztietan propietate berdinak dituztenak- ikusi ditugu.Baina, kristal askotan,propietate optikoak aldatu egiten dira direkzioarekin.Hau dela eta, kristal horietan,birrefringentzia deritzan fenomenoa ikus daiteke.Azal dezagun argiro,fenomeno hau.

Eman dezagun polaroskopio batera argi monokromatikoa bidaltzen dugula,eta bigarren xaflatik ateratzen den argia,analisatzailea biraarazia,iluntzen dugula.Hau gertatzen bada,polarizatzaileak eta analisatzaileak beren transmisio-ardatzak elkartzutak izango dituzte.

Sar dezagun bi xafla horien artean beste xafla birrefringente bat. Berehala, atzean ipinitako pantaila batean puntu argitsua agertuko da.Hau lortu ondoren, nahiz eta analisatzailea biratu,ez dugu puntu ilunik lortuko.

Saiakuntza honek hauxe esan nahi du: xafla birrefringenteetatik ateratzen den argia ez dela linealki polarizatua.

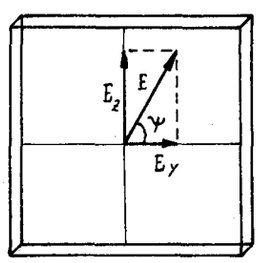


Polarizatzailea Kr. birrefringentea Analisatzailea Pantaila.

Esan duguna frogatu ahal izateko,beste saiakuntza bat egingo dugu:

Zegoen tokitik xafla birrefringentea kendu,eta berehala analisatzailea biraarazten dugularik,pantailan ilunaldiak agertuko zaizkigu.

Marraz ditzagun xafla birrefringente baten X eta Z ardatzak,eta ikus dezagun zein propietate bete beharko dituzten.



xafla birrefringentea

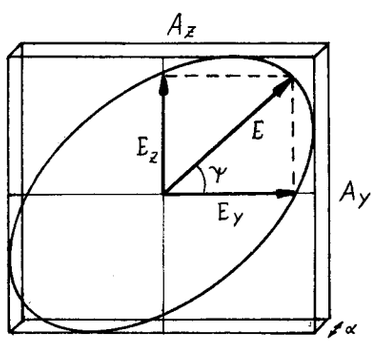
Uhin linealki polarizatua horietariko direkzio batean heltzen bada, kristaleraino,ateratzerakoan ere linealki polarizatua irtengo da.Bektore optikoaren direkzioa ere berdina izango da.Hots,uhinaren polarizazioa ez da aldatuko.

Ikus dezagun orain beste edozein direkziotan datorren uhin linealki polarizatu bati zer gertatzen zaion.E_y eta E_z osagaiak berdinak izango balira,irteerako uhina linealki polarizatuta aterako litzateke,bere bektore optikoaren direkzioa berdina izanik.Baina,esperientziak esaten digunez,hau ez da betetzen,eta,hain zuzen uhinak ez dira Y eta Z direkzioetan berdin propagatzen.

Honen ondorioa garrantzitsua da:material anisotropikoetan,argiaren abiadura ez da berdina direkzio guztietan.

8.4. ARGI ZIRKULARKI ETA ELIPTIKOKI POLARIZATUAREN LORBIDEA

Ikus dezagun orain, uhin linealki polarizatua nola aldatzen den xafla birrefringentea zeharkatzerakoan.Horretarako,marraz ditzagun Y eta Z ardatzak.Bitez n_y eta n_z errefrakzio-indizeak Y eta Z direkzioetan.Beraz, propagazio-abiadurak hauexek izango ditugu: c/n_y eta c/n_z



Eman dezagun E bektorea linealki polarizatuta dagoen uhin baten bektore optikoa dela,eta φ angelu bat osatzen duela Y ardatzarekin.

E bektore hori beste E_y eta E_z bi bektoretan deskonposa dezakegu. Azken hauen formulak horrelakoak direla:

$$E_y = A_y \cdot \cos 2\pi t/T \qquad A_y = A \cdot \cos\varphi$$

hemen:

$$E_z = A_z \cdot \cos 2\pi t/T \qquad A_z = A \cdot \sin\varphi$$

Xaflaren lodiera d dela kontutan hartzen badugu, uhinak berau zeharkatzeko beharko dituen denborak $d.n_y/c$ et $d.n_z/c$ izango dira banan bana,Y eta Z direkziotan.

Fase-desberdintasun hau kontutan hartzen:

$$E_y = A_y \cdot \cos \frac{2\pi}{T} (t - d \cdot n_y/c)$$

$$E_z = A_z \cdot \cos \frac{2\pi}{T} (t - d \cdot n_z/c)$$

Dei diezaiogun φ' fase-diferentzia horri, eta bedi bere balioa:

$$\varphi' = \varphi_y - \varphi_z$$

Perturbazioen formuletatik, ondorio honetara iritsiko ginateke berehala:

$$\varphi_y = \frac{-2\pi}{T} \cdot \frac{d \cdot n_y}{c} = \frac{-2\pi \cdot d \cdot n_y}{\lambda_0}$$

$$\varphi_z = \frac{-2\pi}{T} \cdot \frac{d \cdot n_z}{c} = \frac{-2\pi \cdot d \cdot n_z}{\lambda_0}$$

(komenigarria litzateke, $\lambda_0 = c.T$ dela gogoratzea)

Eta, guzti honen ondorio bezala:

$$\boxed{\varphi' = \frac{2\pi d}{\lambda_0} (n_z - n_y)}$$

Hauxe dugu, hain zuzen, uhin eliptikoki polarizatu baten fase-aldaketa.

Bukatzerako, azter dezagun interes bereziko zenbait polarizazio:

a) $d(n_z - n_y) = \frac{\lambda_0}{4}$ denean: baldintza hau betetzen duen xaflari, "uhin-laurdeneko xafla" deritzo. φ-ren balioa:

$$\varphi' = \frac{2\pi}{\lambda_0} \cdot \frac{\lambda_0}{4} = \pi/2$$

Baina, lehenago, φ horrela definitu dugu: $\varphi = \varphi_z - \varphi_y$; hots: $\varphi' = -\varphi$

Eta:

$$\varphi = 3\pi/2 = -\tfrac{1}{2}\pi$$

Ikus dezagun nolako uhina aterako zaigun horrelako xafla batetik:

$\varphi = 3\pi/2$ delako, uhina eliptikoki polarizatua egongo da (begira lehen emandako irudiak), eta bere ardatzak Y eta Z ardatzak izango dira. $\psi = 45°$ izango balitz, Ay = Az izango litzateke; eta, noski, argia zirkularki polarizatua.

b) $d(n_z - n_y) = \lambda_0/2$ denean: xaflari, "uhin-erdiko xafla" deritzo. Kasu honetan, $\varphi = \pi$ izango da, lehentxoago egindako arrazonamenduaren ildo beretik jarraituz, uhina linealki polarizatua izango dugu, bektore optikoaren direkzioa, bigarren eta laugarren koadranteetatik pasatzen den diago-

nalarena delarik.

c) $d(n_z - n_y) = 3\lambda_o/4$ denean: Kasu honetan, $\varphi = \pi/2$ izango da.

Hemen, kasu orokorrenean, uhin eliptikoki polarizatuak izango ditugu, eta beren ardatzak Y eta Z direkzioetan joango dira.

Kasu berezi batean, γ =45°denean, eta $A_y = A_z$ direnean, argi zirkularki polarizatua izango genuke.

d) $d(n_z - n_y) = \lambda_o$ denean: Hemen $\varphi = 0$ izango dugu. Hots, ateratzen den uhina sartzen dena bezalaxe linealki polarizatua izango litzateke, eta bektore optikoaren direkzioa lehen eta hirugarren koadranteetako diagonalarekin bat etorriko litzateke.