

udako
euskal
unibertsitatea

ELEKTROMAGNETIKA (II)

IRUINEA 1980



Banco de Vizcayak

BABESTUTAKO ARGITARAPENA

EDICION PATROCINADA POR EL

Banco de Vizcaya



ELEKTROMAGNETIKA (II)

PRESTATZAILE: LUIS M.BANDRES

HITZAURREA

Lan hau Donostiako Kimika Fakultatean egin da 1979-80 ikasturtean barrena, eta iaz hasi eta argitaratutako lanaren jarraipena da.

Kimika saileko hirugarren ikasturtean, beste gairen artean Elektrika eta Optika dago eta Fakultate honetan 1976-77 ikasturtetik aurrera Euskaraz ikas daiteke hori. Elektrikako ikasgai horiek, hain zuzen, argitaratu ziren.

Hemen, berriz, Doktoratu maila emateko ikasgai batzuk azaltzen dira. Ikasgai hauek jarraitzeko Elektrikaren oinarrizko ezaguerak argi eta garbi golkoratuak izan behar ditugu. Dena dela, Doktoraturako kurtso hau kimikarientzat denez gero, gaien sakontasun-maila ez da oso gogorra.

Halaz guztiz ere, hemengo zenbait ikasgai ikusi baino lehen "Elektromagnetika" liburuko zenbait ikasgai berrikustea beharrezkoa da, hala nola:

Hemengo lehenengoa ikusi aurretik, Elektromagnetikako laugarrena
Hemengo bigarrenengoa ikusi aurretik, Elektromagnetikako zortzigarrena
Hemengo laugarrena ikusi aurretik, Elektromagnetikako hamaikagarrena

AURKIRIDEA

1.KAPITULUA: DIELEKTRIKOEN TEORIA MIKROSKOPIKOA

- 1.1 SARRERA
- 1.2 DIELEKTRIKO BATEN EREMU MOLEKULARRA
- 1.3 DIPOLO INDUZITUAK, EREDU ERRAZ BAT
- 1.4 MOLEKULA POLARRAK, LANGEVIN-DEBYE-REN EKUAZIOA
- 1.5 POLARIZAZIO IRAUNKORRA, FERROELEKTRIKA

2.KAPITULUA: MATERIAREN BEREZITASUN MAGNETIKOEN TEORIA MIKROSKOPIKOA

- 2.1 MATERIAREN BARNEKO EREMU MOLEKULARRA
- 2.2 DIAMAGNETISMOAREN OINARRIA
- 2.3 PARAMAGNETISMOAREN OINARRIAK
- 2.4
- 2.5 BARRUTI FERROMAGNETIKOAK

3.KAPITULUA: PLASMAREN FISIKA

- 3.1 SARRERA
- 3.2 PLASMA BATEN NEUTROTASUN ELEKTRIKOA
- 3.3 ZATIKIEN ORBITAK ETA PLASMA BATEKO DESPLAZAMENDUAK
- 3.4 ISPILU MAGNETIKOAK
- 3.5 EKUAZIO HIDROMAGNETIKOAK
- 3.6 ESTRUKZIOAREN EFEKTUA
- 3.7 PLASMAREN OSZILAZIOAK ETA UHIN-HIGIDURA

4.KAPITULUA: MAXWELL-EN EKUAZIOAK

- 4.1 SARRERA
- 4.2 MAXWELL-EN EKUAZIOAK ERA INTEGRALEAN
- 4.3 UHINAREN EKUAZIOAREN ASKAPENA
- 4.4 ITURRIAK DAUDEN KASUKO UHIN-EKUAZIOAK

DIELEKTRIKOEN TEORIA MIKROSKOPIKOA1.1 SARRERA

Gehienetan polarizazio elektrikoa ikusgune makroskopiko batetik begiratzen da; orduan, polarizazio-efektua konstante dielektriko baten bidez adieraz daiteke. Hori dela eta, eremu elektrikoaren balioa karga libreen funtzio bat bezala azal daiteke. Horrela es-tudiatzen denean, polarizazioa adierazteko behin eta berriz die-lektrikoaren molekulak aipatzen dira, baina ez da benetako mate-rialaren estudio mikroskopiko bat egiten, baizik eta, lehen esan dugun bezala, ikusgunea makroskopikoa da. Hemen benetako ikusgu-ne mikroskopikoa eskuratu nahi dugu, eta bere bidez dielektriko-aren izaera molekularra aztertu; honela, molekularen polarizazioa sortarazten duen eremu elektrikoaren eta eremu elektriko makros-kopikoaren artean dagoen erlazioa aurkituko dugu.

Beste aldetik, eredu molekular erraz bat erabiliz material die-lektriko gehienek jokaera lineala ulertu daiteke.

1.2 DIELEKTRIKO BATEN EREMU MOLEKULARRA

Dielektriko bateko molekula baten polarizazioa sortarazten duen eremu elektrikoari "eremu molekularra" deritzogu eta $\vec{E}_m$ batez idatziko dugu. Dielektrikoaren puntu batetan dagoen eremu mole-kularren sortzaileak hauek dira: kanpo eremu osoa eta puntuan dagoen molekula ez ezik polarizatuta dauden gainontzeko moleku-la guztien eremua. $\vec{E}_m$ eremu hau eta $\vec{E}$ eremu makroskopikoa ez dira berdinak izango. Bigarren honetan puntuan dagoen molekula-ren eragipena ere kontutan hartu behar da.

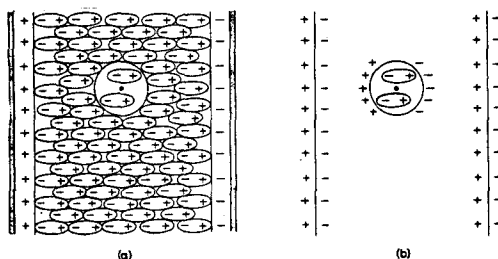
Puntu batetan eremu molekularra honela aurki daiteke:

Ken dezagun puntuan zentratuta dagoen dielektrikoazko esfera txiki bat, eta gainontzeko dielektriko guztia jarrai bat beza-la kontsidera dezagun; hau da, ikusgune makroskopiko batetik jo dezagun. Puntuari dagokion molekula ez ezik eraman dezagun, molekulaz molekula kendu dugun dielektrikoa, hutsunera. Jartzen

ari garen molekulak ez dira jarrai bat bezala kontsideratu behar,baizik eta dipolo diskretuak bezala.

Aipatu dugun metodoa baliagarria izan dadin bere bidez lortutako emaitzak eta kontsideratzen den hutsunearen handierak elkarren independenteak izan behar dute;hau, zenbait baldintza bezte gero horrela dela ikusiko dugu.

1.a irudian ikusten den bezala,sar dezagun dielektriko bat kontzako zeinuko kargaz kargaturik dauden bi xafla paraleloen artean.Tarte horretan dagoen eremua uniforme dela onartuko dugu,horretarako dielektrikoa mehea dela onartu behar da.Dielektrikoa polarizatu egingo zaigu.



1. Irudia

Polarizazioa,eskala makroskopiko batetan,uniformea dela suposatuko dugu.Hots, dib $P=0$, eta baita ere P bektore hau bera sortarazten duen eremuarekiko paraleloa dela.Hutsunetik kanpoko dielektriko osoa karga sorreko sistema batez ordezka daiteke,ikus 1.b irudia;beraz,hutsunearen zentruan dagoen eremu elektrikoa honela adieraz dezakegu:

$$\vec{E}_m = \vec{E}_x + \vec{E}_d + \vec{E}_s + \vec{E}'$$

Hemen zera dugu:

- $\vec{E}_x$: bi xafla kargatuen eremu elektriko primarioa
- $\vec{E}_d$: dielektrikoaren kanpoko gainazaletako karga sorrak sortarazten duen eremu despolarizatzailea
- $\vec{E}_s$: hutsunearen gainazalean dagoen karga sorraren eremua
- $\vec{E}'$: S-ren barruan dauden dipolo guztien eremua.

Hor dauzkagu bi xafra paraleloak, beren artean dagoen tartearen dimentsioarekin alderatuz, oso handiak badira, $E_x = \frac{1}{\epsilon_0} \sigma$ dela gauza jakina da (σ gainazal-dentsitatea izanik). Eredu despolarizatzailearen kausa, bi plano kargatu paraleloak direla kontsidera daiteke. Eredu honen dentsitatea izango litzateke ($\sigma = \pm P_m = \pm P$ izanik)

Orduan :

$$\vec{E}_d = - \frac{1}{\epsilon_0} \vec{P} \quad (2)$$

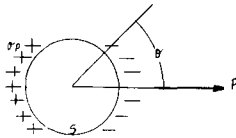
Bedi $\vec{E}$ dielektrikoaren barruan dagoen eremu elektriko makroskopikoa. Huts/d-elektriko banatze-gainazala zeharkatzean $\vec{D}$ desplazamendu elektrikoaren osagai normala jarraia denez gero eta dielektrikoaren ondoan dagoen hutsean $\vec{D} = \epsilon_0 \cdot \vec{E}$ delako, zera daukagu:

$$\epsilon_0 \vec{E}_x = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \quad (3)$$

Ikusitako hiru ekuazio hauetatik beste hau atera daiteke

$$\vec{E}_m = \vec{E} + \vec{E}_s + \vec{E}' \quad (4)$$

ekuazio honek materialean dauden eremu makroskopikoa eta eremu molekularra erlazionatzen ditu. Ondorio hau aski orokorra da eta ez dago irudian ikusitako egitura geometrikoekin mugatuta.



2. Irudia

$\vec{E}_s$, S gainazal esferikoan dagoen karga sorraren dentsitate batetik dator, $\sigma_p = P_m$ dentsitate batetik, hain zuzen. 2. irudian azaltzen den bezala, koordenatu esferikoak erabiliz eta direkzio polarra bezala $\vec{P}$ -rena hartuz, zera dugu:

$$d\vec{E}_s = \frac{-P \cos \theta}{4\pi \epsilon_0 r^3} \cdot \vec{r} \, ds \quad (5)$$

$\vec{P}$, gainazaleetik esferaren zentrura doan bektorea izanik. Simetria dela eta $\vec{E}_s$ aurkitzeko $\vec{P}$ -ren direkzioa duen $d\vec{E}_s$ -ren osagaia soilik hartu behar dugu gogotan, eta $dS = r^2 \sin \theta \cdot d\theta \cdot d\phi$ denez gero,

$$\vec{E}_s = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \vec{P} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi \cos^2 \theta \cdot \sin \theta \cdot d\theta = \frac{1}{3\epsilon_0} \vec{P} \quad (6)$$

Azkenik, $\vec{E}$, aurkitu behar dugu, hots, S hutsunearen barruan dauden dipolo elektrikoek sortarazten duena. Kasu garrantzitsu askotan $\vec{E}'$ hau zero da: hutsunean dipolo asko baldin bada, paraleloki orientatuta izanik ere beren posizioak azalean kokaturik badaude eta ez bada ere laziorik dipoloen posizioen artean, orduan $\vec{E}' = 0$ dugu. Egoera hau lortzen da likido nahiz gasen kasu gehienetan.

Hutsuneko dipoloak kristal kubiko baten posizio atomiko erregularretan kokaturik badaude (simetria handienetako kristalak sistema kubikokoak dira) beste horrenbeste daukagu; hots, $\vec{E}' = 0$

Orokortasun guztiarekin $\vec{E}'$ ez dugu zero kontsideratu behar eta materialak molekula desberdin berezi batzuk baditu posizio molekular desberdinetan $\vec{E}'$ diferentea izan daiteke. Hau da, hain zuzen ere, kaltzitararen jokaera anisotropikoaren kausa adibidez. Halaz guztiz ere, gure hemengo helburua ez da material anisotropikoentzat teoria bat eraikitzea; horregatik, $\vec{E}' = 0$ kasua soilik estudiantuko dugu hemen. Hori dela eta, 4. ekuazioa honela bilakatzen zaigu:

$$\vec{E}_m = \vec{E} = \frac{1}{3\epsilon_0} \vec{P} \quad (7)$$

Ondorio honetara zuzenki hel daiteke aurretik ikusitako metodoaren bidez; horretarako hutsune esferikoaren ordezkari molekula bakar bat kendu beharko genuke. Baina hutsunea txiki egia izango litzateke, eta gainontzeko dielektrikoaren ordezkari karga sorraren sistema bat ipintzea ez litzateke justifikagarria izango.

Molekula baten bere polarizatasuna zera da: Eremu polarizatzaile unitate bakoitzeko dagoen momentu dipolarra; beste hitzez,

$$\vec{p}_m = \alpha \vec{E}_m \quad (8)$$

Bolumen-unitatean N molekula baldin badaude, polarizazioa zera da: $\vec{P} = N\vec{p}_m$; eta (7). eta (8). ekuazioetatik, orduan, zera eskuratzeko da:

$$\bar{P} = N \alpha \left(\bar{E} + \frac{1}{3\epsilon_0} \bar{P} \right) \quad (9)$$

Ekuazio hau K konstante dielektrikoaren bidez eman daiteke.

$P = (K-1)\epsilon_0 E$ kontutan hartzen dagugu, (9).ekuazioa honela daukagu,

$$\alpha = \frac{3\epsilon_0}{N} \frac{K-1}{k+2} \quad (10)$$

Ekuazio hau Clausius-Mossotti-ren ekuazioa dugu, eta berezitasun molekular bat ematen digu: hots, polarizagarritasun molekularra, bide makroskopikoz aurki daitekeen zenbait kantitaterean funtziotan.

1.3 DIPOLU INDUZITIBAK, EREDU ERRAZ BAT

Dielektriko baten molekulak "polarrrak" eta "ez-polarrrak" bezala sailka daitezke. Molekula polar bat zera da: $\vec{E}_m$ eremu polarizatzailea izan ez arren molekulak momentu dipolar iraunkor bat duen kasukoa. Piska bat aurreago molekula ahauek kanpoko eremu baten eragipenean jartzean duten jokaera estudiatuko dugu, baina orain egoera errazago bati begiratuko diogu: hots, molekula ez-polarren jokaera aztertuko da. Hauetan, karga positiboak eta negatiboak "grabitate-zentruak" puntu berean daude, egoera normalean, noski. Molekula simetrikoak (hala nola H_2 , N_2 , eta O_2) edo monoatomikoak (hala nola H_e , N_e eta A) horietakoak ditugu.

Molekula ez-polar bat eremu elektriko baten eragipenean jartzean zera gertatzen da: karga positiboak eta negatiboak erlatiboki desplazatu egiten dira, eta honela azaltzen diren dipoloak "dipolo induzituak" ditugu. Molekula ez-polarren kasu errazena atomo neutro bakar baten kasua dugu. Orduan, atomoarentzat eredu klasiko erraz bat eraiki daiteke eta eredutik momentu dipolar induzituarentzat espresio bat atera, eta beraz bere polarizagarritasunarentzat. Eredua, nahiz eta molekula monoatomikorentzat egina egon, molekula diatomiko simetrikoen kasuan erabil daiteke. Horretarako molekularen atomo bakoitzarekin erabiliko dugun berekasa eta norberaren polarizagarritasun atomikoak aterako ditugu horrela. Hauen batura polarizagarritasun molekularra izango da.

Atomo batetan positiboki kargatuta dagoen nukleo guztiz txiki

bat izango dugu, eta bere inguruan elektroiak jira-biraka arituko dira. Elektroiak beren orbita une oso txiki batetan betetzen duten 10^{-15} segundotan gutxi gora-behera. Beraz, baliokidea den atomo "estatikoan" karga elektroniko bakoitza bere orbitan hedatzen da. Nahiz eta adierazpen hau aski zuzena izan, Mekanika Kuantikoak larregi dela esaten digu; elektroiak, berez, ez daude orbitan kokaturik, baizik eta atomoaren edozein partetan izateko probabilitate finitu bat daukate. Beraz, atomoak eremu elektrostatikotik bati edo oso geldirik aldatzen den eremu elektriko bati ematen dion erantzuna honela estudia daiteke: lehenbizi elektroia, atomoan, bere orbitan hedatuta bezala kontsideratuko dugu, eta gero orbita bakoitza bolumen atomikoaren parte handi batetan hedatuta. Konkretuki, esandako egoerarekin ados dagoen atomoaren eredu klasiko erraz bat ondoko hau da: karga positibo puntual bat (nukleoa) eta bere inguruan karga negatiboko hodei esferikoki simetrikoa; hodei honetan dentsitatea R_0 erradio atomikoraino ia uniforme da eta erradio handiagoetan zero dugu.

Kalkula dezagun atomo horren polarizagarritasuna. Nukleoak $z \cdot e$ karga izango du, hemen e karga elektronikoaren balore absolutua da eta Z zenbaki atomikoa. Atomo osoa elektrikotasunaren aldetik neutroa denez gero, hodei elektronikoaren karga $-Z \cdot e$ dugu. Atomoa $\vec{E}_m$ eremu polarizatzaile baten eragipenean jartzen badugu, nukleoa karga-hodeiaren zentruarekiko x distantzia bat desplazatuko da. Desplazamendu hau $\vec{E}_m$ -ren direkzioan gertatuko da. Suposa dezagun desplazamendua gertatzen ari den bitartean karga-hodeia zurrunki higitzen dela (hots, eremu polarizatzaileak ez duela hodeia desitxuratzen).

x desplazamendua, nukleoak orekarako behar dituen indarretatik atera daiteke: $z \cdot e \cdot \vec{E}_m$ baloreko indar bat nukleotik ari da eremuaren norantzan, eta nukleoaren eta hodeiaren arteko indarrak hasierako egitura berreskuratu nahi du. Gauss-en legearen arabera, nukleoa erakartzen duen karga negatiboa x erradioko esferaen barruan dagoen hodeiaren parte da, eta hodeiaren dentsitate elektronikoa uniforme bada, karga hau
$$\frac{Z \cdot e \cdot x^3}{R_0^3}$$
 da.

Beraz,

$$\frac{(Ze) (Z.e x^3 / R_o^3)}{4 \pi \epsilon_o x^2} = Z.e. \vec{E}_m \quad (11)$$

edo

$$Z.e.x = 4 \pi \epsilon_o R_o^3 \vec{E}_m \quad (12)$$

Prozesu honetan eratutako dipolo atomikoa $\vec{P}_m = Ze\vec{x}$ denez gero, azken ekuazioa(8.)arekin aldera daiteke.Orduan:

$$\alpha = 4 \pi \epsilon_o R_o^3 \quad (13)$$

Orain esan dugun eredu atomikoaren zuzentasuna epaitzeko bere bidez lortutako ondorioak eta beste bide batzuren bidez lortutakoak aldera daitezke.(13).ekuazioa Clausius-Mossotti-ren ekuazioarekin erlaziona dezakegu eta α ezabatu;sortzen den ekuazioan R_o atera daiteke,eta orduan erradio atomikoa esperimentu bidez lor daitezkeen beste kantitatereen bitatez lortuko genuke.Honela ateratako R_o -ren balioa eta beste esperimentuen bitartez lortutakoak aski ados daude:eredua erabilgarria den kasuetan,noski. R_o angstrom batekoa da (10^{-10} m)gutxi gora-behera.

(13).ekuazioaren bidez ateratzen dugun polarizagarritasuna konstante bat da eta ez dauka eremu polarizatzailearekin zer-ikusirik. Beraz,(10).ekuazioa dela eta K.Konstante bat izango da;hots,gure dielektrikoa lineala dela adierazten du.

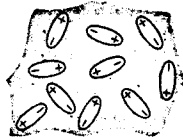
1.4 MOLEKULA POLARRAK.LANGEVIN-DEBYE-REN EKUAZIOA

Esan dugun bezala, molekula gpolar batek momentu dipolar iraunkor bat dauka.Molekula polar bat gutxienez bi atomo-mota desberdinez osaturik dago: molekula eratzerakoan elektroi batzuk guztiz edo partzialki atomo-mota batetik bestera pasatzen dira:hori dela medio sortutako egitura elektronikoan molekularen karga negatiboaren eta positiboaren zentruak ez daude puntu berean.Kanpoko eremu bat ez badago,dielektriko polarrezko puska makroskopiko bat ez da polarizatzen,dipolo guztiak estokastikoki orientatuta daudelako(ikus 3.irudia).Polarizazioa honela definituta dago:

$$\vec{P} = \frac{1}{\Delta V} \sum \vec{P}_m \quad (14)$$

eta batukariak bolumenaren molekula guztiak hartzen ditu. $\vec{P}_m$ horiek zoriz norabidatzen direnean batura zero da.

Dielektriko polarra eremu elektriko baten eragipenean jartzen badugu, dipolo bakoitzak indar bat jasaten du eta hau dela eta eremuan orientatzen saiatzen dira.



3. Irudia

Eremua oso kementsua bada dipoloak guztiz orientatuak izango dira, eta orduan, polarizazioak bere asetasun-balioa lortzen du.

$$\vec{P}_s = N \vec{P}_m \quad (15)$$

N: bolumen-unitatean dagoen molekula-kopurua. Orientatze-efektu honetaz gainera dipoloren indukzio bat izango dugu. Oraingoz bigarren alderdi hau utzi egingo dugu, baina bere efektua geroago kontutan hartuko dugu.

Ohizko eremu elektrikoaren balioetan dielektriko polar baten polarizazioa bere asetasun-balioetik oso urrun egoten da eta materialaren tenperatura altuago egiten bada polarizazioa txikiagotu egiten da. Lerrotatze dipolar osorik ezaren kausa molekulen energia termikoa da; energia hau orientazio dipolarrek zoriz ipintzen saiatzen da. Molekularen batazbesteko momentu dipolar eraginkorra kalkulatzeko Mekanika Estatistikoaren hastapen bat erabili behar dugu: honen arauera T tenperaturan W energia molekular berezia aurkitzeko dagoen probabilitatea (16). gaiarekin zuzenki proportzionala da.

$$e^{-w/kT} \quad (16)$$

Hemen, k Boltzmann-en konstantea dugu eta T tenperatura absolutua. Hemen ez dugu adierazpen hori aterako, baina W-k bere baitan energia potentziala eta zinetikoa daramala azpimarratu nahi dugu.

$\vec{E}_m$ eremu elektriko batetan dagoen P_o dipolo iraunkor baten energia potentziala zera da

$$W_p = -\vec{P}_o \cdot \vec{E}_m = -P_o E_m \cos \theta \quad (17)$$

θ , eremuak eta p_o artean osatzen den angelua izanik.

Energia zientiko molekularrak eremu elektriko baldintzaturik ez daudenez gero, kalkulu honetan abiadura-banaketa arbuia egin dezakegu. Dipolo molekular baten momentu dipolar eraginkorra eremuaren direkzioan duen bere osagaia da; hots, $p_o \cos \theta$. Eta kantitate horren batezbesteko balioa zera da

$$\langle P_o \cos \theta \rangle = \frac{\int P_o \cos \theta e^{P_o E_m \cos \theta / kT} d\Omega}{\int e^{P_o E_m \cos \theta / kT} d\Omega} \quad (18)$$

hemen, $d\Omega$ angelu solidoko elementu bat da, eta $2\pi \sin \theta d\theta$ -z ordeztu daiteke, θ -ren mugak 0 eta π izanik.

P_o, E_m eta kT integrazio-konstanteak direnez gero, integralak zuzenki egin daitezke. Hori egiteko zera definitzea komeni da:

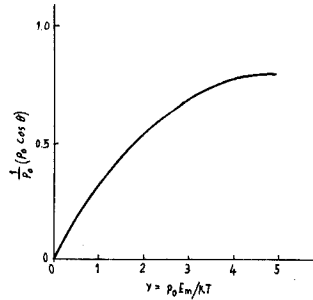
$$y = \frac{P_o E_m}{k T} \quad (19)$$

Orduan (18).ekuazioak hau ematen digu:

$$\langle P_o \cos \theta \rangle = P_o \left[\operatorname{ctg} h y - \frac{1}{y} \right] \quad (20)$$

eta honi Langevin-en formula deritzogu.

Funtzio hori, grafikoki, irudian azaltzen den bezalakoa da.



-10-

4. Irudia

Irudian ikusten denaren arabera, intentsitate handiko eremuetan asetasun-efektu bat agertzen da. Baina γ -ren balio txikietan grafikoa lineala da, eta ohizko tenperaturatan haxe da garrantzi handieneko parte. Temperatura gutxi gora-behera 250°K baino altuago denean, edozein eremu-intentsitatetan, nahiz eta materialaren erresistentzia dielektrikoarenetik hurbil egon material polar gehien p_0 dipolo molekularren momentuak $\gamma \ll 1$ egiten du. Beraz, molekula polarrak dituen materialak dielektrikoak gehienetan "linealak" dira.

Parte lineala garrantzitsuena denez gero ctg θ γ berredurazko serie batetan garatzea komeni da. Hori egin ondoren, eta (20) ekuazioa eramanik, haxe daukagu:

$$\langle p_0 \cos \theta \rangle \simeq \frac{1}{3} p_0 \gamma = \frac{p_0^2 E_m}{3 k T} \quad (21)$$

Batazbesteko momentu dipolar eraginkorra da; beraz, polarizazioa $P = N p_0 \cos \theta$ eta $\vec{E}_m$ -ren direkzioa duak. Hori dela eta, (21). ekuazioa honela idatz daiteke:

$$\frac{1}{N} \vec{P} = \frac{p_0^2}{e k T} \vec{E}_m \quad (22)$$

Ekuazio hau (8).arekin alderatu eta polarizagarritasuna atera dezakegu.

$$\alpha = \frac{p_0^2}{e k T} \quad (23)$$

Ondorio honetara momentu dipolar induzituak kontutan hartu gabe heldu gara eta berak, nolabait esateko, "orientazio bidezko polarizagarritasuna" adierazten digu. Lehengo galderan ikusitako dipolo

induzituek eta, nolabait esateko ere, α , "deformazio bidezko polarizagarritasun" bat sortarazten dute. Beraz, orokortasun guztiarekin, polarizagarritasun molekular osoa zera da:

$$\alpha = \alpha_0 + \frac{p_0^2}{3 k T} \quad (24)$$

honi Langevin-Debye-ren ekuazioa deritzogu eta egitura molekularrak ulertzeko oso garrantzitsua izan da.

1.5 POLARIZAZIO IRAUNKORRA, FERROELEKTRIKA

Molekulen polarizazioaren kausa $\vec{E}_m$ eremu molekularra dela orain baino lehen ikusia dugu. $\vec{E}$ eremu makroskopikoaren eta $\vec{E}_m$ -ren arteko erlazioa (7). ekuazioan ikusi genuen. Gehienetan polarizazioa $\vec{E}$ -rekin zuzenki proportzionala da, eta $\vec{E}$ zerorantz joaterakoan $\vec{E}_m$ hutsa da. Baina zenbait baldintzapetan (7). ekuazioa polarizazio iraunkor (edo berezko) batekin elkargarria da. $\vec{E}$ zero denean:

$$\vec{E}_m = \frac{1}{3 \epsilon_0} \vec{P}_0 \quad (25)$$

beste hitzez, $\vec{P}_0$ polarizazio bat baldin badago, molekula eremu elektriko batetan egongo da, eta eremu horrek molekula polarizatu nahi izango du. Beraz, eremu polarizatzaile bat dago; baina, eremu horrek P_0 ez den polarizazio bat sortarazten badu, soluzioa ez da autoelkargarria. Orduan, bolumen-unitatean dagoen molekula-kopurua N bada:

$$\vec{P}_0 = N \alpha \vec{E}_m = \frac{N \alpha}{3 \epsilon_0} \vec{P}_0 \quad (26)$$

eta hau betetzeko

$$\vec{P}_0 = 0 \quad (27)$$

edo

$$\frac{N \alpha}{3 \epsilon_0} = 1 \quad (28)$$

Beraz, polarizazio iraunkor bat izateko baldintza (28). ekuazioa da.

Zehaztasun guztiaz hitzegiteko (28). ekuazioa egoera berezi batetarako atara dugu: materiala molekula-mota bakar batez osaturik dagoenerako eta $\vec{E}' = 0$ denerako. Kasu orokorrean (28). ekuazioa baka-

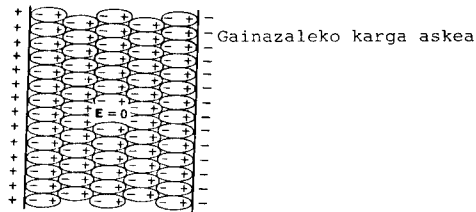
rraren ordeztu baterako ekuazioen sistema batez ordeztu da. Baina hemen kasu arruntena bakarrik estudiantu dugu, eta ez dugu hori kontutan hartu.

Material gehienetan $\frac{N\alpha}{3\epsilon_0}$ bat baino txikiagoa da eta ohiko jokatze dielektrikoa dugu. Baina, solido kristalino batzuetan (28). baldintza betetzen da. Material hauei "ferroelektrikoak" deritzugu beren berezitasun elektrikoak eta material ferromagnetikoen berezitasun magnetikoak antzerakoak direlako. Material ferroelektriko ezagunena bario titanatoa dugu, hots, BaTiO_3 ; honek 120°C baino apalagoan tenperaturan berezko momentu dipolar bat dauka. Tenperatura hori material horren "Curie puntua" dugu.

Material ferroelektriko baten egoera polarizatu aski iraunkorra da eta denbora luzetan horrela jarrai dezake. Gertaera hori harri-garri samarra izan daiteke, material polarizatuak bere eremu depolarizatzailea jasaten bait du eta materialaren itxura geometrikoa dela eta eremu hori handia izan bait daiteke. Eremu hau oso handia da materialaren itxura xafra planoaren antzekoa denean eta polarizazio-direkzioa aurpegiekiko normala denean. Xafren aurpegien dimentsioak beren lodierarekin alderatuta oso handiak direnean, $\vec{E}_d$ eremu hori:

$$\vec{E}_d = - \frac{1}{\epsilon_0} \vec{P} \quad (29)$$

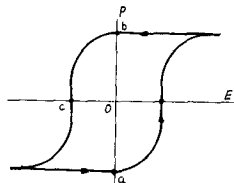
dela orain baino lehen ikusia dugu.



5. Irudia: Material ferroelektriko baten puska polarizatu bat

Material ferroelektriko polarizatu baten egonkortasun handiaren kausa zera da: materialaren gainean benetan "ez" dago eremu despolariizatzailea, nahiz eta itxura geometrikoa xafila batena izan. Potentzial-diferentzia handia duten bi xafila eroale paraleloren artean materiala ipintzerakoan, polarizatu egiten da. Orduan xafilen karga libreak, gainazaleko karga sorren bidez, poliki neutralizatzen dira, ohizko edozein dielektriko baten kasuan bezala. Orain zirkuitulabur baten bidez xafila paraleloak potentziak berdinean jartzen baditugu, ferroelektrikoaren egoera polarizatua oraindik energetikoki lagungarria da; karga libreak lehen zegoen tokian iraungo du eta hein batetan karga sorra neutralizatuko du. Egoera hau ikusten da gutxi gora-behera, lehengo irudian: karga librearen karga sorrak mantentzen du bere lekuan. Ferroelektrikoaren barnean eremu makroskopikoa zero da; horrez gainera kanpoko eremu elektrikoa hutsa da, eta material polarizatuaren eta polarizatu gabeko ohizko material dielektrikoaren artean bereiztea oso zaila.

Polarizatuta dagoen ferroelektrikoa inguratzen duten xaflei kontrako zeinu potentzial-diferentzia handi bat jartzen badiegu, materialak bere polarizazioa aldatuko du eta kanpoko iturritik xafletara kontrako zeinuko karga libreak joango dira; karga hauek ordurarteko karga librearen neutralizatuko dute, orobat sortutako karga sor berriak. Beraz, bi xafila paraleloen artean dagoen material ferroelektrikoa memoria baten oinarritzko elementu bat erabili daiteke, $+$ edo $-$ gorde dezake eta, nahiz eta kanpoko eremu elektrikoa deskargatu, polarizazioak iraun egingo du, epe luze batez behintzat. $+$ edo $-$ informazioa irakurri egin daiteke; horretarako elementuari potentzial-diferentzia bat jarri behar diogu. Jartzen dugun eremuaren norantza zegoen polarizazioarena baldin bada, kanpoko zirkuitutik ez dugu karga-pasatzerik izango; aldez, eremuaren norantza eta polarizazioarena aurkakoa baldin bada ferroelektrikoarena polarizazioa aldatzen ari den bitartean kanpoko zirkuitutik karga-pasatze bat izango dugu.



6. Irudia

Polarizatuta dagoen ferroelektrikotat egonkorra da alderantzizko eremu elektriko batekiko, eremu hori handiegi ez bada behintzat. Polarizazio-kurba, eremu elektrikoaren funtziotan, irudian ikus daiteke; han azaltzen denez, eremuaren balio txikietan E -ren balio bakoitzarentzat P -k bi balio ditu. Honelako kurba batek "histeresi-kurba" izena dauka. Histeresiak "atzean gelditzea" esan nahi du eta, hemen, polarizazio-bektorea atzean gelditzen zaigu eremu elektrikoarekiko. b eta a puntuak $E=0$ -rako egoera egonkorak dira, bata $+$ eta $-$ bestea. Eta polarizazioa alderantzeko behar den eremua c puntuak adierazten digu.

2. KAPITULUA

MATERIAREN BEREZITASUN MAGNETIKOEN TEORIA MIKROSKOPIKOA

2.1 MATERIAREN BARNEKO EREMU MOLEKULARRA

Eremu magnetikoaren adierazpen makroskopikoan bi eremu bektorial erabiltzen dira: $\vec{B}$ indukzio magnetikoa eta $\vec{H}$ intentsitate magnetikoa; eremu hauek elkarrekin erlazionaturik daude: $\vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M})$; hemen, $\vec{M}$ magnetizazioa da. Ikusgune mikroskopiko batetik, $\vec{B}$ eta $\vec{H}$ -ren arteko diferentzia desagertu egiten da hein handi batean, hutsean molekulen elkarte bat kontsideratzen dugulako; hots, dipolo magnetikoen edo talde dipolarren elkarketa bat. Hutsean dagoen molekula baten ondoan edo sistematik molekula bat kentzen denean zegoen lekuan dagoen eremu magnetikoz arduratzen gara. Orduan $\vec{B}_m = \mu_0 \vec{H}_m$ (hemen m-k mikroskopioa adierazi gura du).

Material baten barneko eremuaz aritzen garenean $\vec{H}_m$ $\vec{H}$ -rekin (hots, eremu makroskopikoarekin) erlazionatzen saiatzen gara, eta ez $\vec{B}_m$ $\vec{B}$ -rekin, zeren $\vec{H}$ nahiz $\vec{H}_m$ korrante eta dipolo-hedapenen integralen funtziotan idatz bait daitezke. Horretaz gainera, $\vec{H}_m$ nahiz $\vec{B}_m$ aurkitzea ia berdina da, bien artean dagoen desberdintasuna μ_0 eskala-faktore bat besterik ez delarik.

Molekula edo atomo baten korrante atomikoen elkarrekintzetan aritzen den eremu magnetikoari "eremu molekularra" deritzogu: $\vec{B}_m = \mu_0 \vec{H}_m$. Materialaren posizio molekular (edo atomiko) baten eremu magnetikoa da hori. Bere iturria zera da: kontsi-eratzten dugun puntuan dagoen molekula (edo atomoa) ez ezik baita materialaren gainontzeko dipolo molekular guztiak eta kanpoko iturri denak ere. $\vec{B}_m$ -k eta indukzio magnetiko makroskopikoak ez dute beti berdina izan beharrik, azken hau dimentsio molekularrekin alderatuz handia den korrante-elementu batek jasaten duen indarrarekin erlazionaturik dagoelako.

Kalkula dezagun eremu molekularra. Kontsidera dezagun (erraztasunerako) $\vec{M}$ magnetizazio uniforme baten bidez magnetizatuta dagoen

edozein itxuratako material bat. Ereku molekularra aurkitu nahi dugun puntuaren inguruan materiala kenduz, hutsarte esferiko bat egin dezagun. Gelditzen den materiala jarraiki baten gisa kontsidera daiteke; hots, ikusgune makroskopiko baten arabera. Gero hutsartetik kendu dugun materiala, hutsartearen zentruan (interesatzen zaigun puntua) zegoen molekula ez ezik, molekulaz molekula berreramango dugu. Berjarri ditugun molekulak ez dira jarraiki baten gisa kontsideratu behar, baizik eta dipolo indibidualak edo talde dipolarrak bezala.

Kalkula dezagun hutsartean dagoen $\vec{H}$ intentsitate magnetiko makroskopikoa. Horretarako, Elektromagnetika liburuan 141. orrialdean (32.) ekuazioa hartuz:

$$\vec{H}_2 = \frac{1}{4\pi} \int_{V_1} \frac{\vec{J}_1 \times \vec{r}_{12}}{r_{12}^3} dv_1 - \vec{\nabla} U_{m_2}$$

Baina, (26) ekuazioaren arabera (140. orrialdea)

$$U_{m_2} = \frac{1}{4\pi} \int_{V_1} \vec{M} \cdot \frac{\vec{r}_{12}}{r_{12}^3} dv_1$$

$$\text{eta } \vec{M} \cdot \frac{\vec{r}_{12}}{r_{12}^3} = \vec{M} \cdot \vec{\nabla} \left(\frac{1}{r_{12}} \right) = \vec{\nabla} \cdot \frac{\vec{M}}{r_{12}} - \vec{\nabla} \cdot \vec{M}$$

Orduan, (2) honela jar daiteke:

$$U_{m_2} = \frac{1}{4} \int_{S_1} \frac{\vec{M} \cdot d\vec{S}_1}{r_{12}} - \frac{1}{4} \int_{V_1} \frac{\vec{\nabla} \cdot \vec{M}}{r_{12}} dv_1$$

Orain bi kantitate eskalar berri defini daitezke:

$$\mathcal{P}_M(\vec{r}_1) = -\vec{\nabla} \cdot \vec{M}(\vec{r}_1)$$

honi "olomagnetikoaren dentsitatea" deritzogu.

$$\text{Eta } \sigma_M(\vec{r}_1) = \vec{M}(\vec{r}_1) \cdot \vec{m}$$

honi "polo magnetikoaren intentsitatearen gainazal-dentsitate" deritzogu.

Hauen bidez (4) ekuazioa.

$$U_{m2} = \frac{1}{4\pi} \int_{v_1} \frac{\rho_M \cdot dv_1}{r_{12}} + \frac{1}{4\pi} \int_{s_1} \frac{\sigma_M \cdot dS}{r_{12}} \quad (7)$$

Ekuazio hau (1).era eramanez

$$\vec{H}_2 = \frac{1}{4\pi} \int_{v_1} \frac{\vec{J}_1 \times \vec{r}_{12}}{r_{12}^3} dv_1 - \nabla \left[\frac{1}{4\pi} \int_{v_1} \frac{\rho_M \cdot dv_1}{r_{12}} + \frac{1}{4} \int_{s_1} \frac{\sigma_M dS}{r_{12}} \right] \quad (8)$$

Baina bigarren azpiindizearekikoa denez gero, eta $\rho_M dv_1$, σ_M eta dS_1 soilik lehenengo azpiindizearen funtzioak direnez:

$$\vec{H}_2 = \frac{1}{4} \int_{v_1} \frac{\vec{J}_1 \times \vec{r}_{12}}{r_{12}^3} dv_1 + \frac{1}{4\pi} \int_{v_1} \frac{M \vec{r}_{12}}{r_{12}^3} dv_1 + \frac{1}{4\pi} \int_{s_1} \frac{M \cdot \vec{r}_{12}}{r_{12}^3} dS_1 \quad (9)$$

Hemen, 2 azpiindizeak zera adierazten du: kontsideratzen dugun hutsartearen zentrua; eta 1-ak material magnetizatuaren puntuak. Orduan, hori kontutan harturik, honela idatz daiteke:

$$\vec{H} = \frac{1}{4\pi} \int_v \frac{\vec{J} \times \vec{r}_{12}}{r_{12}^3} dv + \frac{1}{4\pi} \int_v \frac{\rho_M \vec{r}_{12}}{r_{12}^3} dv + \frac{1}{4\pi} \int_s \frac{\sigma_M \vec{r}_{12}}{r_{12}^3} dS \quad (9)$$

H_m eremu molekularra aurkitzeko antzeko era batez adieraz daiteke, baina orain hutsartearen gainazalaren ekintza eta bere dipolo indibidualena kontutan hartu behar dira. Hutsartearen bolumenari dagokion integrala zero dugu, zeren material uniformeki magnetizatu batetan $\oint M = -\nabla \cdot \vec{M} = 0$. Beraz

$$\vec{H}_m = \vec{H} + \vec{H}_s + \vec{H}'$$

Hemen: $\vec{H}$: intentsitate magnetiko makroskopikoa.

$\vec{H}_s$: hutsartearen gainazalean polo magnetikoaren intentsitatearen gainazal-dentsitateari dagokiona ($\oint M = M_m$).
eta

$\vec{H}'$: hutsarteko dopoloen emaitza dira

Ikusten dugunez, "Dielektriko baten eremu molekularra" aurkitzeko eramán genuen bidea eta orain daramaguna guztiz elkarren antzekoak dira. Beraz, han egindako dedukzioa kontutan harturik zera

dugu:

$$\vec{H}_s = \frac{1}{3} \vec{M}$$

Eta, bestetik, dipoloen emaitza hau da:

$$\vec{H}' = \frac{1}{4} \sum_i \left[\frac{3(\vec{m}_i \cdot \vec{r}_i)}{r_i^5} - \frac{\vec{m}_i}{r_i^3} \right] \quad (12)$$

hemen, $\vec{r}_i$ hutsartearen zentrutik i-garren dipoloraino doan bektorea da eta $\vec{H}'$ eremu elektrikoaren kasuan $\vec{E}'$ geneukan bektorearekin analogoa da. Material askotako (12). ekuazioa zero bihurtzen da eta orduan (10).a honela daukagu:

$$\vec{H}_m + \vec{H} = \frac{1}{3} \vec{M}$$

eta

$$\vec{B}_m = \mu_0 \vec{H}_m$$

(13) eta (14). ekuazioek eremu molekularra intentsitate magnetiko makroskopikoaren eta magnetizazioaren bidez ematen digute. Material diamagnetiko eta paramagnetiko gehienentzat $\frac{1}{3} \vec{M} = \frac{1}{3} \chi_m \vec{H}$ guztiz txikia da (arbuia garria), baina inolaz ere ez ferromagnetikoentzat.

2.2 DIAMAGNETISMOAREN OINARRIA

Diamagnetismoaren iturburuak Lenz-en legearen eskala atomikoan du oinarria. Eremu magnetiko baten menpean atomo bakoitzaren korrante elektronikoek aldaketa bat jasaten dute, eta aldaketa horren bidez eremuari kontra egiten diote. Atomo-multzo baten suszeptibilitate diamagnetikoa kalkulatzeko atomoaren barneko elektroien higidurari buruz zerbait ezagutu behar dugu. Zera suposatuko dugu: elektroien bakoitza nukleo atomikoaren inguruan orbita-mota batetan biratzen da: erraztasunagatik orbita hori R erradioko zirkunferentzia gisa hartuko dugu eta jartzen den eremu magnetikoarekiko plano elkartutzat batetan egongo da. Mekanika Kuantikoa dela eta, badakigu esandako eredua ez dela egia; baina, problema hau zehaztasun guztiarekin egi-teko, Schrödinger-en ekuazioa erabili beharko genuke. Halaz ere, hemen egingo dugun hurbilketak suszeptibilitate diamagnetikoaren magnitude-maila bat emango digu.

Eremu magnetikoa ezarri baino lehen elektroia orekan dago bere orbitan:

$$F_q = m_e w_o^2 R \quad (15)$$

hemen: F_q : elektroia bere atomoan mantentzen duen indar elektrikoa da,
 w_o : bere orbitan elektroiak duen frekuentzia angeluarra, eta
 m_e : elektroiaren masa.

Eremu magnetikoa ezartzeagatik elektroiak - $e \vec{v} \times \vec{B}_m$ -ko indar bere-
 rri bat jasango du, eta elektroiak bere orbitan jarraitzen badu:

$$F_q \pm e w R B_m = m_e w^2 R \quad (16)$$

eta hauek (15). ekuazioarekin batera bilduz, zera ematen du:

$$F \pm e w B_m = m_e (w - w_o) (w + w_o) \quad (17)$$

$\Delta w = w - w_o$ elektroiaren frekuentzia angeluarraren aldaketa da. Be-
 raz, elektroia arindu ala moteldu egingo da bere orbitan $\vec{F}_q$ -rekiko
 $\vec{v} \times \vec{B}_m$ -ren norantzaren arabera; baina, beti ere Lenz-en legeak dion
 bezala, momentu magnetiko orbitalaren "aldaketa" ezarritako eremu
 magnetikoaren norantzaren kontrakoa izango da.

Laborategi batetan erabiltzen diren eremu magnetiko handienekin
 konparatuz ere ($\simeq 10^7$ wb/m²), w_o -rekin alderatuz Δw oso txikia
 da beraz, (17)-tik

$$\Delta w \simeq \pm \frac{e}{2 m_e} \cdot B_m \quad (18)$$

$\frac{e}{2 m_e} \cdot B_m$ kantitateari Larmor-en frekuentzia deritzogu.

Orain arte elektroiak orbita berean irauten zuela "suposatu" du-
 gu. (18). ekuazioa lortzeko suposizio hori eta indar-oreka erabili
 dugu. Elektroiak bere orbitan irauteko, bere energia zinetikoaren
 aldaketak (18). ekuazioarekin ados egon behar du. Eremu magnetikoa
 ezartzen denean, orbitan zehar $\pi R^2 \Delta B_m$ -ko fluxu-aldaketa bat ger-
 tatzen da. Fluxu honek Δn espira hartzen du, hemen Δn zera da:
 eremua aldatzen ari den bitartean elektroiak bete dituen birak.
 Fluxu aldakor horrek indar elektraeragile bat sortarazten du:

$$\mathcal{E} = \pi R^2 \frac{d B_m}{dt} \Delta n = \pi R^2 \frac{d n}{dt} \Delta B_m$$

Elektroiari ematen zaion energia $e \cdot \mathcal{E}$ -koa da, eta honek elektro-

aren energia zinetikoaren aldaketa bat ager arazten du:

$$\frac{1}{2} m_e R^2 (w^2 - w_o^2) = e \tilde{\gamma} R^2 \frac{d_n}{dt} \Delta B_m \quad (20)$$

Baina, ΔB_m B_m -ren azkeneko balioa izango da eta $\frac{d_n}{dt}$ -ren batez-
besteko balioa $\frac{w + w_o}{4\tilde{\gamma}}$ da. Beraz,

$$\Delta w = \frac{e}{2 m_e} B_m$$

eta hau (18). ekuazioa da: hau da, ez dago (19). eta (18). ekuazioen arteko kontraesanik.

(18). ekuazioak adierazten duen abiadura angeluarraren aldaketak momentu magnetikoaren aldaketa hau ematen digu

$$\Delta \vec{m} = - \frac{e}{2\tilde{\gamma}} R^2 \frac{e}{2m_e} \vec{B}_m = - \frac{e}{4m_e} R^2 \mu_o \vec{H}_m \quad (21)$$

Magnetizazioa aurkitzeko bolumen-unitate bateko elektroi guztiak hartu behar dira kontutan. Material batek N molekula baldin badauka bolumen-unitateko eta denak era molekular berdinekoak badira:

$$\vec{M} = - \frac{N e^2 \mu_o}{4 m_e} \cdot \vec{H}_m \sum_i R_i^2 \quad (22)$$

Hemen, batuketak molekula baten elektroi guztiak hartu behar ditu. Material diamagnetikoetan $\vec{H}_m$ eta $\vec{H}$ ia berdinak dira eta, beraz, suszeptibilitate diamagnetikoa hau dugu.

$$\chi_m = - \frac{N e^2 \mu_o}{4 m_e} \sum_i R_i^2 \quad (23)$$

Hau lortzeko, elektroi guztiak $\vec{H}_m$ eremuarekiko plano elkartu-tean ari direla onartu izan da. Orbita makurtzen denean, eta bere normalak eremuarekin ϑ_i angelu bat osatzen duenean, elektroiaren abiadura angeluarra aldatzeko eragipena duen $\vec{H}_m$ -ren osagai bakarra bere osagai normala da: $H_m \cos \vartheta_i$. Beraz, suszeptibilitate magnetikoaren hurbilketa zehatzago bat hau da

$$\chi_m = - \frac{N e^2 \mu_o}{4 m_e} \sum_i R_i^2 \cos^2 \vartheta_i \quad (24)$$

Diamagnetismoa materia edozein batean agertzen dela pentsatzeko da; halaz ere, berarekin batera datozen, eta askotan handiagoak diren ferromagnetismoak eta paramagnetismoak estali egiten dute inoiz baino gehiagotan.

2.3 PARAMAGNETISMOAREN OINARRIAK

Molekula edo atomo batean elektroi baten higidura orbitala, momentu magnetiko baten $(\vec{m} = \frac{1}{2} I \oint_e \vec{r} \times d\vec{l})$ funtzio bidez adieraz daiteke. Beste aldetik, gauza jakina da, elektroiak spin izeneko berezitasuna duela, eta spin horri momentu magnetiko bat dagokio. Beraz, molekula bakoitzaren $\vec{m}_i$ momentu magnetiko osoa molekularen elektroi guztien momentu orbitalen eta spin-momentuen batura bektoriala izango da. Eta zirkuitu elektriko edozein bat eremu magnetiko batean orientatzen saiatzen den bezala, momentu molekularrak haiei ezarritako eremuaren arabera lerrokatzen saiatzen dira, lerroztatze horretan, hain zuzen ere, paramagnetismoa datza.

Halaz ere, hemengo egoera eta zirkuitu elektriko batena ez dira guztiz baliokideak. Oraingo honetan bi zailtasun dauzkagu:

- 1.- Eremu magnetiko batean higidura elektronikoak kuantizatu egiten dira eta, beraz, momentu oso bakoitzak eremuaren norantzarikiko orientazio-multzo diskretu bat izango du. Beste aldetik, molekula baten bi elektroiek ez daukate egoera kuantiko berdinean egoterik; orduan, molekula bakoitzeko elektroi-geruza guztiak betetzeko elektroi aski baldin badago, ahal diren orientazio guztiak izango ditugu eta $\vec{m}_i$ zero izango da. Beraz, paramagnetismoa edukitzeko $\vec{m}_i \neq 0$ izan behar du.
- 2.- $\vec{m}_i$ sortarazten duen atomoaren barneko elektroiaren higidurak nukleo atomikoarekiko ere momentu angeluar bat sortarazten du: beraz, $\vec{m}_i$ momentu angeluar honekin linealki erlazionatuta dago. Egoera honetan, momentu magnetikoak ez du m_i momentu dipolarra eremuan zuzenki lerrokatzen, baina eremuarekiko makur konstanteko prezesio-higidura bat ematen dio.

Gure sistema materialean atomoak (edo molekulak) beren artean kontaktatu termikoan daude. Gas edo likido batean atomoak talka egiten

ari dira etengabe, batzuk besteen kontra; solido batean atomoek oszilazio termiko bat daukate. Egoera honetan $\bar{m}_1$ desberdinek bere inguruko energia termikoarekin energia magnetikoa truka dezakete; eta orduan prezesio-egoera batetik makur desberdin bateko beste prezesio-egoera batera iragan. Sistemaren energia termikoa $\bar{m}_1$ guztiak zoriz orientatzen saiatzen da; baina, eremuaren direkzioa edo hurbilean duten orientazioek energia magnetiko txikiagoa daukatenez gero, lagunduagoak dira. Dagoen egoerak eta ikusitako eremu batean dauden molekula polarrenak elkarren antz handia daukate.

Molekula-mota bakar batez osaturiko material batean molekula bakoitzaren momentu magnetikoa m_o baldin bada, orientazio frakzionarioa Langevin-en funtzioaren bidez ematen da gutxi gorabehera (ikus aurreneko kapitulua (20). ekuazioa).

$$\text{hor } y = \frac{m_o \mu_o \bar{H}_m}{k T} \quad (25)$$

Magnetizazioa zera da:

$$(\bar{M}) = N_{m_o} \left[\text{ctg } h y - \frac{1}{y} \right] \quad (26)$$

hemen N bolumen-unitatean dagoen molekula-kopurua izanik. Zero absolutuaren hurbileko tenperaturetan ezik, gainontzeko tenperaturetan Langevin-en funtzioa bere berredura-seriearekin nehenengo gaiaren bidez eman daiteke gutxi gorabehera.

$$\bar{M} = \frac{N m_o}{3 k T} \mu_o \bar{H}_m \quad (27)$$

eta horren bidez suszeptibilitate magnetikoa hauxe da

$$\chi_m = \frac{N m_o^2 \mu_o}{3 k T} \quad (28)$$

Teoria atomikoaren arabera m_o -k Bohr-en magnetoi batzuren dimentsioa du (Bohr-en magnetoi bat = $\frac{e h}{4\pi m_e}$, h Planck-en konstantea izanik).

Ikusitako (28). eta (24). ekuazioek ematen dituzten χ_m -en balioak eta experimentalki aurkitzen direnak magnitude-maila aldetik ados daude.

Paramagnetismoari buruz ikusitakoa honela labur daiteke: a) Jokaera paramagnetikoa izateko sistemako atomoek (edo molekulek) momentu

magnetiko iraunkorra izan behar dute, eta hauek eremu magnetikoan orientatzen saiatu beharko dute. b) Momentu magnetiko bakoitzak eremu magnetikoaren inguruan bere prezesio-higidura indibiduala (ez batera) dauka, baina, inguruneke kontaktua dela eta, energia elkarrekin truka dezakete. c) Zero absolutuaren inguruko tenperaturetan eta aldi berean eremu oso handiekin ez ezik, magnetizazioa dipolo guztiak guztiz orientatuta daudenean (hots, asetasunean) baino askoz txikiagoa da.

2.4 FERROMAGNETISMOAREN TEORIA

Material ferromagnetikoetan, nahiz eta ezarritako eremurik izan ez, momentu magnetiko atomikoak (edo molekularrak) lerrokatzen dira. Lerrokatze honen kausa $\vec{H}_m$ eremu molekularra da, hau (ikus 13. ekuazioa) $\vec{H} = 0$ denean ez da hutsa izango baldin eta batera $\vec{M}$ zero ez bada. $\vec{M}$ magnetizazio batek eremu molekular bat sortarazten du, baina eremu horrek materialean dagoen $\vec{M}$ magnetizazioa sortarazi behar du; bestela ez dago irtenbiderik. Gure helburua zera da: eremu molekularraren bidez magnetizazioa edukitzeko aurkitu behar diren baldintzak ezagutzea.

Horretarako, (13).ekuazioa nolabait orokortu behar da. Eremu molekularrentzat zera idatz dezagun: $\vec{H}_m = \vec{H} + \gamma \vec{M}$; eta $\vec{H} = 0$ denean, hauxe izango dugu:

$$\vec{H}_m = \gamma \vec{M} \quad (29)$$

Lehen ikusitako teoria xehearen arabera, $\gamma = \frac{1}{3}$ da. Baina (12). ekuazioaren gaiak ez badute ekuazio hori zero egiten γ -k ez du $\frac{1}{3}$ izan beharrik; halaz ere, γ -ren magnitude-maila agian antzekoa izango da.

Azter dezagun kasu berezi bat: erabiltzen ari garen materiala atomo-mota bakar batez osaturik dago, eta atomo bakoitzaren momentu magnetikoa m_0 da. Bolumen-unitatean N atomo daukagu. Momentu atomikoek ia lerrokatuta egon behar badute M , $N m_0$ -ren parte handi bat izango da. Halaz ere, eta konkretatzeko, zera esan daiteke:

$$M \gg 0,7 N m_0 \quad (30)$$

eta (26).ekuazioaren arabera:

$$\operatorname{ctg} h y - \frac{1}{y} > 0,7 \quad (31)$$

edo y (25). ekuaziotik aterata:

$$y = \frac{m_o \mu_o H_m}{k T} > 3 \quad (32)$$

Baina (29).dik $H_m = \gamma M$ eta (30).dik

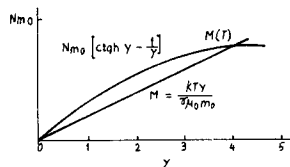
$$0,7 < \frac{\gamma N \mu_o m_o^2}{k T} > 3 \quad (33)$$

Eta hauxe da, hain zuzen ere, ferromagnetismoa edukitzeko gutxi gora-behera bete behar den baldintza.

Lehen esan dugunaren arabera, teoria atomikoak zera dio: m_o -ren magnitude-maila Bohr-en magnetoi batzurena dela. Hori onartuz, (33).ekuazioa betetzeko γ -k piska bat goiti-beheiti, 10^3 --oa izan behar du. Balio hau eta ikasgai honen lehenengo galderan ateratako γ -rena oso desberdinak dira.

Beraz, ferromagnetismoaren adierazpena ferroelektrikarena (ikus aurreneko ikasgaia) baino askoz zailagoa litzatekeela pentsatua izan zen.

1907.urtean Pierre Weiss-ek bere ferromagnetismoaren teoria eman zuzen. Weiss-ek eremu molekularrak betetzen duen oinarritzko papera ikusi zuen. Berak ez zeukan γ -ren balioaren handitasuna argitzeko adierazpenik; onartu egin zuen, halaz ere, gertaera bat bezala eta puntu horretatik jarraitu zuen bere teoria. Bere teoriaren bidez lortutako emaitzak eta lege experimentalak nahi-ko ados zeudela aurkitu zuen. Hori dela eta, (29).ekuazioak adierazten duen eremu molekularrari askotan "Weiss-en eremu molekularra" deritzo.



1. Irudia: Langevin-en funtzioaren laguntzaz $M(T)$ berezko magnetizazioaren aurkikuntza

Hogei urte geroago Heisenberg-ek γ -ren balioaren handitasuna adierazi zuen. Honek zera demostratu zuen: 1. eremu molekularra spinaren momentu magnetikoek soilik zertzen dutela eta 2. eremua gehienbat indar elektrostatikoek ematen dutela. Aldameneko atomoen spinak lerrokadura paralelo batetik antiparalelo batera pasatzen direnean aldiberean atomoen elektroien karga-hedapenean aldaketa bat izan behar duela demostratu zuen Heisenberg-ek Mekanika Kuantikoaren bidez. Karga-hedapenaren aldaketak sistemaren energia elektrostatikoa aldatzen du eta, zenbait kasutan lerrokadura paralelo bat laguntzen (hau da, ferromagnetismoa). Energia sistemaren spin-egiturak zertzen duenean, egitura hori aldatzen denean atomo batean azaltzen den indarraren (edo parearen momentuaren) bidez adieraz daiteke. Eremu balioidea $\vec{M}$ -rekin zuzenki proportzionala dela agertzen da, baina koefizientea kontsideratzen ari garen atomoaren karga-hedapen zehatzak baldintzatzen du.

Weiss-Heisenberg-en teoriaren bidez gerroiman baten tenperatura-rekin magnetizazioaren aldakuntza estudia daiteke. Teoria honentzat ferromagnetismoa ez da eremu magnetiko izugarri handi batean dagoen paramagnetismo bat besterik; baino, hori bai eremu hau magnetizazio ber-beretik datorke.

(29), (25) ., (26). ekuazioak batera hartuz, zera daukagu:

$$M = N m_o \left[\text{ctg } h y - \frac{1}{y} \right] \quad (34)$$

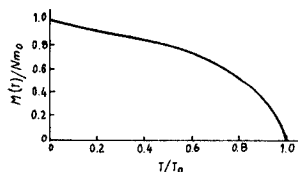
$$\text{eta} \quad M = \frac{k T y}{\gamma \mu_o m_o} \quad (35)$$

"Berezko magnetizazioa", hots, zero den kanpoko eremu batek ematen duen magnetizazio (34). eta (35). ekuaziotik batera hartuz atara daiteke. Hau, grafikoki, erraz egiten da (ikus 1. irudia)

Grafiko batean (34). eta (35). ekuazioek ematen duten M-ren balioa y-ren funtzio bezala marrazten dugu. Bi lerroek elkar gurutzatzen duten puntua bi ekuazioek betetzen duten M(T) puntua da. Tenperatura igoten ari den bitartean lerro zuzenak ((35). ekuazioak ematen duena) bere malda handiagotu egingo du, baina (34). ak ez dauka aldaketarik eta puntua ezkerrean doa eta berezko magnetizazioaren balioa txikitu egingo da. Azkenik, tenperatura batean zuzena

eta kurba tangenteak izango dira jatorrian; temperatura horretan eta hori baino handiagoetan berezko magnetizazioa zero da. T_C tenperatura hau "Curie tenperatura" da: beraren gainetik ez dago berezko magnetizaziorik, eta ohizko portaera paramagnetikoa daukagu orduan.

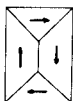
2. irudian $M(T)$ grafiko bat agertzen da: hots, magnetizazioa tenperaturaren funtziotan ematen duena. Teoriaren eta esperientziaren bidez aurkitutako berezko magnetizazioaren balioak gutxi gora-behera ados daude material ferromagnetiko batean.



2. Irudia : Material ferromagnetiko baten magnetizazioa tenperaturaren funtzio bidez. T_C Curie tenperatura da (azaltzen den kurba Langevin-en funtzio klasikoaren bidez aurkituta dago). Mekanika Kuantikoren zuzenketek kurbaren itxura piska bat aldatu egiten dute; hori dela eta, emaitza experimentaletatik hurbilago dago.

2.5 BARRUTI FERROMAGNETIKOAK

Ikusi dugunaren arabera, bere Curie tenperatura baino hotzagoa dagoen edozein material ferromagnetiko batek ia guztiz magnetizatuta (aseturik) egon beharko luke. Baina hau ez da errealitatean gertatzen. Burdinazko puska bat magnetizatuta ala magnetizatu gabe egon daiteke, adibidez. Paradoxa honen erantzuna zera da: material ferromagnetikoak "barrutiz" osaturik daude; barruti horietariko bakoitza, eszudiatu dugunaren arabera, guztiz magnetizatuta dago, baina barruti desberdinak zoriz banatuak egon daitezke (ikus 2. irudia) eta, beraz, makroskopikoki materiala desmagnetizatuta bezala azalduko da. Barrutien teoria Weiss-ek eraiki zuen 1907. urtean.



(a)

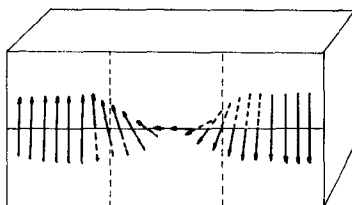


(b)

3. Irudia: Barruti ferromagnetikoen egitura. a) Kristal sinplea b) Material polikristalinoa. Magnetizazioaren direkzioa eta norantza geziez bidez azaltzen da.

Barruti batetik aldameneko beste batera pasatzean m_0 momentu atomikoaren bektorea gradualki biratuz doa, bere jatorrizko direkziotik berrira; hori gutxi gora-behera, 100 atomotan gertatzen da (4. irudia). Bi barrutien arteko tarte hau "barrutiarteko horma" dugu.

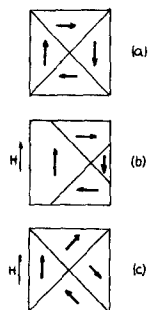
Material ferromagnetikoen magnetizazioa makroskopikoki barrutiaren egituraren aldaketekin erlazionaturik daude. Kanpoko eremu magnetiko bat jartzen dugunean azal daitekeen magnetizazioak bi iturri desberdin ditu: a) Eremuaren alde dauden barrutien bolumen-ugalpena (barruti honen mugimendua), b) eremuaren aldeko barrutiaren magnetizazioaren errotazioa. Ikus bi gauza hauek 5. irudian



4. Irudia: Trantsizio-tartearen edo barrutiarteko hormaren egitura, aldameneko bi domeinuen artean azaltzen da.

Ezarritako eremua ahula bada magnetizazioaren aldaketa gehienbat barrutiarteko hormaren higidura batez ematen da. Fase bakarreko material hutsetan hormaren higidura itzulgarria da eremu ahuletan, maila batean behintzat. Eremua indartsuagoa bada magnetizazioa hormaren higidura itzulezin baten bidez ematen da eta, azkenik, domeinuen errotazio bat izaten dugu. Orduan, nahiz eta kanpoko eremua kendu, materialak magnetizatuta irauten du.

Barrutien estudio esperimentalak F.H Bitter-ek asmatutako teknika baten bidez egin da. Oso xehetuta dagoen hauts magnetiko bat estudiatzen ari garen materialaren gainean botatzen da, hauts-aleak barrutien mugetan pilatzen dira eta mikroskopio batez ikus daitezke. Teknika honen bidez eremu bat ezartzerakoan barruti baten hormaren higidura ikusten da. Barrutien tamainak oso desberdinak dira eta materialaren izaerak izandako historiak, e.a baldintzatzen dituzte; gehienetan, 10^{-6} eta 10^{-2} cm^2 -en artean daudela esan daiteke.



5. Irudia: Material ferromagnetiko baten magnetizazioa:
 a) desmagnetizatua. b) barrutiarteko hormaren
 higiduraren bidezko magnetizazioa. c) Barruti-
 aren errotzioaren bidezko magnetizazioa.

3. KAPITULUA

PLASMAREN FISIKA

3.1 SARRERA

Oso ionizatuta dauden gasak elektroeroale onak dira. Gas ionizatu baten zatiki kargatuak tokiko eremu elektromagnetikoak eragiten dituzte; horretaz gainera, karga-eremale hauen higidurek (korronteek, karga-dentsitateen aldaketek, e.a.) eremu elektriko eta magnetikoak sortaraz ditzakete. Gas ionizatu batek eremu elektriko estatiko batean beste edozein eroale batek bezala jokatzen du; gasaren karga-eremal-leak berehala berbanatzen dira, eta gasaren masa gehiena blindatuta gertatzen da; hots, eremuarekiko apantailatuta. Ia eremurik ez dagoen gasaren parteari, hau da, karga negatiboak eta positiboak ia orekaturik dagoen lekuari Langmuir-ek "plasma" izena eman zion eta karga espazialeko parteari (hau da, plasmaren mugetan eremu handikoa denari) "leka" izena eman zion.

Beraz, zera esan dezakegu: gainontzeko beste luzerekiko luzera txiki batean elektrostatikoki bere burua blindatzeko zatiki kargatuzko kopuru aski duen gas ionizatu bat plasma bat da. Geroxeago beste definizio zehatzago bat emango dugu. Plasmaren estudioaren lehenengo interes handiena gas-elektronikarekin loturik zagoen (gasean zeharreko deskarga elektrikoak, arkuak, e.a.) eta interes berriena astrofisika teorikoaren zenbait problemarekiko eta erreaktore termonuklearretako ioien birhalaztatzearekiko.

Denboraz baldintzaturik dauden eremu elektromagnetikoen eta gas ionizatuen arteko erlazioak estudiatzen dituen Fisikaren atala "plasmaren dinamika" da. Alor honetako problema gehienak eta garrantzitsuenak askatzeko ikuspegi makroskopiko hutsa ez da baliagarria. Bere ordean, "teoria zinetiko" deitutakoa erabili behar dugu. Ioi eta elektroien bakoitzaren higidura estudiatu behar da, baita beste zatikiekin izango diren talkak ere, eta hau egiteko Boltzmann-en garraio-ekuazioa askatu behar da. Beraz, plasma estudiatzeko badago teoria zehatz bat. Baina gehienetan bide hori zaillegia da, hots, Boltzmann-en ekuazioaren zenbait gai arbuigarri ez denean. Zorionez pro-

blema hauei buruz ezaguera handia ematen duten gutxi gor-beherako hiru formulazio daude.

Teoria horietako bat "oreka-teoria" dugu, Honen oinarria zera da: zatiki kargatuen arteko talka-kopuruaren mailaren handitasuna dela bide, plasmaren zatikiek ezaguna den Maxwell-Boltzmann-en abiadura-banaketa daukate

$$N_j (\vec{v}) dv_x dv_y dv_z = N_{Oj} \left(\frac{m_p}{2\pi kT} \right)^{3/2} \cdot e^{-m_p v^2 / 2kT} dv_x dv_y dv_z \quad (1)$$

hemen:

N_{Oj} : plasmaren bolumen-unitatean j motako zatikien kopurua
 $V_x(e.a)$: abiaduraren osagaiak
 m_p : j motako zatikien masa
 T : tenperatura absolutua

ditugu.

Orduan, berezitasun zinetikoak eta garraiozkoak abiadura-banaketa honen bidez aurki daitezke.

Gutxi gora-beherako bigarren bidea "Teoria orbitala" dugu. Honek, eman-dako eremu elektriko eta magneikoetan zatiki kargatuen higidurak es-tudiatzen ditu. Eremu hauek posizioaren edo denboraren funtziopekoak izan daitezke. Zatikien talkak oso inportanteak ez direnean, hots, ba-tezbesteko ibilbide librea orbitaren gainontzeko dimentsioekin alde-ratuz handia denean, plasmaren zatikien higidura estudiatzeko bide hau egokia da. Orduan, talken eragipena perturbazio bat bezala kontsi-dera daiteke eta problema nagusia zera da: eremu elektromagnetiko osoa (kanpokoak eta zatiki orbitalek ematen dutena) bateragarria izan araz-tea.

Hirugarren bidea "formulazio hidromagnetikoa" dugu. Hemen ekuazio elek-tromagnetiko klasikoak (Maxwell-en ekuazioak) eta jariakinen higidu-raren ekuazio klasikoak batera hartzen dira. Plasmaren ikuspegi hidro-magnetikoa makroskopikoa da noski; baina, lehen bezala plasmaren gai-nontzeko distantziak batezbesteko ibilbide librearekin alderatuz han-diak direnean, metodo hau baliagarria da. Plasman zatikien higidura ko-lektiboa adierazteko (hots, plasmaren oszilazioak emateko) ikuspegi hidromagnetikoa oso abiapuntu ona da.

Hemen errazpide bat onartuko dugu: plasma elektroiz (-e kargakak) eta indibidualki kargatuta dauden ioi positibo (+ e kargakoak) osaturik dago. Atomo neutroak ere egon daitezke; baina ez dugu kontutan hartuko ez talka ionizagarriarik, ez ioien eta elektroien arteko birkonbinaziorik.

3.2 PLASMA BATEN NEUTROTASUN ELEKTRIKOA

Plasma baten berezitasun garrantzitsuenetako bat zera dugu, elektrika aldetik neutro izateko daukan joera; hots, bolumen-elementu makroskopiko bakoitzean karga espazial positiboa eta negatiboa orekatzeko dagoen joera. Karga-dentsitate espazialen desoreka (nahiz txiki) batez azaldutako indar elektrostatiakoak oso handiak dira, eta indar hauek, ahal bada behintzat, apurtutako oreka berrekartzen saiatzen dira. Beste aldetik, plasma bat borondatez kanpoko eremu elektriko baten barnean ipintzen bada, plasma gehiena eremutik blindatuta gerra dadin karga espaziala egokitu egingo da.

Begira dezagun adibide erraz bat. Sar dezagun +Q karga esferiko bat plasma batean; beraz, plasman eremu elektriko bat ipini dugu.

Karga gradualki neutralizatuta geratuko da, plasmatik etengane zatiki kargatuak joaten zaizkiolako; baina objektu kargatua oso txikia bada, neutralizazio hori lortzeko epe handi xamar bat beharko da. Bitartean, elektroiak karga aldera higituko dira eta protoiak urrundu egingo dira kargatik. Oreka-egoera batean (ikus 1. Kapituluaren molekula polarrak) W energia potentzialeko toki batean zatiki kargatu bat aurkitzeko dagoen $e^{-w/kT}$ probabilitatea Boltzmann-en faktorearekin zuzenki proportzionala da (hemen e logaritmo napiertarren berrekizuna dugu). Beraz N_e elektroien-dentsitatea hauex da:

$$N_e = N_0 \text{ ber } \left(e^{\frac{U-U_0}{kT}} \right) \quad (2)$$

hemen:

e : elektroien karga

U : tokiko potentziala

U_0 : erreferentzi potentziala (plasmaren potentziala)

T : plasmaren tenperatura absolutua

K : Boltzmann-en konstantea

N_0 : $U=U_0$ den tokietako elektroien-dentsitatea

U_0 potentzialeko tokietan ioi positiboen dentsitatea N_0 baldin bada, orduan N_1 ioi positiboen dentsitatea honako hau izango dugu:

$$N_1 = N_0 \text{ ber } \left(-e \frac{U-U_0}{k T} \right) \quad (3)$$

U potentziala Poisson-en ekuaziotik atera daiteke:

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dU}{dr} \right) = - \frac{1}{\epsilon_0} (N_1 e - N_0 e) = \frac{2N_0 e}{\epsilon_0} \sinh \left(e \frac{U-U_0}{k T} \right) \quad (4)$$

Ekuazio diferentzial hau ez da lineala eta, beraz, zenbaki bidez integratu behar da. Beste aldetik, tenperatura altuetarako guztiz egokia den ekuazio horren gutxi gora-beherako soluzio bat gure helburuetarako baliagarria dugu, hots, $kT \gg eU$ baldin bada $\sinh \left(\frac{eU}{kT} \right) \approx \frac{eU}{kT}$

eta

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dU}{dr} \right) \approx \frac{2N_0 e^2}{\epsilon_0 kT} (U-U_0) \quad (5)$$

eta honen soluzioa hau da:

$$U = U_0 + \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} \text{ ber } \left(-\frac{r}{h} \right) \quad (6)$$

Hemen:

r : +Q karga esferikotik dagoen distantzia

h : blindai distantzia edo Debye-en luzera, eta zera da

$$h = \left(\frac{\epsilon_0 kT}{2N_0 e^2} \right)^{1/2} \quad (7)$$

Beraz, gaseko elektroien eta ioien berbanaketa dela eta, Q -ren ekintza zenbait h -ko distantzia batean deuseztaturik dago.

Gas ionizatu bat plasma izateko, esperientziako gainontzeko distantziekin alderatuz, Debye-n luzerak txikia izan behar du. Hau ez da gehiegi eskatzea; $T = 2000^\circ\text{K}$ -ekoa bada eta $N_0 = 10^{18}$ elektroioi m^{-3} -koa Debye-en luzera $= 2,2 \times 10^{-6}$ m-koa da.

3.3 ZATIKIEN ORBITAK ETA PLASMA BATEKO DESPLAZAMENDUAK

Eremu elektriko eta magnetiko batean murgildurik dagoen q zatiki kargatu baten orbita aurkitzeko Lorentz-en indarraren ekuazioa erabili behar dugu:

$$\vec{F} = q (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \quad (8)$$

Gai hau estudiantzeko eremuen egitura errazarekin abiatuko gara.

Plasmari ezartzen diogun eremu elektrikoa konstantea bada, plasmak karga espazialezko leka mehe bat emango du eta, bere bidez, plasmaren gorputz gehiena eremuaren eragipenatik at dago; beraz, hau ez da garrantzitsua izango. Eremu magnetiko konstante batek zatikiak bira arazten ditu karga espazialaren banaketa aldatu gabe.

1. KASUA: EREMU MAGNETIKO UNIFORMEA. $\vec{E}=0$

Lorentz-en indarra eta zatiki kargatuaren $\vec{v}$ abiadura beti elkartzuta dira; beraz, bere energia zinetikoak konstante irauten du

$$K_{\parallel} = \frac{1}{2} m_p v_{\parallel}^2 = \text{konstante}$$

m_p zatikiaren masa izanik, $\vec{v}$ abiadura bi osagaietan banatuko dugu, horietarikobat $v_{\parallel}$, $\vec{B}$ eremuarekiko paraleloa eta $v_{\perp}$ bestea $\vec{B}$ -rekiko elkartzuta den planoan. $v_{\parallel}$ -an eremuak ez dauka eragipenik, eta $K_{\parallel} = \frac{1}{2} m_p v_{\parallel}^2$ iraunkorra da. Orduan:

$$K_{\perp} = \frac{1}{2} m_p v_{\perp}^2 = K - K_{\parallel} \quad (10)$$

ere iraunkorra izango da.

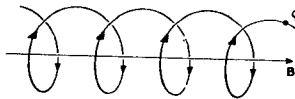
Lorentz-en indarrak azelerazio zentripeto bat sortarazten du.

$$\text{Beraz,} \quad q v_{\perp} B = \frac{m_p v_{\perp}^2}{R} \quad (11)$$

eta hemendik orbitaren R erradioa

$$R = \frac{m_p v_{\perp}}{q B} \quad (12)$$

R erradioari zatikiaren "Larmor-en erradioa" deritzogu. Zatiki kargatuaren higidura osoa zera da: Larmor-en orbitan zatikiaren bira eta horren gainean zentru orbitalaren edo "zentru gidaren" eremu magnetikoaren lerro baten gainetik higidura uniforme bat. Azaltzen den higidura helikoidala 1. irudian ikus daiteke.



1. Irudia: Zatikien higidura eremu magnetiko uniforme batean.

Eremu magnetikoak zatikien higidura orbita zirkularretan mugi araziz, plasma mugatzera jotzen du. Mugatze hori ez da eremuaren direkzioan ematen, noski, K_1 energia zinetiko berdineko ioien eta elektroien kasuan azken hauen orbitak askoz txikiagoak dira, eta Larmor-en erradioen erlazioa masen erroa da.

Maiz erabiltzen den zatiki birakari baten magnitude bat "momentu magnetikoa" dugu. Definizioz, m momentu magnetikoa zera da:

$$m = \text{korronte} \times \text{azelera} =$$

$$= \frac{q v_1}{2\pi R} \cdot \pi R^2 = \frac{K_1}{B} \quad (13)$$

1. irudia begiratu eta m -ren norantza eremu magnetikoaren aurkakoa ikusten da; beraz, momentu diamagnetiko bat da.

2. KASUA: EREMU ELEKTRIKOA ETA MAGNETIKOA UNIFORMEAK. $\vec{E} \perp \vec{B}$

Plasma bati aldiberean $\vec{E}$ eremu elektriko uniforme bat eta $\vec{B}$ eremu magnetiko uniforme bat ezartzen badizkiogu, biak elkartutak izanik ez dago leka egiteko joerarik; beraz, karga espazial positiboa eta negatiboa batera norantza ber-berean joaten dira. Bedi $\vec{v}$ zatikiaren abiadura

$$\vec{v} = \vec{U} + \vec{v}' \quad (14)$$

Lorentz-em indarra honela idatz daiteke:

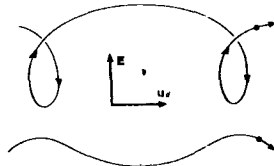
$$\vec{F} = q (\vec{E} + \vec{U}_d \times \vec{B} + \vec{v}' \times \vec{B}) \quad (15)$$

U_d egoki bat hartuz, ekuazioaren bigarren ataleko lehenengo bi gaiak elkar deuseztatzen dute. Horretarako

$$\vec{U}_d = \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{B^2} \quad (16)$$

Geratzen den $q\vec{v}' \times \vec{B}$ indarra 1. lasuan estudiatu dugu. Beraz, zatikia-

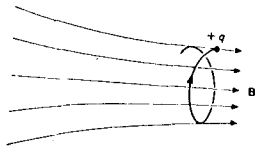
ren higidura osoak hiru gai ditu: a) $\vec{B}$ -kiko paraleloa den $\vec{v}'$ abiadura konstantea. b) $v' / R = q \cdot B / m_p$ frekuentzia angeluarreko eremu magnetikoen lerroekiko bira bat. c) $\vec{E}$ -kiko eta $\vec{B}$ -kiko elkartzuta den $\vec{U}_d = E/B$ -ko abiadura konstanteko desplazamendu bat. Higidura honen adibide batzuk 2. irudian azaltzen dira.



2. Irudia: Eremu elektrikoa eta magnetikoa elakrtzuta da; zatikiaren higidura eremu magnetikoarekiko elkartzuta den plano batetan da. Irudian, kontrako zentruz kargatuta dauden eta hasierako higidura-kantitate desberdina duten ioien higidura dugu.

(16). ekuazioak definitzen duen $\vec{U}_d$ abiadura "plasmaren desplazamendu-abiadura" edo "desplazamendu elektrikoaren abiadura" dugu. Ikusten dugun bezala, $\vec{U}_d$ ez da ez kargaren, ez masaren ez eta zatikiaren abiaduraren funtziopekoa; beraz, plasmako zatiki guztiak batera doaz, nahiz eta bakoitzaren bira oso desberdina izan daitekeen.

(16). ekuazioa lortzeko eraman dugun bidea bide ez-erlatibista da; $\vec{U}_d$ edo $\vec{B}$, c-ren (argiaren abiadura) mailakoa badira, (14). ekuazioaren ordez Lorentz-en transformakuntzarekin ados dagoen beste batez ordezkatu behar dugu. Halaz ere, $|\vec{E}| < c |\vec{B}|$ denean ikusitako (16). ekuazioa desplazamendu-abiadurarako egokia da. $|\vec{E}| > c |\vec{B}|$ baldin bada zatikia E-ren norantzan higitzen da.



3. Irudia.

3. KASUA: DENBORAREKIKO KONSTANTIA BAINA ESPAZIOAREN FUNTZIOPEKOA
DEN EREMU MAGNETIKOA. $\vec{E}=0$

Ia uniformea den eta eremu-lerroak piskana piskana hurbiltzaileak

ditueneko eremu magnetiko batean bota dezagun zatiki kargatu bat. Higidura, 1.irudian azalduetako higidura helikoidalaren perturbazio bat bezala kontsidera daiteke.

Higidura 3.irudian azaltzen denaren antzekoa izango da; zatikia eremua ahulagoa den aldera bultzatua da. Problema estudiantzeko zentru-gidatik pasatzen den eremu-lerroa z ardatz bezala onartuko da, eremu magnetikoak w ardatzekiko simetria azimutala daukalarik (8). ekuazioaren z osagarria kontsideratuz.

$$F_z = m_p \frac{dv_z}{dt} = q v_\theta B_r \Big|_{r=R} \quad (17)$$

Baina dib $B=0$ edo hemen

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r B_r) + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0 \quad (18)$$

Eremu-lerroak piskana piskana hurbiltzaileak direnez gero, sekzio orbital batetan $\partial B_z / \partial z$ konstante bezala kontsidera daiteke, eta

$$B_r \Big|_{r=R} = -\frac{1}{2} R \frac{\partial B_z}{\partial z} \quad (19)$$

Baina, v_θ eta 1.kasuko $v_\perp$ analogoak dira. Guzti hau (17).ekuaziora ermanez

$$m_p \frac{dv_\parallel}{dt} = -\frac{1}{2} q R v_\perp \frac{\partial B_z}{\partial z} = -m \frac{\partial B_z}{\partial z} \quad (20)$$

azken pausoa emateko (13).ekuazioa erabili dugu.

Zatikaren K energia zinetiko osoak ez dauka aldaketarik eremu magnetikoan, Lorentz-en indarra eta abiadura beti elkartutak direlako, hain zuzen. (10).ean definitutako $K_\perp$ ez da hemen konstantea izango, ez eta $K_\parallel$ ere, baina zera idatz daiteke:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m_p v_\parallel^2 \right) = \frac{d}{dt} (K - K_\perp) = -\frac{dK}{dt} = -\frac{d}{dt} (m B_z) \quad (21)$$

Azken urratsa emateko (13).ekuazioa erabili izan da. Beste aldetik, (20).ekuazioa $v_\parallel = \frac{\partial z}{\partial t}$ -rekin biderkatzen badugu

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m_p v_\parallel^2 \right) = -m \frac{\partial B_z}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial t} = -m \frac{dB_z}{dt} \quad (22)$$

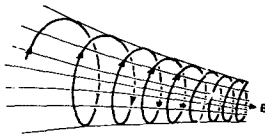
hemen $\frac{d}{dt}$ zera da: trajektoria dinamikoaren gainetik denborarekiko deribatua. (21) eta (22).ekuazioak alderatuz m momentu magnetikoa hi-

giduraren konstante bat dela ikusten da. Halaz ere, ondorio hau ez da hurbilketa bat besterik; hau da, B_z oso astiro aldatzen denerako balioko du soilik. R -ren mailako distantzietan B polito aldatuko balitz, (22). ekuazioa lortzeko egin diren hurbilketak ez lirateke baliagarriak izango.

Beste gauza garrantzitsu bat zera da: zatikiaren higidura fluxu-hodibaten gainazaletik izango da. Hau honela agertzen da: orbita bat zeharkatzen duen $\emptyset$ fluxu magnetikoa hau da

$$\emptyset = B_z \pi R^2 = \pi B_z \frac{m_p^2 v_{\perp}^2}{q^2 B_z^2} = \frac{2\pi m_p}{q^2} \frac{K_{\perp}}{B_z} = \frac{2\pi m_p}{q^2} .m \quad (23)$$

eta m konstantea da. Zatikiaren higidura, eskematikoki, 4. irudian ikusten da.



4. Irudia: Geroz eta itxiagoak diren helize baten espiretatik joaten da zatikia abiadura handiago batez isladatu arte.

(20). ekuazioaren indarraren z osagaiak (osagai paraleloak) zatikiak beti eremu ahulagoa den lekuetara bultzatzen ditu. Beraz, biratzen eta eremu magnetiko handiagora joaten ari diren zatikiak balaztatutako dira: hots, $v_{\perp}$ txikiagoa egiten da. Beste aldetik, eta aldi berean energiaren kontserbazioa dela eta higidura orbitala lasterragoa egiten da; hots, $v_{\perp}$ handiagoa egiten da.

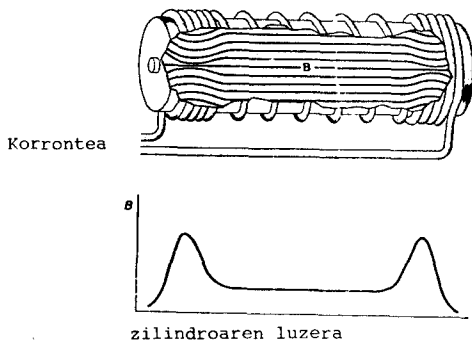
Eremu magnetikoaren hurbilgarritasuna aski bada, zatikiaren orbita itxiagotuz joango da eta azkenik eremu ahula aldera isladatua izango da.

3.4 ISPILU MAGNETIKOAK

Ikusitako ondorioak direla eta, piskanak hurbilkorra den eremu magnetiko batek plasma muga dezake, hasiera batean bederen. Eremuaren norantza nagusiarekiko elkartutak diren planoetan zatikien orbitak zirkularrak dira; eremuaren direkzio nagusian zatikiak moteltzen

dira eta azkenik eremu-lerroetatik isladatzen dira.

Honelako eremu-egitura bati "ispilu magnetikoa" deritzogu. Muga-sistema batean gutxienez bi ispilu erabili behar dira; horietariko sistema bat 5. irudian ikusten da.



5. Irudia: Ispilu magnetikozko sistema

Halaz ere, ispilu-sistemaren bidez ez dirazatiki guztiak mugatuak izango. Eremu-lerroak puntu batean metatzea ezinezkoa da; beraz, B_m eremu magnetiko oso handi baino ez infinitu bat izango dugu ispi-luan. Zatikariaren "energia zinetiko axiala" handiegia baldin bada ez da ispi-luaren eremutik itzuliko, baizik eta ihes egingo du.

Momentu magnetikoa higiduraren konstante bat denez gero (13). ekuazioaren arabera

$$\frac{K_O}{B_O} = \frac{K_{1\perp}}{B_1} \quad (24)$$

Hemen 0 azpiindizeaz 5. irudiaren zentru aldeko partea adierazten dugu, eta 1-ez isladatze-partea. Halaz ere, isladatze-puntua $K = K_{\perp}$. Eta K energia zinetiko osoa konstante da higiduran. Isladatzea izateko B_m ispi-luaren eremuak B_1 baino handiago izan behar du:

$$B_m > B_1 = \frac{K}{K_{O\perp}} \cdot B \quad (25)$$

edo

$$\frac{K_O}{K} > \frac{B_O}{B_m} \quad (26)$$

v_0 hasierako abiadurak eremuaren norantzarekin θ angelu bat osatzen baldin badu, orduan $v_{0\parallel} = v_0 \cos \theta_0$ eta $v_{0\perp} = v_0 \sin \theta_0$. Orduan, (26). ekuazioa honela gelditzen da:

$$\sin^2 \theta \left\langle \frac{B_0}{B_m} \right\rangle \quad (27)$$

eta hauxe da isladatzea izateko baldintza, kasu honetan. Adibidez ispilua eremua B_0 baino ehun aldiz handiagoa bada, eremuaren direkzioarekin 6° baino txikiagoko angelu bat osatzen duten abiadura-zatikiek ihes egiten dute sistematik.

Ispilu-sistemaren zentru aldean gertatzen diren talkak direla eta, abiadura-banaketa isotropiko bat izateko joera dago. Beraz, talken ondorioa zera da: etengabe zatikiak sakabanatzen ari direla sistematik ihes egin dezaketen abiadura-espazioko toki baten aldera.

3.5 EKUAZIO HIDROMAGNETIKOAK

Plasma batean zatikien higidura kolektiboak, hala nola estrikzio-efektua edo plasmaren oszilazioak formulazio hidromagnetiko batez errazago estudia daitezke. Teoria honetan, plasma hidrodinamikoaren ekuazioak betetzen dituen edozein jariakin klasiko bat bezala kontsideratzen da. Baina horrezaz gainera, jariakina eroale elektriko bat da eta indar elektromagnetikoak explizituki kontutan hartu behar dira.

Plasmaren bolumen-unitatean azaltzen den indarra honela idatz daiteke:

$$\vec{F}_V = \vec{J} \times \vec{B} - \text{grad } p$$

hemen: $\vec{J}$: korrante-dentsitatea da, eta p : jariakinaren presioa. Beste indar-mota batzuk (grabitazionala, biskositate-indarrak e.a.) ere kontsidera daitezke baina, erraztasuna dela bide, hemen ez ditugu kontutan hartuko. Gutxi gora-beherako plasmaren neutraltasuna dela eta, $\rho \vec{E}$ gaia ez dugu (28). ekuazioan sartu behar. Neutraltasunaren desbidazioak Poisson-en ekuazioan sartu behar ditugu, baina gehienetan ekuazio dinamikoetan arbuizatzen dira.

Higidura-kantitatearen orekak zera eskatzen du:

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = \rho \left[\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \text{grad}) \vec{v} \right] = \vec{J} \times \vec{B} - \text{grad } p \quad (29)$$

Azken hau jariakinaren higiduraren ekuazioa da edo Euler ekuazioa. Hemen $\int$ plasmaren masa-dentsitatea da eta $\vec{v}$ jariakinaren abiadura. Higidura hidrodinamikoa handia ez den problemetan ($\vec{v}$ grad) $\vec{v}$ duen gaia bazter daiteke gehienetan (fluxu estazionarioko problemetan zero da eta, beraz, esandako hori txikia izan arren ez da baztergarria izango).

Batzutan (28). ekuazioaren $\vec{J} \times \vec{B}$ gaiaren zati bat "presio magnetiko" bat bezala kontsidera daiteke. Hori egiteko Ampere-ren legea erabil daiteke

$$\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{J} \quad (30)$$

eta baita ere identitate bektorial hau:

$$\vec{B} \times \text{rot } \vec{B} = \text{grad} \left(\frac{1}{2} B^2 \right) - (\vec{B} \cdot \text{grad}) \vec{B} \quad (31)$$

Beraz,

$$\vec{J} \times \vec{B} = - \frac{1}{\mu_0} \vec{B} \times \text{rot } \vec{B} = - \text{grad} \left(\frac{B^2}{2\mu_0} \right) + \frac{1}{\mu_0} (\vec{B} \cdot \text{grad}) \vec{B} \quad (32)$$

Energia magnetikoaren dentsitatea den $\frac{B^2}{2\mu_0}$ kantitateak p_m presio magnetikoaren papera jokatzen du.

$$p_m = \frac{B^2}{2\mu_0}$$

Halaz ere, $-\text{grad } p_m$ gehienetan indar magnetikoaren parte bat besterik ez da; gelditzen den indarra $\frac{1}{\mu_0} (\vec{B} \cdot \text{grad}) \vec{B}$ -tik dator.

Presio magnetikoaren kontzeptuaren erabilpenaren adibide bat bezala kontsidera dezagun direkzio bakarreko eremu magnetiko bat. dib $\vec{B}=0$ dela eta, eremuaren norantzan $\vec{B}$ -k ez dauka aldaketarik. Gerta daitezkeen aldaketak, $\vec{B}$ -rekiko elkartutak diren direkzioetan emango dira; beraz, $(\vec{B} \cdot \text{grad}) \vec{B} = 0$. Orduan, (28). ekuazioa honela bilakatzen zaigu.

$$\vec{F}_V = -\text{grad} (P + p_m) \quad (33)$$

eta bolumen-elementu bakoitzaren oreka estatikorako baldintza hauxe da:

$$P + p_m = \text{konstante}$$

Beste hitzez, kasu honetan jariakinaren presioaren eta presio magnetikoaren baturak espazioarekiko independenteak izan behar du.

IKusitako (29).ekuazioaren eta Elektromagnetismoaren ekuazio makroskopoaren (hots,Maxwell-en ekuazioen)gain formulazio hidromagnetikoa osatzeko beste bi erlazio behar ditugu:1.Plasma-jariakinaren jarraitasun-erkuazioa

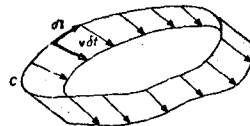
$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div} (\rho \cdot \vec{v}) = 0 \quad (35)$$

eta 2. $\vec{J}$ eta eremuren ezaugarriak erlazionatzen dituen ekuazioa.Bigarren hau Ohm-en lege orokortua dugu, eta zenbait baldintzapetan (Spitzer-ek beste era orokorrago bat emana du) honela idatz daiteke:

$$\vec{J} = g(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \quad (36)$$

Hemen: $\vec{v} \times \vec{B}$ eremu magnetikoan plasmaren higidura hidrodinamikoak sortarazten duen eremu elektrikoa da,eta g plasmaren eroankortasuna.

Askotan egiten den beste hurbilketa bat zera da:eroankortasuna infinituadela onartzea.Orduan,ekuazio hidromagnetikoen erraztasun izugarri bat lortzen da eta,bere bidez,plasma gertatzen diren prozesu fisikoak argiago ikusten dira.Zenbait problematan,astrofisikoetan bereziki,hurbilketa hau ona da.Eroankortasuna infinitua baldin bada , Ohm-en legea honela geratzen zaigu:

$$\begin{aligned} g &\rightarrow \infty \\ \vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} &= 0 \end{aligned} \quad (37)$$


6.Irudia

Eroankortasun infinituak (edo oso handiak) ondorio garrantzitsu bat dakar: fluxu magnetikoa plasman izoztu egiten dela.(37).ekuazioa Faraday-ren indukzio-legearekin erlazionatzen badugu:

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \text{rot} (\vec{v} \times \vec{B}) \quad (38)$$

Eta S gainazal finko baten gainetik horren integrala

$$\frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = \int_S \text{rot} (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{S} \quad (39)$$

edo

$$\frac{d\phi}{dt} = \oint_C (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l} = \oint_C \vec{B} \cdot (d\vec{l} \times \vec{v}) \quad (40)$$

C, higidura hidrodinamikoz plasma mugitzen den espazioan inguramen bat da. 6. irudian azaltzen den bezala, $\oint_C d\vec{l} \times \vec{v}$ honela kontsidera daiteke: C-k inguratzen duen goiko aurpegiaren, denbora-unitatean azaleraren ugaltza eta $\oint_C \vec{B} \cdot (d\vec{l} \times \vec{v})$ ugalduta dagoen gainazal horri dago-kion fluxu magnetikoa. (40). ekuazioak zera ematen digu: C inguramendua, denbora unitatean, fluxuaren aldaketa eremu-lerroak jariakin bate-ra edo barnean mugituko balira da (hots, material guztiz eroankorra den batetan eremu-lerroak "izoztuta" bezala daude).

3.6 ESTRIKZIOAREN EFEKTUA

Plasma batetik deskarga gogor batek estutzeko dauka n joerari "estrikzioaren efektua" deritzogu. Efektu honen oinarria korrante baten eta bere eremu magnetikoaren arteko elkarrekintza da; edo, beste hitzez, korrante-harizuntz paraleloen arteko erakarpena. Efektu hau Bennett-ek aurrean zuen eta piska bat geroago, bere aldetik, Tonks-ek Rosenbluth-ek ere beste ikuspegi batetik estudiatu zuen efektu hau.

Kontsidera dezagun simetria zilindrikoa duen korrante-deskarga bat plasman zehar. Ampere-ren legea dela eta, deskarga-ardatzetik r distantziara gertatzen den indukzio magnetikoa zera da:

$$B(r) = \frac{\mu_0}{r} \int_0^r J(r') \cdot r' \cdot dr' \quad (41)$$

Beraz,

$$\frac{\partial B}{\partial r} = - \frac{\mu_0}{r^2} \int_0^r J(r') \cdot r' \cdot dr' + \mu_0 J(r) = - \frac{1}{r} B(r) + \mu_0 J(r) \quad (42)$$

Bolumen-unitateari dagokion indar magnetikoa hau da:

$$\vec{F}_V = \vec{J} \times \vec{B} = -J(r) \cdot B(r) \cdot \vec{n}_r \quad (43)$$

r-en direkzioaren bektore unitarioa izanik (42). eta (43). ekuazioen arteko J(r) kentzen badugu:

$$F_V = - \frac{1}{2} B \frac{\partial B}{\partial r} - \frac{1}{2} B^2 \mu_0 r \quad (44)$$

Indar hau P_{bk} presio baliokide bat bihurtzeko, horretarako

$F_V = - \partial P_{bk} / \partial r$ egingo dugu; eta, integratzean:

$$P_{bk} = \frac{1}{2} \mu_0 B^2 + \frac{1}{2} \mu_0 \int_0^r \frac{B^2}{r} dr \quad (45)$$

Deskarga aldeko mugen gaineko presioez arduratuko gara bereziki. Ro-senbluth-en arabera, eroankortasun handiko kasua begiratuko dugu guk; kasu honetan eremu-lerroak ia ez dira jariakin eroalearen barnean sartzen (gutxi hau ez da aurreko galderaren eta deskargaren hasieran korronte nahiz eremu magnetikoa oso txikiak direnaren ondorio bat besterik). Orduan (45). ekuazioaren integralak deskarfa-tokitan ez du ezer ermaten. Deskargaren mugan $r = R$ da, eta ateratzen den presioa lehen presio magnetikoa deitu duguna daukagu

$$P_m = \frac{1}{2\mu_0} B^2(R) \quad (46)$$

(45). ekuaziotik kanpoko tokietan presio magnetikoa uniformea dela ondorioztatzen da. Beraz, estrikzioaren efektua honela ikus daiteke: deskargaren kanpoko tokitan batpatean sortutako presio magnetikoaren ondorio bat bezala.

Deskargaren estrikzioak plasmaren konpresio bat dakar. Estrikzioak era egonkor batean iraungo balu, azkenean kanpoko presio magnetikoa eta deskarga-jariakinarena berdinak izango lirateke. Kontsidera dezagun plasma gas perfektu bat bezala; p presoa hauxe izango litzateke: $p = N k T$. Orduan, deskargaren R azken erradioan:

$$\frac{1}{2\mu_0} B^2(R) = \frac{1}{2} \frac{\mu_0}{4\pi R} I^2 = N k T \quad (47)$$

hemen: I = deskarga-korrontearen intentsitatea.

Eta horretatik

$$I^2 = 2 \left(\frac{\mu_0}{4\pi} \right)^{-1} R^2 N k T = 2 \left(\frac{\mu_0}{4\pi} \right)^{-1} A_0 N_0 k T \quad (48)$$

zeren zatiki-kontserbazioak zera bait dakar: $A_0 N_0 = \pi R^2 N$. Hemen, A_0 = deskargaren hasierako sekzioa, N_0 = zatikien hasierako dentsitatea, $\mu_0/4\pi = 10^{-7}$ w/a.p.m eta Boltzmann-en konstantea $k = 1,38 \times 10^{-23}$ joule/ $^{\circ}$ k. Erreaktore termonuklear batean (fusiokoa) $A_0 = 0,04$ m²-takoa eta $N_0 = 10^{21}$ zatiki/m³-takoa izanik 10^8 °k-ko tenperatura bat lortzeko estrikzio-korronteak, gutxi gora-behera, milioi bat amperetakoa izan behar du.

Estrikzioa, berez, fenomeno ezegonkor bat da. Deskargaren mugako presio magnetikoa bere erradioz eta dagoen geometriaz baldintzapezurik

dago. Dauden perturbazio txikiak handiagoak egingo dira sortutako presio-aldaketak perturbazio horien alde badaude.

3.7. PLASMAREN OSZILAZIOAK ETA UHIN-HIGIDURA

Plasmaren berezitasun garrantzitsu bat zera da: oszilazioak jasateko eta uhinak hedatzeko daukan ahalmena. Oszilazio-era desberdin batzuk izan daitezke eta, ekuazio hidrodinamikoen ez-linealtasuna dela bide oszilazio hauek zailak ager daitezke. Horregatik, hemen kasu erraz batzuk estudiantuko ditugu soilik.

1. KASUA: PLASMA-ELEKTROIEN OSZILAZIO ELEKTROSTATIKOAK

Plasma bateko oszilazio elektrostatiakoak Tonks-ek eta Langmuir-ek azaldu zituzten lehen aldiz 1929. urtearen inguruan. Berez bi oszilazio elektrostatiako era daude: frekuentzia altuko oszilazioak; hauetan oso pisu handikoak diren ioiek ez daukate ahalmenik oszilazioekin joateko. Eta frekuentzia baxukoak; hauetan elektroiek ioien inguruan era estatiko batez banatzen dira. Estudia dezagun lehenengo kasua soilik; honi, batzutan, oszilazio elektronikoa deritzo.

Har dezagun ioi positiboek N dentsitate uniforme bat duen plasmaren alde bat. Ez dago ioi negatiborik. Hasiera batean elektroiek ere N dentsitate uniforme bat daukate; baina suposa dezagun elektroiek bakoitzak x direkzioan ρ distantzia bat betetzen dutela, distantzia honetan y -k eta z -k ez daukate zerikusirik eta plasmaren mugan zero da. Elektroien desplazamenduak plasma neutroa perturbatzen du, eta $\Delta x \Delta y \Delta z$ bolumen-elementu bakoitzean karga bat sortarazten du:

$$\rho \cdot \Delta x \Delta y \Delta z = -N e \Delta y \Delta z \left[\rho - \left(\rho + \frac{\partial \rho}{\partial t} \Delta x \right) \right] = \Delta x \Delta y \Delta z \cdot N \cdot e \frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (49)$$

Elektroien higidurak $E(x, t)$ eremu elektrikobat sortarazten du; eremu hau, problemaren simetria dela eta, x direkzioan egongo da.

$$\text{Beraz,} \quad \text{div } \vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho \quad (50)$$

$$\text{edo} \quad \frac{\partial E}{\partial x} = \frac{1}{\epsilon_0} N e \frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (51)$$

eta hau integratu ondoren, zera dugu

$$E = -\frac{N \cdot e}{\epsilon_0} \rho \quad (52)$$

Hemen leke plasma-eremu elektriko uniformetik isolatu egingo dute-nez, integrazio-konstantea zero kontsideratu dugu.

Elektroi batean sortutako indarra $-eE$ -koa da, eta (52).ekuazioaren arabera φ desplazamenduekin zuzenki proportzionala da. Indar hau berrezartzailea dela ikusten da orobat. Beraz, elektroi bakoitzak bere hasierako posizioaren inguruan higidura harmoniko sinple baten bidez oszilatzen du. Elektroi bakoitzarentzat, higiduraren ekuazioa zera da

$$m_e \frac{d^2 \varphi}{dt^2} + \frac{N e^2}{\epsilon_0} \varphi = 0 \quad (53)$$

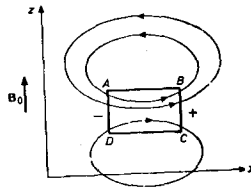
"Plasmaren frekuentzia" hauxe dugu: $f_p = \omega_p / 2\pi$ eta hemen

$$\omega_p = \left(\frac{N e^2}{m_e \epsilon_0} \right)^{1/2} \quad (54)$$

m_e elektroiaren masa izanik.

2. KASUA: UHIN HIDROMAGNETIKOAK ETA ALFVÉN-ENAK

Uhin hidromagnetikoak zera dira: eremu magnetiko konstante baten menpean dagoen ingurune eroale batetik uhinen benetako hedatzeak. Lehen aldiz 1942. urtean Alfvén-ek aurresan zuen etaplastamaren ikusitako formulazio hidromagnetikoarekin ados dago.



7. Irudia: ABCD plasma-segmentua y ardatzaren direkzio eta norantza positiboan higitzen ari da. Sortutako korranteak irudian ikus daitezke.

Begira dezagun fenomenoak fisikoki matematikoki baino lehen. Kontsidera dezagun z ardatzean dagoen B_0 eremu magnetiko uniforme baten menpean daukagun plasma infinitu bat, y ardatzarekiko paraleloa den plasma-segmentu bati (ikus ABCD, 7. irudian) y ardatzaren norantza positiboarekiko paraleloa den $\vec{v}$ abiadura bat emaren badiogu karga-eramaileek

(ioiek eta elektroiek) indarrak jasaten dituzte.

$$q_i (\vec{v} \times \vec{B}_0) \quad (55)$$

eta indar hauek eramaile positiboak eta negatiboak banatu nahi dituzte. ABCD segmentuan i.e.e. bat agertzen da. Hemen, bere eskuineko muturra positiboki kargatuko da eta negatiboki ezkerre. Baina, inguruan dagoen plasma ere eroalea denez gero, zirkuitu elektrikoa itxi egingo zaigu.

Orain, indusitzen den korranteak $\vec{B}_0$ eremuarekin ekiten du. ABCD segmentuan $\vec{J} \times \vec{B}_0$ indar-dentsitatea bere higiduraren kontra dago, eta bitartean plasmaren kanpoko parteetan sortutako indarra azeleratu egiten da y-ren norantza positibotara. ABCD moteldu egingo da eta bere higidura plasmazko ondoko segmentuetara pasatzen da. Gero, prozesu guztia berriro ematen da, eta perturbazio $\pm z$ norantzan hedatzen da.

Ikus ditzagun ekuazio diferentzialak. Bedi $\vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{B}_1$ hemen: B_0 , z ardatzarekiko paraleloa den eremu konstante eta uniforme da; B_1 , korrante indusituak sortutako eremua dugu. Beste galderetan ikusitako ondorioak erabiliz, zera aurkitu nahi dugu: v_y , E_x , J_x eta B_{1y} -en bidez (gainontzeko osagaik zero izanik) adierazita dagoen uhin-higidura errazena Ampere-ren legetik:

$$-\frac{\partial B_{1z}}{\partial z} = \mu_0 J_x \quad (56)$$

eta jariakinarentzako Euler-en ekuazioa: (29). a, kontutan harturik

$$y \frac{\partial v_y}{\partial t} = -J_x B_0 \quad (57)$$

eta

$$0 = J_x B_{1y} - \frac{\partial p}{\partial z} \quad (58)$$

Ekuazio hauen bidez

$$\frac{\partial p}{\partial z} = \frac{B_0}{\mu_0 y} \frac{\partial B_{1y}}{\partial z} \quad (59)$$

eta

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\frac{1}{2\mu_0} \frac{\partial (B_{1y}^2)}{\partial z} \quad (60)$$

Ohm-en lege orokorra honela idatz daiteke:

$$E_x = -v_y B_0 + \frac{1}{g} J_x = -v_y B_0 - \frac{1}{g \mu_0} \frac{\partial B_{1y}}{\partial z} \quad (61)$$

eta Faraday-ren legearen bidez

$$\frac{\partial B_{1y}}{\partial t} = - \frac{\partial E_x}{\partial z} \quad (62)$$

(59).eta (61).ekuazioen arteko v_y kentzen badugu eta azaldutakoaren eta (62).aren artean E_x ezabatuz, ρ konstantea dela onartuz, zera daukagu

$$\frac{\partial^2 B_{1y}}{\partial t^2} = \frac{B_0^2}{\mu_0 \rho} \frac{\partial^2 B_{1y}}{\partial z^2} + \frac{1}{g \mu_0} \frac{\partial^3 B_{1y}}{\partial z^2 \partial t} \quad (63)$$

eta hauxe da Alfvén-en uhin hedapena gidatzen duen ekuazioa

Plasmaren g eroankortasuna infinitua izango balitz, (63).ekuazioak zera ematen digu: z ardatzarekiko paraleloki higitzen den uhin laun indargetu bat, bere fase-abiadura.

$$V_p = \frac{B_0}{\sqrt{\mu_0 \rho}} \quad (64)$$

izanik.

Eroankortasun finitua denean zer gertatzen den ikusteko proba dezagun (63).ekuazioa askatzeko honelako soluzio bat:

$$B_{1y} = b_1 \cdot \exp \left[\alpha z + j \omega t \right] \quad (65)$$

Soluzio hau ona da baldin

$$\alpha^2 = \frac{-\omega^2}{V_p^2 + j \omega \frac{1}{g \mu_0}} \quad (66)$$

bada (V_p , (64).ekuazioan ikusitakoa izanik).

Indargetzea txikia bada:

$$\alpha \simeq \pm \left(j \frac{\omega}{V_p} + \frac{\omega^2}{2g \mu_0 V_p^3} \right) \quad (67)$$

Beraz, (63).ekuazioaren askapena zera da: $\pm$ z norantzaz hedatzen den uhin laun indargetua.

4. KAPITULUA

MAXWELL-EN EKUAZIOAK

4.1 SARRERA

Elektromagnetikaren toeriatik lanean aritzean, mila lege, hastapen eta teorema azaltzen zaizkigu. Haueteriko batzuk, nahiz eta lege ize-na ereman, oinarritzekoagoak diren beste lege batzuetatik erakarriak izan daitezke. Maxwell zera aurkitzen saiatu zen: Elektromagnetikaren teoria orokor bat eraikitze (egoera estatiko nahiz dinamiko bate-tan) behar den lege-kopuru minimoa, eta lege horiek zeintzuk diren. Lege hauek lau dira, 1.863. urtean idatzi zuen Maxwell-el lehenen-go aldiz eta gaur egun "Maxwell-en ekuazioak" derizkiegu.

Lege horietan erabiltzen diren magnitudeak (eta MKS sisteman dagoz-kien unitateak) hauexek ditugu:

$\vec{D}$: Desplazamendu elektrikozko bektorea. Coulomb/m²

: Karga-dentsitatea. Coulomb/m³

$\vec{B}$: Indukzio magnetikozko bektorea. Tesla = $\frac{\text{Volta} \cdot \text{seg}}{\text{m}^2}$

$\vec{E}$: Eremu elektrikozko bektorea. Volta/m

$\vec{H}$: Eremu magnetikozko bektorea. Amp/m

$\vec{J}$: Korrante-dentsitatezko bektorea (korrante hau eroalpenekoa nahiz konbekziokoz izan daiteke). Amp/m²

Maxwell-en lau legeak hauexek ditugu:

$$\text{div } \vec{D} = \rho \quad (1)$$

$$\text{div } \vec{B} = 0 \quad (2)$$

$$\text{rot } \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (3)$$

$$\text{rot } \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (4)$$

Ekuazio-multzo hau, beste erlazio lagungarrirekin eta definizioekin batera, elektromagnetika klasikoaren oinarri bezala kontsidera daite-ke. Eta gainera, atomo baino handiagoak diren tamainetan, zero frekuen-tziatik irrati-frekuentziaraino (eta argi-frekuentziako zenbait kasu-tan) fenomeno elektromagnetiko guztiak beraiek gidatzen dituzte.

Lege hauek, liburuetan elektromagnetikaren azken aldean etortzen direnez gero, beste lege batzuetatik erakarriak bezala kontsideratzeko arriskua badago egon; baina benetan oinarrizkoak bezala kontsideratu behar ditugu. Beraz, beren azken frogantza, beste edozein lege experimentalen antzera, zera da: beraien eta beren bidez lor daitezkeen ondorioen esperientzia fisikoa.

Informazioa osatzeko behar diren erlazio garrantzitsuenak hauek ditugu:

- 1.- Indarraren legea: Hau nolabait eremu elektriko eta magnetikoaren definizioa da. Karga bat $\vec{E}$ eremu elektriko batean badago eta $\vec{v}$ abiadura batez eta $\vec{B}$ indukzioko eremu magnetiko batean higitzen bada, jasaten duen indarra hau da:

$$\vec{F} = q \vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} \quad (5)$$

- 2.- Eroalpenezko korrontearen definizioa:)Ohm-en legea) Eroale batean:

$$\vec{J} = g \vec{E} \quad \text{am/m}^2 \quad (6)$$

hemen g eroankortasuna dugu, eta bere unitatea $\text{ohm}^{-1} \cdot \text{m}^{-1}$ dugu.

- 3.- Konbekziozko korrontearen definizioa: j karga-dentsitateko ingurune bat $\vec{v}$ j abiadura batez higitzen bada, korrante-dentsitatea hau da:

$$\vec{J} = j \vec{v} \quad \text{am/m}^2 \quad (7)$$

- 4.- Permitibitatearen definizioa: D desplazamenduaren eta E eremu elektrimoaren artean dagoen erlazioa hau dugu:

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E} = \epsilon_r \cdot \epsilon_0 \vec{E} \quad (8)$$

ϵ_0 hutsaren permitibitatea ($\epsilon_0 \simeq \frac{1}{36\pi} \cdot 10^{-9}$ Faraday/m) eta ϵ_r materialari dagokion parametro bat izanik.

Orokortasun guztiarekin ϵ_r (edo ϵ) tentsore bat da. Baina erabiltzen den media homogeno, isotropiko, lineal eta denborarekiko aldaezina baldin bada, ϵ konstante eskalar bat da.

- 5.- Permeabilitatearen definizioa: B indukzioaren eta B intentsitate magnetikoaren artean dagoen erlazioa hau da:

$$\vec{B} = \mu \vec{H} = \mu_r \cdot \mu_0 \vec{H} \quad (9)$$

hemen μ_0 hutsaren permeabilitatea da ($\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Henry/m.), eta μ_r materialari dagokion parametro bat.

Orokortasun guztiarekin, μ_r (edo μ) tentsore bat da. Baina erabiltzen den medioa homogeno, isotropiko, lineal eta denborarekiko aldaezina baldin bada, μ konstante eskalar bat da.

4.2 MAXWELL-EN EKUAZIOAK ERA INTEGRALEAN

Askotan, Maxwell-en ekuazioak espazioaren esparru finitu bati edo eroaleak inguratzen duen bide bati aplikatu behar dizkiegu; horretarako, ekuazioak era integral batean izan behar ditugu, eta hauek dira:

$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{s} = \int_V \rho \cdot dV \quad (10)$$

$$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{s} = 0 \quad (11)$$

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = - \frac{\partial}{\partial t} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{s} \quad (12)$$

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{\ell} = \int_S \vec{J} \cdot d\vec{\ell} + \frac{\partial}{\partial t} \int_S \vec{D} \cdot d\vec{s} \quad (13)$$

1. Ekuazioa Gauss-en legea da, eta honela dio: edozein gainazal itxi batetik une batean ateratzen den desplazamenduaren fluxua une horretan barruan dagoen karga bezainbatekoa da.

2. Ekuazioak zera dio: edozein gainazal itxi batetik edozein une batean ateratzen den fluxu magnetikoa zero da. Honek zera esan nahi du: Naturan ez dela orain arte karga magnetikorik aurkitu.

3. Ekuazioa Faraday-ren indukzio-legea dugu: bide itxi baten gainetik eremu elektrikoaren integral lerromakurra (hots, indar elektroeragileak), bide hori zeharkatzen duen fluxu magnetikoaren ken denborarekiko deribatua bezainbatekoa da.

4. Ekuazioa Ampère-ren lege orokortua da. Hots, Maxwell-en desplazamendu-korrontea bere barruan duena. Zera dio: bide itxi baten gainetik intentsitate magnetikoaren integral lerromakurra (hots, indar magnetoeragilea) bide hori zeharkatzen duen korrontea (eroalpenezkoa, konbekziozkoa eta desplazamenduzkoa) bezainbatekoa da.

4.3 UHINAREN EKUAZIOAREN ASKAPENA

Elektromagnetika liburuan 11.ikasgaian azaltzen den bezala, $\vec{H}$ eremu magnetikoari dagokion uhinaren ekuazioa hauxe dugu:

$$\nabla^2 \vec{H} - \epsilon \mu \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} - g \mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = 0 \quad (14)$$

eta E-ri dagokiona:

$$\nabla^2 \vec{E} - \epsilon \mu \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} - g \mu \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = 0 \quad (15)$$

Ekuazio hauek baliagarriak dira eremu elektromagnetikoentzat ingurune lineala, homogenoa eta karga-dentsitatea zero denean, ingurune hori eroalea nahiz dielektrikoa izan. Halaz ere, ekuazio hauek betetzeaz gainera Maxwell-en ekuazioak ere bete behar dira. (14). eta (15). ekuazioak Maxwell-en ekuazioen ondorio bat direla argi eta garbi dago, baina alderantzizkoa ez da beti betetzen: hots, uhinaren ekuazioak askatzerakoan bide batez Maxwell-ek ekuazioak betetzen diren ala ez ikusi beharra dago. Uhin monokromatikoentzako metodo egoki bat zera da: $\vec{E}$ -ren askapena lortu; gero $\vec{E}$ -ren errotazionalak $\vec{B}$ -ren denborarekiko deribatua ematen digu, eta hortik uhin monokromatikoentzat erraz samar atera daiteke $\vec{B}$ balioa.

Uhin monokromatikoak frekuentzia bakar bateko uhinak dira. Uhin hauek estudiatzeko aldagi konplexuen teoriak bide egoki bat ematen digu. Denborarekiko eremuaren menpekotasuna $e^{-j\omega t}$ itxurakoa dela kontsideratzen da. Beraz,

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_s(\vec{r}) e^{-j\omega t} \quad (16)$$

(eta beste horrenbeste $\vec{H}$ -rentzat). Eremu fisikoa lortzeko (16). ekuazioaren osagai erreala hartu behar da (dakigun bezala, aldagai konplexuen funtzio batetik magnitude fisikoetara pasatzeko osagai erreala ala irudikaria hartu behar da. Bi aukeramen horien arteko desberdintasuna $\pi/2$ -ko fase-desplazamenduan dago eta, beraz, osagai bat ala bestea har daiteke. Baina, problema batean bat ahutatuz gero berarekin jarraitu behar da. Hemen ezer esaten ez bada, osagai erreala hartuko dugu).

Beste aldetik, bere orokortasunean $\vec{E}_s(\vec{r})$ zenbaki konplexua da eta beraz, eremu elektriko erreala $\cos(\omega t + y)$ -rekin proportzionala da; $\vec{E}_s(\vec{r})$ -ren fasea izanik.

(16). ekuazioa baliatuz (15).a honela bilakatzen da.

$$e^{-j\omega t} \left\{ \nabla^2 \vec{E}_s + \omega^2 \epsilon \mu \vec{E}_s + j \omega g \mu \vec{E}_s \right\} = 0 \quad (17)$$

eta eremu elektrikoaren aldaketa espaziala aurkitzerakoan $e^{-j\omega t}$ faktorea ken dezakegu. Aska dezagun orain (17). ekuazioa kasu berezi batzutan.

A) Uhin laun monokromatikoak eroalea ez den ingurune batean.-

(17).Ekuazioaren soluzio errazenak "uhin laun"deitutakoenak dira. Ingurune dielektrikoaren eroankortasuna zero bada(17).ekuazioa ondo-ko hau bilakatzen da:

$$\nabla^2 \vec{E}_s + w^2 \epsilon_\mu \vec{E}_s = 0 \quad (18)$$

Uhin laun bat honela definitzen da:ematen den direkzioarekiko elkar-tzuta den plano baten puntu guztietan anplitude berdina duen uhin bat.Aukeratutako direkzioa z bada, adibidez,z berdina duen puntu guztietan $\vec{E}_s$ berdina da;hots, $\vec{E}_s = \vec{E}_s(z)$. Kasu honetan (18).ekuazioa as-ko erraz daiteke:

$$\frac{d^2 \vec{E}_s(z)}{dz^2} + w^2 \epsilon_\mu \vec{E}_s = 0 \quad (19)$$

x-ekiko eta y-rekiko deribatuak desagertu egiten dira, E_s z-ren funtzioa bait da soilik. (19).ekuazioaren askapena oso erraza da eta ze-ra ematen du:

$$\vec{E}_s(z) = \vec{E}_0 \cdot e^{\pm jw\sqrt{\epsilon_\mu} \cdot z} \quad (20)$$

$\vec{E}_0$ bektore konstante bat izanik.(20).ekuazioak z ardatzarekiko uhin-fronteak elkartzuta dituen (18).ekuazioaren soluzio bat ematen digu; halaz ere,soluzio guzti hauek ez dituzte Maxwell-en ekuazioak bete izaten.Kasu honetan bete ez daitekeen ekuazioa (1).da.Hau,gure kasu honetan, esandako baldintzak kontutan harturik,honela idatz daiteke:

$$\text{div } \vec{E}_s = 0 \quad (21)$$

$\vec{E}_s$, x eta y-tik independentea denez gero, (21).a hau bihurtzen zaigu:

$$\frac{\partial}{\partial z} E_{sz}(z) = -j \cdot w \cdot \sqrt{\epsilon_\mu} E_{sz}(z) = 0 \quad (22)$$

Hau egia izan dadin $E_{sz}(z) = 0$ ozan behar du;hots, $\vec{E}_z$ -k ez du z osa-gairik edukibehar.Beraz, uhin laun baten eremu elektrikoak uhin-fron-tearekiko paraleloa izan behar du.Orduan,z ardatzarekiko uhin-fronteak elkartzuta dituen uhin baten eremu elektrikoak itxura honetakoa izango da:

$$\vec{E}_s(z) = (\vec{i} E_{0x} + \vec{j} E_{0y}) \cdot e^{\pm jw\sqrt{\epsilon_\mu} z} \quad (23)$$

ERemu honekin lotuta dagoen eremu magnetikoa aurkitzeko horren erro-
tazionala aurkitu behar dugu.

$$\text{rot } \vec{E}_s(z) = \mp \left\{ -j\omega\sqrt{\epsilon_\mu} \vec{r} E_{0y} + \omega\sqrt{\epsilon_\mu} \vec{r} E_{0x} \right\} e^{\mp j\omega\sqrt{\epsilon_\mu} z} \quad (24)$$

eta hau $j\omega \vec{B}_s$ -rekin berdindu behar dugu (hau (3).ekuaziotik dator
 $\vec{B} = \vec{B}_s e^{-j\omega t}$ izango dela kontutan harturik. Beraz:

$$\vec{B}_s = \mp \left\{ -E_{0y} \vec{r} + E_{0x} \vec{r} \right\} \sqrt{\epsilon_\mu} e^{\mp j\omega\sqrt{\epsilon_\mu} z} \quad (25)$$

edo erraz ikus daitezkeenez

$$\vec{B}_s = \mp \sqrt{\epsilon_\mu} \vec{k} \times \vec{E}_s \quad (26)$$

Beraz, $\vec{B}_s$, $\vec{E}_s$ -rekiko eta z ardatzarekiko elkartzuta da batera. Heda-
tze-direkzioa honela definitzen da hitzarmenez: $\vec{E}_s$ -ren (edo $\vec{B}_s$ -ren)
fase-alaketaren abiadura maximoko direkzioa. Gure kasu honetan z di-
rekzioa da (+ z zeinu positiboa hartzen badugu eta -z negatiboarekin)

Orduan, laburtzeko: z positiboaren norantzan hedatzen ari den uhin laun
monokoromatiko bat ekuazio hauek ematen digute:

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_s(z) e^{-j\omega t} = \vec{E}_0 e^{j\omega(\sqrt{\epsilon_\mu} z - t)} \quad (27)$$

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \vec{B}_s(z) e^{-j\omega t} = \sqrt{\epsilon_\mu} \vec{k} \times \vec{E}_0 e^{j\omega(\sqrt{\epsilon_\mu} z - t)} \quad (28)$$

$\vec{E}_0$, xy planoarekin paraleloa den bektore edozein bat izanik.

Hemen, erraztasuna dela eta, gauza horiek aurkitzeko hedatze-direkzio
bezala z ardatza hartu dugu. Baina hau orokortasun guztiarekin azaldu
nahi badugu eta hedatze-direkzioetat edozein $\vec{n}$ bat hartu nahi badugu
($\vec{n}$ bektore unitarioa izanik) ekuazioak aldatu behar ditugu: $\vec{k}$ -ren or-
dez $\vec{n}$ jarri behar da eta z-ren ordez $\vec{n} \cdot \vec{r}$. Hots, $\vec{n}$ -ren direkzioaren gai-
neko $\vec{r}$ -ren projekzioa. Orduan, $\vec{E}$ $\vec{n}$ -rekiko elkartzuta izango da, eta ez
 $\vec{k}$ -rekiko. Beraz, $\vec{n}$ -rekiko paraleloki hedatzen den uhin laun monokroma-
tiko baten ekuazioak hauek ditugu:

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 e^{j\omega \left[\sqrt{\epsilon_\mu} \vec{n} \cdot \vec{r} - t \right]} \quad (29)$$

eta

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \sqrt{\epsilon_\mu} \vec{n} \times \vec{E}_0 e^{j\omega \left[\sqrt{\epsilon_\mu} \vec{n} \cdot \vec{r} - t \right]} \quad (30)$$

$\vec{E}_0, \vec{n}$ -rekiko elakartzuta den edozein bektore izanik.

Sarritan erabiltzen den beste idazkera hau da:

$$\sqrt{\epsilon \mu} \cdot \vec{m} = \vec{K} \quad (31)$$

$\vec{K}$ bektore honi "hedatze-bektorea" deritzo. Bektore hau erabiliz $\vec{K}$ -ren direkzioan joaten den uhin laun baten ekuazioak hauexek ditugu:

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 \cdot e^{j(\vec{K} \cdot \vec{r} - \omega t)} \quad (32)$$

eta

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \frac{1}{\omega} \vec{K} \times \vec{E}_0 \cdot e^{j(\vec{K} \cdot \vec{r} - \omega t)} \quad (33)$$

Uhin laun monokromatiko baten abiadura zera da, fase konstanteko planoen higidurarena. Fase konstanteak hauxe esan gura du

$$\vec{K} \cdot \vec{r} - \omega t = \text{konstante} \quad (34)$$

$\vec{K} \cdot \vec{r}$, beste era honetan ematen badugu: $K \rho$; $\vec{K}$ -ren magnitudea izanik eta ρ $\vec{K}$ -ren gainean $\vec{r}$ -ren projekzioa; (34). ekuazioa honela eman dezakegu:

$$K \rho - \omega t = \text{konstante} \quad (35)$$

Denborarekiko deribatuz:

$$v_p = \frac{d\rho}{dt} = \frac{\omega}{K} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon \mu}} \quad (36)$$

eta hauxe da, hain zuzen ere, fase konstanteko gainazalen abiadura.

Espazio librean $v_p = c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$, eta beraz

$$v_p = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_r \mu_r}} \quad (37)$$

ϵ_r = ingurunearen konstante dielektrikoa

μ_r = ingurunearen iragazkortasun erlatiboa

$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} = 2.9979 \times 10^8 \text{ m/s}$ hutseango argiaren abiadura da; honek horrela izan behar du, argia ez bait da erradiazio elektromagnetiko bat besterik.

Baina, Maxwell-ek hau argitaratu zuenean teoriaren arrakasta bat izan zen, garai hartan argiaren izakera elektromagnetikoa zalantzan zegoen,

(37).etik errefrakzio-indize optikoa atera daiteke:

$$n = \frac{c}{V_p} = \sqrt{K_e \cdot K_m} \quad (38)$$

Eta ingurune garden gehienetan K_m unitatearen inguruan dabil. Orduan, horietan errafrakzio-indizea konstante dielektrikoaren erro karratua da.

B) Uhin laun monokromatikoak ingurune eroaletan:

Honelako ingurune batean ω frekuentziako uhin monokromatiko baten ekuazioa hauxe du:

$$\nabla^2 \vec{E}_s + \omega^2 \epsilon_\mu \vec{E}_s + j\omega g_\mu \vec{E}_s = 0 \quad (39)$$

Eta lehen bezala xy planoarekiko uhin-fronteak paralelo dauzkaten uhin launen ekuazioa honela du:

$$\frac{d^2 \vec{E}_s}{dz^2} + \omega^2 \epsilon_\mu \vec{E}_s + j\omega g_\mu \vec{E}_s = 0 \quad (40)$$

$\vec{E}_s$, z-ren funtzioa izanik soilik.

Ekuazio horren askapena lortzeko $\vec{E}_s = \vec{E}_0 e^{jyz}$ jarri behar da. Hori (40) ekuaziora eramanez zera daukagu:

$$-\gamma^2 + \omega^2 \epsilon_\mu + j\omega g_\mu = 0 \quad (41)$$

γ zenbaki konplexu bat da $\gamma = \alpha + j\beta$. Zenbaki konplexuen teoria erabiliz zera atera daiteke.

$$\gamma = \alpha + j\beta = \pm (\omega^4 \epsilon^2 \mu^2 + \omega^2 g^2 \mu^2)^{1/4} (\cos \varphi + j \sin \varphi) \quad (42)$$

hemen

$$\varphi = \frac{1}{2} \lg^{-1} \frac{g}{\omega \epsilon} \quad (43)$$

edo

$$\alpha = \pm \omega \sqrt{\epsilon \mu} \left[\frac{1}{2} \mp \frac{1}{2} \sqrt{1 + \left(\frac{g^2}{\omega^2 \epsilon^2} \right)} \right]^{1/2} \quad (44)$$

$$\beta = \omega g \mu / 2 \alpha \quad (45)$$

Beraz, z ardatzaren direkzioan doan uhin laun bat adierazteko hau du:

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_s(\vec{z}) \cdot e^{-j\omega t} = \vec{E}_0 e^{j(\alpha z - \omega t)} e^{-\beta z} \quad (46)$$

eta hau uhin berreduraz indargetu bat da.

Ikusitako ekuazioak zehatzak baina zailak dira; beraz, zilegi dirudi hurbiltze batzuk egitea.

Eroale metalikoentzat eta frekuentzi tarte optikotikoso behera bada go: $g \gg \epsilon \omega$ eta $\beta \approx \pi/4$

orduan:

$$\beta = \sqrt{\omega g \mu} \cdot \sin \frac{\pi}{4} = \sqrt{\omega g \mu/2} \quad (47)$$

1/3-ko eremu elektrikoa bere gainazaleko balioaren 1/e zenbat aldiz-koa deneko sakonera ematen digu; honi "sartze-sakonera" deritzogu eta δ batez adierazten da. Sartze-sakonera garrantzia zera da: uhin elektromagnetiko batek ingurune eroale batetan sar daitekeen sakonera neurtzen digula. Zilararren eroankortasuna, adibidez, mikrouhinen frekuentzian $g = 3 \times 10^7$ mho/m-koa da (mho = ohm⁻¹). Frekuentzia 10^{10} Hz-koa bada (ohizko mikrouhinen frekuentzia bat da) sartze-sakonera zera da:

Beraz, mikrouhinen frekuentzietan zilarrean dagoen sartze-sakonera oso txikia da eta ordun zilar hutsezko edo letoizko material bien artean dagoen desberdintasuna arbuiagarria da. Horixe da benetan gertatzen dena, eta uhinen gida bezala erabiliko diren elementuen kostua jaisteko galvanoplastia deitutako teknika erabiltzen da.

Begira dezagun beste adibide bat. Kalkula dezagun beharrezko frekuentzia, itsasoko uretan, metro bateko sartze-sakonera izan dadin. Itsas uretan $\mu = \mu_0$ eta $g \approx 4,3$ mho/m

$$\omega = \frac{2}{g \mu \delta} = \frac{2}{4,3 \times 4\pi \times 10^{-7} \cdot \delta^2} \text{ s}^{-1} = \frac{3,7 \times 10^5}{\delta^2} \text{ s}^{-1}$$

eta

hau da, ia 60 KHz. Murgildurik dagoen urazpiko batekin transmisore on batez komunikatzea posible da. Baina frekuentzia oso apal bat erabili behar da eta, halaz ere, ahuldura oso handia da. Ikusitako kasuan 5 sartze-sakonera kontsideratuz hasierako eremu elektrikoaren %1 baino ge-

hiago ez da gelditzen, eta potentziaren %0,01.

C) Uhin esferikoak ingurune ez-eroaletan:

Honelako ingurune batean, eremu elektrikoaren uhinaren ekuazioa hau da:

$$\nabla^2 \vec{E} - \epsilon_{\mu} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0 \quad (48)$$

Uhin monokromatikoentzat zati espaziala hau bihurtzen zaigu

$$\nabla^2 \vec{E}_s + \epsilon_{\mu} \omega^2 \vec{E}_s = 0 \quad (18)$$

Koordenatu esferikoen zailtasuna zera da: guk E_s bektorea bere osagai erradialaren azimutalaz eta meridionalaz eman nahi dugu, eta hauek erradioaren, azimutaren eta kolatitutearen funtzio bezala agertarazi. Hori egiten bada, (18). ekuazioan laplaziarrak koordenatu esferikotan erabiltzea ez da aski; horren ordez laplaziarra honela definitu behar da:

$$\nabla^2 \vec{E}_s = -\text{rot} \cdot \text{rot} \cdot \vec{E}_s - \text{grad. div} \vec{E}_s \quad (49)$$

$\vec{E}_s$ -ren dibergentzia zero da, baina $\text{rot} \vec{E}_s$ -ren osagai erradiala ez bakarrik $\vec{E}_s$ -ren osagai erradiala baizik eta osagai azimutala eta meridionala baditu ere. Eta beste horrenbeste gertatzen da besteekin; azkenean $\vec{E}_s$ -ren hiru osagaiek parte hartzen duten baterako hiru ekuazio diferentzial partzialak izango ditugu, Laplace-ren ekuazio bektorialentzat koordenatu kartesiarretan dagoen banatzea ez da esferikotan gertatzen. Halaz ere, idatzi beharko genuke: $E_{sx}(r, \theta, \phi)$, $E_{sy}(r, \theta, \phi)$, $E_{sz}(r, \theta, \phi)$. Bide rraz batek esandako zailtasuna garbitzen digu. Kontsidera dezagun Helmholtz-en ekuazio eskalarra:

$$\nabla^2 \psi - \epsilon_{\mu} \omega^2 \psi = 0 \quad (50)$$

geroxeago ikusiko dugun bezala, bere soluzioak erraz aurkitzen dira. Izan bedi ψ horietako soluzio bat; orduan, $\vec{E}_s = \vec{r} \times \text{grad} \psi$ Helmholtz-en ekuazio bektorialaren soluzio bat da.

(49). ekuazioarekin (18).a honela daukagu:

$$-\text{rot} \cdot \text{rot} \cdot \vec{E}_s + \text{grad. div} \cdot \vec{E}_s + \epsilon_{\mu} \omega^2 \vec{E}_s = 0 \quad (51)$$

Esandakoa egiaztatzeko, har dezagun:

$$\vec{E}_s = \vec{r} \times \text{grad } \psi \equiv -\text{rot } (\vec{r} \cdot \psi) \quad (52)$$

hau hemendik dator:

$$\text{rot } (\vec{A} \cdot \psi) = \psi \text{rot } \vec{A} - \vec{A} \times \text{grad } \psi \quad (53)$$

eta

$$\text{rot } \vec{r} = 0 \quad (54)$$

Beste aldetik, $\vec{B}_s$ -ren errotazionala aurkitzeko ondoko identitate bektoriala erabili daiteke:

$$\text{rot } (\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{A} \text{ div } \vec{B} - \vec{B} \text{ div } \vec{A} + (\vec{B} \cdot \text{grad}) \vec{A} - (\vec{A} \cdot \text{grad}) \vec{B} \quad (55)$$

orduan:

$$\text{rot } (\vec{r} \times \text{grad } \psi) = \vec{r} \nabla^2 \psi - \text{grad } \psi \text{ div } \vec{r} + (\text{grad } \psi \cdot \text{grad}) \vec{r} - (\vec{r} \cdot \text{grad}) \text{grad } \psi \quad (56)$$

Baina edozein $\vec{A}$ bektore batentzat $(\vec{A} \cdot \text{grad}) \vec{r} = \vec{A}$ eta $\vec{r}$ -ren dibergentzia hiru (3) da. Bigarren atalaren lehenengo gaia erraz daiteke, horretarako ψ -k Helmholtz-en ekuazio eskalarra betetzen duela hartzen dugu kontutan; beraz parte zail bakartzak azkeneko gaia gelditzen zaigu.

Identitate bektorial hau kontsideratzen badugu:

$$\text{grad } (\vec{A} \cdot \vec{B}) = (\vec{A} \cdot \text{grad}) \vec{B} + (\vec{B} \cdot \text{grad}) \vec{A} + \vec{A} \times \text{rot } \vec{B} + \vec{B} \times \text{rot } \vec{A} \quad (57)$$

eta $\vec{A} = \vec{r}$ eta $\vec{B} = \text{grad } \psi$ egiten badugu

$$\text{grad } (\vec{r} \cdot \text{grad } \psi) = (\vec{r} \cdot \text{grad}) \text{grad } \psi + (\text{grad } \psi \cdot \text{grad}) \vec{r} \quad (58)$$

(57).ekuazioaren azkeneko bi gaiak zero dira, gradiente baten errotazionala zero delako eta beste horrenbeste $\vec{r}$ -ren errotazionala.

Erlazio guzti hauek (56).ekuazioan erabiltzean:

$$\text{rot } (\vec{r} \times \text{grad } \psi) = -\epsilon_{\mu\nu\lambda} \omega^\lambda \vec{r} \psi - 3 \text{grad } \psi - \text{grad } (\vec{r} \cdot \text{grad } \psi) + (\vec{r} \cdot \text{grad}) \text{grad } \psi + \frac{(\vec{r} \cdot \text{grad})}{(59)} \text{grad } \psi$$

eta

$$\text{rot } (\vec{r} \times \text{grad } \psi) = -\epsilon_{\mu\nu\lambda} \omega^\lambda \psi \vec{r} - 3 \text{grad } \psi - \text{grad } (\vec{r} \cdot \text{grad } \psi) + 2 \text{grad } \psi \quad (60)$$

Bukatzeko, (60).ekuazioaren errotazionala hartuz:

$$\text{rot rot}(\vec{r} \times \text{grad} \psi) = -\epsilon \mu \omega^2 \text{rot} \psi \vec{r} = \epsilon \mu \omega^2 \vec{r} \times \text{grad} \quad (61)$$

edozein gradienteren errotazionala zero bait da.

Hau Helmholtz-en ekuazio bektoriala da, hain zuzen.

Ikusi dugun bezala, $\vec{r} \times \text{grad} \psi$ Helmholtz-en ekuazio bektorialaren soluzio bat da, hemen ψ -k Helmholtz-en ekuazio eskalarren soluzio bat izan behar du; orain, uhin elektromagnetikoak eraikitzeke soluzio horiek nola erabili behar diren ikasi behar dugu. Bidea erraza da. Eredu elektrikoaren aldageta espaziala zera dela kontsideratzen da:

$$\vec{E} = \vec{r} \times \text{grad} \psi \quad (62)$$

Hartuko dugun eremu magnetikoak, $\vec{E}_s$ -rekin batera, Maxwell-en ekuazioak bete behar ditu. Horretarako (3).ekuazioa honela adierazten dugu:

$$\text{rot} \vec{E}_s = j\omega \vec{B}_s \quad (63)$$

hemen, denborarekiko $e^{-j\omega t}$ menpekotasun standarda suposatuz dugu (60). ekuazioak $\vec{E}_s$ -ren errotazionala beste era batez eman dezake, edo era laburrago batean:

$$\vec{B}_s = -j \frac{1}{\omega} \text{rot} (\vec{r} \times \text{grad} \psi) \quad (64)$$

Edozein errotazional baten dibergentzia zero denez gero, (2).ekuazioa ongi betetzen da. (4).ekuazioa betetzen dela ikusteko zera pentsatu behar dugu: $\vec{E}_s$ eta $\vec{B}_s$ uhin-ekuazioaren soluzioak dira, eta ekuazio horiez da (3). eta (4).ekuazioen konbinazio bat besterik.

(62). eta (64).ekuazioek ematen duten soluzioa ez da ψ bati dagokion bakarra. Beste soluzio bat hau da:

$$\vec{B}_s = \sqrt{\epsilon \mu} \vec{r} \times \text{grad} \psi \quad (65)$$

eta eremu elektrikoa (4).ekuaziotik erakar dezakegu ($J=0$ izanik)

$$\vec{E}_s = \frac{J}{\omega \sqrt{\epsilon \mu}} \text{rot} (\vec{r} \times \text{grad} \psi) \quad (66)$$

Beraz, $\vec{E}_s'$ eta $\vec{B}_s'$ alde batetik eta $\vec{E}_s$ eta $\vec{B}_s$ bestetik Maxwell-en ekuazioen soluzioak dira. Bi bikote hauen arteko desberdintasuna zera da: $\vec{E}_s'$ edozein puntutan zentrua koordinatu-jatorrian duen eta puntu horretatik pasatzen den gainazal esferikoarekiko tangentea da; beste

kasua, aldiz $\vec{E}'_s$ -k betetzen du hori berori. Hori dela eta, $\vec{E}_s$ eta $\vec{B}_s$ bikoteak ematen duen soluzioari "zehar elektrikoa" (Z.E.) deritzogu, eta $\vec{E}'_s$ eta $\vec{B}'_s$ bikoteari "zehar magnetikoa" (Z.M.) (hemen zeha-ek erradioarekiko elkartzuta adierazten du).

Ikusi dugun bezala, Helmholtz-en ekuazio bektorial askatu baino lehen eskalarra askatu behar dugu. Hau, koordenatu esferikotan aldagaien bereiztea deitutako metodoz egin daiteke. Helmholtz-en ekuazio eskalarra, koordenatu esferikotan, hau da:

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \phi^2} + k^2 \psi = 0 \quad (67)$$

hemen, $k^2 = \epsilon \mu$ da.

$$\psi = R(r) \cdot \Theta(\theta) \cdot \Phi(\phi) \quad (68)$$

dela suposatzen da.

ψ hau (67).ekuazioan sartu, ψ -z zatitu eta $r^2 \sin^2 \theta$ -z biderkatu ondoren:

$$\frac{1}{R} \sin^2 \theta \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) + \frac{1}{\Theta} \sin \theta \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) + \frac{1}{\Phi} \frac{d^2 \Phi}{d\phi^2} + k^2 r^2 \sin^2 \theta = 0 \quad (69)$$

Hirugarren gaia ϕ -ren funtzio hutsa da, eta ez dago ϕ -ren funtzioa den beste gairik. Beraz, konstante bat izan behar du ($-m^2$ dela kontsideratuko dugu):

$$\frac{d^2 \Phi_m}{d\phi^2} + m^2 \Phi_m = 0 \quad (70)$$

hemen, m azpiindizeak, m -ren menpean dagoela esan gura du. (69).ekuazioa (70).ekuazioa baliatuz idazten badugu, berriz:

$$\frac{1}{R} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) + k^2 r^2 + \frac{1}{\Theta} \frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) - \frac{m^2}{\sin^2 \theta} = 0 \quad (71)$$

Lehenengo bi gaiak r -ren funtzioak dira soilik, eta bi azkenak θ -renak. Beraz, bi azkeneko horien baturak konstante bat izan behar du, eta $-l(l+1)$ bezala idazten dugu. Lehenengo bi gaien batura $l(l+1)$ izango da, noski. Hori dela eta, bi ekuazio izango ditugu:

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d\Theta_l}{d\theta} \right) + \left[l(l+1) - \frac{m^2}{\sin^2 \theta} \right] \Theta_l = 0 \quad (72)$$

eta

$$\frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR_l}{dr} \right) - \left[l(l+1) - k^2 r^2 \right] R_l = 0 \quad (73)$$

(70).ekuazioaren soluzioak oso ezagunak dira:

$$\Phi = e^{\mp j m \phi}$$

(74)

(72).ekuazioarenak $P_1(\cos \theta)$ Legendre-ren polinomioak dira. Edozein $m \leq 1$ -rentzat (72).ekuazioaren soluzioei "Legendre-ren polinomio elkarkideak" esaten zaie. Honela defini daitezke:

$$P_\ell^m(n) = (1-n^2)^{m/2} \frac{d^m}{d n^m} P_\ell(n) \quad (75)$$

$n = \cos \theta$ izanik

$P_1^0(n) = P_e(n)$ Legendre-ren ohizko polinomioa da noski, $m \neq 0$ denean funtzioak 1. taulan agertzen dira.

1. Taula

Legendre-ren polinomio elkarkideak
($n = \cos \theta$ izanik)

Izena	Funtzioa
$P_0(n)$	1
$P_1(n)$	$n = \cos \theta$
$P_1^1(n)$	$(1-n^2)^{1/2} = \sin \theta$
$P_2(n)$	$\frac{1}{2}(3n^2-1) = \frac{1}{4}(3 \cos 2\theta + 1)$
$P_2^1(n)$	$3n(1-n^2)^{1/2} = \frac{3}{2}(\sin 2\theta)$
$P_2^2(n)$	$3(1-n^2) = \frac{3}{2}(1-\cos 2\theta)$
$P_3(n)$	$\frac{1}{2}(5n^3 - 3n)$
$P_3^1(n)$	$\frac{3}{2}(1-n^2)^{1/2}(5n^2-1)$
$P_3^2(n)$	$15n(1-n^2)$
$P_3^3(n)$	$15(1-n^2)^{3/2}$

Azkenik, (73).ekuazioa askatu behar da. $\varphi = kr$ egin ondoren:

$$\frac{d}{d\varphi} \varphi^2 \frac{d}{d\varphi} R_\ell - \left[\ell(\ell+1) - \varphi^2 \right] R_\ell = 0 \quad (76)$$

Eta, $R_1 = \varphi^{-1/2} Z_\ell$ eginez

$$\varphi^2 \frac{d^2 Z_\ell}{d\varphi^2} + \varphi \frac{dZ_\ell}{d\varphi} - \left[\left(\ell + \frac{1}{2} \right)^2 - \varphi^2 \right] Z_\ell = 0 \quad (77)$$

Azken hau Bessel-en ekuazioa da. Ekuazio honen soluzioak oso ezagunak dira eta ongi aztertuak izan ondoren tabulatuta daude. Ohizko so-

luzioak $J_1(Kr)$ eta $N_{1+1/2}(Kr)$ -z idazten dira eta $1 + \frac{1}{2}$ mailako Bessel-en eta Neumann-en funtzioak bezala ezagutzen ditugu, banan bana. Uhin-ekuazioaz arduratzeko oso komenigarri da Bessel-en funtzio esferikoak honela definitzea:

$$J_\ell(Kr) = \sqrt{\pi/2Kr} J_{\ell+1/2}(Kr) , \quad n_\ell(Kr) = \sqrt{\pi/2Kr} N_{\ell+1/2}(Kr) \quad (78)$$

eta hauetatik zera dakargu:

$$h_1(1)(Kr) = j_1(Kr) + j_{n1}(Kr) ; \quad h_1^{(2)} = j_1(Kr) - j_{n1}(Kr) \quad (79)$$

$j_1(Kr)$, $n_1(Kr)$, $h_1^{(1)}(Kr)$ hauek (73). ekuazioaren soluzioak dira. Funtzio hauek $l=0, 1$ eta 2 -entzat 2. taulan azaltzen dira.

2. Taula

Neumann-en funtzioak eta Bessel-en esferikoak

Mota	Funtzioak
$J_0(\rho)$	$(1/\rho) \sin \rho$
$n_0(\rho)$	$-(1/\rho) \cos \rho$
$h_0^{(1)}(\rho)$	$-(j/\rho) e^{j\rho}$
$h_0^{(2)}(\rho)$	$(j/\rho) e^{j\rho}$
$J_1(\rho)$	$(1/\rho^2) \sin \rho - (1/\rho) \cos \rho$
$n_1(\rho)$	$-(1/\rho) \sin \rho - (1/\rho^2) \cos \rho$
$h_1^{(1)}(\rho)$	$-(1/\rho) e^{j\rho} (1 + j/\rho)$
$h_1^{(2)}(\rho)$	$-(1/\rho) e^{-j\rho} (1 - j/\rho)$
$J_2(\rho)$	$\left[\frac{3}{\rho^3} - \frac{1}{\rho} \right] \sin \rho - \left[\frac{3}{\rho^3} - \frac{1}{\rho} \right] \cos \rho$
$n_2(\rho)$	$-\frac{3}{\rho^2} \sin \rho - \left[\frac{3}{\rho^2} - \frac{1}{\rho} \right] \cos \rho$
$h_2^{(1)}(\rho)$	$(j/\rho) e^{j\rho} \left(1 + \frac{3j}{\rho} - \frac{3}{\rho^2} \right)$
$h_2^{(2)}(\rho)$	$-(j/\rho) e^{-j\rho} \left(1 - \frac{3j}{\rho} - \frac{3}{\rho^2} \right)$

h horiek oso egokiak dira erradiazio problemetan, r oso handiekin honela jokatzen bait dute:

$$h_e^{(j)}(K_r) \xrightarrow{K_r \rightarrow \infty} \frac{(-j)^{\ell+1} e^{jK_r}}{K_r} \quad (80)$$

$$h_e^{(u)}(K_r) \xrightarrow{K_r \rightarrow \infty} \frac{j^{\ell+1} e^{-jK_r}}{K_r} \quad (81)$$

beraz, uhin esferiko sarkor eta aterakorrek ematen dizkigute.

Ψ -ren era orokor bat honela eman daiteke:

$$\Psi_{\ell m} = \sqrt{\eta/2Kr} \cdot Z_{\ell}(Kr) \cdot p_{\ell}^m(\cos \theta) e^{i j m \phi} \quad (82)$$

eta eremu bektoreialak aurkitzeko (52).eta (64).ekuazioak erabili behar ditugu Z E uhinentzat, eta (65).eta (66).ak Z M uhinentzat. Interesatzen zaigu Ψ -ren mota errazena Ψ_{10} da

$$\Psi_{10} = \frac{1}{Kr} e^{jKr} \left(1 + \frac{j}{Kr} \right) \cos \theta \quad (83)$$

Eta Ψ -ren gradienteak

$$\text{grad } \Psi_{10} = \vec{a}_r e^{jKr} \left[\frac{j}{r} - \frac{2}{Kr^2} - \frac{2j}{K^2 r^3} \right] \cos \theta - \vec{a}_{\theta} e^{jKr} \left[\frac{1}{Kr^2} + \frac{j}{K^2 r^3} \right] \sin \theta \quad (84)$$

Eremu elektrikoaren parte espaziala hau da:

$$\vec{E}_s = \vec{r} \times \text{grad } \Psi_{10} = -\vec{a}_{\theta} E_0 e^{jKr} \left[\frac{1}{Kr} + \frac{j}{K^2 r^2} \right] \sin \theta \quad (85)$$

Ekuazioa dimentsio aldetik egokitzeko E_0 sartu dugu

Indukzio magnetikoa zera da:

$$\begin{aligned} \vec{B}_s &= -j \frac{1}{\omega} \text{rot } \vec{E}_s = j \frac{1}{\omega} E_0 e^{jKr} \left[\frac{1}{Kr^2} + \frac{j}{K^2 r^3} \right] 2 \cos \theta \vec{a}_r - \\ &- j \frac{1}{\omega} E_0 e^{jKr} \left[\frac{j}{r} - \frac{1}{Kr^2} - \frac{j}{K^2 r^3} \right] \sin \theta \vec{a}_{\theta} \end{aligned} \quad (86)$$

Hauek dipolo magnetiko batek erradiatzen dituen eremuak dira. Beste aldetik, $\frac{1}{r}$ -rekiko zuzenki proportzionalak diren $\vec{E}_s$ -ren eta $\vec{B}_s$ -ren atalek parte hartzen dute erradiazio osoan. Gainontzeko atalak $\frac{1}{r^2}$ baino askoz lehenago jausten dira eta beraz, beren integralak gainazal esferikoen gainean zerorantz doaz gainazal hauen erradioak infiniturantz joan ahala. Uhin esferikoaren soluzioak oso garrantzitsuak dira, iturri mugatu batetik ateratzen den erradiazioa kontsideratzean bereziki.

4.4 ITURRIAK DAUDEN KASUKO UHIN-EKUAZIOAK

Orain arte ikusitako uhin laun nahiz esferikoak estudiatu ditugu beren sorrera nola izan den begiratu gabe. Hemen, $\vec{f}(\vec{r}, t)$ eta $\vec{J}(\vec{r}, t)$ karga-hedapen eta korrante-dentsitate izan eta beraiek sortarazten dituzten eremuak estudiantuko ditugu. Problema hau ikusgune desberdin batzuetatik begira daiteke, baina potentzial-ikusgunea oso emankorra da; hau elektrostatika eta magnetostatikan erabiltzen diren bideen antzekoa da.

Dakigun bezala

$$\vec{B} = \text{rot } \vec{A} \quad (87)$$

$\vec{A}$ bektore-potentziala izanik.

Ekuazio hau eta (3).a hartuz:

$$\text{rot } \vec{E} + \frac{\partial}{\partial t} \text{rot } \vec{A} = 0 \quad (88)$$

Eremu jarraitasuna askibada, espazioarekiko eta denborarekiko deribatuen ordena aldatu egin daiteke:

$$\text{rot} \left[\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right] = 0 \quad (89)$$

$\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$ bektorearen errotazionala zero denez gero, bektore hau eskalare batetik erakar dezakegu gradiente eragiketaren bidez; bedi φ eskalare hori, orduan:

$$\vec{E} = -\text{grad } \varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad (90)$$

(87). eta (90). ekuazioek eremu elektrikoa eta magnetikoa maten dizkigute $\vec{A}$ bektore-potentzialaren eta φ eskalare-potentzialaren bidez. Potentzial hauek, eremuak betetzen dituzten uhin-ekuazioen antzeko ekuazioak betetzen dituzte.

$\vec{A}$ -ren ekuazioa lortzeko (4). ekuazioan (87).a eta (90).a sartu behar ditugu, orduan

$$\frac{1}{\mu} \text{rot rot } \vec{A} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial t} \left[\text{grad } \varphi + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right] = \vec{J} \quad (91)$$

eta rot rot-aren ordez grad dib- ∇^2 ipniz:

$$-\nabla^2 \vec{A} + \varepsilon \mu \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} + \text{grad dib } \vec{A} + \varepsilon \mu \text{grad } \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \mu \vec{J} \quad (92)$$

Orain arte $\vec{A}$ -ren errotazionala zehaztu dugu soilik, $\vec{A}$ -ren dibergentziaren aukerarena arbitrarioa da oraingoz. Baina Lorentz-en baldintza jartzen badugu:

$$\text{div } \vec{A} + \epsilon \mu \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad (3)$$

(92).ekuazioa asko erraz daiteke. Beraz, baldintza hori betetzen bada $\vec{A}$ -ren uhin-ekuazioa hauxe da:

$$\nabla^2 \vec{A} - \epsilon \mu \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\mu \vec{J} \quad (94)$$

Beste aldetik, (90).ekuazioa (1).ra eramanez.

$$-\epsilon \left[\text{div grad } \varphi + \text{div } \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right] = 0 \quad (95)$$

Hemen, denborarekiko eta espazioarekiko deribatuen ordena aldatuz eta Lorentz-en baldintza erabiliz, zera dugu:

$$\nabla^2 \varphi - \epsilon \mu \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -\frac{1}{\epsilon} \rho \quad (96)$$

Beraz, Lorentz-en baldintza jarraraztean, potentzialek, bektore nahiz eskalareek, antzeko uhin-ekuazio ez-homogenoak bete behar dituzte.

Uhin-ekuazio eskalare eta ez-homogenoaren soluzio orokorra aurkitzearen problema honela aska daiteke: Hasteko ekuazio homogenoaren soluzio orokorra aurkitu behar da, gero daukagun ez-homogenoaren soluzio edozein bat; azkenik bi hauen batura aurkitu behar dugu, eta soluzio orokorra izango da. Ekuazio homogenoen soluzioak aurkituta daude eta izan dezakegun edozein problema baterako egina dago. Beraz, ekuazio ez-homogenoaren soluzioa aurkitu behar dugu bakarrik.

(96).ekuazioaren soluzio berezi bat aurkitzeko honela joka dezakegu: Karga puntuak bakar baten kasua aztertuz, eta gero daukagun karga-hedapena osatzeko behar diren $\int \Delta \varphi$ karga-elementuak jarritz. Karga puntu-alentzat toki errazena jatorria da; orduan

$$\nabla^2 \varphi - \epsilon \mu \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0 \quad (97)$$

ekuazioak jatorria ezik gainontzeko puntu guztietan bete behar da. Eta jarorria inguratzen duen ΔV bolumen txiki batean zera eduki behar dugu:

$$\int_{\Delta V} dV \left[\nabla^2 \varphi - \epsilon \mu \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \right] = -\frac{1}{\epsilon} q(t) \quad (98)$$

Karga-hedapenaren simetria dela eta, φ -ren espazioarekiko menpekotasuna r - z soilik baldintzaturik dago. Hori dela eta, (97).ekuazioa honela bihurtzen da:

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial \varphi}{\partial r} - \epsilon \mu \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0 \quad (99)$$

eta

$$\varphi(r, t) = \frac{\chi(r, t)}{r} \quad (100)$$

jartzen badugu:

$$\frac{\partial^2 \chi}{\partial r^2} - \epsilon \mu \frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} = 0 \quad (101)$$

Hau uhin dimentsiobakarrekoaren ekuazioa da eta $r-t/\sqrt{\epsilon\mu}$ edo $-ren$ edozein funtzioarekin betetzen da. Hau ikusteko bedi:

$$n = r - \frac{t}{\sqrt{\epsilon\mu}} \quad (102)$$

eta $f(n)$ bi aldiz deriba daitekeen n -ren funtzio bat, orduan:

$$\frac{\partial f}{\partial r} : \frac{df}{dn} \cdot \frac{\partial n}{\partial r} = \frac{df}{dn} ; \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} : \frac{d^2 f}{dn^2} \cdot \frac{\partial n}{\partial r} = \frac{d^2 f}{dn^2} \quad (103)$$

eta

$$\frac{\partial f}{\partial t} : \frac{df}{dn} \cdot \frac{\partial n}{\partial t} = \frac{df}{dn} \cdot \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}} ; \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = \frac{1}{\epsilon\mu} \cdot \frac{d^2 f}{dn^2} \quad (104)$$

Balio hauek (101).ekuaziora eramanez $f(n)$ horrek betetzen duela ikusten da. Eta beste horrenbeste $r+t/\sqrt{\epsilon\mu}$ hartuz gero. Beraz,

$$\chi = f\left(r - \frac{t}{\sqrt{\epsilon\mu}}\right) + g\left(r + \frac{t}{\sqrt{\epsilon\mu}}\right) \quad (105)$$

(101).ekuazioaren soluzio oso arbitrario bat da.

$g(r+t/\sqrt{\epsilon\mu})$ gaiak ez du fisikoki garrantzirik; horregatik lehenengo gaia hartuko dugu soilik.

Beraz,

$$\varphi = \frac{f\left(r - \frac{t}{\sqrt{\epsilon\mu}}\right)}{r} \quad (106)$$

(97).ekuazioaren soluzio esferikoki simetrikoa dugu. Beste aldetik funtzioaren arbitrarotasuna dela eta (98).ekuazio bete dezan funtzio bat aukera daiteke

Aukeramen egokia egiteko zera ikusi behar dugu: karga egonkor batentzat (97). eta (98). ekuazioak batera betetzen dituen soluzioa hauxe dela:

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon r} \quad (107)$$

Orduan, (106). eta (107). ekuazioak ados egon daitezten, aukeramen hau egin behar da:

$$f(r, t/\sqrt{\epsilon\mu}) = \frac{q(t - t\sqrt{\epsilon\mu})}{4\pi\epsilon} \quad (108)$$

Eta (97). eta (98). ekuazioen soluzioa hauxe da:

$$\varphi(r, t) = \frac{q(t - t\sqrt{\epsilon\mu})}{4\pi\epsilon\mu} \quad (109)$$

Emaitza honen bidez, (96). ekuazioa beste honez betetzen dela erraz ikus daiteke.

$$\varphi(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_V \frac{\rho(\vec{r}', t - \sqrt{\epsilon\mu} |\vec{r} - \vec{r}'|)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad (110)$$

Honi potentzial eskalare atzeratua deritzogu.

((4). ekuazioaren soluzioa aurkitzeko bide berdin batetik joan gitezke. A eta J bektoreak bere osagai angeluzuzenetan bana daitezke. Azaldu diren hiru ekuazioak (96). aren antzekoak dira, x ardatzari dagokiona hauxe da, adibidez:

$$\nabla^2 A_x - \epsilon\mu \frac{\partial^2 A_x}{\partial t^2} = -\mu J_x \quad (111)$$

Hiru hauetako ekuazio bakoitza (96). a bezala aska daiteke, eta zera izango genuke, adibidez:

$$A_x(\vec{r}, t) = \frac{\mu}{4\pi} \int_V \frac{J_x(\vec{r}', t - \sqrt{\epsilon\mu} |\vec{r} - \vec{r}'|)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV' \quad (112)$$

Osagai guztiak hartu ondoren hauxe izango dugu:

$$\vec{A}_x(\vec{r}, t) = \frac{\mu}{4\pi} \int_V \frac{\vec{J}(\vec{r}', t - \sqrt{\epsilon\mu} |\vec{r} - \vec{r}'|)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV' \quad (113)$$

eta hau potentzial bektore atzeratua dugu.

Potentzial atzeratuen esangura fisikoa oso interesgarria da (110). eta (113). ekuazioek zera esaten digute: $\vec{r}$ bektorez finkatuta dagoen puntu batean eta t une batean dauden potentzialak espazioko beste

puntuetan eta lehenagoko une batean zeuden kargaz eta korrontez baldintzaturik daudela. Iturri-puntu bakoitzari dagokion epea, puntu horretatik $\vec{r}$ punturaino joateko $1/\sqrt{\epsilon\mu}$ abiadura batez behar den denboraren adinakoa da. Hau da, koordenatu-jatorrian dagoen q karga puntual bat batean aldatuko balitz, aldaketa hori puntu batetan $r \cdot \sqrt{\epsilon\mu}$ epea iragan arte ez litzateke nabarituriko.

Potentzialak, eskalarra nahiz bektoriala, aurkitu ondoren eremuak aurki ditzakegu. Horretarako ρ -ren gradientea eta $\vec{A}$ -ren denborarekiko deribatua eta errotazionala kalkulatu beharko genituzke. Eragiketa huek hasiera batean erraz egin daitezkeela dirudi, halaz ere praktikan korapilotsuak dira.