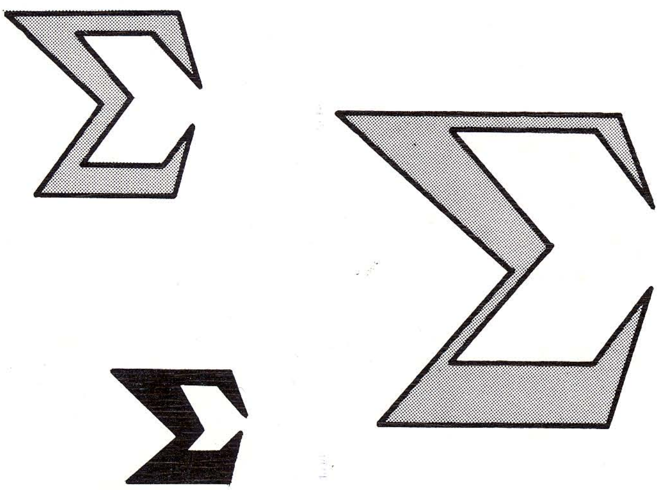
Matematika Orokorra I

(2. partea)



udako euskal unibertsitatea

IRUÑEA 1982

COLABORACION DE
EUSKO IKASKUNTZA'ren
LAGUNTZAREKIN

Jabegoa: U.E.U.ko MATEMATIKA Saila
Lege-gordailua: BI-1.879-82
I.S.B.N.: 84-300-7734-0
Inprimategia: I. BOAN, S.A.

MATEMATIKA OROKORRA I

2. PARTEA

M. J. ZARATE AZKUNA

Leioako Zientzi Fakultatean kimika ikasi nahi duten ikasleak lehen kurtsoan Matematika Orokorra I asignatura dute. Asignatura honen programak 26 gai ditu, eta VIII. UEUrako lehen partean, lehendabiziko 20 gaiak atera genituen. Orain, faltatzen diren gaiak ateratzen dira.

Bilbon, 1982.eko Maiatzaren 31an.

Mari Jose Zarate

AURKIBIDEA

21. GAIA :

SEGIDA FUNTZIONALAK

21. G A I A

SEGIDA FUNTZIONALAK

Aipatuko ditugun funtzioak E $(E \subset R)$ multzo komun batetan definituak dira.

21.1. Definizioa

Segida bat, zeinen elementuak x aldagaiaren funtzioak baitira, segida funtzionala edo funtzio-segida deitzen da.

Adibidez, $1, x, x^2, x^3, \ldots, x^n, \ldots$

21.2. Definizioa

$\{f_n(x)\}$ segida funtzionalak x_o puntu batetan konbergitzen duela esaten da, $\{f_n(x_o)\}$ zenbaki-segida konbergentea denean.

Propietate hori betetzen duten puntuen multzoa, D, segida funtzionalaren konbergentzi eremua deitzen da.

$$D = \{ x \in E \ / \ \{f_n(x)\} \text{ konbergentea}$$

$D \neq \phi$ baldin bada, ondoko eran definitzen den f(x) funtzioa, $\{f_n(x)\}$ segida funtzionalaren limitea deitzen da:

$$\forall x \in D, \qquad f(x) = \lim_{n \to \infty} f_n(x)$$

21.3. Definizioa

$\{f_n(x)\}$ segida funtzionala E multzoan puntualki konbergentea dela eta $f(x)$ funtzioa limitetzat duela esaten dugu, E multzoko edozein x elementutarako $\{f_n(x)\}$ zenbaki-segida konbergentea denean eta beraren limitea $f(x)$ zenbakia denean; hau da,

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \forall x \in E \qquad \exists N = N(\varepsilon, x) / \forall n \in N \qquad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

baldintza betetzen denean, eta kasu honetan $\lim_{n \to \infty} f_n(x) = f(x)$ idazten da.

x puntuari loturik dagoen zenbaki-segida hartzen dugunez, N zenbakia ε eta x delakoen menpean dago.

Oharra

Konbergentzia puntuala definitu ondoren, aurkezten den problemarik garrantzizkoena hauxe da: limitera pasatzean, $f_n(x)$ $(n = 1,2,3,...)$ funtzioen propietateetatik zeintzu gordetzen diren jakitea.

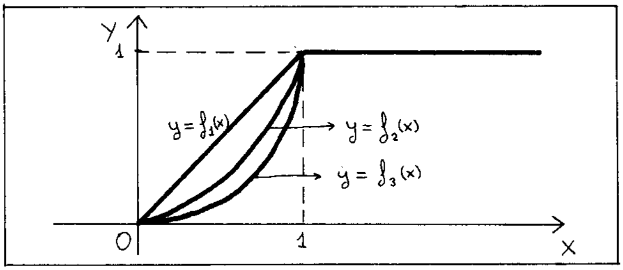
$f_n(x)$ $(n = 1,2,3,...)$ funtzioak jarraiak edo deribagarriak badira, noiz esan daiteke $f(x)$ limite funtzioa jarraia edo deribagarria dela?

Generalki, ondoko adibideetan ikusiko dugunez, konbergentzia puntualak ez du behar den bezain indar $f(x)$ funtzioak $f_n(x)$ funtzioen propietateak betetzeko

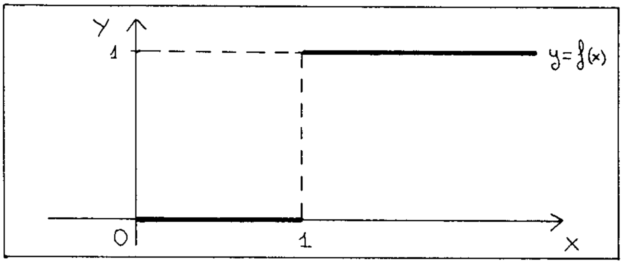
a) Demagun

$$f_n(x) = \begin{cases} x^n & 0 \leq x < 1 \quad \text{denean,} \\ 1 & x \geq 1 \quad \text{denean.} \end{cases} \qquad (n = 1,2,..)$$

funtzio-segida dugula.



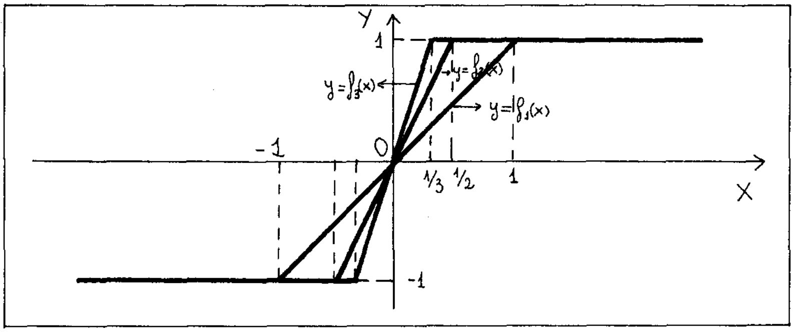
$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) = \begin{cases} 0 & 0 \leq x < 1 \quad \text{denean,} \\ 1 & x \geq 1 \quad \text{denean.} \end{cases}$$



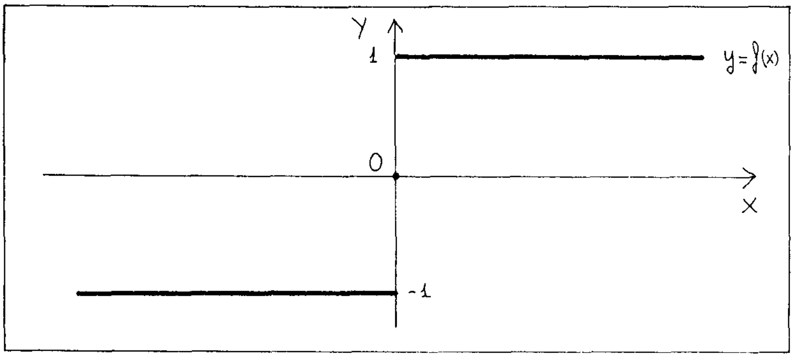
Adibide honetan, $f_n(x)$ $(n = 1,2,...)$ funtzioak $[0,+\infty)$ tartean jarraiak izan arren, $f(x)$ funtzio limitea $x=1$ puntuan etena da.

b) Kontsidera dezagun ondoko funtzioen segida:

$$f_n(x) = \begin{cases} -1 & x < -\frac{1}{n} \quad \text{denean,} \\ nx & -\frac{1}{n} \leq x \leq \frac{1}{n} \quad \text{denean,} \quad (n=1,2,..) \\ 1 & \frac{1}{n} < x \quad \text{denean.} \end{cases}$$



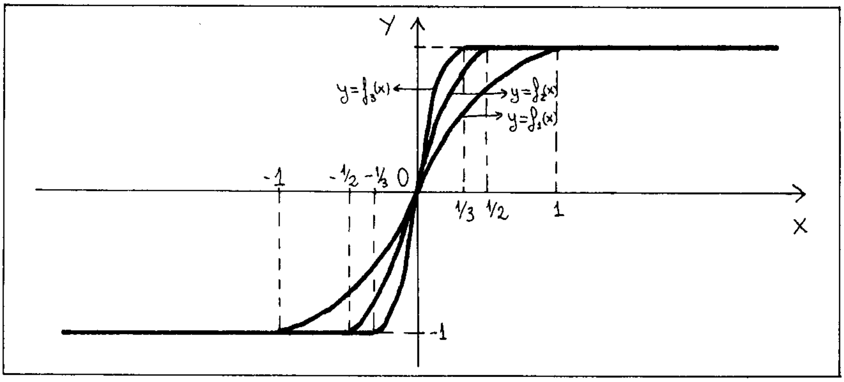
$$f(x) = \lim_{n \to \infty} f_n(x) = \begin{cases} -1 & x < 0 \quad \text{denean,} \\ 0 & x = 0 \quad \text{denean,} \\ 1 & x > 0 \quad \text{denean.} \end{cases}$$



Berriro ere, $f(x)$ funtzioa etena da nahiz eta $f_n(x)$ $(n=1,2,..)$ funtzio guztiak jarraiak izan.

c) Adibide honetan $f_n(x)$ $(n = 1,2,\ldots)$ funtzioak deribagarriak dira R multzo guztian:

$$f_n(x) = \begin{cases} -1 & x < -\frac{1}{n} \text{ bada,} \\ \sin\frac{n\pi x}{2}, & -\frac{1}{n} \leq x \leq \frac{1}{n} \text{ bada,} \quad (n = 1,2,\ldots.) \\ 1 & \frac{1}{n} < x \text{ bada.} \end{cases}$$

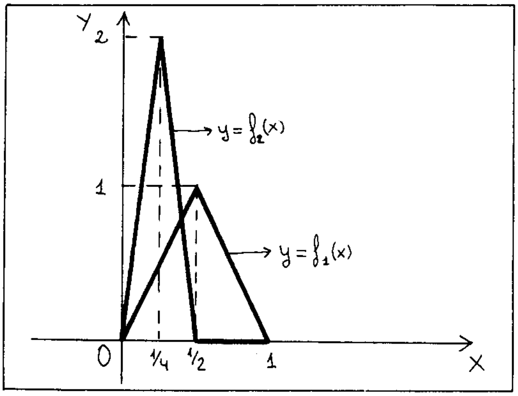


$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \begin{cases} -1 & x < 0 \text{ denean,} \\ 0 & x = 0 \text{ denean,} \\ 1 & x > 0 \text{ denean.} \end{cases}$$

Beraz, funtzio limitea, $f(x)$, ez da deribagarria ez jarraia.

d) Azkenengo adibide honetan $f_n(x)$ $(n = 1,2,\ldots)$ funtzioak integragarriak dira $[0,1]$ tartean.

$$f_n(x) = \begin{cases} 2n^2x & 0 \leq x < \frac{1}{2n} \text{ denean,} \\ 2n-2n^2x & \frac{1}{2n} \leq x \leq \frac{1}{n} \text{ denean,} \quad (n = 1,2,\ldots) \\ 0 & \frac{1}{n} < x \leq 1 \text{ denean.} \end{cases}$$



$$\int_0^1 f_n(x)\,dx = \int_0^{1/2n} 2n^2x\,dx + \int_{1/2n}^{1/n} (2n-2n^2x)\,dx = \frac{1}{2}, \quad \forall n \in N.$$

Bestalde, erraz ikusten da $\forall x \in [0,1]$, $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$ dela; beraz,

$$f(x) = 0 \,, \qquad \forall x \in [0,1]$$

Honelatan, ba, funtzio limitea, f(x), integragarria da [0,1] tartean, baina limitea eta integrala ez dira trukakorrak:

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx \neq \int_0^1 \left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right) dx.$$

21.4. Definizioa

A multzo batetan $\{f_n(x)\}$ segida funtzionalak f(x) funtziorantz uniformeki konbergitzen duela esaten da ondoko baldintza betetzen duenean:

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \forall x \in A \,, \quad \exists N = N(\varepsilon) \;/\; \forall n > N, \; |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

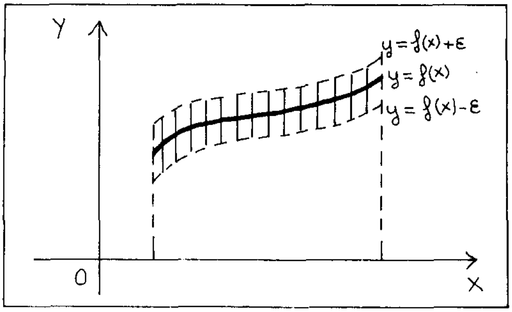
Kasu hori $f_n \xrightarrow{u} f$ edo $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ [uniformeki] adierazten da.

f(x) funtzioa segida funtzionalaren limite uniformea deitzen da.

Aurreko baldintzan N delakoa ez da x-en funtzioa; beraz, ε finkatuz, A multzoko edozein x puntutarako N-ren balio bakar bat erabil daiteke.

Adierazpen geometrikoa

f(x) funtzioa A multzoan $\{f_n(x)\}$ segidaren limite uniformea bada, $y = f(x) + \varepsilon$ eta $y = f(x) - \varepsilon$ ekuazioetako kurbek mugatzen duten edozein bandetarako zenbaki arrunt bat, N, existitzen da, non N-tik aurrerantzeko edozein n-tarako, $f_n(x)$ funtzioaren grafikoa banda horren barnean baitago



21.5. Teorema

A multzoan $\{f_n(x)\}$ segida funtzionala uniformeki konbergentea baldin bada, orduan multzo honetan puntualki konbergentea da.

Definizioak kontutan harturik, frogapena bistakoa da.

<u>Oharra</u>

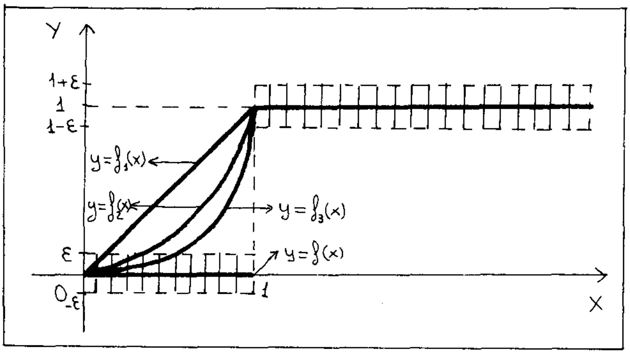
Ondoko adibideetan ikusten denez, konbergentzia puntualak ez du konbergentzia uniformerik inplikatzen.

Har dezagun ikusitako d) adibidea:

$$f_n(x) = \begin{cases} 2n^2x & 0 \leq x < \frac{1}{2n} \text{ denean,} \\ 2n - 2n^2x & \frac{1}{2n} \leq x \leq \frac{1}{n} \text{ denean, } (n=1,2,\dots) \\ 0 & \frac{1}{n} < x \leq 1 \text{ denean.} \end{cases}$$

Segida honen limite puntuala $\forall x \in [0,1]$, $f(x) = 0$ funtzioa da, baina funtzio nulua ez da limite uniformea. Funtzio honen inguruan 2ε zabaleradun banda bat hartzen badagu, nahiz eta n oso handia hartu, $f_n(x)$ funtzioaren grafikoa ez dago bandaren barnean.

Problema berbera planteiatzen da a) adibidean:



Segida honen limite puntuala ondokoa da:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & 0 \leq x < 1 \quad \text{denean,} \\ 1 & x \geq 1 \quad \text{denean.} \end{cases}$$

Baina funtzio hau ez da limite uniformea. Esate baterako, $\varepsilon < 1/2$ hartuz, f-ren inguruan dagoen 2ε zabaleradun banda kontsideratzen badugu, nahiz eta n oso handia hartu, $f_n(x)$ funtzioaren grafikoa ez dago banda horren barnean.

21.6. Teorema

$[a,b]$ tartean $f_n(x)$ $(n = 1,2,...)$ funtzioak jarraiak badira eta tarte honetan $\{f_n(x)\}$ segida funtzionalak $f(x)$ funtziorantz uniformeki konbergitzen badu, orduan $f(x)$ funtzioa jarraia da $[a,b]$ tartean.

Frogapena

Suposa dezagun x_0 puntua $[a,b]$ tarteko edozein puntu dela; $f(x)$ funtzioa x_0 puntuan jarraia dela frogatuko dugu.

$[a,b]$ tartean $\{f_n(x)\}$ segidaren limite uniformea $f(x)$ denez, tarte honetako z puntu guztietarako ondoko hau dugu:

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N = N(\varepsilon) \; / \; \forall n > N \quad |f_n(z) - f(z)| < \varepsilon \qquad (1)$$

Bestalde,

$$|f(x)-f(x_0)| \leq |f(x)-f_n(x)| + |f_n(x)-f_n(x_0)| + |f_n(x_0)-f(x_0)|.$$

x eta x_0 puntuak $[a,b]$ tartekoak direnez, edozein ε hau taturik, (1) baldintzaren bidez ondoko desberdintzak ditugu:

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \qquad (n > N),$$

$$|f_n(x_o) - f(x_o)| < \varepsilon \qquad (n > N).$$

Gainera, f(x) funtzioa jarraia denez, aurreko ε delakorako:

$$\exists \delta > 0 \quad / \quad |x-x_o| < \delta \longrightarrow \qquad |f_n(x) - f_n(x_o)| < \varepsilon.$$

Honelatan, ba,

$$|f(x) - f(x_o)| < 3\varepsilon \ , \quad |x-x_o| < \delta \quad \text{eta} \quad \forall \varepsilon > 0 \text{ denean.}$$

Eta teorema frogatu dugu.

21.7. Teorema

$f_n(x)$ $(n = 1,2,3,\ldots)$ funtzioak $[a,b]$ tartean integragarriak badira, $[a,b]$ tartean $\{f_n(x)\}$ segida funtzionalaren limite uniformea f(x) funtzioa bada eta tarte honetan f(x) funtzioa integragarria bada, orduan limitea eta integrala trukakorrak dira:

$$\int_a^b \left(\lim_{n\to\infty} f_n(x) \right) dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\, dx.$$

Frogapena

$$[a,b] \text{ tartean } \quad \{f_n(x)\} \xrightarrow{u} \quad f(x) \quad \text{denez,}$$

$$\forall x \in [a,b] \ , \ \forall \varepsilon > 0, \ \exists N = N(\varepsilon) \ / \ \forall n > N, \ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

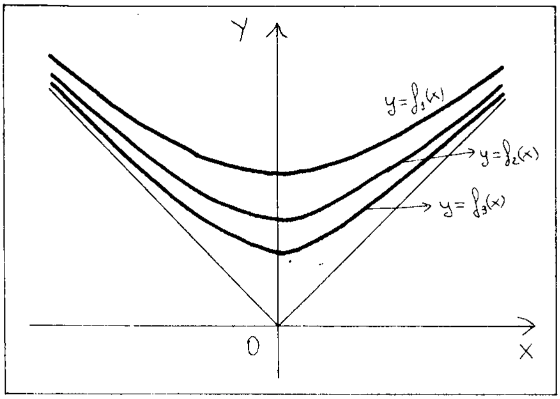
Honelatan,ba, n > N bada,

$$\left| \int_a^b f_n(x)\, dx - \int_a^b \left(\lim_{n\to\infty} f_n(x) \right) dx \right| = \left| \int_a^b f_n(x)\, dx - \int_a^b f(x)\, dx \right| =$$

$$= \left| \int_a^b [f_n(x)-f(x)]\, dx \right| \leq \int_a^b [f_n(x)-f(x)]\, dx \leq \varepsilon \int_a^b dx = \varepsilon(b-a).$$

Eta desberdintza $\forall \varepsilon > 0$ eta $\forall n > N$ baliotarako betetzen denez, limitearen definizioaren bidez, teorema frogaturik dago.

Ikusi dugu limite uniformeak jarraitasuna gordetzen duela, baina $f_n(x)$ $(n = 1,2,3,\ldots)$ funtzioak deribagarriak izan arren, limite uniformeak ez du zertan deribagarria izan behar. Adibidez, $f_n(x)$ $(\forall n \in N)$ funtzioen grafikoak ondoko hiperbolak badira, funtzio deribagarriak dira, baina beraien limite uniformea, $f(x) = |x|$ funtzioa, ez da deribagarria.



Bestalde, limite uniformea deribagarria baina $f'(x) \neq \lim\limits_{n\to\infty} f_n'(x)$ izatea gerta daiteke.

21.8. Teorema

Demagun $[a,b]$ tartean $f_n(x)$ $(n = 1,2,3,\ldots\ldots)$ funtzioak deribagarriak direla eta tarte honetan $\{f_n(x)\}$ segidak $f(x)$ funtziorantz puntualki konbergitzen duela. Suposa dezagun baita ere, $\{f'_n(x)\}$ segidak $g(x)$ funtzio jarrai batetarantz uniformeki konbergitzen duela $[a,b]$ tartean. Orduan, $f(x)$ funtzioa deribagarria izango da eta ondoko berdintza betetzen da.

$$f'(x) = \lim_{n\to\infty} f'_n(x).$$

Frogapena

Hipotesiz, $\forall x \in [a,b]$ $\{f'_n(x)\} \xrightarrow{u} g(x)$ eta $g(x)$ funtzio jarraia (beraz, integragarria) direnez, 21.7. teoremaren bidez ondoko hau dugu:

$$\int_a^x g(t)\,dt = \lim_{n\to\infty} \int_a^x f'_n(t)\,dt = \lim_{n\to\infty} [f_n(x)-f_n(a)] = f(x) - f(a)$$

Honelatan, ba, $g(x) = f'(x)$ $x \in [a,b]$ dela dugu, eta berdintza honek teorema frogatzen du.

22. GAIA :

SERIE FUNTZIONALAK.

22. G A I A

SERIE FUNTZIONALAK

22.1. Definizioa

E multzo batetan $\{f_n(x)\}$ funtzio-segida bat emanez, ondoko expresioa,

$$f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_n(x) + \ldots,$$

serie funtzionala edo funtzio-seriea deitzen da eta $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ sinboloaz adierazten.

$s_n(x) = f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_n(x)$ batura n-garren batura partziala deitzen da.

22.2. Definizioa

x_o puntua E multzoko puntu bat izanik,

$$f_1(x_o) + f_2(x_o) + \ldots + f_n(x_o) + \ldots$$

zenbaki-seriea konbergentea bada, $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ serie funtzionala x_o puntuan konbergentea dela esaten da.

Propietate hau betetzen duten puntuen multzoa, D, serie funtzionalaren konbergentzi eremua deitzen da:

$$D = \left\{ x \in E \ / \ \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \ \text{konbergentea} \right\}$$

$D \neq \phi$ bada, ondoko eran definitzen den f(x) funtzioa,

$$\forall x \in D \qquad f(x) = \lim_{n \to \infty} s_n(x)$$

serie funtzionalaren batura deitzen da, eta $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ idazten.

Adibidea

Kalkula dezagun ondoko seriaren konbergentzi eremua eta batura:

$$1 + x + x^2 + \dots + x^n + \dots$$

$x = x_o$ balio bakoitzerako lortzen den seriea, $1 + x_o + x_o^2 + \dots + x_o^n + \dots$, $q = x_o$ arrazoidun serie geometrikoa da. Dakigunez, $|q| < 1$ denean, serie geometrikoa konbergentea da. Beraz, emandako serie funtzionalaren konbergentzi eremua (-1,1) tartea da.

Serie honen batura (-1,1) tartean definiturik dago eta $f(x) = \frac{1}{1-x}$ funtzioa da.

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \qquad \forall x \in (-1,1)$$

Suposa dezagun, D multzoan $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ serie funtzionalaren batura f(x) funtzioa dela; hau da, $\lim_{n \to \infty} s_n(x) = f(x)$

$$\forall \varepsilon > 0 \,,\quad \forall x \in D, \exists N = N(\varepsilon, x) \,/\, \forall n > N, \; |s_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

D multzoko puntuen kopurua finitua bada, $D = \{x_o, x_1, \dots, x_m\}$, nahikoa izango da $N = \max(N_o, N_1, \ldots N_m)$ hartzea, ondoko hau idazteko:

$$\forall \varepsilon>0 \ , \ \forall x \in D, \ \exists N = N(\varepsilon) \ / \ \forall n > N \ , \qquad |s_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

Baina D multzoak infinitu elementu badauzka, D multzoko puntu guztietarako ez du zertan N-ren balio komun bat existitu behar. $x \in D$ balio guztietarako N zenbaki komuna existitzen denean seriea uniformeki konbergentea dela esaten da.

22.3. Definizioa

D multzoan $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ seriea uniformeki konbergentea eta f(x) baturatzat duela edo f(x) funtziorantz uniformeki konbergitzen duela esaten da, ondoko baldintza betetzen denean:

$$\lim_{n\to\infty} s_n(x) = f(x) \quad [\text{ uniformeki}] \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \quad \forall \varepsilon>0 \ , \quad \forall x \in D, \ \exists N = N(\varepsilon) \ \mid \forall n > N \Longrightarrow |s_n(x)-f(x)| < \varepsilon$$

Adibidea

Izan bedi $x + (x^2-x) + (x^3-x^2) + \ldots + (x^n-x^{n-1}) + \ldots$ serie funtzionala; beraren gaiak ondoko hauek dira:

$$f_1(x) = x; \quad f_2(x) = x^2-x; \ldots; \ f_n(x) = x^n-x^{n-1}; \ \ldots.$$

Batura partzialak:

$$s_1(x) = x$$

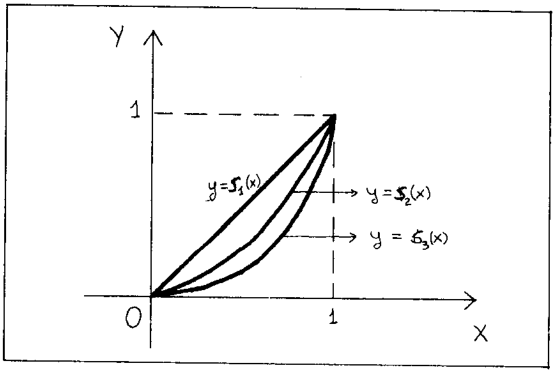
$$s_2(x) = x + (x^2-x) = x^2$$

$$\dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots$$

$$s_n(x) = x + (x^2-x) + \dots + (x^n-x^{n-1}) = x^n$$

$$\dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots$$

Marraz ditzagun batura partzial hauen grafikoak $[0,1]$ tartean:



$$f(x) = \lim_{n\to\infty} s_n(x) = \lim_{n\to\infty} x^n = \begin{cases} 0 & |x| < 1 \text{ denean,} \\ 1 & x = 1 \text{ denean.} \end{cases}$$

Baina batura partzialen segida funtzional hau ez da uniformeki konbergentea (21. gaian ikusi denez).

Beraz, emandako serie funtzionala ez da uniformeki konbergentea $(-1,1]$ tartean.

SERIE UNIFORMEKI KONBERGENTEEN OINARRIZKO PROPIETATEAK

22.4. Teorema

Demagun $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ serie funtzionalak $f(x)$ funtziorantz uniformeki konbergitzen duela [a,b] tartean.

$f_n(x)$ $(n = 1,2,\ldots)$ funtzioak [a,b] tartean jarraiak badira, orduan $f(x)$ funtzioa jarraia izango da [a,b] tartean.

Frogapena

Hipotesiz, $\lim_{n\to\infty} s_n(x) = f(x)$ [uniformeki] $\forall x \in [a,b]$
Eta $f_n(x)$ funtzioak jarraiak direnez,

$$s_n(x) = f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_n(x), \quad \forall n \in N$$

baturak jarraiak izango dira.

Eta 21.6. teoremaren bidez, teorema frogaturik geratzen da.

22.5. Teorema (Serie baten gaiz gaiko integrazioa)

Izan bedi $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ serie funtzionala $f(x)$ baturadun serie uniformeki konbergentea [a,b] tartean.

$f_n(x)$ $(n = 1,2,\ldots)$ eta $f(x)$ funtzioak [a,b] tartean integragarriak badira, ondoko berdintza betetzen da:

$$\int_a^b f(x)\, dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n(x)\, dx$$

Edo

$$\int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\, dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n(x)\, dx$$

Frogapena

Hipotesiz, $\lim_{n\to\infty} s_n(x) = f(x)$ [uniformeki] $\forall x \in [a,b]$

$f_n(x)$ integragarriak $\Longrightarrow$ $s_n(x) = f_1(x) + f_2(x) +..+f_n(x)$ integragarriak.

21.7. teoremaren bidez,

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b s_n(x)\,dx =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \int_a^b (f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_n(x))\,dx =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_1(x)dx + \int_a^b f_2(x)dx + \ldots + \int_a^b f_n(x)dx =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \int_a^b f_k(x)\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx.$$

<u>22.6. Teorema</u> (Serie baten gaiz gaiko deribazioa)

$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ serieak $[a,b]$ tartean $f(x)$ funtziorantz puntualki konbergitzen badu, eta tarte honetan $\sum_{n=1}^{\infty} f'_n(x)$ seriak funtzio jarrai batetarantz uniformeki konbergitzen badu, orduan:

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f'_n(x) \qquad \forall x \in [a,b]$$

Edo

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} f'_n(x) \quad dx$$

<u>Frogapena</u>

$f_n(x)$ funtzioak deribagarriak direnez,

$s_n(x) = f_1(x) + \ldots + f_n(x)$ baturak ere, deribagarriak dira eta,

$$s'_n(x) = f'_1(x) + f'_2(x) + \dots + f'_n(x)$$

Hipotesiz,

$$\lim_{n\to\infty} s_n(x) = f(x) \quad [\text{puntualki}] \quad \forall x \in [a,b]$$

eta

$$\lim_{n\to\infty} s'_n(x) = g(x) \quad [\text{uniformeki}] \quad \forall x \in [a,b] \;;$$

$g(x)$ funtzioa jarraia izanik.

Beraz, 21.8 teoremaren bidez,

$$f'(x) = \lim_{n\to\infty} s'_n(x) = \lim_{n\to\infty} (f'_1(x) + f'_2(x) + \dots + f'_n(x)) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f'_k(n) = \sum_{n=1}^{\infty} f'_n(x)$$

22.7. Weierstrass-en erizpide nahikoa konbergentzia uniformerako.

Gai positibotako serie konbergente bat, $a_1+a_2+..+a_n+..$, existitzen bada, zeinen gaiak ondoko desberdintzak:

$$|f_n(x)| \leq a_n \qquad \forall x \in A \quad (n = 1,2,\dots)$$

betetzen baitituzte, orduan $f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_n(x) + \dots$ serie funtzionala absolutuki konbergentea (eta beraz, konbergentea) eta uniformeki konbergentea izango da A multzoan.

Frogapena

a) Ikus dezagun, serie funtzionala absolutuki konberbentea dela. Dakigunez, serie bat absolutuki konbergentea de la esaten da, beraren gaien balio absolutuen seriea konbergentea denean

$$\left.\begin{array}{l} \forall x \in A, \quad \sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)| \leq \sum_{n=1}^{\infty} a_n \\ \sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \text{konbergentea} \end{array}\right\} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \quad \forall x \in A \quad \sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)| \quad \text{konbergentea} \quad \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \quad \forall x \in A \quad \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \quad \text{absolutuki konbergentea.}$$

b) Ikus dezagun, serie funtzionala uniformeki konbergentea dela A multzoan.

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \text{konbergentea} \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k = 0 \quad \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \forall \varepsilon > 0, \ \exists N = N(\varepsilon) \ / \ \forall n > N \quad \left|\sum_{k=n}^{\infty} a_k\right| < \varepsilon$$

Suposa dezagun, $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ seriearen batura A multzoan $f(x)$ dela; beraz,

$$|f(x) - s_n(x)| = \left| \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) - \sum_{k=1}^{n} f_k(x) \right| =$$

$$= \left|\sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(x)\right| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} |f_k(x)| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k < \varepsilon$$

Baldintza hau $\forall \varepsilon > 0$, $\forall x \in A$, $\forall n > N$ balioetarako betetzen da. Beraz N zenbakia x-en dependentea ez denez, serie funtzionala uniformeki konbergentea da A multzoan.

Adibidea

Azter dezagun ea ondoko serie funtzionala absolutuki eta uniformeki konbergentea den:

$$\frac{\sin x}{2} + \frac{\sin 2x}{2^2} + \dots + \frac{\sin nx}{2^n} + \dots$$

Azken teoremaren arauera, serie hau absolutuki eta uniformeki konbergentea izango da, baldin serie honen honen zenbaki-serie majoratzaile konbergente bat lor badezakegu

$$\left|\frac{\sin nx}{2^n}\right| \leq \frac{1}{2^n} \qquad \forall x \in R \qquad (n = 1,2,\dots)$$

Eta $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ serie geometriko konbergentea denez, serie funtzionala R multzoan absolutuki eta uniformeki konbergentea da.

22.8. Cauchy-ren baldintza konbergentzia uniformerako

A multzoan $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ seriea uniformeki konbergentea da, baldin eta soilik baldin:

$$(1)\ \forall \varepsilon>0,\ \forall x \in A,\ \exists N = N(\varepsilon)\ /\ \forall n > N,\ (p=1,2,..)\ \left|\sum_{k=n+1}^{n+p} f_k(x)\right| < \varepsilon$$

Frogapena

$s_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x)$ denez, (1) baldintza ondokoan bihurtzen da:

$$(2)\ \forall \varepsilon>0,\ \forall x \in A,\ \exists N=N(\varepsilon)\ /\ \forall n> N\ \ (p=1,2,..)\ |s_{n+p}(x)-s_n(x)| < \varepsilon$$

$\Longrightarrow)$ $\forall x \in A$ $\lim_{n\to\infty} s_n(x) = f(x)$ [uniformeki] bada, $\forall \varepsilon > 0$ eta

$\forall x \in A$ baliotarako hauxe dugu:

$$\left.\begin{array}{l} \exists N = N(\varepsilon) \;/\; \forall n > N \implies |s_n(x) - f(x)| < \varepsilon/2 \\ \exists N = N(\varepsilon) \;/\; \forall n > N \quad (p=1,2,\ldots) \implies |s_{n+p}(x) - f(x)| < \varepsilon/2 \end{array}\right\}$$

$$\Longrightarrow \qquad |s_{n+p}(x) - s_n(x)| < \varepsilon$$

$\Longleftarrow)$ $\forall x \in A$ $|s_{n+p}(x) - s_n(x)| < \varepsilon$ erlazioa betetzen bada, zenbaki-serieetan ikusitako Cauchy-ren erizpidearen bidez, A multzoan $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ konbergentea dela dugu; beraz,

$$\forall x \in A \qquad \lim_{n\to\infty} s_n(x) = f(x) \qquad [\text{puntualki}]$$

Ikusi behar dugu f(x) funtzioa limite uniformea dela. p infiniturantz doanean (2) baldintzatik ondokoa ateratzen da:

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \forall x \in A, \exists N = N(\varepsilon) \;/\; \forall n > N, \; |s_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

Hau da,

$$\lim_{n\to\infty} s_n(x) = f(x) \qquad \forall x \in A \; [\text{uniformeki}]$$

23. GAIA :

BERRREDURA - SERIEAK

23. G A I A

BERREDURA - SERIEAK

23.1. Definizioa

$c_0 + c_1x + c_2x^2 + \dots + c_nx^n + \dots$ [1] motatako serie funtzionalak berredura-serieak deitzen dira, eta $c_0, c_1, \dots, c_n, \dots$ zenbakiak berredura-seriearen koefizienteak.

Oharra.- [1] berredura-seriea $x=0$ puntuan beti da konbergentea.

23.2. Teorema (Abel-en lema)

[1] berredura-seriea $x_0 \neq 0$ puntu batetan konbergentea baldin bada, orduan $|x| < |x_0|$ baldintza betetzen duten x puntu guztietan konbergentea eta absolutuki konbergentea da.

Beste era batetan esanda, [1] berredura-seriea x_0 puntuan konbergentea bada orduan absolutuki konbergentea da $(-|x_0|, |x_0|)$ tartean.

Frogapena

Hipotesiz, $c_0 + c_1x_0 + \dots + c_nx_0^n + \dots$ zenbaki-seriea konbergentea denez,

$$\lim_{n\to\infty} c_nx_0^n = 0$$

Eta zero limitetzat dituzten segidak bornaturik daude; beraz,

$$\exists M > 0 \quad / \quad |c_n x_0^n| < M \qquad (n = 0,1,2,\ldots)$$

$|x| < |x_0|$ denean:

$$|c_n x^n| = \left| c_n x_0^n \left(\frac{x}{x_0}\right)^n \right| < M \left|\frac{x}{x_0}\right|^n = M q^n$$

$0 < q = \left| \frac{x}{x_0} \right| < 1$ izanik.

Honelatan, ba, $\sum_{n=0}^{\infty} M q^n$ zenbaki-seriea $q < 1$ arrazoidun serie geometrikoa da; beraz, konbergentea. Eta konparaziozko teoremaren bidez, $\sum_{n=0}^{\infty} |c_n x^n|$ serie konbergentea da $|x|<|x_0|$ denean; hau da, $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ berredura-seriea absolutuki konbergentea $|x|<|x_0|$ denean.

23.3. Ondorioa

x_1 puntu batetan $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ berredura-seriea dibergentea bada, orduan $|x|>|x_1|$ baldintza betetzen duten x puntuetan dibergentea da.

Frogapena

$|x|>|x_1|$ baldintza betetzen duen x puntu batetan berredura-seriea konbergentea izango balitz, Abel-en lemaren arauera, x_1 puntuan seriea konbergentea izango litzateke, hipotesiaren aurka.

Berredura-serie baten konbergentzi tartea eta erradioa

a) Ba daude edozein $x \neq 0$ puntutan dibergenteak diren berredura-serieak. Har dezagun, adibidez, $\sum_{n=0}^{\infty} n!\ x^n$ seriea.

Balio absolutuen serieari D'Alembert-en erizpidea apli katzen badiogu:

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{(n+1)!\ x^{n+1}}{n!\ x^n} \right| = \lim_{n\to\infty} |x|\ (n+1) = \infty \quad (\forall x \neq 0) \Longrightarrow$$

$\Longrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} n!\ x^n$ seriea ez da absolutuki konbergentea $x \neq 0$ denean.

Gainera ez da konbergentea ere ez, zeren x_o puntu batetan konbergentea izango balitz, Abel-en leman ikusi dugunez, $(-|x_o|, |x_o|)$ tartean seriea absolutuki konbergentea izan beharko litzatekeen.

b) Existitzen dira, baita ere, puntu guztietan absolutuki konbergenteak diren berredura-serieak.

Esate baterako, lor dezagun $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ berredura-seriearen izaera.

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{x^{n+1}}{x^n} \frac{n!}{(n+1)!} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{|x|}{n+1} = 0 \qquad (\forall x \in R) \Longrightarrow$$

$\Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ seriea puntu guztietan absolutuki konbergentea da.

c) Existitzen dira halaber, zero ez diren puntu batzutan konbergenteak eta beste batzutan dibergenteak diren berredura-serieak.

Har dezagun $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ seriea. Balio absolutuen seriea ri D'Alembert-en erizpidea aplikatzen bazaio, $|x| < 1$ tartean absolutuki konbergentea eta $|x| > 1$ puntuetan dibergentea dela ikusten da.

23.4. Teorema

$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ berredura-serieetarako, zenbaki positibo bat, R, ($0 \leq R < +\infty$ izanik) existitzen da, non:

I) $R = 0$ bada, $x \neq 0$ puntu guztietan seriea dibergentea den,

II) $R = +\infty$ bada, zuzen errealaren puntu guztietan seriea absolutuki konbergentea den,

III) $0 < R < +\infty$ bada, $(-R,R)$ tartean seriea absolutuki konbergentea den eta $[-R,R]^c$ multzoan dibergentea.
($x = R$ eta $x = -R$ puntuetarako ez da ezer esaten).

Frogapena

I) eta II) enunziatuak III) enunziatuaren kasu partikularrak direnez, nahikoa da azken hau frogatzea.

Suposa dezagun, $a_1 > 0$ eta $b_1 > 0$ bi puntu desberdinak existitzen direla, $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ seriea a_1 puntuan konbergentea izanik eta b_1 puntuan dibergentea.

Tarte bateko muturretan seriearen izaera desberdina denean, tartea fundamentala deituko dugu $[a_1,b_1]$ tartea tarte fundamental bat da.

$[a_1, b_1]$ tartea erdibitzen badugu, tarte berrietariko bat fundamentala da eta $[a_2, b_2]$ adieraziko dugu.

Prozesu hori errepikatuz eta Cantor-ren teorema kontutan hartuz, ondoko baldintza ateratzen da: "Tarte fundamental guztien ebakidura puntu bakar bat, R, da".

Ikus dezagun, R balioak teoremaren baldintzak betetzen dituela.

$|x| < R$ bada, $\exists a_n$, $|x| < a_n < R$ izanik. Eta berredura-seriea a_n puntuan konbergentea denez, Abel-en lemaren arauera, konbergentea izango da halaber, x puntuan.

$|x| > R$ bada, $\exists b_n$, $|x| > b_n > R$ izanik. Eta $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ seriea b_n puntuan dibergentea denez, Abel-en ondorioaren bidez, berredura-seriea dibergentea izango da x puntuan.

23.5. Definizioa

R zenbakia berredura-seriearen konbergentzi erradioa deitzen da, eta (-R,R) tartea, konbergentzi tartea.

Oharra:

Konbergentzi tartea kalkulatzeko, balio absolutuen seriei D'Alembert-en edo Cauchy-ren erizpideak aplikatzen zaizkie.

Ondoko teoremak berredura-serieen konbergentzi erradioa kalkulatzeko beste formula bat ematen du.

23.6. Teorema (Cauchy - Hadamard)

Izan bedi $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ [1] berredura-seriea. Kontsidera ditzagun $\Lambda = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|}$ eta $R = \frac{1}{\Lambda}$ balioak. Orduan, R hau emandako seriearen konbergentzi erradioa da.

Beste modu batetan esanda:

I) $R = \infty$ bada, [1] seriea zuzen errealaren puntu guztietan konbergentea da.

II) $R = 0$ bada, $\forall x \neq 0$ puntutarako [1] seriea dibergentea da.

III) $0 < R < +\infty$ bada, [1] seriea $|x| < R$ denean absolutuki konbergentea da eta $|x| > R$ denean, dibergentea.

Frogapena

I) $R = \infty \Longrightarrow \Lambda = 0$. Orduan,

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n x^n|} = |x| \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|} = |x| \cdot 0 = 0 < 1$$

Cauchy-ren erizpidearen arauera, $\sum_{n=0}^{\infty} |c_n x^n|$ konbergentea da x guztietarako; beraz [1] seriea absolutuki konbergentea da x guztietarako.

II) $R = 0 \Longrightarrow \Lambda = +\infty \Longrightarrow \forall x \neq 0 \quad \exists c_{n_k} \mid \sqrt[n_k]{|c_{n_k}|} > \frac{1}{|x|}$

$$\Longrightarrow \sqrt[n_k]{|c_{n_k} x^{n_k}|} > 1 \Longrightarrow |c_n x^n| \not\longrightarrow 0.$$

$x \neq 0$ denean, gai generalak ez du zerorantz jotzen; beraz, $x \neq 0$ denean [1] seriea dibergentea da.

III) $0 < R < +\infty \implies 0 < \Lambda < +\infty$

a) $|x| < R = \dfrac{1}{\Lambda} \implies \exists\, 0 < \theta < 1 \;/\; |x| = \dfrac{\theta^2}{\Lambda} \implies$

$$\implies \frac{\theta}{|x|} = \frac{\Lambda}{\theta} > \Lambda$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|} = \Lambda \implies \sqrt[n]{|c_n|} < \frac{\theta}{|x|}, \forall n > N \implies$$

$$\implies \sqrt[n]{|c_n x^n|} < \theta \implies |c_n x^n| < \theta^n, \quad \forall n > N$$

$\sum\limits_{n=0}^{\infty} \theta^n$ serie geometriko konbergentea da eta $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |c_n x^n|$ seriearen majoratzailea; beraz, [1] seriea absolutuki konbergentea da $|x| < R$ denean.

b) $|x| > R = \dfrac{1}{\Lambda} \implies \exists\, n_k \mid \sqrt[n_k]{|c_{n_k}|} > \dfrac{1}{|x|} \implies$

$$\implies \sqrt[n_k]{|c_{n_k} x^{n_k}|} > 1 \implies |c_{n_k} x^{n_k}| > 1 \implies$$

$$\implies c_n x^n \not\longrightarrow 0$$

Honelatan, ba, [1] seriea dibergentea da $|x| > R$ denean.

<u>Oharra</u>:

$x = R$ eta $x = -R$ puntuetan ez dakigu [1] seriea konbergentea edo dibergentea den.

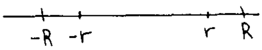
Berredura-serieen oinarrizko propietateak

23.7. Teorema

$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ [1] berredura-seriea edozein $[-r,r] \subset (-R,R)$ tarte itxitan uniformeki konbergentea da.

Frogapena

$$-R < -r < r < R$$



$$|x| \leq r \Rightarrow |c_n x^n| \leq |c_n r^n|$$

$\sum_{n=0}^{\infty} |c_n r^n|$ zenbaki-seriea konbergentea da eta $[-r,r]$ tartean [1] seriearen majoratzailea; beraz, Weierstrass-en erizpidean bidez, [1] seriea uniformeki konbergentea da $[-r,r]$ tartean.

Ondorioa

$|a| < R$, $|b| < R$ eta $a < b$ badira, [1] seriea uniformeki konbergentea da $[a,b]$ tartean.

23.8. Teorema

$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ [1] berredura-seriearen batura, $s(x)$, jarraia da $(-R,R)$ tartean.

Frogapena

$$\forall x \in (-R,R), \ \exists r > 0 \ / \ -R < -r \leq x \leq r < R$$

[1] seriea $[-r,r]$ tartean uniformeki konbergentea denez eta $c_n x^n$ $(n=1,2,..)$ funtzioak jarraiak direnez, 22.4 teoremaren arauera, seriearen batura, $s(x)$, x puntuan jarraia izango da. Baina x $(-R,R)$ tarteko edozein puntu denez, $s(x)$ funtzioa

(-R,R) tartean jarraia da.

23.9. Teorema

$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ berredura-seriea $\forall\, [a,b] \subset (-R,R)$ tarte itxitan gaiz gai integra daiteke.

Frogapena

$\forall\, [a,b] \subset (-R,R)$ tartetan berredura-seriea uniformeki konbergentea eta beraren gaiak eta batura jarraiak direnez, teorema hau 22.5. teoremaren ondorio bat da; hots,

$$\int_a^b \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \, dx = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \int_a^b x^n \, dx =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n+1} \left(b^{n+1} - a^{n+1}\right).$$

Oharra:

Berredura-serie bat 0-tik X-eraino ($x \in (-R,R)$) integratzean, berredura-serie berri bat lortzen da eta beraren konbergentzi erradioa emandako seriearena edo handiagoa da.

Frogapena

$x \in (-R,R)$ izanik, $s(x) = c_0 + c_1 x + \ldots + c_n x^n + \ldots$ seriea 0-tik x-eraino integratzen badugu,

$$\int_0^x s(x)\, dx = c_0 x + \frac{c_1}{2} x^2 + \ldots + \frac{c_n}{n+1} x^{n+1} + \ldots$$

berredura-seriea lortzen dugu eta $\forall x \in (-R,R)$ balioetarako konbergentea denez, beraren konbergentzi erradioa R edo R baino handiagoa izango da.

23.10. Teorema

$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ seriearen batura deribagarria da $(-R,R)$ tartean eta tarte honetan gaiz gai deriba daiteke.

Frogapena

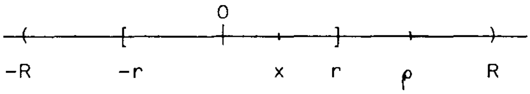
$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ seriea gaiz gai deribatuz

$$c_1 + 2c_2 x + \dots + nc_n x^{n-1} + \dots\dots$$

seriea lortzen da

$$\forall x \in (-R,R) \implies \exists r \mid x \in [-r,r] \subset (-R,R)$$

Har dezagun ρ zenbaki bat, $0 < r < \rho < R$ izanik.



$$|n c_n x^{n-1}| \leq |n c_n r^{n-1}| = |n c_n \rho^{n-1} (\frac{r}{\rho})^{n-1}| = |c_n \rho^{n-1}| n (\frac{r}{\rho})^{n-1} \quad [2]$$

$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ seriea $x = \rho$ puntuan konbergentea $\implies$

$\implies \lim_{n\to\infty} c_n \rho^n = 0 \implies \{c_n \rho^n\}$ segida bornatua $\implies$

$\implies \exists M_1 = \rho M > 0 \mid \; |c_n \rho^n| < \rho M \; , \; (n=1,2,\dots) \implies$

$\implies \exists M > 0 \mid \; |c_n \rho^{n-1}| < M \quad (n = 1,2,\dots). \qquad [3]$

[2] eta [3] baldintzak kontutan harturik, ondokoa dugu:

$$|n c_n x^{n-1}| < M n \; q^{n-1} \qquad , \; (0 < \frac{r}{\rho} = q < 1 \text{ izànik}).$$

Eta $\sum_{n=1}^{\infty} M\,n\,q^{n-1}$ zenbaki-seriea konbergentea denez, Weierstrass-en teoremaren arauera, $\sum_{n=1}^{\infty} n\,c_n x^{n-1}$ serie deribatua uniformeki konbergentea da $[-r,r]$ tartean. Honelatan, ba, emandako seriearen batura deribagarria da x puntuan eta puntu hau $(-R,R)$ tarteko edozein puntu denez, deribagarria da $(-R,R)$ tartean eta $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ seriea gaiz gai deriba daiteke.

23.11. Ondorioa

$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ berredura-seriea gaiz gai mugagabeki deriba eta integra daiteke $(-R,R)$ konbergentzi tartean, eta era honetan lortzen diren serieek konbergentzi erradio berbera dute.

Frogapena

$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ [1] berredura-seriea gaiz gai deribatuz,

$$c_1 + 2c_2 x + \dots + n\,c_n x^n + \dots\dots \qquad [2]$$

seriea lortzen da. Demagun [1] seriearen konbergentzi erradioa R dela eta [2] seriearena, R_1.

23.10 teoremaren arauera, [2] seriea gutxienez $(-R,R)$ tartean uniformeki konbergentea denez, $R_1 \geq R$ dela dugu. Baina [2] seriea gaiz gai integratuz [1] seriea lortzen denez, 23.9 teoremaren bidez $R_1 \leq R$ dela ateratzen dugu; beraz, $R = R_1$ da. Prozesu hau mugagabeki errepika daitekeenez, frogatu dugu ondorioa.

$x-x_0$ kenduraren berredura-serieak

Kontsidera dezagun $x - x_0$ kenduraren berredura-serie bat, hots,

$$c_o + c_1(x-x_o) + \dots + c_n(x-x_o)^n + \dots\dots \qquad [4]$$

motatako seriea, non x_o puntua edozein den.

$x_o = 0$ eginez, gai honetako lehen partean ikusitako serieak lortzen dira. Generalean, $x-x_o = z$ hartuz,

$$c_o + c_1 z + c_2 z^2 + \dots + c_n z^n + \dots\dots \qquad [5]$$

seriea lortzen da, eta serie honen konbergentzi erradioa R bada, dakigunez,

a) [5] seriea $|z| < R$ tartean absolutuki konbergentea da,

b) [5] seriea dibergentea da $|z| > R$ denean.

Honelatan, ba, $x-x_o = z$ denez, ondorio hauek ditugu:

a') [4] seriea $|x-x_o| < R$ tartean absolutuki konbergentea da,

b') [4] seriea dibergentea da $|x-x_o| > R$ denean.

23.12. Definizioa

$(x_o - R,\ x_o + R)$ tartea $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-x_o)^n$ seriearen konbergentzi tartea deitzen da eta R zenbakia, konbergentzi erradioa.

Oharra:

[4] serieak $(x_o - R,\ x_o + R)$ tartean [5] seriearen propietate guztiak betetzen ditu. Esate baterako:

1) [4] seriea $(x_o - R,\ x_o + R)$ tartearen edozein azpitarte itxitan uniformeki konbergentea da.

2) $(x_o - R,\ x_o + R)$ tartean [4] seriea gaiz gai nahi den beste bider deriba eta integra daiteke.

24. GAIA :

TAYLOR-EN SERIEAK

24. G A I A

TAYLOR-EN SERIEAK

24.1. Teorema

x_o puntuaren ingurune batetan f(x) funtzioa $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-x_o)^n$ serie bezela idatzi ahal bada, orduan c_0, c_1, c_2,..... koefizienteak ondoko eran definiturik daude:

$$c_o = f(x_o) \ , \quad c_1 = f'(x_o) \ , \quad c_2 = \frac{f''(x_o)}{2\,!}, \dots, \ c_n = \frac{f^n(x_o)}{n\,!}, \dots$$

eta

$$f(x) = f(x_o) + f'(x_o) + f''(x_o)\ \frac{(x-x_o)^2}{2\,!} + \dots + f^n(x_o)\ \frac{(x-x_o)^n}{n\,!} + \dots$$

seriea f(x) funtzioaren x_o puntuaren ingurune batetako Taylor-en seriea deitzen da.

Frogapena

Demagun $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-x_o)^n$ seriearen konbergentzi tartea $(x_o-R,\ x_o+R)$ dela. Dakigunez, serie hau gaiz gai deribatuz sortzen diren serieak konbergentzi tarte berbera dute.

$$f(x) = c_o + c_1(x-x_o) + c_2(x-x_o)^2 + \dots + c_n(x-x_o)^n + \dots\dots\dots$$

$$f'(x) = 1!\,c_1 + 2c_2(x-x_o) + \dots\dots\dots + nc_n(x-x_o)^{n-1} + \dots\dots$$

$$f''(x) = 2!\,c_2 + \dots\dots\dots + n(n-1)\ c_n(x-x_o)^{n-2} + \dots$$

- - - - - - - - - - - - - - - - - -

$$f^{n)}(x) = n!\,c_n + \dots\dots\dots$$

$x = x_o$ eginez, ondoko berdintzak ditugu:

$$\begin{array}{ll} f(x_o) = c_o & c_o = f(x_o) \\ f'(x_o) = 1!\, c_1 & c_1 = f'(x_o) \\ f''(x_o) = 2!\, c_2 & c_2 = \dfrac{f''(x_o)}{2!} \\ ------ & -------- \\ f^{n)}(x_o) = n!\, c_n & c_n = \dfrac{f^{n)}(x_o)}{n!} \end{array} \left.\vphantom{\begin{array}{l} a \\ a \\ a \\ a \\ a \\ a \\ a \end{array}}\right\} \quad [1]$$

$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-x_o)^n$ seriean $c_o, c_1, \ldots, c_n, \ldots$ espresioen ordez beraien balioak idazten baditugu, $f(x)$ funtzioaren Taylor-en formula lortzen dugu.

Oharra:

$c_o, c_1, \ldots, c_n, \ldots$ koefizienteak [1] formularen bidez unibokoki determinatzen dira; beraz, ondoko teorema frogatu dugu:

24.2. Bakartasunaren teorema

x_o puntuaren ingurune batetan $f(x)$ funtzioa berredura-seriez garagarria bada, beraren garapena bakarra da eta Taylor-en seriez adierazten.

Ondorioa

x_o puntuaren ingurune batetan bi berredura-serie, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_o)^n$ eta $\sum_{n=0}^{\infty} b_n(x-x_o)^n$, berdinak dira $a_o = b_o$, $a_1 = b_1$, .., $a_n = b_n$, ... direnean.

Funtzio bat Taylor-en seriez garagarria izateko baldintza beharrezko eta nahikoak.

Edozein funtzio ez da Taylor-en seriez garagarria; esate baterako:

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & x \neq 0 \text{ denean,} \\ 0 & x = 0 \text{ denean.} \end{cases}$$

f-ren ondoz-ondoko deribatuak $x = 0$ puntuan nuluak dira:

$$f(0) = f'(0) = f''(0) = \dots = f^{n)}(0) = \dots = 0$$

Honelatan, ba, Taylor-en formulak ez du $f(x)$ funtziorantz konbergitzen:

$$0 + 0 + 0 + \dots \not\longrightarrow f(x)$$

Beraz, emandako funtzioa ez da Taylor-en seriez garagarria.

24.3 Teorema

x_0 puntuaren ingurune batetan $f(x)$ funtzioa Taylor-en seriez garagarria bada, $f(x)$ funtzioak x_0 puntuan edozein ordenatako deribatuak ditu.

Frogapena

Nahikoa da 24.1 teorema kontutan hartzea.

24.4. Teorema

Suposa dezagun x_0 puntuaren ingurune batetan, $|x-x_0| < R$ puntuetan, $f(x)$ funtzioak edozein ordenatako deribatuak dituela. Ingurune honetan $R_n(x)$ espresioa $f(x)$ funtzioaren Taylor-en formularen gai osagarria izanik

$\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x) = 0$ bada, orduan f(x) funtzioa esandako inguru-
nean Taylor-en seriez gara daiteke.

Frogapena

$|x-x_o| < R$ ingurunean f(x) funtzioak edozein ordenatako deribatuak dituenez, edozein n-tarako funtzio hau Taylor-en formulaz adieraz daiteke:

$$f(x) = f(x_o) + f'(x_o)(x-x_o) + \ldots + f^{n)}(x_o)\frac{(x-x_o)^n}{n!} + R_n(x)$$

non

$$R_n(x) = f^{n+1)}(\xi)\frac{(x-x_o)^{n+1}}{(n+1)!},$$

$$\xi = x_o + \theta(x-x_o) \quad (0 < \theta < 1)$$

diren.

Izan bedi $s_n(x) = f(x_o) + f'(x_o)(x-x_o) + \ldots + f^n(x_o)\frac{(x-x_o)^n}{n!}$;

beraz, Taylor-en formula ondoko eran idatz daiteke:

$$f(x) = s_n(x) + R_n(x)$$

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0 \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} s_n(x) = f(x) \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} f^{n)}(x_o)\frac{(x-x_o)^n}{n!} = f(x)$$

24.5. Teorema

Demagun f(x) funtzioak $|x-x_o| < R$ ingurunean edozein ordenatako deribatuak dituela. Deribatu hauek ingurune honetan uniformeki bornaturik badaude, hots,

$$|f^{n)}(x)| < M \quad , \quad |x-x_o| < R \qquad (n = 1,2,\ldots)$$

baldintza betetzen bada, orduan $|x-x_o| < R$ ingurunean f(x) funtzioa berredura-seriez garagarria da.

Frogapena

$$|R_n(x)| = \left| f^{n+1)}(\xi) \frac{(x-x_o)^{n+1}}{(n+1)!} \right| \leq M \frac{|x-x_o|^{n+1}}{(n+1)!}$$

Baina $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{|x-x_o|^{n+1}}{(n+1)!}$ seriea zuzen errealaren puntu guztietan konbergentea denez, $\lim_{n\to\infty} \frac{|x-x_o|^{n+1}}{(n+1)!} = 0$ da; beraz,

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0 \quad , \quad |x-x_o| < R$$

Eta 24.4. teorema kontutan harturik, f(x) funtzioa $|x-x_o| < R$ ingurunean berredura-seriez garagarria dela atera tzen da.

24.6. Garapen interesgarri batzu

a) f(x) = sin x funtzioaren garapena

Funtzio honek 24.5. teoremaren hipotesiak betetzen di tu puntu guztietan. Honelatan, ba, beraren garapenak zuzen errealaren puntu guztietarako balio du.

Kalkula ditzagun seriearen koefizienteak:

$$f(x) = \sin x \qquad f(0) = 0$$

$$f'(x) = \cos x \qquad f'(0) = 1$$

$$f''(x) = -\sin x \qquad f''(0) = 0$$

$$f^{III}(x) = -\cos x \qquad f^{III}(0) = -1$$

$$f^{IV}(x) = \sin x \qquad f^{IV}(0) = 0$$

Honelatan, ba,

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^{n+1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \dots, \quad |x| < +\infty$$

b) <u>$f(x) = \cos x$ funtzioaren garapena.</u>

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^{n+1} \frac{x^{2n-2}}{(2n-2)!} + \dots, \quad |x| < +\infty$$

c) <u>$f(x) = e^x$ funtzioaren garapena</u>

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots, \qquad |x| < +\infty$$

d) <u>$f(x) = (1+x)^m$ funtzioaren garapena</u>

$$f(x) = (1+x)^m \qquad f(0) = 1$$

$$f'(x) = m(1+x)^{m-1} \qquad f'(0) = 1$$

$$f''(x) = m(m-1)(1+x)^{m-2} \qquad f''(0) = m(m-1)$$

$$\dots\dots\dots \qquad \dots\dots\dots$$

$$f^{(n)}(x) = m(m-1)\dots(m-n+1)(1+x)^{m-n} \qquad f^{(n)}(0) = m(m-1)\dots(m-n+1)$$

$$f^{(n+1)}(x) = m(m-1)\dots(m-n)(1+x)^{m-n-1} \qquad f^{(n+1)}(0) = m(m-1)\dots(m-n)$$

$$\dots\dots\dots \qquad \dots\dots\dots$$

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!} x^2 + \dots + \frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{n!} x^n + \dots$$

edo

$$(1+x)^m = \binom{m}{0} + \binom{m}{1} x + \binom{m}{2} x^2 + \ldots + \binom{m}{n} x^n + \ldots,$$

Generalean, m zenbakia edozein zenbaki erreal da.

m zenbakia osoa eta positiboa bada, x^{m+1} espresioa duen gaitik aurrerantz, koefiziente guztiak nuluak dira eta seriea polinomio bihurtzen da.

m zenbaki zatikiarra, edo oso negatiboa bada, serieak infinitu gai ez nulu ditu.

Kalkula dezagun seriearen konbergentzi erradioa:

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{m-n}{n-1} \right| \; |x| = |x|$$

Beraz, konbergentzi erradioa R=1 da.

e) <u>f(x) = arc sin x funtzioaren garapena</u>

Har dezagun, funtzio deribatua:

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1-x^2)^{-1/2}$$

Funtzio deribatuari binomioaren garapena aplikatuz,

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \frac{1}{2} x^2 + \frac{1.3}{2.4} x^4 + \ldots + \frac{1.3 \,..\, (2n-1)}{2.4 \,..\, (2n)} x^{2n} + .., \; |x| < 1$$

Serie hau 0-tik x-eraino integratuz,

$$\text{arc sin } x = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} =$$

$$= x + \frac{1}{2}\cdot\frac{x^2}{3} + \frac{1.3}{2.4}\ \frac{x^5}{5} + \ldots + \frac{1.3\ ..(2n-1)}{2.4\ ..\ (2n)}\ \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \ldots$$

Eta azken serie honen konbergentzi erradioa $R = 1$ da.

f) f(x) ln(1+x) funtzioaren garapena

Erraz ikusten da $\frac{1}{1+x}$ funtzioaren garapena $|x| < 1$ denean ondoko hau dela:

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots + (-1)^n x^n + \ldots\ldots, \quad |x| < 1$$

Eta 0-tik x-eraino integratuz,

$$\ln(1+x) = \int_0^x \frac{dx}{1+x} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} + \ldots,$$

$|x| < 1$ denean.

24.7. Berredura-serieen biderkaketa eta zatiketa

a) $x-x_o$ kenduraren berredura-serie bi beraien konbergentzi tarte komunean elkar biderka daitezke tarte honetan bi serieak absolutuki konbergenteak direlako.

Honek beste funtzio askoren garapenak lortzeko bide bat ematen digu.

Adibidez:

$$e^x \sin x = (1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots)\ (x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}\ \ldots) =$$

$$= x + x^2 + \frac{x^3}{3} + \ldots, \qquad |x| < +\infty$$

b) Baita ere, konbergentzi tarte komunean bi berredura-serien zatidura egin daiteke. Baina kasu honetan, zatiduraren konbergentzi tarteak ez du zertan emandako serieen konbergentzi tarte komuna izan behar.

Eman dezagun, $b_o \neq 0$ dela.

$$\frac{a_o + a_1\,(x-x_o) + a_2(x-x_o)^2 + \ldots\ldots}{b_o + b_1\,(x-x_o) + b_2(x-x_o)^2 + \ldots\ldots}$$

zatidura kalkulatu nahi dugu. Zatidura $x-x_o$ kenduraren berredura-serie bat izango da; beraz, ondoko eratakoa:

$$c_o + c_1\,(x-x_o) + c_2\,(x-x_o)^2 + \ldots\ldots$$

$c_o,\ c_1,\ c_2, \ldots\ldots$ koefizienteak kalkulatu behar dira.

$$a_o + a_1(x-x_o) + \ldots = (c_o + c_1(x-x_o) + \ldots).(b_o + b_1(x-x_o) + \ldots)$$

Berredura berdinetako koefizienteak identifikatuz, $c_o,\ c_1,\ c_2, \ldots$ delakoen balioak lortuko ditugu.

Kalkula dezagun, adibidez, tg x funtzioaren x-en berredura-seriezko garapena.

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots) = (c_o + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots).(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots)$$

$$0 = c_o\ .\ 1 \implies c_o = 0$$

$$1 = c_1 \cdot 1 \Longrightarrow c_1 = 1$$

$$0 = -\frac{c_o}{2} + c_2 \Longrightarrow c_2 = 0$$

$$-\frac{1}{6} = c_3 \cdot \frac{c_1}{2} \Longrightarrow c_3 = \frac{1}{3}$$

Beraz, $\operatorname{tg} x = x + \frac{x^3}{3} + \ldots$ seriea lortzen dugu, eta serie honen konbergentzi tartea $|x| < \frac{\pi}{2}$ da.

25. GAIA :

SERIE TRIGONOMETRIKOAK

25. G A I A

SERIE TRIGONOMETRIKOAK

25.1. Definizioa

$$\frac{a_o}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \qquad [1]$$

funtzio-seriea serie trigonometrikoa deitzen da eta a_o, a_n, b_n $(n = 1,2,\ldots)$ konstante errealak serie trigonometrikoaren koefizienteak.

[1] seriea konbergentea baldin bada, beraren batura $f(x)$, 2π periododun funtzio periodikoa da $\sin nx$ eta $\cos nx$ funtzioak 2π periododunak direlako.

25.2. Teorema

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ eta $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ zenbaki-serieak absolutuki konbergenteak badira, $\frac{a_o}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ serie trigonometrikoa absolutuki eta uniformeki konbergentea da tarte erreal guztietan.

Frogapena

$|a_n \cos nx + b_n \sin nx| \leq |a_n| + |b_n|, \ \forall x \in R, \ (n = 1,2,\ldots)$

Eta $\sum |a_n|$, $\sum |b_n|$ serieak konbergenteak direnez, Weierstrass--en erizpidea aplikatuz teorema frogatzen da.

25.3. Koefizienteen kalkulua

Izan bedi $f(x)$ 2π periododun funtzioa. Demagun funtzio hau serie trigonometriko baten batura dela (π, π) tartean; hots,

$$f(x) = \frac{a_o}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \qquad [2]$$

Serie trigonometrikoa uniformeki konbergentea bada, serie funtzionalen propietateen arauera, $f(x)$ jarraia da eta ondoko berdintza betetzen da:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_o}{2}\,dx + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_{-\pi}^{\pi} a_n \cos nx\,dx + \int_{-\pi}^{\pi} b_n \sin nx\,dx \right)$$

Kalkulatuko ditugu serie trigonometrikoen koefizienteen espresioak f-ren funtzioan.

a_o koefizientearen espresioa lortzeko kalkula ditzagun berdintzaren bigarren ataleko integralak:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_o}{2}\,dx = \pi a_o$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} a_n \cos nx\,dx = a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx\,dx = \left. \frac{a_n \sin nx}{n} \right|_{-\pi}^{\pi} = 0$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} b_n \sin nx\,dx = b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx\,dx = \left. \frac{-b_n \cos nx}{n} \right|_{-\pi}^{\pi} = 0$$

Beraz,

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \pi a_o$$

eta

$$a_o = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx \qquad [3]$$

formula dugu.

Beste koefizienteen kalkulura pasatu baino lehen, integral mugatu batzu kalkulatzea beharrezkoa dugu. Izan bitez n eta k zenbaki arruntak; $n \neq k$ denean:

$$\left.\begin{aligned} &\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos kx\, dx = 0 \\ &\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \sin kx\, dx = 0 \\ &\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \sin kx\, dx = 0 \end{aligned}\right\} \qquad [4]$$

eta $n = k$ denean:

$$\left.\begin{aligned} &\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 kx\, dx = \pi \\ &\int_{-\pi}^{\pi} \sin kx \cos kx\, dx = 0 \\ &\int_{-\pi}^{\pi} \sin kx\, dx = \pi \end{aligned}\right\} \qquad [5]$$

a_k $(k = 1,2,\ldots)$ koefizienteak kalkulatzeko [2] berdintzaren atal biak $\cos kx$ funtzioarekin biderkatzen ditugu:

$$f(x) \cos kx = \frac{a_o}{2} \cos kx + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx \cos kx + b_n \sin nx \cos kx)$$

Serie trigonometriko berri hau ere uniformeki konbergentea denez, gaiz gai integra daiteke:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\,dx = \frac{a_o}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\cos kx\,dx +$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\cos kx + b_n\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\cos kx\,dx\right)$$

Eta [4] eta [5] formulak kontutan hartuz zera ikusten dugu: bigarren ataleko integralak nuluak dira a_k koefizientedun integrala izan ezik. Beraz,

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\,dx = a_k\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 kx\,dx = a_k\,\pi\,,$$

eta

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\,dx \qquad [6]$$

espresioa ateratzen da.

b_k $(k = 1,2,\ldots)$ koefizienteak kalkulatzeko [2] berdintzaren atalak $\sin kx$ funtzioarekin biderkatzen ditugu:

$$f(x)\sin kx = \frac{a_o}{2}\sin kx + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx\sin kx + b_n\sin nx\sin kx)$$

Serie hau uniformeki konbergentea denez, gaiz gai integratuz,

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx\,dx = \frac{a_o}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\sin kx\,dx +$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\sin kx\,dx + b_n\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\sin kx\,dx).$$

Berriro ere, bigarren ataleko integralak anulatzen dira b_k koefizienteduna izan ezik:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx \, dx = b_k \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 kx \, dx = b_k \pi$$

beraz,

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx \, dx. \qquad [7]$$

[3] , [6] eta [7] formulak [2] espresioaren koefizienteetarako Fourier-en formulak deitzen dira.

25.4. Oharra

$\Psi(x)$ funtzioa integragarria eta ω periododuna baldin bada,

$$\int_{\alpha}^{\alpha+\omega} \Psi(x) \, dx = \int_{0}^{\omega} \Psi(x) \, dx$$

berdintza betetzen da, α edozein zenbaki erreal izanik. Hau da, ω zabaleradun tarte guztietan $\Psi(x)$ funtzioaren integral mugatuen balioak berdinak dira.

Frogapena

$$\int_{\alpha}^{\alpha+\omega} \Psi(x) \, dx = \int_{\alpha}^{0} \Psi(x) \, dx + \int_{0}^{\omega} \Psi(x) \, dx + \int_{\omega}^{\alpha+\omega} \Psi(x) \, dx.$$

$\forall t \in R$, $\Psi(\omega+t) = \Psi(t)$ denez, $x = \omega + t$ aldaketa eginez gero, ondoko berdintzak ditugu:

$$\int_{\omega}^{\alpha+\omega} \Psi(x) \, dx = \int_{0}^{\alpha} \Psi(\omega+t) \, dt = \int_{0}^{\alpha} \Psi(t) \, dt = \int_{0}^{\alpha} \Psi(x) \, dx$$

Beraz,

$$\int_{\alpha}^{\alpha+\omega} \psi(x)\,dx = \int_{\alpha}^{0} \psi(x)\,dx + \int_{0}^{\omega} \psi(x)\,dx + \int_{0}^{\alpha} \psi(x)\,dx,$$

eta hemendik

$$\int_{\alpha}^{\alpha+\omega} \psi(x)\,dx = \int_{0}^{\omega} \psi(x)\,dx$$

ondorioa ateratzen da.

Ohar hau kontutan harturik, edozein α zenbaki erreale-tarako Fourier-en formulak ondoko eran idatz daitezke:

$$a_p = \frac{1}{\pi} \int_{\alpha-\pi}^{\alpha+\pi} f(x) \cos px\,dx \qquad (p = 0,1,2,..)$$

$$b_p = \frac{1}{\pi} \int_{\alpha-\pi}^{\alpha+\pi} f(x) \sin px\,dx \qquad (p = 1,2,....)$$

25.5. Serie trigonometriko orokorrak

Zentzu generalago batetan serie trigonometrikoak esaten zaie ondoko motatako seriei:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega x + b_n \sin n\omega x)$$

a_0, a_n, b_n $(n = 1,2,...)$ konstante errealak izanik.

Serie hauek konbergenteak direnean, beraien baturak $\frac{2\pi}{\omega}$ periododun funtzioak dira.

Mota honetako serie bat $\frac{2\pi}{\omega}$ zabaleradun tarte batetan uniformeki konbergentea eta beraren batura f(x) funtzioa badira, 25.3. puntuan egindako kalkuluak errepikatuz ondoko formulak ateratzen dira:

$$a_p = \frac{\omega}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{\omega}}^{\frac{\pi}{\omega}} f(x)\cos p\,\omega x\,dx \quad , \qquad (p = 0,1,2,\ldots)$$

$$b_p = \frac{\omega}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{\omega}}^{\frac{\pi}{\omega}} f(x)\sin p\,\omega x\,dx \ , \qquad (p = 1,2,3,\ldots.)$$

26. GAIA :

FOURIER-EN SERIEAK

26. G A I A

FOURIER-EN SERIEAK

26.1. Definizioa

Izan bedi f(x) funtzioa integragarria eta 2l periododuna.

$$\frac{a_o}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{\pi n x}{l} + b_n \sin \frac{\pi n x}{l} \right) \qquad (1)$$

serie trigonometrikoa, zeinen koefizienteak

$$\left.\begin{aligned} a_o &= \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} f(x)\, dx \\ a_n &= \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} f(x) \cos \frac{\pi n x}{l}\, dx \quad (n=1,2,...) \\ b_n &= \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} f(x) \sin \frac{\pi n x}{l}\, dx \quad (n=1,2,...) \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

formulen bidez ematen diren f(x), funtzioaren Fourier-en seriea deitzen da.

(2) formulak ateratzeko nahikoa da $\frac{\pi}{\omega} = l$ aldaketa egitea 25.5 puntuan.

Sortzen den galdera zera da: Zeintzu baldintza bete behar ditu f(x) funtzioak Fourier-en seriez garagarria izan dadin, hau da, beraren Fourier-en seriea konbergentea eta seriearen batura f(x) funtzioa izan daitezen?

f(x) funtzioa Fourier-en seriez garagarria izateko baldintza nahikoak ikusi baino lehen, ondoko bi definizioak ikusiko ditugu.

26.2. Definizioa

f(x) funtzioa (a,b) tarte irekian leuna dela esaten da ondoko hiru baldintzak betetzen dituenean:

I) f(x) jarraia (a,b) tartean;

II) f'(x) Jarraia (a,b) tartean;

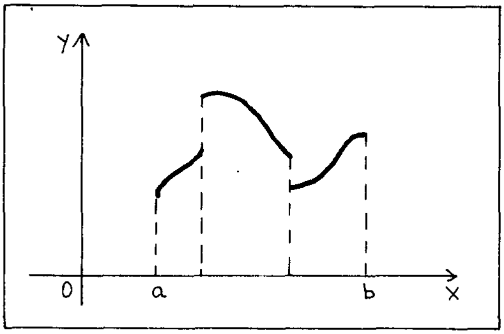
III) f(a+0), f(b-0) albolimiteak eta f'(a+0), f'(b-0) alboderibatuak existitzen dira.

26.3. Definizioa

(a,b) tartea azpitarteez deskonposa daitekeenean, azpitarteen kopurua finitua delarik eta azpitarte bakoitzean f(x) funtzioa leuna izanik, f(x) funtzioa (a,b) tartean zatika leuna dela esaten da.

Beraz, f(x) (a,b) tartean zatika leuna baldin bada, lehen mailako etenguneak ditu, ez beste motatakorik, eta haiek kopuru finitu batetan.

Adibidea:



26.4. Teorema

f(x) funtzioa 2l periododun funtzio periodikoa eta (-l,l) tartean zatika leuna baldin bada, orduan beraren Fourier-en serieak,

$$\frac{a_o}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{\pi n x}{l} + b_n \sin \frac{\pi n x}{l}\right)$$

delakoak, non

$$a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} f(x) \cos \frac{\pi n x}{l} \, d x$$

$$b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} f(x) \sin \frac{\pi n x}{l} \, d x$$

diren, jarraitasun-puntuetan f(x) funtziorantz konbergitzen du, eta etenguneetan, $\frac{f(x-o) + f(x+o)}{2}$ baliorantz.

Teorema honen bidez, Fourier-en seriez garagarriak diren funtzioen kopurua oso zabala dela ikusten da; honegatik, Fourier-en serieak asko erabiltzen dira bai matematikan bai fisika matematikoan.

Azken teorema hau ez dugu frogatuko eta beste era batetan enuntziatuko dugu ondoko definizioa eman ondoren.

26.5. Definizioa

Demagun $f(x)$ funtzioa (a,b) tartean definiturik dagoela. (a,b) tartea azpitarteez deskonposa daitekeenean, azpitarteen kopurua finitua delarik eta azpitarte bakoitzean $f(x)$ monotono eta jarraia izanik, $f(x)$ funtzioak *(a,b) tartean Dirichlet-en baldintzak* betetzen dituela esaten da; hau da, $f(x)$ funtzioak (a,b) tartean Dirichlet-en baldintzak betetzen ditu tarte honetan zatika monotonoa eta zatika leuna bada eta etenguneen kopurua finitua denean.

26.6. Teorema

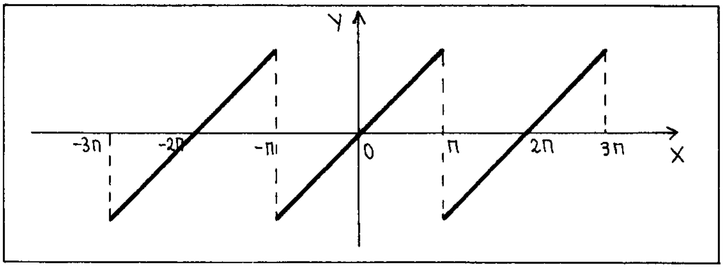
$f(x)$ funtzioa $2l$ periododun funtzio periodikoa bada, eta $(-l,l)$ tartean Dirichlet-en baldintzak betetzen baditu, beraren Fourier-en serieak $f(x)$ funtziorantz konbergitzen du jarraitasun-puntuetan, eta $\frac{f(x-o)+f(x+o)}{2}$ espresiorantz, etenguneetan.

26.7. Adibideak

1. Adibidea. Izan bedi $f(x)$, 2π periododun funtzio bat ondoko eran definitua:

$$f(x) = x \qquad , \; -\pi < x \leq \pi \quad \text{denean.}$$

Adierazpen geometrikoa



$f(x)$ funtzioak Dirichlet-en baldintzak betetzen ditu. Kalkula ditzagun Fourier-en koefizienteak:

$$a_o = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\, d\, x \quad = \frac{1}{\pi}\,\frac{x^2}{2}\Big|_{-\pi}^{\pi} \quad = 0$$

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x \cos kx\, dx = \frac{1}{\pi}\left[\, x\,\frac{\sin kx}{k}\Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{k}\int_{-\pi}^{\pi} \sin kx\, dx\right] = 0$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x \sin kx\, dx = \frac{1}{\pi}\left[-x\,\frac{\cos kx}{k}\Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{k}\int_{-\pi}^{\pi} \cos kx\, dx\right] =$$

$$= \frac{-2\cos k\pi}{k} + \frac{2\sin k\pi}{k\,\pi^2} = (-1)^{k+1}\,\frac{2}{k}$$

Honelatan, ba, ondoko Fourier-en seriea lortzen da:

$$f(x) = 2 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{\sin kx}{k}$$

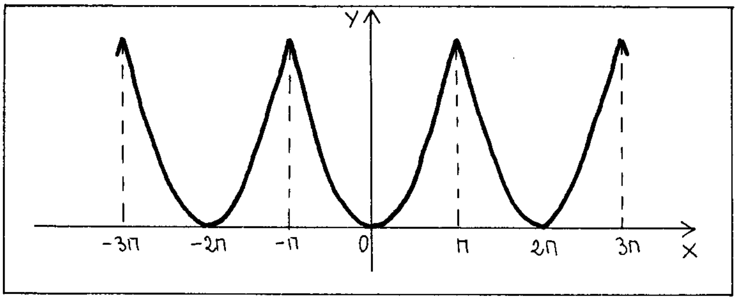
Berdintza hau puntu guztietan betetzen da, etenguneetan izan ezik. Etenguneetan seriearen batura funtzioaren albolimiteen batezbesteko aritmetikoa da; beraz, zero da.

2. Adibidea. Izan bedi

$$f(x) = x^2 \quad , \quad -\pi \leq x < \pi \text{ denean,}$$

eta funtzio honen periodoa 2π izanik.

Adierazpen grafikoa:



Funtzio honek Dirichlet-en baldintzak betetzen ditu eta beraren Fourier-en koefizienteak ondokoak dira:

$$a_o = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 \, dx = \frac{1}{\pi} \left. \frac{x^3}{3} \right|_{-\pi}^{\pi} = \frac{2\pi^2}{3}$$

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2 \cos kx\, dx = \frac{1}{\pi}\left[\frac{x^2 \sin kx}{k}\Bigg|_{-\pi}^{\pi} - \frac{2}{k}\int_{-\pi}^{\pi} x \sin kx\, dx \right] =$$

$$= -\frac{2}{\pi k}\left[-\frac{x \cos kx}{k}\Bigg|_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{k}\int_{-\pi}^{\pi} \cos kx\, dx \right] =$$

$$= \frac{4\pi}{\pi k^2} \cos k\pi - \frac{2}{\pi k^3} \sin kx \Bigg|_{-\pi}^{\pi} = (-1)^k \frac{4}{k^2}$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2 \sin kx\, dx = \frac{1}{\pi}\left[-\frac{x^2 \cos kx}{k}\Bigg|_{-\pi}^{\pi} + \frac{2}{k}\int_{-\pi}^{\pi} x \cos kx\, dx \right] =$$

$$= \frac{2}{\pi k}\left[\frac{x \sin kx}{k}\Bigg|_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{k}\int_{-\pi}^{\pi} \sin kx\, dx \right] =$$

$$= \frac{2}{\pi k^2} \frac{\cos kx}{k}\Bigg|_{-\pi}^{\pi} = 0$$

Beraz,

$$f(x) = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{\cos kx}{k^2} ,$$

eta f(x) puntu guztietan jarraia denez, azken berdintza puntu guztietan betetzen da.

Ondorioz, aurreko berdintzan $x = \pi$ egiten badugu,

$$\frac{\pi^2}{6} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

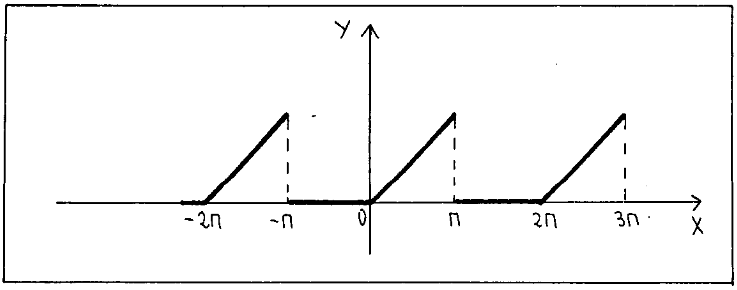
formula lortzen da; hots, serie harmoniko baten batura.

3. Adibidea. Kontsidera dezagun f(x) funtzio periodikoa, 2π periododuna, ondoko eran definitua:

$$f(x) = 0 \quad , \quad -\pi \leq x \leq 0 \quad \text{denean;}$$

$$f(x) = x \quad , \quad 0 < x \leq \pi \quad \text{denean.}$$

Adierazpen geometrikoa



Kalkula ditzagun Fourier-en koefizienteak:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x\,dx = \frac{\pi}{2}$$

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x \cos kx\,dx = \frac{1}{\pi}\left[\left.\frac{x \sin kx}{k}\right|_0^{\pi} - \frac{1}{k}\int_0^{\pi} \sin kx\,dx\right] =$$

$$= \frac{1}{k\pi}\left.\frac{\cos kx}{k}\right|_0^{\pi} = \begin{cases} \dfrac{2}{\pi k^2} & \text{, k bakoitia denean;} \\ 0 & \text{, k bikoitia denean.} \end{cases}$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x \sin kx\,dx = \frac{1}{\pi}\left[\left.-\frac{x \cos kx}{k}\right|_0^{\pi} + \frac{1}{k}\int_0^{\pi} \cos kx\,dx\right] =$$

$$= -\frac{\pi\cos k\pi}{\pi k} = \begin{cases} \dfrac{1}{k} & , \text{ k bakoitia denean,} \\ -\dfrac{1}{k} & , \text{ k bikoitia denean.} \end{cases}$$

Beraz, Fourier-en serieak ondoko forma du:

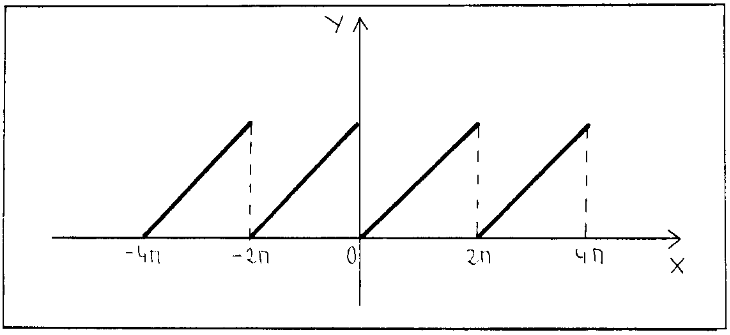
$$f(x) = \frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi}\left(\frac{\cos x}{1^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \dots\right) +$$

$$+ \left(\frac{\sin x}{1} - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \dots\right)$$

f(x) funtzioaren etenguneetan seriearen batura, hau da, f-ren albolimiteen batezbesteko aritmetikoa $\frac{\pi}{2}$ da.

4. Adibidea. Demagun f(x) funtzio periodikoa, 2π periodo duna eta $(0,2\pi)$ tartean $f(x) = x$ dena.

Adierazpen grafikoa:



Funtzio hau $[-\pi, \pi]$ tartean ondoko eran definiturik dago:

$$f(x) = x + 2\pi \quad , \quad x \in [-\pi , 0)$$

$$f(x) = x \quad , \quad x \in [0 , \pi]$$

Beraz, koefizienteetarako Fourier-en formuletan integrazio-tartetzat $[0,2\pi]$ tartea hartzea komeni zaigu; beraz,

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x\, dx = 2\pi$$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x \cos kx\, dx = \frac{1}{\pi} \left[\frac{x \sin kx}{k} + \frac{\cos kx}{k^2} \right]_0^{2\pi} = 0$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x \sin kx\, dx = \frac{1}{\pi} \left[- \frac{x \cos kx}{k} + \frac{\sin kx}{k^2} \right]_0^{2\pi} = - \frac{2}{k}$$

Honelatan, ba,

$$f(x) = \pi - \frac{2}{1} \sin x - \frac{2}{2} \sin 2x - \frac{2}{3} \sin 3x - \frac{2}{4} \sin 4x - \dots\dots$$

Serie honek $f(x)$ funtzioa puntu guztietan adierazten du, etenguneetan izan ezik (hau da, $x = 0, 2\pi, 4\pi, \dots$ puntuetan izan ezik). Etenguneetan seriearen baturak π balio du.

FUNTZIO BIKOITI ETA BAKOITIETARAKO FOURIER-EN SERIEZKO GARAPENAK.

26.8. Lema

Demagun $\psi(x)$ funtzioa integragarria dela $[-1,1]$ tar tean. $\psi(x)$ funtzioa bikoitia bada,

$$\int_{-1}^{1} \psi(x)\, dx = 2 \int_{0}^{1} \psi(x)\, dx.$$

Eta $\psi(x)$ bakoitia bada,

$$\int_{-1}^{1} \psi(x)\, dx = 0$$

Frogapena

$\psi(x)$ bikoitia denean,

$$\int_{-1}^{1} \psi(x)\, dx = \int_{-1}^{0} \psi(x)\, dx + \int_{0}^{1} \psi(x)\, dx =$$

$$= \int_{0}^{1} \psi(-x)\, dx + \int_{0}^{1} \psi(x)\, dx = 2 \int_{0}^{1} \psi(x)\, dx.$$

$\psi(x)$ bakoitia denean,

$$\int_{-1}^{1} \psi(x)\, dx = \int_{0}^{1} \psi(-x)\, dx + \int_{0}^{1} \psi(x)\, dx =$$

$$= -\int_{0}^{1} \psi(x)\, dx + \int_{0}^{1} \psi(x)\, dx = 0$$

26.9. Teorema

Demagun $f(x)$ funtzioa Fourier-en seriez garagarria dela.

f(x) funtzioa bikoitia bada, beraren Fourier-en serieak

$$\frac{a_o}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{\pi n x}{l}$$

forma hartzen du,

$$a_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \cos \frac{\pi n x}{l} \, dx \qquad (n=0,1,2,\ldots)$$

izanik.

Frogapena

Dakigunez, Fourier-en serieak

$$\frac{a_o}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{\pi n x}{l} + b_n \sin \frac{\pi n x}{l}\right)$$

eratakoak dira.

f(x) eta $\cos \frac{\pi n x}{l}$ funtzioak bikoitiak direnez,

$f(x) \cos \frac{\pi n x}{l}$ bikoitia da; eta 26.8. lemaren bidez ondokoa ateratzen da:

$$a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} f(x) \cos \frac{\pi n x}{l} \, dx = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \cos \frac{\pi n x}{l} \, dx$$

Bestalde $\sin \frac{\pi n x}{l}$ funtzioa bakoitia denez, $f(x) \sin \frac{\pi n x}{l}$ biderkadura-funtzioa bakoitia da; beraz, 26.8 lema apli katuz,

$$b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} f(x) \sin \frac{\pi n x}{l} \, dx = 0$$

dela dugu eta teorema frogaturik geratzen da.

26.10. Teorema

f(x) funtzioa bakoitia eta Fourier-en seriez garagarria baldin bada, beraren Fourier-en serieak

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{\pi n x}{l}$$

forma du, non

$$b_n = \frac{2}{l} \int_{0}^{l} f(x) \sin \frac{\pi n x}{l} \, dx \qquad (n=1,2,\ldots)$$

den

Frogapena

f(x) bakoitia eta $\cos \frac{\pi n x}{l}$ bikoitia direnez, beraien biderkadura $f(x) \cos \frac{\pi n x}{l}$ bakoitia da; eta 26.8. lemaren bidez,

$$a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} f(x) \cos \frac{\pi n x}{l} \, dx = 0$$

Bestalde, $\sin \frac{\pi n x}{l}$ bakoitia denez, $f(x) \sin \frac{\pi n x}{l}$ bikoitia izango da; beraz,

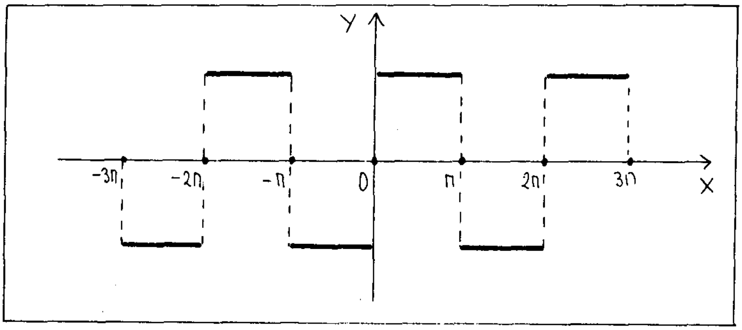
$$b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} f(x) \sin \frac{\pi n x}{l} \, dx = \frac{2}{l} \int_{0}^{l} f(x) \sin \frac{\pi n x}{l} \, dx$$

Aurreko bi teoremetan ikusten denez, $f(x)$ funtzioa bikoitia edo bakoitia denean, Fourier-en koefizienteen kalkulua errazagoa da.

<u>Adibidea</u>. Gara dezagun Fourier-en seriez 2π periododun ondoko funtzioa:

$$f(x) = \begin{cases} -1 \ , & -\pi < x < 0 \quad \text{denean;} \\ 0 \ , & x = 0 \text{ eta } x = \pi \quad \text{denean;} \\ 1 \ , & 0 < x < \pi \quad \text{denean.} \end{cases}$$

Adierazpen grafikoa:



$f(x)$ funtzioa bakoitia denez, $a_n = 0 \quad (n=0,1,2,\ldots)$ dugu.
Kalkula dezagun b_n koefizientea:

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin nx \, dx = -\frac{2}{\pi n} \cos nx \Big|_0^{\pi} =$$

$$= \frac{2}{\pi n}\left\{1 - (-1)^n\right\} = \begin{cases} 0 \ , & n \text{ bikoitia denean;} \\ \dfrac{4}{\pi n} & n \text{ bakoitia denean.} \end{cases}$$

Beraz, Fourier-en seriea hauxe da:

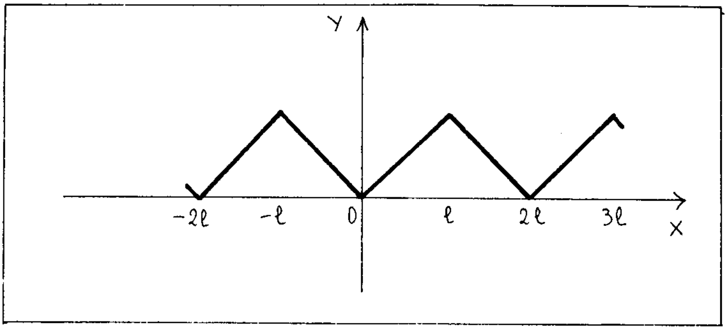
$$f(x) = \frac{4}{\pi} \sin x + \frac{4}{\pi} \frac{\sin 3x}{3} + \frac{4}{\pi} \frac{\sin 5x}{5} + \ldots\ldots =$$

$$= \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin (2k+1) x}{2k+1}$$

Adibidea. Kontsidera dezagun ondoko eran definituriko 2l periododun funtzioa, f(x):

$$f(x) = |x| \ , \quad -l \leq x \leq l$$

Adierazpen grafikoa:



Emandako funtzioa Fourier-en seriez garagarria da eta bikoitia denez, b_k koefizienteak nuluak izango dira; beraz, kosinu-serie bat edukiko da.

$$a_k = \frac{2}{l} \int_0^l x \cos \frac{k \pi x}{l} \, dx = \frac{2l}{\pi^2} \int_0^{\pi} t \cos kt \, dt =$$

$$= \begin{cases} 0 \;, & k \text{ bikoitia denean;} \\ -\dfrac{4l}{\pi^2 k^2} & k \text{ bakoitia denean.} \end{cases}$$

Honelatan, ba,

$$|x| = \frac{1}{2} - \frac{4l}{\pi^2}\left[\frac{\cos\frac{\pi}{l}x}{1^2} + \frac{\cos\frac{3\pi}{l}x}{3^2} + \ldots + \frac{\cos\frac{(2p+1)\pi}{l}x}{(2p+1)^2} + \ldots\right]$$

FUNTZIO EZ-PERIODIKOEN FOURIER-EN SERIEZKO GARAPENAK

Suposa dezagun f(x) funtzioa (0,l) tartean definiturik dagoela eta tarte honetan Dirichlet-en baldintzak betetzen dituela. Ikusiko dugunez, f(x) funtzioa jarraitasun-puntuetan Fourier-en serie baten bidez adieraz daiteke. Horretarako f(x)-en hedapenak zuzen errealean kontsideratuko dira.

26.11. Definizioa

Demagun f(x) funtzioa (0.l) tartean definiturik dagoela. $\Psi(x)$ funtzioa f(x) funtzioaren hedadura periodiko eta bikoitia dela esaten da, ondoko baldintzak betetzen direnean:

1) $\Psi(x) = f(x)$, $0 < x < l$ denean.

2) $\Psi(-x) = \Psi(x)$ "

3) $\Psi(x+2l) = \Psi(x)$ "

$\Psi(x)$ funtzioa f(x) funtzioaren hedadura periodiko eta bakoi tia da baldin

1') $\psi(x) = f(x) \qquad (0 < x < l)$

2') $\psi(-x) = - \psi(x)$

3') $\psi(x+2l) = \psi(x)$

berdintzak betetzen badira.

26.12. Teorema

f(x) funtzioak (0,l) tartean Dirichlet-en baldintzak betetzen baditu, orduan tarte honetan f(x) funtzioa kosinuetako Fourier-en seriez gara daiteke; beraz,

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{\pi n x}{l}, \quad 0 < x < l.$$

$$a_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \cos \frac{\pi n x}{l} dx \quad \text{izanik.}$$

Frogapena

Har dezagun f(x)-en hedadura periodiko eta bikoiti bat, $\psi(x)$.

$\psi(x)$ funtzioa Fourier-en seriez garagarria da zuzen erreal guztian eta serie hau kasinu-serie bat da; hots,

$$\psi(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{\pi n x}{l}$$

$$a_n = \frac{2}{l} \int_0^l \psi(x) \cos \frac{\pi n x}{l} \, dx \quad \text{izanik.}$$

Baina $(0,l)$ tartean $f(x) = \psi(x)$ denez, teorema frogatzeko nahikoa da aurreko formulak $(0,l)$ tartera murriztea eta $\Psi(x) = f(x)$ aldaketa egitea.

26.13. Teorema

$f(x)$ funtzioak $(0,l)$ tartean Dirichlet-en baldintzak betetzen baditu, tarte honetan $f(x)$ sinuetako Fourier-en seriez gara daiteke; beraz,

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{\pi n x}{l} \quad , \quad 0 < x < l \; ,$$

$$\text{non} \quad b_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{\pi n x}{l} \, dx \quad \text{den.}$$

Frogapena

Kontsidera dezagun $f(x)$-en hedadura periodiko eta bikoiti bat, $\Psi(x)$.

$\psi(x)$ sinuetako Fourier-en seriez garagarria da. Garapen hau $(0,l)$ tartera pasatuz eta $\psi(x) = f(x)$ eginez goiko formulak lortzen ditugu.

26.14. Definizioa

Izan bedi $f(x)$ funtzioa (a,b) tartean definitua. $F(x)$

funtzio bat f(x)-en hedadura periodikoa dela esaten da:

1) $F(x) = f(x), \qquad a < x < b$;

2) $F(x+T) = f(x), \qquad T = b-a$ izanik,

betetzen dituenean.

26.15. Teorema

f(x) funtzioak (a,b) tartean Dirichlet-en baldintzak betetzen baditu, tarte honetan f(x) Fourier-en sinu eta kosinuetako seriez gara daiteke; hots,

$$(1) \quad f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{\pi n x}{l} + b_n \sin \frac{\pi n x}{l}\right), \quad a < x < b,$$

$$a_n = \frac{1}{l} \int_a^b f(x) \cos \frac{\pi n x}{l}\, dx,$$

$$b_n = \frac{1}{l} \int_a^b f(x) \sin \frac{\pi n x}{l}\, dx,$$

eta $2l = b-a$ izanik.

Eta (a,b) tarteko etenguneetan (1) seriearen batura

$$\frac{f(x+0) + f(x-0)}{2} \text{ da.}$$

Frogapena

Izan bedi F(x) f(x)-en hedadura periodikoa. F(x) funtzioa zuzen errealean Fourier-en seriez garagarria da; beraz,

$$F(x) = \frac{a_o}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{l}), \quad (2)$$

non

$$\left. \begin{aligned} a_n &= \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} F(x) \cos \frac{\pi n x}{l} \, dx \\ b_n &= \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} F(x) \sin \frac{\pi n x}{l} \, dx \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

$b - a = 2l$

formulak diren.

(a,b) tartean $F(x) = f(x)$ denez, (2) formula (a,b) tartera murrizten bada, ondoko berdintza ateratzen da:

$$f(x) = \frac{a_o}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos \frac{\pi n x}{l} + b_n \sin \frac{\pi n x}{l}), \quad a < x < b \quad (4)$$

Baina (3) formuletan ezin da $F(x)$ funtzioaren ordez $f(x)$ funtzioa idatzi $(-l,l)$ tartean $f(x)$ funtzioak ez duelako zertan definiturik egon behar.

Dena den, $F(x) \cos \frac{\pi n x}{l}$ eta $F(x) \sin \frac{\pi n x}{l}$ funtzioak $2l$ periododunak direnez, 25.4. lemaren bidez (3) formuletarako beste espresio batzu ateratzen dira:

$$a_n = \frac{1}{l} \int_{a}^{b} f(x) \cos \frac{\pi n x}{l} \, dx$$

$$b_n = \frac{1}{l} \int_a^b f(x) \sin \frac{\pi n x}{l} \, dx$$

Eta (a,b) tartean F(x) = f(x) denez, azken formula bi hauek ondoko eran adieraz daitezke:

$$a_n = \frac{1}{l} \int_a^b f(x) \cos \frac{\pi n x}{l} \, dx$$

$$b_n = \frac{1}{l} \int_a^b f(x) \sin \frac{\pi n x}{l} \, dx$$

Azkenez, (a,b) tarteko etenguneetan (1) seriearen batura $\frac{F(x+0) + F(x-0)}{2}$ denez eta (a,b) tarteko puntu guztietan F(x) = f(x) delarik, argi dago (4) seriearen batura $\frac{f(x+0) + f(x-0)}{2}$ dela.

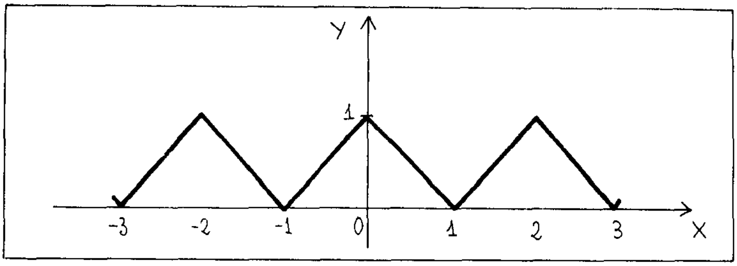
Adibidea. Bilatu behar dugu (0,1) tartean definitutako f(x) = 1-x funtzioaren garapena

I) kosinuetako Fourier-en seriez,

II) sinuetako Fourier-en seriez,

III) sinu eta kosinuetako Fourier-en seriez.

I) f(x) funtzioaren hedadura periodiko eta bikoitiaren adierazpen grafikoa:



(-1,1) tartearen luzera erdia l=1 da eta 1-x espresioaren garapenaren forma:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \pi nx.$$

Kalkula ditzagun a_n (n=0,1,2,...) koefizienteen balioak:

$$a_n = 2\int_0^1 (1-x)\cos \pi n x \; dx =$$

$$= \frac{2}{\pi n}\left[(1-x)\sin \pi nx \Big|_0^1 + \int_0^1 \sin \pi nx \, dx \right] =$$

$$= -\frac{2}{\pi^2 n^2} \cos \pi nx \Big|_0^1 = \frac{2}{\pi^2 n^2}(1-(-1)^n) =$$

$$= \begin{cases} 0 & , \text{ n bikoitia denean,} \\ \dfrac{4}{\pi^2 n^2} & , \text{ n bakoitia denean.} \end{cases}$$

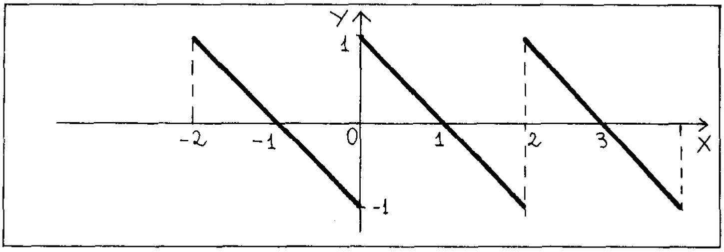
$$a_o = 2\int_0^1 (1-x)\,dx = 1$$

Beraz, (0,1) tartean ondoko garapena dugu:

$$1-x = \frac{1}{2} + \frac{4}{\pi^2}\left[\frac{\cos \pi x}{1^2} + \frac{\cos 3\pi x}{3^2} + \frac{\cos 5\pi x}{5^2} + \ldots\ldots\right] =$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{4}{\pi^2}\sum_{K=0}^{\infty}\frac{\cos (2k+1)\pi x}{(2k+1)^2}$$

II) f-ren hedadura periodiko eta bakoitiaren adierazpen grafikoa:



Garapenaren forma

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \pi nx$$

da, eta

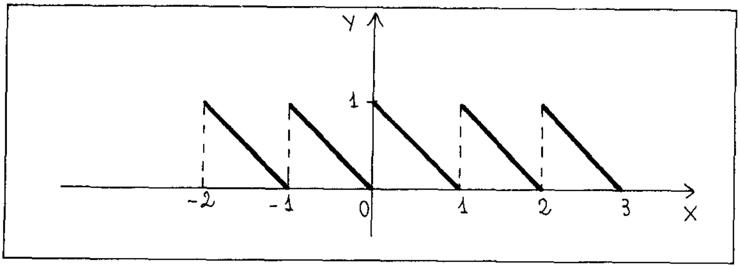
$$b_n = 2\int_0^1 (1-x)\sin \pi nx\, dx = -\frac{2}{\pi n}(1-x)\cos \pi nx\Big|_0^1 =$$

$$= \frac{2}{\pi n}$$

Beraz,

$$1-x = \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin \pi nx}{n}, \quad 0 < x < 1 \quad \text{denean.}$$

III) Kontsideratzen dugu, orain, hedadura berri bat:



Kasu honetan $l = \frac{1}{2}$ da eta garapenaren forma ondokoa:

$$1-x = \frac{a_o}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos 2\pi nx + b_n \sin 2\pi nx)$$

$$a_o = 1$$

$$a_n = 2\int_0^1 (1-x)\cos 2\pi nx\, dx = \frac{1}{\pi n}\int_0^1 \sin 2\pi nx\, dx = 0$$

$$b_n = 2\int_0^1 (1-x)\sin 2\pi nx\, dx =$$

$$= -\frac{1}{\pi n}(1-x)\cos 2\pi nx \Big|_0^1 = \frac{1}{\pi n}$$

Honelatan, ba, (0,1) tartean f-ren sinu eta kosinuetako seriezko garapena hauxe da:

$$1 - x = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2\pi nx}{n}$$

PROBLEMAK

1. PROBLEMA

Bila dezagun $x > 0$ delakoaren zeintzu baliotarako den konbergentea ondoko seriea:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^n + 2}$$

Ebazpena

$0 < x < 1$ denean, $\lim_{n \to \infty} \frac{1}{x^n + 2} = \frac{1}{2} \neq 0$

$x = 1$ denean, $\lim_{n \to \infty} \frac{1}{x^n + 2} = \frac{1}{3} \neq 0$

Beraz, $0 < x \leq 1$ denean konbergentziarako beharrezko baldintza betetzen ez denez, seriea dibergentea da.

$x > 1$ kasuan, D'Alembert-en erizpidea aplikatuz,

$$\lim_{n \to \infty} \frac{x^n + 2}{x^{n+1} + 2} = \lim_{n \to \infty} \frac{1 + 2/x^n}{x + 2/x^n} = \frac{1}{x} < 1$$

Honelatan, ba, seriea konbergentea da $x > 1$ denean.

2. PROBLEMA

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n\, 2^n}$

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}\, x^{2n-1}}{(2n-1)!}$

Esan aurreko bi serieak x-en zeintzu baliotarako diren konbergenteak.

Ebazpena.

a) $$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{x^n\, n\, 2^n}{(n+1)\, 2^{n+1}\, x^{n-1}}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{nx}{2(n+1)}\right| = \frac{|x|}{2}$$

Baldin $\frac{|x|}{2} < 1 \Leftrightarrow |x| < 2 \Leftrightarrow -2 < x < 2$ bada, seriea absolutuki konbergentea da.

Baldin $\frac{|x|}{2} = 1 \Leftrightarrow x = \pm 2$ bada, erizpideak ez digu konbergentziaz informatzen, eta balio hauetan zer gertatzen den ikusteko beste bide bat hartu behar dugu.

$x = 2$ balioan, serieak ondoko forma du:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

eta dibergentea da.

$x = -2$ balioan, ondoko seriea

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^{n-1}}{n\, 2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}\, 2^{n-1}}{n\, 2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2\, n} =$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \cdot \frac{(-1)^{n-1}}{n}$$

alternatua eta konbergentea da Leibniz-en teoremaren bidez.

Baldin $\frac{|x|}{2} > 1 \Leftrightarrow |x| > 2$ bada, konbergentziarako beharrezko baldintza ez da betetzen:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x^{n-1}}{n\ 2^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(x/2)^n}{x\ n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(x/2)^n \log x/2}{x} \neq 0$$

Honelatan, ba $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n\ 2^n}$ seriearen konbergentzi eremua $[-2,2)$ tartea da.

b) $$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{x^2}{(2n+1)\ 2n}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{x^2}{(2n+1)\ 2n} = 0$$

Edozein x-etarako seriea absolutuki konbergentea da.

3. PROBLEMA

Kalkulatu ondoko seriearen konbergentzi eremua:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(x+n)\ (x+n-1)}$$

Ebazpena.

Deskonposatzen dugu seriearen gai generala:

$$\frac{1}{(x+n)\,(x+n-1)} = \frac{A}{x+n} + \frac{B}{x+n-1} = \frac{A(x+n-1) + B(x+n)}{(x+n)\,(x+n-1)}$$

$$1 = A(x+n-1) + B(x+n) \Longrightarrow A = -1 \;,\; B = 1$$

eta ondoko berdintza lortzen da:

$$\frac{1}{(x+n)\,(x+n-1)} = \frac{1}{x+n-1} - \frac{1}{x+n}$$

Beraz, $x \neq 0$, $x \neq 1$, $x \neq 2$, ... balioetarako:

$$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n = \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\right) + \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2}\right) + \ldots +$$

$$+ \left(\frac{1}{x+n-1} - \frac{1}{x+n}\right) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+n}$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+n}\right) = \frac{1}{x}$$

Beraz, emandako seriea konbergentea da $x \neq 0$, $x \neq 1$, $x \neq 2$, ... balioetarako, eta beraren batura, $\frac{1}{x}$ funtzioa.

4. PROBLEMA

Bila dezagun x delakoaren zeintzu baliotarako den konbergentea ondoko seriea:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n^x} \qquad (1)$$

Ebazpena.

Balio absolutuen seriea, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$ (2) serie harmonikoa, konbergentea da $x > 1$ denean; beraz, (1) seriea absolutuki konbergentea da.

Baldin $x = 1$ bada, (2) seriea $\sum \frac{1}{n}$ seriea bihurtzen da.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$

$$\frac{1/n}{1/n+1} = \frac{n+1}{n} > 1 \Longrightarrow \frac{1}{n} > \frac{1}{n+1}, \quad n \in N$$

Leibniz-en teoremaren hipotesiak betetzen direnez, (1) seriea $x=1$ kasuan kondizionalki konbergentea da.

$0 < x < 1$ denean:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^x} = 0$$

$$\frac{1/n^x}{1/(n+1)^x} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^x > 1^x = 1 \Longrightarrow \frac{1}{n^x} > \frac{1}{(n+1)^x}, \quad n \in N.$$

(1) seriea kondizionalki konbergentea da. $x = 0$ denean, (1) seriea $1-1+1-1+\ldots$ seriea bihurtzen da; beraz, oszilantea da.

$x < 0$ denean, konbergentziarako beharrezko baldintza ez da betetzen; beraz, (1) seriea dibergentea da.

5. PROBLEMA

Eman ondoko seriearen konbergentzi eremua:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n^{\ln x}} \qquad (1)$$

Ebazpena.

Azter dezagun balio absolutuen seriea: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\ln x}}$ (2)

$$\lim_{n\ \infty} n^{\alpha} \cdot \frac{1}{n^{\ln x}} = 1 \quad , \qquad \alpha = \ln x \text{ denean.}$$

Baldin $\ln x > 1 \Leftrightarrow x > e$ bada, (1) seriea absolutuki konbergentea da. Baldin $\ln x = 1 \Leftrightarrow x = e$ bada, (2) seriea $\sum \frac{1}{n}$ seriea bihurtzen denez, (2) seriea dibergentea da. Ikus dezagun, (1) seriea kondizionalki konbergentea dela:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$

$$\frac{1/n}{1/n+1} = \frac{n+1}{n} > 1 \implies \frac{1}{n} > \frac{1}{n+1} \quad , \ \forall n \in N$$

Leibniz-en teoremaren hipotesiak betetzen direnez, (1) seriea kondizionalki konbergentea da $x = e$ kasuan.

$1 < x < e$ denean,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{\ln x}} = 0$$

$$\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{\ln x} > 1^{\ln x} = 1$$

baldintzak betetzen direnez, (1) seriea kondizionalki konbergentea da.

Baldin $x = 1$ bada, (1) seriea $1-1+1-1+1 \ldots$ serie oszilantea da.

Baldin $0 < x < 1 \Longleftrightarrow -\infty < \ln x < 0$, (1) seriea dibergentea da, konbergentziarako beharrezko baldintza betetzen ez duelako.

Beraz, (1) seriearen konbergentzi eremua $(1, +\infty)$ tartea da.

6. PROBLEMA

Azter dezagun ondoko seriearen izaera x-en balio desberdinetarako:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \; e^{-n \sin x} \qquad (1)$$

Ebazpena.

Har dezagun balio absolutuen seriea: $\sum_{n=0}^{\infty} e^{-n \sin x}$ (2)
Cauchy-ren erizpidea erabiliko dugu:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{e^{-n \sin x}} = e^{-\sin x} = \frac{1}{e^{\sin x}}$$

$$\frac{1}{e^{\sin x}} < 1 \iff \sin x > 0 \iff 2k\pi < x < (2k+1)\pi \quad , \; k \in Z$$

Beraz, tarte hauetan (1) seriea absolutuki konbergentea da.

$$\frac{1}{e^{\sin x}} > 1 \iff \sin x < 0 \iff (2k+1)\pi < x < 2\,(k+1)\pi \quad , \; k \in Z$$

Beraz, (1) seriea ez da absolutuki konbergentea; eta konbergentziarako baldintza beharrezkoa betetzen ez denez, (1) seriea dibergentea dela dugu.

$$\frac{1}{e^{\sin x}} = 1 \iff \sin x = 0 \iff x = k\pi \qquad k \in Z$$

$x = k\pi$, $k \in Z$ denean, (1) seriea -1+1-1+1-.... seriea da; beraz, oszilantea.

7. PROBLEMA

Bila dezagun ondoko seriearen izaera x-en balio desberdinetarako:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n \cdot 3^n (x-5)^n} \qquad (1)$$

Ebazpena.

Izan bedi $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot 3^n (x-5)^n}$ (2) seriea eta kontsidera dezagun Cauchy-ren erizpidea:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n\ 3^n |x-5|^n}} = \left|\frac{1}{3(x-5)}\right|$$

$$\left|\frac{1}{3(x-5)}\right| < 1 \Longrightarrow 3\,|x-5| > 1 \Longrightarrow x > \frac{16}{3} \text{ eta } x < \frac{14}{3}$$

denean (1) seriea absolutuki konbergentea da.

$$\left|\frac{1}{3(x-5)}\right| = 1 \Longrightarrow 3|x-5| = 1 \Longrightarrow \text{(2) seriea } \sum\frac{1}{n} \text{ seriea}$$

da; beraz, kasu honetan (1) seriea kondizionalki konbergentea da.

$x-5 = -1/3 \Longleftrightarrow x = \frac{14}{3}$ kasuan (1) seriea $\sum\frac{-1}{n}$ seriea denez, dibergentea da.

$$\left|\frac{1}{3(x-5)}\right| > 1 \Longleftrightarrow 3|x-5| < 1 \Longleftrightarrow \frac{14}{3} < x < \frac{16}{3} \text{ kasuan (1)}$$

seriea dibergentea da.

8. <u>PROBLEMA</u>

Aztertu ondoko seriearen konbergentzia uniformea:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^{5/3}}$$

Ebazpena.

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{x^{n+1}\, n^{5/3}}{(n+1)^{5/3}\, x^n}\right| = |x|$$

$|x| < 1 \iff -1 < x < 1$ denean, seriea absolutuki konbergentea da. $x = 1$ denean, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{5/3}}$ serie harmonikoa dugu, eta, dakigunez, konbergentea da; beraz, emandako seriea absolutuki, konbergentea. $x = -1$ denean, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^{5/3}}$ serie alternatu konbergentea dugu.

$|x| > 1$ denean konbergentziarako baldintza beharrezkoa betetzen ez denez, emandako seriea dibergentea da. Beraz, seriea konbergentea da $|x| \le 1$ denean eta x-en balio hauetarako ondokoa betetzen da:

$$\left|\frac{x^n}{n^{5/3}}\right| = \frac{|x|^n}{n^{5/3}} \le \frac{1}{n^{5/3}}$$

Eta $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{5/3}}$ zenbaki seriea konbergentea denez, Weierstrass-en teoremaren bidez, emandako seriea $[-1,1]$ tartean uniformeki konbergentea dela ateratzen da.

9. PROBLEMA

Zein puntutan dira ondoko bi serieak uniformeki konbergenteak?

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2}$

b) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + x^2}$$

Ebazpena.

a) $$\left| \frac{\sin n x}{n^2} \right| \leq \frac{1}{n^2} , \quad \forall n \in N \text{ eta } \forall x \in R.$$

Desberdintza hau betetzen denez, Weierstrass-en erizpidez, $\sum \frac{\sin n x}{n^2}$ seriea x puntu erreal guztietan uniformeki konbergentea dela frogatzen da.

b) $$\left| \frac{1}{n^2 + x^2} \right| \leq \frac{1}{n^2} , \quad \forall n \in N \text{ eta } \forall x \in R.$$

Aurrean egindako arrazonamendu berberaz, $\sum \frac{1}{n^2 + x^2}$ seriea x puntu erreal guztietan uniformeki konbergentea dela ateratzen da.

10. PROBLEMA

Izan bedi $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n x}{n^3}$. Froga ezazue ondoko berdintza:

$$\int_0^{\pi} f(x)\, dx = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^4}$$

Ebazpena.

$$\left|\frac{\sin nx}{n^3}\right| \leq \frac{1}{n^3}, \quad \forall n \in N \quad \text{eta} \quad \forall x \in R.$$

Desberdintza hau betetzen denez, $\sum \frac{\sin nx}{n^3}$ seriea uniformeki konbergentea da puntu erreal guztietan Weierstrass--en teoremaren arauera; beraz, uniformeki konbergentea da $0 \leq x \leq \pi$ tartean.

Orduan elementuz elementu integra daiteke eta ondoko berdintzak ditugu:

$$\int_0^\pi f(x)\,dx = \int_0^\pi \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^3}\right) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^\pi \frac{\sin nx}{n^3}\,dx =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{\cos nx}{n^4}\Big|_0^\pi\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-\cos n\pi}{n^4} =$$

$$= \frac{2}{1^4} + \frac{2}{3^4} + \frac{2}{5^4} + \ldots = 2\left(\frac{1}{1^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \ldots.\right) =$$

$$= 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^4}$$

11. PROBLEMA

a) $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \ldots..$

b) $\ln|1+x| = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \ldots$

c) $(1+x)^p = 1 + px + \frac{p(p-1)}{2!} x^2 + \ldots + \frac{p(p-1)\ldots(p-n+1)}{n!} x^n + \ldots$

Aurreko formulak hiru funtzioen Mac-Laurin-en garapenak dira. Zein tartean konbergitzen dute serieek?

Ebazpena.

a) $\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{x^n \cdot (n-1)!}{x^{n-1} \cdot n!} \right| =$

$= \lim_{n\to\infty} \left| \frac{x}{n} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{|x|}{n} = 0$

Serieak e^x funtziorantz konbergitzen du puntu erreal guztietan.

b) $\lim_{n\to\infty} \left| \frac{(-1)^n x^{n+1} n}{(n+1)(-1)^{n-1} x^n} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{|x| \cdot n}{n+1} = |x|$

Baldin $|x| < 1 \iff -1 < x < 1$ bada, seriea konbergentea da.

$x = 1$ denean, $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot \frac{x^n}{n}$ seriea $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ serie alternatu konbergentea bihurtzen da.

$x = -1$ denean, ondoko serie dibergentea dugu:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}\ (-1)^{n}}{n} = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

Emandako seriea $(-1,1]$ tartean konbergentea da eta konbergentzi erradioa 1 da.

c) $$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{p(p-1)..(p-n+1)(p-n)\ x^{n+1}\ n!}{p(p-1)..(p-n+1)\ x^{n}\ (n+1)!} \right| =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(p-n)\ x}{n+1} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{|p-n|}{n+1} |x| = |x|$$

Seriea $(-1,1)$ tartean konbergentea da, p edozein zenbaki irreal izanik. Serie hau serie binomikoa deitzen da.

12. PROBLEMA

Eman ondoko berredura-seriearen konbergentzi tartea eta erradioa:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)^5\ x^{2n}}{2n+1}$$

Ebazpena.

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+2)^5\ x^{2n+2}\ (2n+1)}{(n+1)^5\ x^{2n}\ (2n+3)} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+2)^5 (2n+1) x^2}{(n+1)^5 (2n+3)} = x^2$$

$x^2 < 1 \iff |x| < 1$ denean, seriea konbergentea da.

$|x| = 1$ denean emandako seriea dibergentea da gai generalak zerorantz jotzen ez duelako.

Beraz, konbergentzi erradioa 1 da, eta konbergentzi tartea, $(-1,1)$ tartea.

13. PROBLEMA

Azter dezagun ondoko seriearen konbergentzi erradioa eta tartea:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1} \left(\frac{x}{2}\right)^n .$$

Ebazpena.

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)(n+1)\, 2^n}{(n+2)\, 2^{n+1}\, n} |x| =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2 |x|}{2n\,(n+2)} = \frac{|x|}{2}$$

$x = \pm 2$ denean,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1 \neq 0 \quad \text{denez,}$$

serie dibergentea da.

Honelatan, ba, emandako seriearen konbergentzi erradioa 2 da eta konbergentzi tartea, (-2,2) tarte irekia.

14. PROBLEMA

Estudiatu ondoko berredura-seriearen konbergentzi erradioa:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n \cdot 3^n \cdot \ln n}$$

Ebazpena.

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left| \frac{x^{n-1}}{n \cdot 3^n \cdot \ln n} \right|} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}\ \sqrt[n]{\ln n}} \left| \frac{x^{\frac{n-1}{n}}}{3} \right| = \left|\frac{x}{3}\right|$$

$\left|\frac{x}{3}\right| < 1$ denean seriea konbergentea denez, berredura-seriearen konbergentzi erradioa 3 da.

15. PROBLEMA

Esan ondoko berredura-seriea x-en zeintzu baliotarako den konbergentea.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \cdot (1 + \frac{1}{n})^{n^2} \ (x-1)^n .$$

Ebazpena.

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{(1 + \frac{1}{n})^{n^2} |x-1|^n} = \lim_{n\to\infty} (1 + \frac{1}{n})^n |x-1| =$$

$$= |x-1| \ e .$$

$$|x-1| \ e < 1 \iff |x-1| < \frac{1}{e} \iff 1 - \frac{1}{e} < x < 1 + \frac{1}{e}$$

$x = 1 + \frac{1}{e}$ eta $x = 1 - \frac{1}{e}$ kasuetan, konbergentziarako beharrezko baldintza ez da betetzen eta seriea dibergentea da:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(1 + \frac{1}{n})^{n^2}}{e^n} = 1 \neq 0$$

Beraz, emandako berredura-seriea konbergentea da $(1 - \frac{1}{e} , 1 + \frac{1}{e})$ tartean.

16. PROBLEMA

Gara dezagun $\frac{2x - 3}{(x-1)^2}$ expresioa berredura-seriez.

Ebazpena.

$$\frac{2x-3}{(x-1)^2} = -\frac{2}{1-x} - \frac{1}{(1-x)^2}$$

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)(-2)\ldots(-1-n+1)}{n!}(-1)^n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \quad ,$$

serie honen konbergentzi tartea $|x| < 1$ izanik.

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2)(-3)\ldots(-1-n)}{n!}(-1)^n x^n =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)!}{n!}(-1)^{2n} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)\, x^n \ ,$$ serie honen konbergentzi tartea $|x| < 1$ izanik.

Beraz,

$$\frac{2x-3}{(x-1)^2} = -2\sum_{n=0}^{\infty} x^n - \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)\, x^n = -\sum_{n=0}^{\infty} (n+3)\, x^n$$

Eta espresio honen konbergentzi tartea $|x| < 1$ da.

17. PROBLEMA

Demagun $\dfrac{3x-5}{x^2-4x+3}$ expresioaren berredura-seriezko garapena eta serie honen konbergentzi tartea.

Ebazpena.

$$\frac{3x - 5}{x^2 - 4x + 3} = \frac{3x - 5}{(x-1)(x-3)} = \frac{1}{x-1} + \frac{2}{x-3} = -\frac{1}{1-x} - \frac{2}{3}\frac{1}{1-x/3}$$

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \;, \quad |x| < 1 \quad \text{denean.}$$

$$\frac{1}{1-x/3} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{3}\right)^n \;, \quad |x| < 3 \quad \text{denean.}$$

Beraz,

$$\frac{3x-5}{x^2-4x+3} = -\sum_{n=0}^{\infty} x^n - \frac{2}{3}\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{3}\right)^n =$$

$$= -\sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{2}{3}\left(\frac{x}{3}\right)^n + x^n\right] = -\sum_{n=0}^{\infty} \left(1 + \frac{2}{3^{n+1}}\right) x^n \;,$$

$|x| < 1$ izanik.

18. PROBLEMA

Bila ditzagun $\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}$ funtzioaren berredura-seriezko garapena eta beraren konbergentzi tartea.

Ebazpena.

$$\frac{1}{\sqrt{4-x^2}} = \frac{1}{2}\,\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{2}\right)^2}} = \frac{1}{2}\,\frac{1}{(1-z)^{1/2}} \;, \quad z = \left(\frac{x}{2}\right)^2 \quad \text{izanik.}$$

$$\frac{1}{(1-z)^{1/2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\frac{1}{2})\,(-\frac{3}{2})\,(-\frac{5}{2})\,\ldots\,(-\frac{2n-1}{2})}{n\,!}\,(-z)^n =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1\,.\,3\,.\,5\,\ldots\,(2n-1)}{2^n\,.\,n\,!}\,z^n$$

Eta z delakoaren berredura-serie hori konbergentea da $|z| < 1$ tartean. Honelatan, ba,

$$\frac{1}{\sqrt{4-x^2}} = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1\,.\,3\,.\,5\,\ldots\,(2n-1)}{2^{3n}\,n\,!}\,x^{2n} ,$$

eta serie hau $\left|\frac{x^2}{4}\right| < 1$ denean konbergentea denez, beraren konbergentzi tartea $|x| < 2$ da.

19. PROBLEMA

Kalkulatu $\ln(1+x-2x^2)$ funtziorako Taylor-en garapena eta beraren konbergentzi tartea.

Ebazpena.

$1 + x - 2x^2 = (1-x)\,(2x+1)$

$\ln\,(1 + x - 2x^2) = \ln\,(1-x) + \ln\,(2x+1)$

$\ln\,(1-x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}\ ,\quad |x| < 1$ denean.

$$\ln (2x+1) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(2x)^n}{n}, \quad |x| < \frac{1}{2} \quad \text{denean.}$$

Beraz,

$$\ln (1+x-2x^2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} 2^n - 1}{n} x^n, \quad |x| < \frac{1}{2} \quad \text{izanik.}$$

20. PROBLEMA

Derabazioa erabiliz, gara dezagun arc tag x funtzioa berredura seriez, beraren konbergentzi tartea emanez.

Ebazpena.

$$(\text{arc tg } x)' = \frac{1}{1+x^2}$$

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}, \quad |x^2| < 1 \quad \text{denean, hau da,}$$

$|x| < 1$ denean.

Berdintza honen atalak 0-tik x-era integratzen baditugu, ondokoa ateratzen da:

$$\text{arc tg } x = \int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} \right) dx = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

$|x| < 1$ izanik. Erraz ikusten da azken serie hau konbergentea dela, halaber, $x = 1$ eta $x = -1$ muturretan.

21. PROBLEMA

Bila dezagun $ch^3 x$ funtzioaren x-en berredurezko garapena, beraren konbergentzi tartea adieraziz.

Ebazpena.

$$ch\, x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$ch^3 x = \frac{1}{8}\left(e^{3x} + e^{-3x} + 3e^x + 3e^{-x}\right).$$

$$e^{3x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n x^n}{n!}, \quad |x| < +\infty$$

$$e^{-3x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{3^n x^n}{n!}, \quad |x| < +\infty$$

$$e^{x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad |x| < +\infty$$

$$e^{-x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n!}, \quad |x| < +\infty$$

Honelatan, ba,

$$ch^3 x = \frac{1}{8}\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n x^n}{n!} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{3^n x^n}{n!} + 3\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} + \right.$$

$$+ 3 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n!} \Big) =$$

$$= \frac{1}{8} \left(2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^{2n} x^{2n}}{(2n)!} + 6 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} \right) =$$

$$= \frac{1}{4} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(3^{2n} + 3)}{(2n)!} x^{2n} \quad , \quad |x| < + \infty \quad \text{izanik.}$$

22. <u>PROBLEMA</u>

Eman $\int_0^x \frac{\sin x}{x} dx$ funtzioaren x-en berredura-seriezko garapena, eta adierazi beraren konbergentzi tartea.

<u>Ebazpena.</u>

sin x funtzioaren garapena puntu erreal guztietan $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ denez,

$$\frac{\sin x}{x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n+1)!} \quad , \quad |x| < + \infty \quad \text{denean.}$$

Beraz,

$$\int_0^x \frac{\sin x}{x} dx = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n+1)!} dx =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)(2n+1)!} \quad , \quad |x| < + \infty \quad \text{denean.}$$

23. PROBLEMA

Gara dezagun $\sqrt{x}$ funtzioa x-4 delakoaren berredura-seriez.

Ebazpena.

$\sqrt{x}$ funtzioaren garapena Taylor-en formularen arauera lortuko dugu. Kalkulatu behar ditugu, lehendabizi, beraren ondoz-ondoko deribatuak:

$$f(x) = x^{1/2}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2} x^{-1/2}$$

$$f''(x) = \left(-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) x^{-3/2}$$

$$f'''(x) = \left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) x^{-5/2}$$

. . . .

$$f^n(x) = (-1)^{n+1}\, 1 . 3 . 5 . 7 . . . (2n-3) \frac{1}{2^n} x^{\frac{1-2n}{2}}$$

Honelatan, ba, ondoko berdintza ateratzen da:

$$\sqrt{x} = 2 + \frac{1}{4}(x-4) - \frac{1}{32.2!}(x-4)^2 + ... +$$

$$+ (-1)^{n+1} \frac{1 . 3 . 5 ... (2n-3)}{2^n \; n!} 2^{1-2n} (x-4)^n + ...$$

$$= 2 + \frac{1}{4}(x-4) - \frac{1}{64}(x-4)^2 + . . + (-1)^{n+1} \frac{1.3.5..(2n-3)}{2^{3n-1} \; n!}(x-4)^n + ...$$

Serie honen konbergentzi tartea bilatzeko nahikoa da D'Alembert-en erizpidea erabiltzea.

$$\lim_{n \to \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \to \infty} \frac{2n - 1}{2^3 \, (n+1)} \, |x-4| = \frac{|x-4|}{4}$$

Eta $\frac{|x-4|}{4} < 1 \iff |x-4| < 4$ denean, berredura-seriea konbergentea da.

24. PROBLEMA

$\cos x \simeq 1 - \frac{x^2}{2}$ formula hurbilduak x delakoaren zein-tzu baliotan 0,01, 0,001 eta 0,0001 kantitateak baino erro-re txikiagoak ditu?

Ebazpena.

Aipatutako formula hurbildua ondoko formula zehatzetik ateratzen da:

$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots, \; |x| < +\infty$ de-nean.

Formula hurbildua erabiltzen denean betetzen den errorea ε deitzen badugu, desberdintza hau idatz dezakegu:

$$|\varepsilon| < \left| \frac{x^4}{4!} \right|$$

Beraz, erraz egin daiteke errorearen azterketa:

$$\left|\frac{x^4}{4!}\right| < 0{,}01 \Longrightarrow |x^4| < 0{,}24 \Longrightarrow |x| < \sqrt[4]{0{,}24} = 0{,}69$$

$$\left|\frac{x^4}{4!}\right| < 0{,}001 \Longrightarrow |x^4| < 0{,}024 \Longrightarrow |x| < \sqrt[4]{0{,}024} = 0{,}39$$

$$\left|\frac{x^4}{4!}\right| < 0{,}0001 \Longrightarrow |x^4| < 0{,}0024 \Longrightarrow |x| < \sqrt[4]{0{,}0024} = 0{,}22$$

25. PROBLEMA

Bilatu $f(x) = \frac{x^2}{2}$ funtzioaren Fourier-en seriea, $-\pi \leq x \leq \pi$ baldin bada.

Ebazpena.

$f(x) = \frac{x^2}{2}$ funtzioa bikoitia da $[-\pi, \pi]$ tartean; beraz, $b_n = 0$, eta

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\cos nx\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \frac{x^2}{2}\cos nx\,dx =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^\pi x^2\cos nx\,dx = \frac{1}{\pi}\left(x^2\frac{\sin nx}{n}\Big|_0^\pi - \frac{2}{n}\int_0^\pi x\sin nx\,dx\right) =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(-\frac{2}{n}\right)\left(-\frac{x\cos nx}{n}\Big|_0^\pi + \frac{1}{n}\int_0^\pi \cos nx\,dx\right) =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\frac{2\pi}{n^2}\cos n\pi + \frac{1}{n^2}\sin nx\Big|_0^\pi\right) = \frac{2}{n^2}\cos n\pi$$

Gainera,

$$a_o = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{x^2}{2}\, dx = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{x^3}{2\,.\,3} \Bigg|_0^{\pi} = \frac{\pi^2}{3}$$

Beraz,

$$\frac{x^2}{2} = \frac{\pi^2}{6} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2} \cos n\,\pi \,\cos nx =$$

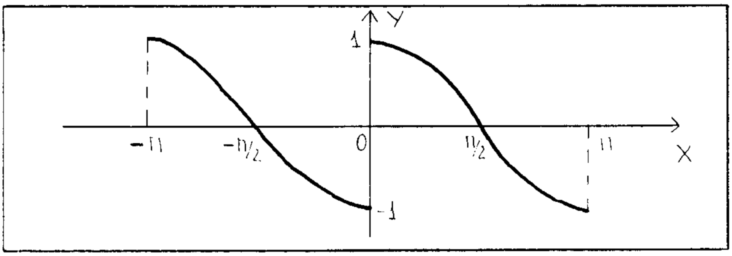
$$= \frac{\pi^2}{6} + (-1)^n \; 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}$$

26. PROBLEMA

Gara dezagun $f(x) = \cos x$, $0 < x < \pi$, funtzioa Fourier-en sinuetako seriez.

Ebazpena.

Fourier-en sinuetako seriea bakarrik $f(x)$ funtzioa bakoitia denean existitzen da. Beraz, $f(x)$ funtzioaren definizioa hedatu behar dugu bakoitia izan dadin. Hedadura ondoko irudiak adierazten duenez egingo dugu:



Honela, $f(x)$ funtzioa 2π luzeradun tarte batetan definiturik dugu.

$$a_n = 0$$

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\cos x\sin nx\,dx =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left[\sin(nx+x) - \sin(nx-x)\right] dx =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{-\cos(nx+x)}{n+1} + \frac{\cos(nx-x)}{n-1}\right]_0^{\pi} =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\left(\frac{\cos(n-1)\pi}{n-1} - \frac{\cos(n+1)\pi}{n+1}\right) - \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1}\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[(-1)^{n+1}\left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1}\right) - \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1}\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{\pi}\ \frac{2}{n^2-1}\left((-1)^{n+1} - 1\right)\ ,\quad n \neq 1 \text{ denean.}$$

$$b_1 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\cos x\sin x\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin 2x\,dx =$$

$$= \frac{1}{\pi}\ \frac{-\cos 2x}{2}\Bigg|_0^{\pi} = \frac{1}{\pi}\left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) = 0$$

Azkenez,

$$\cos x = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2}{\pi(n^2-1)} \left[(-1)^{n+1} - 1\right] \sin nx$$

Baina $(-1)^{n+1} - 1 = -2$ da n bikoitia denean eta zero n bakoitia denean; beraz, $n = 2m$ eginez,

$$\cos x = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2}{\pi(4m^2-1)} (-2) \sin 2mx =$$

$$= -\frac{4}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin 2mx}{4m^2-1}$$

Baina etenguneetan seriearen batura zero egiten da.

27. PROBLEMA

Eman ondoko funtzioaren Fourier-en seriea:

$$f(x) = \begin{cases} c_1 , & -\pi < x \leq 0 \quad \text{denean,} \\ c_2 , & 0 < x < \pi \quad \text{denean.} \end{cases}$$

Estudiatu $c_1 = -1$ eta $c_2 = 1$ kasu berezia.

Ebazpena.

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{0} c_1 \cos nx \, dx + \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\pi} c_2 \cos nx \, dx =$$

$$= \frac{c_1}{n\pi} \sin nx \Big|_{-\pi}^{0} + \frac{c_2}{n\pi} \sin nx \Big|_{0}^{\pi} = 0 \quad (n=1,2,3,..)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{0} c_1 \sin nx \, dx + \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\pi} c_2 \sin nx \, dx =$$

$$= \frac{c_1}{n\pi} [-\cos nx] \Big|_{-\pi}^{0} + \frac{c_2}{n\pi} [-\cos nx] \Big|_{0}^{\pi}$$

n bikoitia bada, $b_n = 0$

n bakoitia bada, $b_n = \frac{2c_1}{n\pi} - \frac{2c_2}{n\pi} = -\frac{2}{n\pi}(c_1 - c_2)$

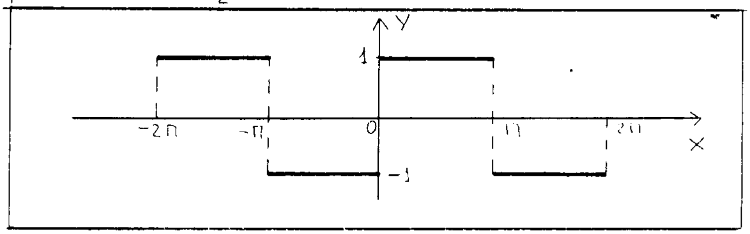
$$a_o = \frac{c_1}{\pi} x \Big|_{-\pi}^{0} + \frac{c_2}{\pi} x \Big|_{0}^{\pi} = c_1 + c_2$$

Beraz,

$$f(x) = \frac{c_1 + c_2}{2} - \frac{2(c_1 - c_2)}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin (2n+1) x}{2n+1}$$

Berdintza hori etenguneetan izan ezik, beste puntu guz- tietan betetzen da. Etenguneetan seriearen batura $\frac{c_1 + c_2}{2}$ egiten da.

$c_1 = -1$ eta $c_2 = 1$ kasu berezia:



$$f(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(2n+1)x}{2n+1}$$, jarraitasun puntuetan, eta

seriearen batura zero da etenguneetan.

28. PROBLEMA

Bila dezagun

$$f(x) = \begin{cases} ax , & -\pi < x \leq 0 \\ bx , & 0 \leq x < \pi \end{cases}$$

funtzioaren Fourier-en garapena.

Ebazpena.

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{0} ax \cos nx \, dx + \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\pi} bx \cos nx \, dx =$$

$$= \frac{a}{\pi} \left[\frac{x}{n} \sin nx + \frac{\cos nx}{n^2} \right]_{-\pi}^{0} + \frac{b}{\pi} \left[\frac{x}{n} \sin nx + \frac{\cos nx}{n^2} \right]_{0}^{\pi} =$$

$$= \frac{a}{\pi} \left(\frac{1}{n^2} - \frac{\cos n\pi}{n^2} \right) + \frac{b}{\pi} \left(\frac{\cos n\pi}{n^2} - \frac{1}{n^2} \right)$$

n bikoitia bada, $a_n = 0$

n bakoitia bada, $a_n = \dfrac{2(a-b)}{\pi n^2}$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} ax \sin nx \, dx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} bx \sin nx \, dx =$$

$$= \frac{a}{\pi}\left[-\frac{x}{n}\cos nx - \frac{\sin nx}{n^2}\right]_{-\pi}^{0} + \frac{b}{\pi}\left[-\frac{x}{n}\cos nx - \frac{\sin nx}{n^2}\right]_{0}^{\pi}$$

n bikoitia bada, $b_n = -\frac{a+b}{n}$

n bakoitia bada, $b_n = \frac{a+b}{n}$

$$a_0 = \frac{a}{\pi}\int_{-\pi}^{0} x \, dx + \frac{b}{\pi}\int_{0}^{\pi} x \, dx = \frac{b-a}{2}\pi$$

Beraz, jarraitasun puntuetan ondoko berdintza dugu:

$$f(x) = \frac{b-a}{4}\pi + \frac{2(a-b)}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos(2n+1)x}{(2n+1)^2} + (a+b)\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\sin nx}{n}$$

Eta seriearen batura etenguneetan hauxe da:

$$s(\pm\pi) = \frac{1}{2}(-a\pi + b\pi) = \frac{\pi}{2}(b-a)$$

29. PROBLEMA

Kalkula dezagun $f(x) = \sin ax$, $-\pi \leq x \leq \pi$, funtziora-ko Fourier-en garapena ($a \notin N$).

Ebazpena.

$f(x)$ funtzioa bakoitia denez, beraren garapenak bakarrik sinuak ditu; beraz, $a_n = 0$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sin ax \sin nx \, dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} \sin ax \sin nx \, dx =$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} \frac{1}{2} \left[\cos (a-n)\, x - \cos (a+n)\, x\right] dx =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{\sin (a-n)\, x}{a-n} - \frac{\sin (a+n)\, x}{a+n}\right]_{0}^{\pi} =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\frac{\sin (a-n)\pi}{a-n} - \frac{\sin (a+n)\pi}{a+n}\right) =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{a-n} - \frac{1}{a+n}\right) \sin a\pi \cos n\pi =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{a-n} - \frac{1}{a+n}\right) \sin a\pi \quad (-1)^n$$

Beraz,

$$f(x) = \frac{2 \sin a\pi}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n \sin nx}{a^2-n^2}$$

eta

$$s(\pm \pi) = 0$$

30. PROBLEMA

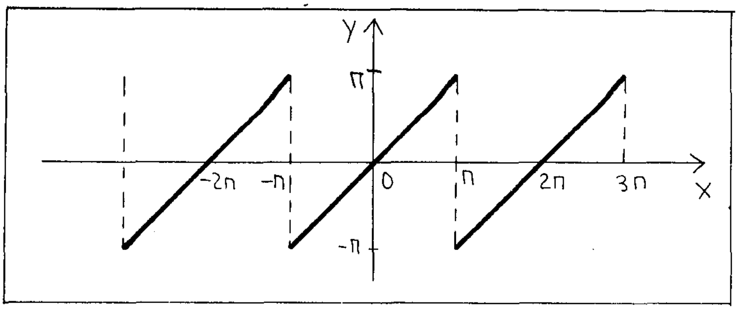
Bila ditzagun $f(x) = x$, $0 \leq x < \pi$, funtzioaren

a) sinuetako seriezko garapena

b) kosinuetako seriezko garapena.

Ebazpena.

a) Har dezagun ondoko hedadura bakoitia:



$$a_n = 0$$

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \sin nx \, dx =$$

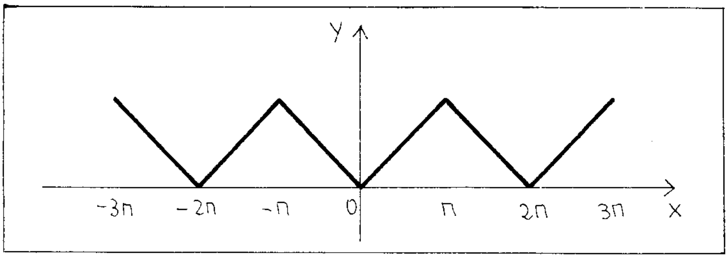
$$= \frac{2}{\pi} \left[- \frac{1}{n} x \cos nx + \frac{1}{n^2} \sin nx \right]_0^{\pi} =$$

$$= \frac{2}{\pi} \left[- \frac{1}{n} \pi \cos n\pi \right] = \frac{2}{n} (-1)^{n+1}$$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2 \sin nx}{n}$$

$$s(\pm \pi) = 0$$

b) Har dezagun orain f(x) funtzioaren hedadura bikoitia:



$$b_n = 0$$

$$a_o = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \, dx = \pi$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos nx \, dx = \frac{2}{\pi} \left[\frac{x}{n} \sin nx + \frac{1}{n^2} \cos nx \right]_0^{\pi} =$$

$$= \frac{2}{\pi} \left[(-1)^n \frac{1}{n^2} - \frac{1}{n^2} \right] = \frac{2}{\pi n^2} \left((-1)^n - 1 \right)$$

n bikoitia bada, $b_n = 0$

n bakoitia bada, $b_n = - \dfrac{4}{\pi n^2}$

Honelatan, ba,

$$f(x) = \frac{\pi}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-4 \cos (2n-1) x}{\pi (2n-1)^2}$$

Emaitza honetaz baliatuz, kalkula dezagun $1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots$ seriearen batura.

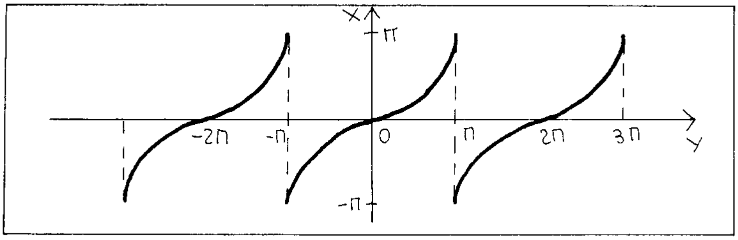
$$s(0) = 0 = \frac{\pi}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-4}{\pi(2n-1)^2} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

31. PROBLEMA

Izan bedi $f(x) = x^2$, $0 < x < \pi$, funtzioa. Eman funtzio honen Fourier-en sinuetako eta kosinuetako seriezko garapenak. Emaitza hauetaz baliatuz, kalkulatu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ eta $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$ zenbaki-serieen baturak.

Ebazpena.

a) Hedadura bakoitia:



$a_n = 0$

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 \sin nx \, dx =$$

$$= \frac{2}{\pi} \left[-\frac{x}{n} \cos nx + \frac{2x}{n^2} \sin nx + \frac{2}{n^3} \cos nx \right]_0^{\pi} =$$

$$= \frac{2}{\pi} \left(-\frac{\pi^2}{n} \cos n\pi + \frac{2}{n^3} \cos n\pi - \frac{2}{n^3} \right)$$

n bikoitia bada, $b_n = -\frac{2\pi}{n}$

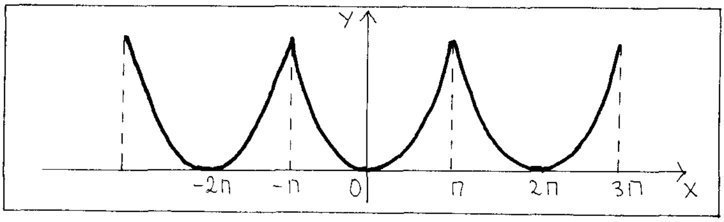
n bakoitia bada, $b_n = \frac{2\pi}{n} - \frac{8}{n^3\pi}$

Beraz,

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$$

formula dugu, non $b_{2k} = -\frac{\pi}{k}$ eta $b_{2k-1} = \frac{2\pi}{2k-1} - \frac{8}{\pi(2k-1)^3}$ berdintzak betetzen diren.

b) Hedadura bikoitia



$b_n = 0$

$$a_o = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2\, dx = \frac{2\,\pi^2}{3}$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2 \cos nx\, dx =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[\frac{x^2}{n}\sin nx + \frac{2x}{n^2}\cos nx - \frac{2}{n^3}\sin nx\right]_0^{\pi} =$$

$$= \frac{4}{n^2}\cos n\pi = (-1)^n\,\frac{4}{n^2}$$

Honelatan, ba,

$$f(x) = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos nx}{n^2}$$

Azken serie honen baturatik $x = 0$ eta $x = \pi$ puntuetan, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ eta $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$ serieen baturak kalkulatzen dira:

$$s(\pi) = \pi^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{2n}}{n^2}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{4} \left(\pi^2 - \frac{\pi^2}{3} \right) = \frac{\pi^2}{6}$$

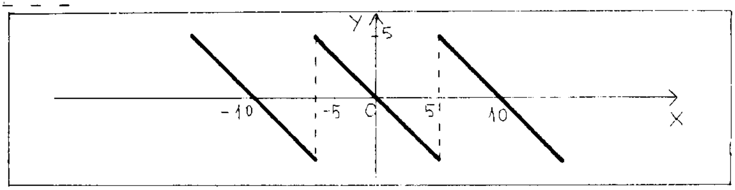
$$s(0) = 0 = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{1}{4} \frac{\pi^2}{3} = \frac{\pi^2}{12}$$

32. PROBLEMA

Bila dezagun $f(x) = 10 - x \quad (5 < x < 15)$ funtzioaren Fourier-en seriea.

Ebazpena.



(5,15) tartean definitutako $f(x) = 10-x$ funtzioa, (-5,5) tartean $f(x) = -x$ funtzioa da. Ikusten denez, funtzioa bakoitia da; beraz, Fourier-en garapena sinuetako seriea izango da.

$$a_n = 0$$

$$b_n = \frac{2}{5}\int_0^5 (-x)\sin\frac{n\pi x}{5}\,dx = -\frac{2}{5}\int_0^5 x\sin\frac{n\pi x}{5}\,dx =$$

$$= -\frac{2}{5}\left[-\frac{5}{n\pi}\,x\cos\frac{n\pi x}{5} + \frac{25}{\pi^2 n^2}\sin\frac{n\pi x}{5}\right]_0^5 =$$

$$= \frac{10}{n\pi}\cos n\pi = (-1)^n\,\frac{10}{n\pi}$$

Orduan, Fourier-en garapena hauxe da:

$$10-x = \frac{10}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\,\frac{\sin\frac{n\pi x}{5}}{n}$$

$$s(5) = s(15) = \frac{1}{2}\,(5-5) = 0$$

33. PROBLEMA

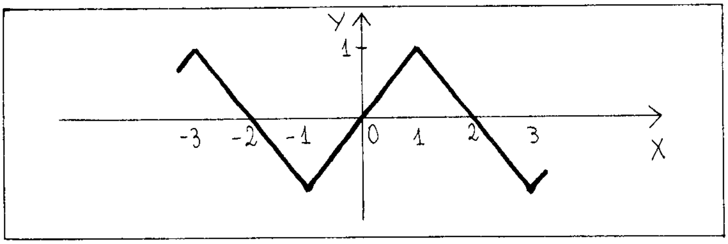
Kontsidera dezagun ondoko funtzioa:

$$f(x) = \begin{cases} x\ , & 0 < x \leq 1 \quad \text{denean,} \\ 2-x\ , & 1 < x < 2 \quad \text{denean.} \end{cases}$$

Kalkula ditzagun funtzio honen a) sinuetako seriezko garapena b) kosinuetako seriezko garapenak.

Ebazpena.

a) funtzioaren hedadura bakoitia



$$a_n = 0$$

$$b_n = \int_0^1 x \sin \frac{n\pi x}{2}\, dx + \int_1^2 2 \sin \frac{n\pi x}{2}\, dx - \int_1^2 x \sin \frac{n\pi x}{2}\, dx =$$

$$= \left[- \frac{2x}{n\pi} \cos \frac{n\pi x}{2} + \frac{4}{n^2 \pi^2} \sin \frac{n\pi x}{2} \right]_0^1 + 2 \left[\frac{-2}{n\pi} \cos \frac{n\pi x}{2} \right]_1^2 +$$

$$+ \left[\frac{2x}{n\pi} \cos \frac{n\pi x}{2} - \frac{4}{n^2 \pi^2} \sin \frac{n\pi x}{2} \right]_1^2 =$$

$$= \frac{8}{n^2 \pi^2} \sin \frac{n\pi}{2}$$

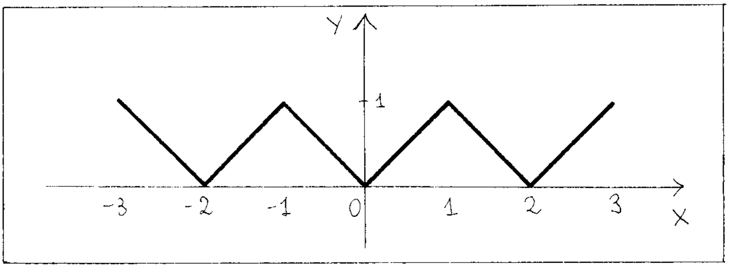
n bikoitia $\Longrightarrow$ $\sin \frac{n\pi}{2} = 0 \Longrightarrow b_n = 0$

n bakoitia $\Longrightarrow$ $b_n = \frac{8}{n^2 \pi^2}$ edo $b_n = - \frac{8}{n^2 \pi^2}$

Beraz, garapena ondoko hau da:

$$f(x) = \frac{8}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin \frac{(2n+1)\pi x}{2}}{(2n+1)^2}$$

f) funtzioaren hedadura bikoitia:



Atera dugun funtzioa $f(x) = |x|$ $(-1 < x < 1)$ da, eta bikoitia denez, beraren garapena kosinuetako seriea izango da.

$$b_n = 0$$

$$a_o = 2 \int_0^1 |x| \, dx = 2 \int_0^1 x \, dx = 1$$

$$a_n = 2 \int_0^1 x \cos m\pi x \, dx =$$

$$= 2 \left[\frac{1}{n\pi} x \sin n\pi x + \frac{1}{n^2\pi^2} \cos n\pi x \right]_0^1 =$$

$$= 2 \left(\frac{1}{n^2\pi^2} \cos n\pi - \frac{1}{n^2\pi^2} \right) = \frac{2}{n^2\pi^2} \left(\cos n\pi - 1 \right)$$

n bikoitia $\Longrightarrow$ $\cos n\pi = 1 \Longrightarrow a_n = 0$

n bakoitia $\Longrightarrow$ $\cos n\pi = -1$ $\Longrightarrow$ $a_n = \dfrac{-4}{n^2\pi^2}$

Beraz,

$$f(x) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-4}{\pi^2 (2n-1)^2} \cos (2n-1)\pi x =$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos (2n-1)\pi x}{(2n-1)^2}$$