udako euskal unibertsitatea

NEURRIA ETA INTEGRAZIOA

IRUINEA 1981



Banco de Vizcayak

BABESTUTAKO ARGITARAPENA

EDICION PATROCINADA POR EL

Banco de Vizcaya

NEURRIA eta INTEGRAZIOA

JAVIER DUOANDIKOETXEA
MARIA JESUS ESTEBAN

HITZAURREA

Lan honen helburua integrazioaren teoria aurkeztea da. Eta teoria hau aipatzerakoan bi izen agertzen zaizkigu batez ere, Riemann eta Lebesgue, aurreko saioak eta ondoko orrazketak gora-behera, berauek baitira gaur egun erabiltzen diren bi eraikibideen egileak. Sarrera historikoan agertzen da, laburki baino ez bada ere, bataren eta bestearen bilakaera eta ikusiko dugunez, lehen maila batetan Riemann-ena aski bada, aurrerago joateko Lebesgue-ren teoria beharbeharrezkoa zaigu. Hauxe da, beraz, liburuan aurkezten duguna.

Irakurbideari buruzko ohar batzuk: 1. eta 2. kapituluek $\mathbb{R}^n$ espazioetan integrala definitzea dute helburutzat (espazioaren dimentsioak ez du inolako eraginik eta dena $\mathbb{R}$-n balitz bezala irakur daiteke); 3. kapituluan neurria (teoria honen gakoa dena, aurkezpen honetan gutxienez) espazio abstraktuetan definitzen da eta hortik integrala, eta, ikus daitekeenez, $\mathbb{R}^n$-tiko generalizazioa oso errez lortzen da. Hurrengo kapituluak, 4. etik 8. era, garrantzi handikoak dira teoria honetan eta, elkarren arteko menpekotasunik ez dagoenez, ez da beharrezkoa datozen ordenean irakurtzea, hau da, integral anizkoitzak edo aldagai-aldaketa zuzenean irakur daitezke 3. kapituluaren ondotik.

Esan dezagun, azkenik, ez gatzaizkiola asignatura baten programari jarraitu. Dena dela, eta Euskal Herriko Unibertsitateari dagokionez, gehien hurbiltzen zaiona azken urteotan Matematikatako Lizentziaturarako 4. kurtsoan eman izan den Analisi Funtzional I asignaturaren lehen zatia da. Gainera, espazio errealetarako integrazioa 2. kurtsoko Analisi II asignaturan ere ematen da eta halaber fisikarien 4. kurtsoko Fisikarako Metodo Matematikoak III delakoan. Lehen kurtsoan eta karrera guztietan Riemann-en integrala erakusten da.

Edonola ere, zientzi sail guztietan erabilgarria delakoan, zientziaz euskaraz arduratzen diren guztiei eskeintzen diegu lan hau, baliagarrai izango zaielako esperantzaz.

1981. eko maiatzean

J. Duoandikoetxea
M.J. Esteban

Eskerrak eman nahi dizkiogu, bereziki, Isabel Larrauri idazkariari, gure eskuizkribuak makinaz honen ederto pasatzeagatik.

Beti funtzio on hauek kontsideratzera mugatu nahiko bagenu, aspaldian proposatutako adierazburu sinpledun problema asko ondo - ebazteari uko egin beharko genioke. Problema hauek ebazteko, eta ez nahastearen gustoagatik, sartu dut liburu honetan Riemann-ena baino orokorragoa den integralaren definizio bat, harena kasu partikular tzat duelarik.

Ausartzen naiz esaten, nolabait, Riemann-ena baino sinpleagoa dela, berau bezain ulerterreza eta aurretik hartutako gogo-ohi turek, ez bestek, agerteraz dezaketela zailagoa. Sinpleagoa da integralaren propietaterik garrantzizkoenak agerian jartzen dituelako, Riemann-en definizioak kalkulu-prozedura bat jartzen duen bitar tean (H. Lebesgue, "Lecons sur l'intégration et la recherche des - fonctions primitives", 1903an argitaratua, hitzaurrean).

Irakurlea ohartuko da agian, gai baten falta nabarmenaz, kal kulu-kurtsoetan luzaro ohorea eman izan baitzaio: "Riemann-en inte grala". Susma daiteke haren izen handiagatik izan ezik, aspaldian alde batetara utziko zatekeela, zeren (Riemann-en jeinuari zor zai on begirunea eta guzti) argi baitago edozein matematikarirentzat teoria honek gaur egun, gehienez, neurriaren eta integrazioaren teo ria orokorraren ariketa erdi interesgarri baten garrantzia bakarrik duela. Tradizio akademikoaren zentzu kontserbakor hutsak, ez bestek, utzi du programen kapitulu nabarmena bezala, benetako zentzua zuene ko momentu historikoa iragan eta gero (...). Tresna ahaltsuago bat behar dadinean ez da posible bidatzerditan gelditzea, eta integra- zioaren teoria orokorrera (Lebesgue) jo behar da, honek bakarrik markatzen baitu aurrerapen efektiboa. (J. Dieudonné, "Foundations of Modern Analysis", VIII. kapituluan)

AURKIBIDEA

HITZAURREA i

AURKIBIDEA iv

0. GAIA. SARRERA 1
§0.1. Integrazioaren historia 2
§0.2. $\overline{\mathbb{R}}$ zuzen osatua 9
§0.3. Goi- eta behe-limiteak 10
§0.4. Multzo-algebrak 11

1. GAIA. $\mathbb{R}^n$-KO MULTZOEN NEURRIA ETA FUNTZIO NEURGARRIAK .. 15
§1.1. Tarteen neurria 16
§1.2. Kanpo-neurria 19
§1.3. Multzo neurgarriak eta Lebesgue-ren neurria 23
§1.4. Multzo boreldarrak 30
§1.5. Multzo neurtezinak 35
§1.6. Funtzio neurgarriak 36
§1.7. Irazkinak 47

2. GAIA. LEBESGUE-REN INTEGRALA $\mathbb{R}^n$-N 52
§2.1. Riemann-en integrala $\mathbb{R}$-n 53
§2.2. Funtzio sinpleen integrala 55
§2.3. Goi- eta behe-integralak 57
§2.4. Funtzio ez-negatibo baten integrala 64
§2.5. Lebesgue-ren integrala 67
§2.6. Konbergentzi teoremak 69
§2.7. Riemann eta Lebesgue-ren integralen arteko erlazioa 76

3. GAIA. NEURRIAK ETA INTEGRAZIOA 79
§3.1. Espazio eta funtzio neurgarriak 81
§3.2. Neurriak eta espazio neurridunak 85

§3.3. Funtzio positiboen integrala 90
§3.4. Funtzio konplexuen integrala 98
§3.5. Daniell-en integrala 107
§3.6. Zenbait ohar eta osagarri 115

4. GAIA. L^p ESPAZIOAK 120
§4.1. Definizioa eta lehen propietateak 121
§4.2. L^p-etako zenbait azpimultzo dentso 129
§4.3. L^p-n definituriko funtzional lineal bornatuak ... 131

5. GAIA. NEURRI KONPLEXUAK ETA ZEINU BITAKOAK 137
§5.1. Neurri konplexuak. Aldaketa totala 138
§5.2. Neurri errealak. Hahn-en deskonposaketa 142
§5.3. Radon-Nikodym-en teorema 145
§5.4. Lebesgue-ren deskonposaketa 150

6. GAIA. BIDERKADURA-ESPAZIO NEURRIDUNAK 152
§6.1. Neurgarritsuna biderkadura cartesiarretan 153
§6.2. Biderkadura-neurria 158
§6.3. Fubini-ren teorema 161

7. GAIA. DIFERENTZIAZIOA ETA INTEGRAZIOA 163
§7.1. Diferentziazioa zer den 164
§7.2. Vitali-ren teorema 165
§7.3. Funtzio monotono eta aldaketa bornatukoen diferentziazioa 168
§7.4. Integralen deribazioa 172
§7.5. Erabateko jarraitasuna 176

8. GAIA. ALDAGAI-ALDAKETA 180

HIZTEGIA 193

BIBLIOGRAFIA 197

0. GAIA

SARRERA

0.1 Integrazioaren historia

0.2 Zuzen osatua: $\overline{\mathbf{R}}$

0.3 Goi- eta behe-limiteak

0.4 Multzo-algebrak

0. SARRERA

§0.1.- INTEGRAZIOAREN HISTORIA

Kalkulu integralaren lehen agerpenak Grekoen arotik datozkigu. Gauza ezaguna da nola kalkulatu zituzten azalerak eta bolumenak, hurbilketak eginez. Kalkulu horien eredu batzuk EUDOXIO-k eman omen zituen Kristo aurreko IV. mendean. Ehun urte geroago ARKIMEDES-ek bide hau garatu zuen eta ondorio ederrak atera zizkion.

Ezin dezakegu esan integrazioaren kontzientziarik zegoenik. Egia esan, kasu bakoitzari arrazonbide geometriko partikularrak aplikatzen zitzaizkion nahiz eta integral bakar batez kalkulatu ahal izan.

XVI. mendean argitaratzen dira ARKIMEDES-en lanak eta berauen influentzia nabaria izango da ordudanik. XVII. mendean KEPLER-ek zera zioen: "zirkulu bat triangelu infinitesimalez osatua dago; triangeluok kopuru infinituan daude eta erpin komun bat dute zirkuluaren zentruan". CAVALIERI-ren lanean (1635) irudi geometrikoen azalera "ordenatu guztien batura" izango da eta PASCAL-ek segmentuen baturen ordez "oinarri infinituki txikidun errektangeluak" aipatuko ditu. Ingurune hontan agertzen zaizkigu FERMAT, WALLIS, HUYGENS eta abar. Eta garai berri baten hasieran BARROW-ren lana dugu; honentzat, diferentziazioa eta integrazioa elkarren inbertsuak izango dira.

Bi izen agertzen dira XVII. mendearen azken laurdenean aro berri horren sortzaile (eta kalkulu infinitesimalaren beraren sortzailetzat hartzen direnak): I. NEWTON (1643-1727) eta G.W. LEIBNIZ (1646-1716).

NEWTON BARROW-ren ikaslea izan zen eta honen bideetatik abiatu zen. NEWTON-en ideiak eta terminologia Mekanikatik aterata zeuden eta aldagaia beti denbora izaten zen. Horregatik aldagai bakar bateko funtzioak erabiltzen zituen beti. Gainera, integrazioa beste problema zabalago baten kasu berezitzat zeukan, ekuazio diferentzial arrunten ebazpenena ($\frac{dx}{dt} = f(t)$ ekuazioarena, alegia).

LEIBNIZ-ek PASCAL-en influentzia zeukan eta integrala (azalera) "lerro guztien batura"-tzat hartzen zuen. Esan dezagun gaur erabiltzen dugun integral sinboloa ($\int$) LEIBNIZ-engandik datorkigula, "summa" hitzaren lehen letratik hartua, hain zuzen.

Momentu hartan egiten zen guztia kalkulua zen; jadanik, esan dugunez, integrazioa eta deribazioa elkarren inbertsutzat jotzen ziren eta jatorrizko funtzioen kalkulua zen helburu nagusia. Integral ez-mugatua zen garrantzizkoena integral mugatuaren aurretik.

XVIII. mendean beste izen ezagun batzuk aurkituko ditugu kalkulu integralaren inguruan, EULER, JAKOB eta JOHANN BERNOUILLI, LAGRANGE eta abar, baina beti kalkulua zen nagusi eta ezin daiteke esan egiten zenaren errigorea oso handia zenik. Funtzio bat zer zen ez zegoen batere argi, gehienetan "adierazpen analitiko batez idatz zitekeen zerbait" zen.

Integralaren lehen definizio eta teoria funtsatuetara heltzeko XIX. mendera joan beharko dugu. Orduan eman zuen DIRICHLET-ek

funtzioaren definizio "moderno" bat, lehenago EULER-en ideiak urrun ez zeudela esan behar bada ere, eta mende horretan agertu ziren Matematika guztian garrantzi handiko eta integrazioarentzat lagungarri izan zireŋ bi teoria: multzoena (CANTOR) eta zenbaki errealena (CANTOR, DEDEKIND), hain zuzen.

Integrazioaren teoriaren eragile bezala FOURIER-en lana (1807-1812) aipatu behar dugu; honek funtzio bat serie trigonometriko bezala idatz zitekeela erakutsi zuen, koefizienteak integralen bidez kalkulatuz. FOURIER-ek emandako frogapenak ez ziren inola ere zehatzak eta haren formulei justifikapen bat eman nahiean abiatu ziren integralaren definizioak.

Ezaguna da CAUCHY-ren ekarpena Matematikaren errigorean. 1823an argitaratutako liburu batetan dionez "beharrezko ikusten dut integralen existentzia frogatzea berauen propietateak ezaguterazi baino lehen". Definizio hori [a,b] tartean definitutako funtzio jarraientzat emango du:

[a,b] tartean, $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$ hartu,

$$f(a)(x_1-a) + f(x_1)(x_2-x_1) + \ldots + f(x_{n-1})(x_n-x_{n-1})$$

batura egin eta $h = \sup_{1 \leq i \leq n} (x_i - x_{i-1}) \longrightarrow 0$ denean, batura horren limitea f-ren integrala izango da (limite hori existitzen dela frogatu zuen). Gainera $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ ipiniz, $F'(x) = f(x)$ $\forall x \in [a,b]$ frogatzen du.

RIEMANN-en tesiaren izenak ondo erakusten digu nondik zeto-

rren arazoa: "Funtzio bat serie trigonometriko baten bidez adieraz teko posibilitatea". Tesi honetan (1854an aurkeztua, 1867an argitaratua) Cauchy-ren baturaren ordez beste hau proposatzen du:

$$f(\xi_1)(x_1-a) + f(\xi_2)(x_2-x_1) + \ldots + f(\xi_n)(x_n-x_{n-1})$$

non $\xi_i \in [x_{i-1},x_i]$ edozein puntu baita. Eta ez du bakarrik funtzio jarraientzat definitzen, batura hori edozein funtziotarako defini daiteke eta ξ_i-en edozein hautapenetarako batura horrek limiterik badu, horixe izango da integrala. Aurrerapen handi bat zekarren lan honek: ez bakarrik integrala zer den, integragarritasuna ere. Eta ikus integragarritasunerako ematen duen baldintza hau: "Funtzio bornatu bat integragarria izateko $[a,b]$ -n, beharrezko eta nahikoa da $[a,b]$ tarte partzialetan banatu ahal izatea, funtzioaren oszilazioa ε baino handiago den tarteen luzeren batura nahi adina txiki egin daitekeelarik, edozein ε-etarako". Honetaz aparte multzo kontagarri batean etena izan arren integragarri den funtzio bat ematen du.

Orain, RIEMANN-en integralaren aurkezpena egiterakoan, goieta behe-integralak erabiltzen dira, DARBOUX-ek (1875) sãtutako baturekin. Integragarritasuna funtzioaren eten-puntuekin lotuta zegoela konturatu bezain laster, puntu horien multzoak nolabait neurtu behar ziren. Hemen ezar ditzakegu neurriaren teoriaren hastapenak.

HARNACK (1881) eta STOLTZ-ek (1884) multzo bornatu bat neurtzeko tarte-familia finituez estaltzen zuten, eta tarteon luzeren baturen infimoa hartzen. CANTOR-ek (1885) definizio baliokide bat erabiltzen zuen. Baina orduan $m(A \cup B) < mA + mB$, $A \cap B = \phi$ iza

nik, posible zen. Urte batzuk geroago PEANO (1887) eta JORDAN-ek (1892) neurri horretaz aparte, I tarte bat hartu, A partetzat duena eta $m_i A = mI - m(I-A)$ kontsideratu zuten eta $mA = m_i A$ betetzen zuten multzoak bakarrik ziren haientzat neurgarriak. Definizio honekin badaude neurgarri ez diren multzo ireki bornatuak.

BOREL-ek 1898an pausu handi bat eman zuen. Ordurako CANTOR-ek zera frogatu zuen: $\mathbf{R}$-ko ireki bat tarte ireki disjuntuen bildura kontagarri bezala idatz zitekeela. Orduan BOREL-ek irekiaren neurritzat tarte osagaien luzeren batura hartzea proposatu zuen. Hortik bilketa kontagarriak eta kenketak eginez gero multzo boreldarrak deitu diren guztiak neurt zitezkeen. Lehenengoz agertzen da oinarrizko propietate bat: σ-batukortasuna.

LEBESGUE-k bere tesian (1902) burutu zituen aurreko ekintzak. PEANO eta JORDAN-en ideia segitu zuen baina Borel-en neurritik abiatuz. Irekiak honek bezala neurtuz, multzo baten kanpo-neurria, multzo hori partetzat duten irekien neurrien infimoa hartuko du. Gero, haiek bezala, $mI - m(I-A)$ barne neurritzat kontsideratuz, multzo neurgarriak definituko ditu. Gainera, bide hau guztiz aproposa zen $\mathbf{R}^n$-ra hedatzeko. Hortik berehala definitzen zuen integrala baina esan beharra dago LEBESGUE-ren lanetan integralak berak baino garrantzi handiagoko dirudiela haren izena daraman konbergentzi teoremak.

Oinarrizko tresneria, nolabait esateko, eskuratu ondoren, beste problema batzuei erantzuna ematea posible zitekeen, agian. Adibidez, integrazio eta deribazioaren arteko harremanak zeuden, hau da, zein heinetaraino ziren inbertsuak integratzea eta deribatzea? zein baldintza bete behar du f funtzioak

$$f(x) - f(a) = \int_a^x f'(s)\, ds$$

formulak balio dezan? LEBESGUE-k berak ekin zion problema honi eta VITALI-k zehazki estudiatu zuen. Bi nozio agertuko zaizkigu: aldaketa bornatuko funtzioak (JORDAN-ek aurretik erabiliak) eta funtzio erabat jarraiak.

Integral bikoitzentzat (edo anizkoitzentzat) aurrerapen handikoa izan zen Lebesgue-ren integrala. Horrelako integral bat integral bakunen bidez kalkulatzea FUBINI-ren teoremak (1907) justifikatuko du.

STIELTJES-en lana LEBESGUE-renaren aurrekoa izan arren (1894), gero honen garatzea eragin zuen. STIELTJES-ek ψ funtzio ez-beherakor bat hartzen du $\mathbf{R}$-n eta Riemann-en baturetan $(x_i - x_{i-1})$-en ordez $\psi(x_i) - \psi(x_{i-1})$ jartzen. Horrela $\int_a^b f(x)\, d\psi(x)$ idatziko dituen integralak definitzen ditu.

Integral horiek berriro plazaratu zituen F. RIESZ-ek, 1909an bere errepresentapen-teorema ematean eta 1913an RADON-ek neurriaren nozio zabalago batekin integral bat definitu zuen, Stieltjes-ena kasu berezitzat zeukana.

CARATHEODORY-k, 1918an idatzitako liburu batean, neurria ardatz bezala hartuko du eta ez integrala definitzeko laguntzaile bezala. Urte berean DANIELL-ek, YOUNG-en lan batetik (1911) abiatuz, Lebesgue-ren integrala neurria erabili gabe eraikiko du. Horretarako, funtzio jarraien Cauchy-ren integrala hartuko du eta hedapen baten bidez, funtzio integragarrien definizio baliokide bat emango du.

Bide hau jarraituz ez dago neurrien beharrik integrala defi-

nitzeko, eta multzoen neurria funtzio ezaugarrien integrala baizik ez da izango. Funtsean, metodo honek zera dio: funtzio-espazio batetan funtzional bat definiturik badago, beste espazio zabalago batetan nola defini daitekeen. Honela lehentasuna integralari dagokio eta ez neurriari. Aipa ditzagun bide honen aldeko: BANACH (1937), STONE (1948), F. RIESZ - B. SZ. NAGY (1952) eta BOURBAKI.

Ba daude beste matematikari batzuk (CARATHEODORY, HALMOS), lehentasuna neurriari ematen diotenak, integrazioa neurriaren teoriaren kontzepturik garrantzitsuena bezala hartuz.

NIKODYM-ek 1930ean Lebesgue-ren teoremak neurri abstraktuentzat emango ditu eta bi neurriren arteko erlazio bat eman Radon-Nikodym-en izena daraman teorema interesgarriarekin.

XX. mendearen hasieran beste Matematikaren adar bat garatzen ari da: Analisi Funtzionala. Honekin zerikusirik handia izango du Lebesgue-ren integralak laster ikusi zenez. Honen lekuko L^p espazioak (F. RIESZ, 1910), FISCHER-RIESZ-en izena daramaten zenbait errepresentapen-teorema etab.

Mende honetan zehar integrazioaren teoriari beste atal batzuk erantsi zaizkio. Aipa dezagun, soilik, BOCHNER-ek 1933an integrala definitzen duela funtzioak Banach-en espazio batetan hartzen dituenean bere balioak; integral baliokide edo orokorragoak eman zituztenen artean: DUNFORD (1935), GELFAND (1938), PETTIS (1938).

Matematikaren sail bat guztiz berriztatuta gelditu zen neurriaren teoria abstraktuaren eraginez: Probabilitateen Kalkulua. Batzuentzat ez zuen sail honek behar beste seriotasunik Matematikaren barruan egoteko, baina berriztapen hori zela medio ez zitekeen

gehiago zalantzan jar Probabilitateen lekua Matematikan. Orain, gertakari baten probabilitatea multzo baten neurria da eta itxaropena, integrala. Berriztapenaren eragile BOREL (1909), LOMNICKI (1923), STEINHAUS (1923) eta batez ere KOLMOGOROV (1933) ditugu.

§0.2.- $\overline{\mathbb{R}}$ ZUZEN OSATUA

Biz $\mathbb{R}$ zenbaki errealen gorputza. Orduan $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ ipiniko dugu ondoko legeokin:

a) $\forall x \in \mathbb{R}$, $\quad -\infty < x < +\infty$

b) $\forall x \in \mathbb{R}$, $\quad (\pm\infty) + (\pm\infty) = x + (\pm\infty) = (\pm\infty) + x = \pm\infty$

c) $(\pm\infty)(\pm\infty) = +\infty$

d) $(\pm\infty)(\mp\infty) = -\infty$

e) $x(\pm\infty) = (\pm\infty)x = \pm\infty \qquad x > 0$ bada

$= 0 \qquad x = 0$ bada

$= \mp\infty \qquad x < 0$ bada

$(\pm\infty) + (\mp\infty)$ ez da definitzen.

Kontuz ibili behar da ezabatze-legeekin, hau da:

a) $a+b = a+c \implies b = c$ bakarrik $a \in \mathbb{R}$ denean

b) $ab = ac \implies b = c$ bakarrik $a \in \mathbb{R} - \{0\}$ denean.

(a,b), $[-\infty, b)$ eta $(a, +\infty]$ eratako multzoak topologia baten oinarria dira. $\overline{\mathbb{R}}$-n topologia hori definituz zentzua izango du segida baten limitea $+\infty$ edo $-\infty$ dela esatea. Topologia honek $\mathbb{R}$-n ohizko topologia eragiten du.

§0.3.- GOI- ETA BEHE-LIMITEAK

Biz $\{a_n\}$ $\mathbb{R}$-ko elementuen segida bat. Defini ditzagun

$b_k = \sup \{a_i \ / \ i \geq k\}$ eta $\beta = \inf \{b_k \ / \ k \in \mathbb{N}\}$

Orduan β $\{a_n\}$ segidaren goi-limitea dela esango dugu eta honela idatziko

$$\beta = \overline{\lim}\ a_n = \limsup a_n$$

Nola $b_1 \geq b_2 \geq b_3 \geq \ldots$ den, $\beta = \lim_{k \to \infty} b_k$ dugu.

$\{a_n\}$ segidarentzat defini ditzagun orain

$d_k = \inf \{a_i \ / \ i \geq k\}$ eta $\delta = \sup \{d_k \ / \ k \in \mathbb{N}\}$

δ hau izango da $\{a_n\}$ -ren behe-limitea,

$$\delta = \underline{\lim}\ a_n = \liminf a_n$$

Aurrekoan bezala, $d_1 \leq d_2 \leq d_3 \leq \ldots$ denez, $\delta = \lim_{k \to \infty} d_k$ da.

Propietate batzuk

1) $\liminf a_n \leq \limsup a_n$

2) $\{a_n\}$ konbergentea bada, $\liminf a_n = \limsup a_n = \lim a_n$.

3) $\limsup a_n = -\liminf (-a_n)$

4) $\liminf a_n + \liminf b_n \leq \liminf (a_n + b_n) \leq$

$\leq \limsup a_n + \liminf b_n \leq \limsup (a_n + b_n) \leq$

$\leq \limsup a_n + \limsup b_n$.

(suposatuz ez direla $(-\infty) + (+\infty)$ eratakoak).

Adibideak

1) Biz $a_n = (-1)^n$. Orduan

$b_k = \sup \{a_i / i \geq k\} = 1$ eta $\limsup a_n = 1$

$d_k = \inf \{a_i / i \geq k\} = -1$ eta $\liminf a_n = -1$

2) $a_{2k} = 2 + \frac{1}{k}$ $\quad a_{2k-1} = 1 + \frac{1}{k}$

$d_k = \inf \{a_i / i \geq k\} = 1$ eta $\liminf a_n = 1$

$b_{2k-1} = \sup \{a_i / i \geq 2k-1\} = b_{2k} = \sup \{a_i / i \geq 2k\} = 2 + \frac{1}{k}$.

Beraz $\limsup a_n = 2$.

Funtzio-segidak

Biz $f_n: E \longrightarrow \mathbb{R}$ funtzio-segida bat. Orduan $\liminf f_n$ eta $\limsup f_n$ defini ditzakegu, ondoko eran:

$$(\liminf f_n)(x) = \liminf (f_n(x))$$

$$(\limsup f_n)(x) = \limsup (f_n(x))$$

§0.4.- MULTZO-ALGEBRAK

0.1. Definizioa

Bira E multzo bat eta $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(E)$-ren azpimultzo ez-huts bat. $\mathcal{A}$ multzo-algebra bat da ondoko propietateok betetzen baditu:

(i) $A,B \in \mathcal{A} \implies A \cup B \in \mathcal{A}$

(ii) $A \in \mathcal{A} \implies A^c \in \mathcal{A}$

Berehalako ondorio batzuk:

1) ϕ eta E $\mathcal{A}$-n daude

2) $A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathcal{A} \Longrightarrow \bigcup_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{A}$

3) $A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathcal{A} \Longrightarrow \bigcap_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{A}$

$$\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i = \left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i^c\right)^c \text{ aplikatuz}\right)$$

4) $A_1, A_2 \in \mathcal{A} \Longrightarrow A_1 - A_2 \in \mathcal{A}$, $A_1 - A_2 = A_1 \cap A_2^c$ baita.

0.2. Proposizioa

Biz $\mathcal{C} \in \mathcal{P}(E)$. $\mathcal{C}$ partetzat duen $\mathcal{A}$ algebra minimo bat dago (hau da, $\mathcal{B}$ algebra bat bada eta $\mathcal{C} \subset \mathcal{B}$, orduan $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$).

Frogapena

Biz $\{\mathcal{B}_i\}$ $\mathcal{C}$ partetzat duten algebra guztien familia eta ikus dezagun $\mathcal{A} = \bigcap_i \mathcal{B}_i$ dela.

$\{\mathcal{B}_i\}$ familia ez da hutsa, $\mathcal{P}(E) \subset \{\mathcal{B}_i\}$ baita. Argi dago $\bigcap_i \mathcal{B}_i$ algebra bat dela (h.d., (i) eta (ii) baldintzak betetzen direla). Biz orain $\mathcal{B}$ algebra bat eta $\mathcal{C} \subset \mathcal{B}$, orduan $\mathcal{B} \in \{\mathcal{B}_i\}$ izango da eta $\mathcal{A} = \bigcap_i \mathcal{B}_i \subset \mathcal{B}$ f.n.g.

Algebra minimo hori $\mathcal{C}$-k sorterazitako algebra deitzen da.

σ-algebrak

0.3. Definizioa

$\mathcal{A}$ algebra bat σ-algebra dela esango dugu batukortasun kon

tagarriaren propietatea betetzen badu, alegia:

$$\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A} \implies \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$$

Ondorioa.- Osagarriak hartuz $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$ izango da.

Adibideak

1) $\mathcal{P}(E)$ σ-algebra bat da.

2) Biz $E = \{0,1,2\}$. $\mathcal{A} = \{ \phi, \{0\} , \{1,2\} , E \}$ σ-algebra bat da.

3) Bira E espazio topologiko bat eta τ beronen topologia. τ ez da beti algebra bat, ireki baten osagarria ez baita, generalki, irekia.

0.2. proposizioari beste hau dagokio σ-algebrentzat:

0.4. Proposizioa

Biz $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(E)$. $\mathcal{C}$ partetzat duen σ-algebra minimo bat dago, $\mathcal{C}$-k sorterazitako σ-algebra deitzen dena.

Frogapena hangoa bezala da eta σ-algebra minimo hori $\mathcal{C}$ partetzat duten σ-algebra guztien ebakidura da.

$\mathcal{C}$-n dauden elementuetatik sorterazitako σ-algebra eraikitzeko bide bat eman daiteke; hauxe:

idatz dezagun $\tilde{\mathcal{C}} = \{A^c, A \in \mathcal{C}\}$, biz orain

$$\mathcal{C}_1 = \{ \bigcap_{i\in\mathbb{N}} A_i \ , \ A_i \in \mathcal{C} \cup \tilde{\mathcal{C}} \qquad \forall i \in \mathbb{N} \}$$

eta

$$\mathcal{C}_2 = \{ \bigcup_{j \in \mathbf{N}} B_j \ , \quad B_j \in \mathcal{C}_1 \quad \forall j \in \mathbf{N} \}$$

Errez ikusten da $\mathcal{C}_2$ hau σ-algebra bat dela, $\mathcal{C} \subset \mathcal{C}_2$ nabaria da eta $\mathcal{C}$ partetzat duen edozein σ-algebrak $\tilde{\mathcal{C}}$ partetzat euki behar du, orduan $\mathcal{C}_1$ ere eta halaber $\mathcal{C}_2$. Hau da, beraz, $\mathcal{C}$-k sorterazitako σ-algebra.

1. GAIA

$\mathbb{R}^n$-KO MULTZOEN NEURRIA ETA FUNTZIO NEURGARRIAK

1.1 Tarteen neurria

1.2 Kanpo-neurria

1.3 Multzo neurgarriak eta Lebesgue-ren neurria

1.4 Multzo boreldarrak

1.5 Multzo neurtezinak

1.6 Funtzio neurgarriak

1.7 Irazkinak

1. $\mathbb{R}^n$-KO MULTZOEN NEURRIA ETA MULTZO NEURGARRIAK

Multzoen neurriak nozio ezagun batzuk generaltzen ditu, adibidez:

- segmentu baten luzera
- irudi laun baten azalera
- gorputz baten bolumena
- ψ funtzio ez-beherakor baten gehikuntza $\psi(b) - \psi(a)$, $[a,b)$ tarte erdi ireki batean.

Eraiki dezagun $\mathbb{R}^n$-n aurreko nozio horien propietateak gordeko dituen neurri bat, Lebesgue-ren neurria, hain zuzen.

§1.1.- TARTEEN NEURRIA

$\mathbb{R}^n$-ko puntu bat (x_i) idatziko dugu, $x_i \in \mathbb{R}$ $1 \leq i \leq n$ puntuaren koordenatuak direlarik.

Har ditzagun bi puntu (x_i^0), $(x_i^1) \in \mathbb{R}^n$, $x_i^0 \leq x_i^1$, $1 \leq i \leq n$ betetzen dituztenak. Bi puntu horiekin ondoko tarteok definitzen ditugu:

$\{x = (x_i) \in \mathbb{R}^n \;/\; x_i^0 < x_i < x_i^1 \quad 1 \leq i \leq n\}$ tarte irekia

$\{x = (x_i) \in \mathbb{R}^n \;/\; x_i^0 \leq x_i \leq x_i^1 \quad 1 \leq i \leq n\}$ tarte itxia

i batentzat $x_0^i = x_1^i$ bada, orduan tarte irekia hutsa da.

I tarte baten bolumena zera da:

$$\text{bol}\,(I) = \prod_{i=1}^{n} (x_1^i - x_0^i)$$

$x_0^i \leq x_1^i$ denez, bolumen hau ez da inoiz negatiboa.

1.1. Proposizioa

Tarte-familia finitu batek J^k $k = 1,\ldots,m$, I tartea estaltzen badu, J^k tarteen bolumenen batura ez da I tartearen bolumena baino txikiagoa (tarteok irekiak nahiz itxiak izan daitezke).

Frogapena

Bira N(I) I-ren puntu osoen kopurua eta $N(J^k)$ J^k-renena (puntu bat osoa da beraren koordenatu guztiak zenbaki osoak direnean).

Nola $I \subset \bigcup_{k=1}^{m} J^k$ den, $N(I) \leq \sum_{k=1}^{m} N(J^k)$.

Bira (x_i) eta (y_i) I definitzen duten puntuak eta $(x_i^{(k)})$ eta $(y_i^{(k)})$ J^k definitzen dutenak. Defini ditzagun $\bar{x}_i$ x_i baino handiago den osorik txikiena (handiago edo berdin I itxia bada) eta $\bar{y}_i$ y_i baino txikiago den osorik handiena (txikiago edo berdin I itxia bada). $[\bar{x}_i, \bar{y}_i]$ tarteko osoen kopurua $\bar{y}_i - \bar{x}_i + 1$ da.

Beraz $N(I) = \prod_{i=1}^{n} (\bar{y}_i - \bar{x}_i + 1)$.

Baina $x_i \leq \bar{x}_i \leq x_i+1$, $y_i \leq \bar{y}_i \leq y_i+1$ denez,

$$y_i - x_i - 1 \leq \bar{y}_i - \bar{x}_i + 1 \leq y_i - x_i + 1$$

eta orduan

$$\prod_{i=1}^{n} (y_i - x_i - 1) \leq N(I) \leq \prod_{i=1}^{n} (y_i - x_i + 1)$$

Berdin eginez J^k-rentzat

$$\prod_{i=1}^{n} (y_i^{(k)} - x_i^{(k)} - 1) \leq N(J^k) \leq \prod_{i=1}^{n} (y_i^{(k)} - x_i^{(k)} + 1)$$

Orduan

$$\prod_{i=1}^{n} (y_i - x_i - 1) \leq \sum_{k=1}^{m} \left[\prod_{i=1}^{n} (y_i^{(k)} - x_i^{(k)} + 1) \right]$$

$x_i = \frac{1}{\varepsilon} x_i'$ $i = 1,\ldots,n$ koordenatu-aldaketa eginez lortutako tarteentzat ere balio du erlazio horrek:

$$\prod_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{\varepsilon} y_i - \frac{1}{\varepsilon} x_i - 1 \right) \leq \sum_{i=1}^{m} \left[\prod_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{\varepsilon} y_i^{(k)} - \frac{1}{\varepsilon} x_i^{(k)} + 1 \right) \right]$$

Biderkagai bakoitza ε-ez biderkatuz eta limitera pasatuz ($\varepsilon \to 0$):

$$\prod_{i=1}^{n} (y_i - x_i) \leq \sum_{i=1}^{m} \left[\prod_{i=1}^{n} (y_i^{(k)} - x_i^{(k)}) \right] \qquad \text{f.n.g.}$$

1.2. Proposizioa

Bira I tarte itxi bat eta S I estaltzen duen tarte irekien familia bat (finitu zein infinitua). Orduan tarte ireki horien bolumenen batura ez da I-ren bolumena baino txikiagoa.

Frogapena

I tarte itxia denez gero, S-ren azpimultzo finitu bat aurki daiteke, I estaltzen duena (Heine-Borel-en teorema). Orduan, aurreko proposizioa aplikatuz, I-ren bolumena ez da azpimultzo finituaren tarteen bolumenen batura baino handiagoa eta batura hau ez da S-ko tarteena baino handiagoa.

Tarteentzat definitu dugun bolumena, multzo-funtzio bat da, hots, funtzio horren eremua multzo-bilduma bat da. Baina eremu hori laburregia da eta ahalik eta $\mathbb{R}^n$-ren azpimultzo gehienetara hedatzea komeniko litzaiguke. Gure helburua hauxe da:

$\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$-ren $\mathcal{M}$ azpimultzo bateko E elementu bakoitzari mE zenbaki erreal bat lotu, ondoko propietateok beteko dituena:

- I tarte bat bada, $I \in \mathcal{M}$ eta $mI = bol\ (I)$
- $\{E_i\} \subset \mathcal{M}$ multzo disjuntuen familia kontagarri bat bada,

$$m\left(\bigcup_i E_i\right) = \sum_i m E_i$$

- m translazioz aldaezina da, hots, $m(E+y) = mE$ $\forall y \in \mathbb{R}^n$ non $E+y = \{x+y \ / \ x \in E\}$ baita.

§1.2.- KANPO-NEURRIA

1.3. Definizioa

Biz E multzo bat eta kontsidera ditzagun E estaltzen duten $\{I_k\}$ tarte irekien segida guztiak. Orduan E-ren kanpo-neurria, m^*E, honela definitzen dugu:

$$m^*E = \inf_{E \subset \bigcup_k I_k} \sum_k bol\ (I_k)$$

Berehalako propietate batzuk:

(i) m^* $\mathbb{R}^n$-ren azpimultzo guztientzat definitzen da.

(ii) $\forall A \subset \mathbb{R}^n \qquad 0 \leq m^*A \leq +\infty$

(iii) Multzo hutsaren eta puntu baten kanpo-neurria 0 dira eta $\mathbf{R}^n$-rena $+\infty$.

(iv) $A \subset B \Longrightarrow m^*A \leq m^*B$ (monotonotasuna).

1.4. Proposizioa

Tarte baten kanpo-neurria, beraren bolumena da.

Frogapena

a) I itxia bada, 1.2. proposizioak $m^*I \geq$ bol (I) dela diosku. Baina $I = \prod_{i=1}^{n} [x_i, y_i]$ bada, $\forall \varepsilon > 0$ defini dezakegu

$$I_\varepsilon = \prod_{i=1}^{n} (x_i - \varepsilon, y_i + \varepsilon)$$

Orduan $I \subset I_\varepsilon$ denez,

$$m^*I \leq \inf_{\varepsilon > 0} \text{bol } (I_\varepsilon) = \inf_{\varepsilon > 0} \prod_{i=1}^{n} (y_i - x_i + 2\varepsilon) = \text{bol } (I)$$

Halabeharrez m^*I = bol (I).

b) Biz orain $I = \prod_{i=1}^{n} (x_i, y_i)$ tarte irekia eta $\{I_k\}$, I estaltzen duen segida bat. Segida horri tarte-familia finitu bat gehitzen diogu $\overline{I}$ estaltzeko moduan, gehitutako familia honen bolumen totala nahi adina txiki eginez. Orduan $m^*I = m^*\overline{I}$. Nola I eta $\overline{I}$-ren bolumenak berdinak diren, a)-tik m^*I = bol (I).

1.5. Proposizioa

(i) E bornatua bada, $m^*E < +\infty$

(ii) E-k tarte bat partetzat badu, $m^*E > 0$.

Frogapena

(i) E bornatua bada, existitzen da I tarte bat non $E \subset I$ baita. Orduan $m^*E \leq m^*I = bol\ (I) < +\infty$.

(ii) $I \subset E$ bada, $m^*E \geq m^*I = bol\ (I) > 0$.

1.6. Proposizioa

Biz $\{E_k\}$ multzo-bilduma kontagarri bat. Orduan

$$m^*(\bigcup_k E_k) \leq \sum_k m^* E_k$$

Frogapena

Bildumako multzo baten kanpo-neurria $+\infty$ bada, desberdintza nabaria da.

Suposa dezagun orduan $\forall k$ $m^*E_k < +\infty$ dela eta biz $\varepsilon > 0$. A_k bakoitzarentzat $\{I_{k,j}\}_j$ tarte irekien bilduma kontagarri bat aukeratzen dugu, zeinentzat

$$\sum_j bol\ (I_{k,j}) < m^* E_k + \frac{\varepsilon}{2^k} \qquad \text{baita.}$$

$\{I_{k,j}\}_{k,j} = \bigcup_k \{I_{k,j}\}_j$ kontagarria da (bilduma kontagarrien bildura kontagarria baita) eta $\bigcup_k E_k$ estaltzen du. Honelatan,

$$m^*(\bigcup_k E_k) \leq \sum_{k,j} bol(I_{k,j}) = \sum_k \left(\sum_j bol(I_{k,j}) \right) < \sum_k \left(m^*E_k + \frac{\varepsilon}{2^k}\right) =$$

$$= \sum_k m^*E_k + \varepsilon$$

Nola ε edozein zenbaki positibo den, $m^*(\bigcup_k E_k) \leq \sum_k m^*E_k$ f.n.g.

1.7. Korolarioa

A kontagarria bada, $m^*A = 0$.

1.8. Korolarioa

$[a,b]$ ez da kontagarria $a \neq b$ bada.

1.9. Proposizioa

m^* translazioz aldaezina da, alegia, $m^*(E+a) = m^*E$ $\forall E \subset \mathbb{R}^n$, $\forall a \in \mathbb{R}^n$.

Frogapena

I tarte bat bada, bol (I) = bol (I+a), beraz $m^*I = m^*(I+a)$. Biz $E \subset \mathbb{R}^n$ eta $\{I_k\}$ E-ren tarte-estalki kontagarri bat. Orduan $E+a \subset \bigcup_k (I_k+a)$ eta

$$m^*(E+a) \leq m^*(\bigcup_k (I_k+a)) \leq \sum_k \text{bol } (I_k+a) = \sum_k \text{bol } (I_k)$$

Hau estalki guztientzat egia izanik, $m^*(E+a) \leq m^*E$ dugu. Baina $E = (E+a) + (-a)$ dugu, beraz $m^*E = m^*((E+a) + (-a)) \leq m^*(E+a)$. Orduan $m^*E = m^*(E+a)$.

1.10. Proposizioa

Biz $E \subset \mathbb{R}^n$. $\forall \varepsilon > 0$ $\exists V$ irekia, non $E \subset V$ eta $m^*V \leq m^*E + \varepsilon$ baita.

Frogapena

Definizioz $m^*E = \inf_{E \subset \bigcup_k I_k} \sum_k \text{bol } (I_k)$ da. Orduan $\varepsilon > 0$

emanik, $\exists \{I_k\}$ $E \subset \bigcup_k I_k$ eta $\sum_k \text{bol}(I_k) \leq m^*E + \varepsilon$. Egin dezagun $V = \bigcup_k I_k$, orduan $E \subset V$ eta $m^*V \leq \sum_k m^*I_k = \sum_k \text{bol}(I_k) \leq m^*E + \varepsilon$.

§1.3.- MULTZO NEURGARRIAK ETA LEBESGUE-REN NEURRIA

Kanpo-neurria $\mathbf{R}^n$-ko azpimultzo guztientzat definitzen da, baina 1.6 proposizioan berdintza bat behar genuke goian eskatzen genituen propietate guztiak betetzeko.

Bira A eta B edozein multzo bi; orduan, $B = (A \cap B) \cup (A^c \cap B)$ da. 1.6 proposiziotik zera ateratzen da:

$$m^*B \leq m^*(A \cap B) + m^*(A^c \cap B)$$

Nola $A \cap B$ eta $A^c \cap B$ disjuntuak diren logikoa litzateke berdintza bat izatea. Honek Caratheodory-ren ondoko definizioa sortarazten du:

1.11. Definizioa

E neurgarria da baldin eta soilik baldin edozein A-rentzat

$$m^*A = m^*(E \cap A) + m^*(E^c \cap A)$$

bada. Orduan $mE = m^*E$ E-ren neurria dela esango dugu.

Argi dago aski dela frogatzea $m^*A \geq m^*(E \cap A) + m^*(E^c \cap A)$, beste desberdintza beti gertatzen baita (1.6 proposizioaz). Baina azken desberdintza hau A-ren kanpo-neurria infinitua denean beti gertatzen denez gero, aski da kanpo-neurri finitudunentzat frogatzea.

Definizioa simetrikoa da E eta E^c-n. Horregatik E neurgarria da baldin eta soilik baldin E^c neurgarria bada. Gainera, bistakoa da ϕ eta $\mathbb{R}^n$ neurgarriak direla.

1.12. Lema

$m^*E = 0$ baldin bada, E neurgarria da.

Frogapena

Biz A edozein multzo, orduan:

$$A \cap E \subset E \implies m^*(A \cap E) \leq m^*E = 0$$

$$A \cap E^c \subset A \implies m^*(A \cap E^c) \leq m^*A$$

Honelatan, $m^*A \geq m^*(A \cap E^c) + m^*(A \cap E)$ eta E neurgarria da f.n.g.

1.7 korolarioa eta lema hau bilduz zera dugu: multzo kontagarriak neurgarriak dira eta berauen neurria 0 da. Baina multzo baten neurria 0 izan daiteke kontagarria izan ez arren (ikus irazkinak §1.7, 3. puntua).

1.13. Lema

E_1 eta E_2 neurgarriak badira, halaber $E_1 \cup E_2$.

Frogapena

Biz A edozein multzo. Nola E_2 neurgarria den

$$m^*(A \cap E_1^c) = m^*(A \cap E_1^c \cap E_2) + m^*(A \cap E_1^c \cap E_2^c)$$

eta nola $A \cap (E_1 \cup E_2) = (A \cap E_1) \cup (A \cap E_2 \cap E_1^c)$ den

$$m^*(A\cap(E_1\cup E_2)) \leq m^*(A\cap E_1) + m^*(A\cap E_2\cap E_1^c)$$

Honelatan,

$$m^*(A\cap(E_1\cup E_2)) + m^*(A\cap E_1^c\cap E_2^c) \leq m^*(A\cap E_1) + m^*(A\cap E_2\cap E_1^c) +$$

$$+ m^*(A\cap E_1^c\cap E_2^c) = m^*(A\cap E_1) + m^*(A\cap E_1^c) = m^*A$$

E_1-en neurgarritasuna aplikatuz.

Orduan $E_1\cup E_2$ neurgarria da f.n.g.

1.14. Korolarioa

Multzo neurgarrien bilduma $\mathcal{M}$ multzo-algebra bat da.

1.15. Lema

Bira A multzo bat eta $E_1, \ldots, E_k$ multzo disjuntu neurgarrien familia finitu bat. Orduan

$$m^*\left[A\cap\left(\bigcup_{i=1}^{k} E_i\right)\right] = \sum_{i=1}^{k} m^*(A\cap E_i)$$

Frogapena

Indukzioz egingo dugu.

Argi dago k=1 denean egia dela. Suposa dezagun k-1 multzorentzat balio duela; E_i multzoak disjuntuak direnez gero,

$$A\cap\left(\bigcup_{i=1}^{k} E_i\right)\cap E_k = A\cap E_k$$

eta

$$A\cap\left(\bigcup_{i=1}^{k} E_i\right)\cap E_k^c = A\cap\left(\bigcup_{i=1}^{k-1} E_i\right)$$

Nola E_k neurgarria den

$$m^*\left[A\cap\left(\bigcup_{i=1}^{k}E_i\right)\right] = m^*(A\cap E_k) + m^*\left[A\cap\left(\bigcup_{i=1}^{k-1}E_i\right)\right] =$$

$$= m^*(A\cap E_k) + \sum_{i=1}^{k-1} m^*(A\cap E_i) \qquad \text{f.n.g.}$$

1.16. Proposizioa

Biz $\{E_i\}$ multzo neurgarrien familia kontagarri bat. Orduan $\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$ neurgarria da.

Frogapena

Defini dezagun $\{F_k\}$ familia ondoko eran

$$F_1 = E_1 \qquad F_k = E_k - \bigcup_{i=1}^{k-1} E_i = E_k \cap \left(\bigcup_{i=1}^{k-1} E_i^c\right)$$

Argi dago F_i multzoak neurgarriak direla eta

$$\forall k \quad \bigcup_{i=1}^{k} F_k = \bigcup_{i=1}^{k} E_k \qquad \text{eta} \qquad E = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i$$

Biz A edozein multzo; $G_k = \bigcup_{i=1}^{k} F_i$ bada, $G_k \subset E$ eta orduan $G_k^c \supset E^c$. G_k neurgarria denez

$$m^*A = m^*(A\cap G_k) + m^*(A\cap G_k^c) \geq m^*(A\cap G_k) + m^*(A\cap E^c)$$

1.15 lema aplikatuz

$$m^*(A\cap G_k) = \sum_{i=1}^{k} m^*(A\cap F_i)$$

orduan

$$m^*A \geq \sum_{i=1}^{k} m^*(A \cap F_i) + m^*(A \cap E^c)$$

Desberdintza horrek edozein k-rentzat balio du eta lehen atalean ez da k agertzen, beraz

$$m^*A \geq \sum_{i=1}^{\infty} m^*(A \cap F_1) + m^*(A \cap E^c)$$

1.5 proposizioaz zera dugu

$$m^*A \geq m^*(A \cap E) + m^*(A \cap E^c)$$

Halabeharrez E neurgarria da f.n.g.

1.17. Teorema

Multzo neurgarrien bilduma $\mathcal{M}$ σ-algebra bat da.

1.14 korolarioaren eta 1.16 proposizioaren ondorioa da.

1.18. Proposizioa

(i) (azpibatukortasun kontagarria) Biz $\{E_k\}$ multzo neurgarrien segida bat. Orduan $m(\bigcup_k E_k) \leq \sum_k mE_k$.

(ii) (σ-batukortasuna) E_k multzoak binaka disjuntuak badira

$$m(\bigcup_k E_k) = \sum_k mE_k$$

Frogapena

(i) 1.6 proposizioaren kasu berezia da. Dakigunez, multzo neurgarrientzat kanpo-neurria hartu dugu neurritzat.

(ii) Biz $\{E_k\}$ multzo neurgarrien segida bat. Finitua baldin bada, 1.15 leman $A = \mathbb{R}^n$ hartuz

$$m(\bigcup_k E_k) = \sum_k mE_k$$ lortzen da.

Infinitua baldin bada $\bigcup_{k=1}^{j} E_k \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$ eta orduan

$$m(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k) \geq m(\bigcup_{k=1}^{j} E_k) = \sum_{k=1}^{j} mE_k \qquad \forall\, j$$

Nola lehen atalean ez den j agertzen

$$m(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k) \geq \sum_{k=1}^{\infty} m\, F_k$$

Azpibatukortasunak alderantzizko deberdintza ematen duenez

$$m(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k) = \sum_{k=1}^{\infty} m\, E_k$$ f.n.g.

σ-batukortasunetik ondoko konbergentzi propietateok ateratzen dira:

1.19. Proposizioa

$E_1 \subset E_2 \subset E_3 \subset \ldots$ multzo neurgarrien segida gorakor bat bada eta $E = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$, orduan $mE = \lim_{k \to \infty} m\, E_k$.

Frogapena

Defini ditzagun $F_1 = E_1$ eta $F_k = E_k - E_{k+1}$. Orduan $\{F_k\}$ familiako multzoak neurgarriak eta binaka disjuntuak dira,

$$E_k = \bigcup_{i=1}^{k} F_i \quad \text{eta} \quad E = \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i$$

Beraz,

$$mE_k = \sum_{i=1}^{k} mF_i \quad \text{eta} \quad mE = \sum_{i=1}^{\infty} mF_i$$

Serie baten baturaren definiziotik $mE = \lim_{k \to \infty} mE_k$ dugu, f.n.g.

1.20. Proposizioa

Biz $E_1 \supset E_2 \supset E_3 \supset \ldots$ multzo neurgarrien segida beherakor bat eta $E = \bigcap_{k=1}^{\infty} E_k$. Orduan $mE_1 < +\infty$ bada,

$$mE = \lim_{k \to \infty} mE_k.$$

Frogapena

Egin dezagun $F_k = E_1 - E_k$. Orduan $F_1 \subset F_2 \subset F_3 \subset \ldots$ eta $mF_k = mE_1 - mE_k$.

$E_1 - E = \bigcup_{k=1}^{\infty} F_k$. eta 1.19 proposizioa aplikatuz

$$mE_1 - mE = m(E_1 - E) = \lim_{k \to \infty} mF_k = \lim_{k \to \infty} (mE_1 - mE_k) = mE_1 - \lim_{k \to \infty} E_k$$

$mE_1 < +\infty$ denez bi aldeetan ken dezakegu eta proposizioa lortzen da.

Oharra

$mE_1 < +\infty$ eskatu ordez edozein k-rentzat $mE_k < +\infty$ izatea aski da, segidaren lehen elementuek ez baitute garrantzirik. Baina baldintza hau beharrezkoa da kontradibide honek frogatzen duenez:

biz $\mathbb{R}$-n $E_k = (k,+\infty)$ (1.24 leman ikusiko dugu neurgarria dela);

orduan $E = \bigcap_{k=1}^{\infty} E_k = \phi$ eta $mE_k = +\infty \quad \forall k$; hemen $mE \neq \lim_{k\to\infty} mE_k$.

1.21. Proposizioa

Lebesgue-ren neurria translazioz aldaezina da.

Frogapena

Multzo neurgarri baten neurria kanpo-neurria da. Nola kanpo-neurria translazioz aldaezina den (1.9 Proposizioa) frogatu behar den gauza bakarra zera da: E neurgarria bada, E+a ere ba dela $\forall a \in \mathbb{R}^n$.

Biz orduan A $\mathbb{R}^n$-ren azpimultzo bat, orduan

$$m^*(A\cap(E+a)) + m^*(A\cap(E+a)^c) = m^*\left[((A+(-a))\cap E) + a\right] +$$

$$+ m^*\left[((A+(-a))\cap E^c) + a\right] = m^*\left[(A+(-a))\cap E\right] + m^*\left[(A+(-a))\cap E^c\right] =$$

$$= m^*(A+(-a)) = m^*A$$

non m^*-ren translaziozko aldaezintasuna eta E-ren neurgarritasuna erabili baititugu.

Honelatan E+a neurgarria da, f.n.g.

§1.4.- MULTZO BORELDARRAK

1.22. Definizioa

Multzo irekien familiak sorterazitako σ-algebraren elementuak multzo boreldarrak deituko ditugu (ikus 0.4 proposizioa).

Hemendik eta σ-algebraren definiziotik zera dugu:

- multzo irekiak eta itxiak boreldarrak dira.
- multzo itxien bildura kontagarriak boreldarrak dira; horrelako multzo bat F_σ dela esaten da.
- multzo irekien ebakidura kontagarriak boreldarrak dira; horrelako multzo bat G_δ dela esaten da.

Kontuan har F_σ eta G_δ multzoak ez daudela, generalki, topologian.

1.23. Teorema

Multzo boreldarrak neurgarriak dira.

Frogapena

Aski da irekiak neurgarriak direla frogatzea. Hala bada, multzo neurgarriak σ-algebra bat direnez gero (1.17 teorema), multzo irekiak partetzat dituen σ-algebrarik txikiena partetzat edukiko dute; beraz, multzo boreldarrak neurgarriak izango dira.

Behar dugun erresultatua ondoko lema honek emango digu.

1.24. Lema

Multzo irekiak neurgarriak dira.

Frogapena

a) Lehenengo espazio erdiak neurgarriak direla frogatuko dugu. Biz $S = \{x \in \mathbb{R}^n / x_n > 0\}$ eta A multzo bat. Zera frogatu behar dugu

$m^*A \geq m^*(A\cap S) + m^*(A\cap S^c)$, $\quad m^*A < +\infty$ denean

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \{I_k\}$ A-ren tarte-estalki bat non $\sum_k \text{bol}\,(I_k) < m^*A + \varepsilon$ baita.

Kontsidera ditzagun $I_k' = I_k \cap S$ eta $I_k'' = I_k \cap S^c$; orduan I_k' eta I_k'' tarteak ala hutsak dira eta

$$\text{bol}\,(I_k) = \text{bol}\,(I_k') + \text{bol}\,(I_k'') = m^*I_k' + m^*I_k''$$

$$A\cap S \subset \bigcup_k I_k' \Longrightarrow \quad m^*(A\cap S) \leq m^*(\bigcup_k I_k') \leq \sum_k m^* I_k'$$

$$A\cap S^c \subset \bigcup_k I_k'' \Longrightarrow \quad m^*(A\cap S^c) \leq m^*(\bigcup_k I_k'') \leq \sum_k m^* I_k''$$

$$m^*(A\cap S) + m^*(A\cap S^c) \leq \sum_k (m^*I_k' + m^*I_k'') = \sum_k \text{bol}\,(I_k) < m^*A + \varepsilon$$

Halabeharrez $m^*(A\cap S) + m^*(A\cap S^c) \leq m^*A$.

Berdin frogatzen da $\{x \in \mathbb{R}^n \,/\, x_i > 0\}$ $\quad i = 1,\ldots,n-1$ neurgarria dela eta translazioz $a \in \mathbb{R}$ bada,

$$S_a^i = \{x \in \mathbb{R}^n \,/\, x_i \leq a\} \qquad \text{ere neurgarria da.}$$

Beste espazio erdia, $T_a^i = \{x \in \mathbb{R}^n \,/\, x_i < a\}$ honela idatz daiteke:

$$T_a^i = \bigcup_j \{x \in \mathbb{R}^n \,/\, x_i \leq a - \tfrac{1}{j}\} = \bigcup_j (S^i_{a-\frac{1}{j}})^c$$

Orduan 1.16 proposizioa aplikatuz T_a^i ere neurgarria da.

b) Tarte irekiak neurgarriak dira. Biz $I = \prod_{i=1}^{n}(x_i,y_i)$ tartea.

Orduan

$$I = \left(\bigcap_{i=1}^{n} S^i_{x_i}\right) \cap \left(\bigcap_{i=1}^{n} T^i_{y_i}\right)$$

$S^i_{x_i}$ eta $T^i_{y_i}$ neurgarriak direnez gero, I ere neurgarria da.

c) $\mathbf{R}^n$-ko ireki bat tarte irekien bildura kontagarri bezala ipin daiteke. Orduan neurgarria da f.n.g.

Oharra

Ikus daiteke multzo neurgarriak multzo boreldarrak baino gehiago direla kardinalen teoriaren arauera. Konkretuki, multzo boreldarren familiaren kardinala Lebesgue-ren neurri nuluko multzoen familiaren kardinala baino txikiagoa da.

1.25. Proposizioa

Biz $E \subset \mathbf{R}^n$. Orduan ondoko propietateok baliokideak dira:

(i) E neurgarria da.

(ii) $\forall \varepsilon > 0$ existitzen da ireki bat $V \supset E$ non $m^*(V-E) < \varepsilon$ baita.

(iii) $\forall \varepsilon > 0$ existitzen da itxi bat $F \subset E$ non $m^*(E-F) < \varepsilon$ baita.

(iv) Existitzen da $G \in G_\delta$, $E \subset G$ non $m^*(G-E) = 0$ baita.

(v) Existitzen da $F \in F_\sigma$, $F \subset E$ non $m^*(E-F) = 0$ baita.

Frogapena

(i) $\Longrightarrow$ (ii) Biz $m^*E < +\infty$, existitzen da V irekia, $V \supset E$ eta $m^*V < m^*E + \varepsilon$ betetzen duena (1.10 proposizioa). E neurgarria denez gero:

$$m^*V = m^*(V \cap E) + m^*(V \cap E^c) = m^*E + m^*(V-E)$$

eta $m^*(V-E) = m^*V - m^*E < \varepsilon$.

Biz orain $m^*E = +\infty$. Egin dezagun $E_k = \overline{B}(0,k) \cap E$ non $\overline{B}(0,k) = \{x \in \mathbb{R}^n / |x| \leq k\}$ baita. Orduan $m^*E_k < +\infty$ denez, existitzen da $V_k \supset E_k$ eta $m^*(V_k - E_k) < \frac{\varepsilon}{2^k}$.

$V = \bigcup_{k=1}^{\infty} V_k$ definituz, $V \supset \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k = E$ eta

$$V-E = (\bigcup_{k=1}^{\infty} V_k) \cap E^c = \bigcup_{k=1}^{\infty} (V_k \cap E^c) \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} (V_k \cap E_k^c) = \bigcup_{k=1}^{\infty} (V_k - E_k)$$

$$m^*(V-E) \leq m^*(\bigcup_{k=1}^{\infty} (V_k - E_k)) \leq \sum_{k=1}^{\infty} m^*(V_k - E_k) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^k} = \varepsilon$$

(ii) $\Longrightarrow$ (iv) Ipin dezagun $\varepsilon_k = \frac{1}{k}$ eta (ii) aplikatuz har dezagun V_k segida bat non $V_k \supset E$ eta $m^*(V_k - E) < \frac{1}{k}$ baita.

Biz $G = \bigcap_{k=1}^{\infty} V_k$; orduan G G_δ bat da eta

$$G-E = (\bigcap_{k=1}^{\infty} V_k) \cap E^c = \bigcap_{i=1}^{\infty} (V_k \cap E^c) = \bigcap_{k=1}^{\infty} (V_k - E)$$

$$m^*(G-E) \leq m^*(V_k - E) \leq \frac{1}{k} \quad \forall k \quad \Longrightarrow \quad m^*(G-E) = 0.$$

(iv) $\Longrightarrow$ (i) Bira $E \subset \mathbb{R}^n$, $G \in G_\delta$ $E \subset G$ eta $m^*(G-E) = 0$. Orduan 1.12 lematik $G-E$ neurgarria dela ateratzen da. $G \in G_\delta$ denez, boreldarra da, beraz, neurgarria. Halabeharrez, $E = G - (G-E)$ neurgarria da.

(i) $\Longrightarrow$ (iii) E neurgarria bada, E^c ere. (ii) aplikatuz existitzen da V irekia, $V \supset E^c$ eta $m^*(V-E^c) < \varepsilon$. Egin dezagun $F = V^c$, orduan F itxia, $F \subset E$ eta $E-F = E \cap F^c = E \cap V = V - E^c$, hortaz $m^*(E-F) < \varepsilon$.

(iii) $\Longrightarrow$ (v) Goian bezala ((ii) $\Longrightarrow$ (iv) egiteko) $\varepsilon_k = \frac{1}{k}$ segidarentzat F_k segida bat hartzen da non $F_k \subset E$ eta $m^*(E-F_k) < \frac{1}{k}$ baitira. $F = \bigcup_{k=1}^{\infty} F_k$ da behar dugun F_σ multzoa.

(v) $\Longrightarrow$ (i) Aurreko (iv) $\Longrightarrow$ (i) bezala.

§1.5.- MULTZO NEURTEZINAK

1.2 definizioan multzo neurgarriak definitu ditugu. Baina oraindik ez dakigu definizio hori betetzen ez duen multzorik dagoenez. Erakuts dezagun $\mathbb{R}$-n multzo neurtezin bat.

Defini dezagun (0,1) tartean baliokidetasun-erlazio bat: $x \sim y \iff x-y \in \mathbb{Q}$. Erlazio honek baliokidetasun-klase batzuk definitzen ditu eta hauek (0,1)-en zatiketa bat dira.

Aukera-axiomaren bidez klase bakoitzean elementu bat har genezake; biz P elementu (ordezkari) horien multzoa. Ikus dezagun P neurtezina dela.

Nola $\mathbb{Q}$ kontagarria den, biz $\{r_n\}$ (-1,1)-eko zenbaki arazionalen segida eta $P_n = P + r_n$. Orduan

$$m^*P_n = m^*P \qquad \text{eta} \qquad (0,1) \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} P_n \subset (-1,2)$$

(hala da zeren $y \in (0,1)$ bada, existitzen baitira $x \in P$ eta $n_0 \in \mathbf{N}$ non $y-x = r_{n_0} \in (-1,1)$ den eta $y \in P_{n_0}$).

P_n multzoak disjuntuak dira: suposa dezagun $P_n \cap P_m \neq \phi$, $n \neq m$ eta biz $y \in P_n \cap P_m$; nola $n \neq m$ den, $r_n \neq r_m$ eta existitzen dira $x,z \in P$ non $y = x+r_n$ eta $y = z+r_m$ baitira. Baina orduan $x-z = r_m - r_n \neq 0$ eta $x-z \in \mathbf{Q}$, hau da, $x \sim z$ eta hau ez da posible P-ren definizioaren arauera.

P neurgarria balitz, P_n multzoak ere neurgarriak lirateke eta disjuntuak direnez, $m(\bigcup_{n=1}^{\infty} P_n) = \sum_{n=1}^{\infty} m\, P_n$ edukiko genuke. Baina orduan

$$1 = m(0,1) \leq \sum_{n=1}^{\infty} m\, P_n = \sum_{n=1}^{\infty} m\, P \leq m(-1,2) = 3$$

Eta hau ez da posible ezein mP-rentzat. Beraz, P ez da neurgarria.

Multzo kontagarriak neurgarriak dira (ikus 1.12 lemaren ondoan); halabeharrez P ez da kontagarria.

§1.6.- FUNTZIO NEURGARRIAK

1.26. Proposizioa

Biz $f: D \subset \mathbf{R}^n \longrightarrow \overline{\mathbf{R}}$ eta D neurgarria. Orduan ondoko baiezpenok baliokideak dira:

(i) $\forall \alpha \in \mathbf{R}$ $\{x / f(x) > \alpha\}$ neurgarria da.

(ii) $\forall \alpha \in \mathbf{R}$ $\{x / f(x) \geq \alpha\}$ neurgarria da.

(iii) $\forall \alpha \in \mathbf{R}$ $\{x / f(x) < \alpha\}$ neurgarria da.

(iv) $\forall \alpha \in \mathbf{R}$ $\{x / f(x) \leq \alpha\}$ neurgarria da.

Hauen ondorioz (baina ez baliokidea)

(v) $\forall \alpha \in \overline{\mathbb{R}}$ $\{ x / f(x) = \alpha \}$ neurgarria da.

Frogapena

(i) $\Longleftrightarrow$ (iv) $\{ x / f(x) > \alpha \} = D - \{ x/f(x) \leq \alpha \}$ delako

(ii) $\Longleftrightarrow$ (iii) $\{ x / f(x) \geq \alpha \} = D - \{ x/f(x) < \alpha \}$ delako

(i) $\Longrightarrow$ (ii) $\{ x / f(x) \geq \alpha \} = \bigcap_{k=1}^{\infty} \{ x / f(x) > \alpha + \frac{1}{k} \}$ eta multzo neurgarrien ebakidura kontagarria neurgarria delako

(ii) $\Longrightarrow$ (i) $\{ x / f(x) > \alpha \} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \{ x / f(x) \geq \alpha + \frac{1}{k} \}$ eta multzo neurgarrien bildura kontagarria neurgarria delako.

(v) Har dezagun $\alpha \in \mathbb{R}$. Orduan

$$\{ x / f(x) = \alpha \} = \{ x / f(x) \geq \alpha \} \cap \{ x / f(x) \leq \alpha \}$$

eta (ii) eta (iv) aplikatuz $\{ x / f(x) = \alpha \}$ neurgarria da.

$\{x / f(x) = +\infty \} = \bigcap_{k=1}^{\infty} \{x / f(x) \geq k\}$ neurgarria da (ii) aplikatuz eta halaber $\{ x / f(x) = -\infty \} = \bigcap_{k=1}^{\infty} \{x / f(x) \leq -k\}$ (iv) aplikatuz.

1.27. Definizioa

Biz $f: D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$. f neurgarria dela esango dugu, D neurgarria bada eta 1.26 proposizioko propietate baliokideak betetzen baditu.

Berehala ateratzen dira:

- funtzio jarraiak neurgarriak dira.

- f neurgarria bada eta $E \subset D$ ere, f-ren E-rako murrizpena neurgarria da.

1.28. Proposizioa

Bira c konstante bat eta f eta g eremu berean definituriko bi funtzio neurgarri. Orduan f+c, cf, f+g, g-f eta fg neurgarriak dira.

Frogapena

(i) $\{x/f(x) + c < \alpha\} = \{x/f(x) < \alpha - c\}$ beraz f neurgarria bada, f+c ere.

(ii) $c > 0$ bada, $\{x/cf(x) < \alpha\} = \{x/f(x) < \frac{\alpha}{c}\}$ da. Orduan f neurgarria bada, cf ere.
Halaber $c < 0$ denean, $\{x/cf(x) < \alpha\} = \{x/f(x) > \frac{\alpha}{c}\}$ baita.
$c = 0$ bada, nabaria da.

(iii) $f(x) + g(x) < \alpha \Longrightarrow f(x) < \alpha - g(x)$. Nola bi zenbaki erreal desberdinen artean beti dagoen zenbaki razional bat, $\exists r \in Q$, $f(x) < r < \alpha - g(x)$. Hemendik

$$\{x/f(x) + g(x) < \alpha\} = \bigcup_{r \in Q} (\{x/f(x) < r\} \cap \{x/g(x) < \alpha - r\})$$

Hortaz f,g neurgarriak $\Longrightarrow$ f+g neurgarria.

(iv) $f-g = f + (-g)$ denez gero, (ii) eta (iii) aplikatuz f-g neurgarria dela lortzen da.

(v) Ikus dezagun f^2 neurgarria dela f neurgarria denean:
$\alpha \geq 0$ bada, $\{x/f^2(x) > \alpha\} = \{x/f(x) > \sqrt{\alpha}\} \cup \{x/f(x) < -\sqrt{\alpha}\}$ da eta $\alpha < 0$ bada, $\{x/f^2(x) > \alpha\} = D$.

Orduan f eta g neurgarriak badira, fg ere zeren

$$fg = \frac{1}{2}\left[(f+g)^2 - f^2 - g^2\right] \qquad \text{baita.}$$

1.29. Proposizioa

Biz $\{f_k\}$ D-n definitutako funtzio neurgarrien segida bat. Orduan ondoko funtzioak neurgarriak dira:

(i) $\sup\{f_1, f_2, \ldots, f_n\}$ (ii) $\inf\{f_1, f_2, \ldots, f_n\}$

(iii) $\sup_{k\in\mathbb{N}} f_k$ (iv) $\inf_{k\in\mathbb{N}} f_k$

(v) $\limsup f_k$ (vi) $\liminf f_k$

Frogapena

(i) Biz $h(x) = \sup\{f_1(x), \ldots, f_n(x)\}$. Orduan

$$\{x / h(x) > \alpha\} = \bigcup_{i=1}^{n} \{x / f_i(x) > \alpha\}$$

Hortaz, f_i funtzioak neurgarriak badira, h ere.

(iii) Biz $g(x) = \sup_{k\in\mathbb{N}} f_k(x)$. Orduan

$$\{x / g(x) > \alpha\} = \bigcup_{i=1}^{\infty} \{x / f_k(x) > \alpha\}$$

denez, g neurgarria da.

(ii) eta (iv) berdin frogatzen dira.

Nola $\limsup f_k = \inf_{k\in\mathbb{N}} \sup_{i\geq k} f_i$ eta $\liminf = \sup_{k\in\mathbb{N}} \inf_{i\geq k} f_i$

diren, (v) eta (vi) aurrekoetatik sortzen dira.

Ondorioak

$f^+(x) = \max\{f(x),0\}$ eta $f^-(x) = \max\{-f(x),0\}$ definituz gero, aurreko proposiziotik f^+ eta f^- neurgarriak direla ateratzen da. Gainera $|f| = f^+ + f^-$ ere neurgarria da.

Alderantzizkoa ez da egia, h.d., $|f|$ neurgarria izan daiteke f izan barik; esate baterako, E neurtezina bada eta $f(x) = 1$ $x \in E$, $f(x) = -1$ $x \notin E$ definituz, argi dago $|f| = 1$ neurgarria dela baina ez f.

$\{f_k\}$ funtzio neurgarrien segida bat bada eta $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ $\forall x$, f neurgarria da.

1.30. Definizioa

Biz E multzo neurgarri bat. P propietatea E-n ia nonnahi gertatzen dela esango dugu gertatzen ez den puntuen multzoaren neurria 0 bada.

Laburki idazteko: E-n ia nonnahi $\equiv$ i.n.E

Adibideak

- Bira f,g E-n definitutako bi funtzio. Orduan

$$f = g \text{ i.n. } E \iff m\{x \in E / f(x) \neq g(x)\} = 0$$

Honek baliokidetasun-erlazio garrantzitsu bat definitzen du.

- Bira $\{f_n\}$ segida bat eta g funtzio bat. Orduan

$$f_n \longrightarrow g \text{ i.n. } E \iff m\{x \in E / f_n(x) \not\longrightarrow g(x)\} = 0$$

Esate baterako $f_n(x) = x^n$ bada, $f_n \longrightarrow 0$ i.n. $[0,1]$.

1.29 proposizioaren ondorio bezala esan dugu funtzio-segida baten limitea neurgarria dela. Limite hori i.n. bada ere neurgarria da, errez ikus daitekeenez.

1.31. Proposizioa

Biz f neurgarria eta $f = g$ i.n., orduan g neurgarria da.

Frogapena

Biz $E = \{ x / f(x) \neq g(x) \}$. Nola $f = g$ i.n. den, $mE = 0$

$\{ x/g(x) > \alpha \} = \{ x/f(x) > \alpha \} \cup \{ x \in E/g(x) > \alpha \} - \{ x \in E/g(x) \leq \alpha \}$

f neurgarria denez, $\{ x / f(x) > \alpha \}$ neurgarria da eta beste multzo biak E-ren parte izanik neurgarriak dira. Orduan $\{x/g(x) > \alpha\}$ ere neurgarria da.

1.32. Proposizioa (Egorov-en teorema)

Biz E neurri finituduna eta har dezagun $\{ f_n \}$ E-n definitutako funtzio neurgarrien segida bat. Suposa dezagun segida honek f-rantz konbergitzen duela i.n.. Orduan $\forall \delta > 0$ aurki dezakegu E_δ neurgarria, $E_\delta \subset E$, zeinentzat $mE_\delta > mE - \delta$ den eta E_δ-n $\{f_k\}$ segidak uniformeki konbergitzen duelarik.

Frogapena

Goian esan dugun bezala f neurgarria da. Defini dezagun

$$E(k,j) = \bigcap_{i \geq j} \{x / | f_i(x) - f(x) | < \frac{1}{k} \}$$

(k,j finkatuz, $E(k,j)$-ko puntuetan $|f_i(x)-f(x)| < \frac{1}{k}$ da $\forall i \geq j$)

Biz orduan $E^k = \bigcup_{j=1}^{\infty} E(k,j)$; nola $E(k,1) \subset E(k,2) \subset \ldots \subset E(k,j) \subset \ldots$

den $mE^k = \lim_{j \to \infty} E(k,j)$ eta orduan $\delta > 0$ hartuz, existitzen da

$j_0(k)$ non $m(E^k - E(k,j_0(k))) < \frac{\delta}{2^m}$ baita.

Har dezagun $E_\delta = \bigcap_{k=1}^{\infty} E(k,j_0(k))$.

a) E_δ-ren definiziotik zera dugu

$$\forall x \in E_\delta \quad \forall k \qquad |f_i(x) - f(x)| < \frac{1}{k} \qquad i > j_0(k)$$

h.d., E_δ-n konbergentzia uniformea dugu.

b) $E - E^k$ multzoko puntuetan $\{f_n\}$ segidak ez du f-rantz konbergitzen; hipotesiz i.n. konbergitzen duenez $m(E-E^k) = 0$ dugu.

Nola $E(k,j_0(k)) \subset E^k \subset E$ den,

$$m(E - E(k,j_0(k))) = m(E - E^k) + m(E^k - E(k,j_0(k))) < \frac{\delta}{2^k}$$

Horregatik

$$m(E - E_\delta) = m(E - \bigcap_{k=1}^{\infty} E(k,j_0(k))) = m(\bigcup_{k=1}^{\infty} (E - E(k,j_0(k)))) \leq$$

$$\leq \sum_{k=1}^{\infty} m(E - E(k,j_0(k))) < \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\delta}{2^k} = \delta$$

Oharrak

1. Erresultatu hau ez da egia $mE = +\infty$ bada. Biz $\mathbb{R}$-n ondoko segida hau

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 & x \geq n \\ 0 & x < n \end{cases}$$

Orduan $f_n \longrightarrow 0$ baina ez da teorema betetzen.

2. Pentsa liteke teorema honetan zerbait hobe lortzea, adibidez, $\exists\, E_\delta \subset E$, $m(E-E_\delta) = 0$ eta $\{f_n\}$ segidak uniformeki konbergitzen du E_δ-n. Baina hau ez da beti posible kontradibide honek erakusten duenez:

biz $E = (0,1)$ eta $f_n(x) = \begin{cases} 1 & 0 < x < 1/n \\ 0 & \text{bestela} \end{cases}$

$f_n(x) \longrightarrow 0$ puntualki baina ε emanik $0 < \varepsilon < 1$,
$m\{x \,/\, f_n(x) > \varepsilon\} = \frac{1}{n} > 0$.

Funtzio sinpleak

E multzo baten funtzio ezaugarria honelaxe definitzen dugu:

$$\chi_E(x) = \begin{cases} 1 & x \in E \\ 0 & x \notin E \end{cases}$$

1.33. Definizioa

Funtzio neurgarri bat funtzio sinplea dela esango dugu haren balioek multzo finitu bat osatzen badute.

(Funtzio hauek funtzio mailakatuak ere deitzen dira baina guk izen hau tarteekin eraikitako funtzio sinpleentzat gordeko dugu).

Biz ψ funtzio sinple bat eta $\{a_1,\ldots,a_k\}$ ψ-k hartzen dituen balio ez nuluak. Orduan

$$\psi = \sum_{i=1}^{k} a_i \chi_{A_i}$$

non $A_i = \{x \,/\, \psi(x) = a_i\}$ baita.

1.26 proposizioaren (v) puntuak A_i neurgarria dela esaten digu eta a_i guztiak desberdinak izanik, $A_i \cap A_j = \phi$ $i \neq j$ dugu. Adierazpen hau kanonikoa deituko dugu, baina noizik behin kanonikoak ez diren beste adierazpen batzuk erabil ditzakegu. Orduan $\psi = \sum_{i=1}^{m} e_i \chi_{E_i}$ izango da, E_i multzoak neurgarri eta disjuntuak izanik, baina e_i guztiak desberdinak izan gabe.

1.34. Proposizioa

Biz $f: E \longrightarrow [0,+\infty]$ funtzio neurgarri bat. Orduan existitzen da funtzio sinpleen segida bat $\{\psi_n\}$ ondoko propietateokin:

(i) $0 \leq \psi_1 \leq \psi_2 \leq \ldots \leq \psi_n \leq \ldots \leq f$.

(ii) $f(x) = \lim_{n \to \infty} \psi_n(x) \quad \forall x \in E$.

(iii) f bornatua bada, konbergentzia uniformea da.

Frogapena

$[0,n]$ tartea hartu eta $\frac{1}{2^n}$ luzerako $n2^n$ tarteetan zati dezagun. Bira orain

$$E_{nk} = \begin{cases} \{x \in E \,/\, \frac{k}{2^n} \leq f(x) < \frac{k+1}{2^n}\} & 0 \leq k \leq 2^n - 1 \\ \{x \in E \,/\, f(x) \geq n\} & k = n2^n \end{cases}$$

Honela $n2^n+1$ multzo disjuntu definitzen ditugu eta $\bigcup_{k=o}^{n2^n} E_{nk} = E$. Defini dezagun

$$\psi_n(x) = \frac{k}{2^n} \qquad x \in E_{nk}$$

ψ_n funtzio sinplea da.

(i) Argi dago definizioz $0 \leq \psi_n \leq f$ dela; $\psi_n \leq \psi_{n+1}$ dugu la ikusi behar dugu.

Biz $x \in E$ eta suposa dezagun $\frac{k}{2^n} \leq f(x) < \frac{k+1}{2^n}$ $k < n2^n$; orduan $\psi_n(x) = \frac{k}{2^n}$.

Nola $\frac{2k}{2^{n+1}} \leq f(x) < \frac{2k+2}{2^{n+1}}$ den, bi kasu gerta daitezke:

* $\frac{2k}{2^{n+1}} \leq f(x) < \frac{2k+1}{2^{n+1}}$ eta orduan $\psi_{n+1}(x) = \frac{2k}{2^{n+1}} = \frac{k}{2^n} = \psi_n(x)$

* $\frac{2k+1}{2^{n+1}} \leq f(x) < \frac{2k+2}{2^{n+1}}$ eta orduan $\psi_{n+1}(x) = \frac{2k+1}{2^{n+1}} > \frac{k}{2^n} = \psi_n(x)$

Suposa dezagun $f(x) \geq n$ dela; orduan $\psi_n(x) = n$. Baina $f(x) \geq \frac{k}{2^{n+1}}$ $k = n2^{n+1}$ izanik, beraz $\psi_{n+1}(x) \geq n$.

(ii) Biz $x \in E$. $f(x) < +\infty$ bada, biz $\varepsilon > 0$; har dezagun n_o zeinentzat $f(x) < n_o$ eta $\frac{1}{2^{n_o}} < \varepsilon$ baita. $n > n_o$ bada,

$$|f(x) - \psi_n(x)| < \frac{1}{2^n} < \frac{1}{2^{n_o}} < \varepsilon$$

Orduan $\lim_{n \to \infty} \psi_n(x) = f(x)$. Gainera $f(x) = +\infty$ bada, nola $f(x) > n$ den $\forall n$, $\psi_n(x) = n$ eta $\lim_{n \to \infty} \psi_n(x) = +\infty$.

(iii) $f(x) \leq M$ bada $\forall x$, orduan $\varepsilon > 0$ emanez gero, hautatzen dugu $n_o > M$ eta $\frac{1}{2^{n_o}} < \varepsilon$ eta zera dugu:

$$\forall x \qquad f(x) - \psi_n(x) < \varepsilon \quad , \quad n > n_o.$$

1.35. Proposizioa (Lusin-en teorema)

Biz f E multzo neurgarri batetan definitutako funtzio bat. Suposa dezagun $mE < +\infty$ dela eta f funtzioak balio finituak bakarrik hartzen dituela i.n. E-n. Orduan f neurgarria bada zera betetzen da:

$\forall \varepsilon > 0$ $\exists F$ trinkoa $\subset E$ zeinentzat $m(E-F) \leq \varepsilon$ eta f jarraia F-n baitira.

Frogapena

a) Biz f sinplea, $f = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{E_i}$ $E_i = \{x \in E / f(x) = \alpha_i\}$

$\exists K_i \subset E_i$ trinkoa: $mE_i \leq mK_i + \frac{\varepsilon}{n}$. Egin dezagun $K = \bigcup_{i=1}^{n} K_i$; orduan

$$m(E-K) = m\left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i - \bigcup_{i=1}^{n} K_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} m(E_i - K_i) \leq \varepsilon \quad .$$

Biz $x \in K_j$, orduan $\exists V$ x-en ingurune bat non $V \cap K_i = \phi$ $\forall i \neq j$. Hala ez balitz, $x \in \overline{K}_i = K_i$ litzateke eta hau ez da posible $K_i \cap K_j = \phi$ baita $i \neq j$ denean.

x-en ingurune batetan f konstantea denez nabaria da jarraia dela.

b) Edozein f-rentzat. Har dezagun f-rantz konbergitzen duen funtzio sinpleen segida bat $\{f_n\}$ (1.34 proposizioa). Egorov-en teorema aplikatuz:

$\exists K_0 \subset E$ trinkoa non $\{f_n\}$ segidak f-rantz uniformeki konbergitzen duen eta $mE \leq mK_0 + \frac{\varepsilon}{2}$ den.

a) zatia aplikatuz, bira K_n $n \in \mathbb{N}$ trinkoak $mE < mK_n + \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}$ eta f_n jarraia K_n-n.

Har dezagun $K = \bigcap_{n=0}^{\infty} K_n$. Orduan K-n f_n funtzioak jarraiak dira ($K \subset K_n$ baita $\forall n \in \mathbb{N}$) eta gainera f-rantz uniformeki konbergitzen dute ($K \subset K_0$ baita). Honelatan, f ere jarraia da K-n eta

$$m(E-K) = m(E - \bigcap_{n=0}^{\infty} K_n) \leq \sum_{n=0}^{\infty} m(E-K_n) \leq \frac{\varepsilon}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^{n+1}} = \varepsilon$$

Demagun, segidan, teorema honen beste definizio ezagun bat **R**-n:

Biz f $[a,b]$-n definitutako funtzio bat. Orduan f neurgarria bada $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \psi \in C([a,b])$ non $m\{x/f(x) \neq \psi(x)\} < \varepsilon$ baita.

§1.7.- IRAZKINAK

Lebesgue-ren neurria eraikitzeko erabili dugun bidea ez da bakarra. Bibliografian aipatzen direnen artean biren laburpena egingo dugu hemen:

1. Ikus Kolmogorov-Fomine "Elementos de la teoría de funciones y del Análisis Funcional" [6]. Funtsezko diferentzia multzo neurgarrien definizioan datza. Hona nola egiten den: $[0,1]^n$ kontsideratuz, beronen azpimultzo guztien kanpo-neurria definitzen da, goragoko egin dugun bezala. Multzo neurgarrientzako definizioa hauxe da: "$E \subset [0,1]^n$ neurgarria da baldin eta soilik baldin $\forall \varepsilon > 0$ exis

titzen bada B tarte-bildura finitua non $m^*(E \Delta B) < \varepsilon$ baita".

Definizio honen zentzua erreza da: multzo neurgarri bat nahi bezainbeste hurbil daiteke tarte-bilduren bidez.

Gero, $\mathbb{R}^n$, puntu osoek (hots, koordenatu osoak duten puntuek) definitzen dituzten tarteen bildura bezala idazten da eta multzo bat neurgarria da tarte horiekiko ebakidura guztiak neurgarriak badira.

Kolmogorov-Fomine-ren definizioa 1.11 definizioaren baliokidea da m^*E finitua denean.

2. Ikus Fleming "Funciones de varias variables" [1].

Liburu honetan proposatzen den bidea zera da: kanpotik irekien bidez eta barnetik itxien (edo trinkoen) bidez multzoa hurbiltzea. Hona metodoa:

(i) Tarte-bildura finituak irudiak deitzen dira. Irudi baten neurria osatzen duten tarteen neurrien batura da.

(ii) Ireki baten neurria zera da:

$$mV = \sup \{ mV \,/\, Y \text{ irudia} \subset V \}$$

eta trinko batena:

$$mK = \inf \{ mZ \,/\, Z \text{ irudia eta } K \subset \overset{\circ}{Z} \}$$

(iii) A multzo bornatua bada definitzen dira:

A-ren kanpo-neurria

$$m^*A = \inf \{ mV \,/\, V \text{ irekia} \supset A \}$$

A-ren barne-neurria

$$m_*A = \sup \{ mK \,/\, K \text{ trinkoa} \subset A \}$$

(iv) Multzo irekientzat $m^*V = m_*V = mV$ eta trinkoentzat $m^*K = m_*K = mK$. Orduan multzo neurgarriak honela definitzen dira: A multzo bornatua neurgarria da baldin $m^*A = m_*A$ bada. A neurgarria bada, A-ren neurria $mA = m^*A$ dela esan go dugu.

(v) Multzo ez-bornatuentzat, kontsidera dezagun $U_r = \{ x/|x| < r \}$ Orduan A neurgarria da $A \cap U_r$ neurgarria bada $\forall r > 0$ eta $mA = \lim_{r \to \infty} m(A \cap U_r)$.

3. Cantor-en multzoak

1.12 lemaren ondoan esan dugu multzo kontagarrien neurria 0 dela eta ba daudela 0 neurriko multzo ez-kontagarriak. Hona hemen adibide klasiko bat, Cantor-en "erdiko herenen multzoa" delakoa, hain zuzen.

$[0,1]$ tarteari erdiko herena, $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ tartea alegia, kentzen dio gu. Lortutako bi tarteei berdin eginez, $(\frac{1}{9}, \frac{2}{9})$ eta $(\frac{7}{9}, \frac{8}{9})$ tarteak kentzen ditugu eta lau tarte lortzen. Horrela segituz, m-garren pau suan $\frac{1}{3^m}$ luzerako 2^{m-1} tarte kentzen ditugu. Egin dezagun hau $\forall m \in \mathbb{N}$ eta biz P azkenean geratzen zaigun multzoa. P^c tarte-familia kontagarri bat da eta tarteok binaka disjuntuak dira. Orduan

$$m(P^c) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2^{m-1}}{3^m} = \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^m = 1$$

($P^c = [0,1] - P$ da).

Nola $[0,1]$ tarteaten neurria ere 1 den, $m(P) = 0$ da. Ikus de zagun P ez dela kontagarria. Horretarako $[0,1]$ tarteko elementuak

3 oinarrian idatz daitezke

$$(*) \qquad x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{3^n}$$

non $x_n \in \{0,1,2\}$ baita. Eraikibidetik ikus daiteke P-ko elementuak (*) garapenean $x_n \in \{0,2\}$ eginez lortzen direnak direla. Orduan P eta $\{0,2\}^{\mathbb{N}}$-ren arteko bijekzio bat dago eta card P = card $(\{0,2\}^{\mathbb{N}}) = 2^{\aleph_0} = c$ ($\aleph_0$ = card $\mathbb{N}$, c = card $\mathbb{R}$ = = "jarraiaren potentzia"). Beraz, P ez da kontagarria.

Era berean $\alpha < 1$ hartuz, $\frac{1}{3^m}$ luzerako tarteak barik, $\frac{\alpha}{3^m}$ luzerakoak kenduz, P_α multzoa lortzen dugu, zeinentzat $mP_\alpha = 1-\alpha$ baita.

P_α itxia, trinkoa, ez-dentsoa (hots, $\overset{\circ}{P} = \phi$) eta perfektua (hots, puntu guztiak metatze-puntuak dira) da, $\forall\, \alpha \in (0,1]$.

4. Littlewood-en pintzipioak

Izen honekin ezagutzen dira ondoko adierazpenok:

- Edozein multzo neurgarri ia irekia da.
- Edozein funtzio neurgarri ia jarraia da.
- Funtzio neurgarrien edozein segida konbergente ia uniformeki konbergentea da.

Lehena 1.25 proposizioan ikus daiteke; bigarrena Lusin-en teoremak (1.35 proposizioa) ematen du eta hirugarrena Egorov-en teorema da (1.32 proposizioa).

Aldagai errealeko funtzioen erresultaturik gehienak ideia hauen aplikazio intuitiboak dira.

5. Zein da zuzen baten neurria planoan? Planoan neurria azalera denez, intuitiboki zuzen baten neurriak 0 izan beharko du. Oro bat esan dezakegu plano baten neurriaz hiru dimentsiotako espazioan eta abar.

1.36. Proposizioa

Biz $E = \{x \in \mathbb{R}^n / x_n = 0\}$. Orduan m $\mathbb{R}^n$-n definitutako Lebesgue-ren neurria izanik, $mE = 0$ dugu.

Frogapena

$E = \mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}$ dugu.

Biz $I \subset \mathbb{R}^{n-1}$ tarte ireki bat; orduan $I' = I \times \{0\}$ idatziz, $I' \subset I \times (-\varepsilon, +\varepsilon)$ dugu eta $m^*I \leq 2\varepsilon$ bol (I) $\forall \varepsilon$. Beraz, $m^*I' = 0$ da; 1.12 lema aplikatuz I' neurgarria da eta $mI' = 0$.

$\mathbb{R}^{n-1}$ tarte-bildura kontagarri bezala idatz daitekeenez, E 0 neurriko multzoen bildura kontagarri bezala idazten da eta $mE = 0$ dugu.

Proposizio hau edozein hiperplanotarako froga daiteke eta ondorioz, hiperplanoen azpimultzoetarako ere betetzen da.

2. GAIA

LEBESGUE-REN INTEGRALA $\mathbb{R}^n$-N

2.1 Riemann-en integrala $\mathbb{R}$-n

2.2 Funtzio sinpleen integrala

2.3 Goi- eta behe-integralak

2.4 Funtzio ez-negatibo baten integrala

2.5 Lebesgue-ren integrala

2.6 Konbergentzi teoremak

2.7 Riemann eta Lebesgue-ren integralen arteko erlazioa

2. LEBESGUE-REN INTEGRALA $\mathbb{R}^n$-N

"Integral honen pean datzan printzipioa ulertzeko kontsidera dezagun ondoko adibide hau. Suposa dezagun balio desberdinetako txanpon-pilo bat daukagula eta guztitara zenbat diru den jakin nahi dugula. Bi eratara egin daiteke. Txanponak ilada batean ezar genitzake eta bakoitzaren balioa aurrekoen baturari gehi. Hala ere, beste modu batez egin dezakegu: txanponak pilatxotan ezartzen ditugu, pilatxo bakoitzekoek balio berdina dutelarik; orduan, pilatxo bakoitzeko txanponen kopurua kontatzen dugu, zenbaki hau dagokion txanponaren balioaz biderkatu eta, azkenik, lortutako zenbakiak batu. Dirua kontatzeko lehenbiziko metodoa Riemann-en integrazio-prozesuari dagokio, eta bigarrena, Lebesgue-renari" (Stečkin, "Mathematics : Its Contents, Methods and Meaning", XV. kapitulua, §6).

§2.1.- RIEMANN-EN INTEGRALA R-N

Aurkezpen txiki bat baizik ez dugu egingo, eraikibidea gutxi gora-behera nolakoa den ikusteko.

Biz $f: [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ funtzio bornatu bat eta $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{k-1} < x_k = b$ $[a,b]$ -ren azpizatiketa bat. Orduan ondoko baturok defini ditzakegu

$$S = \sum_{i=1}^{k} (x_i - x_{i-1})\, M_i \qquad s = \sum_{i=1}^{k} (x_i - x_{i-1})\, m_i$$

non $M_i = \sup \{f(x) / x_{i-1} < x \leq x_i\}$

$m_i = \inf \{f(x) / x_{i-1} < x \leq x_i\}$ baitira.

Orduan Riemann-en goi-integrala honela definitzen dugu

$$R\overline{\int_a^b} f(x)\,dx = \inf S$$

infimoa $[a,b]$ -ren azpizatiketa guztien artean harturik. Halaber behe-integrala definitzen dugu:

$$R\underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \sup s$$

Beti $R\underline{\int_a^b} f(x)\,dx \leq R\overline{\int_a^b} f(x)\,dx$ da eta desberdintza hori berdintza bat baldin bada, f Riemann-integragarria dela esaten dugu eta balio komun hori da f-ren Riemann-en integrala. $R\int_a^b f(x)dx$ idatziko dugu.

Biz $\{x_i\}$ $i = 0,1,\ldots,n$ $[a,b]$ -ren azpizatiketa bat eta ψ honela definitutako funtzio bat:

$$\psi(x) = c_i \qquad \xi_{i-1} < x \leq \xi_i \qquad (c_i \text{ konstantea})$$

Orduan f funtzio mailakatu bat da (ikus 1.33 definizioa eta ondoko a). Definitzen badugu

$$\int_a^b \psi(x)\,dx = \sum_{i=1}^{n} c_i\,(\xi_i - \xi_{i-1})$$

Riemann-en integrala zera da:

$$R\overline{\int_a^b} f(x)\,dx = \inf \int_a^b \psi(x)\,dx$$

infimoa $\psi(x) \geq f(x)$ diren funtzio mailakatu guztien artean hatu rik. Halaber

$$R\int_a^b f(x)\,dx = \sup \int_a^b \psi(x)\,dx$$

orain $\psi(x) \leq f(x)$ diren funtzio mailakatuak kontutan harturik.

Ikusiko dugunez ideia hauen antzeko batzuetatik sortuko da Lebesgue-ren integrala.

§2.2.- FUNTZIO SINPLEEN INTEGRALA

Funtzio sinpleak 1.33 definizioan sartu ditugu baita berauen adierazpena ere.

Biz ψ funtzio sinple bat eta har dezagun ψ-ren adierazpen kanonikoa, $m\{x / \psi(x) \neq 0\}$ finitua bada, honelaxe definituko dugu ψ-ren integrala

$$\int \psi(x)\,dx = \sum_{i=1}^{k} a_i\, m\, A_i$$

non $A_i = \{x / \psi(x) = a_i\}$ baita.

(Askotan $\int \psi(x)\,dx$ idatzi beharrean, $\int \psi$ ipiniko dugu).

E multzo neurgarri bat bada, zera definitzen dugu

$$\int_E \psi = \int \psi\, \chi_E \ .$$

Suposa dezagun ψ-ren adierazpen ez-kanoniko bat hartzen dugula. Orduan

2.2. Lema

Biz $\psi = \sum_{i=1}^{s} e_i \chi_{E_i}$ $E_i \cap E_j = \phi$ $i \neq j$ eta E_i neurgarria. Orduan

$$\int \psi = \sum_{i=1}^{s} e_i \, m \, E_i$$

Frogapena

Aski da $A_a = \{x / \psi(x) = a\} = \bigcup_{e_i=a} E_i$ dela kontutan hartzea. Zeren orduan $a \cdot m \, A_a = \sum_{e_i=a} e_i \, m \, E_i$ baita eta

$$\int \psi = \Sigma \, a \, m \, A_a = \Sigma \, e_i \, m \, E_i$$

2.3. Proposizioa

Bira φ eta ψ funtzio sinpleak, neurri finitudun multzo baten osagarrian nuluak direnak. Orduan

$$\int (\alpha\varphi + \beta\psi) = \alpha \int \varphi + \beta \int \psi$$

Gainera $\varphi(x) \geq \psi(x)$ i.n. baldin bada, orduan $\int \varphi \geq \int \psi$

Frogapena

Bira $\varphi = \sum_{i=1}^{p} a_i \chi_{A_i}$ eta $\psi = \sum_{j=1}^{q} b_j \chi_{B_j}$, φ eta ψ -ren adierazpen kanonikoak. Ipin dezagun

$$A_o = \{x / \varphi(x) = 0\} \quad \text{eta} \quad B_o = \{x / \psi(x) = 0\}$$

Kontsidera dezagun $\{E_m\}$, $A_i \cap B_j$ eratako ebakidura guztien familia. Orduan zera idatz dezakegu

$$\varphi = \sum_{m=1}^{N} a_m \chi_{E_m} \qquad \text{eta} \qquad \psi = \sum_{m=1}^{N} b_m \chi_{E_m}$$

eta honela $\alpha\varphi + \beta\psi = \sum_{m=1}^{N} (\alpha a_m + \beta b_m) \chi_{E_m}$ eta 2.2 lema aplikatuz

$$\int (\alpha\varphi + \beta\psi) = \alpha \int \varphi + \beta \int \psi$$

Bigarren zatirako zera dugu: $\int \varphi - \int \psi = \int (\varphi - \psi)$. Baina $\varphi - \psi$ funtzio sinple bat da eta balio positiboak hartzen ditu i.n. Orduan integralaren definiziotik

$$\int (\varphi - \psi) \geq 0 \ , \ \text{h.d.}, \quad \int \varphi \geq \int \psi \qquad \text{f.n.g.}$$

Proposizio honetatik 2.2 lema baino hobea den ondorio hau ateratzen da:

$\psi = \sum_{i=1}^{k} a_i \chi_{E_i}$ baldin bada, nahiz eta E_i multzoak disjuntuak ez izan $\int \psi = \sum_{i=1}^{k} a_i \, m\, E_i$.

§2.3.- GOI- ETA BEHE-INTEGRALAK

Biz $f: E \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ bornatua eta suposa dezagun $mE < +\infty$.

2.4. Definizioa

a) f-ren goi-integrala (E-n) hauxe da

$$\overline{\int_E} f(x)\,dx = \inf \{ \int_E \psi \ ; \quad \psi \geq f \ \text{ eta } \psi \text{ funtzio sinplea } \}$$

b) f-ren behe-integrala (E-n) hauxe

$$\underline{\int}_E f(x)\,dx = \sup\{ \int_E \psi \quad ; \quad \psi \leq f \text{ eta } \psi \text{ funtzio sinplea } \}$$

Integral horiek definitzeko frogatu behar dugu ba direla ψ eta Ψ funtzio sinpleak zeinentzat $\psi \geq f \geq \Psi$ baita. Baina, f bornatua denez gero, $\exists M$ zeinentzat $|f| \leq M$ baita eta orduan $\psi = M$ eta $\Psi = -M$ funtzio konstanteek betetzen dute baldintza.

Argi dago $\underline{\int}_E f(x)\,dx \leq \overline{\int}_E f(x)\,dx$ dela eta ψ funtzio sinplea bada

$$\int_E \psi(x)\,dx = \underline{\int}_E \psi(x)\,dx = \overline{\int}_E \psi(x)\,dx$$

Zein funtziorentzat gertatuko da azken berdintza hau? Ondoko proposizio honek erantzuten du:

2.5. Proposizioa

Bira $f: E \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ bornatua eta $mE < +\infty$. Orduan $\underline{\int}_E f(x)\,dx = \overline{\int}_E f(x)\,dx$ baldin eta soilik baldin f neurgarria bada.

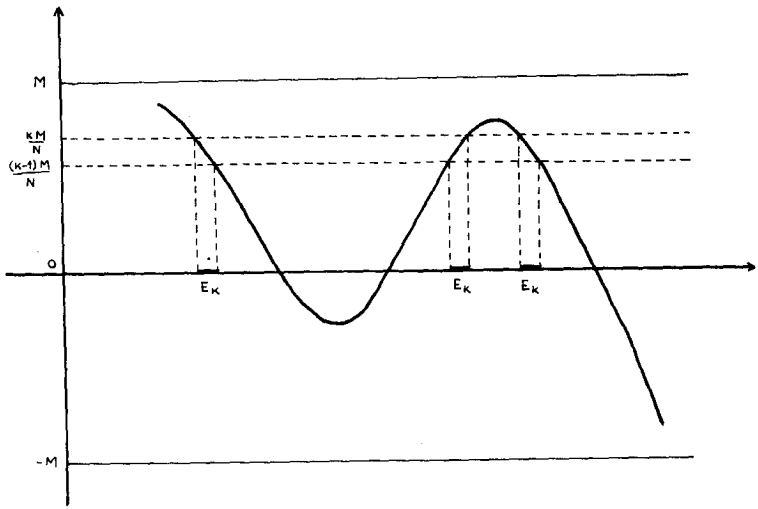
Frogapena

Nahikoa. Biz $|f| \leq M$ eta f neurgarria. Orduan

$$E_k = \{x \in E \,/\, \frac{(k-1)M}{N} < f(x) \leq \frac{kM}{N} \} \qquad -N \leq k \leq N$$

neurgarriak eta disjuntuak dira eta berauen bildura E da. Hortaz

$$\sum_{k=-N}^{N} m E_k = mE .$$



Defini ditzagun ondoko funtzio sinpleak

$$\psi_N(x) = \frac{M}{N} \sum_{k=-N}^{N} k\, \chi_{E_k}(x)$$

$$\varphi_N(x) = \frac{M}{N} \sum_{k=-N}^{N} (k-1)\, \chi_{E_k}(x)$$

Orduan $\varphi_N(x) \leq f(x) \leq \psi_N(x)$ eta

$$\overline{\int_E} f(x)\,dx \leq \int_E \psi_N(x)\,dx = \frac{M}{N} \sum_{k=-N}^{N} k\, m\, E_k$$

$$\underline{\int_E} f(x)\,dx \geq \int_E \varphi_N(x)\,dx = \frac{M}{N} \sum_{k=-N}^{N} (k-1)\, m\, E_k$$

Honelatan

$$0 \leq \overline{\int_E} f(x)\,dx - \underline{\int_E} f(x)\,dx \leq \frac{M}{N} \sum_{k=-N}^{N} m\, E_k = \frac{M}{N}\, m\, E \qquad \forall\, N$$

Beraz

$$\overline{\int_E} f(x)\,dx = \underline{\int_E} f(x)\,dx.$$

Beharrezkoa. Biz

$$\overline{\int_E} f(x)\,dx = \underline{\int_E} f(x)\,dx$$

$\forall N$ existitzen dira φ_N eta ψ_N funtzio sinpleak $\varphi_N(x) \leq f(x) \leq \psi_N(x)$ eta

$$\int_E \psi_N\,dx - \int_E \varphi_N\,dx < \frac{1}{N}$$

Orduan $\psi^* = \inf \psi_N$ eta $\varphi^* = \sup \varphi_N$ neurgarriak dira (1.29 proposizioa) eta $\varphi^*(x) \leq f(x) \leq \psi^*(x)$.

Kontsidera dezagun $A = \{ x \in E / \varphi^*(x) < \psi^*(x) \}$. Zera dugu: $A = \bigcup_s A_s$ non $A_s = \{ x \in E / \varphi^*(x) < \psi^*(x) - \frac{1}{s} \}$ baita. Gainera, $A_s \subset \{ x \in E / \varphi_N(x) < \psi_N(x) - \frac{1}{s} \}$ eta

$$\frac{1}{s}\, m A_s \leq \int_E (\psi_N - \varphi_N)(x)\,dx < \frac{1}{N} \qquad \forall N$$

Hemendik $m A_s = 0$ eta $m A = 0$ ateratzen dira. Orduan $\varphi^* = \psi^*$ i.n. eta $f = \psi^*$ i.n., beraz f neurgarria da f.n.g.

2.6. Definizioa

Biz $f: E \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ bornatua eta neurgarria eta $mE < +\infty$, f-ren (Lebesgue-ren) integrala (E-n) honela definitzen dugu

$$\int_E f(x)\,dx = \inf \{ \int_E \psi(x)\,dx,\ \psi \text{ funtzio sinplea eta } \psi \geq f \}$$

Notazioa

- Askotan $\int f$ idatziko dugu, $\int_E f(x)\,dx$ -en ordez.

- $E = [a,b]$ baldin bada, $\int_a^b f$ ere idatziko dugu.

Hurrengo proposizioan Riemann-en eta Lebesgue-ren integralen arteko erlazio bat ematen da. Zehaztasun gehiagorako ikus §2.7.

2.7. Proposizioa

Biz $f: [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ bornatua. f Riemann-integragarria ba da, neurgarria da eta $R\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$.

Frogapena

Nahiko da kontutan hartzea Lebesgue-ren kasuan supremoa eta infimoa funtzio gehiagotarako hartzen direla, beraz:

$$R\int_a^b f(x)\,dx \leq \sup_{\psi \leq f} \int_a^b \psi(x)\,dx \leq \inf_{\psi \geq f} \int_a^b \psi(x)dx \leq R\int_a^b f(x)\,dx$$

f Riemann-integragarria denez gero desberdintza guztiak berdintzak dira eta aurreko proposizioa aplika dezakegu.

2.8. Proposizioa

Bira $f,g: E \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ neurgarriak eta bornatuak eta $mE < +\infty$. Orduan

(i) $\int_E \alpha f + \beta g = \alpha \int_E f + \beta \int_E g$

(ii) $f = g$ i.n. $\Longrightarrow \int_E f = \int_E g$

(iii) $f \leq g$ i.n. $\Longrightarrow$ $\int_E f \leq \int_E g$

Hemendik $\left| \int_E f \right| \leq \int_E |f|$ ateratzen da.

(iv) $A \leq f(x) \leq B$ i.n. $\Longrightarrow$ $A\,mE \leq \int_E f \leq B\,mE$

(v) Bira A eta B multzo disjuntu, neurgarri eta neurri finitudunak. Orduan

$$\int_{A\cup B} f = \int_A f + \int_B f$$

Frogapena

(i) ψ funtzio sinple bat bada, $\alpha\psi$ ere eta alderantziz $\alpha \neq 0$ bada. Orduan, $\alpha > 0$ denean

$$\int_E \alpha f = \inf_{\psi \geq f} \int_E \alpha\psi = \alpha \inf_{\psi \geq f} \int_E \psi = \alpha \int_E f$$

eta $\alpha < 0$ denean

$$\int_E \alpha f = \inf_{\psi \leq f} \int_E \alpha\psi = \alpha \sup_{\psi \leq f} \int_E \psi = \alpha \inf_{\psi \geq f} \int_E \psi = \alpha \int_E f$$

(lehendabizi zera aplikatu dugu: ψ funtzio sinplea $\geq \alpha f$ eta $\alpha < 0 \Longrightarrow \frac{\psi}{\alpha}$ funtzio sinplea $\leq f$; gero inf eta sup-en propietateak eta azkenik 2.5 proposizioa).

ψ_1 eta ψ_2 funtzio sinpleak baldin badira eta $\psi_1 \geq f$ eta $\psi_2 \geq g$, orduan $\psi_1+\psi_2$ funtzio sinplea da eta $\psi_1+\psi_2 \geq f+g$. Hemendik

$$\int_E f+g \leq \int_E \psi_1+\psi_2 = \int_E \psi_1 + \int_E \psi_2$$

Eskuin aldean infimoa hartuz

$$\int_E f+g \leq \int_E f + \int_E g$$

Bestalde, bira ψ_1 eta ψ_2 funtzio sinpleak, $\psi_1 \leq f$, $\psi_2 \leq g$, orduan $\psi_1+\psi_2$ sinplea da eta $\psi_1+\psi_2 \leq f+g$. Beraz,

$$\int_E f+g \geq \int_E \psi_1+\psi_2 = \int_E \psi_1 + \int_E \psi_2$$

eta supremoa hartuz

$$\int_E f+g \leq \int_E f + \int_E g$$

(ii) Aski dugu $h = 0$ i.n. denean $\int_E h = 0$ dela ikustea, zeren orduan $f = g$ i.n. izanez gero, $\int_E f-g = 0$ izango baita. Biz ψ funtzio sinple bat, $\psi \geq h$; orduan $\psi \geq 0$ i.n. eta $\int_E \psi \geq 0$. Honelatan $\int_E h \geq 0$ da.

Berdin frogatzen da $\int_E h \leq 0$ dela, beraz $\int_E h = 0$.

(iii) Aurrekoa bezala frogatzen da. Nola $g-f \geq 0$ i.n. den, $\int_E (g-f) \geq 0$ izango da.

$f \leq |f|$ eta $-f \leq |f|$ denez gero, $\left|\int_E f\right| \leq \int_E |f|$ lortzen da.

(iv) (iii) aplikatuz zera dugu: $\int_E A \leq \int_E f \leq \int_E B$.
Baina A eta B konstanteak dira eta $\int_E 1 = mE$, beraz

$$AmE \leq \int_E f \leq BmE$$

(v)

$$\int_{A \cup B} f = \int f \chi_{A \cup B} = \int f(\chi_A + \chi_B) = \int f \chi_A + \int f \chi_B = \int_A f + \int_B f$$

§2.4.- FUNTZIO EZ-NEGATIBO BATEN INTEGRALA

Biz f neurgarria, ez-negatiboa, E multzo neurgarrian definitua. Orduan f-ren integrala (E-n) honela definitzen dugu

$$\int_E f = \sup_{h \leq f} \int_E h$$

h bornatua, neurgarria eta $m\{x / h(x) \neq 0\}$ finitua izanik.

2.9. Proposizioa

Bira f eta g neurgarriak eta ez-negatiboak. Orduan

(i) $\int_E cf = c \int_E f \qquad c > 0$

(ii) $\int_E f+g = \int_E f + \int_E g$

(iii) $f \leq g$ i.n. $\Longrightarrow \int_E f \leq \int_E g$

Frogapena

(i) eta (iii) 2.8 proposiziotik ateratzen dira.

(ii) $h_1(x) \leq f(x)$ eta $h_2(x) \leq g(x)$ baldin badira, $h_1(x) + h_2(x) \leq f(x) + g(x)$ da.

Honela $\int_E h_1 + \int_E h_2 \leq \int_E f+g$ eta supremoa hartuz

$$\int_E f + \int_E g \leq \int_E f+g$$

Biz orain $k(x)$ neurgarria, bornatua, $m\{x / k(x) \neq 0\}$ finitua eta $k \leq f+g$. Defini ditzagun

$$h_1(x) = \min\{f(x), k(x)\} \qquad h_2(x) = k(x) - h_1(x)$$

Orduan $h_1(x) \leq f(x)$ eta

$$h_2(x) = k(x) - \min\{f(x),k(x)\} = \max\{k(x)-f(x),0\} \leq g(x)$$

(kontutan har g ez-negatiboa dela).

h_1 eta h_2 bornatuak dira (k baino txikiagoak baitira) eta anulatzen dira k anulatzen denean; gainera,

$$\int_E k = \int_E h_1 + \int_E h_2 \leq \int_E f + \int_E g$$

Hortaz $$\int_E f+g \leq \int_E f + \int_E g \qquad \text{f.n.g.}$$

Gorago ikusi dugu (2.4 proposizioa (ii)) $f = 0$ i.n. denean, $\int_E f = 0$ dela. Orain funtzio ez-negatiboentzat alderantzizkoa ere ba dugu:

2.10. Proposizioa

$f \geq 0$ eta $\int_E f = 0$ badira, orduan $f = 0$ i.n.

Frogapena

Biz $E = \{x / f(x) > 0\}$ eta $E_n = \{x / f(x) > \frac{1}{n}\}$. Orduan $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$. Baina $mE_n = 0$ da zeren bestela

$\int_E f \geq \int_{E_n} f \geq \frac{1}{n} m E_n > 0$ bailitzateke eta hau ez da posible. Hala beharrez $mE = 0$.

2.11. Definizioa

f funtzio neurgarri ez-negatiboa E multzo neurgarrian integragarria deitzen da $\int_E f < +\infty$ bada.

2.12. Proposizioa

Bira f eta g neurgarriak eta ez-negatiboak. f E-n integragarria bada eta $g(x) \leq f(x)$ E-n, orduan g ere integragarria da eta

$$\int_E (f-g) = \int_E f - \int_E g$$

Frogapena

2.9 proposizioa aplikatuz $\int_E f = \int_E (f-g) + \int_E g$ dugu. Baina ezkerreko atala finitua da hipotesiz, beraz beste integral biak ere finituak dira, f.n.g.

2.13. Proposizioa

Biz f funtzio integragarri ez-negatibo bat. Orduan $f < +\infty$ i.n., hots, $m\{x / f(x) = +\infty\} = 0$.

Frogapena

Biz $A_\infty = \{x / f(x) = +\infty\}$ eta suposa dezagun $mA_\infty = c > 0$ dela. Orduan

$$h_n(x) = \begin{cases} n & x \in A_\infty \\ 0 & x \notin A_\infty \end{cases}$$

definituz, $h_n \leq f$ eta $\int_E h_n = nc$ dugu. Beraz,
$\int_E f \geq \int_E h_n \geq nc \quad \forall n$, alegia, $\int_E f = +\infty$ hipotesiaren aurka.

§2.5.- LEBESGUE-REN INTEGRALA

f funtzioarentzat definitzen ditugu parte positiboa, f^+, eta parte negatiboa, f^-, ondoko eran

$$f^+(x) = \max \{f(x),0\} \qquad f^-(x) = \max \{-f(x),0\}$$

Orduan $f = f^+ - f^-$ eta $|f| = f^+ + f^-$. f neurgarria bada, f^+ eta f^- ere neurgarriak dira.

2.14. Definizioa

f funtzio neurgarria E-n integragarria dela esango dugu f^+ eta f^- integragarriak badira. Orduan definitzen dugu

$$\int_E f = \int_E f^+ - \int_E f^-$$

2.15. Lema

Bira f_1 eta f_2 funtzio integragarri ez-negatiboak eta $f = f_1 - f_2$. Orduan

$$\int_E f = \int_E f_1 - \int_E f_2$$

Frogapena

$$f = f^+ - f^- = f_1 - f_2 \implies f^+ + f_2 = f^- + f_1 \implies$$

$$\implies \int_E f^+ + \int_E f_2 = \int_E f^- + \int_E f_1 \implies \int_E f^+ - \int_E f^- = \int_E f_1 - \int_E f_2$$

2.16. Proposizioa

Bira f eta g E-n integragarriak. Orduan

(i) cf $(c \in \mathbb{R})$ E-n integragarria da eta $\int_E cf = c \int_E f$

(ii) $f+g$ E-n integragarria da eta $\int_E f+g = \int_E f + \int_E g$

(iii) $f \leq g$ i.n. $\Longrightarrow$ $\int_E f \leq \int_E g$

(iv) A eta B E-ren azpimultzo neurgarri disjuntuak badira

$$\int_{A \cup B} f = \int_A f + \int_B f$$

Frogapena

(i) 2.9 proposizioa eta definizioa aplikatuz lortzen da.

(ii) f eta g integragarriak badira, $f^+ + g^+$ eta $f^- + g^-$ ere integragarriak dira eta

$$f+g = (f^+ + g^+) - (f^- + g^-)$$

2.15 lema aplikatuz

$$\int_E (f+g) = \int_E (f^+ + g^+) - \int_E (f^- + g^-) = \int_E f^+ + \int_E g^+ - \int_E f^- - \int_E g^- =$$

$$= \int_E f + \int_E g$$

(iii) $f \leq g$ i.n. $\Longrightarrow$ $g = f + (g-f)$ eta $g-f \geq 0$ i.n.
$g-f$ integragarria eta ez-negatiboa denez gero $\int_E (g-f) \geq 0$.
Orduan (ii) aplikatuz (iii) lortzen da.

(iv) $\int_{A \cup B} f = \int f \chi_{A \cup B} = \int f \chi_A + \int f \chi_B = \int_A f + \int_B f$

Oharrak

1. $f+g$ ez dago definiturik $f = +\infty$ eta $g = -\infty$ edo $f = -\infty$ eta $g = +\infty$ den puntuetan. Baina f eta g integragarriak izanik, 2.13 proposizioa f^+, f^-, g^+ eta g^- funtzioei aplikatuz, hori gertatzen den puntuen multzoak 0 neurria du. Orduan $f+g$ integra daiteke eta $\int(f+g)$ puntu horietako balioen independentea da.

2. f integragarria bada, $|f|$ ere integragarria da $|f| = f^+ + f^-$ baita, eta orduan $\left|\int_E f\right| \leq \int_E |f|$.

Baina $|f|$ integragarria izan daiteke f izan gabe. Hala dateke f neurtezina izan daitekeelako (ikus 1.29 proposizioaren ondorioak). f neurgarria denean, $|f|$ integragarria $\Longleftrightarrow$ f integragarria.

§2.6.- KONBERGENTZI TEOREMAK

Paragrafo honetako teoremak ondoko problemari lotuak daude: Biz $\{f_n\}$ segida bat eta suposa dezagun $f_n \longrightarrow f$ dela puntualki. Zein baldintzatan esan dezakegu $\int_E f_n \longrightarrow \int_E f$ dela?

Ondoko adibideak erakusten digu hori gertatzen ez den kasu bat:

$$f_n = \begin{cases} n & 0 < x < 1/n \\ 0 & \text{bestela} \end{cases}$$

Orduan $f_n(x) \longrightarrow 0 \quad \forall\, x \in (0,1)$ baina $\int_0^1 f_n(x)\, dx = 1 \not\longrightarrow 0$

Riemann-en integralarentzat konbergentzia uniformea eskatzen da limitera pasatzeko. Lebesgue-ren integralarentzat, ikusiko dugunez, baldintzak zabalagoak eta sinpleagoak izango dira.

2.6 definizioan aipatutako integralarentzat zera dugu:

2.17. Teorema (Konbergentzia bornatuarena)

Biz $\{f_n\}$ E-n definitutako funtzio neurgarrien segida bat, $mE < +\infty$ eta suposa dezagun existitzen dela $M > 0$ non $|f_n(x)| \leq M \quad \forall n$ eta $\forall x$ baita. Orduan $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ $\forall x \in E$ bada,

$$\int_E f = \lim_{n\to\infty} \int_E f_n \qquad \text{eta} \qquad \lim_{n\to\infty} \int_E |f_n - f| = 0$$

Frogapena

Egorov-en teorema (1.32 proposizioa) aplikatuz zera dugu: $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N$ eta $A \subset E$, A neurgarria eta $mA < \frac{\varepsilon}{4M}$ non $n \geq N$ eta $x \in E-A$ denean, $|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2mE}$ baita. Orduan

$$\left|\int_E f_n - \int_E f\right| = \left|\int_E (f_n - f)\right| \leq \int_E |f_n - f| =$$

$$= \int_{E-A} |f_n - f| + \int_A |f_n - f| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Hemendik $\int_E f_n \longrightarrow \int_E f$ f.n.g.

Adibidea

Biz $f_n(x) = \dfrac{nx}{1 + n^2 x^2} \qquad 0 \leq x \leq 1$

$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0 \quad \forall x$ baina konbergentzia ez da uniformea, zeren $f_n(\frac{1}{n}) = 2$ baita. Orduan, Riemann-en integrala erabiliz ezin dugu justifikatu limitera pasatzea.

Baina $|f_n(x)| \leq 2$ dugu $\forall n$ eta konbergentzia bornatuaren teorema aplikatuz

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx = \int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx = 0$$

Funtzio ez-negatiboentzat ondoko teoremak ditugu:

2.18. Proposizioa (Fatou-ren lema)

Biz. $\{f_n\}$ E-n definitutako funtzio neurgarri eta ez-negatiboen segida bat eta $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ i.n.. Orduan

$$\int_E f \leq \liminf \int_E f_n$$

Frogapena

Konbergentzia puntu guztietan dela suposa dezakegu (0 neurriko multzoetara hedaturiko integralak 0 baitira).

Biz h bornatua, neurgarria, $h \leq f$ eta nulua E'-ren osagarrian, $mE' < +\infty$ izanik. Defini dezagun $h_n(x) = \min\{h(x), f_n(x)\}$. Orduan h_n funtzioak bornatuak dira (h ere hala baita) eta 0 E'-ren osagarrian. Gainera, $\lim_{n\to\infty} h_n(x) = h(x) \quad \forall x \in E'$. Aurreko teorema aplikatuz

$$\int_E h = \int_{E'} h = \lim \int_{E'} h_n \leq \liminf \int_E f_n$$

Eta h funtzioen artean supremoa hartuz

$$\int_E f \leq \liminf \int_E f_n \qquad \text{f.n.g.}$$

Oharra

Fatou-ren leman desberdintza herstua egon daiteke; adibidez:

$f_n(x) = nx^{n-1} \qquad x \in (0,1)$

$$\int_0^1 f_n(x)\,dx = \int_0^1 n\,x^{n-1}\,dx = 1 \qquad (n = 1,2,\ldots)$$

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0 \qquad \forall x \in (0,1)$$

Beraz

$$0 = \int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx < \lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx = 1$$

2.19. Teorema (Konbergentzia monotonoarena)

Biz $\{f_n\}$ E-n definitutako funtzio neurgarrien segida bat eta suposa dezagun:

a) $0 \leq f_1(x) \leq f_2(x) \leq \ldots \leq +\infty \qquad \forall x \in E$

b) $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) \qquad \forall x \in E$

Orduan

$$\int_E f = \lim_{n\to\infty} \int_E f_n$$

Frogapena

Fatou-ren lema aplikatuz $\int_E f \leq \liminf \int_E f_n$

Baina $\forall n \quad f_n \leq f \implies \int_E f_n \leq \int_E f$ eta

$$\limsup \int_E f_n \leq \int_E f$$

Orduan $\int_E f = \lim \int_E f_n$.

2.20. Korolarioa

Biz $\{u_n\}$ funtzio neurgarri ez-negatiboen segida bat eta $f = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$. Orduan $\int f = \sum_{n=1}^{\infty} \int u_n$.

2.21. Proposizioa

Bira f ez-negatiboa eta $\{E_i\}$ multzo neurgarri disjuntuen segida bat. Idatz dezagun $E = \bigcup_i E_i$, orduan

$$\int_E f = \sum_{i=1}^{\infty} \int_{E_i} f$$

Frogapena

$u_i = f \chi_{E_i}$ idatziz gero, $f \chi_E = \sum_{i=1}^{\infty} u_i$ dugu eta aurreko korolarioa aplikatuz lortzen da proposizioa.

2.22. Proposizioa

Biz f funtzio ez-negatibo bat, E-n integragarria. Orduan $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0$ non $A \subset E$ eta $mA < \delta$ baldin badira, $\int_A f < \varepsilon$ baita.

Frogapena

f bornatua bada, proposizioa nabaria da.

Suposa dezagun f edozein dela; defini dezagun

$$f_n(x) = \begin{cases} f(x) & f(x) \leq n \text{ bada} \\ n & \text{bestela} \end{cases}$$

Orduan f_n bakoitza bornatua da eta f-rantz konbergitzen du puntu alki. Konbergentzia monotonoaren teorema aplikatuz $\exists N$ zeinentzat

$$\int_E f_N > \int_E f - \frac{\varepsilon}{2}, \text{ h.d.}, \int_E (f-f_N) < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{baita.}$$

$\delta < \frac{\varepsilon}{2N}$ hartuz, $mA < \delta$ denean

$$\int_A f = \int_A (f-f_N) + \int_A f_N < \int_E (f-f_N) + NmA < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

f.n.g.

Azkenik teoremarik garrantzitsuena emango dugu. Ikusiko dugu nez, baldintza sinple batekin posible izango zaigu limitera pasatzea.

2.23. Teorema (Konbergentzia gaindituarena)

Biz $\{f_n\}$ funtzio neurgarrien segida bat. Biz g E-n integragarria eta suposa dezagun $|f_n| \leq g$ i.n. $x \in E$. Orduan $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ integragarria da,

$$\lim_{n\to\infty} \int_E |f_n - f| = 0 \quad \text{eta} \quad \int_E f = \lim_{n\to\infty} \int_E f_n.$$

Frogapena

f neurgarria da eta $|f| \leq g$ denez gero, f integragarria da. $|f_n - f| \leq 2g$ dugu eta orduan Fatou-ren lema (2.18 proposizioa) aplikatuz

$$\int_E 2g = \int_E \lim (2g-|f_n-f|) \leq \lim\inf \int_E (2g-|f_n-f|) =$$

$$= \int_E 2g + \lim\inf (-\int_E |f_n-f|) = \int_E 2g - \lim\sup \int_E |f_n-f|$$

Nola $\int_E 2g$ finitua den, $\lim\sup \int_E |f_n-f| \leq 0$. Baina $\int_E |f_n-f| \geq 0$ izanik, lim sup hori ez da negatiboa, beraz, $\lim_{n\to\infty} \int_E |f_n-f| = 0$.

Hemendik, $\lim_{n\to\infty} \int_E (f_n-f) = 0$ eta $\lim_{n\to\infty} \int_E f_n = f$.

Adibidea

Biz $f_n(x) = \dfrac{n^{3/2}\, x}{1 + n^2 x^2}$ $\qquad 0 \leq x \leq 1$

Puntualki $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$ da, baina ez dugu konbergentzia uniformerik, $f_n(\frac{1}{n}) = \dfrac{n^{1/2}}{2}$ baita.

Baina $\dfrac{n^{3/2}\, x}{1 + n^2x^2} \leq \dfrac{2\sqrt{2}}{3\, x^{1/2}}$ $\quad \forall n$ da eta funtzio hau integragarria izanik konbergentzia gaindituaren teorema aplika dezakegu eta

$$\lim \int_0^1 f_n(x)\, dx = \int_0^1 \lim f_n(x)\, dx = 0$$

Funtzio hauek Riemann-integragarriak dira baina integral horren teorian ez dago justifikatuta limitera pasatzea ez baitugu konbergentzia uniformerik.

§2.7.- RIEMANN-EN ETA LEBESGUE-REN INTEGRALEN ARTEKO ERLAZIOA

1. 2.7 proposizioan ikusi dugunez funtzio bornatu bat Riemann-integragarria bada, Lebesgue-integragarria da eta integral biak berdinak dira. Hemendik galdera bat sortzen zaigu: Lebesgue-ren teoriarentzat integragarria den funtzio bat, noiz izango da Riemann-entzat ere integragarria? Erantzuna ondoko proposizio honek ematen du:

2.23. Proposizioa

Biz $f: [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ bornatua. Orduan f Riemann-integragarria da baldin eta soilik baldin eten-puntuen multzoak 0 neurria badu.

Frogapenerako ikus Guzman-Rubio [3] edo Jean [5] .

2. Ba daude, beraz, Riemann-integragarri ez eta Lebesgue-integragarri ba diren funtzioak. Eman dezagun, ondoren, adibide ezagun bat, Dirichlet-en funtzioa.

Biz

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

Orduan $\overline{R}\int_0^1 f(x)\,dx = 1$ eta $\underline{R}\int_0^1 f(x)\,dx = 0$, beraz, f ez da Riemann-integragarria.

Baina f funtzio sinplea da, $m(\mathbb{Q} \cap [0,1]) = 0$ ($\mathbb{Q}$ kontagarria baita) eta $m(\mathbb{Q}^c \cap [0,1]) = 1$; orduan

$$\int_0^1 f(x)\,dx = 0$$

f funtzioa honela idatz daiteke:

$$f(x) = \lim_{m\to\infty} \left(\lim_{n\to\infty} \cos^{2n}(m!\, x\, \pi) \right)$$

3. Ikusi dugunez Lebesgue-ren integrala Riemann-ena baino zabalagoa da, hots, funtzio gehiago integratzeko posibilitatea ematen digu. Erresultatu hau beste modu batez ikus daiteke.

Biz $\mathcal{R}\ [a,b]$ tartean definitutako funtzio Riemann-integragarrien multzoa eta defini dezagun

$$\|f\| = \int_a^b |f(x)|\, dx \qquad \forall f \in \mathcal{R}$$

Orduan f erdinorma bat da. $\mathcal{R}$ erdinorma honentzat ez da osoa (hots, konbergitzen ez duten segida Cauchyarrak ba daude). Ikus adibide hau:

Biz K $[0,1]$-en azpimultzo ez-dentso, perfektu eta neurri positiboduna; esate baterako, Cantor-en P_α multzo bat $\alpha > 0$ (Ikus §1.7, 3. puntua). Har dezagun $\{E_n\}$ segida bat non E_n tarte irekia baita $[0,1]$-en eta $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n = [0,1] - K$.

Biz orain $F_n = \bigcup_{k=1}^{n} E_k$ eta $f_n = \chi_{F_n}$. Orduan

$$f = \lim_{n\to\infty} f_n = \begin{cases} 1 & x \in [0,1] - K \\ 0 & x \in K \end{cases}$$

f_n funtzioak mailakatuak dira (beraz, Riemann-integragarriak) eta $0 \leq f_n(x) \leq 1 \quad \forall x \in [0,1]$; konbergentzia bornatuaren teorema aplikatuz

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx = \int_0^1 f(x)\,dx = 1 - mK$$

$\{f_n\}$ Cauchyarra da goiko erdinormarentzat baina f ez da Riemann-integragarria. Hau frogatzeko aski dugu f ez-jarraia dela K-n ikustea eta nola $mK > 0$ den, 2.23 proposizioa aplikatuko dugu.

Biz $x_0 \in [0,1]$; nola $\overset{\circ}{K} = \phi$ den (ez-dentsoa), $\forall \varepsilon > 0$ $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ - K multzoak tarte ireki bat partetzat du eta beraz $f(t) = 1$ den punturen bat. Orduan $\limsup_{t\to x_0} f(t) \geq 1$. Nola $f(x) = 0$ $x \in K$ eta K perfektua den, ez da posible lim sup eta lim inf berdinak izatea $x_0 \in K$ denean, beraz, f ez da jarraia K-n.

"Riemann-en integrazio-teoriatik Lebesgue-renerako pasatzea osatze-prozesu bat da. Zenbaki razionaletatik abiatuz zenbaki erreal ak eraikitzea bezain garrantzitsua da Analisian". (W. Rudin, "Real and Complex Analysis", 6. or.).

3. GAIA

NEURRIAK ETA INTEGRAZIOA

3.1 Espazio eta funtzio neurgarriak

3.2 Neurriak eta espazio neurridunak

3.3 Funtzio positiboen integrala

3.4 Funtzio konplexuen integrala

3.5 Daniell-en integrala

3.6 Zenbait ohar eta osagarri

3. NEURRIAK ETA INTEGRAZIOA

Aurreko kapituluetan $\mathbb{R}^n$-n definitutako funtzioen integrala eman dugu. Orain, funtzioen eremua ez da $\mathbb{R}^n$-ren azpimultzo bat izango, edozein multzo batena baino. Eta horretarako multzo horretan neurria definitu beharko dugu.

Abiapuntua desberdina izango da. Han, tarteen neurria ezagun tzat hartu eta zenbait propietate eskatuz (ikus 1.3 definizioaren aurrean) $\mathbb{R}^n$-ren azpimultzo neurgarriak eta berauen neurria definitu dugu. Multzo horiek σ-algebra bat direla ere frogatu dugu.

Orain multzo baten azpimultzoen artean σ-algebra bat hautatuko dugu eta σ-algebraren elementuentzat neurria definituko dugu. Goian aipatutako propietateen artean bat bakarrik, σ-batukortasuna, gordeko dugu, besteek ez baitute zentzurik. Jarraipena funtsean berdina izango da.

Funtzio neurgarrientzat, aldiz, definizio zabalago bat emango dugu, edozein espazio topologikotan hartuko dituzte beren balioak. Baina integratzerakoan funtzio konplexuak bakarrik erabiliko ditugu.

§3.1.- ESPAZIO ETA FUNTZIO NEURGARRIAK

3.1. Definizioa

Biz X multzo bat eta $\mathcal{M}$ X-en definitutako σ-algebra bat. Orduan $(X, \mathcal{M})$ bikotea espazio neurgarria deitzen da eta $\mathcal{M}$-ren elementuak, multzo neurgarriak.

Topologian egiten den bezala, hemen ere askotan X dela espazio neurgarria esango dugu, $\mathcal{M}$ σ-algebra aipatu gabe, baina, jakina, σ-algebra konkretu bat hartzen dela kontutan harturik.

3.2. Definizioa

Bira X espazio neurgarria eta Y espazio topologikoa. $f: X \longrightarrow Y$ funtzio neurgarria izango da, $f^{-1}(V)$ neurgarria bada, $\forall V$ irekia $\subset Y$.

3.3. Proposizioa

Bira X espazio neurgarria eta Y eta Z espazio topologikoak; $f: X \longrightarrow Y$ neurgarria eta $g: Y \longrightarrow Z$ jarraia baldin badira, $h = g \circ f: X \longrightarrow Z$ neurgarria da.

Frogapena

Biz $V \subset Z$ irekia; g jarraia denez gero, $g^{-1}(V) \subset Y$ irekia da, eta f neurgarria denez gero, $f^{-1}(g^{-1}(V)) = h^{-1}(V) \subset X$ neurgarria, f.n.g.

3.4. Proposizioa

Bira u eta v funtzio neurgarri errealak X-en definituak;

biz Y espazio topologiko bat eta $\Phi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow Y$ jarraia eta defini dezagun $h(x) = \Phi(u(x), v(x)) \quad \forall x \in X$. Orduan $h: X \longrightarrow Y$ neurgarria da.

Frogapena

Idatz dezagun $f(x) = (u(x), v(x))$; f X-tik $\mathbb{R}^2$-rako aplikazio bat da; neurgarria bada, nola $h = \Phi \circ f$ den, aurreko proposizioa aplikatuz h ere neurgarria izango da.

Ikus dezagun, ba, f neurgarria dela. Biz $I \subset \mathbb{R}^2$ tarte ireki bat; orduan $I = J_1 \times J_2$ non $J_1, J_2 \subset \mathbb{R}$ tarteak baitira. Baina $f^{-1}(I) = u^{-1}(J_1) \cap v^{-1}(J_2)$ eta azken hauek neurgarriak dira, beraz $f^{-1}(I)$ neurgarria da.

$\mathbb{R}^2$-ko edozein ireki V tarte irekien bildura kontagarria da, $V = \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i$ eta orduan $f^{-1}(V) = \bigcup_{i=1}^{\infty} f^{-1}(I_i)$ neurgarria da. Hortaz f neurgarria da, eta halaber h, f.n.g.

Ondorioak

Biz X espazio neurgarria. Orduan:

(a) Biz $f = u+iv$ non u eta v X-en definitutako funtzio errealak baitira. Orduan f X-en definitutako funtzio konplexu neurgarri bat da.

(b) Biz $f = u+iv$ X-en definitutako funtzio konplexu neurgarri bat; orduan u, v eta $|f|$ X-en definitutako funtzio neurgarri errealak dira.

(c) f eta g funtzio konplexu neurgarriak badira, f+g eta fg ere.

(d) E multzo neurgarria bada, beraren funtzio ezaugarria ere neurgarria da.

(e) Biz f X-en definitutako funtzio konplexu neurgarria. Orduan α funtzio konplexu neurgarri bat existitzen da non $|\alpha| = 1$ eta $f = \alpha|f|$ baitira.

Azken puntu hau frogatzeko, biz $E = \{x / f(x) = 0\}$ eta definí dezagun $\psi(z) = \frac{z}{|z|}$ $z \in \mathbb{C} - \{0\}$. Idatz dezagun

$$\alpha(x) = \psi(f(x) + \chi_E(x)) \qquad x \in X$$

Orduan $x \in E$ bada, $\alpha(x) = 1$ dugu eta $x \notin E$ bada $\alpha(x) = \frac{f(x)}{|f(x)|}$. ψ jarraia da $\mathbb{C} - \{0\}$-n eta E neurgarria, beraz, (d), (c) eta 3.3 proposizioa aplikatuz α neurgarria da. Argi dago α hau egokia dela frogatu behar dugunarentzat.

X espazio topologiko bat bada, 1.22 definizioan bezala multzo boreldarrak defini ditzakegu. Biz $\mathcal{B}$ multzo boreldarren σ-algebra; orduan $(X, \mathcal{B})$ espazio neurgarria da. Espazio honetan definitutako funtzio neurgarriak (funtzio) boreldarrak deitzen dira. Bistan dago funtzio jarraiak boreldarrak direla.

3.5. Proposizioa

Bira $(X, \mathcal{M})$ espazio neurgarri bat, Y espazio topologiko bat eta $f: X \longrightarrow Y$. Orduan:

(i) $\Omega = \{E \subset Y / f^{-1}(E) \in \mathcal{M}\}$ Y-ren σ-algebra bat da.

(ii) f neurgarria bada eta E boreldarra Y-n, $f^{-1}(E) \in \mathcal{M}$.

(iii) Biz $Y = [-\infty, +\infty]$. Orduan $f^{-1}((\alpha,+\infty]) \in \mathcal{M}$ bada $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, f neurgarria da.

(iv) Biz Z espazio topologiko bat eta $g: Y \longrightarrow Z$ boreldarra; f neurgarria bada, halaber $h = g \circ f$ (3.3 proposizioa bai no orokorragoa da).

Frogapena

(i) Iortzeko aski dugu kontutan hartzea zera dugula:

$$f^{-1}(A^c) = (f^{-1}(A))^c \quad \text{eta} \quad f^{-1}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \bigcup_{i=1}^{\infty} f^{-1}(A_i)$$

(ii) Biz Ω (i)-n definitutakoa. Y-ren edozein ireki Ω-n dago eta Ω σ-algebra denez gero multzo boreldar guztiak Ω-n daude. Hortaz (ii) lortzen da.

(iii) Biz Ω (i)-en bezala eta $\alpha \in \mathbb{R}$; har dezagun segida bat $\{\alpha_n\}$, $\alpha_n < \alpha \quad \forall n$ eta $\alpha_n \longrightarrow \alpha$. Hipotesiz $(\alpha_n,+\infty] \in \Omega \quad \forall n$ eta $[-\infty,\alpha) = \bigcup_{n=1}^{\infty} [-\infty, \alpha_n] = \bigcup_{n=1}^{\infty} (\alpha_n,+\infty]^c$ denez,

$[-\infty,\alpha) \in \Omega$, σ-algebra baita.

Berdin gertatzen da (α,β)-rentzat, $(\alpha,\beta) = [-\infty,\beta) \cap (\alpha,+\infty]$ baita. Nola $[-\infty,+\infty]$-ko edozein ireki horien eratako multzoen bildura kontagarri den, Ω-n dago. Beraz, f neurgarria da.

(iv) Biz $V \subset Z$ irekia; orduan $g^{-1}(V)$ boreldarra da Y-n eta nola $h^{-1}(V) = f^{-1}(g^{-1}(V))$ den, (ii)-tik $h^{-1}(V) \in \mathcal{M}$ lortzen da.

Oharra

(iii) propietatea definiziotzat hartu dugu lehenago (1.27 definizioa).

$Y = \overline{\mathbb{R}}$ denean, 1.26 eta 1.29 proposizioek balio dute, baita ondorioek ere. Hortaz:

3.6. Proposizioa

Biz $\{f_n : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}\}_n$ funtzio neurgarrien segida bat. Orduan $\sup f_n$, $\inf f_n$, $\limsup_{n\to\infty} f_n$ eta $\liminf_{n\to\infty} f_n$ neurgarriak dira.

§3.2.- NEURRIAK ETA ESPAZIO NEURRIDUNAK

3.7. Definizioak

- Biz $(X, \mathcal{M})$ espazio neurgarri bat eta $\mu : \mathcal{M} \longrightarrow [0,+\infty]$ aplikazio bat. μ neurri positiboa dela esango dugu batukortasun kontagarriaren propietatea betetzen badu, hots, $\{A_i\} \subset \mathcal{M}$ familia kontagarri disjuntu bat bada

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$$

- $(X, \mathcal{M}, \mu)$ hirukotea espazio neurriduna deituko dugu.

- Neurri konplexu bat σ-algebra batetik $\mathbb{C}$-rako aplikazio bat da, batukortasun kontagarriaren propietatea betetzen duena.

Oharrak

1) Neurri positiboetan neurri finitudun multzo bat dagoela, gutxienez, suposatuko dugu beti. Orduan $\mu(\phi) = 0$ izan behar du, errez ikus daitekeenez.

2) Terminologiaz:

- Gorago espazio neurgarrientzat esan dugun bezala, espazio neurriduna hirukote bat izan arren, σ-algebra eta neurria esagunak badira, X soilik espazio neurriduna dela esango dugu.
- Neurri positiboak neurriak soilki deitzen dira.

3) Neurri positibo batentzat $+\infty$ balioa posible da baina ez neurri konplexuentzat; neurri errealak konplexuen kasu berezia izanik, neurri positiboak ez dira neurri errealen azpimultzo bat.

Adibideak

1. $(\mathbb{R}^n, \mathcal{M}, m)$ espazio neurriduna da, $\mathcal{M}$ $\mathbb{R}^n$-ko azpimultzo neurgarrien σ-algebra (1. kapitulua) eta m Lebesgue-ren neurria izanik.

2. $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}, m)$ ere neurriduna da, orain σ-algebratzat multzo boreldarren familia hartuz.

3. Biz X edozein multzo, $\mathcal{M} = \mathcal{P}(X)$ eta $A \in \mathcal{M}$-rentzat $\mu(A) = \text{card } A < +\infty$ denean eta $\mu(A) = +\infty$ bestela. Orduan $(X, \mathcal{M}, \mu)$ espazio neurriduna da. Neurri hau neurri kontatzailea deitzen da.

4. Biz X edozein multzo eta $x_0 \in X$. Orduan defini dezagun:

$\mu(E) = 1$ $x_0 \in E$ bada eta $\mu(E) = 0$ $x_0 \notin E$ bada.
$(X, \mathcal{P}(X), \mu)$ espazio neurriduna da eta neurri hau x_0-n bildutako unitate masa deitzen da.

5. Biz X ez-kontagarria, $\mathcal{M}$ multzo kontagarri edota osagarri kontagarridunen familia. Biz $\mu(A) = 0$ A kontagarria bada eta $\mu(B) = 1$ B^c kontagarria bada. Orduan $(X, \mathcal{M}, \mu)$ espazio neurriduna da.

3.8. Proposizioa

Biz μ $\mathcal{M}$-n definitutako neurri positibo bat. Orduan:

(i) $A,B \in \mathcal{M}$ eta $A \subset B \Longrightarrow \mu(A) \leq \mu(B)$ (monotonotasuna)

(ii) Biz $\{A_n\} \subset \mathcal{M}$ segida gorakor bat (h.d. $A_n \subset A_{n+1}$ $\forall n$) eta $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. Orduan $\mu(A_n) \longrightarrow \mu(A)$.

(iii) Biz $\{A_n\} \subset \mathcal{M}$ segida beherakor bat (h.d. $A_n \subset A_{n+1}$ $\forall n$) eta $A = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$. Orduan, $\mu(A_1)$ finitua bada, $\mu(A_n) \longrightarrow \mu(A)$.

Frogapena

(i) $B = A \cup (B-A)$ eta $A \cap (B-A) = \phi$. Orduan

$\mu(B) = \mu(A) + \mu(B-A) \geq \mu(A)$, $\mu(B-A) \geq 0$ baita.

(ii) Ikus 1.19 proposizioa.

(iii) Ikus 1.20 proposizioa eta ondoko oharrak.

3.9. Definizioa

μ neurria finitua da $\mu(X) < +\infty$ bada; σ-finitua deitzen

da zera badugu: $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$, $X_n \in \mathcal{M}$ eta $\mu(X_n) < +\infty$.

Adibideak

Lebesgue-ren neurria $[0,1]$ tartean finitua da eta $\mathbb{R}$-n ez da finitua baina bai σ-finitua.

Multzo ez-kontagarri baten neurri kontatzailea ez da σ-finitua.

1.30 definizioaren baliokidea eman dezakegu:

3.10. Definizioa

Bira μ neurri bat X-en eta $E \in \mathcal{M}$. Propietate bat E-n ia nonnahi gertatzen dela esango dugu existitzen bada $N \in \mathcal{M}$ non $\mu(N) = 0$ baita eta propietatea E-N-ko puntu guztietan gertatzen bada.

Neurriaren dependentzia dagoenez honelaxe laburtuko dugu: i.n.(μ).

Adibidea

f eta g funtzio neurgarriak badira eta $\mu(\{x/f(x) \neq g(x)\})=0$ bada, $f = g$ i.n.(μ) dela esango dugu eta $f \sim g$ idatziko. Honela baliokidetasun-erlazio bat definitzen da.

3.11. Definizioa

μ neurria osoa deitzen da 0 neurriko multzoen azpimultzo guztiak neurgarriak badira.

Adibideak

- Lebesgue-ren neurria $\mathbb{R}^n$-n osoa da, 1.12 propietateak eta kanpo-neurriaren monotonotasunak frogatzen dutenez.
- Multzo boreldarretan definitutako Lebesgue-ren neurria ez da osoa. O neurriko multzo boreldar batek azpimultzo ez-boreldarrak ukan ditzake.

Espazio neurridun bat finitua, σ-finitua edo osoa da, dagokion neurria hala bada. Espazio neurridun bat osoa ez bada, ondoko proposizioak osatze-modu bat erakusten du.

3.12. Proposizioa

Biz $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ espazio neurridun bat. Defini dezagun $\mathfrak{M}^*$ ondoko eran: $E \subset X$ izanik, $E \in \mathfrak{M}^*$ da baldin eta soilik baldin existitzen badira $A,B \in \mathfrak{M}$ non $A \subset E \subset B$ eta $\mu(B-A) = 0$ baitira. Biz orduan $\mu(E) = \mu(A)$. $\mathfrak{M}^*$ σ-algebra bat da eta μ $\mathfrak{M}^*$-n definitutako neurri bat.

(Argi dago orain neurri oso bat dugula; $\mathfrak{M}^*$ $\mathfrak{M}$-ren osatua deitzen da).

Frogapena

$\mathfrak{M}^*$ σ-algebra bat da:

(i) $A \subset E \subset B$ bada, $B^c \subset E^c \subset A^c$ da eta $A^c - B^c = B - A$.

(ii) Bira $A_i \subset E_i \subset B_i$ $\forall i \in \mathbb{N}$, $A = \bigcup_i A_i$, $E = \bigcup_i E_i$ eta $B = \bigcup_i B_i$. Orduan $A \subset E \subset B$ eta $B-A \subset \bigcup_i (B_i - A_i)$ beraz

$$\mu(B_i - A_i) = 0 \quad \forall\, i \in \mathbb{N} \implies \mu(B-A) = 0.$$

$\mathcal{M}^*$ σ-algebra bat dela ikusi ondoren, ikus dezagun μ ondo definituta dagoela $\mathcal{M}^*$-n. Horretarako, suposa dezagun $A \subset E \subset B$, $A_1 \subset E \subset B_1$ eta $\mu(B-A) = \mu(B_1 - A_1) = 0$ dugula.

Orduan $A - A_1 \subset B_1 - A_1$ beraz $\mu(A-A_1) = 0$. Berdin $\mu(A_1 - A) = 0$. Honelatan,

$$\mu(A) \leq \mu(A_1) + \mu(A-A_1) = \mu(A_1) \leq \mu(A) + \mu(A_1 - A) = \mu(A).$$

Ikus dezagun, azkenik, batukortasun kontagarria:

biz $\{E_i\}_{i \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{M}^*$; orduan $\exists\, \{A_i\}$, $\{B_i\} \subset \mathcal{M}$, $A_i \subset E_i \subset B_i$ $\forall\, i$ eta $\mu(B_i - A_i) = 0$ $\forall\, i$.

$$\mu\Big(\bigcup_i E_i\Big) = \mu\Big(\bigcup_i A_i\Big) = \sum_i \mu(A_i) = \sum_i \mu(E_i) \qquad \text{f.n.g.}$$

§3.3.- FUNTZIO POSITIBOEN INTEGRALA

Paragrafo honetan $(X, \mathcal{M}, \mu)$ espazio neurriduna erabiltzen dugu.

Funtzio sinpleak lehen kapituluan bezala definitzen ditugu: biz X espazio neurgarri bat, A_i $i = 1,\ldots,k$ multzo neurgarri disjuntuak eta $a_i \in \mathbb{R}$ $i = 1,\ldots,k$; orduan

$$\psi = \sum_{i=1}^{k} a_i \chi_{A_i}$$

funtzio sinple bat da. a_i guztiak desberdinak badira, aurreko desko nposaketa ψ-ren adierazpen kanonikoa deitzen da.

1.34 proposizioak hemen ere.balio du (frogapena eta guzti).

3.13. Definizioa

Biz $E \in \mathfrak{M}$. ψ funtzio sinplearen integrala E-n honelaxe definitzen dugu

$$\int_E \psi \, d\mu = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \, \mu(A_i \cap E)$$

Definizio honek ez du ψ-ren deskonposaketaren dependentziarik.

Posible da i batentzat $\alpha_i = 0$ eta $\mu(A_i \cap E) = \infty$ izatea; orduan $0 \cdot \infty = 0$ erabiltzen da.

$a,b \geq 0$ eta φ eta ψ sinpleak badira

$$\int_E (a\varphi + b\psi) \, d\mu = a \int_E \varphi \, d\mu + b \int_E \psi \, d\mu$$

3.14. Definizioa

Biz $f: X \longrightarrow [0,+\infty]$ neurgarria eta $E \in \mathfrak{M}$, orduan definitzen dugu

$$\int_E f \, d\mu = \sup \int_E \psi \, d\mu$$

supremoa $0 \leq \psi \leq f$ betetzen duten ψ funtzio sinpleen artean hartuz. $\int_E f \, d\mu$ f-ren Lebesgue-ren integrala E-n μ neurriarekiko deitzen da.

Definizio honetatik ateratzen diren beheralako ondorioak proposizio batetan bilduko ditugu:

3.15. Proposizioa

(i) $0 \leq f \leq g \Longrightarrow \int_E f\,d\mu \leq \int_E g\,d\mu$

(ii) $E \subset F$ eta $f \geq 0 \Longrightarrow \int_E f\,d\mu \leq \int_F f\,d\mu$

(iii) $f \geq 0$ eta $c \in [0,+\infty] \Longrightarrow \int_E cf\,d\mu = c\int_E f\,d\mu$

(iv) $f(x) = 0 \quad \forall x \in E \Longrightarrow \int_E f\,d\mu = 0$ ($\mu(E) = +\infty$ izanik ere)

(v) $\mu(E) = 0 \Longrightarrow \int_E f\,d\mu = 0$ ($f(x) = +\infty \ \forall x \in E$ izanik ere)

(vi) $f \geq 0 \Longrightarrow \int_E f\,d\mu = \int_X f\,\chi_E\,d\mu$

Batukortasuna frogatzea ez da erreza. Horretarako lehenago konbergentzia monotonoaren teorema emango dugu. Egia esan, 2. kapituluan egin dugunak (Fatou-ren lema frogatu eta honekin konbergentzia monotonoaren teorema) orain ere balio du baina hemen beste bide bat hautatu dugu: neurriaren propietateak erabiliz konbergentzia monotonoaren teorema frogatuko dugu lehenengo, gero Fatou-ren lema orokorrago bat emateko.

3.16. Lema

Biz ψ funtzio sinple bat (X-en). $E \in \mathcal{M}$ multzoarentzat,

biz

$$\lambda(E) = \int_E \psi \, d\mu$$

Orduan λ $\mathfrak{M}$-n definitutako neurri bat da.

Frogapena

Biz $\psi = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \chi_{A_i}$ eta har dezagun $\{E_j\} \subset \mathfrak{M}$ disjuntuak eta $E = \bigcup_j E_j$.

$$\lambda(E) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \, \mu(A_i \cap E) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_i \cap E_j) =$$

$$= \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \, \mu(A_i \cap E_j) = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda(E_j)$$

μ-ren batukortasun kontagarria erabiliz.

Gainera $\lambda(\phi) = 0$ denez gero, λ ez da beti $+\infty$.

3.17. Teorema (Konbergentzia monotonoaren teorema)

Biz $\{f_n\}$ X-en definitutako funtzio neurgarrien segida bat eta suposa dezagun:

a) $0 \leq f_1(x) \leq f_2(x) \leq \ldots \leq +\infty \qquad \forall x \in X$

b) $\lim_{n \to \infty} f_n(x) = f(x) \qquad \forall x \in X$

Orduan f neurgarria da eta $\lim_{n \to \infty} \int_X f_n \, d\mu = \int_X f \, d\mu$

Frogapena

$f_n \leq f_{n+1} \implies \int f_n \, d\mu \leq \int f_{n+1} \, d\mu$ beraz existitzen da

$\lim \int f_n \, d\mu$. f neurgarria dela 3.6 proposizioak ematen du eta nola $f_n \leq f$ den $\int f_n \, d\mu \leq \int f \, d\mu$ dugu eta orduan $\lim \int f_n \, d\mu \leq \int f \, d\mu$.

Alderantzizko desberdintza frogatu behar dugu. Biz ψ funtzio sinple bat, $0 \leq \psi \leq f$ eta $\alpha \in (0,1)$. Defini dezagun

$$A_n = \{x \in X \,/\, f_n(x) \geq \alpha \, \psi(x)\} \qquad n = 1,2,\ldots$$

$A_n = (f_n - \alpha\psi)^{-1}([0,+\infty])$ idatz daiteke, beraz A_n neurgarria da. Bistan dago $A_n \subset A_{n+1}$ dela.

Gainera, $\bigcup_n A_n = X$ dugu: biz $x \in X$, $f(x) = 0$ bada $x \in A_1$; $f(x) > 0$ bada, $\alpha\psi(x) < f(x)$ eta orduan $\exists\, n$ non $\alpha\psi(x) < f_n(x) \leq f(x)$ baita.

$\lambda(E) = \int_E \psi \, d\mu$ neurri bat denez gero (3.16 lema), 3.8 proposizioa (ii) aplikatuz zera dugu

$$\lim_{n\to\infty} \int_{A_n} \psi \, d\mu = \lim_{n\to\infty} \lambda(A_n) = \lambda(X) = \int_X \psi \, d\mu$$

Orduan $\alpha \int_{A_n} \psi \, d\mu \leq \int_{A_n} f_n \, d\mu \leq \int_X f_n \, d\mu \leq \lim_{n\to\infty} \int_X f_n \, d\mu$

$\forall \alpha \in (0,1)$ $\alpha \longrightarrow 1$ eginez $\int_{A_n} \psi \, d\mu \leq \lim_{n\to\infty} \int_X f_n \, d\mu$ eta goiko berdintza aplikatuz $\int_X \psi \, d\mu \leq \lim_{n\to\infty} \int_X f_n \, d\mu$

Hau $\forall \psi \leq f$ izanik, integralaren definizioz

$$\int_X f \, d\mu \leq \lim_{n\to\infty} \int_X f_n \, d\mu \qquad \text{f.n.g.}$$

Ondoko proposizioak batukortasun kontagarria frogatzen du; batukortasun finitua bertan doa.

3.18. Proposizioa

Biz $f_n: X \longrightarrow [0,+\infty]$ neurgarria $n = 1,2,\ldots$ eta $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \quad \forall x \in X$, orduan $\int_X f \, d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_X f_n \, d\mu$

Frogapena

Har ditzagun f_1 eta f_2. Esan dugunez, 1.34 proposizioak balio du; bira orduan $\{\varphi_n\}$ eta $\{\psi_n\}$ funtzio sinpleen segida gorakorrak f_1 eta f_2-rantz konbergitzen dutenak. Orduan konbergentzia monotonoaren teorema aplikatuz

$$\int_X \varphi_n \, d\mu \longrightarrow \int_X f_1 \, d\mu \qquad \text{eta} \qquad \int_X \psi_n \, d\mu \longrightarrow \int_X f_2 \, d\mu$$

Gainera, $\{\varphi_n + \psi_n\}$ funtzio sinpleen segida gorakorra da eta $\varphi_n + \psi_n \longrightarrow f_1 + f_2$. Beraz

$$\int_X (\varphi_n + \psi_n) \, d\mu \longrightarrow \int_X (f_1 + f_2) \, d\mu$$

Nola funtzio sinpleentzat $\int_X (\varphi_n + \psi_n) d\mu = \int_X \varphi_n \, d\mu + \int_X \psi_n \, d\mu$

den $\int_X (f_1 + f_2) \, d\mu = \int_X f_1 \, d\mu + \int_X f_2 \, d\mu$ lortzen dugu.

Indukzioz $\int_X (\sum_{n=1}^{N} f_n) d\mu = \sum_{n=1}^{N} \int_X f_n \, d\mu$ dugu eta nola

$\left\{ \sum_{n=1}^{N} f_n \right\}_N$ f-rantz konbergitzen duen segida gorakor bat den,

konbergentzia monotonoaren teorema aplika dezakegu eta

$$\int_X f \, d\mu = \lim_{N \to \infty} \sum_{n=1}^{N} \int_X f_n \, d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_X f_n \, d\mu \qquad \text{f.n.g.}$$

3.19. Ondorioa

Aurreko proposizioan μ neurri kontatzailea bada, integrala serie bat bilakatzen da eta honela idatz daiteke:

biz $a_{ij} \geq 0 \quad i,j \in \mathbb{N}$, orduan $\sum_i \sum_j a_{ij} = \sum_j \sum_i a$

3.20. Proposizioa (Fatou-ren lema)

Biz $f_n : X \longrightarrow [0,+\infty]$ neurgarria $\forall n$, orduan

$$\int_X (\liminf f_n) \, d\mu \leq \liminf \int_X f_n \, d\mu$$

Frogapena

Biz $g_k(x) = \inf_{i \geq k} f_i(x) \qquad k = 1,2,3,\ldots \qquad x \in X$

Orduan $g_k \leq f_k \quad \forall k$ eta $\int_X g_k \, d\mu \leq \int_X f_k \, d\mu \qquad \forall k.$

Baina g_k funtzioak neurgarriak dira, $0 \leq g_1 \leq g_2 \leq \ldots$ eta $\lim_{k \to \infty} g_k = \liminf f_n$, beraz, konbergentzia monotonoaren teorema aplikatuz

$$\int_X (\lim_{k \to \infty} g_k) \, d\mu = \lim_{k \to \infty} \int_X g_k \, d\mu \leq \liminf \int_X f_k \, d\mu$$

f.n.g.

Oharra

Fatou-ren leman desberdintza herstua gesta daiteke 2. gaian ikusi dugunez. Hona hemen beste adibide bat:

Biz E multzo neurgarri bat, $f_n = \chi_E$ n bikoitia denean eta $f_n = 1 - \chi_E$ n bakoitia denean. Orduan $\liminf f_n = 0$ eta $\liminf \int_X f_n \, d\mu = \min (\mu(E), \mu(E^c))$.

3.21. Proposizioa

Biz $f: X \longrightarrow [0,+\infty]$ neurgarria eta $\lambda(E) = \int_E f \, d\mu$ ($E \in \mathfrak{M}$). Orduan λ neurri bat da eta $g: X \longrightarrow [0,+\infty]$ neurgarria bada

$$\int_X g \, d\lambda = \int_X gf \, d\mu$$

Frogapena

(i) Bira $E_1, E_2, \ldots$ multzo neurgarri disjuntuak eta $E = \bigcup_i E_i$.

$\chi_E f = \sum_{i=1}^{\infty} \chi_{E_i} f$ dugu eta

$$\lambda(E) = \int_X \chi_E f \, d\mu \qquad \text{eta} \qquad \lambda(E_i) = \int_X \chi_{E_i} f \, d\mu$$

3.18 proposizioa aplikatuz $\lambda(E) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda(E_i)$. Nola $\lambda(\phi) = 0$ den, λ neurri bat da.

(ii) Biz $g = \chi_E$, orduan $\int_X \chi_E \, d\lambda = \lambda(E)$ eta $\int_X \chi_E f \, d\mu = \int_E f \, d\mu$ eta (i)-etik

$$\int_X \chi_E \, d\lambda = \int_X \chi_E \, f \, d\mu$$

Orduan g sinplea bada ere balio du eta 1.34 proposizioa eta konbergentzia monotonoaren teorema aplikatuz (ii) frogatuta dago.

Oharra

3.21 proposizioaren azken zatia $d\lambda = f\,d\mu$ idazten da. Ikus aurrerago Radon-Nikodym-en teorema (ikus §5.3). Han proposizio honen reziprokoa emango da eta idazkera honi zentzu bat emango zaio.

§3.4.- FUNTZIO KONPLEXUEN INTEGRALA

2. gaian funtzio errealak bakarrik integratu ditugu, baina berdin egin genezakeen funtzio konplexuentzat, hauen parte erreal eta irudikaria kontutan hartuz, orain egingo dugun bezala.

3.4 proposiziotik ateratako (b) ondorioan zera dugu: f funtzio (erreal nahiz konplexu) neurgarria bada, $|f|$ funtzio erreal neurgarria da eta gainera $|f| \geq 0$. Orduan $|f|$-ren integrala badakigu egiten.

Biz orain f funtzio erreal neurgarri bat. f-ren parte positiboa f^+ eta negatiboa f^- defini ditzakegu (dagoeneko egin dugun bezala):

$$f^+ = \max(f,0) \qquad f^- = \max(-f,0)$$

Orduan f^+ eta f^- funtzio erreal neurgarri ez-negatiboak dira eta integra ditzakegu.

f funtzio konplexu bat bada, bira u f-ren parte erreala eta v f-ren parte irudikaria. Orduan u eta v funtzio erreal neurgarriak dira.

3.22. Definizioa

(i) Biz f funtzio (erreal nahiz konplexu) neurgarri bat. Orduan f Lebesgue-integragarria μ-rekiko E-n dela esango dugu $\int_E |f|\, d\mu < +\infty$ bada.

(ii) f funtzio erreal integragarria bada, beraren integrala (E-n) zera da:

$$\int_E f\, d\mu = \int_E f^+\, d\mu - \int_E f^-\, d\mu$$

(iii) f funtzio konplexu integragarria bada, beraren integrala (E-n) zera da:

$$\int_E f\, d\mu = \int_E u\, d\mu + i \int_E v\, d\mu$$

Oharra

Funtzio erreal batek $[-\infty, +\infty]$-n hartzen baditu bere balioak, aurreko definizioaren (i) puntua kontutan hartu gabe (alegia, integragarria dela esan gabe) (ii)-n bezala defini dezakegu haren integrala, kendura $+\infty-(+\infty)$ eratakoa ez denean.

3.23. Proposizioa

Bira f,g funtzio integragarriak (E-n) eta $\alpha,\beta \in \mathbb{C}$. Orduan $\alpha f + \beta g$ integragarria (E-n) eta

$$\int_E (\alpha f + \beta g)\, d\mu = \alpha \int_E f\, d\mu + \beta \int_E g\, d\mu$$

Frogapena

$\alpha f + \beta g$ neurgarria da (3.4 proposizioa, (c) ondorioa). Gainera

$$\int_E |\alpha f+\beta g|\ d\mu \leq \int_E (|\alpha||f|+|\beta||g|)d\mu = |\alpha|\int_E |f|d\mu + |\beta|\int_E |g|d\mu < +\infty$$

(3.15 eta 3.18 proposizioak aplikatuz). Orduan $\alpha f+ \beta g$ integragarria da.

Ikus dezagun f eta g funtzio erreal neurgarriak badira

$$\int_E (f+g)\ d\mu = \int_E f\ d\mu + \int_E g\ d\mu \qquad \text{dela.}$$

Biz $h = f+g$; orduan

$f = f^+ - f^-$ $\quad g = g^+ - g^-$ $\quad h = h^+ - h^-$ denez gero

$h^+ - h^- = f^+ - f^- + g^+ - g^-$ eta $h^+ + f^- + g^- = h^- + f^+ + g^+$.

3.18 proposizioa aplikatuz

$$\int_E h^+\ d\mu + \int_E f^-\ d\mu + \int_E g^-\ d\mu = \int_E h^-\ d\mu + \int_E f^+\ d\mu + \int_E g^+\ d\mu$$

eta hemendik

$$\int_E h^+\ d\mu - \int_E h^-\ d\mu = \left(\int_E f^+\ d\mu - \int_E f^-\ d\mu\right) + \left(\int_E g^+\ d\mu - \int_E g^-d\mu\right)$$

Funtzio errealentzat egia izanik, argi dago konplexuentzat ere ba dela, hauen integralaren definizioz.

Ikus dezagun orain

$$\int_E (\alpha f)\ d\mu = \alpha \int_E f\ d\mu \qquad \forall\, \alpha \in \mathbb{C} \quad \text{dela.}$$

a) $\alpha \geq 0$ $\quad f \geq 0$ $\quad$ 3.15 proposizioa, (iii).

b) $\alpha \geq 0$ $\quad f$ erreala; $(\alpha f)^+ = \alpha f^+$ eta $(\alpha f)^- = \alpha f^-$ denez gero, a) aplikatzen dugu.

c) $\alpha < 0$ f erreala; aski da $\alpha = -1$-entzat egitea eta gero b)-rekin konbinatzea. Baina $(-f)^+ = f^-$ eta $(-f)^- = f^+$ denez gero, nabaria da.

d) $\alpha \in \mathbb{R}$ f konplexua. Orduan $f = u+iv$ eta u,v errealak $\Longrightarrow$ $\alpha f = \alpha u + i\alpha v$ eta $\alpha u, \alpha v$ errealak. Beraz, c) aplikatzen dugu.

e) $\alpha \in \mathbb{C}$ f konplexua, aski da $\alpha = i$-rentzat egitea eta gero d)-rekin konbinatzea

$f = u+iv \Longrightarrow if = iu-v$ eta

$$\int_E (if)d\mu = \int_E (iu-v)\, d\mu = \int_E (-v)\, d\mu + i \int_E u\, d\mu =$$

$$= - \int_E v\, d\mu + i \int_E u\, d\mu = i\left(\int_E u\, d\mu + i \int_E v\, d\mu \right) =$$

$$= i \int_E f\, d\mu$$

3.24. Proposizioa

Biz f funtzio integragarria; orduan

$$\left| \int_X f\, d\mu \right| \leq \int_X |f|\, d\mu$$

Frogapena

Idatz dezagun $z = \int_X f\, d\mu$. z konplexua da, beraz, $z = |z|\, e^{i\theta}$ non $\theta = \arg z$ baita. Biz orain u $(e^{-i\theta} f)$-ren parte erreala. Orduan $u \leq |e^{-i\theta} f| = |f|$ eta

$$\left| \int_X f\, d\mu \right| = e^{-i\theta} \int_X f\, d\mu = \int_X e^{-i\theta} f\, d\mu = \int_X u\, d\mu \leq \int_X |f|\, d\mu$$

(Hirugarren berdintza aurrekoek $\int_X e^{-i\theta} f \, d\mu$ erreala dela froga tzen dutelako gertatzen da).

3.25. Proposizioa

(i) Biz $f: X \longrightarrow [0,+\infty]$ neurgarria, $E \in \mathcal{M}$ eta $\int_E f \, d\mu = 0$
Orduan $f = 0$ i.n. E.

(ii) Biz f integragarria eta $\int_E f \, d\mu = 0 \quad \forall E \in \mathcal{M}$.
Orduan $f = 0$ i.n. E.

(iii) Biz f integragarria eta $\left| \int_X f \, d\mu \right| = \int_X |f| \, d\mu$. Orduan existitzen da $\alpha \in \mathbb{C}$ zeinentat $\alpha f = |f|$ i.n. E baita.

Frogapena

(i) 2.10 proposizioan bezala.

(ii) Biz $f = u+iv$ eta $E = \{x \,/\, u(x) \geq 0\}$. Orduan
$\operatorname{Re} \int_E f \, d\mu = \int_E u^+ \, d\mu = 0$, beraz $u^+ = 0$ i.n.
Berdin eginez $u^- = v^+ = v^- = 0$ i.n.

(iii) 3.24 proposizioaren frogapenari begiratuz orain zera dugu

$$\int_X u \, d\mu = \int_X |f| \, d\mu \qquad u = \operatorname{Re}(e^{-i\theta} f)$$

Orduan $\int_X (|f|-u) \, d\mu = 0$ eta $|f| \geq u$ denez, $|f| = u$ i.n.

Hemendik $\operatorname{Re}(e^{-i\theta} f) = |f| = |e^{-i\theta} f|$ i.n. beraz

$$e^{-i\theta} f = |e^{-i\theta} f| = |f| \quad \text{i.n.} \quad \text{f.n.g.}$$

Orain geroago beharko dugun proposizio bat emango dugu:

3.26. Proposizioa

Bira $\mu(X) < +\infty$, f integragarria, S itxia $\mathbb{C}$-n eta suposa dezagun $A_E(f) = \frac{1}{\mu(E)} \int_E f\, d\mu \in S \quad \forall E \in \mathcal{M} \quad \mu(E) > 0$.

Orduan $f(x) \in S$ i.n. $x \in X$.

Frogapena

S itxia denez, $\exists\, \alpha \in \mathbb{C}$, $r > 0$: $B = \{z \in \mathbb{C} / |z-\alpha| \leq r\} \subset S^c$. Biz $\tilde{B} = f^{-1}(B)$. Ikus dezagun $\mu(\tilde{B}) = 0$ dela; $\mu(\tilde{B}) > 0$ balitz,

$$|A_{\tilde{B}}(f) - \alpha| = \frac{1}{\mu(\tilde{B})} \left| \int_{\tilde{B}} (f-\alpha)\, d\mu \right| \leq \frac{1}{\mu(\tilde{B})} \int_{\tilde{B}} |f-\alpha|\, d\mu \leq r$$

litzateke eta orduan $A_{\tilde{B}}(f) \subset \tilde{B} \subset S^c$ hipotesiaren aurka.

Nola S^c B-ren eratako multzoen bildura kontagarri bezala idatz daitekeen $\mu(f^{-1}(S^c)) = 0$ f.n.g.

3.27. Proposizioa

Biz f integragarria. Orduan $\forall \varepsilon > 0$ $\exists\, \delta > 0$ non $\int_E |f|\, d\mu < \varepsilon$ baita, $\mu(E) < \delta$ denean.

("integralaren erabateko jarraitasuna" deitzen da).

Frogapena

2.22 proposizioarena bezala egiten da funtzio sinple bat hartuz, funtzio bornatu baten ordez.

Konbergentzi teoremen artean, $\mathbb{R}^n$-ko kasuan bezala konbergentzia gaindituaren teorema eman dezakegu hemen ere. Frogapena harena bezalakoa da (2.22 teorema).

3.28. Teorema (Konbergentzia gaindituarena)

Biz $\{f_n\}$ funtzio neurgarrien segida bat. Biz g E-n integragarria eta suposa dezagun $|f_n| \leq g$ i.n. μ. Orduan, $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ integragarria da

$$\lim_{n\to\infty} \int_E |f_n - f| \, d\mu = 0 \quad \text{eta} \quad \int_E f \, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_E f_n \, d\mu .$$

Aplikazioa: integral parametrodunak

Biz $f: E \times [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ eta suposa dezagun $f_t: x \longmapsto f_t(x) = f(x,t)$ neurgarria dela $\forall\, t \in [a,b]$.

3.29. Proposizioa (Jarraitasuna)

Biz $t_o \in [a,b]$ eta suposa dezagun

$$\lim_{t\to t_o} f(x,t) = \psi(x) \qquad \forall\, x \in E$$

$|f(x,t)| \leq g(x) \quad \forall\, t \in [a,b]$ g integragarria izanik.

Orduan $\lim_{t\to t_o} \int_E f(x,t) \, d\mu = \int_E \psi(x) \, d\mu$.

Frogapena

Biz $\{t_n\}$ segida bat, $t_n \in [a,b]$ eta $t_n \longrightarrow t_o$. Orduan $f_n(x) = f(x,t_n)$ kontsideratuz, konbergentzia gaindituaren teorema aplika dezakegu.

Ondorioa

$t \longmapsto f(x,t)$ jarraia bada $[a,b]$-n $\forall\, x \in E$ eta $|f(x,t)| \leq g(x)$, g integragarria izanik, orduan

$$F: t \longmapsto F(t) = \int_E f(x,t) \, d\mu \quad \text{jarraia da } [a,b]\text{-n.}$$

3.30. Proposizioa (deribagarritasuna)

Suposa dezagun

(i) $\exists\, t_0 \in [a,b]$ zeinentzat $x \longmapsto f(x,t_0)$ integragarria den E-n.

(ii) $\frac{\partial f}{\partial t}$ existitzen da $E \times [a,b]$-n

(iii) $\exists\, g$ E-n integragarria zeinentzat $\left|\frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\right| \leq g(x)$ baita $\forall x \in [a,b]$. Orduan $t \longmapsto F(t) = \int_E f(x,t)\, d\mu$ deribagarria da $[a,b]$-n eta

$$\frac{dF}{dt}(t) = \frac{d}{dt} \int_E f(x,t)\, d\mu = \int_E \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\, d\mu$$

Frogapena

$$\frac{\partial f}{\partial t}(x,t) = \lim_{t_n \to t} \frac{f(x,t_n) - f(x,t)}{t_n - t} \quad , \quad x \in E$$

Nola $\psi_n(x) = \dfrac{f(x,t_n) - f(x,t)}{t_n - t}$ neurgarria den, $\frac{\partial f}{\partial t}(x,t)$ neurgarria da $\forall\, t \in [a,b]$. Aplika dezagun gehikuntza finituen teorema

$$f(x,t) - f(x,t_0) = (t-t_0)\, \frac{\partial f}{\partial t}(x, \theta)$$

orduan $|f(x,t)| \leq |f(x,t_0)| + |t-t_0|\ g(x)$ beraz

$t \longmapsto f(x,t)$ integragarria da $\forall\, t \in [a,b]$.

(Ikus (i) hipotesian aski dugula t_0 batentzat bakarrik integragarria dela suposatzea, beste bi hipotesiek ematen baitute edozein t-rentzako integragarritasuna).

$$\frac{F(t_n) - F(t)}{t_n - t} = \int_E \frac{f(x,t_n) - f(x,t)}{t_n - t}\, d\mu = \int_E \psi_n(x)\, d\mu$$

Berriro gehikuntza finituen teorema aplikatuz $|\psi_n(x)| \leq g(x)$ eta konbergentzia gaindituaren teoremaz

$$\frac{dF}{dt}(t) = \int_E \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\, d\mu$$

Adibidea

Ikus dezagun $F(t) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-tx^2}}{1+x^2}\, dx$ funtzioaren jarraitasuna eta deribagarritasuna.

$f(x,t) = \frac{e^{-tx^2}}{1+x^2}$ jarraia da $\forall x \in (0,+\infty)$, $\forall t \in (0,+\infty)$

eta $|f(x,t)| \leq \frac{1}{1+x^2}$, azken hau integragarria izanik. Orduan F jarraia da.

$t = a$ finkatuz, $f(x,a) = \frac{e^{-ax^2}}{1+x^2}$ integragarria da.

$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{-x^2 e^{-tx^2}}{1+x^2}$ existitzen da $(0,+\infty) \times (0,+\infty)$-n eta $\forall \varepsilon > 0$, $t \in (\varepsilon,+\infty)$ bada, $\left|\frac{\partial f}{\partial t}\right| \leq \frac{-x^2 e^{-x^2}}{1+x^2}$ hau integragarria izanik.

Orduan $\forall \varepsilon > 0$ $t \in (\varepsilon,+\infty)$-rentzat $F'(t) = \int_0^{+\infty} \frac{-x^2 e^{-tx^2}}{1+x^2}\, dx$.

Nola ε edozein den, $\forall t \in (0,+\infty)$ balio du.

Ekuazio diferentzial batekin $F(t)$ kalkula daiteke:

$$\begin{cases} F'(t) - F(t) = -\int_0^{+\infty} e^{-tx^2}\, dx = -\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{t}} \\ F(0) = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Zera lortzen da $F(t) = \frac{\pi}{2} e^t(1- \theta(\sqrt{t}))$ non $\theta(s) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^s e^{-r^2} dr$ baita.

§3.5.- DANIELL-EN INTEGRALA

Jadanik esana dugu integrala neurria erabili gabe eraiki daitekeela. Horretarako, funtzio elementalen klase batetan, $\mathcal{L}$-n, definitutako I integrala ezaguntzat hartu eta klase zabalago batetara hedatu nahi da, Lebesgue-ren integral bat lortu arte.

Biz $\mathcal{L}$ X-en definitutako funtzio erreal bornatuen espazio bektorial sareztatu bat, hau da:

(*) $\quad f,g \in \mathcal{L} \ , \ \alpha,\beta \in \mathbb{R} \implies \alpha f + \beta g, \ f \wedge g \text{ eta } f \vee g \in \mathcal{L}$

non $(f \wedge g)(x) = \inf (f(x),g(x))$ eta $(f \vee g)(x) = \sup (f(x),g(x))$ baitira. Orduan $h \in \mathcal{L} \implies h^+,h^- \text{ eta } |h| \in \mathcal{L}$.

$\mathcal{L}$-n definitutako I funtzionala Daniell-en integral bat dela esango dugu ondoko propietateok betetzen baditu:

D1. $\quad I(f+g) = I(f) + I(g)$

D2. $\quad I(\alpha f) = \alpha I(f)$

D3. $\quad f \geq 0 \implies I(f) \geq 0 \quad$ (orduan $f \geq g \implies I(f) \geq I(g)$)

D4. $\quad f_n \downarrow 0 \implies I(f_n) \downarrow 0$

$f_n \downarrow 0$ notazioak zera esan nahi du: segida beherakorra dela eta 0-rantz konbergitzen duela.

Adibidea

Kontsidera ditzagun aldagai errealeko funtzio erreal jarraien artean, tarte finitu baten osagarrian 0 direnak (euskarri trinkoko funtzioak). Multzo hori izango da $\mathcal{L}$. Funtzio horientzat Riemann-en integrala (edo Cauchy-rena, ikus §0.1) egin dezakegu. Integral hau izango da I . Hedapen-prozedura baten bitartez 2. gaian eraikitako Lebesgue-ren integrala lortu nahi genuke.

Zenbaki errealen segida gorakor batek beti du limite bat $\overline{\mathbb{R}}$-n, h.d., $+\infty$ limite posibletzat onartzen badugu. Hau kontutan harturik, biz $\mathcal{U}$ $\mathcal{L}$-ren funtzioen segida monotono gorakorren limiteen klasea, hots,

$$f \in \mathcal{U} \iff \exists \{f_n\} \subset \mathcal{L} \quad f_n \leq f_{n+1} \quad \forall n \text{ eta } \lim_{n \to \infty} f_n(x) = f(x)$$

($f_n \uparrow f$ idatziko dugu).

Argi dago $\mathcal{L} \subset \mathcal{U}$ dela (segida konstanteak hartuz) eta $\mathcal{U}$-k (*) baldintza betetzen duela.

I $\mathcal{U}$-ra hedatzeko honela definituko dugu

$$I(f) = \lim_{n \to \infty} I(f_n) \quad \text{non} \quad f_n \uparrow f \quad \text{eta} \quad f_n \in \mathcal{L} \quad \text{baitira.}$$

($+\infty$ onartzen da limitetzat).

3.31. Lema

Baldin $f_n \uparrow f$ eta $g_m \uparrow g$ badira, non $f_n, g_m \in \mathcal{L}$ eta $g \leq f$ baitira, orduan $\lim_{m \to \infty} I(g_m) \leq \lim_{n \to \infty} I(f_n)$.

Frogapena

Biz $h \in \mathcal{L}$ eta $\lim_{n\to\infty} f_n \geq h$; orduan, nola $f_n \geq f_n \wedge h$ eta $f_n \wedge h \uparrow h$ diren, $\lim_{n\to\infty} I(f_n) \geq \lim_{n\to\infty} I(f_n \wedge h) = I(h)$ (D4 balidintza erabiliz).

Orduan $h = g_m$ eginez gero $\lim_{n\to\infty} I(f_n) \geq I(g_m)$ $\forall m$ eta limitera pasatuz

$$\lim_{n\to\infty} I(f_n) \geq \lim_{m\to\infty} I(g_m) \qquad \text{f.n.g.}$$

Ondorioa

Baldin $f = g$ bada aurreko leman, $\lim I(f_n) = \lim I(g_m)$ izango da eta honek frogatzen du I ondo definituta dagoela $\mathcal{U}$-n (hots, ez duela hautatzen dugun segidaren dependentziarik).

Gainera D3 betetzen dela ere frogatzen da. Errez ikusten da D1 ere egia dela eta D2 $\alpha \geq 0$ denean.

3.32. Proposizioa

Biz $f_n \in \mathcal{U}$ eta $f_n \uparrow f$, orduan $f \in \mathcal{U}$ eta $I(f_n) \uparrow I(f)$.

Frogapena

Finka dezagun n, orduan $\exists\, g_{n,m} \in \mathcal{L}$ eta $g_{n,m} \uparrow f_n$. Biz $h_n = g_{1,n} \vee \ldots \vee g_{n,n}$; orduan $h_n \in \mathcal{L}$ eta gorakorra da. Gainera $g_{i,n} \leq h_n \leq f_n$ $\quad i \leq n$; limitera pasatuz

$$\lim_{i\to\infty} \left(\lim_{n\to\infty} g_{i,n} \right) \leq \lim_{n\to\infty} h_n \leq \lim_{n\to\infty} f_n$$

eta $f \leq \lim_{n\to\infty} h_n \leq f$.

Orduan $h_n \uparrow f$ eta beraz, $f \in \mathcal{U}$.

Berdinki $I(g_{i,n}) \leq I(h_n) \leq I(f_n)$, limitera pasatuz

$$\lim_{i \to \infty} I(f_i) \leq I(f) \leq \lim_{n \to \infty} I(f_n)$$

beraz, $I(f_n) \uparrow I(f)$ f.n.g.

Biz orain $-\mathcal{U} = \{f / -f \in \mathcal{U}\}$ eta $f \in -\mathcal{U}$ bada, definitzen dugu $I(f) = -I(-f)$. $f \in \mathcal{U} \cap (-\mathcal{U})$ bada, $f + (-f) = 0$ dugu eta definizio hau aurrekoarekin ados dago. Orain D1, D2 $\alpha \geq 0$ denean eta D3 propietateak betetzen dira $-\mathcal{U}$-n eta $f_n \downarrow f$, $f_n \in -\mathcal{U}$ bada, $f \in -\mathcal{U}$.

Bira $g \in -\mathcal{U}$ eta $h \in \mathcal{U}$ eta suposa dezagun $g \leq h$ dela; orduan $h-g \in \mathcal{U}$ eta $I(h) - I(g) = I(h-g) \geq 0$.

3.33. Definizioa

f I-integragarria da baldin eta soilik baldin $\forall \varepsilon > 0$ $\exists g \in -\mathcal{U}$ eta $h \in \mathcal{U}$ non $g \leq f \leq h$, $I(g), I(h) < +\infty$ eta $I(h) - I(g) < \varepsilon$ baitira.

g eta h baldintza horiek betetzen dituztenen artean aldatuz, $\sup I(g) = \inf I(h)$ da eta balio komun hau lortzen da $I(f)$-rentzat.

Funtzio integragarrien familia $\mathcal{L}^1$ idatziko dugu.

$f \in \mathcal{U}$ eta $I(f) < +\infty \implies f \in \mathcal{L}^1$ eta $I(f)$ lehenago definitutakoa da. Nola $\exists f_n \in \mathcal{L}$ $f_n \uparrow f$ den, $h = f$ eta $g = f_n$ (n egoki batekin) hartzen ditugu.

3.34. Proposizioa

$\mathcal{L}^1$-ek (*) propietatea betetzen du eta definitu dugun integralak D1-D4 propietateak betetzen ditu.

Frogapena

Bira $f_1, f_2 \in \mathcal{L}^1$ eta $\varepsilon > 0$; har ditzagun $g_1, g_2 \in -\mathcal{U}$, $h_1, h_2 \in \mathcal{U}$ non $g_i \leq f_i \leq h_i$ eta $I(h_i) - I(g_i) < \frac{\varepsilon}{2}$ $i = 1,2$ baita. Orduan $g_1+g_2 \leq f_1+f_2 \leq h_1+h_2$ eta

$$I(h_1+h_2) - I(g_1+g_2) \leq I(h_1-g_1) + I(h_2-g_2) < \varepsilon$$

Beraz, $f_1+f_2 \in \mathcal{L}^1$.

+-en ordez V edo $\wedge$ ipiniz, desberdintzek balio dute eta $f_1 \vee f_2$, $f_1 \wedge f_2 \in \mathcal{L}^1$.

Gainera $|I(f_1+f_2) - I(f_1) - I(f_2)| < 2\varepsilon$ $\forall \varepsilon$ denez, D1 lortzen da.

$\alpha \geq 0$ denean argi dago $\alpha f \in \mathcal{L}^1$ eta $I(\alpha f) = \alpha I(f)$ dela. $\alpha < 0$ bada, $g \leq f \leq h \implies \alpha h \leq \alpha f \leq \alpha g$ eta $I(\alpha g - \alpha h) = -\alpha I(h-g) < |\alpha| \varepsilon$

$f \geq 0$ bada, $h \geq 0$ da eta $I(f) = \inf I(h) \geq 0$, beraz D3. D4 hurrengo proposizioan dago.

3.35. Proposizioa (Konbergentzia monotonoarena)

Biz $f_n \in \mathcal{L}^1$, $f_n \uparrow f$ eta $\lim I(f_n) < +\infty$, orduan $f \in \mathcal{L}^1$ eta $I(f_n) \uparrow I(f)$.

Frogapena

Suposa dezagun $f_0 = 0$ (bestela funtzio guztiei f_0 ken diezaiekegu).

Har dezagun $h_n \in \mathcal{U}$ $n = 1,2,\ldots$ non $f_n - f_{n-1} \leq h_n$ eta $I(h_n) < I(f_n - f_{n-1}) + \frac{\varepsilon}{2^n}$ baita. Orduan

$$f_n \leq \sum_{i=1}^{n} h_i \quad \text{eta} \quad \sum_{i=1}^{n} I(h_i) < I(f_n) + \varepsilon$$

$h = \sum_{i=1}^{\infty} h_i$ eginez, $h \in \mathcal{U}$ eta $I(h) = \sum_{i=1}^{\infty} I(h_i)$ (3.32 proposizioa)

Gainera $f \leq h$ eta $I(h) \leq \lim I(f_n) + \varepsilon$.

m nahiko handia bada, $g \in -\mathcal{U}$ aurki dezakegu non $g \leq f_m \leq f \leq h$ baita eta $I(h) - I(g) < 2\varepsilon$. Orduan $f \in \mathcal{L}^1$ eta $I(f) = \lim I(f_n)$.

3.36. Proposizioa (Fatou-ren lema)

Biz $\{f_n\}$ $\mathcal{L}^1$-en funtzio ez-negatiboen segida bat. Orduan $\inf f_n \in \mathcal{L}^1$ eta $\liminf f_n \in \mathcal{L}^1$ baldin $\liminf I(f_n) < +\infty$ bada. Gainera $I(\liminf f_n) \leq \liminf I(f_n)$.

Frogapena

Biz $h_n = f_1 \wedge f_2 \wedge \ldots \wedge f_n$. Orduan h_n funtzio ez-negatiboen segida beherakorra da eta $h_n \downarrow h = \inf f_n$. Orduan $-h_n \uparrow -h$ eta nola $I(-h_n) \leq 0$ den, aurreko proposizioa aplikatuz $h \in \mathcal{L}^1$.

Biz orain $g_n = \inf_{i \geq n} f_i$. Orduan g_n funtzio ez-negatiboen segida gorakorra da eta $g_n \uparrow \liminf f_i$.

Nola $g_n \leq f_i \quad \forall n \geq i$ den, $\lim I(g_n) \leq \liminf I(f_i) < +\infty$. Hemendik $\liminf f_n \in \mathcal{L}^1$ eta $I(\liminf f_n) \leq \liminf I(f_n)$ aurreko proposizioa aplikatuz.

3.37. Proposizioa (Konbergentzia gaindituarena)

Biz $\{f_n\}$ $\mathcal{L}^1$-eko funtzioen segida bat eta $g \in \mathcal{L}^1$ non $|f_n| \leq g \quad \forall n$ baita. Orduan $f = \lim_n f_n$ bada, $I(f) = \lim I(f_n)$.

Frogapena

f_n+g funtzio ez-negatiboak dira eta $I(f_n+g) \leq 2I(g)$. Aurreko proposizioa aplikatuz $f+g \in \mathcal{L}^1$ eta

$$I(f+g) \leq \liminf I(f_n+g) = I(g) + \liminf I(f_n)$$

Hemendik $I(f) \leq \liminf I(f_n)$.

Nola $g-f_n$ ere ez-negatiboak diren

$$I(g-f) \leq \liminf I(g-f_n) = I(g) - \liminf I(f_n)$$

Orduan $\limsup I(f_n) \leq I(f)$. Beraz, $\liminf I(f_n) = I(f)$.

Daniell-en metodo honekin eraiki dugun integral hau neurri batekiko integrala bezala idatz daiteke, segidan erakusten dugunez.

3.38. Definizioa

(i) X-en definitutako f funtzio ez-negatibo bat neurgarria da (I-rekiko), baldin $g \wedge f \in \mathcal{L}^1$ bada, $\forall g \in \mathcal{L}^1$.
(Froga daiteke aski dela $g \wedge f \in \mathcal{L}^1 \quad \forall g \in L$).

(ii) $A \subset X$ neurgarria da (I-rekiko), beraren funtzio ezaugarria χ_A neurgarria bada, eta integragarria, χ_A integragarria bada.

3.39. Lema

(i) f eta g funtzio neurgarri ez-negatiboak badira, $f \wedge g$ eta

$f \vee g$ ere.

(ii) $\{f_n\}$ funtzio neurgarri ez-negatiboen segida bat bada, $f = \lim f_n$ neurgarria da.

(iii) A eta B neurgarriak badira, $A \cup B$, $A \cap B$ eta $A-B$ ere.

(iv) $\{A_n\}$ multzo neurgarrien segida bat bada, $\bigcup_n A_n$ eta $\bigcap_n A_n$ neurgarriak dira.

(v) 1 funtzioa neurgarria bada, multzo neurgarrien familia σ-algebra bat da.

Frogapena

(i) Biz $h \in \mathcal{L}^1$, orduan $h \wedge (f \wedge g) = (h \wedge f) \wedge (h \wedge g)$ eta $h \wedge (f \vee g) = (h \wedge f) \vee (h \wedge g)$ beraz $f \wedge g$ eta $f \vee g$ neurgarriak dira.

(ii) Biz $g \in \mathcal{L}^1$; orduan $f_n \wedge g \longrightarrow f \wedge g$; nola $|f_n \wedge g| \leq g$ den, $f \wedge g \in \mathcal{L}^1$ (3.37 proposizioa).

(iii) $\chi_{A \cap B} = \chi_A \wedge \chi_B$ eta $\chi_{A \cup B} = \chi_A \vee \chi_B$ direnez, $A \cap B$ eta $A \cup B$ neurgarriak dira.

Biz $g \in \mathcal{L}^1$; orduan $g \wedge \chi_{A-B} = g \wedge \chi_A - g \wedge \chi_{A \cap B} + g \wedge 0$ eta $A-B$ neurgarria da.

(iv) $\chi_{\bigcup_n A_n} = \lim (\chi_{A_1} \vee \ldots \vee \chi_{A_n})$ eta $\chi_{\bigcap_n A_n} = \lim (\chi_{A_1} \wedge \ldots \wedge \chi_{A_n})$ eta (ii) aplikatuz (iv) lortzen da.

(v) 1 neurgarria bada, X neurgarria da eta multzo baten osagarria ere neurgarria da.

Orduan 1 neurgarria bada, σ-algebra bat dugu; defini dezagun σ-algebra horretan

$\mu(E) = I(\chi_E)$ E integragarria bada

$\mu(E) = +\infty$ bestela

μ neurri bat da.

Frogatuko ez dugun ondoko teoremak eraikibide bien arteko zubia egiten du:

3.40. Teorema (Stone)

Biz $\mathcal{L}$ X-en definitutako funtzioen espazio bektorial sarez-tatu bat, $f \in \mathcal{L} \Longrightarrow 1 \wedge f \in \mathcal{L}$ propietatea betetzen duena, eta I $\mathcal{L}$-n definitutako integral bat. Orduan existitzen da X-en azpi-multzoen σ-algebra bat $\mathcal{A}$ eta μ neurria $\mathcal{A}$-n non f X-en definitu tako funtzioa integragarria baita I-rekiko baldin eta soilik baldin μ-integragarria bada. Gainera $I(f) = \int f \, d\mu$.

μ neurriarentzat 0 neurriko multzoak defini ditzakegu. Orduan, gorago egin dugun bezala, "ia nonnahi" kontzeptua sar dezakegu eta hau egin ondoren aurreko erresultatuak ohizko moduan alda daitezke.

§3.6.- ZENBAIT OHAR ETA OSAGARRI

1. NEURRIZKO KONBERGENTZIA

3.41. Definizioa

$\{f_n\}$ funtzio neurgarrien segida batek f-rantz neurriz konber gitzen duela esango dugu, $\forall \varepsilon > 0 \quad \lim_{n \to \infty} \mu(\{x / |f_n(x)-f(x)| > \varepsilon\}) = 0$ bada.

Segida bat i.n. konbergentea bada, neurriz ere. Alderantziz koa ez da egia, baina bai segida bat neurriz konbergentea bada, azpisegida i.n. konbergente bat duela.

Neurriaren teoria asko erabiltzen da Probabilitateen teoria modernoan eta han, eman berri dugun definizioa oso interesgarria da, konbergentzia estokastikoa (edo probabilitatezkoa) deitzen da.

Espazio neurridun oso bat $(X, \mathcal{M}, \mu)$, $\mu(X) = 1$ baldintzarekin, espazio probabilizatua deitzen da. Probabilitateetan agertzen diren kontzepturik gehienak berdinak dira, izenak aldatuz:

espazio neurgarria	= espazio probabilizagarria
multzo neurgarria	= gertaera
multzo hutsa	= gertaera ezinezkoa
espazio guztia	= gertaera segurua
multzo baten neurria	= gertaera baten probabilitatea
0 neurriko multzoa	= 0 probabilitateko gertaera
1 neurriko multzoa	= gertaera ia segurua
integrala	= itxaropena
funtzio neurgarria	= aldagai aleatorioa
konbergentzia i.n.	= konbergentzia ia segurua
neurrizko konbergentzia	= probabilitatezko konbergentzia

Teoria honetan kontzeptu berri bat agertzen da: bi gertaera A eta B estatistikoki independenteak dira $\mu(A \cap B) = \mu(A) \cdot \mu(B)$ bada.

2. BATEZBESTEKOZKO KONBERGENTZIA

3.42. Definizioa

Biz $(X, \mathcal{M}, \mu)$ espazio neurridun bat; $\{f_n\}$ segida bat

f-rantz batezbestekozko konbergentea da, $\lim_{n\to\infty} \int_X |f_n - f|\, d\mu = 0$ bada. Bateztesbeko Cauchyarra da, $\lim_{m,n\to\infty} \int_X |f_n - f_m|\, d\mu = 0$ bada.

Kontzeptu hauek hurrengo kapituluan norma bati lotuak joango diren arren, oraingoz definizio horiekin nahikoa dugu.

Halmos-ek [4] honela definitzen du funtzio integragarria:

f integragarria da existitzen bada $\{f_n\}$ funtzio sinple integragarrien segida batezbestekozko Cauchyar bat f-rantz neurriz konbergitzen duena. Orduan $\int_X f = \lim_{n\to\infty} \int_X f_n$.

3. EGOROV ETA LUSIN-EN TEOREMAK

Lehen kapituluan $\mathbb{R}^n$-ko Lebesgue-ren neurria erabiliz bi teorema hauek eman ditugu (1.32 eta 1.35 proposizioak). Egorov-en teorema edozein neurrientzat balio du han dagoen bezala baina Lusin-enak propietate batzuk eskatzen dizkio neurriari.

3.43. Proposizioa (Lusin-en teorema)

Bira X espazio Hausdorff lokalki trinkoa eta μ X-n definitutako neurri boreldar positibo erregular bat. Demagun, f funtzio konplexu neurgarria dela X-n, $\mu(A) < +\infty$ eta $f(x) = 0\ \forall x \notin A$. Orduan, existitzen da g jarraia eta nulua multzo trinko baten osagarrian zeinentzat $\mu(\{x \,/\, f(x) \neq g(x)\}) < \varepsilon$ baita.
Gainera, $\sup_{x\in X} |g(x)| \leq \sup_{x\in X} |f(x)|$ izatea lor daiteke.

Frogapenerako ikus Rudin [11] edo Lang [7] .

Biz $\mathcal{M}$ σ-algebra bat, multzo boreldarrak partetzat duena. $\mathcal{M}$-n definitutako μ neurri positibo bat <u>erregularra</u> da, $\mu(K) < +\infty$ bada $\forall K$ trinkoa eta $\forall A \in \mathcal{M}$

$$\mu(A) = \inf \{ \mu(V),\ V \text{ irekia } \supset A\}$$

$$\mu(A) = \sup \{ \mu(K),\ K \text{ trinkoa } \subset A\}$$

betetzen badira.

Lebesgue-ren neurria $\mathbb{R}^n$-n erregularra da. "Neurri bat erregularra ez deneko kasu bat patologikotzat jo daiteke" (Lang, "Real Analysis", 328 or.).

4. Daniell-en integrala egiterakoan integragarritasunerako eman dugun baldintzak ba du antzeko erresultatu bat neurri batetik eraikitako teorian. Erresultatu hau Vitali-Caratheodory-ren teorema da. Hona hemen zer dioen(ikus Rudin [11] , 57 or.):

<u>3.44. Proposizioa</u> (Vitali-Caratheodory)

Suposa dezagun f funtzio erreala integragarria dela μ neurriarekiko X-n eta biz $\varepsilon > 0$. Orduan existitzen dira u,v funtzioak X-n, u goi-erdijarraia eta goitik bornatua eta v behe-erdijarraia eta behetik bornatua, $u \leq f \leq v$ eta $\int_X (v-u)\, d\mu < \varepsilon$ betetzen dutenak.

Gogora dezagun X espazio topologiko bat bada eta $f: X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$, f behe-erdijarraia dela $\{x \,/\, f(x) > \alpha\}$ irekia bada $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ eta goi-erdijarraia $\{x \,/\, f(x) < \alpha\}$ irekia bada $\forall \alpha \in \mathbb{R}$.

5. Lehen kapituluan $\mathbb{R}^n$-n neurri konkretu bat eraiki dugu, Lebesgue-ren neurria delakoa. Kapitulu honetan eman dugun definizioaz ba

liatuz beste neurri batzuk ere eman daitezke. Baina zenbait propie tate eskatuz, definitutakoa bakarra da. Zehazkiago esateko:

Biz μ $\mathbb{R}^n$-n definitutako neurri boreldar bat, translazioz aldaezina eta $\mu(K) < +\infty \quad \forall K$ trinkoa delarik; orduan existitzen da $\alpha \in \mathbb{R}^+$ non $\mu(E) = \alpha\, mE$ baita $\mathbb{R}^n$-ko multzo boreldar guztien tzat (m Lebesgue-ren neurria da).

$\mathbb{R}^n$-ko unitate kuboa harturik I, $mI = 1$ denez, $\alpha = \mu(I)$ dugu. Frogapenerako ikus Rudin [11], 53 or.

4. GAIA

L^p ESPAZIOAK

4.1 Definizioa eta lehen propietateak

4.2 L^p-etako zenbait azpimultzo dentso

4.3 L^p-n definituriko funtzional lineal bornatuak

4. L^p ESPAZIOAK

§4.1.- DEFINIZIOA ETA LEHEN PROPIETATEAK

Demagun (E,μ) espazio neurriduna daukagula; μ-rekiko neurgarriak diren funtzio guztien artean, guk aurretik finkaturiko propietateak aztertzea, interesgarri gerta daiteke zenbait kasutan.

Aurreko kapituluan baliokidetasun-erlazio bat definitu dugu funtzio neurgarrientzat (ikus 3.10 definizioaren ondoan):

$$f \sim g \iff \mu(\{x \,/\, f(x) \neq g(x)\}) = 0$$

Erlazio honentzako baliokidetasun-klaseak egin ditzakegu zatidura-multzoa lortzeko. Klase bakoitzeko funtzioak μ i.n. berdinak direnez, μ-rekiko integralarentzat ere baliokideak dira.

Kapitulu honetan "funtzio" hitza erabiltzen dugun bakoitzean suposatu behar dugu ez dugula funtzio konkretu bat hartzen, baliokidetasun-klase bat baizik. Bestalde, ohitura da "klase" hitza erabili beharrean, "funtzioa" esatea.

4.1. Definizioa

Bira p zenbaki erreal positibo bat, eta $f: E \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ funtzio neurgarria, (E,μ) espazio neurridunean.

Honelatan, f $L^p(E;\mu)$-n dagoela esaten da, baldin eta soilik baldin $|f|^p$ funtzio integragarria bada, hots, $\int_E |f|^p \, d\mu < +\infty$ daukagunean.

Notazioa.- Espazio neurriduna, (E,μ), zein den argi dagoenean, L^p idatziko da soilik.

Oharra

Funtzio konplexuak erabiliko ditugu beti kapitulu honetan zehar eta lortuko dugun espazio bektoriala $\mathbb{C}$-n izango da. Berdin egin genezakeen funtzio errealak hartuz, eta orduan, espazio bektorial erreala lortuko genuke.

Azter ditzagun, orain, L^p espazioak. Kontsidera dezagun, horretarako, L^p-ko ondoko aplikazioa:

$$(1) \qquad f \longrightarrow \|f\|_p = \left(\int_E |f|^p \, d\mu \right)^{1/p} \qquad p < +\infty$$

Bestalde, edozein funtzio f neurgarritarako, defini dezagun

$$(2) \qquad \|f\|_\infty = \sup \operatorname{ess} \; f = \inf \{M \,/\, \mu(\{x/\, f(x) > M\}) = 0\}$$

Orduan, $\|f\|_\infty < +\infty$ betetzen duten funtzioen multzoari, $L^\infty(E;\mu)$ izena ematen zaio.

4.2. Oharra

Definiziotik erraz atera daitekeenez, zera esan dezakegu $\|f\|_\infty$ zenbakiaz, $|f(x)| \leq \|f\|_\infty$ i.n. dugula, alegia, zeren $\forall n \in \mathbb{N}$ $\mu(\{x \,/\, |f(x)| > \|f\|_\infty + \frac{1}{n}\}) = 0$ baita eta

$$\{x \,/\, |f(x)| > \|f\|_\infty\} = \bigcup_n \{x \,/\, |f(x)| > \|f\|_\infty + \tfrac{1}{n}\}$$

$\|f\|_\infty$ f-ren supremo esentziala deitzen da, eta hortik erabilitako notazioa.

4.3. Proposizioa

$p \in [1,+\infty)$, $(L^p(E), \|\cdot\|_p)$ espazio normaduna da.

Frogapena

Ikus dezagun, lehenik, L^p espazio bektoriala dela, eta segi tuan, $\|\cdot\|_p$, L^p-n definituriko norma bat dela.

(i) Bira $f,g \in L^p$ eta $\alpha,\beta \in \mathbb{K}$

$|\alpha f + \beta g|^p \leq 2^p \max (|\alpha f|^p, |\beta g|^p) \leq K(|f|^p + |g|^p)$,

$K = 2^p \max (|\alpha|^p, |\beta|^p)$, dugunez gero, $\alpha f + \beta g \in L^p$, zeren

$$\int_E |\alpha f + \beta g|^p \, d\mu \leq K\left(\int_E |f|^p \, d\mu + \int_E |g|^p \, d\mu \right) < +\infty$$

baita.

(ii) Biz orain $f \in L^p(E)$, non $\|f\|_p = 0$ baita. Orduan,

$\int_E |f|^p \, d\mu = 0$ da, eta $|f|^p \geq 0$ denez gero, $f = 0$ i.n. eduki behar dugu, 3.25 proposizioaz.

Kontutan har klaseak erabiltzen direla (ikus kapitulu honen hasieran esana) eta $f = 0$ i.n. izateak, 0 klasea dela esan nahi duela. Klaseen ordez funtzioak balira, ez genuke, hala-beharrez, funtzio nulua lortuko.

(iii) Bira, berriz, $f,g \in L^p$.

$p = 1$ denean,

$$\|f+g\|_1 = \int_E |f+g| \, d\mu \leq \int_E (|f|+|g|) d\mu = \int_E |f| d\mu + \int_E |g| \, d\mu =$$

$$= \|f\|_1 + \|g\|_1 .$$

Dakusagun, segituan, $p > 1$ denean ere, desberdintza triangeluarra betetzen dela. Froga dezagun, horretarako, Hölder-en desberdintza:

4.4. Lema

$\forall\ 1 \leq p \leq +\infty$, q-k $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ betetzen badu,

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \ \|g\|_q\ ,\quad \forall\ f \in L^p,\quad \forall\ g \in L^q.$$

Oharra.- q p-ren berretzaile konjokatua deitzen da, eta askotan,

$q = p^* = p'$ idazten

Frogapena

$p = +\infty$ denean, $q = 1$ da, eta orduan, (2) erabiliz,

$$\int_E |fg|\ d\mu \leq \int_E \|f\|_\infty\ |g|\ d\mu \leq \|f\|_\infty\ \|g\|_1$$

Berdin $p = 1$ denean, $q = +\infty$ baita.

$1 < p < +\infty$ kasuetan, aldiz, $h(x) = x^p$ funtzioak aztertuz, zera ikus daiteke, h ganbila dela $x \geq 0$ eskualdean, zeren han $h''(x) = p(p-1)\ x^{p-2} \geq 0$ baita. Beraz, $\forall\ x \in \mathbb{R}^+$, $x^p \geq m(x)$, non $y = m(x)$ $x_o = 1$ puntuango $x^p = y$ kurbarekiko zuzen ukitzailea den; gainera, $m(x) = px - p + 1$ daukagu.

Orduan, $\forall\ x \geq 0$, $x^p \geq px + 1 - p$. Hortaz, $\forall\ a,b \in \mathbb{R}^+$ $(\frac{a}{b})^p \geq p\frac{a}{b} + 1 - p$; hots, $a^p \geq pa\ b^{p-1} + (1-p)b^p$; nondik,

$$ab^{p-1} \leq \frac{1}{p}\ a^p + (1 - \frac{1}{p})\ b^p$$

$b^{p-1} = r$ izen-aldaketa egiten badugu, $ar \leq \frac{1}{p}\ a^p + \frac{1}{q}\ r^q$ edukiko dugu. Honela, $\int_E |fg|\ d\mu \leq \frac{1}{p} \int_E |f|^p\ d\mu + \frac{1}{q} \int_E |g|^q\ d\mu$ idatz daiteke, $\forall\ f \in L^p$, $\forall\ g \in L^q$.

Orain berriz, $f \in L^p$ eta $g \in L^q$ badira, $\frac{f}{\|f\|_p} \in L^p$ eta

$\frac{g}{\|g\|_q} \in L^q$; aurreko desberdintza aplikatuz,

$$\int_E \frac{|f|}{\|f\|_p} \frac{|g|}{\|g\|_q} d\mu \leq \frac{1}{p} \int_E \frac{|f|^p}{\|f\|_p^p} d\mu + \frac{1}{q} \int_E \frac{|g|^q}{\|g\|_q^q} d\mu = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

Eta beraz, $\int_E |fg| \, d\mu \leq \|f\|_p \, \|g\|_q$.

Bihur gaitezen, orain, desberdintza triangeluarraren frogapenera; kasu konkretu honetan, desberdintza honi Minkowski-ren desberdintza deitu ohi zaio:

Bira $f,g \in L^p$, $1 < p < +\infty$ delarik. Dakigunez, $f+g \in L^p$; beraz, $|f+g|^{p-1} \in L^{p/p-1} = L^q$. Honelatan, Hölder-en desberdintzak ondokoa diosku:

$$\|f+g\|_p^p = \int_E |f+g|^p \, d\mu = \int_E |f+g| \, |f+g|^{p-1} \, d\mu \leq$$

$$\leq \int_E |f| \, |f+g|^{p-1} \, d\mu + \int_E |g| \, |f+g|^{p-1} \, d\mu \leq$$

$$\leq \|f\|_p \, \|f+g\|_p^{p-1} + \|g\|_p \, \|f+g\|_p^{p-1} =$$

$$= (\|f\|_p + \|g\|_p) \, \|f+g\|_p^{p-1}$$

Beraz, halabeharrez, $\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$.

(iv) Har ditzagun, amaitzeko, $f \in L^p$ eta $\lambda \in \mathbb{C}$

$$\|\lambda f\|_p = \left(\int_E |\lambda f|^p \, d\mu \right)^{1/p} = \left(\int_E |\lambda|^p \, |f|^p \, d\mu \right)^{1/p} =$$

$$= |\lambda| \, \|f\|_p .$$

4.5. Proposizioa

$(L^\infty(E), \|\cdot\|_\infty)$ espazio normaduna da.

Frogapena

(i) Bira, hasteko, $f,g \in L^\infty$ eta $\alpha,\beta \in \mathbb{C}$ $f,g \in L^\infty$ izateak zera inplikatzen du, existitzen direla neurri nuluko bi multzo, M eta N alegia, non $\forall x \notin M$, $|f(x)| \leq \|f\|_\infty < +\infty$, eta $\forall x \notin N$, $|g(x)| \leq \|g\|_\infty < +\infty$. Orduan, $\mu(M \cup N) = 0$, eta $\forall x \notin M \cup N$, $|\alpha f + \beta g| \leq |\alpha| \|f\|_\infty + |\beta| \|g\|_\infty < +\infty$. Beraz, L^∞ espazio bektoriala da.

(ii) $f \in L^\infty$ funtziorako, berriz, $\|f\|_\infty = 0$ bada, $0 \leq |f(x)| \leq 0$ i.n. izango da; hots, $f = 0$ i.n.

(iii) $\forall \lambda \in \mathbb{C}$, $\forall f \in L^\infty$, $|\lambda f(x)| \leq |\lambda| \|f\|_\infty$ i.n.; beraz, $\|\lambda f\|_\infty \leq |\lambda| \|f\|_\infty$ daukagu. Beste aldetik, $\|\lambda f\|_\infty < |\lambda| \|f\|_\infty$ desberdintza hertsiak zera adierazi ko luke: $\exists L \in (\|\lambda f\|_\infty, |\lambda| \|f\|_\infty)$, non $\mu(\{x / |\lambda| |f(x)| > L\}) = 0$ balitzateke.

Baina, orduan, $\mu(\{x / |f(x)| > \frac{L}{|\lambda|}\}) = 0$ izango litzateke, h.d., $\|f\|_\infty \leq \frac{L}{|\lambda|} < \|f\|_\infty$, eta hau kontraesankorra da.

(iv) Amaitzeko, $\forall f,g \in L^\infty$, existitzen dira $M,N \subset E$, non $\mu(M) = \mu(N) = 0$, eta $\forall x \notin M$, $|f(x)| \leq \|f\|_\infty$, $\forall x \notin N$, $|g(x)| \leq \|g\|_\infty$.

Orduan, $\forall x \notin (M \cup N)$, $|f(x) + g(x)| \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$,

eta halabeharrez, $\|f+g\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$.

$p \geq 1$ denean, ba dakigu, beraz, L^p espazioa normaduna dela. Orduan zera galde dezakegu orain, ea osoa den ere, h.d., ea Banach-en espazioa den.

Hurrengo teoremak baiezko erantzuna ematen dio galdera honi.

4.6. Teorema

$1 \leq p \leq +\infty$ zenbaki guztientzat, $L^p(E,\mu)$ espazioak Banach-enak dira.

Frogapena

Azter ditzagun $p = +\infty$ eta $p < +\infty$ kasuak banan-banan.

(i) $p = +\infty$

Biz $\{f_n\}$ L^∞-ko segida Cauchyar bat. Orduan, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}$, non $\forall m,n \geq N_\varepsilon$, $|f_n(x) - f_m(x)| \leq \varepsilon$ baita, $\forall x \notin B_{m,n}$, $\mu(B_{m,n}) = 0$ izanik.

Biz, bestalde, $A_k = \{x \in E \,/\, |f_k(x)| \geq \|f_k\|_\infty\}$.
Dakigunez, $\forall k$, $\mu(A_k) = 0$.

Orduan, $A = (\bigcup_{m,n \in \mathbb{N}} B_{m,n}) \cup (\bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k)$ multzoa kontutan hartzen badugu, $\mu(A) = 0$, eta $\forall x \notin A$, $\forall m,n \geq N_\varepsilon$,

$$|f_m(x) - f_n(x)| \leq \varepsilon .$$

Beraz, $\{f_n\}$ segidak funtzio batetara, f-ra alegia, konbergitzen du uniformeki (E-A) multzoan.

Gainera, f bornatua da han, zeren $\forall x \in E\text{-}A$,

$|f(x)| \leq \|f_{N_\varepsilon}\|_\infty + \varepsilon < +\infty$ baita.

Orduan, $\forall x \in A$, $f(x) = 0$ definituz gero, $f \in L^\infty$ eta $\|f - f_n\|_\infty \longrightarrow 0$.

(ii) $p < +\infty$

Biz $\{f_n\}$, berriz, L^p-ko segida Cauchyar bat, hots, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ non $\forall m,n \geq N_\varepsilon$, $\|f_m - f_n\|_p \leq \varepsilon$ baita. Beraz, aurki dezakegu azpisegida bat, $\{f_{n_i}\}$, non $\|f_{n_{i+1}} - f_{n_i}\|_p \leq \frac{1}{2^i}$ den, $\forall i \in \mathbb{N}$, $n_{i+1} > n_i$ izanik.

Defini dezagun, orain, $\forall k \in \mathbb{N}$

$$g_k = \sum_{i=1}^{k} |f_{n_{i+1}} - f_{n_i}| \quad , \quad \text{eta} \quad g = \sum_{i=1}^{\infty} |f_{n_{i+1}} - f_{n_i}|$$

Minkowski-ren desberdintzak $g_k \in L^p$ eta $\|g_k\|_p < 1$ dela esaten digu. Bestalde, $\forall k$, $g_k \geq 0$ eta ia $\forall x \in E$, $g_k(x) \rightarrow g(x)$.

Gainera, $\|g\|_p \leq \sum_{i=1}^{\infty} \|f_{n_{i+1}} - f_{n_i}\|_p = 1$, h.d., $g \in L^p$.

Orduan, 2.13 proposizioaz, $g < +\infty$ i.n., eta $\{g_k\}$-k g-ra uniformeki konbergitzen du, i.n..

Honelatan, $\{f_{n_1} + \sum_{i=1}^{k} (f_{n_{i+1}} - f_{n_i})\}$ segidak i.n. konbergitzen du $f = (g+f_{n_1})$-rantz.

Baina $\forall k$, $f_{n_1} + \sum_{i=1}^{k} (f_{n_{i+1}} - f_{n_i}) = f_{n_{k+1}}$; hortaz, $\{f_{n_i}\}$-k f-ra i.n. konbergitzen du.

Dakusagun f, puntuz-puntuko limitea izateaz aparte, L^p-n ere $\{f_{n_i}\}$-ren limitea dela.

Ba genekien jadanik, $\|f_m - f_n\|_p \leq \varepsilon$ zela, $\forall m,n \geq N_\varepsilon$. Biz orain $m \geq N_\varepsilon$; orduan, Fatou-ren lema (ikus 3.20 proposizioa) aplikatuz,

$$0 \leq \int_E |f-f_m|^p \, d\mu \leq \liminf \int_E |f_{n_i}-f_m|^p \, d\mu \leq \varepsilon^p ;$$

hots, $f-f_m \in L^p$, orduan $f \in L^p$, eta gainera, $\|f-f_m\|_p \longrightarrow 0$.

Aurreko teoremaren ondorio gisa, ondoko erresultatua eman dezakegu:

4.7. Korolarioa

$\{f_n\}$ L^p-ko segida Cauchyarra bada, $p \in [1,+\infty]$ izanik, orduan $\{f_n\}$-k ba dauka puntuz-puntu konbergitzen duen azpisegidarik.

§4.2.- $L^p(E)$-ETAKO ZENBAIT AZPIMULTZO DENTSO

Azter dezagun, atal honetan, hain garrantzitsu den problema hau. Beraren interesa ondokoan datza: eman dezagun $L^p(E)$-ko funtzio etarako propietate bat egiaztatu nahi dugula. Hori zuzenik egitea zaila gerta dakiguke, eta orduan, azpimultzo dentso bat osotzen du-

ten funtzio sinpleago edo eta erregularretarako frogatzea errazago izan daiteke, eta beti ez bada ere, zenbait kasutan hori egitea nahikoa da.

4.8. Teorema

Biz (E,μ) espazio neurriduna, eta S, neurri finituko multzo batetan ez ezik, nulu diren funtzio sinple eta neurgarrien multzoa. Honelatan, S dentsoa da $L^p(E,\mu)$-n, $\forall\ 1 \leq p < +\infty$.

Frogapena

Hasteko, argi dago $S \subset L^p$ daukagula. Har dezagun, orain, L^p-ko funtzio positibo bat, f. 1.34 proposizioa aplikatuz (3. kapituluan esan dugunez, edozein neurritarako balio du), existitzen da $\{\psi_n\} \subset S$ segida gorakor bat zeinentzat $0 \leq \psi_n \leq f$ eta $\lim_{n\to\infty} \psi_n(x) = f(x) \quad \forall\ x \in E$ baita.

Bestalde, $|f - \psi_n|^p \leq f^p$ da, eta bukatzeko, Lebesgue-ren konbergentziarako teorema (ikus 3.28 teorema) aplikatuz, berehala ikusten da $\|f - \psi_n\|_p \longrightarrow 0$ dela, $n \longrightarrow +\infty$ denean.

f, aldiz, edonolakoa bada, $f = u+iv$, $u = u^+ - u^-$ eta $v = v^+ - v^-$, $u^+,u^-,v^+,v^- \geq 0$ izanik. Funtzio guzti hauek hurbilgarriak direnez gero, propietate bera edukiko dugu f-rentzat.

Pasa gaitezen, orain, funtzio erregularretara, jarraietara alegia.

4.9. Teorema

Biz $C_c(E)$ E-n definituriko euskarri trinkoko funtzio jarraien multzoa. Honelatan, $C_c(E)$ dentsoa da $L^p(E;\mu)$-n $\forall\, 1 \leq p < +\infty$.

Frogapena

Lusin-en teoremak (ikus 1.35 eta 3.43 proposizioak) dioskunez, $\forall s \in S$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\exists\, g_n \in C_c(E)$ eta $\exists N \subset E$, $\mu(N) < \frac{1}{n}$ izanik, non $g_n(x) \longrightarrow s(x)$ $\forall x \in E-N$, eta $|g_n| < \|s\|_\infty$.

Beraz, $\|g_n - s\|_p \leq 2\,\|s\|_\infty \left(\frac{1}{n}\right)^{1/p}$, eta honek, $g_n \longrightarrow s$, L^p-n, inplikatzen du.

Honelatan, $\overline{C_c(E)}^{L^p} = \overline{S}^{L^p}$ eta nola aurreko teoremak $\overline{S}^{L^p} = L^p$ dela dioskun, frogapena amaiturik dago.

§4.3.- L^p-N DEFINITURIKO FUNTZIONAL LINEAL BORNATUAK

Biz (E,μ) espazio neurriduna, μ σ-finitua izanik. Eta bira p,q, non $1 \leq p < +\infty$ eta q p-ren berretzaile konjokatua baitira.

Orduan, $g \in L^q$ bada, eta

$$f \in L^p \longmapsto F_g(f) = \int_E fg\, d\mu$$

aplikazioa definitzen badugu, aplikazio hori lineal eta bornatua da, Hölder-en desberdintza aplikatuz, erraz ikus daitekeenez.

Beraz, $\forall g \in L^q$, $F_g \in (L^p)'$ (L^p-ren duala).

Dakusagun, orain, lortu ahal den erresultatua askoz biribilagoa dela, h.d., alderantzizkoa ere gertatzen dela: $(L^p)'$-ren edozein elementutarako, F, existitzen da L^q-ren funtzio bat, g, non $\forall f \in L^p$, $F(f) = \int_E fg\, d\mu$ den.

Hau frogatuta, L^p-ren duala eta L^q identifika daitezke, eta honen bidez ere, $\forall 1 < p < +\infty$ $L^p(E)$ bihurkorra dela frogaturik geratzen da, $(L^p)'' = (L^q)' = L^p$ izango baitugu.

Eman dezagun, ba, teorema hori.

4.10. Teorema

Bira $1 \leq p < +\infty$, $q = \frac{p}{p-1} = p^*$ eta $F \in (L^p)'$. Orduan, existitzen da L^q-n funtzio bakar bat, g, non $\forall f \in L^p$

$$F(f) = \int_E fg\, d\mu \tag{3}$$

baita. Eta areago, (3) egiazkoa denean, ondokoa dugu:

$$\|F\|_{(L^p)'} = \|g\|_q \tag{4}$$

Frogapena

Hasteko, argi dago horrelako g baten unizitatea, zeren bi, g eta g', existituz gero, zera edudiko baikenuke

$$\int_E f(g-g')\, d\mu = 0 \qquad \forall f \in L^p$$

A neurri finituduna bada, $f = \chi_A$ hartuz, $\int_A (g-g')d\mu = 0$ dugu. 3.25 proposizioa aplikatuz g eta g' i.n. berdinak dira neurri finitudun multzoetan.

Baina μ σ-finitua izanda, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\exists E_n \subset E$, non $\mu(E_n) < +\infty$, $E = \bigcup_n E_n$ eta $E_n \cap E_m = \phi$ $\forall m \neq n$. Orduan $g = g'$ i.n. E_n-n denez, $g = g'$ i.n. E-n.

Bestaldetik, (3) badaukagu, argi dago Hölder-en desberdintzak $\|F\|_{(L^p)'} \leq \|g\|_q$ halabehartzen duela.

Froga dezagun, orain, hor berdintza daukagula, eta g existitzen dela.

$\|F\| = 0$ balitz, $g \equiv 0$ funtzioak (3) eta (4) beteko lituzke. Har dezagun, ba, aurrerantzean $F \in (L^p)'$, $\|F\| > 0$ izanik.

Lehenik, suposa dezagun μ neurri finitua dela, hots, $\mu(E) < +\infty$ daukagula.

Edozein $A \subset E$ multzo neurgarritarako, biz $\lambda(A) = F(\chi_A)$.

A eta B bi multzo neurgarri eta disjuntu badira, $\lambda(A \cup B) = \lambda(A) + \lambda(B)$, F lineala baita, eta beraz, arrazonamendu hau aurrera eramanez, λ batukorra dela ikusten dugu.

Dakusagun, azkenez, λ kontagarriki batukorra dela. Biz $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$, non A_i multzoak neurgarriak eta binaka disjuntuak baitira, eta biz $\forall k$, $B_k = \bigcup_{i=1}^{k} A_i$. Orduan

$$\|\chi_A - \chi_{B_k}\|_{L^p}^p = \int_{\bigcup_{i>k} A_i} d\mu = \sum_{i>k} \mu(A_i) = \mu(A - B_k) \xrightarrow[k \to +\infty]{} 0.$$

Beraz, $\lambda(B_k) \longrightarrow \lambda(A)$, h.d., $\sum_{i=1}^{\infty} \lambda(A_i) = \lim_{k \to \infty} \sum_{i=1}^{k} \lambda(A_i) = \lambda(A)$.

Honetaz gainera, nabaria da $\mu(E) = 0$ daukagunean, $\lambda(E) = 0$ ere egia dela.

Orduan $\lambda << \mu$ dugu eta Radon-Nikodym-en teorema (ikus aurrerago 5.10 teorema) aplikatuz, existitzen da $g \in L^q$, non edozein $A \subset E$ multzo neurgarritarako,

$$F(X_A) = \int_A g \, d\mu = \int_A g \, X_A \, d\mu$$

Eta linealtasunak $F(f) = \int_E fg \, d\mu$ inplikatzen du, edozein funtzio f sinpletarako.

Gainera, L^∞-ren elementuak diren funtzioak funtzio sinpleen segiden limite uniforme gisa lor daitezkeenez gero,

$F(f) = \int_A fg \, d\mu$, $\forall f \in L^\infty(\mu)$, zeren $f_i \longrightarrow f$ uniformeki eta $\mu(E) < +\infty$, $\|f_i - f\|_{L^p} \longrightarrow 0$ halabehartzen baitute.

Frogapen hau amaitzeko kontsidera ditzagun bi kasu desberdin:

(i) $\underline{p = 1}$

Aurrekoa ikusita, edozein $A \subset E$ neurgarritarako,

$$\left| \int_A g \, d\mu \right| \leq \|F\| \int_A d\mu = \|F\| \, \mu(A)$$

Honelatan, 3.26 proposizioak $|g(x)| \leq \|F\|$ i.n. dela esaten digu, h.d., $\|g\|_\infty \leq \|F\|$ daukagula.

(ii) $\underline{1 < p < +\infty}$

3.4 proposizioaren (e) ondorioak dioskunez, existitzen da funtzio neurgarri bat, α, non $\alpha g = |g|$ baita.

Bira $A_n = \{x \,/\, |g(x)| \leq n\}$ eta $f = X_{A_n} |g|^{q-1} \alpha$.

Orduan, $|f|^p = |g|^q$ A_n-n, $f \in L^\infty$ eta beraz,

$$\int_{A_n} |g|^q \, d\mu = \int_E fg \, d\mu = F(f) \leq \|F\| \left(\int_{A_n} |g|^q \right)^{1/p}$$

Ondorioz, zera atera dezakegu:

$$\int_E \chi_{A_n} |g|^q \, d\mu \leq \|F\|^q , \qquad \forall n.$$

Eta desberdintza honetan, konbergentzia monotonoaren teorema (ikus 3.17 teorema) aplikatuz, $\|g\|_q \leq \|F\|$ lortuko dugu.

Beraz, $g \in L^q$, (4) betetzen da, eta (3) ere, L^∞-ko f funtzioetarako.

Baina F eta $\int \cdot g \, d\mu$ L^p-n funtzio jarraiak direnez, eta L^∞ L^p-n dentsoa denez, horrek $(L^p)' = L^q$ ematen digu neurri finituen kasuan.

μ σ-finitua bada, $E = \bigcup_n E_n$, $E_n \cap E_m = \phi$, $\forall m \neq n$ eta $\mu(E_n) < +\infty$ izanik.

Orduan, aurrekoagatik, $\forall n$, $f \longrightarrow F(\chi_{E_n} \cdot f)$ L^p-ko funtzional lineal eta bornatua da, beraren norma $\|F\|$ baino txikiago edo berdin delarik.

1. zatia n guztietarako erabiliz, zera lortzen dugu:

$$\forall n \quad \exists g_n \in L^q(E_n), \text{ non } \quad F(\chi_{E_n} f) = \int_{E_n} f \, g_n \, d\mu \ .$$

Defini dezagun, orain, $\forall n$, $\tilde{g}_n = \begin{cases} g_n, & E_n\text{-n} \\ 0, & E_n^c\text{-n} \end{cases}$ eta biz $g = \sum_n \tilde{g}_n$. Orduan, $\forall k \in \mathbb{N}$, $\forall f \in L^p$,

$$F\left(f \cdot \chi_{\bigcup_{i=1}^k E_i}\right) = \int_{\bigcup_{i=1}^k E_i} f(g_1 + g_2 + \ldots + g_k) \, d\mu \quad \text{dugu, eta}$$

$\mu(\bigcup_{i=1}^{k} E_i) < +\infty$ denez, $\|g_1 + \ldots + g_k\|_q \leq \|F\|$.

Beraz, $\|g\|_q \leq \|F\|$, h.d., $g \in L^q$, eta

$$F(f) = \int_E fg \, d\mu \qquad \forall f \in L^p.$$

5. GAIA

NEURRI KONPLEXUAK ETA ZEINU BITAKOAK

5.1 Neurri konplexuak. Aldaketa totala

5.2 Neurri errealak. Hahn-en deskonposaketa

5.3 Radon-Nikodym-en teorema

5.4 Lebesgue-ren deskonposaketa

5. NEURRI KONPLEXUAK ETA ZEINU BITAKOAK

§5.1.- NEURRI KONPLEXUAK. ALDAKETA TOTALA

Biz $(E, \mathcal{M})$ espazio neurgarria eta $\mu: \mathcal{M} \longrightarrow \mathbb{C}$ aplikazio bat. μ kontagarriki baturakorra bada, neurri konplexua deitzen dela esan dugu 3.7 definizioan.

Honetaz, lehenik interesa gaitzakeen problema hauxe da, ea edozein neurri konplexutarako, μ , aurki daitekeen neurri positibo bat, λ , non $\mathcal{M}$-ren edozein elementutarako, A, $|\mu(A)| \leq \lambda(A)$ bai ta.

Hasteko, nabaria da $\{A_i\} \subset \mathcal{M}$, $A \in \mathcal{M}$ multzoaren partike ta bat bada, h.d.,

$$A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \quad \text{eta} \quad \forall i \neq j \,, \quad A_i \cap A_j = \phi \quad \text{badugu,}$$

$\sum_i |\mu(A_i)| \leq \sum_i \lambda(A_i) = \lambda(A)$ eduki behar dugula, λ hori existi tuz gero.

Beraz, kasu honetan, $\lambda(A) \geq \sup_{\substack{\{A_i\},\ A\text{-ren} \\ \text{partiketa}}} \sum_i |\mu(A_i)|$

Baina, $\forall A \in \mathcal{M}$

$$|\mu|(A) = \sup_{\substack{\{A_i\},\ A\text{-ren} \\ \text{partiketa}}} \sum_i |\mu(A_i)|$$

definitzen badugu, $|\mu|$ funtzioa $\mathcal{M}$-ko neurri positibo bat dela fro ga dezakegu, eta orduan, argi dago horixe dela bilatzen genuen neu rria.

5.1. Teorema

μ neurri konplexu bat izanda, $|\mu|$, hots, μ-ren aldaketa totala deituriko funtzioa neurri positiboa da.

Frogapena

Nabaria da $|\mu| \geq 0$ dela.

Har ditzagun orain $\mathfrak{M}$-ren edozein elementu, A, eta beraren partiketa bat, $\{A_i\}_i$.

Eta biz, $\forall i$, $\{A_{ij}\}_j$ A_i-ren edozein partiketa. Orduan, $\{A_{ij}\}_{i,j}$ A-ren partiketa da, eta beraz,

$$\sum_{i,j} |\mu(A_{ij})| \leq |\mu|(A)$$

Baina $\forall i$, $\sup_{\{A_{ij}\}} \sum_j |\mu(A_{ij})| = |\mu|(A_i)$, beraz

$$\sum_i |\mu(A_i)| \leq |\mu|(A)$$

Biz, bestalde, $\{B_j\}_j$ A-ren partiketa bat. Honelatan, $\{B_j \cap A_i\}_j$ A_i-ren partiketa da, eta beraz,

$$\sum_j |\mu(B_j)| = \sum_j \left| \sum_i \mu(B_j \cap A_i) \right| \leq \sum_j \sum_i |\mu(B_j \cap A_i)| =$$

$$= \sum_i \sum_j |\mu(B_j \cap A_i)| \leq \sum_i |\mu(E_i)|$$

bigarren berdintzan, 3.19 ondorioa erabili dugularik.

Eta lehen atalaren supremoa hartuz, behar genuen desberdintza lortu dugu.

Beraz, neurri konplexu bat, μ , badaukagu, beraren aldaketa totala, $|\mu|$, μ baino "handiago" den neurri positiborik txikiena da.

Honetaz gainera, beste propietate interesgarri bat dauka $|\mu|$-k, bornatua dela alegia, ondoren ikusiko dugun legez.

Demagun, orain, hori frogatzeko behar dugun lema bat.

5.2. Lema

$z_1,\ldots,z_n$ zenbaki konplexuak badira, ba dago $\{1,\ldots,n\}$ multzoaren azpimultzo bat, S, non

$$\left| \sum_{j \in S} z_j \right| \geq \frac{1}{6} \sum_{j=1}^{n} |z_j|$$

Frogapena

Biz $w = \sum_{j=1}^{n} |z_j|$; $\mathbb{R}^2$ planoa $y = \pm x$ zuzenek lau koadranteetan zatitzen dute. Hauetariko batean, Q-n, dauden z_j puntuen moduluen baturak, $\frac{w}{4}$ baino handiago edo berdin izan behar du. Dei dezagun S Q-n dauden z_j puntuen azpiindizeen multzoa.

Suposa dezagun $Q = \{|y| \leq x\}$ dela (beste bat bada antzera egiten dira gauzak).

Orduan, nola $\forall z \in Q$, $\operatorname{Re} z \geq \frac{|z|}{\sqrt{2}}$,

$$\left| \sum_{j \in S} z_j \right| \geq \sum_{j \in S} \operatorname{Re} z_j \geq \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{j \in S} |z_j| \geq \frac{w}{4\sqrt{2}} \geq \frac{w}{6}$$

5.3. Teorema

μ E-ko neurri konplexua bada, $|\mu|(E) < +\infty$ dugu.

Frogapena

Suposa dezagun existitzen dela $A \in \mathcal{M}$, $|\mu|(A) = +\infty$ izanik. Orduan, $\forall t < +\infty$, existitzen da A-ren partiketa bat, $\{A_i\}_i$, non $\sum_i |\mu(A_i)| > t$ baita.

Har dezagun $t = 6(1 + |\mu(A)|)$.

Erabil dezagun, orain, aurreko lema, $z_j = \mu(A_j)$ delarik, eta biz $B = \bigcup_{j \in S} A_j$. Orduan, $B \subset A$,

$$|\mu(B)| > \frac{t}{6} \geq 1 \quad \text{eta}$$

$$|\mu(A-B)| = |\mu(A) - \mu(B)| \geq |\mu(B)| - |\mu(A)| > \frac{t}{6} - |\mu(A)| = 1$$

Orain, nola $|\mu|(A) = |\mu|(B) + |\mu|(A-B)$, zera frogatu dugu, $|\mu|(A) = +\infty$ den kasuan existitzen direla $M,N \in \mathcal{M}$, non $|\mu(M)| \geq 1$, $|\mu|(N) = +\infty$, $M \cup N = A$ eta $M \cap N = \phi$ izanik.

Suposa dezagun, azkenik, $|\mu|(X) = +\infty$ dela. Hortaz, $\exists M_0, N_0 \in \mathcal{M}$, non $|\mu|(N_0) = +\infty$, $|\mu(M_0)| > 1$.

Har dezagun, $\forall n > 0$, M_n, N_n, zeinentzat $|\mu|(N_n) = +\infty$, $|\mu(M_n)| > 1$, $M_n \cap N_n = \phi$, $M_n \cup N_n = N_{n-1}$.

Orduan, $\mu(\bigcup_n M_n) = \sum_n \mu(M_n)$, eta serie hau ez da konbergente, $\mu(M_n) \longrightarrow 0$ ez dugu eta; baina hau kontraesankorra $n \longrightarrow +\infty$ da, $\bigcup_n A_n \in \mathcal{M}$ baita.

§5.2.- NEURRI ERRALAK. HAHN-EN DESKONPOSAKETA

$\mathcal{M}$ σ-algebra, eta $\mu : \mathcal{M} \longrightarrow \mathbf{R}$ definiturik badaude, μ funtzio erreala funtzio konplexutzat hartuta, neurria izango da, definizioz, kontagarriki batukorra bada. Hola bada, beraren aldaketa totala defini dezakegu, lehen bezala; honelatan, μ eta $|\mu|$ abiaburutzat hartuta, bi neurri positibo ondoko moduan defini daitezke

$$\mu^+ = \frac{1}{2}(|\mu| + \mu), \qquad \mu^- = \frac{1}{2}(|\mu| - \mu)$$

μ^+ eta μ^- μ-ren aldaketa positibo eta negatiboa, errespektiboki, deitu ohi ditugu, eta aurretik frogatu ditugun erresultatuen arauera, bornatuak dira.

Bestalde, beraiek erabiliz, $\mu = \mu^+ - \mu^-$ eta $|\mu| = \mu^+ + \mu^-$ idatz daiteke; μ neurri erreala beraren aldaketa positibo eta negatiboaren arteko kendura gisako adierazpenari Jordan-en deskonposaketa deitu ohi zaio.

HAHN-EN DESKONPOSAKETA

5.4. Lema

A multzoa neurgarria bada, $0 < \mu(A) < +\infty$ izanik, existitzen da A-ren azpimultzo bat, B, non $\mu(B) > 0$ baita.

Frogapena

Suposa dezagun existitzen direla A-n neurri negatiboko azpimultzoak. Honelatan, biz n_1 zenbaki osorik txikiena zeinarentzat baitago A-n azpimultzo neurgarri bat, A_1, $\mu(A_1) < -\frac{1}{n_1}$ betetzen duena.

Honela jarraiturik, biz n_k zenbaki osorik txikiena zeinarentzat baitago $(A - \bigcup_{j=1}^{k-1} A_j)$-ren azpimultzo neurgarri bat, A_k, $\mu A_k < -\frac{1}{n_k}$ izanik.

$B = A - \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \subset A$ idazten badugu, $A = B \cup (\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i)$ da, eta bildura disjuntua da; orduan, $\mu(A) = \mu(B) + \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$, eta azken serie hau absolutuki konbergentea da, $\mu(A) < +\infty$ baita.

Beraz, $\sum_k \frac{1}{n_k}$ seriea ere konbergentea da, nondik $n_k \longrightarrow +\infty$ ateratzen baita.

Beste alde batetik, $\mu(A_k) \leq 0$ da $\forall k$, eta $\mu(A) > 0$, beraz, $\mu(B) > 0$ inplikatzen du.

Froga dezagun hori baino gehiago daukagula, h.d., A-ren azpimultzo guztiak neurri positibokoak direla, beste modu batetan, A positiboa dela esaten dena.

Bira $\varepsilon > 0$ eta k nahiko handia $\frac{1}{n_k - 1} < \varepsilon$ edukitzeko. $B \subset A - \bigcup_{i=1}^{k} A_i$ denez gero, B-k ezin du bere barruan $(-\frac{1}{n_k - 1})$ baino neurri txikiagoko multzorik euki.

Baina $-\varepsilon < -\frac{1}{n_k - 1}$ da; beraz, B-k ez dauka partetzat $-\varepsilon$ baino neurri txikiago daukan multzo neurgarririk. ε nahi den bezain txikia izan daitekeenez gero, B-k ez dauka neurri negatiboko azpimultzorik, eta $\mu(B) > 0$ da.

5.5. Teorema

Biz μ $(E,\mathcal{M})$ espazio neurgarrian definituriko neurri erreal bat. Orduan, aurki daitezke E-n bi azpimultzo, A eta B, non: $A \cup B = E$; $A \cap B = \phi$; A-ren azpimultzo guztiak neurri positibokoak dira, eta B-renak, aldiz, negatibokoak.

{A,B} E-rako Hahn-en deskonposaketa dela esan ohi da.

Frogapena

Biz K multzo positibo guztien neurrien maximoa. ϕ multzoaren neurria 0 denez gero, $K \geq 0$ da.

Froga dezagun $K < +\infty$ dela.

Biz $\{A_i\} \subset \mathcal{M}$, $K = \lim_{i \to \infty} \mu(A_i)$ izanik. Orduan $A = \bigcup_i A_i$ multzoarentzat, $\mu(A) \geq 0$ daukagu, eta orduan $\mu(A) = K$ izan behar du, eta beraz, $K < +\infty$.

Dei dezagun $B = E-A$ multzoa. Orduan, $A \cup B = E$, $A \cap B = \phi$ eta A-ren azpimultzo guztien neurria positiboa da. Froga dezagun, bukatzeko, B multzoa negatiboa dela. Honetarako har dezagun $X \subset B$, X positiboa izanik.

Orduan $X \cup A$ ere positiboa da, eta K-ren definizioarengatik, $K \geq \mu(X) + \mu(A) = \mu(X) + K$, zeren $X \cap A = \phi$ baita; beraz, $\mu(X) = 0$ da, $K < +\infty$ da eta. Eta 5.4 lema erabiliz, B multzo negatiboa da, h.d., beraren azpimultzo guztiek neurri negatiboa dute.

§5.3.- RADON-NIKODYM-EN TEOREMA

Teorema honek zer dioen esan baino lehen, goazen lehenago bi neurrien artean egon daitezkeen zenbait harreman aztertzera.

5.6. Definizioa

Bira μ eta ν $(E, \mathcal{M})$ espazio neurgarrian definituriko bi neurri positibo; neurri bi horiek elkarrekiko singularrak deituko ditugu, eta $\mu \perp \nu$ idatziko, existitzen badira bi multzo A, B, non $E = A \cup B$ eta $\nu A = \mu B = 0$ baititugu.

Argi dagoenez, erlazio hau simetrikoa da. Dakusagun orain simetriko ez den beste bat.

5.7. Definizioa

ν μ-rekiko erabat jarraia dela esango dugu $\nu A = 0$ bada, $\mu A = 0$ den $A \in \mathcal{M}$ multzo guztietarako. Erlazio hau $\nu << \mu$ zeinuaz adieraziko dugu.

5.8. Oharra

μ eta ν neurri errealak badira, $\mu << \nu$ idatziko dugu $|\mu| << |\nu|$ denean, eta modu berean, $\mu \perp \nu$, $|\mu| \perp |\nu|$ den kasuan.

5.9. Oharra

μ , neurria, eta f, funtzio neurgarria badira, $\nu E = \int_E f \, d\mu$ idatziz, neurri berri bat definitzen ari gara, zeren ezaguna baita (ikus 3.21 proposizioa), A multzo neurgarriaren edozein partiketa

rako, $\{A_n\}$, $\int_{\bigcup_n A_n} f\,d\mu = \sum_n \int_{A_n} f\,d\mu$ dela.

Beste aldetik, $\nu << \mu$ daukagu, $\mu A = 0$ berdintzak $\int_A f\,d\mu = \nu A = 0$ halabehartzen du eta.

Nolabait, Radon-Nikodym-en teoremak alderantzizko erresultatua ematen digu, hots, berak dioena zera da: μ σ-finitua izanik, berarekiko erabat jarraiak diren neurri guztiak, honela lor daitezkeela.

5.10. Teorema (Radon-Nikodym)

Biz $(E, \mathcal{M}, \mu)$ espazio neurgarria, μ σ-finitua izanik; eta biz ν $\mathcal{M}$-n definituriko beste neurri bat, ν , μ-rekiko erabat jarraia delarik. Orduan, existitzen da funtzio neurgarri ez-negatibo bat, f, non $\forall E \in \mathcal{M}$,

$$\nu E = \int_E f\,d\mu \quad \text{baita.}$$

Honetaz gainera, f bakarra da; hau da, propietate hori betetzen duen beste funtzio bat, g, aurkitu ahal badugu, $g = f$ i.n. (μ).

Teorema hau frogatu baino lehen lema bat emango dugu frogapenean erabiltzeko:

5.11. Lema

Biz D $\mathbb{R}$-ren azpimultzo kontagarri bat eta suposa dezagun $\alpha \in D$ bakoitzari B_α multzo neurgarri bat lotzen diogula, $\mu(B_\alpha - B_\beta) = 0$, $\alpha < \beta$ denean, betetzen duena. Orduan f funtzio

neurgarri bat existitzen da non $f \leq \alpha$ i.n. B_α-n eta $f \geq \alpha$ i.n. $X-B_\alpha$-n baitira.

Frogapena

(i) Suposa dezagun $B_\alpha \subset B_\beta$ dela. Defini dezagun ondoko funtzioa: $\forall x \in X \quad f(x) = \inf \{ \alpha / x \in B_\alpha \}$, non $\inf \phi = +\infty$ onartzen baita. Orduan $x \in B_\alpha \implies f(x) \leq \alpha$ eta $x \notin B_\alpha \Rightarrow$ $\Rightarrow x \notin B_\beta \quad \beta < \alpha$, beraz, $f(x) \geq \alpha$. Gainera, $\{x / f(x) < \alpha\} = \bigcup_{\beta<\alpha} B_\beta$ denez, f neurgarria da.

(ii) Suposa dezagun B_α multzoetarako $\mu(B_\alpha - B_\beta) = 0$ $\alpha < \beta$ baldintza bakarrik ipintzen dela. $C = \bigcup_{\alpha<\beta} B_\alpha - B_\beta$ definituz, $\mu(C) = 0$ dugu.

Idatz dezagun $B'_\alpha = B_\alpha \cup C$. Orain $\alpha < \beta$ bada,

$$B'_\alpha - B'_\beta = (B_\alpha - B_\beta) - C = \phi \text{ , h.d., } B'_\alpha \subset B'_\beta$$

(i) zatia aplikatuz f existitzen da, $f \leq \alpha$ B'_α -n eta $f \geq \alpha$ $X-B'_\alpha$ -n betetzen duena. Hots, $f \leq \alpha$ B_α-C-n eta $f \geq \alpha$ $(X-B_\alpha)$-C-n f.n.g.

Radon-Nikodym-en teoremaren frogapena

Dagigun frogapen hau bi zatitan; lehena, μ finitua den kasuan, eta azkenik, σ-finitua denean.

i) μ finitua

$\forall \alpha \in Q$ nabaria da $(\nu - \alpha\mu)$ neurri erreal bat dela. Biz (A_α, B_α) $(\nu-\alpha\mu)$-rako Hahn-en deskonposaketa bat, eta har ditzagun

$A_0 = E$, $B_0 = \phi$.

Honelatan, $B_\alpha - B_\beta = B_\alpha \cap A_\beta$, eta beraz, definizioz, $(\nu-\alpha\mu)(B_\alpha-B_\beta) \leq 0$, eta $(\nu-\beta\mu)(B_\alpha-B_\beta) \geq 0$.

Argi dago, orduan, $\beta > \alpha$ denean, $\mu(B_\alpha - B_\beta) = 0$ dela, eta 5.11 lema aplikatuz, $\forall \alpha \in \mathbb{Q}$, existitzen da funtzio neurgarri bat, f , non $f \geq \alpha$ i.n. A_α-n, eta $f \leq \alpha$ i.n. B_α-n baita.

Bestalde, $B_0 = \phi$ hartu dugunez gero, $f \geq 0$ har dezakegu. Biz orain $\mathfrak{M}$-ko edozein elementu, A, eta defini dezagun $\forall k$, $N \in \mathbb{N}$, $A_{k,N} = A \cap (B_{\frac{k+1}{N}} - B_{\frac{k}{N}})$, $A_{\infty,N} = A - \bigcup_{k=0}^{\infty} A_{\frac{k}{N}}$.

Honetaz, $A_{k,N} \cap A_{k',N} = \phi \quad \forall k \neq k'$ denez gero, $A = A_{\infty,N} \cup \bigcup_{k=0}^{\infty} A_{k,N}$ A-ren partiketa bat da $\forall N \in \mathbb{N}$, eta

$$\nu A = \nu A_{\infty,N} + \sum_k \nu A_{k,N}.$$

Baina beste alde batetik, $A_{k,N} \subset A_{\frac{k+1}{N}} \cap A_{\frac{k}{N}}$, eta halabeharrez, i.n. $E_{k,N}$-n, $\frac{k}{N} \leq f \leq \frac{k+1}{N}$; ondorioz,

$$\frac{k}{N}\ \mu(E_{k,N}) \leq \int_{E_{k,N}} f\, d\mu \leq \frac{k+1}{N}\ \mu(E_{k,N}).$$

Bestalde, $(\nu - \frac{k+1}{N}\mu) \leq 0 \quad B_{\frac{k+1}{N}}$ - n , eta

$(\nu - \frac{k}{N}\mu) \geq 0 \quad A_{\frac{k}{N}}$ -n, h.d., $\frac{k}{N}\mu E_{k,N} \leq \nu E_{k,N} \leq \frac{k+1}{N}\ \mu E_{k,N}$; dauzkagun desberdintza guztiak kontutan hartuz, zera lor dezakegu orduan:

$$\nu E_{k,N} - \frac{1}{N}\mu E_{k,N} \leq \frac{k}{N}\mu E_{k,N} \leq \int_{E_{k,N}} f\,d\mu \leq \frac{k+1}{N}\mu E_k \leq$$

$$\leq \nu E_k + \frac{1}{N}\mu E_k \text{ , eta gainera, } E_{\infty,N}\text{-n, } f = +\infty \text{ i.n.}$$

Begira dezagun, orain, ea zer gertatzen den $E_{\infty,N}$-rekin. $\mu E_{\infty,N} > 0$ balitz, argi dago $\nu E_{\infty,N} = +\infty$ eduki beharko genukeela, zeren eta $(\nu - \alpha\mu)$ positiboa baita $E_{\infty,N}$-n, $\forall \alpha$. Eta $\mu E_{\infty,N} = 0$ bagenu, argi litzateke ν-ren μ-rekiko erabateko jarraitasuna erabiliz, $\nu E_{\infty,N} = 0$ ere izan beharko lukeela. Edozein kasutan, ba, $\nu E_{\infty,N} = \int_{E_{\infty,N}} f\,d\mu$

Azken berdintza hau, eta aurretik dauzkagun guztiak batuz,

$$\nu E - \frac{1}{N}\mu E \leq \int_E f\,d\mu \leq \nu E + \frac{1}{N}\mu E$$

lortzen dugu, $\forall N$. Beraz, $\nu E = \int_E f\,d\mu \quad \forall E \in \mathcal{M}$, f.n.g.

ii) μ σ-finitua

μ σ-finitua bada, existitzen da E-ren partiketa bat, $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, non $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mu(E_n) < +\infty$ baita.

Orduan, frogapenaren lehen zatia erabiliz, $\forall X \in \mathcal{M}$, $(X \cap E_n)$ neurri finitukoa denez, $\nu(X \cap E_n) = \int_{X\cap E_n} f_n\,d\mu$, $(E_n, \mathcal{M}\cap E_n)$ espazio neurgarritzat hartuz.

Baina $X = X \cap (\bigcup E_n) = \bigcup (X \cap E_n)$ daukagu, bilketa hori disjuntua izanik; beraz $f = f_n$ E_n-n funtzioa definitzen badugu,

$$\nu X = \sum_n \nu(X\cap E_n) = \sum_n \int_{X\cap E_n} f_n\,d\mu = \sum_n \int_{X\cap E_n} f\,d\mu =$$

$$= \int_{\bigcup_n (X\cap E_n)} f\,d\mu = \int_X f\,d\mu$$

Oharra

μ, σ-finitua, eta $\nu << \mu$ betetzen duten bi neurri badauzkagu, Radon-Nikodym-en teoremak ematen digun f funtzioa, μ-rekiko ν-ren Radon-Nikodym-en deribatua deitu ohi da eta $d\nu = f\, d\mu$ idazten.

Teorema honen osagarritzat har daitekeen beste erresultatu bat emango dugu orain.

§5.4.- LEBESGUE-REN DESKONPOSAKETA

5.12. Proposizioa

Bira $(E, \mathcal{M})$ espazio neurgarria, eta $\mathcal{M}$-n definituriko bi neurri σ-finitu, μ eta ν alegia.

Honelatan, aurki daitezke bi neurri, ν_0 eta ν_1, non ν_0 μ-rekiko erabat jarraia, eta ν_1 μ-rekiko singularra izanik, $\nu = \nu_0 + \nu_1$ den. ν_0 eta ν_1 bakarrak dira.

Frogapena

Alde batetatik, μ eta ν μ-finituak izanik, argi dago beraien batura, h.d. $\lambda = \mu + \nu$, ere, σ-finitua dela; bestaldetik, μ eta ν erabat jarraiak dira λ-rekiko. Beraz, Radon-Nikodym-en teoremak zera diosku, existitzen direla bi funtzio ez-negatibo, f eta g, non $\forall X \in \mathcal{M}$, $\mu(X) = \int_X f\, d\lambda$ eta $\nu X = \int_X g\, d\lambda$ dauzkagun.

Bira, orduan, $A = \{ x/f(x) > 0 \}$ eta $B = \{ x/f(x) = 0 \}$.

Agiria da $A \cup B = E$ eta $A \cap B = \phi$ dugula; honetaz gainera, $\nu_0(X) = \nu(X \cap B)$, $\nu_1(X) = \nu(X \cap A)$ neurriak definitzen baditugu, zera aurkitzen dugu:

$$\nu_0(A) = \nu(A \cap B) = \nu(\phi) = 0$$

$$\mu(B) = \int_B f \, d\lambda = 0$$

Beraz, $\nu_0 \perp \mu$. Froga dezagun, orain, $\nu_1 \ll \mu$ dela.

Biz $X \in \mathcal{M}$, non $\mu X = 0$ den. Honelatan, $0 = \mu X = \int_E f \, d\lambda$; honetatik zera ateratzen da, f i.n. nulua dela X multzoan, eta honek adierazten digu $(X \cap A)$ multzoa neurri nulukoa dela. Beraz, $\nu(X \cap A) = 0$ ere, eta $\nu_1 X = \nu(A \cap X) = 0$, f.n.g.

Amaitzeko, eta $\nu = \nu_0 + \nu_1$ dela ikustea nabaria denez, unizitatea aztertzea geratzen zaigu bakarrik. Baina hau erreza da, zeren honelako bi deskonposaketa egin ahal izango bagenitu,

$$\nu_0 + \nu_1 = \nu_0' + \nu_1' , \qquad \nu_0 - \nu_0' = \nu_1' - \nu_1$$

$(\nu_0 - \nu_0') \perp \mu$ eta $(\nu_0 - \nu_0') \ll \mu$ izango liratekeelarik. Baina horrek $\nu_0 - \nu_0' = \nu_1' - \nu_1 = 0$ halabehartzen du.

6. GAIA

BIDERKADURA-ESPAZIO NEURGARRIAK

6.1 Neurgarritasuna biderkadura cartesiarretan

6.2 Biderkadura-neurria

6.3 Fubini-ren teorema

6. BIDERKADURA-ESPAZIO NEURRIDUNAK

§6.1.- NEURGARRITASUNA BIDERKADURA CARTESIARRETAN

Demagun bi espazio neurridun dauzkagula, $(E, \mathcal{M}, \mu)$ eta $(F, \mathcal{J}, \nu)$ alegia. Orain, interesatzen zaiguna zera da: ExF multzoa, h.d., $\{(x,y) / x \in E, y \in F\}$ kontsideratzen badugu, ba al dago modurik ExF multzoa neurri batetaz hornitzeko, μ eta ν neurrietatik abiatuz?

Hasteko, zera egin beharko dugu, $\mathcal{M}$ eta $\mathcal{J}$ σ-algebrak kontutan harturik, ExF multzoan $\mathcal{Z}$ σ-algebra bat definitzen saiatu.

Suposa dezagun $A \in \mathcal{M}$ eta $B \in \mathcal{J}$ ditugula. Orduan, AxB multzoa errektangelu neurgarri deituko dugu.

Orduan, dei dezagun $\mathcal{M} \times \mathcal{J}$, errektangelu neurgarri guztiak barruan dauzkan σ-algebrarik txikiena (ikus §0.4).

Orain, biderkadura-neurria $(ExF, \mathcal{M} \times \mathcal{J})$ espazio neurgarrian definitu baino lehen, ikus ditzagun, lehenik, geroago beharko ditugun $\mathcal{M} \times \mathcal{J}$-ren propietate batzu:

6.1. Definizioa

Multzo-bilduma bat, $\mathcal{M}$, klase monotonoa dela esango dugu, hurrengo propietateak betetzen dituenean:

(i) $\mathcal{M}$-ren elementuen segida gorakorren gaien bildura $\mathcal{M}$-n dago.

(ii) $\mathcal{M}$-ren elementuen segida beherakorren gaien ebakidura ere $\mathcal{M}$-n dago.

H.d., baldin $A_i, B_i \in \mathcal{M}$ badira, $A_i \subset A_{i+1}$, $B_i \supset B_{i+1}$ $\forall i$ izanik, $\bigcup_i A_i$, $\bigcap_i B_i \in \mathcal{M}$.

6.2. Definizioa

Biz $A \subset ExF$, eta bira $x \in E$ eta $y \in F$. Honekin ondoko multzoak defini daitezke:

$$A_x = \{ y \in F \,/\, (x,y) \in A \} \quad ; \quad A^y = \{ x \in E \,/\, (x,y) \in A \}$$

Honelatan, A_x (errespektiboki, A^y), A-ren x-sekzioa (erresp., y-sekzioa) dela esango dugu.

6.3. Proposizioa

A $\mathcal{M}x\mathcal{J}$ σ-algebrako elementua bada, $\forall x \in E$, $\forall y \in F$, $A_x \in \mathcal{J}$ eta $A^y \in \mathcal{M}$.

Frogapena

A errektangelu neurgarri bat izanda, hots, $A = XxY$, $X \in \mathcal{M}$ $Y \in \mathcal{J}$, orduan, $A_x = Y$ x X-koa bada, eta bestela, $A_x = \phi$. Beraz, $A_x \in \mathcal{J}$ $\forall x \in E$. Eta modu berean y-sekzioetarako.

Biz orain Ω, $A_x \in \mathcal{J}$ $\forall x \in E$ betetzen duten $\mathcal{M}x\mathcal{J}$-ren elementu guztien bilduma. Arestian ikusi dugunez errektangelu neurgarriak Ω-n daude. Beraz, $\mathcal{M}x\mathcal{J}$-ren definizioa kontutan harturik, Ω σ-algebra dela ikustea nahikoa dateke, y-sekzioetarako berdin egiten da eta.

(i) $ExF \in \Omega$

Bai, zeren $\forall x \in E$, $(ExF)_x = F$ baita.

(ii) $A \in \Omega$ bada, halabeharrez, $A^c \in \Omega$

Egia da, zeren $(A^c)_x = (A_x)^c$ baita.

(iii) $\{A_i\} \subset \Omega \Longrightarrow \bigcup_i A_i \in \Omega$

Propietate hau ondoko beste honek halabehartzen du:

$$(\bigcup_i A_i)_x = \bigcup_i (A_i)_x$$

6.4. Definizioa

Errektangelu neurgarrien bildura finituak multzo elementalak deituko ditugu.

6.5. Proposizioa

$\mathfrak{M} \times \mathfrak{F}$ multzo elementalak barruan dauzkaten klase monotono guztien arteko txikiena da.

Frogapena

Hasteko, (ExF)-ren edozein azpimultzo-bilduma beraren barruan daukan klase monotonorik txikiena beti existitzen da, zeren $\varphi(ExF)$-k propietate hori betetzen baitu eta orduan, nahikoa da horrela portatzen diren klase monotonoen ebakidura aukeratzea (kontutan har klase monotonoen ebakidurak, klase monotonoak direla ere). Dei dezagun J.

Bestalde, nola edozein σ-algebra klase monotonoa den, argi dago $J \subset \mathfrak{M} \times \mathfrak{F}$ dela.

Frogatzen badugu, orain, J σ-algebra dela, nola $\mathcal{M}x\mathcal{J}$ errektangelu guztiak barruan dauzkan txikiena den, $J = \mathcal{M}x\mathcal{J}$ dela frogatuko dugu, nahi genuen legez.

(a) Hasteko, ExF multzo elementala da, beraz, J-n dago. Bestalde, $(A_1xB_1) \cap (A_2xB_2) = (A_1 \cap A_2) \times (B_1 \cap B_2)$ eta

$$(A_1xB_1) - (A_2xB_2) = [(A_1-A_2)xB_2] \cup [(A_1 \cap A_2)x(B_1-B_2)]$$

berdintzek bi errektagelu neurgarriren ebakidurak eta diferentziak multzo elementalak direla adierazten dute. Honetaz gainera, $A \cup B = (A-B) \cup B$ eta $(A-B) \cap B = \phi$ betetzen dira; beraz, multzo elementalen arteko bildurak, ebakidurak eta diferentziak ere multzo elementalak dira.

Honelatan, $\forall A \subset ExF$, biz

$$\Omega(A) = \{B \subset ExF \ / \ A-B, \ A \cup B, \ B-A \in J\}$$

Nabariak dira, hortaz, ondoko propietateok:

(i) $B \in \Omega(A)$ bsb $A \in \Omega(B)$

(ii) J klase monotonoa izanik, $\Omega(A)$ ere klase monotonoa da.

Biz orain multzo elemental finitu bat, A. Arestian ikusi dugunagatik, multzo elemental guztiak $\Omega(A)$-n daude, eta (ii)-z, $J \subset \Omega(A)$.

Orduan, $B \in J$ aukeratzen badugu, saia gaitezen frogatzen B $\Omega(P)$-n dagoela, non P edozein multzo elementala baita.

Baina, P $\Omega(B)$-n dagoenez, (i)-z, $J \subset \Omega(P)$, $\forall P$ multzo elementala, eta baita, $J \subset \Omega(B)$ daukagu. Orduan, $A,B \in J$ badira,

$A \cup B$, $A-B \in J$ daukagu.

Orduan, J σ-algebra dela frogatzeko, geratzen zaizkigun bi gauzak honela froga daitezke:

(b) Q J-ren elementua bada, $Q^c = (ExF) - Q$, eta beraz, $Q^c \in J$.

(c) Baldin $\{Q_i\}$ J badaukagu, $\forall n$, $P_n = Q_1 \cup \ldots \cup Q_n$ definiturik, $P_n \in J$. J klase monotonoa izanik, $\bigcup_n P_n \in J$, $\{P_n\}$ segida gorakorra baita. Frogapena $\bigcup_n Q_n = \bigcup_n P_n$ dela esaten amaitzen da.

Defini ditzagun orain sekzioak funtzioen kasuan:

6.6. Definizioa

Biz f (ExF)-n definituriko funtzio bat. Orduan $x \in E$ eta $y \in F$ badauzkagu,

$$f_x(y) = f(x,y) \quad \forall y \in F \quad \text{eta} \quad f^y(x) = f(x,y) \quad \forall x \in E.$$

6.7. Teorema

Biz f $(\mathcal{M} \times \mathcal{J})$-neurgarri den funtzio bat. Orduan,

(a) $\forall x \in E$, f_x $\mathcal{J}$-neurgarria da.

(b) $\forall y \in F$, f^y $\mathcal{M}$-neurgarria da.

Frogapena

Argi dagoenez, nahikoa da lehen edo bigarren propietatearen frogapena egitea. Froga dezagun, ba, (a).

Biz I $\mathbb{K}$-ren edozein multzo ireki ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ edo $\mathbb{C}$). Hortaz, $Q = \{(x,y) \in E \times F \;/\; f(x,y) \in I\} \in \mathcal{M} \times \mathcal{S}$ da, baina $Q_x = \{y \in F \;/\; f_x(y) \in I\}$, eta Q_x $\mathcal{S}$-n dago (ikus 6.3 proposizioa). Beraz, f_x $\mathcal{S}$-neurgarria da.

§6.2.- BIDERKADURA-NEURRIAK

Orain arte daukaguna zera da, orduan: $E \times F$ multzoa, eta bera neurgarria bihurtu duen $\mathcal{M} \times \mathcal{S}$ σ-algebra. Orain egin nahi duguna zera da, espazio hori neurriduna bihurtzea, h.d., egokia den neurri bat aurkitzea.

6.8. Teorema

Bira $(E, \mathcal{M}, \mu)$ eta $(F, \mathcal{S}, \nu)$ bi espazio neurri σ-finitu tudun, eta $Q \in \mathcal{M} \times \mathcal{S}$.

Hortaz $\psi_Q(x) = \nu(Q_x)$ eta $\psi_Q(y) = \mu(Q^y)$ funtzioak definituta, ψ, $\mathcal{M}$-neurgarria eta ψ, $\mathcal{S}$-neurgarria dira eta

$$(1) \qquad \int_E \psi_Q \, d\mu = \int_F \psi_Q \, d\nu$$

Frogapena

Biz Ω (1) berdintza betetzen duten $\mathcal{M} \times \mathcal{S}$-ren elementuen bilduma. Honelatan, hurrengo propietateok betetzen dira:

(i) Errektagelu neurgarri guztiak Ω-n daude.

(ii) $Q_1 \subset \ldots \subset Q_n \subset \ldots$, eta $\forall i$, $Q_i \in \Omega$ badira, orduan $Q = \bigcup_i Q_i \in \Omega$.

(iii) $\{Q_i\}$ Ω-ren elementu disjuntuen bilduma kontagarria bada, halabeharrez, $Q = \bigcup_i Q_i$ ere Ω-n dago.

(iv) Baldin $\mu(A)$ eta $\nu(B) < +\infty$ badira, eta $AxB \supset Q_1 \supset Q_2 \supset \ldots$, $Q_i \in \Omega$, $\forall i$ izanik, orduan $Q = \bigcap_i Q_i \in \Omega$.

Lehenengoarekin hasteko, biz $Q = AxB$, $A \in \mathcal{M}$, $B \in \mathcal{S}$ izanik. Orduan, $\nu(Q_x) = \chi_A(x) \cdot \nu(B)$ eta $\mu(Q^y) = \chi_B(y) \cdot \mu(A)$; beraz,

$$\int_E \psi_Q(x)\, d\mu = \mu(A) \cdot \nu(B) = \int_F \psi_Q(y)\, d\nu$$

(ii) frogatzeko, har dezagun kontutan $\psi_Q = \lim_{i \to \infty} \psi_{Q_i}$ eta $\psi_Q = \lim_{i \to \infty} \psi_{Q_i}$ dela, puntu bakoitzeango konbergentzia monotono gorakorra izanik. Orduan, (ii) konbergentzia monotonoaren aplikazio tik ateratzen da.

Bestalde, nola $A \cap B = \phi$ bada, $A_x \cap B_x = \phi$ eta $\chi_{A \cup B} = \chi_A + \chi_B$ diren, Ω-ren elementu disjuntuen bildura finituak Ω-n daude ere. Beraz, (iii) (ii)-tik ateratzen da, (ii) $\{P_N = \bigcup_{i=1}^{N} Q_i\}_N$ segidari aplikatuz.

(iv)-ren frogapena, berriz, (ii)-rena bezalakoa da, baina kasu honetan, konbergentzia monotonoaren teorema aplikatu ordez, konbergentzia gaindituarena erabiliz, zeren $\nu(B)$ eta $\mu(A)$ finituak baitira.

Biz, orain, $\forall m,n \in N$, $Q_{m,n} = Q \cap (E_n x F_m)$, non $E = \bigcup_n E_n$,

$F = \bigcup_m F_m$, $\mu(E_n), \nu(F_m) < +\infty$, $\forall n,m$ direlarik. Argi dago deskonposaketa hori posibleztatzen duena σ-finitutasuna dela.

Honelatan, biz $J = \{Q \in \mathcal{M} \times \mathcal{J} \ / \ Q_{m,n} \in \Omega \quad \forall m,n\}$ Orduan, (ii) eta (iv)-k J klase monotonoa dela erakusten dute; bestalde, (i)-z eta (iii)-z, errektangelu neurgarri binaka disjuntuen bildura finituak J-ko elementuak dira. Baina, nola definizioz, $J \subset \mathcal{M} \times \mathcal{J}$ den, 6.5 proposizioaz, $J = \mathcal{M} \times \mathcal{J}$.

Beraz, $Q_{m,n} \in \Omega$, $\mathcal{M} \times \mathcal{J}$ -ren Q edozein elementutarako; baina nola Q $Q_{m,n}$ multzoen bildura disjuntua den, $Q \in \Omega$, $\forall Q \in \mathcal{M} \times \mathcal{J}$.

Aurreko teoremak, berriz, ondoko definizioa ematea posibleztatzen digu:

6.9. Definizioa

$(E, \mathcal{M}, \mu)$ eta $(F, \mathcal{J}, \nu)$ bi espazio neurri σ-finitudun badira, neurri bat defini dezakegu ondoko moduan, $(ExF, \mathcal{M} \times \mathcal{J})$ espazio neurgarrian:

$$\forall Q \in \mathcal{M} \times \mathcal{J} , \quad (\mu \times \nu)(Q) = \int_E \nu(Q_x)\, d\mu = \int_F \mu(Q^y)\, d\nu$$

Gainera, μ eta ν-ren σ-finitutasunaz, $\mu \times \nu$ ere σ-finitua da, zeren $E = \bigcup_n E_n$, $F = \bigcup_m F_m$, $\mu(E_n), \nu(F_m) < +\infty$ izanik, $ExF = \bigcup_{m,n} (E_n \times F_m)$, eta $(\mu \times \nu)(E_n \times F_m) = \mu(E_n)\, \nu(F_m) < +\infty$.

§6.3.- FUBINI-REN TEOREMA

Demagun, orain, kapitulu honen helburua den erresultatua. Beraren bidez, integrale anizkoitzat, h.d., $\mathbf{R}^k$-n egindakoak, pausuz pausu egitea zilegia zaigu.

6.10. Teorema

Bira $(E, \mathcal{M}, \mu)$ eta $(F, \mathcal{S}, \nu)$ bi espazio neurri σ-finitudun. Orduan, f (ExF)-n definituriko funtzioa $\mathcal{M} \times \mathcal{S}$ -neurgarria bada,

(i) $\varphi(x) = \int_F f(x,y)\, d\nu(y)$ neurgarria da E-n

(ii) $\psi(y) = \int_E f(x,y)\, d\mu(x)$ neurgarria da F-n

(iii) $\int_E \left(\int_F f(x,y) d\nu \right) d\mu = \int_{ExF} f(x,y)\, d(\mu x \nu) = \int_F \left(\int_E f(x,y) d\mu \right) d\nu$

(iv) Baldin $f \in L^1(\mu x \nu)$, orduan $f_x \in L^1(\nu)$ i.n. E-n, $f^y \in L^1(\mu)$ i.n. F-n; φ eta ψ, errespektiboki, $L^1(\mu)$-n eta $L^1(\nu)$-n daude eta (iii) betetzen da.

Frogapena

6.7 teoremagatik, f_x $\mathcal{S}$-neurgarria, eta f^y $\mathcal{M}$-neurgarria dira. Beraz, φ eta ψ -ren definizio onak dirateke.

$f = \chi_Q$, $Q \in \mathcal{M} \times \mathcal{S}$ edukiko bagenu, 6.8 teoremak (i), (ii) eta (iii)-ren frogapena emango liguke. Beraz, hiru propietate horiek egiazkoak dira f funtzio sinplea bada. Kasu orokorrean, nola edozein funtzio neurgarri eta positibo funtzio sinpleen segida gorakor

baten limitea den (ikus 1.34 proposizioa), konbergentzia monotonoaren teorema aplikatu baino ez daukagu, eta (i), (ii), (iii) frogaturik geratuko dira f^+ eta f^- funtzioetarako, eta ondorioz, $f = f^+ - f^-$ funtziorako ere.

Bestalde, (iv) frogatzeko, nahikoa da (iii)-tik ondorioak ateratzea.

(iii) egiazkoa izanik, $\phi \in L^1(\mu)$ eta $\psi \in L^1(\nu)$ eta 2.13 proposizioaz, f_x eta f^y-ren i.n.-ko integragarritasuna lortzen da.

7. GAIA

DIFERENTZIAZIOA ETA INTEGRAZIOA

7.1 Diferentziazioa zer den

7.2 Vitali-ren teorema

7.3 Funtzio monotono eta aldaketa bornatukoen diferentziazioa

7.4 Integralen deribazioa

7.5 Erabateko jarraitasuna

7. DIFERENTZIAZIOA ETA INTEGRAZIOA

Gai honetan interesatzen zaigun problema ondokoa da: Noiz esan daiteke integralaren eragiketa inbertsua deribaketa dela; hau da, noiz idatz daitezke ondoko berdintza hauek:

$$\int_a^b f'(x)\,dx = f(b) - f(a)$$

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(y)\,dy = f(x) \quad ?$$

Riemann-en integralaren kasuan, ezaguna da, bigarren berdintza hori egiazkoa dela f x-en jarraia denean. Dakusagun, ondoren, noiz esan daitekeen gauza bera Lebesgue-ren integralaren kasuan.

Oharra: Aurrerantzean, funtzio errealak hartuko ditugu kontuan.

§7.1.- DIFERENTZIAZIOA ZER DEN

Funtzio errealen kasuan, nahiko erraz adieraz daiteke noiz diren diferentziagarriak, eta zein da, baiezkoan, beraien deribatua puntu batetan. Kontuz ibili behar da, hala ere, kasu berezi honetan egiten diren baieztapenak orokorrean ez onartzeko.

Dena den, f funtzio erreal bat izanda, honela esan dezakegu diferentziagarria dela x_0 puntuan, $\lim_{h\to 0} \dfrac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$ limitea

existitzen denean, finitua izanik. Kasu honetan f-ren deribatua x_0 puntuan limite hori dela esango dugu, eta honela idatziko:

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

Deribatu hori existitzen ez denean, beste deribatu batzutaz hitz egin daiteke, halere; argia denez, limite hori ez existituz gero, goi-limiteaz eta behe-limiteaz hitz egin ahalko dugu, eta honetaz, f-ren x_0 puntuango goi-deribatua eta behe-deribatua ondokoak direlako:

$$\overline{D} f(x_0) = \limsup_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

$$\underline{D} f(x_0) = \liminf_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

Nabaria da f diferentziagarri den kasuetan,
$\overline{D} f(x_0) = \underline{D} f(x_0) = f'(x_0)$ dugula.

§7.2.- VITALI-REN TEOREMA

Teorema hau oso garrantzitsu eta erabilgarria da, zeren eta ez-kontagarritik kontagarrira pasatzeko ahalmena ematen baitigu, eta honetaz gainera, Riemann-en integralerako betetzen diren hamaika propietate, batez ere diferentziazioari dagokionean, Lebesgue-renerako frogatzea posibleztatzen baitigu.

7.1. Definizioa

Puntu bat ez diren tarte-bilduma bat, J, izanda, J $E \subset \mathbb{R}$ multzoko Vitali-estalki bat dela esango dugu, $\forall \varepsilon > 0$, $\forall x \in E$ existizen bada J-ren elementu bat I_x^ε, non bol $(I_x^\varepsilon) < \varepsilon$ baita.

7.2. Teorema (Vitali)

Neurri finitua daukan $\mathbb{R}$-ren edozein E azpimultzotarako, eta E-ren edozein J Vitali-estalkitarako, ε edozein zenbaki erreal positibo izanda, existitzen da J-ren azpimultzo finitu bat, $I = \{I_1, \ldots, I_n\}$ non

$$m^*(E - \bigcup_{i=1}^{n} I_i) < \varepsilon$$ baitugu.

Frogapena

Hasteko, suposa dezagun I_i tarte guztiak itxiak direla, zeren ez balira, beraien itxidurak hartu baino ez baikenukeen egin beharko, hori egitean ez baitira neurriak aldatzen.

Biz $\mathcal{O}$ E partetzat daukan neurri finitudun ireki bat eta suposa dezagun ere, J-ren elementu guztiak $\mathcal{O}$-ren azpimultzoak direla.

Biz, bestalde, $k_1 = \sup \{\text{bol } (I) / I \in J\}$.

Har dezagun $I_1 \in J$ non bol $(I_1) > \frac{k_1}{2}$ eta defini dezagun $J_1 = \{I \in J / I \cap I_1 = \phi\}$, $k_2 = \sup \{\text{bol } (I) / I \in J_1\}$. Honela tan segi dezakegu, eta n urrats emanda, bidagurutze honen aurrean aurkituko gara:

- edo $E \subset \bigcup_{i=1}^{n} I_i$, eta amaitu dugu,

- edo $E \not\subset \bigcup_{i=1}^{n} I_i$, eta orduan $J_n = \{I \in J / I \cap I_j = \phi \quad \forall j = 1,\ldots,n\}$

$k_{n+1} = \sup \{\text{bol } I \ / \ I \in J_n\}$ definituta, existituko da $I_{n+1} \in J_n$ non $\text{bol } (I_{n+1}) > \frac{k_{n+1}}{2}$.

Honela, edo urrats-kopuru finitu bat eman ondoren, amaitu dugu, edo bestela eraiki dugu J-ren elementu disjuntuen segida bat, $\{I_n\}$ non $\bigcup I_n \subset \vartheta$ eta

$$\sum_n \text{bol } (I_n) \leq m(\vartheta) < +\infty .$$

Beraz, serie hori konbergente izanik, $\forall \varepsilon > 0$ existitzen da zenbaki natural bat, N, non $\sum_{N+1}^{\infty} \text{bol } (I_n) < \frac{\varepsilon}{5}$.

Biz $G = E - \bigcup_{n=1}^{N} I_n$. Froga dezagun $m^*(G) < \varepsilon$ dela, eta horrekin teoremaren frogapena eginda egongo da.

Biz x G-ren puntu bat. $\bigcup_{n=1}^{N} I_n$ multzo itxia eta J Vitali-estalkia izanik, aurki daiteke $I \in J$, non $x \in I$ eta $I \cap I_j = \phi$ $\forall j = 1,\ldots,N$. Tarte horrentzat zera ikusten dugu, $\text{bol } (I) \leq k_{n+1} < 2\text{bol } (I_{n+1})$. Beraz, I-k derrigorrez ebaki behar du I_n tarteetatik bat, zeren horrela egingo ez balu, aurrekoa aplikatuz, bol (I) = 0 edukiko baikenuke; biz I_n I-k ebakitzen duen lehena. $n > N$ denean, $\text{bol } (I) \leq k_n \leq 2\text{bol } (I_n)$ daukagunez gero, argi dago x eta I_n-ren erdiko puntuaren arteko distantzia $\text{bol } (I) + \frac{1}{2} \text{bol } (I_n)$ baino txikiagoa dela, eta hori, berriz,

$\frac{5}{2}$ bol (I_n) baino txikiagoa da. Honelatan, x ba dago $[a_n - \frac{5}{2} \text{ bol } (I_n),\ a_n + \frac{5}{2} \text{ bol } (I_n)] = J_n$ tartean, non a_n I_n-ren erdiko puntua baita.

Beraz, $G \subset \bigcup_{N+1}^{\infty} J_n$, eta

$$m^*(G) \leq \sum_{N+1}^{\infty} \text{bol } (J_n) = 5 \sum_{N+1}^{\infty} \text{bol } (I_n) < \varepsilon$$

§7.3.- FUNTZIO MONOTONO ETA ALDAKETA BORNATUKOEN DIFERENTZIAZIOA

7.3. Proposizioa

f funtzio erreal eta monotonoa bada $[a,b]$ tartean, f diferentziagarria da ia $[a,b]$-ko puntu guztietan. Honetaz gainera, f' neurgarria da eta

$$\int_a^b f'(x)\,dx \leq f(b) - f(a)$$

Frogapena

Suposa dezagun, adibidez, f gorakorra dela eta biz $E = \{x \in [a,b] \ /\ \underline{D} f(x) < \overline{D} f(x)\}$. Argi dago gure helburua $mE = 0$ frogatzea dela eta horretarako, $m^*E = 0$ frogatuko dugu.

$x \in E$ bada, $\exists\, r_1, r_2 \in \mathbb{Q}$ non $\underline{D} f(x) < r_1 < r_2 < \overline{D} f(x)$ den , eta E honela deskonposa dezakegu:

$$E = \bigcup_{\substack{r_1 < r_2 \\ r_i \in \mathbb{Q}}} E_{r_1,r_2} = \bigcup \{x \in E \ /\ \underline{D} f(x) < r_1 < r_2 < \overline{D} f(x)\}$$

$\mathbb{Q}$ kontagarria denez, nahikoa da, ba, $m^*(E_{r_1,r_2}) = 0$ dela egiaztatzea. Dei dezagun $s = m^*(E_{r_1,r_2})$, eta aukera dezagun $E_{r_1,r_2} \subset \mathcal{O}$, $m(\mathcal{O}) < s+\varepsilon$ betetzen duen ireki bat.

Baina, definizioz, $\forall x \in E_{r_1,r_2}$ existitzen da $h > 0$, non $[x-h,x] \subset \mathcal{O}$ eta $f(x) - f(x-h) < r_1 h$. Bestalde, x guztietarako $I = [x-h, x]$ tarteen multzoa kontutan hartzen badugu, Vitali-ren teorema aplikatuz, aukeratu ahal izango dugu multzo horren azpimultzo finitu bat, $\{I_1,\ldots,I_n\}$, non I_i tarteak disjuntuak diren, eta

$$E_{r_1,r_2} \cap \bigcup_{i=1}^{n} I_i = A \subset E_{r_1,r_2}, \qquad m^*A > s-\varepsilon ,$$

eta bestalde,

$$\sum_{i=1}^{n} (f(x_i) - f(x_i-h_i)) < r_1 \sum_{i=1}^{n} h_i \leq r_1\, m(\mathcal{O}) < r_1\,(s+\varepsilon)$$

Bestalde, $\forall y \in A$, $\exists k > 0$ txikia, non $[y, y+k]$ tartea I_i baten parte baita, eta non $f(y+k) - f(y) > r_2 k$. Berriz, Vitali-ren teoremaz, hauta daiteke tarte horien artean, kopuru finitu bat, $\{J_1,\ldots,J_m\}$, non $\bigcup_{i=1}^{m} J_i \subset A$ eta $m(\bigcup_{i=1}^{m} J_i) > s-2\varepsilon$. Hortaz,

$$\sum_{i=1}^{m} (f(y_i+k_i) - f(y_i)) > r_2 \sum_{i=1}^{m} k_i > r_2(s-2\varepsilon).$$

Baina, dena definitu dugun moduarengatik, J_i bakoitza I_j baten parte da. $\forall j = 1,\ldots,n$ biz $A_j = \{i \in \mathbb{N} \,/\, J_i \subset I_j\}$. Orduan, f gorakorra izanik,

$$\sum_{i \in A_j} (f(y_i+k_i) - f(y_i)) \leq f(x_j) - f(x_j - h_j)$$

eta dena batuz,

$$r_1(s+\varepsilon) > \sum_{i=1}^{n} (f(x_i)-f(x_i-h_i)) \geq \sum_{i=1}^{m} (f(y_i+k_i)-f(y_i)) > r_2(s-2\varepsilon).$$

Baina ε nahi bezain txikia dela kontutan harturik, $sr_2 \leq sr_1$ ateratzen da, eta $r_1 < r_2$ da. Beraz $s = 0$ izan behar du, eta honek erakusten du

$$g(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \quad \text{funtzioa ia nonnahi}$$

definiturik dagoela. Baina hemendik f i.n. deribagarria dela ateratzeko, g i.n. finitua dela frogatu beharko dugu.

Horretarako defini dezagun $f(x) = f(b) \quad \forall x \geq b$, eta $g_n(x) = n(f(x+\frac{1}{n}) - f(x)) \quad \forall x \in [a,b]$. g-ren definizioaz, nabaria da $g_n(x) \longrightarrow g(x)$ i.n., eta beraz, g neurgarria dela. Bestalde, f gorakorra izanik, $g_n \geq 0$ da, eta beraz, Fatou-ren lema aplika dakiokegu:

$$\int_a^b g \leq \liminf \int_a^b g_n = \liminf \left[n \int_a^b (f(x+\tfrac{1}{n}) - f(x))\, dx \right] =$$

$$= \liminf \left[n \int_b^{b+\frac{1}{n}} f - n \int_a^{a+\frac{1}{n}} f \right] = \liminf \left[f(b) - n \int_a^{a+\frac{1}{n}} f \right] \leq$$

$\leq f(b) - f(a)$, f-ren gorakortasunagatik.

Beraz, g integragarria da, eta halabeharrez, $g < +\infty$ i.n.; h.d., f deribagarria da i.n. $[a,b]$-n, hor, $f' = g$ eta f' neurgarria da.

7.4. Definizioa

$[a,b]$ tartean definituriko edozein funtzio erreal baten aldaketa totala honela defini dezakegu:

$$T_a^b(f) = \sup_{\mathcal{P}_{[a,b]}} \sum_{i=1}^{N} |f(x_i) - f(x_{i-1})|$$

non $\mathcal{P}_{[a,b]}$ $[a,b]$-ren partiketa finituen multzoa den, h.d., $\{x_1,\ldots,x_N\}$ $\mathcal{P}_{[a,b]}$-ren elementua da, $x_1=a \leq x_2 \leq \ldots \leq x_N=b$ bada.

T_a^b zenbakia finitua den kasuan, f aldaketa bornatukoa dela esan ohi da, eta $f \in B\ V\ (a,b)$ idatzi.

7.5. Proposizioa

$f \in B\ V\ (a,b)$ badugu,

(i) f bi funtzio gorakorren arteko kendura da.

(ii) $\forall x \in [a,b]$, existitzen dira x-eko f-ren alboetako limiteak, $f(x+)$ eta $f(x-)$, eta f-ren eten-puntuen multzoa, hots, $f(x+) \neq f(x-)$ deneko puntuena kontagarria da.

Frogapena

(i) Defini ditzagun $\forall x \in [a,b]$

$$N_f(x) = \sup \sum_{i=1}^{n} (f(x_i) - f(x_{i-1}))^+ ,$$

$$P_f(x) = \sup \sum_{i=1}^{n} (f(x_i) - f(x_{i-1}))^-$$

zenbakiak, non supremo hori $x_o=a \leq x_1 \leq \ldots \leq x_n=x$ betetzen duten $\{x_o,\ldots,x_n\}$ partiketen multzoan hartzen baita. Definituriko bi fun-

tzio horiek, $N_f(x)$ eta $P_f(x)$, gorakorrak dira nabariki. Dakusagun, orain, $f(x) = f(a) + N_f(x) - P_f(x)$ dela, eta horrekin amaituko da frogapena.

Biz $\{x_0,\ldots,x_N\}$ non $x_0=a \leq x_1 \leq \ldots \leq x_N=x$; orduan,

$$f(x) - f(a) = \sum_{i=1}^{N} (f(x_i) - f(x_{i-1})) =$$

$$= \sum_{i=1}^{N} (f(x_i) - f(x_{i-1}))^+ - \sum_{i=1}^{N} (f(x_i) - f(x_{i-1}))^-$$

Beraz, $N_f(x) \leq P_f(x) + f(x) - f(a)$ eta

$P_f(x) \leq N_f(x) + f(a) - f(x)$, h.d.,

$N_f(x) - P_f(x) = f(x) - f(a)$, f.n.g.

(ii) Propietate hau funtzio monotonoek betetzen dutenez, (i) zatiak (ii) halabehartzen du.

7.6. Korolarioa

Aldaketa bornatuko funtzioak deribagarriak dira ia puntu guztietan.

§7.4.- INTEGRALEN DERIBAZIOA

Pasa gaitezen, orain, integral eta deribatuen artean dauden erlazioak aztertzera.

7.7. Lema

Biz f integragarria $[a,b]$ tartean; orduan, $F(x) = \int_a^x f(y)\,dy$ funtzioa jarraia eta aldaketa bornatukoa da.

Frogapena

F jarraia dela nabaria da 3.27 proposizioa aplikatuz, zeren $\int_A f < \varepsilon$ badaukagu, $A \subset [a,b]$ eta $m(A) < \delta(\varepsilon)$ betetzen duten A guztietarako,

$$\left| \int_a^{x+\delta'} f - \int_a^x f \right| = \left| \int_x^{x+\delta'} f \right| \leq \int_x^{x+\delta'} |f| < \varepsilon \qquad \forall\, \delta' \leq \delta$$

Biz, bestalde, $\{x_i\}_{i=0}^N \subset [a,b]$, non $a=x_0 \leq x_1 \leq \ldots \leq x_N=b$. Orduan,

$$\sum_{i=1}^N |F(x_i) - F(x_{i-1})| = \sum_{i=1}^N \left| \int_{x_{i-1}}^{x_i} f \right| \leq \sum_{i=1}^N \int_{x_{i-1}}^{x_i} |f| = \int_a^b |f| < +\infty\,;$$

eta halabeharrez,

$$T_a^b(f) \leq \int_a^b |f| < +\infty\,.$$

7.8. Lema

f neurgarria eta bornatua bada $[a,b]$-n , $F(x) = F(a) + \int_a^x f(y)\,dy$ funtzioa definituta, $F'(x) = f(x)$ i.n. daukagu.

Frogapena

Aurreko lemaz, F aldaketa bornatukoa da, eta beraz, $F'(x)$ i.n. existitzen da, finitua izanik.

Biz $M = \sup_{x \in [a,b]} |f(x)|$. Honelatan, $\forall\, n \in \mathbb{N}$,

$$f_n(x) = \frac{F(x+\frac{1}{n}) - F(x)}{\frac{1}{n}} = n \int_x^{x+\frac{1}{n}} f(y)\,dy$$ definituz gero,

$\forall x \in [a,b]$, $|f_n(x)| \leq M$ lortzen dugu, eta $f_n \longrightarrow F'$ da; orduan, konbergentzia gainduaren teorema aplikatuz, $\forall y \in [a,b]$

$$\int_a^y F'(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^y f_n(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \left[n \int_a^y (F(x+\tfrac{1}{n}) - F(x))\,dx \right] =$$

$$= \lim_{h\to 0} \left[\frac{1}{h} \int_y^{y+h} F(x)\,dx - \frac{1}{h} \int_a^{a+h} F(x)\,dx \right] =$$

$$= F(y) - F(a) = \int_a^y f(x)\,dx \,, \quad F \text{ jarraia baita } (*)$$

Beraz, $\int_a^y (F'-f)\,dx = 0 \quad \forall y \in [a,b]$. Orduan

$\int_c^d (F'-f)\,dx = 0 \quad \forall c,d \in [a,b]$ eta $\int_A (F'-f)\,dx = 0 \quad \forall A$ boreldarra $\subset [a,b]$. 3.25 (ii) proposizioa aplikatuz $F'-f = 0$ i.n. dugu f.n.g.

Eta azkenik, demagun hasieratik bilatzen genuen erresultatua:

7.9. Teorema

Bira f, $[a,b]$-n integragarria, eta $F(x) = F(a) + \int_a^x f(y)dy$. Orduan, $F'(x) = f(x)$ i.n. $[a,b]$-n.

(*) F jarraia $\Longrightarrow$ $\varepsilon > 0$ emanez $\exists \delta > 0$: $|F(x) - F(y)| < \varepsilon$ $|x-y| < \delta$ denean. Orduan $h < \delta$ bada

$$\left| \frac{1}{h} \int_y^{y+h} F(x)dx - F(y) \right| \leq \left| \frac{1}{h} \int_y^{y+h} (F(x)-F(y))\,dx \right| \leq \frac{1}{h} \int_y^{y+h} |F(x)-F(y)|\,dx < \varepsilon$$

Frogapena

Hasteko, demagun $f \geq 0$ dela. Orduan, $\forall n \in \mathbb{N}$, biz

$$f_n(x) = \begin{cases} f(x) , & f(x) \leq n \text{ bada} \\ n , & f(x) \geq n \text{ denean} \end{cases}$$

Honelatan, $f-f_n \geq 0$ da, eta, beraz, $G_n(x) = \int_a^x (f-f_n)\,dx$ funtzioa gorakorra da; orduan, 7.3 proposizioa aplikatuz, G_n deribagarria da ia x guztietan, beraren deribatua positiboa izanik; honetatik

$$F'(x) = \frac{d}{dx} \int_a^x f(y)\,dy = \frac{d}{dx} \int_a^x f_n + \frac{d}{dx}\, G_n \geq f_n(x) ,$$

zeren f_n-ri 7.8 lema aplika baitakioke.

Baina $F' \geq f_n$ i.n., eta $\forall n$, $F' \geq f$ halabehartzen du, beraz,

$$\int_a^b F'(x)\,dx \geq \int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

Bestalde, F ere gorakorra izanik, $F' \geq 0$ da eta 7.3 proposizioaz,

$$\int_a^b F'(x)\,dx \leq F(b) - F(a).$$

Hau da, $\int_a^b (F'(x) - f(x))\,dx = 0$ dugu, eta $F'-f \geq 0$ denez, $F'(x) = f(x)$ i.n. halabehartzen du 3.25 (i) proposizioak.

§7.5.- ERABATEKO JARRAITASUNA

7.10. Definizioa

Biz f $[a,b]$ tartean definituriko funtzio erreal bat. f-ri erabat jarrai deitzen zaio, ondoko baldintza betetzen duenean:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \text{non} \quad \sum_{i=1}^{n} |f(y_i) - f(x_i)| < \varepsilon \quad \text{baita,}$$

$\sum_{i=1}^{n} |y_i - x_i| < \delta$ betetzen duten $\{(x_i, y_i)\}_i$ tarte disjuntuen bilduma guztietarako.

Oharra

Argi dago funtzio erabat jarraiak uniformeki jarraiak direla, eta 3.27 proposizioagatik, edozein integral ezmugatu erabat jarraia dela.

7.11. Lema

$[a,b]$-ko funtzio erabat jarraiak, aldaketa bornatukoak dira.

Frogapena

Biz $\delta_1 > 0$ erabateko jarraitasunaren definizioan, $\varepsilon = 1$ balioari dagokion δ-a.

Biz, bestalde, $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_N = b$, $[a,b]$ tarteko edozein partiketa. Beharrezkoa bada, sar ditzagun partiketa horretan puntu gehiago, $|x_{i+1} - x_i| < \delta$ edukitzeko moduan.

Honelatan, erabateko jarraitasunaz,

$$\sum_{i=1}^{N} |f(x_i) - f(x_{i-1})| \leq 1 \cdot 2 \frac{1 + (b-a)}{\delta_1} = K < +\infty$$

Beraz, $T_a^b(f) < +\infty$, f.n.g.

7.12. Korolarioa

f jarraia bada, deribagarria da ia edozein puntutan.

7.13. Lema

f [a,b]-n erabat jarraia bada, $f'(x) = 0$ i.n. izanik, orduan f konstante da tarte horretan.

Frogapena

Biz z [a,b] tarteko edozein puntu. Hipotesiengatik, aurki daiteke (z-a) neurriko [a,z]-ko azpimultzo bat, E, zeinetan $f'(x) \equiv 0$ baita.

Orduan, $\forall \varepsilon,\eta > 0$, $\forall x \in E$, ba dago $h > 0$ non $|f(x+h) - f(x)| < \eta h$. Vitali-ren teorema aplikatuz, aurki dezakegu, orduan, tarte disjuntuen bilduma finitu bat, $\{(x_k,y_k)\}_{k=0}^{N}$, non $|f(y_k) - f(x_k)| < \eta h$, $m(E - \bigcup_{k=0}^{N}(x_k,y_k)) < \delta$ baita, δ , ε-i eratabateko jarraitasunaren definizioan dagokiona delarik.

Orduan, tarte horiek, $x_k < x_{k+1}$ edukitzeko moduan ordenatzen baditugu, zera lortu dugu:

$$y_0 = a \leq x_1 < y_1 \leq x_2 < y_2 \leq \cdots < y_N \leq z = x_{N+1} ,$$

$\sum_{k=0}^{N} |x_{k+1} - y_k| < \delta$ izanik.

Honelatan,

$$\sum_{k=1}^{N} |f(y_k) - f(x_k)| \leq \eta \sum_{k=1}^{N} |y_k - x_k| < \eta(z-a) ,$$

eta $\sum_{k=o}^{N} |f(x_{k+1}) - f(y_k)| < \varepsilon$, f-ren erabateko jarraitasunagaitik.

Beraz, $|f(z) - f(a)| \leq \sum_{k=o}^{N} |f(x_{k+1}) - f(y_k)| +$

$+ \sum_{k=1}^{N} |f(y_k) - f(x_k)| < \varepsilon + \eta(z-a)$, eta ε, η nahi bezain txikiak izan daitezkeenez gero, $f(z) = f(a)$ dugu; z, $[a,b]$-ko edozein puntu zen; beraz, $f(x) = f(a) \quad \forall x \in [a,b]$.

7.14. Teorema

Funtzio bat integral ezmugatua da baldin eta soilik baldin erabat jarraia bada.

Frogapena

Lehen aipatu dugunez, inplikazio arteza frogaturik dago jadanik.

Biz, ba, F $[a,b]$ tartean erabat jarraia den funtzio bat. Orduan, F aldaketa bornatukoa da, eta halabeharrez, ba daude bi funtzio erreal gorakor, F_1 eta F_2, non $F = F_1 - F_2$ baita.

Honetaz gainera, $F'(x)$ i.n. existitzen da, $F'(x) = F_1'(x) - F_2'(x)$ izanik. Beraz, 7.3 proposizioaz,

$$\int_a^b |F'(x)| \leq F_1(b) - F_1(a) - F_2(b) + F_2(a)$$

Beraz, F' integragarria da, eta $G(x) = \int_a^x F'(y)\, dy$ defini daiteke, G eta $f = F - G$ erabat jarraiak direlarik.

Bestalde, 7.9 teoremak $f'(x) = 0$ i.n. dela esaten digu; aurreko lemagatik, ba, f konstante da, eta $f(a) = F(a)$ denez gero,

$$F(x) = F(a) + \int_a^x F'(y)\, dy$$

Teorema eta proposizio guzti hauen ondorio gisa, gai honen sarreran agertzen zen galderaren erantzuna ematen duen ondoko korolarioa ager dezakegu:

7.15. Korolarioa

Edozein funtzio erabat jarrai, beraren deribatuaren integrala da.

8. GAIA

ALDAGAI-ALDAKETA

8. ALDAGAI - ALDAKETA

Gai honi, h.d., integral batetan aldagaia aldatzekoari, soilik $\mathbb{R}^n$-ko kasuan begiratuko diogu, hots, m , $\mathbb{R}^n$-ko Lebesgue-ren neurria denean.

Atal honen helburua, aldagai-aldaketarako formula ematen duen teorema frogatzea da. Formula honen bidez, h.d., aldagai-aldaketa bat eginez, lortzen dena zera da, anitz kasutan integrala erraztea, eta beraz, kalkuluak arintzea.

Has gaitezen kasu berezi bat den bolumenaren tratamenduarekin.

8.1. Definizioa

Bira $v_1,\ldots,v_n$ $\mathbb{R}^n$-ko n bektore. Orduan, bolumen orientatua honela definituko dugu:

$$\text{bol}^\circ(v_1,\ldots,v_n) = \pm \text{ bol } (v_1,\ldots,v_n)$$

non bol $(v_1,\ldots,v_n)$, $v_1,\ldots,v_n$ bektoreek sortzen duten gorputzaren bolumena baita, eta non zeinua "+" (edo "-") da,
Det $(v_1,\ldots,v_n)$ positiboa (edo negatiboa) denean.

8.2. Teorema

Bira $v_1,\ldots,v_n$ $\mathbb{R}^n$-ko n bektore. Orduan,

(i) bol° $(v_1,\ldots,v_n)$ = Det $(v_1,\ldots,v_n)$

(ii) bol $(v_1,\ldots,v_n)$ = |Det $(v_1,\ldots,v_n)$|

Frogapena

Hasteko, $v_1,\ldots,v_n$ linealki dependenteak badira, argi dago bai (i), bai (ii) ere betetzen direla, zeren $\mathbf{R}^n$-ko Lebesgueren neurrirako, $\mathbf{R}^k$ neurri nulukoa baita $k < n$ denean (ikus 1.36 proposizioa).

Bestalde, erraz ikusten da, baita ere,

$$\text{bol}^\circ\ (e_1,\ldots,e_n) = 1 \qquad \text{dela.}$$

Beraz, begira dezagun ea bol° funtzioak determinantearen propietate definitzaileak betetzen dituen, h.d., ea lineala den aldagai guztiekiko.

Honetarako, eta beste guztiekin berdin egiten denez, egiazta dezagun ondokoa daukagula:

$$\forall k \in \mathbf{R}, \qquad \forall v_1,\ldots,v_n,\ w_1 \in \mathbf{R}^n$$

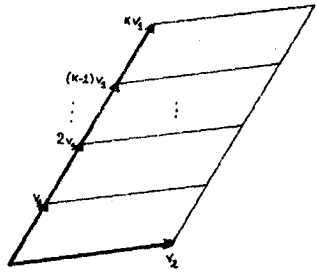
(i) $\text{bol}^\circ(kv_1,v_2,\ldots,v_n) = k\ \text{bol}^\circ(v_1,\ldots,v_n)$

(ii) $\text{bol}^\circ(v_1+w_1,\ v_2,\ldots,v_n) = \text{bol}^\circ(v_1,v_2,\ldots,v_n) + \text{bol}^\circ(w_1,v_2,\ldots,v_n)$

(i)-ren frogapena:

a) Demagun k zenbaki naturala dela. Argi dago (ikus (1) marrazkia) $B_k(v_1,\ldots,v_n)$, $kv_1,v_2,\ldots,v_n$ bektoreek sortzen duten gorputza bada,

$$B_k(v_1,\ldots,v_n) = B_{k-1}(v_1,\ldots,v_n) \cup (B_1(v_1,\ldots,v_n) + (k-1)v_1)$$



(1)

Eta berdin segituz,

$$B_k(v_1,\ldots,v_n) = \bigcup_{i=0}^{k-1} (B_1(v_1,\ldots,v_n) + iv_1)$$

bilketa hau disjuntua delarik. Beraz, Lebesgue-ren neurria translazioz aldaezina denez gero (ikus 1.21 proposizioa),

$$\text{bol}\ (kv_1,v_2,\ldots,v_n) = k\ \text{bol}\ (v_1,v_2,\ldots,v_n)$$

b) $k = \frac{k_1}{k_2} \in \mathbb{Q}^+$ bada $(k_1,k_2 \in \mathbb{N})$, aldiz, a) $\frac{v_1}{k_2}, v_2,\ldots,v_n$ bektoreei aplikatuz, zera lortzen da:

$$\text{bol}\ (\tfrac{k_1}{k_2} v_1,v_2,\ldots,v_n) = k_1\ \text{bol}\ (\tfrac{v_1}{k_2},v_2,\ldots,v_n) = \tfrac{k_1}{k_2}\ \text{bol}\ (v_1,\ldots,v_n)$$

zeren $\text{bol}\ (v_1,\ldots,v_n) = k_2\ \text{bol}\ (\frac{v_1}{k_2},v_2,\ldots,v_n)$ baita.

c) k zenbaki erreal positibo bada, bira $k',k'' \in \mathbb{Q}$, non $k' \leq k \leq k''$ baita. Orduan,

$$B_{k'}(v_1,\ldots,v_n) \subset B_k(v_1,\ldots,v_n) \subset B_{k''}(v_1,\ldots,v_n),$$ eta beraz,

$$k' \text{ bol } (v_1,\ldots,v_n) \leq \text{ bol } (kv_1,v_2,\ldots,v_n) \leq k'' \text{ bol } (v_1,\ldots,v_n)$$

Baina, nola k',k'' nahi bezain hurbilak har daitezkeen, derrigorrez:

$$\text{bol } (kv_1,v_2,\ldots,v_n) = k \text{ bol } (v_1,v_2,\ldots,v_n)$$

d) Berriz $k < 0$ bada, nola

$$B(kv_1,v_2,\ldots,v_n) = kv_1 + B(-kv_1,v_2,\ldots,v_n) \quad \text{den,}$$

Lebesgue-ren neurriaren traslazioen bidezko aldaezintasunagatik,

$$\text{bol } (kv_1,v_2,\ldots,v_n) = \text{bol } (-kv_1,v_2,\ldots,v_n) = (-k) \text{ bol } (v_1,\ldots,v_n)$$

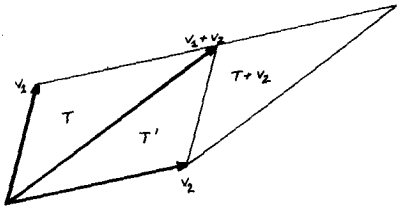
Beraz,

$$\begin{aligned}
\text{bol}^\circ(kv_1,v_2,\ldots,v_n) &= (\text{zeinu Det } (kv_1,v_2,\ldots,v_n))\text{bol}(kv_1,v_2,\ldots,v_n) = \\
&= (-k)(\text{zeinu Det } (kv_1,v_2,\ldots,v_n) \text{ bol } (v_1,\ldots,v_n) = \\
&= k(\text{zeinu Det } (-kv_1,v_2,\ldots,v_n)) \text{ bol } (v_1,\ldots,v_n) = \\
&= k(\text{zeinu Det } (v_1,v_2,\ldots,v_n)) \text{ bol } (v_1,\ldots,v_n) = \\
&= k \text{ bol}^\circ(v_1,\ldots,v_n)
\end{aligned}$$

(ii)-ren frogapena:

Lehen koordenatuarekiko linealtasunaren frogapena amaitzeko, suposa dezagun, lehenik, k zenbaki erreal bat dela, eta saia gaitezen $\text{bol}^\circ(v_1+kv_2,v_2,\ldots,v_n)$ zer den ikustera.

Hasteko, zer da $\text{bol}^\circ(v_1+v_2,v_2,\ldots,v_n)$? Begira dezagun (2) marrazkia



(2)

bol $(v_1,v_2,\ldots,v_n)$ = bol T + bol T', zeren $T \cap T' = \phi$ baita.

Eta bestalde, bol $(v_1+v_2,v_2,\ldots,v_n)$ = bol T' + bol $(T+v_2)$, baina Lebesgue-ren neurria translazioz aldaezina denez, argi dago bol $(v_1+v_2,v_2,\ldots,v_n)$ = bol $(v_1,v_2,\ldots,v_n)$ dela, eta berdin beste koordenatuetarako.

Froga dezagun orain, aldiz,

$$\text{bol}^\circ(v_1+kv_2,v_2,\ldots,v_n) = \text{bol}^\circ(v_1,v_2,\ldots,v_n) \quad \text{dela.}$$

$k\ \text{bol}^\circ(v_1+kv_2,v_2,v_3,\ldots,v_n) \overset{(i)}{=} \text{bol}^\circ(v_1+kv_2,kv_2,v_3,\ldots,v_n) =$

$= \text{bol}^\circ(v_1,kv_2,v_3,\ldots,v_n) \overset{(i)}{=} k\ \text{bol}^\circ(v_1,\ldots,v_n)$. Eta halabeharrez,

$$\text{bol}^\circ(v_1+kv_2,v_2,\ldots,v_n) = \text{bol}^\circ(v_1,v_2,\ldots,v_n)$$

Honelatan, $v_2,\ldots,v_n$ linealki dependenteak badira, argi dago (ii)-ren bi atalak berdinak direla.

Suposa dezagun, ba, $v_2,\ldots,v_n$ linealki independenteak direla; v_1 eta w_1 $\{v_2,\ldots,v_n\}$-ren konbinaketa linealak badira, erresultatua nabaria da ere. Biz, ba, $\{v_1,\ldots,v_n\}$ $\mathbb{R}^n$-ko oinarri bat. Aurrean egin dugunari begiratuta, eta $w_1 = k_1v_1 +\ldots+ k_nv_n$ bada,

$$\text{bol}^\circ(v_1+w_1,v_2,\ldots,v_n) = \text{bol}^\circ((1+k_1)v_1+k_2v_2+\ldots+k_nv_n,v_2,\ldots,v_n) =$$

$$= \text{bol}^\circ((1+k_1)v_1+k_2v_2+\ldots+k_{n-1}v_{n-1},\ v_2,\ldots,v_n) = \ldots =$$

$$= \text{bol}^\circ((1+k_1)v_1,v_2,\ldots,v_n) \overset{(i)}{=} (1+k_1)\ \text{bol}^\circ(v_1,\ldots,v_n) =$$

$$= \text{bol}^\circ(v_1,\ldots,v_n) + k_1\ \text{bol}^\circ(v_1,\ldots,v_n)$$

Baina, $\text{bol}^\circ(w_1,v_2,\ldots,v_n) = \text{bol}^\circ(k_1v_1+\ldots+k_nv_n,v_2,\ldots,v_n) =$

$$= k_1\ \text{bol}^\circ(v_1,\ldots,v_n).$$

Azter dezagun orain nola aldatzen diren bolumenak aplikazioen eraginez.

8.3. Proposizioa

Biz S $\mathbb{R}^n$-ko unitate kuboa, h.d., $S = B(e_1,\ldots,e_n)$; eta biz $\lambda: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ aplikazio lineala. Orduan,

$$\text{bol}\ \lambda(S) = |\text{Det}\ \lambda|$$

Frogapena

Biz, $\forall i = 1,\ldots,n$, $v_i = \lambda(e_i) = a_{1i}e_1 +\ldots+ a_{ni}e_n$. Orduan, $\text{bol}\ \lambda(S) = |\text{bol}^\circ\ \lambda(S)| = |\text{Det}\ (v_1,\ldots,v_n)| = |\text{Det}\ (a_{ij})| = |\text{Det}\ \lambda|$, aplikazio baten determinantearen definizioa aplikatuz.

8.4. Proposizioa

Biz R $\mathbb{R}^n$-ko errektangelu bat. Orduan, $\lambda: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ aplikazioa lineala bada,

$$\text{bol}\ \lambda(R) = |\text{Det}\ \lambda| \cdot \text{bol}\ R$$

Frogapena

R errektangelu bat izanda, existitzen da aplikazio lineal bat, λ', non $R = \lambda'(S)$ baita, S unitate kuboa delarik.

Honelatan, bol $\lambda(R)$ = bol $(\lambda \circ \lambda')(S) = |\text{Det}\ (\lambda \circ \lambda')| =$
$= |\text{Det}\ \lambda| \cdot |\text{Det}\ \lambda'| = |\text{Det}\ \lambda|$ bol R, 8.3 proposizioarengatik.

Suposa dezagun orain, aplikazio bat, f, daukagula, baina f lineala izan ordez, difeomorfismoa dela emanez, h.d., f C^1 klase koa, eta inbertsagarria izanik, f^{-1} ere C^1 klasekoa delarik.

Honelako aplikazio batetarako defini dezagun beraren jacobiarra ondoko moduan:

$$\Delta_f(x) = \text{Det}\ J_f(x) = \text{Det}\ f'(x)$$

non $J_f(x) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)_{i,j=1,\ldots,n}$ f-ren matrize jacobiarra den, eta $f'(x)$, $f: U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ aplikazioaren deribatua baita.

8.5. Teorema

Biz R $\mathbb{R}^n$-ko errektangelu bat, non R U irekiaren parte baita, eta biz $f: U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ difeomorfismoa. Orduan,

$$m(f(R)) = \int_R |\Delta_f|\ dx,$$

m Lebesgue-ren neurria delarik.

Frogapena

f lineala balitz, nabaria da erresultatu hau 8.4 proposizioa dela.

Hasteko, eta gauzak errazteko, demagun R kubo bat dela, eta zati ditzagun R-ren aldeak N zati berdinetan. Honela R, N^n kubotan zatitu dugu; kubo horiek S_j deitzen baditugu, eta beraien erdiko puntua, a_j,

$$\text{bol } f(R) = \sum_j \text{bol } f(S_j),$$

zeren $m(f(S_i) \cap f(S_j)) = 0$, $\forall i \neq j$ baita.

Begira dezagun, ba, zenbat den $f(S_j)$:

f' bornatu batetan jarraia denez gero, han uniformeki jarraia da, orduan, $\varepsilon > 0$ finkatuta, demagun N aski handi hartzen dugula

$$\forall x \in S_j, \quad f(x) = f(a_j) + \lambda_j(x-a_j) + \psi(x-a_j),$$

non $\lambda_j = f'(a_j)$ eta $|\psi(y)| \leq \varepsilon |y|$ diren, edukitzeko.

Orduan, $S'_j = S_j - a_j$ kuboa bada, eta $\overline{f}(x) = \lambda x + \psi(x)$ erakoa, $|\psi(x)| \leq \varepsilon |x|$ izanik, $f(S_j) = \overline{f}(S'_j)$.

Bestalde, $(\lambda^{-1} \circ \overline{f})(x) = \lambda^{-1}(\lambda x + \psi(x)) = x + (\lambda^{-1} \circ \psi)(x)$ denez gero, $(\lambda^{-1} \circ \overline{f})$ eta identitatea hurbilak dira, zeren $|(\lambda^{-1} \circ \psi)(x)| \leq C\varepsilon |x| \quad \forall x \in S$ baita.

s S-ren erradioa bada, orduan existitzen dira bi kubo, S' eta S'', $(1-c\varepsilon)s$ eta $(1+c\varepsilon)s$ erradioak, non $S' \subset (\lambda^{-1} \circ \overline{f})(S) \subset S''$ baita.

Beraz, $\lambda(S') \subset \overline{f}(S) \subset \lambda(S'')$, eta halabeharrez, existitzen da K non

$$|\text{Det } f'(a_j)| \text{ bol } S_j - \varepsilon K \text{ bol } S_j \leq \text{bol } \overline{f}(S_j) \leq$$

$$\leq |\text{Det } f'(a_j)| \text{ bol } S_j + \varepsilon K \text{ bol } S_j .$$

Orduan, desberdintza horiek guztiak batuz gero,

$$\sum_j |\text{Det } f'(a_j)| \text{ bol } S_j - \varepsilon K' \text{ bol } R \leq \text{bol } f(R) \leq$$

$$\leq \sum_j |\text{Det } f'(a_j)| \text{ bol } S_j + \varepsilon K' \text{ bol } R$$

Baina nola S_j-etan, $f'(a_j)$ eta $f'(x)$ oso hurbil dauden, konpon gaitezke zera edukitzeko:

$$\int_R |\Delta_f| \, dx - \varepsilon \leq m(f(R)) \leq \int_R |\Delta_f| \, dx + \varepsilon , \qquad \forall \varepsilon$$

Oharra

R kubo bat izan beharrean, errektangelu bat balitz, erresultatu bera lor dezakegu, errektangelua kubo "disjuntuen" bidez hurbil baitaiteke, h.d., elkarren artean neurri nuluko ebakidurak dituzten kuboen bidez.

8.5. Korolarioa

g f(R)-n jarraia izanez gero, halabeharrez

$$\int_{f(R)} g \, dx = \int_R (g \circ f) \, |\Delta_f| \, dx$$

Frogapena

Zati dezagun R $\{S_j\}$ errektangelutan, errektangelu horien aldeak δ baino luzera txikiagoa dutelarik.

f' bornatua denez, $f(S_j)$ multzoak $K\delta$ baino txikiagoak diren aldeak dituzten errektangeluen parte dira, K konstante finitua delarik.

Orduan, nola

$$\int_{f(R)} g\,dx = \sum_j \int_{f(S_j)} g\,dx \quad \text{den,}$$

$\varepsilon > 0$ nahi bezain txikia hartuta, δ behar bezain txikia aukeratuz gero, lor daiteke

$$\sup_j f(S_j) - \inf_j f(S_j) < \varepsilon \qquad \text{izatea.}$$

Honelatan, $m_j = \inf (g\circ f)(S_j)$ eta $M_j = \sup (g\circ f)(S_j)$ badira,

$$m_j \int_{f(S_j)} dx = m_j \int_{S_j} |\Delta_f|\,dx \leq \int_{f(S_j)} g\,dx \leq M_j \int_{f(S_j)} dx = M_j \int_{S_j} |\Delta_f|\,dx$$

Beraz, $\left| \int_{f(S_j)} g\,dx - \int_{S_j} (g\circ f)\,|\Delta_f|\,dx \right| \leq K\varepsilon$, eta hori $\forall \varepsilon > 0$.

8.6. Lema

Bira U, $\mathbb{R}^n$-ko irekia, $f: U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ C^1 klaseko aplikazioa, eta $Z \subset U$ neurri nuluko multzoa. Orduan, f(Z) neurri nulukoa da.

Frogapena

U-ko x bakoitzerako, ba dago errektagelu bat, R_x, non $x \in R_x \subset U$ baita. Honelatan, $\{\overset{\circ}{R}_x\}$ multzoa, hots, errektangelu horien barrena, Z-ren estalki bat da. Honetaz gainera, U banagarria izanik, bilduma horren azpibilduma kontagarri bat, $\{R_j\}_{j \in \mathbb{N}}$, Z-ren estalkia da.

Honelatan, $f(R_j \cap Z)$ neurri nulukoa dela $\forall j$ frogatuko ba genu, frogapena amaiturik egongo litzateke.

Baina f' R_j-n jarraia izanik, bornatua da R_j bakoitzean, beraz, f lipschitziarra da R_j bakoitzean.

Bestalde, nola $(Z \cap R_j)$-ren neurria 0 den, ba dago, ε positibo guztietarako, kuboz osoturiko estalki bat, $\{S_i\}_{i \in \mathbb{N}}$, non $\sum_i m(S_i) < \varepsilon$ den.

Orduan, L_j, $f_{|Z \cap R_j}$ funtzioaren Lipschitz-konstantea bada, eta s_i S_i koboaren aldeen luzera, $f(Z \cap R_j \cap S_i)$ multzoa S_i' kubo baten parte da, kubo honen aldeen luzera $2L_j s_j$ baino txikiagoa delarik. Beraz,

$$m(S_i') \leq 2^n L_j^n s_i^n = 2^n L_j^n m(S_i)$$

eta halabeharrez, $m(f(Z \cap R_j)) \leq 2^n L_j^n \varepsilon = K \varepsilon$, honekin frogapena amaitua dagoelarik.

8.7. Teorema (aldagai-aldaketarako formula)

Bira $\mathbb{R}^n$-ko ireki bat, U, eta $f: U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ C^1 klaseko aplikazioa, f U-n difeomorfismo izanik. Biz, bestalde, $g \in L^1(f(U))$. Orduan, $(g \circ f) \ |\Delta_f| \in L^1(U)$ eta

$$\int_{f(U)} g \, dx = \int_U (g \circ f) \ |\Delta_f| \, dx$$

Frogapena

Has gaitezen gauza bera frogatzen, baina U-rako egin beharrean U-ren parte den errektangelu itxi batetarako, R.

$C_c(f(U))$ $L^1(f(U))$-n dentsoa denez, ba dago segida bat, $\{g_n\}$, non $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n(\varepsilon) > 0$ non $N \geq n(\varepsilon)$ izateak $\|g_n - g\|_{L^1} \leq \varepsilon$ ha labehartzen baitu. 4.7 korolarioa eta 8.6 lema aplikatuz, $g_n \longrightarrow g$ ia nonnahi, h.d., g_n-k g-rantz konbergitzen du puntualki neurri nulukoa den Z multzoan ez ezik, eta $f^{-1}(Z)$ multzoaren neurria 0 da.

Biz $\bar{g}_k = g_k \circ f$. g_k jarraia da R-n eta

$$\int_R |\Delta_f| \, |\bar{g}_k - \bar{g}_1| \, dx = \int_{f(R)} |g_k - g_1| \, dx$$

Orduan, $\{|\Delta_f| \, \bar{g}_k\}_k$ segida Cauchyarra da, eta halabeharrez, $(g \circ f) \, |\Delta_f|$-rantz konbergitu behar du L^1-n, puntualki (edo ia) be rarenganantz konbergitzen baitu. Beraz, $(g \circ f) \, |\Delta_f| \in L^1(R)$ eta

$$\int_{f(R)} g \, dx = \int_R (g \circ f) \, |\Delta_f| \, dx$$

Berriz, A neurri nuluko ebakidura daukaten errektangeluen bildura finitua bada, formula hori ere bete egin behar da, batuketa sinple bat eginez ikusten den legez.

Bestalde, U banagarria denez gero, $U = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} R_n$, R_n errektangelu izanik.

$\forall n$, $A_n = R_n - (R_1 \cap \ldots \cap R_{n-1})$ multzoa definituz gero, berarentzat formula betetzen da, eta $\bigcup A_n$ multzoen bildura disjuntua da.

Biz $h_n = g_{|f(A_n)}$, $\bar{h}_n = (h_n \circ f) \, |\Delta_f|$. Orduan, $\sum_n h_n \longrightarrow g$, $\sum_n \bar{h}_n \longrightarrow (g \circ f) \, |\Delta_f|$ eta konbergentzia gaindituaren teorema aplikatuz,

$$\int_{f(U)} g \, dx = \int_U (g \circ f) \, |\Delta_f| \, dx \,, \qquad \text{f.n.g.}$$

HIZTEGIA

ALDAGAI-ALDAKETA	cambio de variable changement de variable change of variables
ALDAKETA BORNATUKO (FUNTZIO)(BV).	(función) de variación acotada (fonction) a variation bornée (function) of bounded variation
ALDAKETA TOTAL	variación total variation totale total variation
ANIZKOITZ	múltiple multiple multiple
AZPIBATUKORTASUN	subaditividad sous-additivité subadditivity
BARNE-NEURRI	medida interior mesure intérieure inner measure
BATEZBESTEKOZKO KONBERGENTZIA ...	convergencia en media convergence en moyenne convergence in mean
BATUKORTASUN	aditividad additivité additivity
BEHE-DERIBATU	derivada inferior dérivée inférieure lower derivative
BEHE-ERDIJARRAI	semicontinua inferiormente semicontinue inférieurement lower semicontinuous
BEHE-INTEGRAL	integral inferior intégrale inférieure lower integral
BEHE-LIMITE	límite inferior limite inférieure lower limit

BIDERKADURA-NEURRI	medida producto mesure produit product measure
BORELDAR	boreliano, de Borel borélien Borel (set, function)
ELKARREKIKO SINGULARRAK (NEURRI).	(medidas) singulares entre sí (mesures) symétriquement singulieres, étrangeres mutually singular (measures)
ERABAT JARRAI	absolutamente continuo absolument continu absolutely continuous
ESTALKI	(re)cubrimiento recouvrement covering
EUSKARRI	soporte support support
GOI-DERIBATU	derivada superior dérivée supérieure upper derivative
GOI-ERDIJARRAI	semicontinua superiormente semicontinue supérieurement upper semicontinuous
GOI-INTEGRAL	integral superior intégrale supérieure upper integral
GOI-LIMITE	límite superior limite supérieure upper limit
IA NONNAHI (I.N.)	en casi todo punto (c.t.p.) presque partout (p.p.) almost everywhere (a.e.)
INTEGRAGARRI	integrable intégrable integrable
INTEGRAL	integral intégral integral

JARRAIAREN POTENTZIA	potencia del continuo puissance du continu power of the continuum
KANPO-NEURRI	medida exterior mesure extérieure outer measure
KLASE MONOTONO	clase monótona classe monotone monotone class
KONBERGENTZIA BORNATU	convergencia acotada convergence bornée bounded convergence
KONBERGENTZIA GAINDITU	convergencia dominada convergence dominée dominated convergence
KONBERGENTZIA MONOTONO	convergencia monótona convergence monotone monotone convergence
KONTAGARRI	contable dénombrable countable
KONTATZAILE (NEURRI)	(medida) contadora (mesure) de dénombrement counting (measure)
NEURGARRI	medible mesurable measurable
NEURRI	medida mesure measure
NEURRIDUN (ESPAZIO)	espacio de medida espace mesuré measured space
NEURRIZKO KONBERGENTZIA	convergencia en medida convergence en mesure convergence in measure
NEURTEZIN	no medible non mesurable nonmeasurable

OSOA (NEURRI)	medida completa mesure complete complete measure
SINPLE (FUNTZIO)	(función) simple (fonction) simple simple (function)
SUPREMO ESENTZIALA	supremo esencial supremum essentiel essential supremum

BIBLIOGRAFIA

[1] W.H. FLEMING: "Funciones de varias variables". CECSA, 1969.

[2] J. GENET: "Mesure et intêgration". Vuibert, Paris, 1976.

[3] M. GUZMAN-B. RUBIO: "Integración: teoría y técnicas". Alhambra, Madrid, 1979.

[4] P.R. HALMOS: "Measure Theory". Van Nostrand, Princeton, 1950.

[5] R. JEAN: "Mesure et intégration". Les Presses de l'Université du Quebec, Montreal, 1975.

[6] A. KOLMOGOROV - S. FOMINE: "Eléments de la théorie des fonctions et de l'Analyse Fonctionnelle". Mir, Moscu, 1977.

[7] S. LANG: "Real Analysis". Addison-Wesley. Reading. Mass., 1969.

[8] L.H. LOOMIS: "An Introduction to Abstract Harmonic Analysis". Van Nostrand, New Jersey, 1953.

[9] F. RIESZ - B. SZ-NAGY: "Lecons d'Analyse Fonctionnelle". Gauthier-Villars, Paris, 1952.

[10] H.L. ROYDEN: "Real Analysis". Macmillan, New York, 1963.

[11] W. RUDIN: "Real and Complex Analysis". Mc Graw-Hill, New York, 1966.

[12] J. VON NEUMANN: "Functional Operators I: Measures and Integrals" Princeton University Press, Princeton, 1950.

Historiarentzat:

[13] N. BOURBAKI: "Eléments d'histoire des Mathématiques". Hermann, Paris, 1960.

[14] J. DIEUDONNE eta beste: "Abrégé d'histoire des Mathématiques: 1700-1900". Hermann, Paris, 1978.