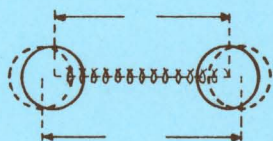


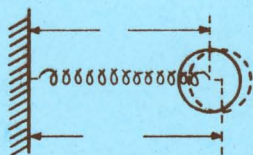
# Materialen

## Erresistentzia



**ELHUYAR**

ANDONI SARRIEGI



TEKNOLOGI TALDEA



*Aurrerki Kutxa Municipalak*

Babestutako argitarapena

---

Edición patrocinada por la

*Caja de Ahorros Municipal  
de San Sebastián*



MATERIALEN  
ERRESISTENTZIA

EGILEA: ANDONI SARRIEGI (Injineru teknikoa)

Liburu hau prestatzerakoan, egilea, S. TIMOSHENKO-ren  
Materialen erresistentziari buruzko idazlanean oinarritu da bereziki

## A U R K I B I D E A

|                                                                    |    |
|--------------------------------------------------------------------|----|
| 1.- TRAKZIOA ETA KONPRESIOA, ELASTIKOTASUN-MUGAREN<br>AZPITIK..... | 5  |
| 2.- TENTSIO ETA DEFORMAZIOEN AZTERKETA.....                        | 51 |
| 3.- INDAR EBAKITZAILEA ETA MOMENTU MAKURTZAILEA.....               | 95 |



## 1.- TRAKZIOA ETA KONPRESIOA, ELASTIKOTASUN- -MUGAREN AZPITIK.

- 1.1.- ELASTIKOTASUNA.
- 1.2.- HOOKE-REN LEGEA.
- 1.3.- TRAKIO-DIAGRAMA.
- 1.4.- LANEKO TENTSIOA.
- 1.5.- BERE PISU PROPIOAGATIK BARFA BATETAN SGR-TURIKO TENTSIO ETA DEFORMAZIOAK.
- 1.6.- ESTATIKOKI ZEHAZTUGABEKO ARAZOAK TRAKZIOAN ETA KONPRESIOAN.
- 1.7.- HASIERAKO TENTSIOAK ETA TENTSIO TERMIKOAK.
- 1.8.- ERAZTUN ZIRKULAR BATEN TRAKZIOA.





### 1.1.- ELASTIKOTASUNA.

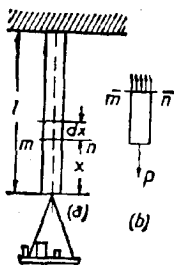
Gorputz bat, zatiki edo partikula txikiz osaturik dagoela suposatzen dugu eta berorien artean dihardutela indarrek. Indar molekular hauek, gorputzaren forma-aldaketei kontrajartzen zaizkie, gorputzarengan kanpoko indarrek dihardute-nean.

Gorputzari kanpoko indar-sistema bat aplikatzen bazaio, bere zatikiak desplazatu egiten dira eta elkarren arteko desplazamendu hauek jarraitu egiten dute harik eta kanpoko indar-sistemaren eta barneko indarren artean oreka ezartzen den arte.

Kasu honetan gorputza deformazio-egoeran dagoela esaten da. Deformazioa gertatzen den bitartean, gorputzarengan diharduten kanpoko indarrek lan egiten dute eta lan hau, deformazioko energia potentzialean transformatzen da osorik edo partzialki. Deformatutako gorputz baten energi metatze honen adibideetako bat, erloju-mulguki baten kasua da.

Gorputzaren deformazio-kausa diren indarrak apurka-apurka gutxitzen badira, gorputza osorik edo partzialki bere lehengo formara itzultzen da eta alderantzizko deformazio honetan, gorputzean metatu den deformazioko energia potentziala kanpoko lan-eran berreskuratzen da.

Bedi adibidez barra prismatiko bat, bere muturrean 1.1.irudiak adierazten duen eran zamatua (kargatua). Karga edo



1. Irudia.

zama honen pean, barra luzatu egiten da kantitate bat. Karga edo zamaren aplikazio-puntua bere norabidean desplazatzen da eta zamak lan positibo bat egiten du higidura honek dirauen artean. Zama gutxitzean, barraren luzapena ere gutxitu egiten da, zamatutako muturra gorantz desplazatzen da eta deformazio-ko energia potentziala, karga bere norantzaren kontrakoan desplazatze-lana egiten transformatzen da.

**Deskargatzean beren lehengo forma berreskuratzekeo gorputzek duten propietateari elastikotasuna deritzo.**

Gorputza osoro elastikoa dela esaten da, baldin eta deskargatzean bere jatorrizko forma guztiz berreskuratzen badu eta partzialki elastikoa dela, baldin eta kanpoko indarrek eragindako deformazioa deskargatzean guztiz desagertzen ez baldin bada. Gorputza osoki elastikoa den kasuan, deformazio-garaian kanpoko indarrek eragindako lana, oso-osorik deformazioko energia potentzialean transformatzen da.

Partzialki elastikoa den gorputzaren kasuan, deformazio ez-elastikoa gertatzen den bitartean, lan horren zati bat gorputzean geratzen den berotan transformatzen da. Froga bidez ikusi da, alegia, altzairua, zura eta harria, osoki elastiko bezala har daitezkeela materialaren propietateen baitako muga jakin baten azpitik. Egitura batengan diharduten kanpoko indarrak, ezagunak direla suposatuz, oinarritzko arazoa da proiektu gilearentzat egituraren zatiak karga-kasu guztietan guztizko elastikotasun-egoeran aurki daitezeneko moduan dimentsiotzea. Egoera horretan bakarrik izango du egiturak bizitza luze eta segurua eta honela ez du bere elementurengan deformazio iraunkorrik agertuko.

#### 1.2.- **HOOKE-REN LEGEA.**

Barra prismatikoak trakziopean jarritz egindako frogak ikus erazi dute, alegia, muga batzuren barnean barraren luzapena trakzio-indarraren proportzionala dela. Indar eta deformazioen arteko erlazio lineal soil hau, Robert Hooke iker-tzaile ingelesak eta bere izena darama ("De Potentia restitutiva" London 1678).

Baldin eta

- P Trakzio-indar totala bada
- l Barraren luzera
- A Barraren sekzio zuzenaren azalera

$\delta$  Barraren luzapen osoa

E Materialaren konstante elastikoa, elastikotasun-modulu deritzona.

Hooke-ren legea, ondorengo ekuazio honen bidez adierazten da:

$$\delta = \frac{Pl}{AE} \quad (1)$$

Barraren luzapena, trakzio-indar eta barraren luzera rekiko proportzionala da eta sekzio zuzenaren azalera eta elastikotasun-moduluarekiko alderantziz proportzionala. Entseñu hauek egitean, behar diren neurriak hartu egin behar dira kargaren aplikazioa axialki (ardatzeran) egiten denaren ziurtasuna izateko. Era honetan barraren edozein makurdura eragozten da.

Aplikaturako indarren inguruneetan lekutatutako barraren zatiak alde batera utzirik, trakzioak dirauen artean, barra prismatikoaren luzetarako zuntz guztiek luzapen berbera dutela segurtatu daiteke eta barraren sekzio zuzenak eta ardatza rekiko elkartzutak diren planoak, egoera honetan gelditzen dira trakzioaren ondoren.

Barneko indarren magnitudea aurkitzeko, pentsa dezagun barra bi zatitan zatituta dela,  $m$  sekzio zuzenaren arabera eta barraren behe aldearen oreka kontsidera dezagun -1. irudia (b)-. Zati honen beheko muturrean  $P$  indarra daukagu. Goi aldean, kargaturako barraren goi aldeko zatikiek behe aldeko zatikiengan eragiten duten ihardura errepresentatzen duten indarrak dihardute. Indar hauek era jarrai batetan banaturik daude sekzio zuzenarengan. Azal batengan indarrak jarraian eta etengabe banatzearen adibide arrunt bat presio hidrostatikoarena da edo eta gas baten presioarena. Indar-banaketa jarrai eta etengabe hauek, garrantzirik handienekoa da azalera-unitateko indarraren intentsitatea. Gure kasuan, zuntzek luzapen berbera dutenez,  $m$  sekzio zuzeneko indar-banaketa, uniformeak izango da. Oreka-baldintzak betetzeko, indar hauen batura  $P$ -ren berdina izan behar du -1. irudia (b)-. Sekzio zuzeneko unitate bakoitzeko indarrak:

$$\sigma = \frac{P}{A} \quad \text{balioko du} \quad (2)$$

Azalera-unitateko indar honi tentsio unitarioa deritzen. Aurrerantzean, indarrak kilogramotan neurtuko ditugu, azalera  $\text{cm}^2$ tan eta tentsioak  $\text{Kg/cm}^2$ tan. Barraren luzera-unitatea

ren luzapena, ondorengo ekuazio honen bidez zertzen da:

$$\epsilon = \frac{\delta}{l} \quad (3)$$

eta deformazio-unitarioa edo luzapen-unitarioa (trakzioan) deritzo. (2) eta (3) ekuazioak usatuz, Hooke-ren legea ondorengo era honetan errepresenta daiteke:

$$\epsilon = \frac{\sigma}{E} \quad (4)$$

eta luzapen-unitarioa errazki kalkulatzen da era honetan tentsioaren eta materialaren elastikotasun-moduluaren arabera.

Luzapen unitarioa, zenbaki abstraktua da, zeren eta bi luzeren arteko zatidurazko erlazioa neurtzen baitu, (3) ekuazioa; (4) ekuaziotik ondorioztatzen da beraz, elastikotasun-modulua tentsioaren unitate berberez neurtzen dela, hots,  $\text{Kg/cm}^2$  tan. I. taulan E-ren balioak adierazten dira material desberdinentzat.

(1)etik (4)rako ekuazioak, barra prismatikoen konpresio-kasuan ere erabil daitezke. Orduan ordea,  $\delta$ -k luzeraren kontrakzio totala errepresentatzen du,  $\epsilon$ -k konpresio deformatzio unitarioa eta  $\sigma$ -k konpresio-tentsioa. Konpresiorako elastikotasun-modulua, material askotan, trakziokoaren berdina da.

Kalkuluetan, trakzio-tentsioa eta deformazioak positibotzat kontsideratzen dira eta konpresioak negatibotzat.

## I. TAULA

### MATERIALEN PROPIETATE MEKANIKOAK

| Materialak                                            | E<br>( $\text{Kg/cm}^2$ ) | Fluentzi puntua<br>( $\text{Kg/cm}^2$ ) | Hautura-tentsioa<br>edo etendura-tentsioa ( $\text{Kg/cm}^2$ ) |
|-------------------------------------------------------|---------------------------|-----------------------------------------|----------------------------------------------------------------|
| %0,15etik 0,25erako karbonodun karbono-altzairua..... | $2 \times 10^6$           | $2 \times 10^3 - 2,8 \times 10^3$       | $3,8 \times 10^3 - 4,5 \times 10^3$                            |
| %3tik 3,5erako nikeldun nikel-altzairua.....          | $2 \times 10^6$           | $2,8 \times 10^3 - 3,5 \times 10^3$     | $5,5 \times 10^3 - 7 \times 10^3$                              |
| Duraluminioa.....                                     | $7 \times 10^5$           | $2,4 \times 10^3 - 3,1 \times 10^3$     | $3,8 \times 10^3 - 4,5 \times 10^3$                            |
| Kobrea.....                                           | $1,1 \times 10^6$         | —                                       | $2 \times 10^3 - 2,8 \times 10^3$                              |
| Beira.....                                            | $7 \times 10^5$           | —                                       | 250                                                            |
| Zura (Egurra).....                                    | $1 \times 10^5$           | —                                       | 560-1400                                                       |
| Hormigoia konpresiora....                             | $2,8 \times 10^5$         | —                                       | 210                                                            |

## ARIKETAK.

- 1.1.- 60 cm-ko luzeradun altzairuzko barra baten luzapen totala kalkulatu, trakzio-tentsioa  $1000 \text{ Kg/cm}^2$  bada.

Soluzioa:

$$\delta = \epsilon x l = \frac{\sigma}{E} \times l = \frac{1000 \text{ Kg/cm}^2}{2 \times 10^6 \text{ Kg/cm}^2} \times 60 \text{ cm} = 0,03 \text{ cm} = 0,3 \text{ mm}.$$

- 1.2.- 2 cm-ko diametrodun altzairuzko hagatxo zilindriko baten trakzio-indar totala kalkulatu, baldin eta luzapen unitarioa  $0,7 \times 10^{-3}$  bada.

Soluzioa:

$$(4) \text{ ekuaziotik } \sigma = \epsilon \cdot E = 0,7 \times 10^{-3} \times 2 \times 10^6 = 1,4 \times 10^3 \text{ Kg/cm}^2$$

$$\text{Trakzio-indarra (2)tik } P = \sigma \cdot A = 1,4 \times 10^3 \times \frac{\pi 2^2}{4} = 4.400 \text{ Kg}$$

- 1.3.- Zein da dimentsio berbereko bi barren materialen elastikotasun-moduluen erlazioa, baldin eta trakzio-indar berdinenpean barren luzapen unitarioak ondorengo erlazioan badaude:  $1: \frac{20}{11}$ . Kalkula luzapen unitario horiek baldin eta barretako bat altzairuzkoa bada eta bestea kobrezkoa trakzio-tentsioa  $700 \text{ Kg/cm}^2$  delarik.

Erantzunak:

$$\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} = \frac{20}{11} \quad \begin{aligned} \epsilon_1 (\text{altzairua}) &= 0,00035 \\ \epsilon_2 (\text{kobrea}) &= 0,00064 \end{aligned}$$

- 1.4.- 60 cm-ko luzeradun altzairuzko barra prismatiko bat 0,6 mm luzatu da trakzio-indar baten ihardunpean. Kalkula indarraren balioa, barraren bolumena  $16 \text{ cm}^3$ koa bada.

Erantzuna:

$$P = 533,3 \text{ Kg}$$

- 1.5.- Alanbre-zati batek 30 cm-ko luzera du eta 500 Kg-ko trakzio-indar batenpean 25 mm luzatzen da. Kalkula materialaren elastikotasun-modulua, baldin eta alanbraren sekzio zuzenaren azalera  $0,25 \text{ cm}^2$ koa bada.

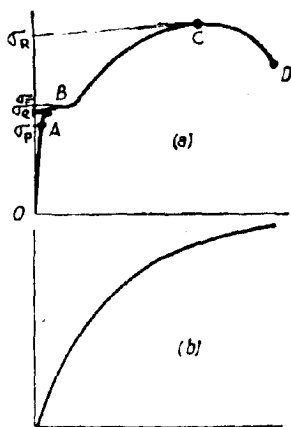
Erantzuna:

$$E = 24.000 \text{ Kg/cm}^2$$

### 1.3.- TRAKZIO-DIAGRAMA.

Tentsioaren eta luzapen unitarioaren arteko proportzionaltasuna, proportzionaltasun-muga deituriko tentsio-neurri baten azpitik bakarrik da egiazkoa eta materialaren propietateen baitakoa da. Muga honen gainetik, luzapen unitarioaren eta tentsioaren arteko erlazioa askoz ere nahasiagoa gertatzen da. Altzairua bezalako materialentzako, proportzionaltasunak nahiko goitarra den tentsio-muga batetaraino irauten du, hala nola  $1,8 \times 10^3$  edo  $2,1 \times 10^3$  Kg/cm<sup>2</sup> arte.

Beste material batzurretan, burdinurtua, kobre subertua, etab. oso baxua da proportzionaltasun-muga eta ez dute Hooke-ren legea jarraitzen, nahiz eta tentsioa oso txikia izan. Materialen propietate mekanikoak proportzionaltasun-mugaz goitik ikertzean, tentsio eta deformazioaren arteko erlazioa diagrama batetan errepresentatzen da grafikoki. 2.irudiak altzairuaren diagrama bat errepresentatzen du.



2.Irudia.- Irakzioko entseiu-diagrama.

Bertan ardatz horizontalean hartzen dira luzapenak eta dagozkien tentsioak OBCD kurbaren ordenatutzat jarririk daude. O-tik A-ra tentsioa eta deformazioa proportzionalak dira; A iraganik, Hooke-ren legea ez da betetzen. A-ri dagokion tentsioa da hain zuzen ere proportzionaltasun-muga. Barra muga honetaz gaindik kargatuz gero, luzapena azkarki hazten da eta diagrama, kurba batetan transformatzen da. B-n barraren bapateko luzapena suertatzen da, trakzio-tentsioaren ugalmen nabarmenik gabe.

Fenomeno honi materialaren fluentzia deritzo eta diagraman kurbaren zati horizontalari dagokio. B puntuari dagokion tentsioari fluentzi tentsioa deritzo. Karga handiagoentzako materialak bere erresistentzia berreskuratzen du, diagraman ikusten denez eta tentsioen ugalmenak behar dira luzapen-ugalmenak lortzeko. C puntuan bere maximoa harrapatzen du tentsioak eta tentsio honi materialaren etendura-karga deritzo. C puntua iraganik, barra luzatu egiten da karga gutxitu arren eta azkenik diagramako D puntuari dagokion karga batentzat gertatzen da etendura edo haustura.

Froga bidez ikusten da barraren luzapena albo-kontrakzio batez lagundua datorrela eta oso bortitza dela gainera etenduraren inguruan; praktikan ordea, fluentzi puntuaren eta etendura-kargaren kalkulaketarako, tentsioa hasierako sekzio zuzenaren A azalerari dagokio.

2(b).irudiak burdinurtuaren trakzio-diagrama errepresentatzen du. Material honek proportzionaltasun-muga oso baxua dauka eta ez du fluentzi puntu definiturik agertzen.

Trakzioko diagramen kidekoak lor daitezke metal desberdinen konpresiorako ere, beren zatirik ezaugarrituenak aztertzeko.

#### 1.4.- **LANEKO TENTSIOA.**

Trakzio-diagrama batek, material baten propietate mekanikoen informazio osoa ematen du. Proportzionaltasun-muga, fluentzi puntua eta materialaren etendura-tentsioa jakinez gero, injinerutzako arazo partikular bakoitzean segurtasun-karga bezala har daitekeen tentsioaren magnitudea ezar daiteke; tentsio honi arruntki laneko tentsioa deritzo.

Altzairuarentzako laneko tentsioaren balioa aukeratzekoan, kontutan hartu behar da proportzionaltasun-muga bai



no txikiagoko tentsioentzat materiala osoki elastikoa dela jo daitekeela eta muga honetaz goitik deformazioaren zati bat kon tserbatu (gorde) egiten duela barrak deskargatzean ere. Beste era batetan esanik, deformazio iraunkorrak gertatzen direla.

Egitura beti baldintza elastikoetan egon dadin eta deformazio iraunkorren ahalbiderik izan ez dadin, laneko tentsioa proportzionaltasun-mugaren ondotxo azpitik aukeratzeko ohitura dago. Muga honen froga bidezko zehaztapenetan oso tres na sentikorrak erabiltzen dira (extentsometroak) eta muga ho rren posizio-zehaztapena neurketak egiten diren arretaren bai tan dago neurri handi batetan. Zehaztasungabezia honek sortzen duen zailtasuna deusezteko materialaren fluentzi puntua edo etendura-tentsioa hartzen dira laneko tentsioa zehazteko (era bakitzeko) oinarritzat.  $\sigma_t$ ,  $\sigma_{Fe}$  eta  $\sigma_r$ -rekin laneko tentsioa, fluentzi puntua eta etendura-nekea errepresentatuz, laneko ten tsioaren magnitudea ondorengo bi erlazio hauetako batez zer tzen da.

$$\sigma_t = \frac{\sigma_{Fe}}{n} \quad \text{edo} \quad \sigma_t = \frac{\sigma_r}{n_1} \quad (5)$$

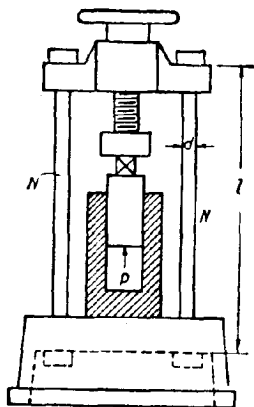
$n$  eta  $n_1$ -i segurtasun-faktore derizte arruntki eta laneko tentsioaren magnitudea zertzen dute. Altzairuzko egitu ren kasuan, fluentzi edo lagapen-puntua hartzen da laneko ten tsioa kalkulatzeko, egituretan deformazio iraunkorrik gerta ez dadin.  $n=2$  segurtasun-koefizientearen usu erabiltzen da egitu rarengan diharduten kargak iraunkorrak direnean (iraunkoki di hardutenean). Kargak aldakorrak direnean edo bapatean aplika tzen direnean, bestalde makinerian sarritan gertatzen dena, beharrezkoa da segurtasun-koefiziente handiagoarekin kalkula tzea. Material hauskorrentzako, hala-nola burdinurtu, hormigoi zenbait harri-mota eta zura bezalako materialentzako, etendu ra-tentsioa hartzen da laneko tentsioa zehazteko oinarritzat. Segurtasun-koefizientearen magnitudea gehienbat, egiturarengan diharduten kanpotiko indarrak kalkuluetan nolako kontuarekin zehaztu direnaren, beren zati desberdinei dagozkien tentsioen eta erabilitako materialen homogeneitatearen baitan dago.

Eraikuntzan adibidez  $n$ , faktore hauen baitan hartzen da:

Eraikuntzaren helburua  
Lurraren edo zoruaren segurtasuna  
Datu-ezagutza  
Eraikitzailea.

## ARIKETAK.

- 1.6.- Kalkula prentsa baten altzairuzko N bernoen  $d$  diametroa  $P=50.000$  Kg-ko esfortzu maximoarentzat (3.irudia) baldin



3.Irudia.

eta kasu honetan altzairuaren-tzako laneko koefiziente  $\sigma_t = 1000$  Kg/cm<sup>2</sup> bada. Kalkula ber noen luzapen totala ere karga maximoarentzat, beren buruen arteko luzera 1,5 m bada.

### Soluzioa:

Sekzio zuzenak behar duen azalera (2) ekuazioaren arabera:

$$A = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{P}{2 \sigma_t} = \frac{50000}{2 \times 1000} = 25 \text{ cm}^2 \text{ da eta hortik:}$$

$$d = \frac{100}{\pi} = 5,64 \text{ cm}$$

Luzapen totala orduan (3) eta (4) ekuazioen arabera:

$$\delta = \epsilon \cdot l = \frac{1000 \frac{\text{Kg}}{\text{cm}^2}}{2 \times 10^6 \frac{\text{Kg}}{\text{cm}^2}} \times 1500 \text{ mm} = 0,75 \text{ mm.}$$

- 1.7.- Egitura bat altzairuzko 4,5 m-ko luzeradun bi barraz osaturik dago eta berorien muturrak  $P$  karga bertikalaren iharduerapean daude. Kalkula barraren sekzioaren azalera zuzena eta  $B$  puntuaren beherapena  $P=2500$  Kg,  $\sigma_t=800$  Kg/cm<sup>2</sup> eta barren hasierako inklinazioaren angelua 30° de-nean.

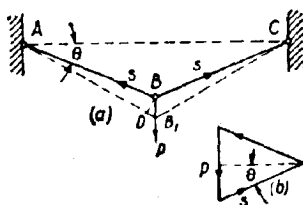
### Soluzioa:

4(b).iruditik, zeinak  $B$  korapiloko oreka-baldintza errepresentatzen baitu, barretako tentsioa ondorengoa dela ondorioztatzen da:

$$S = \frac{P}{2 \sin \theta} ; \theta = 30^\circ ; S = P = 2.500$$

Beharrezko sekzioa:

$$A = \frac{S}{\sigma_t} = \frac{2500}{800} = 3\frac{1}{8} = 3,125 \text{ cm}^2$$



4. Irudia.

B-B<sub>1</sub> gezia, DBB<sub>1</sub> triangeluaren bidez kalkulatzen da, non bere txikitasuna dela bide, BD arkua, barren luzeraren erradio berdina duena alegia, AB<sub>1</sub>-engan marratutako elkartzutaz ordezkatzeko den, B posiziotik deformazioaren ondoren barrak hartu duen posizioan marratua alegia.

AB barraren luzapen totala honako hau da:

$$\overline{B_1 D} = \epsilon \cdot l = \frac{\sigma_t l}{E} = \frac{800}{2 \times 10^6} \times 4500 = 1,8 \text{ mm}$$

$$\text{eta gezia } \overline{BB_1} = \frac{B_1 D}{\sin \theta} = \frac{1,8}{0,5} = 3,6 \text{ mm}$$

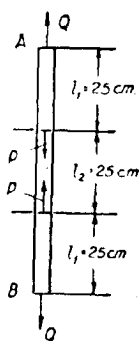
BB<sub>1</sub> geziak eraginiko  $\theta$  angeluaren aldaketa oso txikia dela ikusten da eta S aurkitzeko egindako kalkulua,  $\theta = 30^\circ$  eginaren hipotesian oinarritua, behar hainbat gerturaturikoa dela ikusten da.

1.8.- Kalkula AB altzairuzko barraren luzapen totala, bere sekzioa 6 cm<sup>2</sup> baldin bada eta Q=5000 Kg eta P=2500 Kg-ko indarren iharduerapean baldin badago (1.5.irudia).

Soluzioa:

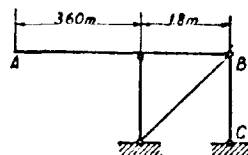
Barraren goiko eta beheko zatientzat, trakzio-indarrak Q balio du eta erdiko zatia erdientzat Q-P. Luzapen totala, honako hau izango da:

$$\begin{aligned} \delta &= 2 \frac{Q l_1}{AE} + \frac{(Q-P) l_2}{AE} = \\ &= 2 \frac{5000 \times 250}{2 \times 10^6 \times 6} + \frac{2500 \times 250}{2 \times 10^6 \times 6} = \\ &= 0,26 \text{ mm} \end{aligned}$$



5. Irudia.

- 1.9.- Kalkulatu BC altzairuzko barrarentzat beharrezko den sekzioa (1.6.irudia) baldin eta laneko koefizientea  $\sigma_t = 1000 \text{ Kg/cm}^2$  bada eta AB habearengan diharduen karga bertikal berdinbanatuak  $1500 \text{ Kg/m}$  balio baldin badu.

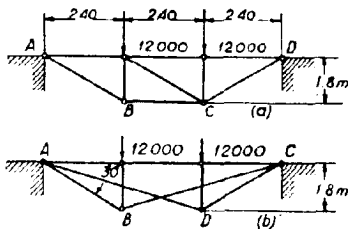


6. Irudia.

Erantzuna:

$$A = 4,05 \text{ cm}^2$$

- 1.10.- Kalkulatu 7(a). eta 7(b).irudietako egituretako AB eta BC barrentzat, beharrezko diren sekzioak, baldin eta  $\sigma_t = 1000 \text{ Kg/cm}^2$  bada.



7. Irudia.

Erantzunak:

$$7(a): A_{AB} = 20 \text{ cm}^2$$

$$A_{BC} = 16 \text{ cm}^2$$

$$7(b): A_{AB} = 16 \text{ cm}^2$$

$$A_{BC} = 14,4 \text{ cm}^2$$

- 1.11.- Egizu 8. ariketa materiala duraluminioa dela suposatuz eta  $P=Q=800 \text{ Kg/cm}^2$  delarik.

Erantzuna:

$$\delta = 0,0955 \text{ mm}$$

- 1.12.- Kalkulatu 7(a) eta 7(b).irudietako CD barren sekzioak eta beren luzapen totalak, baldin eta materiala altzai-

ru arrunta bada eta  $\sigma_t = 1200 \text{ Kg/cm}^2$ .

Erantzuna:

$$7(a): A_{CD} = 16,66 \text{ cm}^2 \quad \delta_{CD} = 0,217 \text{ cm}$$

$$7(b): A_{CD} = 13,33 \text{ cm}^2 \quad \delta_{CD} = 0,382 \text{ cm}$$

1.13.- Egizu 10. ariketa, A karga berma-puntutik 2,4 m-tara lekukuriko goiko kordioaren korapiloan bakarrik aplikatzen dela suposatuz.

Erantzuna:

$$7(a): A_{AB} = 13,33 \text{ cm}^2 \quad A_{BC} = 10,66 \text{ cm}^2$$

$$7(b): A_{AB} = 10,66 \text{ cm}^2 \quad A_{BC} = 9,62 \text{ cm}^2$$

#### 1.5.- BERE PISU PROPIOGATIK BARRA BATEAN SORTURIKO TENTSIO ETA DEFORMAZIOAK.

Barra baten trakzioaren kasua aztertzean (1. Irudia), P kargari dagokion ondorioa bakarrik hartu da kontutan. Barraren luzera handia bada ordea, bere pisu propioak ere, tentsio gehigarri handi samarra sor lezake eta hori ere kontutan hartu beharra dago.

Kasu honetan tentsio maximoa, goiko sekzio zuzenean ematen da.  $\gamma$  barraren bolumen-unitatearen pisua izanik, pisu totala  $A\gamma l$  izango da eta tentsio maximoa honako ekspresio honek adierazten du:

$$\sigma_{\max} = \frac{P + A\gamma l}{A} = \frac{P}{A} + \gamma l \quad (6)$$

(6) ekuazioaren bigarren ataleko azkeneko gaiak, barraren pisuak eragindako tentsioa errepresentatzen du.  $x$  distantziara dagoen sekzio zuzen baten azpian lekukuriko barraren azpikaldeko zatia muturraldearen pisua,  $A\gamma x$  da eta tentsioa, ekuazio honek emanik etorriko da:

$$\sigma = \frac{P + A\gamma x}{A} \quad (7)$$

$\sigma_t$  laneko tentsioa, (6) ekuazioan ordezkaturik segurtasun-sekzioa kalkulatzeko, honako formula hau emango du:

$$A = \frac{P}{\sigma_t - \gamma l} \quad (8)$$

Bertan ikusten da bada, barraren luzera-ugalmenak, A segurtasun-sekzio zuzena ugal erazten duela.  $\gamma l = \sigma_t$  denean, barraren pisuak eraginiko tentsioa (bere buruarena), laneko koefizientearen berdina da eta (8) ekuazioaren bigarren atala infinitu bilakatzen da.

Egoera honetan, ezinezkoa da barra prismatikoaren erabilkera eta sekzio aldakorreko barrak erabiltzera jotzen da.

Bere muturrean P trakzio-indarraren eta bere pisu propioaren ihardun pean den barra prismatiko baten luzapen totala kalkulatzeko, barrarengandik infinituki gertu diren bi sekzio zuzenek tartekaturiko  $dx$  luzera diferentziala duen elementu baten luzapena hartzen da kontutan lehenik (ikus 1.1.irudia).  $dx$ -ek duen bezainbateko luzera laburrean, tentsioa konstantea dela eman daiteke eta (7) adierazpenak emanik datorrela. Orduan, elementuaren  $d\delta$  luzapena, honako hau izango da:

$$d\delta = \frac{\sigma dx}{E} = \frac{P + A\gamma x}{AE} dx$$

Barraren luzapen totala, elementu infinitesimal guztien luzapen diferentzial guztiak batzu lortuko da. Hots:

$$\delta = \int_0^l \frac{P + A\gamma x}{AE} dx = \frac{1}{AE} (P + \frac{1}{2} A\gamma l) \quad (9)$$

Emaitza hau (1) formularekin konparatuz, bere pisu propioz barran sortutako luzapen totala, bere muturrean aplikaturik balioerdia lukeen karga batek sortuko lukeenaren berdina dela ikusten da.

#### ARIKETAK.

1.14.- Kalkulatu forma prismatikodun altzairuzko barra bertikal baten sekzio zuzenaren azalera, baldin eta bere beheko muturrean  $P=35.000$  Kg-ko kargaz kargaturik badago, barraren luzera 200 m bada, laneko koefizienteak  $\alpha_t=700$  Kg/cm<sup>2</sup> balio badu eta altzairuzko m<sup>3</sup> baten pisua 7.800 Kg bada. Kalkulatu baita ere barraren luzapen totala.

**Soluzioa:**

Azalera (8) ekuazioaren arabera,

$$A = \frac{35000}{700 - 7,8 \times 10^{-3} \times 200 \times 10^2} = 64 \text{ cm}^2$$

Luzapen totala (9) adierazpenaren arabera:

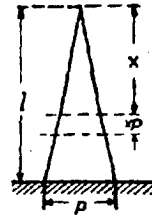
$$\begin{aligned} \delta &= 200 \times 10^3 \frac{1}{64 \times 2 \times 10^6} (35000 + \frac{1}{2} \times 64 \times 7,8 \times 10^3 \times 200 \times 10^2) = \\ &= 63 \text{ mm} \end{aligned}$$

1.15.- Kalkulatu barra koniko batek bere pisu propioaren eraginpean (8.irudia) duen luzapena. Barraren luzera l da, oinarren diametroa d eta materialaren bolumen-unitatearen pisua  $\gamma$ .

**Soluzioa:**

Barraren pisua honako hau izango da:

$$Q = \frac{\pi d^2}{4} \times \frac{l \gamma}{3}$$



8.irudia.

Barraren beheko muturretik x distantziara lekuturiko

sekzio zuzenarengan diharduen trakzio-indarra, barraren beheko zati honen pisuarena izango da, hau da:

$$\frac{Qx^3}{l^3} = \frac{\pi d^2}{4} \times \frac{\gamma x^3}{3l^2}$$

Indar hau sekzio zuzenean berdinbanatu egiten dela kontutuan harturik\* eta dx luzeradun elementua barra prisma tikotzat jorik, elementu honen luzapena, honako hau izango da:

$$d\delta = \frac{\gamma x}{3E} \times dx$$

$$\text{eta barraren luzapen totala: } \delta = \frac{\gamma}{3E} \int_0^l x dx = \frac{\gamma l^2}{6E}$$

\*: Hipotesi hau, konoaren angelua txikia denean onargarria da.

Luzapen hau, barra prismatikoak luzera berarekin izango lukeenaren  $1/3$  (herena) da. (Ikus 9.ekuazioa)

- 1.16.- Meatzeko pompa baten hagatxo bertikala, birabarki batek eragina da (9.irudia) Materiala altzairua dela ematik eta laneko koefizientea  $\sigma_t = 500 \text{ Kg/cm}^2$ , kalkulatu hagatxoaren sekzio zuzena, baldin eta pistoiaren erresistentzia beherantzerako higiduran  $100 \text{ Kg}$  bada eta gorantzerakoan  $1000 \text{ Kg}$ . Hagatxoaren luzera  $100 \text{ m}$  da. Kalkulatu baita ere birabarkiaren erradioa (besoaren luzera), baldin eta ponparen ibilbidea  $20 \text{ cm}$  baldin bada.

**Soluzioa:**

Hagatxoaren sekzio zuzenaren azalera, (8) formularen bidez aurkitzen da.  $P = 1000 \text{ Kg}$ -rentzat:



9. Irudia.

$$A = \frac{1000}{500 - 7,8 \times 10^{-3} \times 100 \times 10^2} = 2,37 \text{ cm}^2$$

Pistoiaren erresistentzia dela eta, hagatxoak gorantz eta beherantz higitzean duen luzapen totala, honako hau izango da:

$$\delta = \frac{(1000 + 100) \times 100 \times 10^3}{2,37 \times 2 \times 10^6} = 23,2 \text{ mm}$$

Birabarkiaren erradioa, honako hau izango da

$$r = \frac{20 + 2,32}{2} = 11,16 \text{ cm}$$

- 1.17.- Bi alanbre, bata altzairuzkoa eta bestea aluminiozkoa, bertikalki eskegirik daude. Kalkulatu pisu propioak eraginiko tentsioak etendura-karga berdintzen dueneko luzera, baldin eta altzairuarentzako  $\sigma_r = 21000 \text{ Kg/cm}^2$  eta  $\gamma = 7800 \text{ Kg/dm}^3$  badira eta aluminioarentzako  $\sigma_r = 3500 \text{ Kg/cm}^2$  eta  $\gamma = 2700 \text{ Kg/dm}^3$ .

**Erantzunak:**

Altzairuarentzako  $l = 26.900 \text{ m}$  ;  
Aluminioarentzako  $l = 13.000 \text{ m}$ .

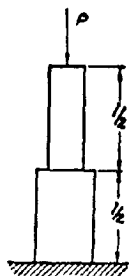


- 1.18.- Zein proportziotan hazten da barra prismatiko batetan bere pisu propioak eragindako tentsio maximoa, baldin eta barraren dimentsio guztiak  $n:1$  proportzioan ugaltzen badira?.

**Erantzuna:**

Tentsioa ere  $n:1$  erlazioan hasiko da.

- 1.19.- Zubi-pilare bat luzera berdineko bi zati prismatikoz osaturik dago (10.irudia) eta bere goiko muturrean  $P=300.000$  Kg-ko konpresiopean dago. Kalkulatu eraikuntzaren bolumena, baldin eta pilareak 36 m baditu,  $m^3$  ko pisua 2000 Kg bada eta konpresioko tentsio maximo onargarria  $10 \text{ Kg/cm}^2$  bada. Konparatu lortutako bolumena, kideko baldintzetan projektatutako pilare prismatiko batenarekin.



10.Irudia.

**Erantzunak:**

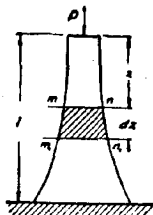
$$V = V_1 + V_2 = 215,2 \text{ m}^3 \quad \text{eta} \quad V_{\text{pris.}} = 386 \text{ m}^3$$

- 1.20.- Kalkulatu aurreko ariketa, pilarea, luzera berdineko hiru zati prismatikoz osatutzat jorik.

**Erantzuna:**

$$V = V_1 + V_2 + V_3 = 190,7 \text{ m}^3$$

- 1.21.- Erabaki 11.irudiko pilarearen forma, tentsioa sekzio bakoitzean konstantea eta  $\sigma_t$  balioiduna izateko eran. Baldintza hau betetzen duen formari, erresistentzia berdineko solidoa deritzo.



11. Irudia.

Irudian marraturik den elementu diferentziala hartuz, bistakoa da  $m, n_1$  sekzioko indar konprimatzailea, mn ebakidurako elementuaren pisuak konprimatzen duena baino handiagoa dela. Tentsioa biek berdina eta  $\sigma_t$  balioduna izan behar duenez, bi ebakiduren arteko dA azalera-diferentziak, indar konprimatzailearen diferentzia konpentsatu behar du. Beraz,

$$dA \cdot \sigma_t = \gamma A dx \quad (a)$$

non ekuazioaren bigarren atalak, elementuaren pisua errepresentatzen baitu. ekuazio hau,  $A \sigma_t$ -z zatituz eta integratuz, honako hau ematen du:

$$\frac{dA}{A} = \frac{\gamma dx}{\sigma_t} \text{ eta hemendik:}$$

$$\ln A = \frac{\gamma x}{\sigma_t} + C_1 \quad \text{eta} \quad A = C \cdot e^{\frac{\gamma x}{\sigma_t}} \quad (b)$$

e logaritmo naturalen oina izarrrik eta  $C = e^{C_1}$

$x=0$  denean, ekuazio honek pilarearen buruarentzat honako hau ematen du:

$$(A)_{x=0} = C$$

Buru honetako sekzioaren azalera  $\frac{P}{\sigma_t}$  da, beraz, (b) ekuazioa:

$$A = \frac{P}{\sigma_t} \cdot e^{\frac{\gamma x}{\sigma_t}} \quad \text{da} \quad (c)$$

Pilarearen oinaren azalera, (c) ekuazioan  $x=l$  balioa emanaz, hau lortzen da:

$$A_{\max} = \frac{P}{\sigma_t} e^{\frac{\gamma l}{\sigma_t}} \quad (d)$$

1.22.- Kalkulatu erresistentzia berdineko pilare baten erai-kuntz bolumena, 1.19. ariketako datuekin projektaturik.

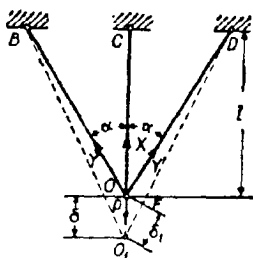
Erantzuna:

$$V = 158 \text{ m}^3$$

# 1.6.- ESTATIKOKI ZEHASTUGABEKO ARAZOAK TRAKZIOAN ETA KONPRE-SIOAN.

Kasu batzutan, barrarengan diharduen indar axialik (ardatzetako indarririk) ez dago zehazterik estatikoko baldintze-kin eta orduan egituraren deformazioak, berori aurkitzeko bi-dea eskaintzen du. Egitura hauei, estatikoki zehaztugabeko sis-temak derizte.

Sistema hauetako adibide soil bat, 12. irudikoa da.



12. Irudia.

P kargak OB, OC eta OD barrerengan lu-  
zamendua sortzen du, hirurak plano  
bereberetan izanik.

P puntuaren oreka-baldintzek, bi eku-  
azio ematen dituzte eta ez dira nahi-  
koa barren hiru tentsio ezezagunak  
erabakitzeak. Hirugarren ekuazio bat  
lortzeko beraz, beharrezkoa da siste-  
maren deformazioa kontutan hartzea.  
Eman dezagun sinplifikatzeko sistema  
simetrikoa dela OC ardatz bertikala-  
rekiko, barra bertikala altzairuzkoa  
dela bere sekzio zuzenaren azalera

$A_a$  eta materialaren elastikotasun-modulua  $E_a$  direlarik eta ba-  
rra inklinatuak edo zeharrek kobrezkoak direla, sekzio zuzena  
ren azalera  $A_c$  eta materialaren elastikotasun-modulua  $E_c$  dituz  
telarik. Barra bertikalaren luzera  $l$  da eta barra inklinatue-  
na

$$\frac{1}{\cos \alpha}$$

Barra bertikalaren esfortzua  $X$ -ez errepresentaturik eta barra  
zeharrek edo inklinatuenak  $Y$ -ez, simetria-ko  $O$  punturako  
oreka-ekuazio bakarra, honako hau izango da:

$$X + 2Y \cos \alpha = P \quad (a)$$

X eta Y kalkula ahal izateko bigarren ekuazioa lortzeko, irudian marra etenez irudikatutako sistema deformatua hartzen da. Bedi  $\delta$ , P kargaren iharduera pean barra bertikalak duen luzapena; barra zehiar edo inklinatuen  $\delta_1$  luzapenak,  $OFO_1$  triangelutik kalkulatuko dira. Luzapen hauek oso txikiak direla kontutan harturik, D zentrudun OF zirkunferentzi arku, leerro zuzen elkartut batez ordezkia daiteke eta  $O_1$ eko angelua, hasierako  $\alpha$  angeluaren berdintzat har liteke; beraz,

$$\delta_1 = \delta \cos \alpha$$

Barra bertikalen eta zehiar edo inklinatuen luzapen unitarioak eta tentsioak, honako hauek izango dira:

$$\epsilon_a = \frac{\delta}{1} ; \sigma_a = \frac{E_a \delta}{1} \quad \text{eta} \quad \epsilon_c = \frac{\delta \cos^2 \alpha}{1} ; \sigma_c = \frac{E_c \delta \cos^2 \alpha}{1}$$

Barretako esfortzu-indarrak, tentsioak sekzio zuzenen azalerekin biderkatuz lortzen dira:

$$X = \sigma_a \cdot A_a = \frac{A_a E_a \delta}{1} \quad \text{eta} \quad Y = \sigma_c \cdot A_c = \frac{A_c E_c \delta \cos^2 \alpha}{1} \quad (b)$$

eta hauetatik:

$$Y = X \cos^2 \alpha \frac{A_c E_c}{A_a E_a}$$

eta (a) ekuazioan ordezkatzuz, honako hau lortzen da:

$$X = \frac{P}{1 + 2 \cos^3 \alpha \frac{A_c E_c}{A_a E_a}} \quad (10)$$

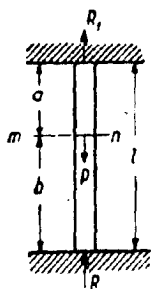
Ikusten denez, X indarra ez da  $\alpha$  angeluaren baitakoa bakarrik, sekzio zuzenen azalaren eta barren materialen propietate mekanikoen baitakoa ere bada agian. Hiru barrek sekzio eta modulu berberak dituzten kasuan, (10) formula, beste honetan transformatzen da:

$$X = \frac{P}{1 + 2 \cos^3 \alpha}$$

$\alpha$ -ren balioa zerorantz (0-rantz) inguratzean,  $\cos \alpha$  baterantz inguratzen da eta barra bertikaleko indarra  $P/3$ -rantz inguratzen da.  $\alpha$ -ren balioa  $90^\circ$ tarantz inguratzean, barra inklinatuak oso luzeak dira eta kargak ia guztiz erdiko barraren

gan du eragina.

Estatikoki zehaztugabeko sistemen beste adibide bat, tarteko  $mn$  sekzio batetan axialki kargatutako barra prismatikoko mutur landatudunarena da (13. irudia).  $P$  karga, muturreta-



13. Irudia.

ko  $R$  eta  $R_1$  erreakzioekin orekaturik dago eta honako ekuazio hau ematen du:

$$P = R + R_1 \quad (c)$$

$R$  eta  $R_1$  kalkulatzeko behar den bigarren ekuazioa zehazteko, barraren deformazioa hartu behar da kontutan.  $P$  kargak  $R$  erreakzio-indarrarekin, laburpena sortzen du barraren beheko zatian eta  $R_1$  erreakzio-indarrarekin luzapena goiko zatian. Zati baten laburpen totala, bestearen luzapen totala hainbat izan behar du.

(1) ekuazioa erabiliz, honako hau lortzen da:

$$\frac{R_1 a}{AE} = \frac{R b}{AE}$$

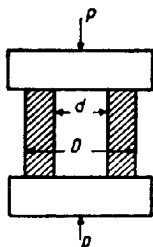
eta hortik,

$$\frac{R}{R_1} = \frac{a}{b} \quad (d)$$

$R$  eta  $R_1$  indarrak, beren aplikazio-puntuetatik  $mn$  sekziorainoko distantziekiko alderantziz proportzionalak direlarik. Era honetan, (c) eta (d) ekuazioek, indar haien magnitudeak ematen dituzte eta barraren tentsioak errazki kalkula daitezke.

# ARIKETAK.

- 1.23.- Altzairuzko zilindro bat eta kobrezko tutu bat, tinkagailu (prentsa) baten plater artean konprimaturik daude (14. Irudia). Kalkulatu altzairu eta kobreaken tentsioak eta laburpen unitarioak, baldin eta  $P = 50.000 \text{ Kg.}$ ,  $d = 10 \text{ cm.}$  eta  $D = 20 \text{ cm.}$  badira.



14. Irudia.

## Soluzioa:

Baldintza estatikoak ez dira nahiko eta zilindroaren eta tutuaren deformazioak ere kontutan hartu behar dira, material bakoitzarengan diharduen karga-zatia aurkitzeko.

Altzairuaren eta kobreaken laburpen unitarioak, berdinak izango dira; beraz, materialen tentsioak beren moduluen erlazioan izango dira, (4 ekuazioa, 4. orria) hots, altzairuaren konpresio-tentsioa, kobreaken konpresio-tentsioaren  $\frac{20}{11}$  izango da. Era honetan, kobreaken  $\sigma_c$  balioa, estati kako ekuazioaren bidez aurkituko da:

$$P = \frac{\pi d^2}{4} \cdot \frac{20}{11} \cdot \sigma_c + \frac{\pi}{4} (D^2 - d^2) \sigma_c$$

$$50.000 = \frac{3,14 \times 10^2}{4} \cdot \frac{20}{11} \sigma_c + \frac{3,14}{4} (20^2 - 10^2) \sigma_c$$

$$\sigma_c = 132 \text{ Kg/cm}^2$$

$$\sigma_a = \frac{20}{11} \sigma_c = \frac{20}{11} \times 132 = 240 \text{ Kg/cm}^2$$

Laburpen unitario berriz,

$$\epsilon = \frac{\sigma_c}{E_c} = \frac{240}{2 \times 10^6} = 120 \times 10^{-6} \text{ da}$$

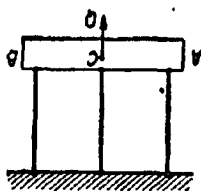
- 1.24.- Hormigoi armatuzko zutabe bat,  $P = 30.000 \text{ Kg.}$  ko indar batek konprimaturik dago. Karga horren zein zatik dihardu hormigoiarengan eta zein altzairuarengan, baldin eta altzairuzko sekzio zuzena, hormigoiezko sekzio zu-

zenaren  $\frac{1}{10}$  bada?

**Soluzioa:**

**Erantzuna:** Hormigoiak 17.500 Kg.ko karga jasatzen du.

- 1.25.- Q pisudun AB gorputz zurrun bat, gorputzaren C grabitate-zentruarekiko simetrikoki ipinitako hiru alanbre bertikaletatik eskegirik dago (15.Irudia). Kalkulatu alanbreen luzapen-esfortzuak, baldin eta erdikoa altzairuzkoa bada eta beste biak kobrezkoak badira. Hiru alanbreen sekzio zuzuenak berdinak dira.



15.Irudia.

**Soluzioa:**

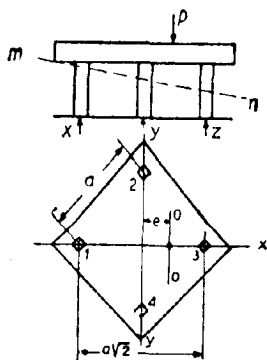
Jarraitu behar den bidea, 1 ariketako berbera da.

**Erantzunak:**  $P_a = \frac{20}{51} Q$  eta  $P_c = \frac{11}{51} Q$

- 1.26.- P kargak diagonalean ihardurik, kalkulatutako mahai karratu baten lau hanketan diharduten indarrak (16.Irudia). Mahaiak zoruan duen sostengua zeharo zurruna da eta hankak luzapenak nahiz laburpenak jasateko moduan berrituak ditu.

**Soluzioa:**

Mahaiko oholtzaren posizio berri mn marra etenez irudi-



16. Irudia.

katua dela jorik, 2 eta 4 hanketako konpresioa, 1 eta 3 hanketakoenen berdina izango da. Beraz,

$$2 Y = X + Z$$

eta baita

$$2 Y + X + Z = P \quad \text{ere}$$

eta hemendik:

$$2 Y = X + Y = \frac{1}{2} P \quad (a)$$

X eta Z aurkitzeko ekuazio osagarria, P indarraren planoan eta Y-rekiko paraleloki O-O ardatz horizontalarekiko

indar guztien momentua hartuz erdiesten da. Beraz,

$$X \left( \frac{1}{2} - a\sqrt{2} + e \right) + \frac{1}{2} P \cdot e = Z \left( \frac{1}{2} a\sqrt{2} - e \right) \quad (b)$$

(a) eta (b)-tik ondorioztatzen da:

$$X = P \left( \frac{1}{4} - \frac{e}{a\sqrt{2}} \right); \quad Y = \frac{P}{4}$$

$$Z = P \left( \frac{1}{4} + \frac{e}{a\sqrt{2}} \right)$$

$e > a \frac{\sqrt{2}}{4}$  baino denean, X negatiboa da. Honek, 1 hankan luzapen (trakzioa) gertatzen dela esan nahi du.

1.27.- Kalkulatu aurreko mahaiaren hanketako indarrak, karga, koordenatu hauetan aplikatzen denean:

$$x = \frac{a}{4} \quad \text{eta} \quad y = \frac{a}{5}$$

**Soluzioa:**

Ariketa hau egiteko, mahaiaren diagonalaz kanpo lekutu riko P karga, bi diagonalen puntuetan aplikatutako estatikoki baliokideak diren bi kargaz ordezka daitezke. Bi indar hauetako bakoitzak hanketan sortutako esfortzuak, aurrez esplikatu den eran kalkulatu dira. Bi karga osagaien ondorioak batuz, P kargaren edozein posiziotarako hanketako esfortzuak aurkituko dira.

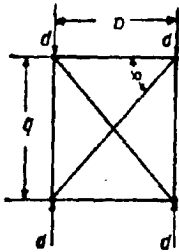


Erantzunak:

$$X = \frac{2 - \sqrt{2}}{8} P ; Y = \frac{2\sqrt{2} + 5}{20} P ; Z = \frac{2 + \sqrt{2}}{8} P$$

$$K = \frac{2\sqrt{2} - 5}{20} P$$

- 1.28.- Diagonaldun koadro angeluzuzen bat, P konpresio-indarren eragin pean dago (17.Irudia). Kalkulatu benetako esfortzuak, baldin eta denak material berekoak badira eta bertikalen sekzio zuzenaren azalera eta gainerakoena  $A_1$  bada.



17.Irudia.

Soluzioa:

Bedi X barra bertikal bakoitzeko konpresio-indarra; Y diagonal bakoitzeko konpresio-indarra eta Z barra horizontal bakoitzeko trakzio-indarra. Korpiloetako baten oreka baldintzak, honako hau ematen du:

$$Y = \frac{1}{\sin \alpha} \times (P - X);$$

$$Z = Y \cos \alpha = (P - X) \cot \alpha \quad (a)$$

Hirugarren ekuazio honako baldintza honetatik aterako da, alegia, koadroak deformazioaren ondoren angeluzuzena izaten jarraituko du simetria dela bide; beraz,

$$(a^2 + h^2) \left(1 - \frac{Y}{A_1 E}\right)^2 = h^2 \left(1 - \frac{X}{AE}\right)^2 + a^2 \left(1 + \frac{Z}{A_1 E}\right)^2$$

eta goragoko mailako kopuru txikiak baztertuz, honako hau erdiesten da:

$$\frac{(a^2 + h^2)Y}{A_1 E} = \frac{h^2 X}{AE} - \frac{a^2 Z}{A_1 E} \quad (b)$$

(a) eta (b) ekuazio-sistema askatuz, diagonaleko indarraren balioa, ondorengo hau dela ateratzen da:

$$Y = \frac{P}{\frac{a^2 + h^2}{h^2} \times \frac{A}{A_1} + \frac{a^2}{h^2} \times \frac{A}{A_1} \times \cos \alpha + \sin \alpha}$$

Beste barretako indarrak ere errazki kalkulatuko dira (a) ekuazioetatik.

1.29.- Kalkulatu aurreko ariketa  $a = h$ ,  $A = 5A_1$  eta  $P = 25000$  direla kontutan hartuz.

Soluzioa:

**Erantzunak:**  $X = 23.541,78 \text{ Kg}$  ;  $Y = 2062,53 \text{ kg}$  eta  $Z = 1458,21 \text{ Kg}$ .

1.30.- Zertzu tentsio sortuko dira altzairuzko berno batetan eta kobrezko tutu batetan (18. irudia), azkoinari  $\frac{1}{4}$  bira ematean, bernoaren luzera 75 cm. bada, torlojoaren hari-neurria  $h = 3 \text{ mm}$ ., bernoaren sekzio zuzenaren azalera  $A_a = 6 \text{ cm}^2$  eta tutuaren sekzio zuzenarena  $A_c = 12 \text{ cm}^2$ ?



18. Irudia.

**Soluzioa:**

**Erantzunak:**  $\sigma_a = 1050 \text{ kg/cm}^2$  eta  $\sigma_c = 525 \text{ Kg/cm}^2$

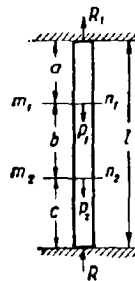
- 1.31.- Zer aldaketa suposatuko lukete aurreko ariketan kalkulaturako tentsioengan,bernoaren muturretan aplikatutako  $P = 2500 \text{ kg}$  trakzio-indarrek?.

**Soluzioa:**

**Erantzunak:**  $\Delta\sigma_a = 198,41 \text{ kg/cm}^2$  eta

$\Delta\sigma_c = - 109,12 \text{ kg/cm}^2$

- 1.32.- Muturrak landatutako barra prismatiko bat,axialki kargaturik dago tarteko bi sekziotan(19.irudia) $P_1$  eta  $P_2$  indarrekin.Kalkula  $R$  eta  $R_1$  erreakzioak.



19. Irudia.

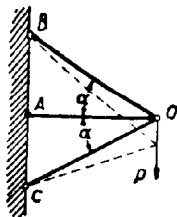
**Soluzioa:**

6. Ataleko (d) ekuazioa erabiliz, karga bakoitzak sortzen dituen erreakzioak kalkulatu dira banaka eta emaitzak batuz balio totalak erdiesten dira. Kalkulatu erreakzio totalak,  $a = 0,31$  ;  $b = 0,31$  eta  $P_1 = 2P_2 = 500 \text{ kg}$  direnean.

**Erantzunak:**  $R_1 = 450$  kg eta  $R = 300$  kg.

- 1.33.- Kalkulatu 20. irudian adierazitako sistemaren benetako indarrak, OA simetri ardatza delarik.

**Soluzioa:**



20. Irudia.

**Erantzunak:** OB barraren trakzio-indarra  $F = \frac{P}{2 \sin \alpha}$

$$F = \frac{P}{2\sin\alpha} \quad \text{da.}$$

- 1.34.- Kalkulatu 10. ariketa c luzeradun barraren beheko zatia a eta b luzeradun beste zatiek halako biko sekzioa duela suposatuz.

**Soluzioa:**

**Erantzunak:**  $R_1 = 554,61 \text{ kg}$  eta  $R = 195,37 \text{ kg}$ .

### 1.7.- HASIERAKO TENTSIOAK ETA TENTSIO TERMIKOAK

Estatikoki zehaztugabeko sistema batetan, litekeena da muntaia egiterakoan nahiz barren luzeretan gertaturiko akatsengatiko edo luzera horien balore zuzenen hala nahiriko aldaketengatiko hasierako tentsioak izatea. Tentsio hauek, kanpoko kargak ez ihardutean ere izan litezke eta sistemaren proportzio geometrikoen, materialen propietate mekanikoen eta akatsen magnitudeen baitan daude. Eman dezagun adibidez 15. irudian adierazitako sisteman, barra bertikalak akatsa duela, dagokion luzera izan ordez 1+a luzera duela. Beste barrekin elkarlotzean, B0 eta D0 barrek, hasierako konpresio batekin la-

burtu ondoren, barra inklinatu berauengan trakzio-tentsioak sortzen ditu hark. Bedi X barra bertikalean, berau beste barrei ondoren diharduen konpresio-indarra.

Barra inklinatuetakoa trakzio-indarra, honako hau izango da:

$$\frac{X}{2 \cos \alpha}$$

eta barra horien luzapenagatiko 0 korapiloaren desplazamendua, honako hau izango da (ikus 6 ataleko b ekuazioa):

$$\delta = \frac{Xl}{2 A_c E_c \cos^3 \alpha} \quad (a)$$

Barra bertikalen laburpena berriz,

$$\delta = \frac{Xl}{A_a E_a} \quad (b)$$

Halere, 0 korapiloaren desplazamendua, barra bertikalaren laburpenarekin batera, berorrek luzeran duen a akatsaren berdina izan behar du.

Era honetan, X kalkulatzeko ondorengo ekuazioa erdiesten da:

$$\frac{Xl}{2 A_c E_c \cos^3 \alpha} + \frac{Xl}{A_a E_a} = a$$

Beraz:

$$X = \frac{a A_a E_a}{1 + \frac{A_a E_a}{2 A_c E_c \cos^3 \alpha}} \quad (11)$$

X jakinik, errazki kalkulatuko dira barretako hasierako tentsioak.

Temperatura aldaketagatiko barren zabalkuntzak, luze ra-akatsek sortzen duten ondorio berbera sor lezakete. Barrenen tenperatura  $t_0$ -tik  $t$ -ra igotzen bada eta zabalkuntza ter-

mikoa muturretako landapenengatik eragotzirik badago barretan konpresio-tentsioak sortuko dira eta berorien magnitudeak, lu zera aldatzeke mantentzearen baldintza bidez kalkula daitezke. Bedi  $\alpha$  zabalkuntz koefizientea eta  $\sigma$  erreakzioek sorturiko konpresio-tentsioa.  $\sigma$  zehazten duen ekuazioa, honako hau izango da:

$$\alpha (T - T_0) = \frac{\sigma}{E} \quad \text{eta hortik}$$

$$\sigma = E \alpha (T - T_0) \quad (12)$$

Bigarren abidibetzat berriz, har dezagun 12. Irudian errepresentatutako sistema eta eman dezagun barra bertikala  $T_0$  giro-tenperaturatik,  $T$  tenperatura berriraino berotzen dela. Dagokion zabalkuntz termikoa, sistemako besta bi barrek eragotzirik egongo da partzialki eta halako konpresio-tentsio bat agertuko da barra bertikalean, barra inklinatuetan trazio-tentsioak agertzen diren bitartean.

Barra bertikaleko konpresio-indarraren magnitudea (11) ekuazioak emanik dator, non luzerako  $a$  akatsen magnitudearen ordez, barra bertikalaren  $\alpha l(T - T_0)$  zabalkuntz termikoa ordezkatuko den.

# ARIKETAK.

- 1.35.- Tranbia baten errailak topera daude  $10^{\circ}\text{C}$ -tara. Zer tentsio sortuko da berorietan eguzkiak  $38^{\circ}\text{C}$ -taraino berotzen dituenean, altzairuaren zabalkuntz koefizientea  $\alpha = 125 \times 10^{-7}$  baldin bada?

Soluzioa:

Erantzuna:  $\sigma = 700 \text{ Kg/cm}^2$

- 1.36.- Zer tentsio-aldaketa gertatuko da 18. Irudian erreprezentatutako kasuan temperatura igotzenan,  $T_0$ -tik  $T$  gradataz iragatean, baldin eta altzairuaren zabalkuntz koefiziente termikoa  $\alpha_a$  eta kobreak  $\alpha_c$  badira?

Soluzioa:

$\alpha_c > \alpha_a$  baino denez, temperatura-ugalmenak konpresioa sortzen du kobreak eta trakzioa altzairuan. Kobre eta altzairuaren luzapen unitarioak berdinak izango dira eta temperatura aldaketagatik berroko trakzio-indarra ren ugalmena  $X$ -ez ordezkaturik, honako hau erdietsiko da:

$$\alpha_a (T - T_0) + \frac{X}{A_a E_a} = \alpha_c (T - T_0) - \frac{X}{A_c E_c}$$

eta hortik:

$$X = \frac{(\alpha_c - \alpha_a) (T - T_0) A_a E_a}{1 + \frac{A_a E_a}{A_c E_c}}$$

Berriro eta tutuko tentsio-aldaketak, honela kalkulatzeko dira:

$$\sigma_a = \frac{X}{A_a} \quad (\text{trakzioa}) \quad \text{eta} \quad \sigma_c = \frac{X}{A_c} \quad (\text{konpresioa})$$

- 1.37.- Kobrezko pletina bat, altzairuzko bi pletinen artean sololaturik dago (21.Irudia). Zer tentsio sortuko da altzairuan eta kobrean, pletinen temperatura  $T_0$  -tik  $T$  gradutara igotzeagatik?

Soluzioa:



21.Irudia.

$$\text{Erantzunak: } X = \frac{(\sigma_c - \sigma_a) (t - t_0) 2 A_a E_a}{1 + \frac{2 A_a E_a}{A_c E_c}} ;$$

$$\sigma_a = \frac{X}{A_a} \quad (\text{trakzioa}) \quad \text{eta} \quad \sigma_c = \frac{X}{A_c} \quad (\text{konpresioa})$$

- 1.38.- Zer tentsio sortuko dira 12.Irudian errepresentatutako sistemaren barretan, baldin eta barra guztien tenperatura  $T_0$  -tik  $T$  gradutara igotzen bada?

Soluzioa:



Erantzunak:

$$X = \frac{(T - T_0) \frac{\alpha_c}{2} - \alpha_a A_a E_a}{1 + \frac{1}{2 \cos^3 \alpha} \cdot \frac{A_a E_a}{A_c E_c}}$$

eta tentsioak:  $\sigma_a = \frac{X}{A_a}$  eta  $\sigma_c = \frac{X}{2 \cos \alpha A_c}$

- 1.39.- 14. Irudiko kasuan  $P = 50.000$  kgko karga konstante bat,  $T_0$  hasierako temperaturara aplikatzen dela suposatuz, kalkulatu ea zein temperatur ugalmenentzat, karga ko-brezko barrak bakarrik jasango duen, baldin eta  $\alpha_a = 125 \times 10^{-7}$  eta  $\alpha_c = 170 \times 10^{-7}$  badira.

Soluzioa:

Erantzuna:  $\Delta T = (T - T_0) = 42,7^\circ\text{C}$

- 1.40.-  $l_1$  eta  $l_2$  luzera eta  $A_1$  eta  $A_2$  azaleradun bi zati prismatikoz osatutako altzairuzko barra batek mutur finkoak dauzka. Kalkulatu tenperatura  $0^\circ\text{C}$ tik  $60^\circ\text{C}$ tara igo-tzean sortzen diren tentsioak. Eman ezazue  $l_1 = l_2$  eta  $A_1 = A_2$  eta  $\alpha_a = 125 \times 10^{-7}$  direla.

Soluzioa:

**Erantzunak:**  $\sigma_1 = 500 \text{ Kg/cm}^2$  eta  $\sigma_2 = 1000 \text{ Kg/cm}^2$

- 1.41.- Kalkulatu jatorri termikodun tentsioak 21. Irudiko sisteman, baldin eta hiru pletinen tenperatura  $60^\circ\text{C}$  igotzen bada. Hirurek lodiera eta zabalera berberak dituzte eta zabalkuntz koefizienteak  $\alpha_a = 125 \times 10^{-7}$  eta  $\alpha_c = 170 \times 10^{-7}$  dira.

Eman ezazue  $\frac{E_c}{E_a} = \frac{11}{20}$  dela.

**Soluzioa:**

**Erantzunak:**  $\sigma_a = 130,55 \text{ Kg/cm}^2$  (trakzioa) eta

$\sigma_c = 261,1 \text{ Kg/cm}^2$  (konpresioa)

- 1.42.- 12. Irudiko sistemaren tenperatura  $60^\circ\text{C}$  tan igotzen da. Kalkulatu jatorri termikozko tentsioak baldin eta hiru barrak altzairuzkoak badira eta sekzio berbera badute. Har itzazue  $\alpha_a = 125 \times 10^{-7}$  eta  $E_a = 2 \times 10^6 \text{ Kg/cm}^2$ .

**Soluzioa:**

**Erantzunak:**  $\sigma_1 = \frac{1500}{1 + 2\cos^3 \alpha}$  eta  $\sigma_2 = \frac{1500 \cos^2}{1 + 2\cos^3 \alpha}$

- 1.43.- Aurki itzazue 15. irudiko sistemaren alanbreetako tentsioak baldin eta alanbreen sekzio zuzena  $0,6 \text{ cm}^2$  bada  $Q$  karga = 2000 kg eta muntaiaren ondoren sistemaren

temperatura 6°C igotzen bada.

Soluzioa:

$$\text{Erantzunak: } \sigma_a = 1364 \text{ kg/cm}^2 \quad \text{eta} \quad \sigma_c = 685 \text{ Kg/cm}^2$$

#### 1.8.- ERAZTUN ZIRKULAR BATEN TRAKZIOA

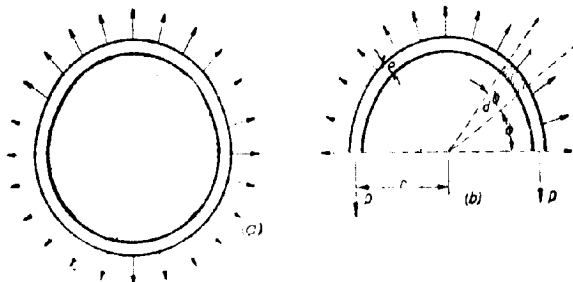
Baldin eta uniformeki banatutako indar erradialak eraztun mehe zirkular baten perimetroan zehar iharduten badute, (22.irudia) eraztunaren luzapen uniforme bat gertatuko da. Eraztunaren trakzio-indarra kalkulatzeko, pentsa dezagun sekzio diametral horizontal baten arabera ebakirik dagoela -22 (b) irudia- eta kontsidera dezagun goiko zatia gorputz libre gisa. Baldin eta zirkunferentzi luzeraren unitateko karga berdinbanatuari  $q$  baderitzogu eta  $r$  zirkunferentzi horren erradioa bada, bi sekzio erradial jarraien arteko eraztun-elementuarengan diharduen indarra,  $qrd\psi$  izango da,  $d\psi$  dagokion erdiko angelu zentrala delarik. Eraztunaren erdian diharduten indar guztien osagai bertikalen batura harturik, ondorengo oreka-ekuazio hau lortuko dugu:

$$2P = 2 \int_0^{\pi/2} q \cdot r \sin \psi d\psi = 2qr \quad \text{eta hemendik}$$

$$P = q \cdot r \quad (13)$$

Eraztuneko trakzio-tentsioa, orain  $P$  indarraren balioa eraztunaren sekzio zuzenaren azalerarekin zatituz lortuko da:

$$\sigma = \frac{P}{A} = \frac{q \cdot r}{e \cdot l}$$



22. Irudia.



22.bis. Irudia.

$$l = 1$$

$$P = q$$

$$\sigma = \frac{q \cdot r}{e}$$

$$\sigma = \frac{Pr}{e}$$

Aplikazio praktikoetan sarritan gertatzen da eraztun zirkular biragarri baten tentsioa zehaztu beharra. Orduan q-k eraztunaren luzera-unitateko indar zentrifugoa errepresentatzen du eta ondorengo ekuazioak emanik dator.

Errotazioan:

$$q = m \cdot a = \frac{w}{g} \cos^2 r = \frac{w}{g} \frac{v^2}{r} \quad (14)$$

w luzera-unitatedun eraztun-zatiaren pisua izanik; r batezbesteko zirkunferentziaren erradioa; v eraztunak r erradiora duen abiadura tangenziala eta g grabitate-azelerazioa. Aldagarri bezala w abiadura angeluarra. q-ren (14) ekuazioko balioa (13) ekuazioan ordezkatzuz, honako hau lortzen da:

$$P = q \cdot r = \frac{w}{g} \frac{v^2}{r} \cdot r = \frac{w}{g} v^2$$

eta dagokion  $\sigma$  tentsioa berriz honako bi bide hauetatik lor daiteke:

$$\sigma = \frac{P}{A} = \frac{w v^2}{A \cdot g} = \frac{\gamma}{g} v^2 \quad \text{edo,}$$

$$\begin{aligned}
 q &= m \cdot a = \frac{1 \cdot l \cdot e \cdot \gamma}{g} \cdot \frac{v^2}{r} \\
 &= \frac{P}{A} = \frac{q \cdot r}{A} = \frac{l \cdot e \cdot \gamma}{\cancel{e} l g} \cdot \frac{v^2}{\cancel{r}} \cdot \cancel{r} = \frac{\gamma}{g} v^2
 \end{aligned}
 \tag{15}$$

Y pisu espezifikoa delarik.

Tentsioa beraz, materialaren Y pisu espezifikoarekiko eta abiadura periferikoaren karratuarekiko zuzenki proportzionala da eta g grabitate-azelerazioarekiko alderantziz proportzionala, edo bestela esanik,  $\gamma/g$  dentsitatearekiko eta abiadura periferikoaren karratuarekiko zuzenki proportzionala.

## ARIKETAK

1.44.- Kalkulatu 3.irudiko prentsaren horma zilindrikoko trazio-tentsioa, baldin eta barne-diametroa 25 cm.bada eta hormaren lodiera 2,5 cm.

**Soluzioa:**

Zilindroko P presio hidrostatiko maximoa, ekuazio honen bidez aurkituko da:

$$P \times \frac{\pi d^2}{4} = 100 \times \frac{3,14 \times 25^2}{4} = 50.000 \text{ kg.}$$

$P = 100 \text{ kg/cm}^2$  izanik, zilindrotik 1 cm.ko luzeradun eraztun bat zilindroaren ardatzaren norabidean bereziz eta (13) ekuazioa aplikatuz:

$$\sigma = \frac{P}{A} = \frac{100 \times 12,5}{2,5 \times 1} = 500 \text{ Kg/cm}^2$$

1.45.- Altzairuzko tutu bat beste kobrezko batetan sartu da, biak ere t tenperatura altura daudelarik (23.irudia). Doikuntza perfektua da eta tenperatura horretan tutuen artean inongo presiorik ez dago. Kalkulatu kobre eta altzairuzko pieza horietan bilakatuko diren tentsioak, multzo osoa  $t_0$  giro-tenperaturaraino hoztean, baldin eta altzairuzko tutuaren kanpo-diametroa d bada, altzairuzkotutuaren lodiera ha eta kobrezkoarena hc.

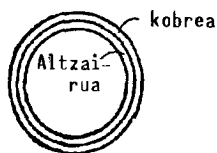
**Soluzioa:**

$\alpha_c$  eta  $\alpha_a$  zabalkuntz koefizienteen arteko diferentzia dela eta presio bat sortuko da tutuen barne eta kanpoaldean hozterakoan. Bedi x presioa  $\text{kg/cm}^2$  tan. Kobrezko tutuaren traskzio-tentsioa, honako hau izango da:

$$\sigma_c = \frac{x d}{2 h c}$$

eta altzairuzko tutuko konpresio-tentsioa berriz:

$$\sigma_a = \frac{x d}{2 h a}$$



### 23. Irudia.

xpresioa berriz, hoztea dela eta bi tutuek perimetro-kontrakzio berbera dutelakoaren baldintzarekin eza-rritako ekuazioaren bidez finka daiteke; hots:

$$\alpha_c (t - t_0) - \frac{x d}{2 E_c h_c} = \alpha_a (t - t_0) + \frac{x d}{2 E_a h_a}$$

eta hemendik,

$$\sigma_c = \frac{x d}{2 h_c} = \frac{(\alpha_c - \alpha_a) (t - t_0) E_c}{1 + \frac{h_c E_c}{h_a E_a}}$$

era berean kalkulatzen da altzairuzko tutuko tentsioa:

$$\sigma_a = \frac{x d}{2 h_a} = \frac{(\alpha_c - \alpha_a) (t - t_0) E_a}{1 + \frac{h_a E_a}{h_c E_c}}$$

- 1.46.- 23. irudiari gagozkiolarik, zer trakzio-tentsio gehigarri sortuko da tutuan  $p = 7 \text{ kg/cm}^2$  ko barneko lurrin-presio hidrostatiko baten pean jarriarik, baldin eta barne-diametroa  $\alpha = 10 \text{ cm}$ . bada,  $h_a = 2,5 \text{ mm}$ . eta

$$h_c = \frac{20}{11} \times 2,5 \text{ mm} \quad ?$$

#### Soluzioa:

Bereiz dezagun tututik  $1 \text{ cm}$ -ko altueradun eraztun elemental bat. Eraztuneko trakzio-indar totala honako hau izango da:

$$P = \frac{pd_1}{2} = \frac{7 \times 10}{2} = 35 \text{ kg.}$$

Zirkunferentzi luzapenak kobre nahiz altzairuan berdina direnez, tentsioak beraz, elastikotasun-moduluaren erlazioan izango dira, hau da, kobrezkoaren tentsioa, altzairuzkoarenaren 20/11 izango da eta beraz, P indarra kasu honetan berdinki banatzen da bi metalen artean eta sortutako tentsioak, honako hauek izango dira:

$$\sigma_c = \frac{P}{2h_c} = \frac{35}{2 \times \frac{20}{11} \times 0,25} = 38,5 \text{ kg/cm}^2 \text{ kobrea-}$$

rentzat, eta

$$\sigma_c = \frac{20}{11} \sigma_c = 70 \text{ kg/cm}^2 \text{ altzairuarentzat, edo}$$

$$\sigma_a = \frac{P}{2h_a} = \frac{35}{2 \times 0,25} = 70 \text{ kg/cm}^2$$

- 1.47.- Eratzun zuntxatu bat, kobrezko barne-eratzun batez eta altzairuzko kanpo-eratzun batez osaturik dago. Altzairuzko eratzunaren barne-diametroa  $\delta$  kopuruan txikiagoa da kobrezko eratzunaren kanpo-diametroa baino eta multzoa, altzairuzko eratzunaren aurreberotze baten bidez doitzen da. Hoztean, altzairuzko eratzunak presio dago kobrezko eratzunarengana (zuntxaketa-presioa). Kalkulatu altzairu eta kobrezko eratzunengan sortzen diren tentsioak baldin eta bi eratzunek sekzio angeluzuzenak badituzte, norabide erradialean  $h_a$  eta  $h_c$  dimentsioak dituztelarik eta eratzunaren planoarekiko norabide elkartzutean berriz unitatea dutelarik.  $h_a$  eta  $h_c$  dimentsioak txikitzeak jo daitezke, bi eratzunen ukipen-azaleraren diametroarekin konparatuta.

#### Soluzioa:

Bedi  $x$  eratzunen ukipen-azalean berdinbanatutako presioa. Konpresio-tentsioa kobreak eta trakzio-tentsioa altzairuan, honako hauek izango dira:



$$\sigma_c = \frac{x d}{2h_c} ; \quad \sigma_a = \frac{x d}{2h_a} \quad (a)$$

Kobrezko eraztunaren kanpo-diametroaren laburpena, honako hau izango da:

$$\delta_1 = \frac{\sigma_c}{E_c} \cdot d = \frac{x d^2}{2h_c E_c}$$

Altzairuzko eraztunaren barne-diametroaren luzapena, honako hau izango da:

$$\delta_2 = \frac{\sigma_a}{E_a} \cdot d = \frac{x d^2}{2h_a E_a}$$

x presio ezezaguna, ekuazio honen bidez aurkituko da.

$$\delta_1 + \delta_2 = \frac{x d^2}{2} \left( \frac{1}{h_c E_c} + \frac{1}{h_a E_a} \right) = \delta \quad \text{eta}$$

hemendik:

$$x = \frac{2 \delta h_a E_a}{d^2 \left( 1 + \frac{h_a E_a}{h_c E_c} \right)}$$

$\sigma_a$  eta  $\sigma_c$  tentsioak, (a) ekuazioaren arabera, honela aurkituko dira:

$$\sigma_c = \frac{\delta h_a}{d h_c} \cdot \frac{E_a}{1 + \frac{h_a E_a}{h_c E_c}} ; \quad \text{eta} \quad \sigma_a = \frac{\delta}{d} \cdot \frac{E_a}{1 + \frac{h_a E_a}{h_c E_c}}$$

- 1.48.- Kalkulatu aurreko ariketan eraztun zuntxatueta, bero-riek n bira/minutuko abiadura konstantez biratzean sortuko diren tentsioak.

**Soluzioa:**

Kobreak altzairuak baino dentsitate handiagoa eta elas-

tikotasun-modulu txikiagoa dituenek, kobrezko eraztunak altzairuzkoa presionatzen du biratzen duen bitartean. Bedi  $x$  bi eraztunen arteko ukipen-azalerako  $\text{cm}^2$  bakoitzeko presioa. Dagozkien tentsioak aurreko ariketako (a) ekuazioek emanik aurkituko dira. Tentsio hauei beharrezkoa da indar zentrifugoak sortutako tentsioak bartztea. Altzairu eta kobreak bolumen-unitateari dagozkion prismak  $\gamma_a$  eta  $\gamma_c$  -z errepresentatuz eta (15) ekuazioa erabiliz, honako hau lortzen da:

$$\sigma_a = \frac{\gamma_a}{g} \left( \frac{2\pi n}{Go} \right)^2 \left( \frac{d+h_a}{2} \right)^2 ; \quad \sigma_c = \frac{\gamma_c}{g} \left( \frac{2\pi n}{Go} \right)^2 \left( \frac{d-h_c}{2} \right)^2$$

Tentsio hauek  $x$  presioak sorturiko tentsioekin konbinatuz eta luzapena bi eraztunetan berbera izan behar duela kontutan hartuz, kasu partikular bakoitzean  $x$ -en balioa zehazteko zerbitzen duen ondorengo ekuazioa lortzen da:

$$\frac{1}{E_a} \left[ \frac{\gamma_a}{g} \left( \frac{2\pi n}{Go} \right)^2 \left( \frac{d+h_a}{2} \right)^2 + \frac{xd}{2h_a} \right] = \frac{1}{E_c} \left[ \frac{\gamma_c}{g} \left( \frac{2\pi n}{Go} \right)^2 \left( \frac{d-h_c}{2} \right)^2 - \frac{xd}{2h_c} \right]$$

$x$  aurkitu ondoren,  $a = \frac{\gamma_a}{g} v^2$  eta  $c = \frac{\gamma_c}{g} v^2$  formulen bidez errazki kalkulatzen dira.

- 1.49.- Kalkulatu kobrezko eraztun baten muga-abiadura periferikoa, baldin eta  $\sigma_t = 210 \text{ kg/cm}^2$  eta  $\gamma_c = 8700 \text{ kg/cm}^3$  badira.

**Soluzioa:**

**Erantzuna:**

$$v = 48 \text{ m/s.}$$

- 1.49.- 1.45 ariketari(23.irudia) dagokionez,kalkulatu kobreak giro-tenperaturara duen tentsioa,baldin eta  $t-t_0 = 55^\circ \text{C}$  bada,  $\alpha_a - \alpha_c = 45 \times 10^{-7}$  eta  $h_a = h_c$

**Soluzioa:**

**Erantzuna:**  $c = 175 \text{ kg/cm}^2$

- 1.50.- 1.48.ariketari dagokionez,kalkulatu n minutuko bira-zenbatekoa,kobrezko eraztuneko tentsioa deusez dadin, baldin eta zuntxaketako hasiera-tentsioa  $\sigma_0$  baliodun konpresiozko tentsioa izana bada, $h_c = h_a$  eta  $F_a = 2E_c$ .

**Soluzioa:**

**Erantzuna:** n zenbakia,ondorengo ekuazio hau askatuz kalkulatuko da:

$$3 \delta_0 = \left( \frac{2\pi n}{G_0} \right)^2 \left[ \frac{\gamma_c}{g} \left( \frac{d-h_c}{2} \right)^2 + \frac{\gamma_a}{g} \left( \frac{d+h_a}{2} \right)^2 \right]$$

- 1.51.- Kalkulatu 1.47.ariketako eraztun zuntxatuaren tentsioak,  $\delta = 0,025 \text{ mm}$ ,  $d = 10 \text{ cm}$ ,  $h_a = h_c$  eta  $\frac{E_a}{E_c} = \frac{20}{11}$  direla jakinik.Kalkulatu tentsioak zenbatean aldatzen diren,baldin eta muntaiaren ondoren,eraztunaren temperatura  $6^\circ \text{C}$  aldatzen bada.Har itzazu  $\alpha_a = 125 \times 10^{-7}$  eta  $\alpha_c = 170 \times 10^{-7}$

**Soluzioa:**

Erantzunak :  $\sigma_c = 177,4 \text{ kg/cm}^2$  (konpresioa)

$\sigma_a = 177,4 \text{ kg/cm}^2$  (trakzioa)

6°C berotzean:  $\sigma_c = 196,56 \text{ kg/cm}^2$  (konpresioa), eta

$\sigma_a = 196,56 \text{ kg/cm}^2$  (trakzioa)

1.52,- 1.48. ariketan, kalkulatu altzairu eta kobreaki dagozkien tentsioak, baldin eta  $n = 3000 \text{ b/min}$ ,  $d = 60 \text{ cm}$ ,  $h_a = h_c = 12,5 \text{ mm}$ .  $a = 7,8 \times 10^{-3} \text{ kg/cm}^3$  eta  $\sigma_c = 8,7 \times 10^{-3} \text{ kg/cm}^3$  badira.

**Soluzioa:**

Erantzunak:  $\sigma_a = 74,- \text{ kg/cm}^2$  eta  $\sigma_c = 75,2 \text{ kg/cm}^2$

1.22.- Kalkulatu erresistentzia berdineko pilare baten erai-  
kuntz bolumena, 6. ariketako datuekin projektaturik.

**Erantzuna:**  $V = 158 \text{ m}^3$

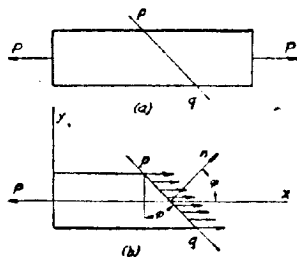
## 2.- TENTSIO ETA DEFORMAZIOEN AZTERKETA.

- 2.1.- TRAKZIO ETA KONPRESIO BAKUNEAN TENTSIOAK DUEN ALDAKETA BARRAREN ARDATZAREKIKO SEKZIO ZEIHARRAK KONTUTAN HARTZEAN.
- 2.2.- TENTSIO-ZIRKULUA.
- 2.3.- TRAKZIOA EDO KONPRESIOA BI NORABIDE ELKAR TRUTETAN.
- 2.4.- MOHR-EN ZIRKULUA TENTSIO KONBINATUENTZAT.
- 2.5.- TENTSIO NAGUSIAK.
- 2.6.- DEFORMAZIOAPEN AZTERKETA, TRAKZIO HUTSAREN KASUAN.
- 2.7.- DEFORMAZIOA, BI NORABIDE ELKARTZUTETAN TRAKZIOA EDO KONPRESIOA DEN KASUAN.
- 2.8.- TENTSIO EBAKITZAILE PURUA.
- 2.9.- EBAKIDURAZKO LANEKO TENTSIOAK.
- 2.10.- TRAKZIOA EDO KONPRESIOA HIRU NORABIDE ELKARTZUTETAN.



## 2.1.- **TRAKZIO ETA KOMPRESIO BAKUNEAN TENTSIOAK DUEN ALDAKETA BARRAREN ARDATZAREKIKO SEKZIO ZEIHARRAK KONTUTAN HARTZEAN**

Trakzio-esfortzu axial baten pean dagoen barra prismatikoarentzat, -24(a) irudia- tentsioa, barraren ardatzarekiko sekzio normal edo elkartzut batetan hartu dugu kontutan orain arte. Orain ordea, irudiaren planoarekiko elkartzuta den pq sekzioa ardatzarekiko zeiharki dagoen kasua kontsideratuko



24. Irudia.

dugu. Luzetarako zuntz guztiek luzapen berbera dutenez (ikus 3. irudia), barraren ezker aldeari buruz eskuinaldeko zatia iren iharduna adierazten duten indarrak pq ebakidurarekiko uniformeki banaturik egongo dira. Barraren ezkerreko puska isolaturik, -24(b) irudia- indar hauen eta P kargaren artean orekatu-rik aurkituko da. pq sekzioko azalera-unitateko indarrari, sekzio horretako tentsioa deritzo. Barraren sekzio zuzenaren azalera A letraz adierazirik, eta x barraren ardatzak eta pq sekzioaren n normalak edo elkartzutak osatzen duten angelua letraz, sekzio honen azalera  $A/\cos \psi$  izango da eta dagokion S tentsioa:

$$S = \frac{P \cos \psi}{A} = \sigma_x \cos \psi \quad (16)$$

$\sigma_x$ , aurrekoetan bezala, barraren sekzio zuzenari dagokion tentsioa delarik, sekzio zeihar bati dagokion S tentsioa barraren sekzio zuzeneko  $\sigma_x$  tentsioa baino txikiagoa dela ikusten da eta  $\psi$  angelua handitzean txikitu egiten dela gainera.

$$\psi = \frac{\pi}{2} \quad \text{denean,}$$

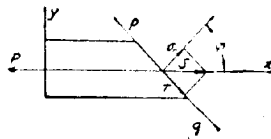


pq sekzioa, barraren ardatzarekiko paraleloa da eta S tentsioak zero balio du, hots, ez dago presiorik luzetarako zuntzen alboetako azalen artean. Sekzio zeharretan P indarraren norabidea du tentsioak eta ez da elkartzuta sekzioarekiko. Usariozkoa da 25. irudiak adierazten duen eran bi osagaietan deskonposatzea. Alde batetik sekzioarekiko normala deritzona eta ondorengo balioa duena:

$$\sigma_n = S \cos \psi = \sigma_x \cos^2 \psi \quad (17)$$

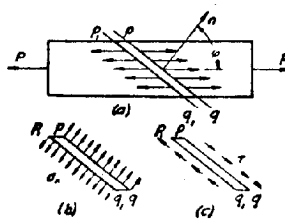
Bestalde beriz  $\tau$  osagai tangentiala dago, tentsio ebakitzalea deritzona eta bere balioa honako hau da:

$$\tau = S \sin \psi = \sigma_x \sin \psi \cos \psi = \frac{\sigma_x \sin 2\psi}{2} \quad (18)$$



25. Irudia.

Tentsioaren osagai bakoitzak sortzen duen deformazioa bakarka aztertzeke, pq eta  $p_1 q_1$  bi sekzio zehar eta paralelaren bidez barratik berezirik elementu bat hartuko da kontutan -26(a) irudia-. Beronengan diharduten indarrek, barra-



26. Irudia.

ren eskuin eta ezkerreko zatien ihardunak adierazten dituzte eta 26(a) irudian ikusten dira. 26(b) eta 26(c) irudiak, ihardun horiek beren bi osagaietan deskonposatzean erdiesten dira aurrez esana den eran eta osagai hauen iharduna bakarka aurkeztean  $\sigma_n$  tentsio normalak, elementuaren n normalaren edo elkartzutaren norabidean trakzioa sortzen duela ikusten da eta

esfortzu ebakitzailleak berriz  $p_1 q_1$  sekzioarengan,  $p_1 q_1$  sekzioarekiko lerradura edo irristadura.(17) formulatik ikusten da, tentsio normalik handiena,barraren sekzio zuenean sortzen dela eta,

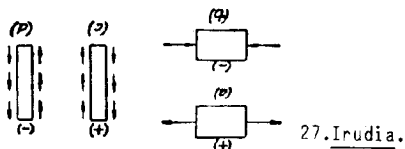
$$(\sigma_n)_{\max} = \sigma_x \quad \text{dela.}$$

Tentsio ebakitzailerik handiena berriz,(18) formulatik ondorioztatzen denez,45°-tara diren sekzio zeharrentzat gertatzen da eta

$$\tau_{\max} = \frac{1}{2} \sigma_x \quad \text{balio du} \quad (19)$$

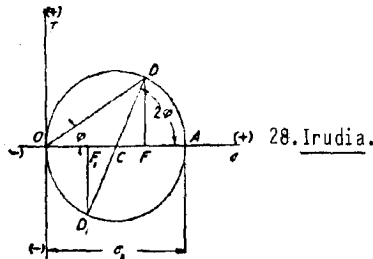
Tentsio ebakitzaille maximoa tentsio normal maximoaren erdia izan arren,izugarritzko garrantzia du praktikan,izan ere,bai baita materialik,esfortzu ebakitzaillearekiko normalarekiko baino erresistentzia txikiagoa duenik.Adibidez,altzairu gozozko barra baten trakzio-entseiua eta bere azala ongi leundurik(pulitua)delarik,materialaren fluentzia edo jariapena begiz ikusi ohi da.

Tentsio ebakitzaillea,maximoa den plano zeharretatik hasten da.(17) eta (18) formulak,trakzio bakunaren kasurako sortu diren arren,esfortzua konpresio bakuna denean ere aplikatzen dira.Nahikoa da horretarako  $x$ -i (17) eta (18) formuletan zeinu negatiboa aplikatzea.  $\sigma_n$ -ren zeinu negatiboak,26 (b) irudian trakzioaren ordez konpresioa lortzen dela adierazten du  $p q$  eta  $p_1 q_1$  sekzioen arteko elementu infinitesimalan.  $\tau$ -en zeinu negatiboak,elementuko iharduera ebakitzailleak(18 formula),26 c irudian adierazitakoaren aurkako norantzua duela adierazten du.27.irudiak Tentsio normal eta ebakitzaillearentzako ezarritako zeinuei buruzko hitzarmena adierazten du. Azkeneko hau,dextrorso(eskuinerantzeko) norantzadun momentua sortzean positibotzat hartzen da eta sinistrorso(ezkerrerantzekoa) sortzean negatibotzat.



## 2.2.- TENTSIO-ZIRKULUA.

(17) eta (18) formulak, grafikoki errepresenta daitezke \* Har dezagun ardatz koordinatuen sistema ortogonal bat 0-n jatorria duena eta ohizko norabide positiboak dituen (28. Irudia). pq sekzioa barraren ardatzarekiko elkartuta dela kontsideratzen badugu, 27. irudian  $\psi=0$  izango da eta (17) eta (18) formuletatik,  $\sigma_n = \sigma_x$  eta  $\tau = 0$ . Tentsioak neurtzeko eskala bat harturik eta osagai ebakitzailea ardatz bertikalaren arabera harturik,  $\psi = 0$  planoari dagokion tentsioa, A puntuaz adieraziko da 28. irudian.



Orain, barraren ardatzarekiko paraleloa den plano bat hartzen badugu,  $\psi = \frac{\pi}{2}$  dugu eta tentsioaren bi osagaiak deuseztu egiten dira plano horretan, beraz 29. irudian 0 puntua (jatorria) dagokio. OA diametrotzat harturik zirkunferentzia bat marraztuz gero, errazki ikusten da,  $\psi$  angelu bati dagokion edozein sekzio pq-rentzat, tentsioaren osagaiak zirkunferentzia honetako puntu baten koordinatuak direla. Kasu bakar bat ikustearren, nahikoa da erlojuaren orratzen aurkako norantzan A-tik abiatutik  $2\psi$  angelua hartzea. Bedi D horrela lortutako puntua; iruditik ondorioztatzen da:

$$\overline{OF} = \overline{OC} + \overline{CF} = \frac{\sigma_x}{2} + \frac{\sigma_x}{2} \cos 2\psi = \frac{\sigma_x}{2} (1 + \cos 2\psi) = \sigma_x \cos^2 \psi$$

Trigonometrian,

$$\cos 2\psi = \cos^2 \psi - \sin^2 \psi \quad \text{da eta.}$$

Orduan:

$$1 + \cos 2\psi = \sin^2 \psi + \cos^2 \psi + \cos^2 \psi - \sin^2 \psi \quad \text{eta}$$

\* Errepresentazio grafiko hau, O-Mohr-i zor zaio. Zivilingenieur 113 orrialdea, 1882. Ikus baita ere bere Abhandlungen 219 orrialdea, 1906.

$$1 + \cos 2\psi = 2 \cos^2 \psi, \text{ beraz, } \frac{1 + \cos 2\psi}{2} = \cos^2 \psi$$

$$\overline{DF} = \overline{CD} \sin 2\psi = \frac{\sigma_x}{2} \sin 2\psi$$

Ekuazio hauek (17) eta (18) rekin konparatuz gero, aisa ikusten da D puntuak pq planoari dagokion tentsioa definitzen duela (25. irudia) pq sekzioak 25. irudiko planoaren ardatz elkartut baten inguruan ezkerretara biratzean eta  $\psi$  0-tik  $\frac{\pi}{2}$ -ra aldatzean, D puntua 0-raino higitzen da goiko zirkunferentzierdian zehar.  $\psi$  angelua  $\frac{\pi}{2}$  baino handiagoa bada, mn sekzioan -29(a) irudia- irudikatutakoa bezalako sekzioa erdiesten da, zeinaren n kanpoko normalak \* ardatzarekin,  $\frac{\pi}{2}$  baino angelu handiagoa osatzen baitu. Orain  $2\psi$  angelua neurtzean A-tik abiatutik eta erlojuaren orratzen aurkako norantzean, beheko zirkunferentzierdikoko puntuak erdietsiko ditugu.

Eman dezagun lehen kontsideratu den mm, pq sekzioarekiko elkartzuta den kasua. Dagokion D puntua,  $DOD_1$  angeluak  $\pi$  balio izateko modukoa izango da, hots,  $DD_1$  diametroa izango da.  $D_1$ -aren koordenatuak kalkulaturik, mm planoari dagokion tentsioaren  $\sigma_n$ , eta  $\tau_1$  osagaiak lortuko dira.

$$\begin{aligned} \sigma_{n_1} &= \overline{OF_1} = \overline{OC} - \overline{F_1C} = \frac{\sigma_x}{2} - \frac{\sigma_x}{2} \cos 2\psi = \frac{\sigma_x}{2} (1 - \cos 2\psi) = \\ &= \sigma_x \sin^2 2\psi \end{aligned} \quad (20)$$

Trigonometrian

$$1 - \cos 2\psi = \cos^2 \psi + \sin^2 \psi - \cos^2 \psi + \sin^2 \psi \text{ da eta orduan}$$

$$\frac{1 - \cos 2\psi}{2} = \sin^2 \psi$$

$$\tau_1 = -\overline{F_1D_1} = -\overline{C_1D_1} \sin 2\psi = -\frac{\sigma_x}{2} \sin 2\psi^* \quad (21)$$

\* Tentsioak diharduten barra-zati marrazduraz adierazirik dago irudian.  $n_1$  kanpoko normala, aipatu zatirik kanporantz orientaturik dago.

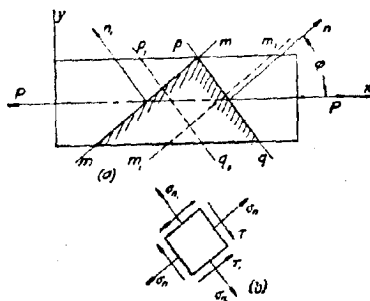
\* - zeinua, D puntua ordenatu negatiboen aldean lekutik izateari dagokio.

Formula hauek (17) eta (18)rekin konparatuz, ondorengoa lortzen da:

$$\sigma_n + \sigma_{n_1} = \sigma_x \cos^2 \psi + \sigma_x \sin^2 \psi = \sigma_x \quad (22)$$

$$\tau_1 = -\tau \quad (23)$$

Honekin ikusten da beraz, bi plano elkartzutei dagozkien tentsioen osagai normalen batura konstante mantentzen dela eta  $\alpha_x$  balio duela. Bi plano elkartzutei dagozkien tentsioen osagai ebakitzaileak berdinak dira, baina aurkako zeinua dute.  $m_1 m_1$  eta  $p_1 q_1$  sekzioak.



29. Irudia.

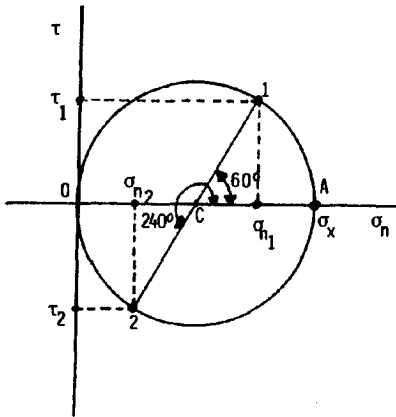
mm eta pq-rekiko jarrai eta paraleloak direnak hartuz, elementu isolatu bat - 29 (b) irudia - erdiesten da eta berarengan diharduten tentsioak irudikoak dira. pq norabide-dun elementuaren aurpegiarengan diharduten tentsio ebakitzailleak, momentu dextrorsoa (eskuinerakoa) sortzen dutela ikusten da eta beraz, 27 (c) irudian onartutako hitzarmenarekin ados izanik, positibotzat hartu behar dira. Beste bi aurpegiengan diharduten tentsio ebakitzailleak, alderantziz, negatiboak izango dira 27 (d) irudian ezarritakoarekin ados. 28. Irudiko zirkuluari, tentsio-zirkulua deritzo eta esan dugunez, bere kanpoko normalak  $x$  ardatzarekin osatzen duen angeluak definitutako pq plano bati dagozkion  $\sigma_n$  eta  $\tau$  osagaiak kalkulatzeko erabiltzen da. (28. Irudia).

Alderantzizko kasua ere kalkula daiteke, hots,  $\sigma_n$  eta  $\tau$  emanik,  $\sigma_x$  eta  $\psi$  angelua aurkitzea alegia. OD kodak  $x$  ardatzarekin osatzen duen angelua  $\psi$ -ren berdina dela ikusten da.  $\psi$  jakinik, DC erradioa marra daiteke, OC ardatzarekin  $2\psi$  angelua osatzen duena alegia eta era honetan, zirkuluaren  $C$  zen<sup>trua</sup> lor daiteke.

# **ARIKETAK.**

2.1.- Kalkula  $\sigma_n$  eta  $\tau$  analitikoki eta grafikoki, baldin eta  $\sigma_x = 1200 \text{ Kg/cm}^2$  eta  $\psi = 30^\circ$  edo  $\psi = 120^\circ$  badira. 29 (b) irudikoa bezalako elementu bat isolatu angelu hauentza ko eta berorren gan diharduten tentsioen norantza, gezie ekin adierazi.

## **Soluzioa**



$$\sigma_n = \sigma_x \cos^2 \psi \quad \tau = \frac{\sigma_x}{2} \sin 2\psi$$

$$\sigma_x = 1200 \text{ Kg/cm}^2$$

$$\psi_1 = 30^\circ$$

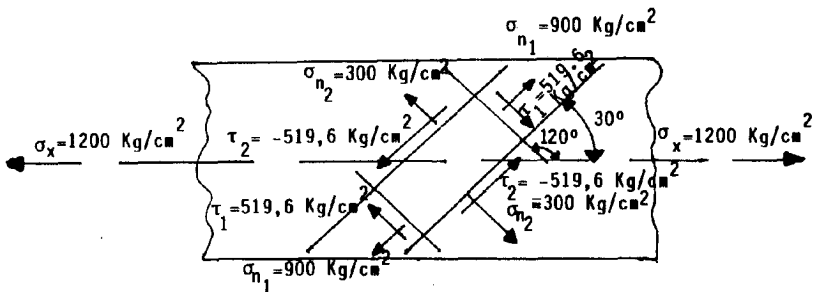
$$\psi_2 = 120^\circ$$

$$\begin{aligned} \sigma_{n1} &= 1200 \times \cos^2 30^\circ = 1200 \times \frac{3}{4} = \\ &= 900 \text{ Kg/cm}^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{n2} &= 1200 \times \cos^2 120^\circ = 1200 \times \frac{1}{4} = \\ &= 300 \text{ Kg/cm}^2 \end{aligned}$$

$$\tau_1 = \frac{1200}{2} \times \sin 60^\circ = 600 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 519,6 \text{ Kg/cm}^2$$

$$\tau_2 = \frac{1200}{2} \times \sin 240^\circ = 600 \times \left( -\frac{\sqrt{3}}{2} \right) = -519,6 \text{ Kg/cm}^2$$



30. Irudia.

- 2.2.- Egin aurreko ariketa, baldin  $\sigma$  trakzio-tentsioaren orde-  
dez, balio absolutu berbera duen konpresio-tentsioak di-  
harduela suposatzen bada. Kasu honetan, 28. Irudiko zir-  
kuluaren diametroa, abzisa negatiboetan kausituko da.

#### Soluzioa

$$\text{Erantzunak: } \sigma_{n_1} = -900 \text{ Kg/cm}^2 ; \sigma_{n_2} = -300 \text{ Kg/cm}^2$$

$$\tau_1 = -519,6 \text{ Kg/cm}^2 \quad \text{eta} \quad \tau_2 = 519,6 \text{ Kg/cm}^2$$

- 2.3.- pq plano batetan (25. Irudia),  $\sigma_n = 960 \text{ Kg/cm}^2$  tentsio  
normal batek eta  $\tau = 320 \text{ Kg/cm}^2$  tentsio ebakitzaille ba-  
tek dihardute. Kalkulatu  $\psi$  angelua eta  $\sigma_x$  tentsioa.

#### Soluzioa

$$\text{Erantzunak: } \psi = 18^\circ 25' \quad \text{eta} \quad \sigma_x = 1070 \text{ Kg/cm}^2$$

- 2.4.- 29 (b) irudiko elementuaren bi aurpegi elkartutengan  
 $\sigma_{n_1} = 960 \text{ Kg/cm}^2$  eta  $\sigma_{n_2} = 480 \text{ Kg/cm}^2$  tentsio normalek  
dihardute. Kalkulatu  $\sigma_x$  eta  $\tau$ .

### Soluzioa

Erantzunak:  $\sigma_x = 1440 \text{ Kg/cm}^2$  ;  $\tau_1 = 678,8 \text{ Kg/cm}^2$  eta  
 $\tau_1 = -678,8 \text{ Kg/cm}^2$

2.5.- Kalkulatu tentsio ebakitzaille maximoa 2.1. ariketan.

### Soluzioa

Erantzunak:  $\tau_1 \text{ max} = 600 \text{ Kg/cm}^2$  eta  $\tau_2 \text{ max(min)} = -600 \text{ Kg/cm}^2$

2.6.- Kalkulatu sekzioen posizioa tentsio normala, tentsio ebakitzaille edo tangentialaren berdina gertatzeko.

### Soluzioa

Erantzunak:  $\psi_1 = 45^\circ$  eta  $\psi_2 = 135^\circ$

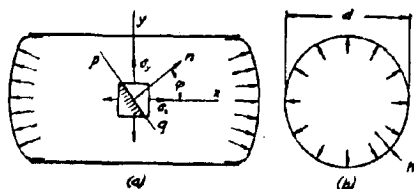


### 2.3.- TRAKZIOA EDO KONPRESIOA BI NORABIDE ELKARTZUTETAN

Badira kasuak materiala bi norabide elkartzutetako trakzio- edo konpresio-ihardun pean dagoenak. Tentsio konbina-tuen adibidetzat,  $p \text{ Kg/cm}^2$  \* barne-presio pean den galdara ba-ten horma zilindrikoko tentsio normal eta ebakitzailleak aurki-tu behar ditugu. Barne-diametroa  $d$  idatzirik eta xaflaren lo-diera  $h$  (31.Irudia), bi luzetarako ebakidurez eta bi zeharka-koz ebakirik definituriko horma-elementu bat bereziko dugu.

Barne-presioa dela bi de, zilindroa norabide axial eta zeharkakoan zabalduko da.  $\sigma_y$  trakzio-tentsioa, zirkunfe-rentzi norabidean dena, eraz-tun zirkular baten kasuan be-zalaxe kalkulatu da (8.Ata-la).

$$\sigma_y = \frac{p \cdot d}{2 h} \quad (24)$$



31.Irudia.

Norabide axialdun trakzio-tentsioa kalkulatzeko, lu-rrun-galdaran luzapena eragiten duen trakzio-indarra, mutur horietan diharduten indarren berdina dela joko da; hau da:

$$P = p \left( \frac{\pi d^2}{4} \right)$$

Lurrun-galdarako sekzio zuzenaren azalera \* , honako hau da:

$$A = \pi dh$$

Beraz,

$$\sigma_x = \frac{P}{A} = \frac{pd}{4h} \quad (25)$$

Norantza zirkunferentzialdun tentsioa bada, axialdu-na halako bi dela ikusten da \* .  $x$  Planoarekiko elkartzuta den eta  $\psi$  angeluak definiturik dagoen  $pq$  sekzioarentzat -31(a) irudia- aurreko ataleko (17) eta (18) formulek,  $pq$  planoari atxekia diren eta  $\sigma_x$  trakzio-tentsioari zor zaizkion osagai normal eta ebakitzailleak emango dituzte; beren balioak hona-ko hauek dira:

$$\sigma_{n'} = \sigma_x \cos^2 \psi \quad ; \quad \tau' = \frac{\sigma_x}{2} \sin 2 \psi \quad (a)$$

\*  $p$  benetan, barne-presioaren eta egurats-presioa balio duen kanpo-presioaren arteko diferentzia da.

\* Hormaren  $h$  lodiera oso txikia da diametroarekin konparatuz gero.

\* Elementuaren barne-aurpegi zilindrikoarengan diharduen  $p$  presioa mespretxa-tu egiten da  $\sigma_x$  eta  $\sigma_y$  ren balioen aurrean.

$\sigma_y$  trakzio-tentsioak pq plano berean eragindako osagaiak kalkulatzeko  $\sigma_y$  eta n normalaren arteko angelua  $-\frac{\pi}{2}$  (a) irudia-  $\frac{\pi}{2} - \psi$  dela ikusiko da eskuinerantz neurturik. Beraz, (17) eta (18) ekuazioak erabiltzean,  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ -Z ordezkatu behar da eta  $\psi$ ,  $(\frac{\pi}{2} - \psi)$  angeluaz. Honela lortuko da:

$$\sigma_{n''} = \sigma_y \sin^2 \psi \quad ; \quad \tau'' = -\frac{\sigma_y}{2} \sin 2\psi$$

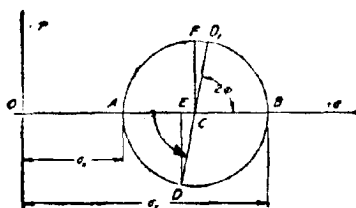
(a) eta (b) espresioen batura kalkulatzuz, emaitza hau lortzen da:

$$\sigma_n = \sigma_x \cos^2 \psi + \sigma_y \sin^2 \psi \quad (26)$$

$$\tau = \frac{1}{2} (\sigma_x - \sigma_y) \sin 2\psi \quad (27)$$

#### 2.4.- MOHR-EN ZIRKULUA TENTSIO KONBINATUENTZAT.

10.atalean erabilitako eraren arabera jokatuz, (26) eta (27) formulak, zirkunferentzia baten bidez errepresenta daitezke errazki. Eman dezagun, hau bezala, abzisa eta ordenatuak, eskalaren batetan, tentsioaren osagai normala eta ebakitzaila errepresentatzen dituztela; beraz, A eta B puntuek



32. Irudia.

(32.irudia)  $\sigma_x$  eta  $\sigma_y$  abzisdunek, 31(a) irudiko elementuaren aurpegiei dagozkien tentsioak irudikatzen dituzte.  $\psi$  angelu batek definitutako 31(a).irudia- plano zehar bati dagokion tentsioaren osagaiak lortzeko, nahikoa da AB diametrotzat harturik zirkunferentzia bat eraikitzea eta CD erradioa marraztea, A puntutik eta erlojuaren orratzen aurkako norantzean ACD berdin  $2\psi$  angelua osatzen duelarik. Iruditik ondorioztatzen da honako hau:

$$\begin{aligned}\overline{OE} &= \overline{OC} - \overline{CE} = \frac{1}{2}(\overline{OA} + \overline{OB}) - \frac{1}{2}(\overline{OB} - \overline{OA}) \cos 2\psi = \\ &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \frac{\sigma_y - \sigma_x}{2} \cos 2\psi = \sigma_x \cos^2 \psi + \sigma_y \sin^2 \psi\end{aligned}$$

trigonometriako  $\frac{1 - \cos 2\psi}{2} = \sin^2 \psi$  eta  $\frac{1 + \cos 2\psi}{2} = \cos^2 \psi$  kontutan harturik.

Eta beronek adierazten du, alegia, onartutako eskalan neurtutako D zirkunferentziaren  $\overline{OE}$  abzisak, tentsioaren  $\sigma_n$  osagai normala ematen duela (26).

D puntuaren ordenatua honako hau da:

$$\overline{DE} = \overline{CD} \sin 2\psi = \frac{\sigma_y - \sigma_x}{2} \sin 2\psi$$

Kasu honetan ordenatu hau negatiboa denez, D puntuaren ordenatuak dagokion zeinuarekin harturik, tentsioaren osagai ebakitzailea ematen digula ondorioztatzen da (27).

pq planoak, erlojuaren orratzen aurkako norantzan biratzen duenean xy planoarekiko elkartuta den ardatz batekiko, -31(a).irudia- dagokion D puntua ere, erlojuaren orratzen aurkako norantzean higitzen da Mohr-en zirkuluan (32.irudia);  $\psi$ -ren balio jakin bakoitzarentzako tentsioaren  $\sigma_n$  eta  $\tau$  osagaiak D puntuaren koordinatu bezala lortzen direlarik. (26) eta (27) formulen irudikapen grafiko honetatik ondorioztatzen da, alegia, egoera elastikoko osagai normal maximoa gure kasuan  $\sigma_y$  dela eta 32.irudiko zirkunferentziaren  $\overline{CF}$  erradioak errepresentatutako osagai ebakitzaile maximoa,

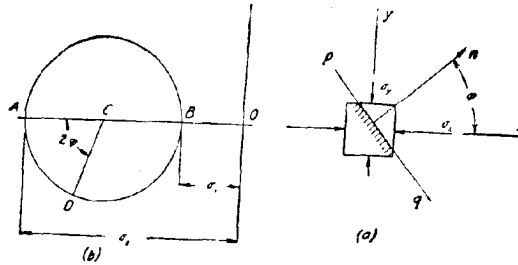
$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \quad \text{dela} \quad (28)$$

berau,  $\sin 2\psi = -1$ , beraz  $\psi = \frac{3\pi}{4}$  denean gertatzen delarik. Tentsio ebakitzailearentzat, balore berbera da baina zeinu negatiboarekin eta  $\psi = \frac{\pi}{4}$  deneko planoari dagokio.

Bi plano elkartut, beren  $n$  eta  $n_1$  normalek  $\psi$  ardatzarekin  $\psi$  eta  $\frac{\pi}{2} + \psi$  angeluak definitzen dituztela harturik, beroriei dagozkien tentsioak 32.irudiko D eta  $D_1$  puntuen koordinatuak dira eta geometrikoki honako hau ondorioztatzen da:

$$\sigma_n + \sigma_{n_1} = \sigma_x + \sigma_y \quad (29)$$

$$\tau_1 = -\tau \quad (30)$$



### 33. Irudia.

Honek zera erakusten du, alegia, bi plano elkartzutei dagozkien tentsioen osagai normalen batura, konstantea dela  $\psi$  angelua aldatu hala eta osagai ebakitzailleak berdinak direla baina aurkako zeinudunak. 32. irudikoaren kideko zirkunferentzia bat eraiki daiteke,  $\sigma_x$  eta  $\sigma_y$  tentsioetako bat edo biak konpresiozkoak direnean; nahikoa da horretarako abzisa-ar datzean norantza negatiboa dutenak hartzea.

Baldin eta adibidez, elementuarengan diharduten tentsioak 33(a). irudian adieraziak direla suposatzen badugu, dago kion zirkunferentzia 33(b). irudikoa da.  $n$  normaldun  $pq$  planoari dagokion tentsioen osagaiak, diagramako D puntuaren koordinatuek emanik datoz.

### ARIKETAK.

2.7.- 31.irudiko galdarak  $d=2,5$  m eta  $h=1,25$  cm ditu. Kalkula  $\sigma_x$  eta  $\sigma_y$ , baldin eta  $p=8$  Kg/cm<sup>2</sup> bada. Isola elementu bat 30° eta 120°tako planoen bitartez eta elementu honen albo-aurpegiei dagozkien tentsioen osagaien balioak eta norabideak irudikatu.

Soluzioa

$$\text{Erantzunak: } \sigma_x = 400 \text{ Kg/cm}^2; \sigma_y = 800 \text{ Kg/cm}^2$$

$$\sigma_{n_1} = 500 \text{ Kg/cm}^2; \sigma_{n_2} = 700 \text{ Kg/cm}^2; \tau_1 = -173,2 \text{ Kg/cm}^2 \\ \text{eta } \tau_2 = 173,2 \text{ Kg/cm}^2.$$

2.8.- Kalkula  $\sigma_{n_1}$ ;  $\sigma_{n_2}$ ;  $\tau_1$  eta  $\tau_2$  tentsioak, baldin eta 36(a). irudian  $\sigma_x = 800$  Kg/cm<sup>2</sup>,  $\sigma_y = -400$  Kg/cm<sup>2</sup>,  $\psi_1 = 30^\circ$  eta  $\psi_2 = 120^\circ$  badira.

Soluzioa

$$\text{Erantzunak: } \sigma_{n_1} = 500 \text{ Kg/cm}^2; \sigma_{n_2} = -100 \text{ Kg/cm}^2; \\ \tau_1 = 173,2 \text{ Kg/cm}^2 \text{ eta } \tau_2 = -173,2 \text{ Kg/cm}^2.$$

2.9.- Kalkula  $\sigma_{n_1}$ ;  $\sigma_{n_2}$ ;  $\tau_1$  eta  $\tau_2$ ,  $\sigma_x = 800 \text{ Kg/cm}^2$  eta  $\sigma_y = -400 \text{ Kg/cm}^2$  badira baina  $\psi$ ,  $\tau_{\max}$  izateko moduan hautatzen bada.

**Soluzioa:**

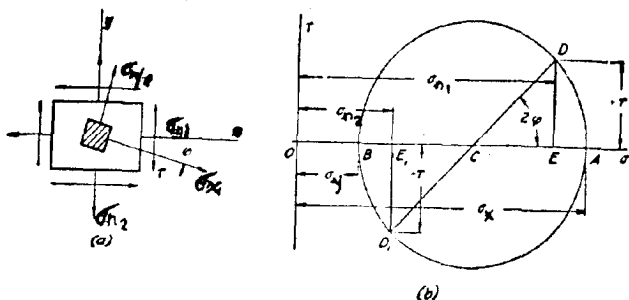
**Erantzunak:**  $\sigma_{n_1} = \sigma_{n_2} = 200 \text{ Kg/cm}^2$ ;  $\tau_1 = 600 \text{ Kg/cm}^2$ ;

$\tau_2 = -600 \text{ Kg/cm}^2$ ;  $\psi_1 = 45^\circ$  eta  $\psi_2 = 135^\circ$ .

## 2.5.- TENTSIO NAGUSIAK.

Aurreko atalean ikusi dugu jadanik,  $x$  eta  $y$  bi norabide elkartzetetako trakzio edo konpresioan,  $\sigma_x$  eta  $\sigma_y$  bi tentsioetako bat, tentsio normal maximoa dela eta bestea minimoa. Edozein plano inklinaturentzat,  $pq$  bezalakoarentzat agian, -31(a) eta 33(a) irudiak-  $\sigma_{n1}$  tentsio normalaren balioa, esanda ko muga horien artean gelditzen da.

Plano inklinatuengan,  $\sigma_{n2}$  tentsio normalez gainera,  $\tau$  tentsio ebakitzailleek dihardute.  $\sigma_x$  eta  $\sigma_y$  tentsioei, zeintzuetatik bata tentsio normal maximoa eta bestea tentsio nor-



34. Irudia.

mal minimoa baitira, tentsio nagusiak derizte eta beroriei dagozkien bi plano elkartzutei berriz, plano nagusiak derizte. Plano hauengan ez dihardute tentsio ebakitzailleek; aurreko ataleko adibidean (31.irudia)  $\sigma_x$  eta  $\sigma_y$  tentsio nagusiak kontside ratio soilen bitartez aurkitzen ditugu eta berorien funtzioan kalkulatzeko ditugu  $pq$  plano inklinatu bati dagozkion tentsioaren osagai normala eta ebakitzaillea -31(a).irudia-. Beste kasu batzuetan errazagoa da bi plano elkartzutei dagozkien tentsioen osagai normalak eta ebakitzailleak kalkulatzeko. Kasu hauetan tentsio nagusiak kalkulatzeko biderik errazena, Mohren zirkulua erabiltzea da. Eman dezagun ezagunak direla paralelepipedo angeluzuzen elemental batengan diharduten tentsioak -31(a).irudia-.  $\sigma_{n1}$  eta  $\sigma_{n2}$  tentsioak, ez dira tentsio nagusiak, izan ere ez baitihardute tentsio normalek bakarrik, ebakitzailleek ere badihardute  $x$  eta  $y$  ardatzekiko elkartzutak diren planoengan.

Kasu honetan tentsio-zirkulua eraikitzeko, tentsioen  $\sigma_{n1}$ ,  $\sigma_{n2}$  eta osagaiak erabiliko ditugu eta  $D$  eta  $D_1$  -34(b). irudia- lortuko ditugu. Bi puntu hauek bi plano elkartzutei

dagozkienez,  $DD_1$  luzera, tentsio-zirkuluaren diametroetako bat izango da. Diametro honek  $x$  ardatzarekin duen ebakidura-puntuak, zirkuluaren  $C$  zentrua ematen digu eta beraz, berori marra daiteke. Zirkunferentziak  $x$  ardatza ebakitzen dueneko  $A$  eta  $B$  puntuek tentsio normal maximo eta minimoaren balioak definitzen dituzte eta  $\sigma_x$  eta  $\sigma_y$ -z errepresentatzen ditugu. Kontsiderazio geometriko errazen bitartez, ondorengoa ondorioztatzen da:

$$\sigma_x = \overline{OA} = \overline{OC} + \overline{CD} = \frac{\sigma_{n_1} + \sigma_{n_2}}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_{n_1} - \sigma_{n_2}}{2}\right)^2 + \tau^2} \quad (31)$$

$$\sigma_y = \overline{OB} = \overline{OC} - \overline{CD} = \frac{\sigma_{n_1} + \sigma_{n_2}}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_{n_1} - \sigma_{n_2}}{2}\right)^2 + \tau^2} \quad (32)$$

Iruditik ondorioztatzen dira baita ere, tentsio nagusi dagozkien norabideak. Badakigu  $DCA$  angelua,  $\sigma_x$ -ek eta  $\sigma_{n_1}$ -en ardatzak osatzen dutenaren bikuna dela eta  $2\psi$   $D$ -tik  $A$ -ra neurtzen denez erlojuaren orratzen norantzean  $\sigma_x$ -en norabidea, 34(a) irudian adierazia izango da. Irudian marradura duen elementua,  $\sigma_x$ -ekiko normal eta paraleloak diren planoen bidez isolatzen badugu, plano hauengan  $\sigma_x$  eta  $\sigma_y$  baliodun tentsio normalek bakarrik ihardungo dute orain.  $\psi$  angeluaren zenbakizko kalkulurako, iruditik ondorioztatzen da:

$$|\operatorname{tg} 2\psi| = \frac{\overline{DE}}{\overline{CE}}$$

Kasu honetan  $\psi$  angeluaren zeinua negatiboa izan behar duela kontutan harturik,  $x$  ardatzetik erlojuaren orratzen aurkako norantzean neurtzen baita -34(a).irudia- honako hau ondorioztatzen da:

$$\operatorname{tg} 2\psi = - \frac{\overline{DE}}{\overline{CE}} = - \frac{2}{\sigma_{n_1} - \sigma_{n_2}} \quad (33)$$

Tentsio ebakitzaille maximoa, zirkunferentziaren erradioak emanik dator eta honako hau balio du:

$$\sigma_{\max} = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_{n_1} - \sigma_{n_2}}{2}\right)^2 + \tau^2} \quad (34)$$

(31)tik (34)erainoko ekuazioek, osoro eta guztiz konpontzen dute tentsio normal maximo eta minimo nahiz tentsio ebakitzaille maximoaren kalkulu-arazoa, behin bi plano elkartzuti dagozkien osagai normalak eta ebakitzailleak ezagutuz gero.



### ARIKETAK.

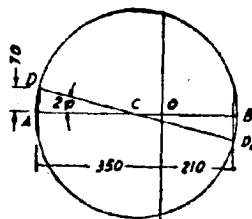
- 2.10.- Elementu bat -37(a).irudia-  $\sigma_{n_1}=350 \text{ Kg/cm}^2$ ;  $\sigma_{n_2}=210 \text{ Kg/cm}^2$ ;  $\tau_1=70 \text{ Kg/cm}^2$  tentsioen iharduera pean dago. Kalkula  $\sigma_x$  eta  $\sigma_y$  tentsio nagusien magnitude eta norabideak.

Soluzioa:

$$\text{Erantzunak: } \sigma_x = 379 \text{ Kg/cm}^2; \psi_1 = 22^\circ 30'; \sigma_y = 181 \text{ Kg/cm}^2; \psi_2 = 112^\circ 30'$$

- 2.11.- Kalkulatu aurreko ariketako tentsio nagusien norabideak,  $\sigma_{n_1} = -350 \text{ Kg/cm}^2$  dela suposatuz.

Soluzioa:



35.Irudia.

$$\text{Erantzunak: } \sigma_x = 218 \text{ Kg/cm}^2; \psi_1 = 82^\circ 59'; \sigma_y = -358 \text{ Kg/cm}^2; \psi_2 = 172^\circ 59'$$

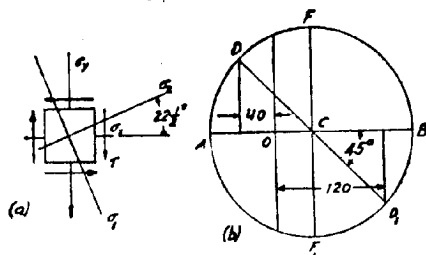
- 2.12.- Marra ezazu Mohr-en zirkulua trakziozko bi tentsio nagusi berdinen kasurako  $\sigma_x = \sigma_y = \sigma$  edo eta konpresiozko bi berdinentzat  $\sigma_x = \sigma_y = -\sigma$ , bi kasuetan ere  $\tau = 0$  delarik.

Soluzioa:

**Erantzuna:** Abzisa-ardatzeko  $+\sigma$  eta  $-\sigma$  puntuak.

- 2.13.- 36(a).irudiko elementuaren aurpegiekiko,  $\sigma_{n_1} = -40 \text{ Kg/cm}^2$ ,  $\sigma_{n_2} = 120 \text{ Kg/cm}^2$ ,  $\tau = 80 \text{ Kg/cm}^2$  balio duten tentsioek dihardute. Kalkula, tentsio-zirkuluaren bidez, tentsio normal eta ebakitzailen balioak. (a) plano nagusientzat, (b) tentsio ebakitzaille maximodun planoentzat.

**Soluzioa:**



36. Irudia.

**Erantzunak:**  $\sigma_x = 153,12 \text{ Kg/cm}^2$ ;  $\sigma_y = -73,12 \text{ Kg/cm}^2$ ;

$\psi_1 = 67^\circ 30'$ ;  $\psi_2 = 157^\circ 30'$ ;  $\sigma_c = 40 \text{ Kg/cm}^2$

$\tau_c = 113,12 \text{ Kg/cm}^2$ ;  $\psi_{c_1} = 45^\circ$ ;  $\psi_{c_2} = 135^\circ$ .

- 2.14.- Kalkulatu aurreko ariketa  $\sigma_{n_1} = -400 \text{ Kg/cm}^2$ ;  $\sigma_{n_2} = 240 \text{ Kg/cm}^2$  eta  $\tau = 80 \text{ Kg/cm}^2$ -rentzat.

**Soluzioa:**

Erantzunak:  $\sigma_x = -410 \text{ Kg/cm}^2$ ;  $\sigma_y = 250 \text{ Kg/cm}^2$

$\psi_1 = 82^\circ 47' 30''$ ;  $\psi_2 = 172^\circ 47' 30''$ .

## 2.6.- **DEFORMAZIOAREN AZTERKETA, TRAKZIO HUTSAREN KASUAN.**

2.atalean ikusia da, trakzio pean den barra baten luzapen axiala. Entseiu bidez probatu da, luzapen axiala, barraren albo-kontrakzio batekin batera gertatzen dela eta.

### albo-kontrakzio unitarioa luzapen axial unitarioa

erlazio hau konstante bat dela muga elastiko pean dagoen barra rentzat. Konstante hau,  $\mu$  letraz adierazten da eta Poisson-en erlazioa edo koefizientea deritzo, materialen sorkuntz hipotesizat teoria molekularra erabiliz, era analitikoan erlazioa zehaztu zuen matematikari frantziarraren ohoretan. Material isotropo direnentzat edo norabide guztietan propietate elastiko berberak dituztenentzat, Poisson-ek  $\mu = \frac{1}{2}$  balio aurkitu zuen. Entseiu experimentalek ikus erazi dute alegia, probeta metalikoetako albo-kontrakzioak edo albo-uzkurdurak\*, Poisson-ek kalkulaturako balioa duela gutxi gorabehera. Altzairuaren kasu partikularrean  $\mu = 0,3$  har daiteke. Material baten Poisson-en modulu edo erlazioa jakinik, errazki kalkula daiteke trakzio pean den barra baten bolumen-aldaketa.

Barraren luzera  $(1+\epsilon):1$  erlazioan handitzen da. Alboetako dimentsioak  $(1-\mu\epsilon):1$  erlazioan laburtzen dira, beraz sekzio zuzenaren azalera  $(1-\mu\epsilon)^2:1$  erlazioan txikitzen da. Beraz, barraren bolumena  $(1+\epsilon)(1-\mu\epsilon)^2:1$  erlazioan edo  $(1+\epsilon-2\mu\epsilon):1$  erlazioan aldatzen da,  $\epsilon$ -en balio txikia kontutan hartzerakoan eta bere berredurak mespretxatzean. Hemendik ondorioztatzen da, zabalkuntza kubiko unitarioa  $\epsilon(1-2\mu)$  dela. Goma eta parafina bezalako materialentzat  $\mu$ -ren balioa 0,5 inguruan dabil eta bolumena ia konstante mantentzen da trakzioak dirauen artean.  $\mu$  0,5 baino handiagoa balitz, bolumena txikitu egingo litzateke barra trakziopean jartzean. Badaude material batzu, hormigoia bezalakoak,  $\mu$  balio txikikoa dutenak ( $\mu = \frac{1}{8}$  tik  $\frac{1}{12}$  ra) eta kortxoa bezalako beste batzu,  $\mu$  hutsala dutela jo daitekeenak.

Ondorio guzti hauek, dagokion zeinu-aldaketa egin ondoren, aplikagarriak dira konpresioarentzat. Luzera-laburpeana zeharkako zabalkuntzarekin batera dator eta beronen kalkulurako trakzioaren kasuan erabiltzen den  $\mu$ -ren balio berbera erabil daiteke.

\* Material hauek isotropotzat hartzen dira.

**ARIKETAK.**

- 2.15.- Kalkulatu trakzio pean dagoen barra baten bolumen unita-  
rioaren hazkuntza, baldin eta  $\sigma_t = 448 \text{ Kg/cm}^2$ ,  $\mu=0,30$ ,  
 $E = 2 \times 10^6 \text{ Kg/cm}^2$  badira.

Soluzioa:

Erantzuna:  $89,6 \times 10^{-6}$ .

- 2.16.- Kalkulatu barra batetan bere beheko muturrean diharduen  
P indarrak eta barraren pisu propioak eraginiko bolu-  
men-hazkuntza (ikus 5.atala)

Soluzioa:

$$\text{Erantzuna: } \Delta V = \frac{Al(1-2\mu)}{E} \left( \frac{P}{A} + \frac{\gamma l}{2} \right)$$

## 2.7.- DEFORMAZIOA, BI NORABIDE ELKARTZUTETAN TRAKZIOA EDO KON- PRESIOA DEN KASUAN.

Bere forma paralelepipedo angeluzuzena duen barra bat,  $x$  eta  $y$  bi norabide elkartzutetan diharduten trakzio-indarren pean baldin badago (21.irudia), norabideetako batetan duen luzapena ez dago norabide honetan duen tentsioaren baitan bakarrik, baizik eta norabide elkartzutean den tentsioarenean ere bai.  $\sigma_x$  tentsioaren bidez  $x$  ardatzaren norabideko luzapen unitarioa,  $\frac{\sigma_x}{E}$  izango da.  $\sigma_y$  tentsioak, albo-uzkurdura unitarioa sortzen du  $x$  norabidean eta bere balioa  $\mu \frac{\sigma_y}{E}$  da; beraz,  $\sigma_x$  eta  $\sigma_y$  bi tentsioek batera ihardutean,  $x$  norabideari dagokion luzapen unitarioa, honako hau izango da:

$$\epsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \mu \frac{\sigma_y}{E} \quad (35)$$

Era berean lortzen da  $y$  norabidearentzat:

$$\epsilon_y = \frac{\sigma_y}{E} - \mu \frac{\sigma_x}{E} \quad (36)$$

eta  $z$  norabiderik balego:  $\epsilon_z = -\frac{\mu}{E}(\sigma_x + \sigma_y)$

Bi trakzio-tentsioak berdinak diren kasu partikularrean  $\sigma_x = \sigma_y = \sigma$  honako hau lortzen da:

$$\epsilon_x = \epsilon_y = \frac{\sigma}{E} (1 - \mu) \quad (37)$$

(35) eta (36) ekuazioetatik,  $\sigma_x$  eta  $\sigma_y$  aska daitezke  $\epsilon_x$  eta  $\epsilon_y$  luzapen-unitarioen baitan honako hauek lortuz:

$$\sigma_x = \frac{(\epsilon_x + \mu \epsilon_y) E}{1 - \mu^2}; \quad \sigma_y = \frac{(\epsilon_y + \mu \epsilon_x) E}{1 - \mu^2} \quad (38)$$

# **ARIKETAK.**

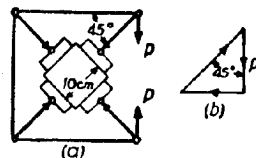
2.17.- Kalkulatu barne-presio pean den 31.irudiko altzairuzko galdara zilindrikoaren bolumen-hazkuntza, <sup>2</sup>muturretako deformazioa mespretxatuz eta  $\sigma_y = 400 \text{ Kg/cm}^2$  hartuz.

Soluzioa:

Erantzunak:  $\epsilon_y = 17 \times 10^{-5}$ ;  $\epsilon_x = 4 \times 10^{-5}$ ; hazkuntz erla-  
zioa =  $\frac{1,00038}{1}$

2.18.- Hormigoiezko kubu bat, 37.irudian adierazten den gai-  
luak bi norabide elkartutetan konprimaturik dago. Kal-  
kulatu kubuaren bolumen-txikitzea, baldin eta bere al-  
dea 10 cm-koa bada eta konpresio-tentsioa 37.irudia be-  
re aurpegiengan era uniforme banatzen bada;  $\mu=0,1$  eta  
 $P=10.000 \text{ Kg}$

Soluzioa:



37.Irudia.

Erantzunak:  $\epsilon_x = \epsilon_y = -0,000453$ ;  $\epsilon_z = 0,0001$  eta bolu-  
men-hazkuntza =  $-0,000806$  (bolumen-txiki-  
tzea).

2.19.- Kalkulatu 2.17. ariketan aztertutako galdararen albo-azaleraren hazkuntza.

**Soluzioa:**

**Erantzuna:** Hazkuntza =  $21 \times 10^{-5}$  (unitarioa)

2.20.- Kalkulatu altzairuzko barra batean  $\sigma_1$  norabideari dagokion luzapen-unitarioa, baldin eta tentsio-egoera, 13 atalari dagokion 2.17. ariketakoa bada.

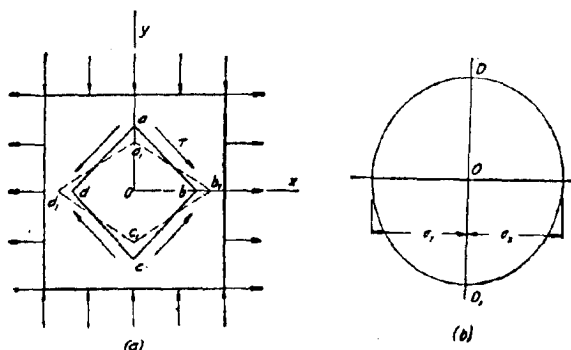
**Soluzioa:**

**Erantzuna:**  $\epsilon_1 = 165,3 \times 10^{-6}$



## 2.8.- TENTSIO EBAKITZAILE PURUA.

Kontsidera dezagun  $\sigma_x$  trakzio-tentsio baten eta  $\sigma_y$  beste konpresioiko eta magnitude bereko baten ihardunen kasu berezia -38(a).irudia-. Dagokion Mohr-en zirkulua, 38(b).irudikoa da. Zirkulu honen D puntuak ab eta cd sekzioei dagozkien eta



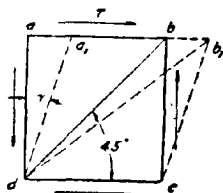
38. Irudia.

aurrekoekiko elkartzutak diren tentsioak irudikatzen ditu. Zirkuluan ikusten da, sekzio hauetako bakoitzarentzako tentsio normalak hutsalak direla eta sekzio berorientzako ebakidura-tentsioa, zirkuluaren erradioak errepresentaturik dagoelarik, bere balioa honako hau du:

$$\tau = \sigma_x = -\sigma_y \quad (a)$$

Hemendik ondorioztatzen da, alegia, abcd bezalako elementu bat isolatutzat aitor daitekeela eta tentsio ebakitzaille hutsen ihardunpean bakarrik orekaturik egon -38(a).irudia-. Hau bezalako tentsio-egoerari, tentsio ebakitzaille purua deritzo. Baldin eta sekzioa x ardatzarekiko  $45^\circ$  inklinaturik ez badago, tentsio normala eta tentsio ebakitzaillea izango dira berorrengean. Tentsio hauen magnitudea, kasu honetan -38(b).irudia- Mohr-en zirkulua erabiliz erdiets daiteke. Kontsidera dezagun orain abcd elementuaren deformazioa. Elementuaren aurregiekiko tentsio normalik ez izatean, ab, ad, bc eta dc luzerak ez dira aldatuko deformazio bitartean; baina diagonal bertikala laburtu egingo da eta db diagonal horizontala luzatu, abcd karratua, irudian lerro etenekin marratutako erronboan transformatzen den artean. a-ko angelua, deformazio-aurretik  $\frac{\pi}{2}$  zena,  $\frac{\pi}{2}$  baino handiago bilakatzen da; adibidez  $\frac{\pi}{2} + \gamma$  eta aldi berean b-ko angelua txikitu eta  $\frac{\pi}{2} - \gamma$  bihurtzen da.  $\gamma$  angelu txikiak, abcd elementuaren distortsioa neurtzen du eta defor-

mazio angeluar unitarioa deritzo. Deformazio honen izakera, ondorengo era honetan ere ikus daiteke. 38(a).irudiko  $abcd$  elementua  $45^\circ$  biratzen da eta 39.irudian adierazitako posizioan gelditzen da. Tentsio ebakitzailleak sortutako distortzioaren ondoren, elementu berak, lerro etenez irudikatutako posizioa hartzen du.  $\gamma$  deformazio angeluarra  $ab$  aldeak  $dc$  aldearekiko duen  $aa_1$  lerraduraren eta  $bi$  alde horien arteko  $ad$  distantziaren arteko zatiduraren  $\frac{aa_1}{ad}$  berdina izango da. Azpimarratu behar



39.Irudia.

rrekoa da, 39.irudiak adierazten duen bezalako bloke baten aurpegietan tentsio ebakitzaille berdinbanaturen aplikazioa oso zaila da egiten. Errematxe eta bernoak bezalako elementuen tentsio ebakitzailleen kasuetan, kalkulu praktikoak hurbilketa baldar bat besterik ez dira, berorietan tentsio ebakitzaillea sekzio zuzenetan berdinbanaturik dela jotzen delarik.

Deformazio angeluar unitario eta  $abcd$  elementuaren alboetan diharduen tentsio ebakitzailleen artean erlazioak ezartzeko,

$Oab$  triangelu angeluzuzena -38(a).irudia- hartuko dugu kontutan, triangelu honen  $Ob$  aldearen luzapena eta  $Oa$  aldearen laburpena deformazioak dirauen artean, (35) eta (36) ekuazioak erabiliz aurkituko da.

Kasu honetan:

$$\sigma_x = -\sigma_y = \tau \text{ denez,}$$

$$\epsilon_x = \frac{\tau(1+\mu)}{E} ; \quad \epsilon_y = -\frac{\tau(1+\mu)}{E}$$

$$Ob_1 = Ob \left[ 1 + \frac{\tau(1+\mu)}{E} \right] \quad \text{eta} \quad Oa_1 = Oa \left[ 1 - \frac{\tau(1+\mu)}{E} \right] \text{ direnez}$$

$Oa_1b_1$  triangelu angeluzuzenaren bidez, honako hau lortzen da:

$$\widehat{tg \, Oa_1b_1} = \widehat{tg \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\gamma}{2} \right)} = \frac{\overline{Ob_1}}{\overline{Oa_1}} = \frac{1 + \frac{\tau(1+\mu)}{E}}{1 - \frac{\tau(1+\mu)}{E}} \quad (b)$$

$\gamma$  bezalako angelu txiki batentzat, beste hau idatz daitezke:

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\gamma}{2}\right) = \frac{\operatorname{tg} \frac{\pi}{4} + \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2}}{1 - \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2}} = \frac{1 + \frac{\gamma}{2}}{1 - \frac{\gamma}{2}}$$

eta (a) ekuazioan ordezkatuz, beste hau lortzen da:

$$\frac{\gamma}{2} = \frac{\tau(1+\mu)}{E}$$

eta beste idazkera hau erabiliz,

$$\frac{E}{2(1+\mu)} = G \quad (39)$$

honako hau ematen du:

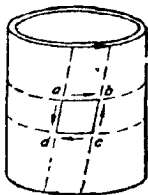
$$\gamma = \frac{\tau}{G} \quad (40)$$

Beraz, deformazioa edo distortsio angeluarra, tentsio ebakitzaillearekiko zuzenki proportzionala da eta  $G$  konstantearekiko alderantziz proportzionala.  $G$  konstantea, materia laren propietate elastikoen baitakoa da eta zeharkako elastiko tasun-modulu edo esfortzu ebakitzaillearen modulu deritzo.

(39) ekuazioaren bidez kalkula daiteke  $E$ ,  $\mu$  ezagutuz gero. Altzairuarentzat:

$$G = \frac{2 \times 10^6}{2(1+0,3)} = 0,77 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2$$

Tentsio ebakitzaille puruaren egoera elastikoa, tutu zirkular baten bihurduraren ematen da arruntki (40.irudia).



40. Irudia.

Tutuaren mutur batek bestearekiko egiten duen errota txikia dela bide, azal zilindrikoan marraztutako sortzaileak, zilindroaren ardatzarekiko inklinatzen dira eta bi sortzaile eta bi ebakidura zuzen jarraien artean osaturiko  $abcd$  elementu batek, 39.irudian adierazitako distortsioaren kidekoa jasaten du. Bihurduraren arazoa aurrera go ikusiko da (IX.kapituluan)

eta  $\tau$  tentsio ebakitzaila eta  $\gamma$  distortsioa nola zehatz daitezkeen da, baldin eta dagozkion momentu bihurtzaila eta bihurtura-angelua neurtzen edo ezagutzen badira.  $\tau$  eta  $\gamma$  bihurtura-entseian aurkiturik,  $G$  modulua kalkula daiteke beren zatiduraren bitartez.  $G$ -ren balio honekin eta trakzio-entseiaz eza guturiko  $E$ -renarekin, errazki kalkulatu da Poisson-en  $\mu$  modulu (39) ekuazioaren bidez.  $\mu$ -ren zehaztapen zuzena, trakzio-entseia bitartean albo-kontrakzioa neurtuz egitea, askoz zailagoa da, bere txikitasuna dela bide doitasun handiko neurgailuak behar dira eta.

### ARIKETAK.

2.21.- 39.irudiko  $abcd$  blokea,  $E=8 \times 10^5 \text{ kg/cm}^2$  eta  $\mu=0,25$  balio dunak dituen materialez eginik dago. Kalkulatu  $\gamma$  eta  $bd$  diagonalaren luzapen-unitarioa, baldin eta  $\tau=800 \text{ kg/cm}^2$  bada.

Soluzioa:

$$\text{Erantzunak: } \gamma = 2,5 \times 10^{-3} \text{ rad. eta } \epsilon_x = 1,25 \times 10^{-3}$$

2.22.- Kalkulatu aurreko ariketan  $ab$  aurpegiak  $cd$ -rekiko duen  $aa_1$  lerradura, baldin eta  $bd$  diagonalak  $5 \text{ cm}$ ko luzera badu.

Soluzioa:

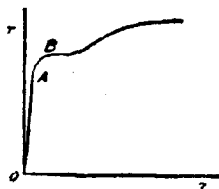
$$\text{Erantzuna: } \overline{aa_1} = 8,8375 \times 10^{-2} \text{ mm.}$$

2.23.- Frogatu 39.irudiko  $abcd$  blokearen bolumen-aldaketa hutsala dela, baldin eta  $\epsilon_x$  eta  $\epsilon_y$  deformazioaren osagaien lehen mailatik gorako berreketak mespretxagarritzat jotzen badira.

Soluzioa:

## 2.9.- EBAKIDURAZKO LANEKO TENTSIOAK.

Material bat tentsio ebakitzaille purupean jarririk, tentsio ebakitzaille eta distortsio unitarioaren artean dagoen erlazioa ezar daiteke. Erlazio hau, diagrama-moduan eman ohi da (41.irudia).



41. Irudia.

Abzisek distortsioak irudikatzen dituzte eta ordenatuek tentsio ebakitzailleak. Diagrama, trakzio-entseiuokoren kidekoa da eta bertan A proportzionaltasun-muga eta B fluentzi\* muga seinala daitezke.

Entseieuk, altzairu arrunta bezalako material batentzako  $\tau_{FL}$  ebakidurazko fluentzi puntuak  $\alpha_{FL}$ -ren 0,55etik 0,60ra balio dutela erakusten dute. Fluen

tzi puntuan tentsio ebakitzailerik gabe distortsio handi samarra agertzen denez, zilegi da laneko tentsio ebakitzailatzat fluentzi tentsio ebakitzaillearen zatiki bat hartzea, beraz,

$$\tau_t = \frac{\tau_{FL}}{n} \quad (41)$$

n segurtasun-koefizientea delarik. Koefiziente hau, trakzio-edo konpresio-kasuetako berdintsua harturik,

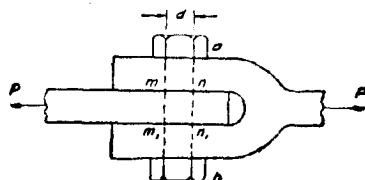
$$\tau_t = 0,55 + 0,6 \tau_{FL}$$

honek, ebakidurazko laneko tentsioa, trakziozko laneko tentsioa baino askoz ere txikiagoa izan behar duela adierazten du. Errazki ulertzen da alegia, aplikazio praktikoetan, 39. iru diko blokearentzat suposatutako tentsio ebakitzaillearen banaketa uniformerik ez aurkitzea.

Aurrerago ikusiko dugu tentsio ebakitzaille purua ez dela bihurduan bakarrik agertzen, habeen makurduran ere bai noski. Hala ere, kasu praktiko asko, tentsioen banaketa berdin banatua suposatuz konpontzen dira, hurbilketa baldar bat besterik ez bada ere. Bedi adibidez 42. irudiko loturaren kasua. Begibistakoa da ab bernoaren diametroa behar hainbatekoa ez

\* Fluenzi puntua ongi zehazteko tutu erako probetak erabiltzen dira bihurdu-entseietan.

loturak huts egin dezakeela  $mn$  eta  $m_1n_1$  sekzioetako ebakiduren gatik.



42. Irudia.

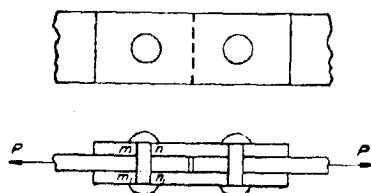
Arazoaren azterketa sakon batek, tentsio ebakitzailak aipatu ebakidurengan era berdinbanatuan ez direla banatzen erakusten du eta bernoak ebakidura ezezik,  $P$  trakzio-indarraren ihardunpean makurdura ere jasaten duela erakusten du. Era traketsean, bernoarentzat behar den diametroa  $mn$  eta  $m_1n_1$  planoetan  $\tau$  tentsio ebakitzaila berdinbanaturik dela suposatuz lortzen da eta bere balioa beraz,  $P$  indarra  $mn$  eta  $m_1n_1$  ebakiduren azalaren baturaz zatituz kalkulatzeko da. Beraz,

$$\tau = \frac{2P}{\pi d^2}$$

eta bernoarentzat beharrezkoa den diametroa, ondorengo ekuazioaren bidez:

$$\tau_t = \frac{2P}{\pi d^2} \quad (42)$$

Metodo soil honen aplikaziobide den beste kasu bat, juntura errematxatuen ebakidura-arazoena da (43. irudia).



43. Irudia.

Errematxeen buruak tenperatura altuetan eginak direnez, hoztean konpresio handia eragiten dute xaflengan\*.

P trakzio-indarrak aplikatzerakoan, xaflen arteko higidura erlatiboa, marruskadurak eragotzirik dago, lehen aipa tutako xaflen arteko presioa dela bide. Marruskadura hau gainditu ondoren bakarrik hasten dira errematxeak lanean ebakiduraz eta beren diametroa behar adinako ez bada, ebakidurazko etena gerta daiteke  $m_n$  eta  $m_1 n_1$  planoetan zehar. Beraz aurreko adibideko (42) ekuazio berbera erabiliz lortzen da behar duten adinako diametroaren balioa.

\* Entseiu bidez ikusi da, alegia errematxeetako trakzio-tentsioak eginik dauden materialaren fluentzi tentsioaren mailakoak direla. Ikus C.Bach-en Zeitschr. d. Ver. Deutsch. Ing. 1912.



**ARIKETAK.**

2.24.- Kalkulatu 42.irudiko loturako lerroaren diametroa, baldin eta  $P=5000 \text{ kg}$  bada eta  $\tau_t=480 \text{ kg/cm}^2$ .

Soluzioa:

Erantzuna:  $d = 27,1 \text{ mm}$ .

2.25.- Kalkulatu 44.irudiko zurezko bi piezen loturaren 2l segurtasun-luzera,  $P=5000 \text{ kg}$ ko trakzio-esfortzupean bada go  $\tau_t=8 \text{ kg/cm}^2$  bada, zuntzen ebakidura paraleloarentzat eta  $b=25 \text{ cm}$ . Kalkulatu baita ere  $mn$ , koskaren altuera egokia baldin eta zurezko zuntzetan zeharreko konpresio lokalaren tentsioentzako segurtasun-muga  $64 \text{ kg/cm}^2$  bada.



44.Irudia.

Soluzioa:

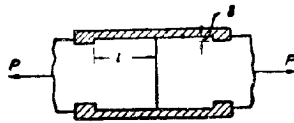
Erantzunak:  $2l = 50 \text{ cm}$  eta  $\overline{mn} = 3,125 \text{ cm}$ .

2.26.- Kalkulatu 43.irudiko errematxeen diametroa, baldin eta  $\tau_t = 640 \text{ kg/cm}^2$  bada eta  $P = 4000 \text{ kg}$ .

Soluzioa:

Erantzuna:  $d = 20 \text{ mm}$ .

2.27.- Kalkulatu  $l$  eta  $\delta$  dimentsioak altzairuzko bi xaflez egindako bi barra angeluzuzenen loturarentzat, baldin eta dimentsioak eta laneko tentsioak 2 ariketako berberak badira:  $P = 5000 \text{ kg}$ ,  $\tau_t = 8 \text{ kg/cm}^2$ ,  $b = 25 \text{ cm}$  eta  $\tau_t = 64 \text{ kg/cm}^2$ . (48.irudia)



45.Irudia.

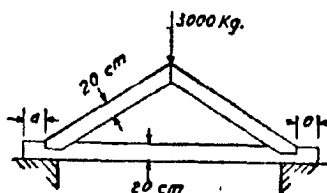
Soluzioa:

Erantzunak:  $l = 12,5 \text{ cm}$  eta  $\delta = 1,58 \text{ cm}$ .

2.28.- Kalkulatu 46.irudiko egituran beharrezko den  $a$  distantzia baldin eta laneko tentsio ebakitzaila 2.25.ariketako berbera bada eta barra guztien ebakidura zuzenen dimentsioak 10x20 cm badira. Marruskaduraren ondorioa mespretxatu egiten da.

Soluzioa:

Erantzuna:  $a = 32,5$  cm.



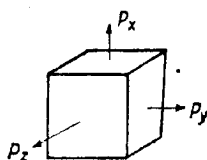
46. Irudia.

## 2.10.- TRAKZIOA EDO KONPRESIOA HIRU NORABIDE ELKARTZUTETAN.

Paralelepipedo angeluzuzen forma duen barra bat,  $P_x$ ,  $P_y$  eta  $P_z$  (47.irudia) indarren eraginpean baldin badago,  $x, y$  eta  $z$  ardatzekiko tentsio normalak, honako hauek dira:

$$\sigma_x = \frac{P_x}{A_x} ; \sigma_y = \frac{P_y}{A_y} ; \sigma_z = \frac{P_z}{A_z}$$

$\sigma_x > \sigma_y > \sigma_z$  dela jotzen da.

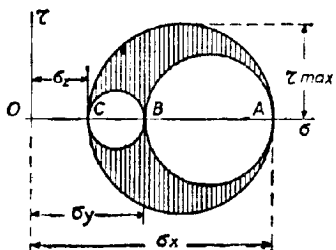


47.Irudia.

$P_x$ ,  $P_y$  eta  $P_z$  indarren ondorioak konbinatuz ondorioztatzen da, alegia, bere plano  $z$  ardatzetik iragaten den ebakidura batengan,  $P_x$  eta  $P_y$  indarrek bakarrik sortzen dituztela tentsioak eta baita ere, tentsio hauek (26) eta (27) ekuazioen bidez kalkula daitezkeela eta

Mohr-en zirkulua erabiliz grafikoki irudika.

48.irudian AB diametrodun zirkulua, tentsio hauek irudikatzen ditu. Era berean,  $x$  ardatzetik iragaten den sekzio bati atxekiriko tentsioak, BC diametrodun zirkuluaz errepre-senta daitezke.



48.Irudia.

AC diametrodun zirkulua  $y$  ardatzean zeharreko sekzioei dagozkien tentsioak errepre-sentatzen ditu.

Mohr-en hiru zirkuluek,  $x$ ,  $y$  eta  $z$  ardatzetan zeharreko sekzioetako tentsioak irudikatzen dituzte.  $x$ ,  $y$  eta  $z$ -rekiko bes-

te sekzio inklinatu batekiko tentsioaren osagai normala eta ebakitzailea, 48.irudiko marraduradun azaleran lekututako puntu baten koordinatuak dira\*. Hau finkaturik, esfortzu ebakitzaile maximoa, hiru zirkuluetatik handienaren erradioak irudikatzen egongo dela ondorioztatzen da eta ondorengo ekuazio honek emanik etorriko da.

\* Propietate honen demostrazioa, A.Föppl-en Technische Mechanik V.bolumenean 18.orrialdean (1918) ikus daiteke. Ikus baita ere, H.M.Westergaard-en Z. angew.Math.Mech. IV.bolumena, 520 orrialdea (1924).

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_x - \sigma_z}{2}$$

Eta y ardatzetik iraganez, x eta z ardatzen angelua erdibitzen duen sekzioarentzat gertatzen da hau.

Ardatzen norabideetan deformazio unitarioak kalkulatzeko ekuazioak,  $P_x$ ,  $P_y$  eta  $P_z$ -ren ondorioak konbinatuz lor daitezke, bi norabide elkartutetako trakzio edo konpresioaren kasuan egin den bezalaxe (ikus 15. atala). Era honetan lortzen dira:

$$\begin{aligned}\epsilon_x &= \frac{\sigma_x}{E} - \frac{\mu}{E} (\sigma_y + \sigma_z) \\ \epsilon_y &= \frac{\sigma_y}{E} - \frac{\mu}{E} (\sigma_x + \sigma_z) \\ \epsilon_z &= \frac{\sigma_z}{E} - \frac{\mu}{E} (\sigma_x + \sigma_y)\end{aligned}\quad (43)$$

Barraren bolumena, erlazio honetan hazten da:

$$(1 + \epsilon_x), (1 + \epsilon_y), (1 + \epsilon_z) : 1,$$

edo eta maila goreneko kopuruak mespretxatuz:

$$(1 + \epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z) : 1$$

eta hortik, zabalkuntza kubiko unitarioa, honako hau dateke:

$$\Delta = \epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z \quad (44)$$

Zabalkuntza kubiko unitarioaren eta barraren aurpegietan diharduten tentsioen arteko erlazioa, (43)ko ekuazioak batuz lor daiteke, honako era honetan:

$$\Delta = \epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z = \frac{1-2\mu}{E} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) \quad (45)$$

Presio hidrostatiko uniformearen kasu berezian, hona ko hau lortzen da:

$$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = -p$$

(43)ko ekuazioek, hau ematen dute:

$$\epsilon_x = \epsilon_y = \epsilon_z = -\frac{p}{E} (1-2\mu) \quad (46)$$

eta (44) ekuazioak:

$$\Delta = - \frac{3(1-2\mu)}{E} p \quad (47)$$

Beste idazkera hau erabiliz,

$$\frac{E}{3(1-2\mu)} = K \quad (48)$$

honako hau lortzen da:

$$\Delta = - \frac{p}{K} \quad (49)$$

Zabalkuntza kubikoa,  $p$  konpresio-tentsioarekiko proportzionala da eta  $K$  kopuruarekiko alderantziz proportzionala, berau bolumenaren elastikotasun-modulu edo modulu bolumentriko izenen bidez ezagutzen delarik.

# **ARIKETAK.**

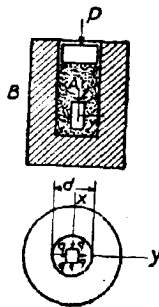
2.29.- Kalkulatu 25 cm-ko diametrodun esfera trinko baten bolu men-txikitzea (bolumen-laburpena), baldin eta  $p=700 \text{ kg/cm}^2$  presio hidrostatikopean badago.

Soluzioa:

$$\text{Erantzuna: } \Delta V = -3,43 \text{ cm}^2$$

2.30.- 49.irudian, gomazko A zilindroa, altzairuzko B zilindro baten barruan konprimaturik dago P indarraren bidez. Kalkulatu goma eta altzairuaren arteko presioa, baldin eta  $P=500 \text{ kg}$  eta  $d=5 \text{ cm}$  badira eta gomarentzako Poisson-en modulua  $\mu=0,45$  bada. Goma eta altzairuaren arteko marruskadura mespretxatu egiten da.

Soluzioa:

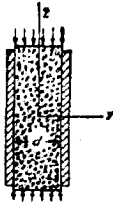


49. Irudia.

$$\text{Erantzuna: } q = 20,8 \text{ kg/cm}^2$$

2.31.- Hormigoiezko zutabe bat, altzairuzko tutu batetan moldeaturik (enkofraturik) dago (50.irudia). Kalkulatu altzairu eta hormigoia arteko presioa eta tutuan den zeharkako trakzio-tentsioa, altzairu eta hormigoia artean marruskadurarik ez dagoela eta hormigoiezko zutabearen dimentsio eta konpresio-tentsio guztiak ezagunak direla suposatuz.

**Soluzioa:**



50. Irudia.

Bitez  $p$  eta  $q$  konpresiozko luzetarako eta alborako tentsioak;  $d$  altzairuzko tutuaren elastikotasun-modulua,  $E_h$  eta  $\mu_h$  hormigoiaaren elastikotasun-modulua eta Poisson-ena. Hormigoiaaren albo-norabide batetako luzapen unitarioa, (43) ekuazioa harturik, honako hau izango da:

$$\epsilon_x = \frac{-q}{E_h} + \frac{\mu_h}{E_h} (p+q) \quad (a)$$

Luzapen hau, altzairuzko tutuaren luzapen zirkunferentzial unitarioaren berdina izango da (ikus 13. ekuazioa)

$$\epsilon = \frac{qd}{2hE_a} \quad (b)$$

(a) eta (b) ekuazioekin, honako hau erdiesten da:

$$\frac{qd}{2hE_a} = -\frac{q}{E_h} + \frac{\mu_h}{E_h} (p+q)$$

eta hemendik:

$$q = p \cdot \frac{\mu_h}{\frac{d}{2h} \cdot \frac{E_h}{E_a} + 1 - \mu_h}$$

Tutuko trakziozko albo-tentsioa, ekuazio honen bidez kalkulatu da:

$$\sigma = \frac{qd}{2h}$$

- 2.32.- Kalkulatu aurreko ariketako hormigoiezko zutabeko tentsio ebakitzaille maximoa,  $p=70 \text{ kg/cm}^2$ ,  $\mu_h=0,10$  eta  $\frac{d}{2h}=7,5$  direla suposatuz.

**Soluzioa:**

Erantzuna:  $\tau_{\max} = 33,2 \text{ kg/cm}^2$





### 3.- INDAR EBAKITZAILEA ETA MOMENTU MAKURTZAILEA.

3.1.- HABE-MOTAK.

3.2.- MOMENTU MAKURTZAILEA ETA INDAR EBAKITZAILEA.

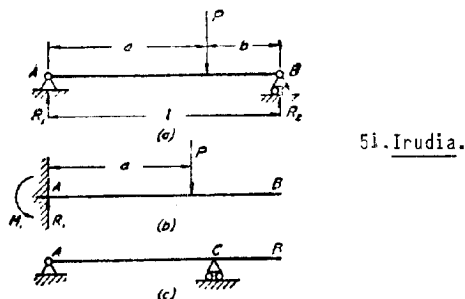
3.3.- MOMENTU MAKURTZAILEAREN ETA INDAR EBAKITZAILEAREN ARTEKO ERLAZIOA.

3.4.- MOMENTU MAKURTZAILEAREN ETA INDAR EBAKITZAILEAREN DIAGRAMAK.



### 3.1.- **HABE-MOTAK.**

Kapitulua honetan, 51.irudiak erakusten dituen habe-mota soilak aztertuko ditugu. 51(a).irudiak, muturrak sostengaturik edo bermaturik dituen habe bat errepresentatzen du. A eta B bermaguneak giltzaturik daude, beraz, habearen muturrek libreki bira dezakete makurdura bitartean. Gainera bieta-ko bat arrabolen muntaturik dagoela suposatzen da eta libre



ki higi daitekeela norabide horizontalean. 51(b).irudiak, hegalkina edo mentsula irudikatzen du. Habe honen A muturra, horman landaturik dago eta ezin du biratu makurdura bitartean, B muturra berriz, zeharo libre dago. 51(c).irudiak, sostengatu tako mentsuladun habe bat irudikatzen du. Habe honek, giltzadura finko gisa du A bermea eta C berriz giltzadura higikorra da.

Hiru kasuek ere, estatikoki zehaztutako habeak irudikatzen dituzte, izan ere, edozein kargaren kasuari dagozkion bermaguneetako erreakzioak, estatikako ekuazioen bidez kalkula baitaitezke.

Bedi adibidez, P karga bertikal batek erasaniko habe bermatua edo sostengatua -51(a) irudia-. B-ko  $R_2$  erreakzioak, bertikala izan beharra du, bermagune hau horizontalean libreki higi daitekeenez.

$\sum X=0$  estatikako ekuaziotik,  $R_1$  ere bertikala dela ondorioztatzen da.  $R_1$  eta  $R_2$ -ren balioak, momentuen ekuazioen bidez kalkulatu dira. B puntuarekiko indar guztien momentuen batura zerori berdinduz, honako hau lortzen da:

$$R_1 \cdot l - P \cdot b = 0 \quad \text{eta hortik}$$

$$R_1 = \frac{P \cdot b}{l}$$

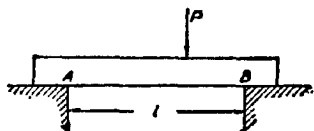
Era berean A puntuari buruz momentuak hartuz, beste hau lortzen da:

$$R_2 = \frac{P \cdot a}{l}$$

Bermatutako hegalkindun habe baten kasuko erreakzioak ere, era berean kalkulatzen dira -51(c) irudia-.

Mentsula baten kasuan, -51(b).irudia- P karga, landa tutako muturrean diharduten erreakzio-elementuen bidez orekatzten da.  $\sum X=0$  eta  $\sum Y=0$  estatikako ekuazioetatik, erreakzio-indarren erresultantea, bertikala eta P balioduna izan behar duela ondorioztatzen da.  $M=0$  momentu-ekuaziotik berriz, A-rekiko erreakzio-indarrek duten M momentua, P.a-ren berdina izan behar duela ondorioztatzen da irudiak adierazten duenez, erloju-orratzen aurkako norantzean noski.

Beste karga-mota batzuk aurreko habe-motengan sortutako erreakzioak ere, kideko prozeduraz kalkula daitezke. Adierazi beharrezkoa da ordea, argi handidun habeen kasuan bakarririk, hots, zibigintzakoetan eta abar, hartzen direla muturren errotazio librea eta berme higikorren desplazamendua gertatzen uzten duten jarrera bereziak. Kasu arruntetan eta argi txikidunetan, 52.irudian irudikatutakoak dira bermeen baldintzak eta jarrerak. Habe hauen makurduran, bermazalen eta habearen arteko marruskadura-indarrak kontra-jartzen dira habe-muturren errotazio eta higidura horizontalaren aurka. Indar hauek, garrantzi praktikorik izan lezakete zurruntasun gutxi



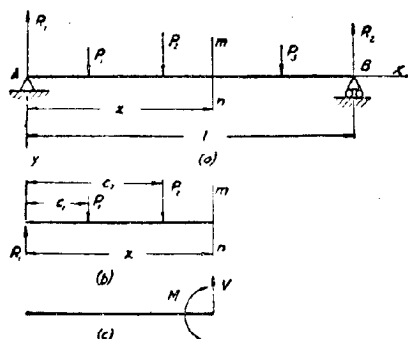
52. Irudia.

ko habe eta pletinen kasuan (ikus 40. atala); baina bere deformazioa bere l argiarekin konparatuz oso txikia duen habe batentzat, mespretxa daitezke indar hauek eta erreakzioak, soilki bermatutako habean bezala kalkula daitezke. -51(a).irudia-.

formazioa bere l argiarekin konparatuz oso txikia duen habe batentzat, mespretxa daitezke indar hauek eta erreakzioak, soilki bermatutako habean bezala kalkula daitezke. -51(a).irudia-.

### 3.2.- MOMENTU MAKURTZAILEA ETA INDAR EBAKITZAILEA.

Eman dezagun orain soilki bermatutako habe bat bade-la eta berarengan  $P_1$ ,  $P_2$  eta  $P_3$  indar bertikalak dihardutela -53(a).irudia-. Habeak simetriako plano axial bat bade-ela eman go dugu eta plano honetan dihardutela kargak. Horregatik eta simetria dela bide, makurdura ere plano honetan gertatzen dela



53. Irudia.

ondorioztatzen dugu. Kasu praktikoko gehienetan betetzen da simetri baldintza hau, sekzio bakoitzaren zirkularra, angeluzuzena, I edo T-a, honelakoak direlako. Kasu orokorra eta sekzio asimetrikoak, aurrerago aztertuko da.

Habe baten makurdura bitartean gertatutako tentsioak ikertzeko, trakziopean den barra baten kasuan egindakoa ren kideko prozeduraz jokatzen da (1. irudia). Eman dezagun  $AB$  habea bi zatitan zatitzen dela. A ezkerreko bermetik  $x$  distantziara lekuturiko  $mn$  ebakidura zuzenaren bitartez -53(a). irudia- eta ebakiduraren eskuinean lekututako zatia ez dela kontutan hartzen.

Daukagun habe-zatiaren oreka aztertzeko -53(b). irudia- ez ditugu  $P_1$  eta  $P_2$  kargak eta  $R_1$  erreakzioa bezalako kanpoko indarrak bakarrik kontutan hartu behar, baizik eta baita  $mn$  sekzioaren banatutako barne-indarrak ere, horiek hain zuzen ere sekzioaren eskuineko zatia ezkerreko zatia duen eragina irudikatzen baitute. Barne-indar hauek, lehen aipatutako  $P_1$ ,  $P_2$  eta  $R_1$  kanpoko indarrak orekatzeko modukoak izan behar dute.

Kanpoko indar hauek guztiak, estatikaren baldintzak direla bide  $mn$  sekzio-planoan diharduen  $V$  indar bertikal bakar batez eta  $M$  indar-bikotearen momentuaz ordezkatu daitezke. Indarren balioa, honako hau da.

$$V = R_1 - P_1 - P_2 \quad (a)$$

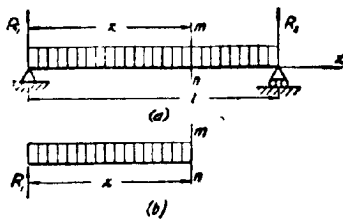
eta indar-bikotearen momentuarena:

$$M = R_1 \cdot x - P_1 (x - c_1) - P_2 (x - c_2) \quad (b)$$

V indarra, mn sekzioaren ezkerretan lekututako kanpo ko indar guztien batura algebraikoa da eta mn sekzioko esfortzu ebakitzailea deritzo. M momentua berriz, mn sekzioaren ezkerretan lekututako kanpoko indarrek sekzio honen grabitate-zentruarekiko dituzten momentuen batura algebraikoa da eta mn sekzio zuzeneko momentu makurtzailea deritzo -53(c).irudia)-mn sekzioarengan banatutako tentsioek, habearen eskuineko zatiak ezkerrekoarengan duen eragina errepresentatzen baitute, orekatu egin behar bait dituzte M momentu makurtzaile eta V indar ebakitzailea.

Habearengan zenbait karga bilduren (kontzentraturen) ordez, karga banatu batek badihardu, arrazoiketa berbera erabil daiteke. Bedi adibidez, 54(a).irudiko habe, uniformeki kargaturik. Kargaren intentsitatea edo luzera-unitateko karga q-z errepresentaturik, erreakzioak honako hauek izango dira:

$$R_1 = R_2 = \frac{ql}{2}$$



54. Irudia.

mn sekzioko tentsio-banaketa ikertzeko, berriro ere kontutan har dezagun habearen ezkerreko zatiaren oreka -54(b).irudia-. Habearen zati honengan diharduten kanpoko indarrak,  $R_1$  erreakzioa eta x luzeran zehar berdin banatutako karga dira. Azkeneko honek qx erresultantea du. Beraz,

mn sekzioaren ezkerretako indar guztien batura algebrakoa,  $R_1 - qx$  da. Eta mn sekzioaren ezkerretan lekuturiko indar guztien momentuen batura algebrakoa bere grabitate-zentruarekiko,  $R_1 \cdot x$  erreakzioaren momentuari, karga berdin banatuaren erresultantearen momentua kenduz lortzen da.

Karga banatuaren momentua, bistan denez, hau da:

$$qx \cdot \frac{x}{2} = \frac{qx^2}{2}$$

Beraz, momentuen batura algebrakoa,

$$R_1 \cdot x - \frac{qx^2}{2}$$

Habearen ezkerraldeko zatian diharduten indar guztiak, mn sekzio-planoan diharduen indar batez ordezkari daitezke eta beronen balioa honako hau da:

$$V = R_1 - qx = q \left( \frac{1}{2} - x \right) \quad (c)$$

beste momentuarenaren honekin batera:

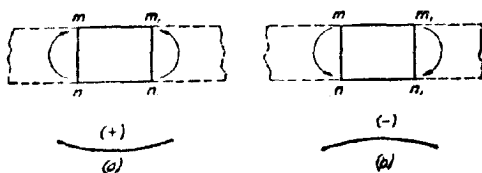
$$M = R_1 \cdot x - q \cdot \frac{x^2}{2} = \frac{qx}{2} (1-x) \quad (d)$$

(c) eta (d) ekuazioek  $mn$  sekzioko indar ebakitzaila eta momentu makurtzailea irudikatzen dituzte. Adibideotan, sekzioaren ezkerretan lekututako habe-zatiaren oreka hartu da kontutan. Ezkerreko zatiaren ordezkuek aztertuz gero, sekzioaren eskuinetako indarren batura algebrikoak eta berorien momentuenak aurreko  $V$  eta  $M$ -ren balio berberak izango lituzkete, baina aurkako norantzaadunak.

Honen arrazoiak zera da, habearengan diharduten kargak  $R_1$  eta  $R_2$  erreakzioekin batera, orekan dauden indar-sistema bat irudikatzen dutela eta beraz, beren batura algebrikoa eta planoko edozein punturekiko beren momentuena, nulua izan behar duela.

Orduan  $mn$  ebakidura zuzenaren grabitate-zentruarekiko habearen ezkerreko zatiarengan diharduten indarrek puntu berarekiko duten momentuaren balio berdinekoa eta aurkako norantzaaduna izan behar du. Baita ezkerreko zatiarengan diharduten indarren batura algebrikoaren balio berdinekoa eta aurkako izan behar du.

Hemendik aurrera,  $mn$  sekzio zuzen bateko momentu makurtzailea eta indar ebakitzaila positibotzat hartuko dira baldin eta habearen sekzioarekiko ezkerraldeko zatia harturik,



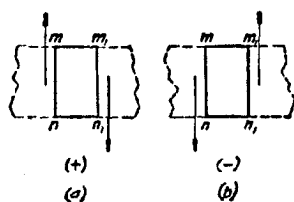
55. Irudia.

lortzen diren norantzak 54(c). irudikoak badira. Momentu makurtzailearen arau hau finkatzeko, isola dezagun habearen elementu bat,  $mn$  eta  $m_1n_1$  sekzio jarraien bidez (55. irudia). Sekzio hauetako momentu makurtzailea positiboa bada,  $mn$  sekzioaren ezkerretarako indarrek, erloju-orratzen norantza bereko momentua ematen dute, eta  $m_1n_1$  sekzioaren eskuineko indarrek, erlo-



ju-orratzen norantza bereko momentua ematen dute, eta  $m_1 n_1$  sekzioaren eskuineko indarrek, erloju-orratzen aurkako norantzadun momentua, 55(a).irudian adierazten denez.

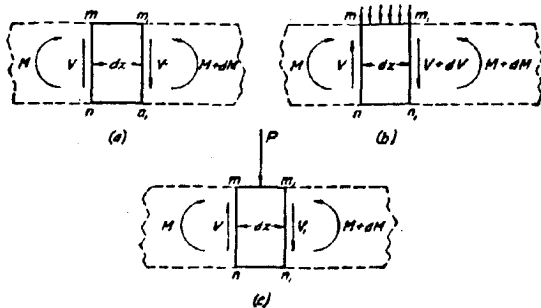
Momentuen norantza honengatik, habea makurtzean, ganbila gertatzen da azpikaldean.  $m n$  eta  $m_1 n_1$  sekzioen ebakiduren momentu makurtzaileak negatiboak badira, ganbiltasuna goenaldean gertatzen da, 55(b).irudian adierazten duen eran. Beraz, momentu makurtzailea positiboa deneko habearen zatietan, makurdura-kurba edo elastika, ganbila da azpikaldean eta momentu makurtzailea negatiboa deneko zatietan berriz goenaldean da ganbila aipaturiko elastika. Indar ebakitzailleentzako zeinuen araua berriz, 56.irudian zehazten da.



56.Irudia.

### 3.3.- MOMENTU MAKURTZAILEAREN ETA INDAR EBAKITZAILEAREN ARTEKO ERLAZIOA.

Har dezagun  $dx$  distantziara diren  $m n$  eta  $m_1 n_1$  sekzio jarraiek berezitako habe baten elementu bat (57.irudia).



57.Irudia.

$m_n$  sekzioko momentu makurtzailea eta indar ebakitzai-  
lea positiboak direla suposatuz, habearen ezker aldeko zatiak  
elementuarengan duen eragina  $V$  indarrak eta  $M$  momentuak irudi-  
katurik dago, 57(a). irudian adierazten den bezala. Eri berean,  
 $m_1 n_1$  sekzioan ere, momentu makurtzailea eta indar ebakitzzailea  
positiboak direla joz, elementuarekiko habearen eskuinaldeko  
zatiaren eragina aipatu indar-bikotearen momentuak eta inda-  
rrak errepresentaturik dago.  $m_n$  eta  $m_1 n_1$  sekzioen artean habea  
rangan inongo indarrek ez badihardu -57(a). irudia- bi sekzioe-  
tako indar ebakitzzaileak berdinak dira\*. Momentu makurtzaileak  
aztertuz, momentu makurtzaile hauek desberdinak izatea beha-  
rrezkoa dela ikusten da elementuaren orekarako eta momentu ma-  
kurtzailearen  $dM$  gehikuntzak, aurkako bi  $V$  indarrek osatzen  
duten indar-bikotearen momentua berdin dezala;

$$dM = V \cdot dx$$

eta

$$\frac{dM}{dx} = V \quad (50)$$

Beraz, karga arteko habearen zatietarako, indar eba-  
kitzailea, momentu makurtzailearen  $x$ -ekiko deribatua da.

Eman dezagun orain,  $q$  baliiodun karga banatu batek  
 $m_n$  eta  $m_1 n_1$  sekzioen artean diharduena -57(b). irudia-. Elemen-  
tuarengan diharduen karga totala,  $q \cdot dx$  da. Kargak beherantz  
diharduenean  $q$  positibotzat hartzen bada, elementuaren oreka-  
tik ondorioztatzen da, alegia indar ebakitzzailea  $m_1 n_1$  sekzioan,  
 $m_n$ -an denetik honako diferentzia hau duela:

$$dV = -q \cdot dx$$

eta hemendik

$$\frac{dV}{dx} = -q \quad (51)$$

Beraz, indar ebakitzzailearen  $x$ -ekiko deribatuak kar-  
garen intentsitatearen balio berdina du, zeinu negatiboarekin  
bada ere.

Elementuarengan diharduten indar guztien momentua  
hartuz, honako hau lortzen da:

$$dM = V \cdot dx = -q \cdot dx \cdot \frac{dx}{2}$$

\* Azterketa honetan mespretxatu egiten da habe-elementuaren pisu propioa.

Bigarren aldeko bigarren osagaia mespretxatuz, bigarren mailako kantitatea baita, (50) ekuazioa lortzen da berriz ere eta karga berdinbanatuaren kasuan ere, indar ebakitzaila, momentu makurtzailearen  $x$ -ekiko deribatua dela ondorioztatzen da.

$mn$  eta  $m_1 n_1$  sekzio jarraien artean  $P$  karga bildu batek badihardu -57(c). irudia-, jauzi bortitz bat agertuko da indar ebakitzailaren balioan. Bedi  $V$   $mn$  sekzioko indar ebakitzaila eta  $V_1$   $m_1 n_1$  sekziokoa.

$m_1 n_1 n$  elementuaren orekatik ondorioztatzen da:

$$V_1 = V - P$$

Beraz, indar ebakitzailaren balioa  $P$  kopuruan aldatzen da kargaren aplikazio-puntutik iragatean. (50) ekuaziotik ondorioztatzen da, alegia, karga bildu baten aplikazio-puntuan jauzi bortitz bat gertatzen dela  $\frac{dM}{dx}$  deribatuaren balioan.

### 3.4.- MOMENTU MAKURTZAILEAREN ETA INDAR EBAKITZAILEAREN DIAGRAMAK.

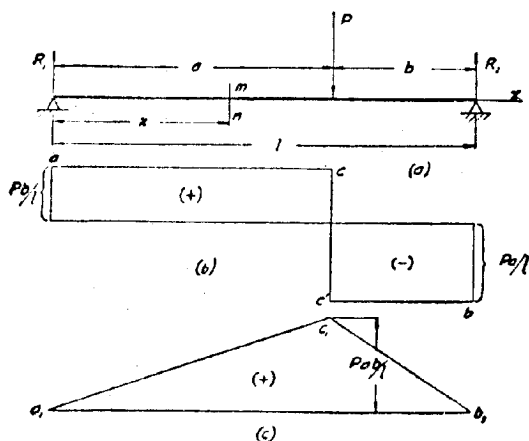
Aurreko atalean ikusi da, alegia, habe baten  $mn$  sekzioarengan diharduten tentsioek, sekzio horri dagozkion  $M$  momentu makurtzailea eta  $V$  indar ebakitzaila orekatzen dituztela. Beraz, hauen balioen baitan daude tentsioenak ere.

Habe batetan tentsioen azterketa sinplifikatzeko, komenigarria da habearen ardatzean zehar momentu makurtzaileak eta indar ebakitzailak dituzten aldaketak era grafiko batetan irudikatzea. Irudikatze honetan, abzisek sekzioaren posizioa adierazten dute eta ordenatuek sekzioarengan diharduten momentu makurtzailearen eta indar ebakitzailaren balioak, balio positiboak ardatz horizontalaren gainean ipiniz eta negatiboak azpian.

Irudikapen grafiko hauei, momentu makurtzaileen diagrama eta indar ebakitzailaren diagrama derizte. Har dezagun adibidez,  $P$  karge isolatu bat jasaten duen habe soilki bermatu bat (61.irudia)\*. Erreakzioak honako hauek dira kasu honetan:

$$R_1 = \frac{P \cdot b}{l} \quad \text{eta} \quad R_2 = \frac{P \cdot a}{l}$$

\* Soiltasunagatik, berme higikorretako arrabolak ez dira marraztu irudi honetan eta hurrengoan



58. Irudia.

P-ren ezkerretara mn sekzio bat hartuz, beronentzako

$$V = \frac{P \cdot b}{1} \quad \text{eta} \quad M = \frac{P \cdot b}{1} \cdot x \quad (a)$$

Indar ebakitzailleak eta momentu makurtzaileak, 55(a) eta 56(a).irudietako norantza berbera dute, beraz positiboak dira. Garbi ikusten da, indar ebakitzailleak konstante dirauela kargaren ezkerretan lekuturiko habe-zatian zehar eta momentu makurtzailea x-ekiko proportzionalki aldatzen dela.

$x=0$ -rentzat, momentua nulua da eta  $x=a$ -rentzat, hots, karga aplikatzen deneko sekzioarentzat, momentuak  $P \cdot a \cdot b$  balio du. Indar ebakitzaille- eta momentu 1 makurtzaile-diagrametan dagozkien zatiak 58(b). eta 58(c).irudietan ikusten dira eta ac eta a c lerroak dira. Kargaren eskuinean lekututako sekzio batentzat, honako hauek dirateke balioak:

$$V = \frac{P \cdot b}{1} - P = - \frac{P \cdot a}{1} \quad \text{eta} \quad M = \frac{P \cdot b}{1} \cdot x - P(x-a) \quad (b)$$

x beti ere, habearen ezkerreko muturrera dagoen distantzia delarik. Indar ebakitzaillea habearen zati honetan, konstante eta negatibo mantentzen da. 58(b).irudian, cb lerroak irudikatzen du indar hau, x ardatzarekiko paralelo mantentzen delarik. Momentu makurtzailea x-en funtzio lineala da,  $x=a$ -rentzako  $\frac{Pab}{1}$  balio duelarik eta  $x=l$ -rentzako nulua izanik. Beti positibo mantentzen da eta kargaren eskuinaldeko habe-zatian zehar duen aldaketa,  $c_1b_1$  lerroak irudikaturik dago. 58(b).irudiko acc'b eta  $a_1c_1b$  lerro hautsiek, indar ebakitzaille eta mo-

mentu makurtzaileen diagramak irudikatzen dituzte habearen luzera guztian zehar.

P kargaren aplikazio-puntuan, jauzi bortitz bat agertzen da indar ebakitzzailearen balioan,  $\frac{P_b}{l}$  positibotik  $-\frac{P_a}{l}$  negatibora eta aldaketa bortitz bat baita ere momentu makurtzaileen diagramarekiko tangentearen koefiziente angeluarrean.

Indar ebakitzzaile eta momentu makurtzailearentzat, (b) ekuazioak ondorioztatzerakoan,  $R_1$  eta P indarrak dihardute neko habearen ezker aldeko zatia hartu da kontutan. Kasu honetan errazago zatekeen  $\frac{P_a}{l}$  erreakzioak bakarrik dihardueneko ebakiduraren eskuineko habe-zatia kontutan hartzea. Prozedura hau jarraituz eta 55. eta 56. irudietan adierazitako zeinuen araua erabiliz, honako hau lortzen da:

$$V = -\frac{P_a}{l} \quad \text{eta} \quad M = \frac{P_a}{l} (1-x) \quad (c)$$

Lehen lortutako (b) ekuazioak ere, era horretan jar daitezke, baldin eta  $a=1-b$  dela kontutan hartzen bada.

Interesgarria da aipatzea, alegia, indar ebakitzzaileen diagrama, beren azalera berdina dituzten bi angeluzuzenez osatzen dela. Azalera horien aurkako zeinua kontutan hartuz, indar ebakitzzaileen diagramaren azalera totala nulua dela ondorioztatzen da. Emaitza hau ez da halabeharrezkoa. (50) ekuazioa integratuz, hau ateratzen da:

$$\int_A^B dM = \int_A^B V \cdot dx \quad (d)$$

non A eta B mugek, integrazioa habearen luzera guztian zehar hartzen dela adierazten baitute; A muturretik B-raino alegia. (d)-ko bigarren aldeak, indar ebakitzzaileen diagramaren azalera totala errepresentatzen du. Integratu ondoren, ekuazio bere bereko lehen aldeak, B eta A muturretako  $M_B - M_A$  momentu makurtzaileen arteko diferentzia ematen du. Soilki bermatutako habe baten kasuan, muturretako momentuak nuluak dira eta beraz, indar ebakitzzaileen diagramaren azalera totala ere bai. Habearen gan zenbait kargak badihardu (59. irudia) zenbait zatitan zatitzen da eta V eta M-ren espresioak bakoitzarentzat ezarri behar dira. x habearen ezkerreko muturretik neurtuz eta x  $a_1$  bai no hartuz, habearen lehen zatia errentzat, honako hau lortzen da:

$$V = R_1 \quad \text{eta} \quad M = R_1 \cdot x \quad (e)$$

Habearen bigarren zatiarentzat, hots,  $a_1 \times a_2$  baino-  
rentzat beste hau lortzen da:

$$V = R_1 - P_1 \quad \text{eta} \quad M = R_1 \cdot x - P_1 (x - a_1) \quad (f)$$

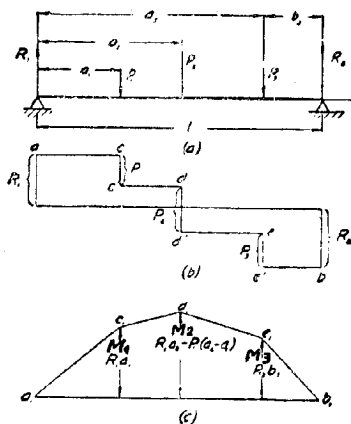
Habearen hirugarren zatiarentzat, hots  $a_2 \times a_3$  baino  
rentzat errazagoa da eskuineko zatia kontutan hartzea, ezkerre  
koa hartzea baino. Honela ateratzen da:

$$V = -(R_2 - R_3) \quad \text{eta} \quad M = R_2(1-x) - P_3(1-x-b_3) \quad (g)$$

Azkenik, habearen azkeneko zatiarentzat, hau atera-  
tzen da:

$$V = -R_2 ; \quad M = R_2(1-x) \quad (h)$$

(e)tik (h)rako ekuazioetatik ikusten denez, habearen  
zati bakoitzean indar ebakitzailleak 59(b).irudian adierazitako  
forma du. Habearen zati bakoitzeko momentu makurtzailea  $x$ -en  
funtzio lineala da eta honegatik, dagokion diagrama ere, lerro  
zuzen inklinatuz osaturik dago. Lerro hauek marrazteko, (e)  
eta (h)-k,  $x=0$  eta  $x=1$  dituzten muturrentzat, balio nuluak ema



59. Irudia.

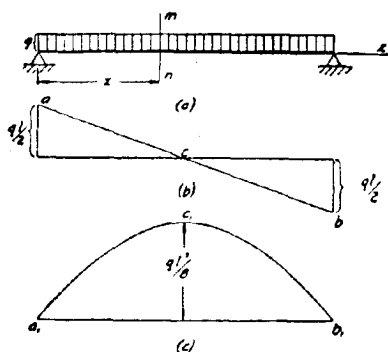
ten dituztela ikusten da. Kargen aplikazio-puntuetako momen-  
tuak, (e), (f) eta (h) ekuazioetan  $x=a_1$ ,  $x=a_2$  eta  $x=a_3$  balioak  
ordezkatzuz lortzen dira. Era honetan, puntu horientzat, honako  
momentu-balio hauek lortzen dira:

$$M_1 = R_1 \cdot a_1 ; \quad M_2 = R_1 \cdot a_2 - P_1 (a_2 - a_1) \quad \text{eta} \quad M_3 = R_2 \cdot b_3$$

Balio hauek jakinik, errazki marra daiteke momentu makurtzaileen diagrama -59(c).irudia)-.

Aplikazioetan oso garrantzitsua da momentu makurtzaileak balio maximo edo minimoa hartzen duen sekzioa zein den aurkitzea. Hartutako kasuan (59.irudia), momentu makurtzaile maximoa  $P_2$  kargarenpean gertatzen da. Karga honi, momentu makurtzaileen diagraman  $d_1$  puntua dagokio, non diagramaren inklinazioa zeinuz aldatzen baita. (50) ekuazioaren arabera, inklinazio hau, indar ebakitzaillearen berdina da. Beraz, momentu makurtzaileak bere balio maximo edo minimoak, indar ebakitzaillea zeinuz aldatzen den sekzioetan hartzen ditu.  $x$  ardatzean zehar higituz, indar ebakitzaillea balio positibotik negatibora aldatzen bada  $P_2$  kargaren aplikazio-puntuko sekzioan bezala (59.irudia), momentu makurtzailearen malda, positibotik negatibora aldatzen da baita ere. Hemendik ondorioztatzen da, alegia, sekzio hnetan agertzen dela momentu makurtzaile maximoa.  $V$  negatibotik positibora aldatzeak, sekzioari momentu makurtzaile minimoa dagokiola adierazten du. Kasu orokorrean, indar ebakitzaillearen diagramak, zenbait puntutan ebaki lezake ardatz horizontala. Ebakidura-puntu bakoitzari, maximo edo minimo bat dagokio momentu makurtzaileen diagraman. Maximo eta minimo guzti hauen zenbakizko balioak kalkulatu egin behar dira puntu guztietan zenbakiei dagokienez handiena aurkitzeko, hau izango baita maximoa.

Kontutan har dezagun orain berdinbanatutako karga baten kasua (60.irudia). Aurrez esanaren arabera (54.irudiaren inguruan), ezkerreko bermapuntutik  $x$  distantziara den sekzio



60. Irudia.

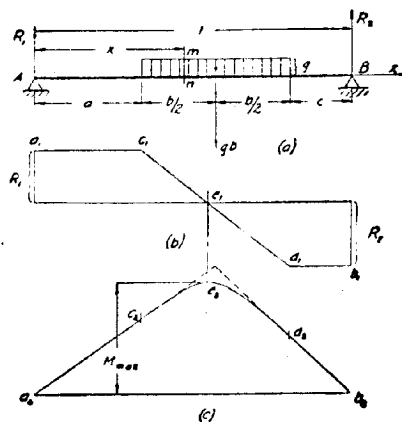
batentzat, honako hau dugu:

$$V = q \left( \frac{l}{2} - x \right) \quad \text{eta} \quad M = \frac{qx}{2} (l-x) \quad (i)$$

Ikusten da beraz, indar ebakitzzaileen diagrama, kasu honetan lerro inklinatua dela, beraren ordenatuak  $x=0$  eta  $x=l$ -rentzat  $\frac{ql}{2}$  eta  $-\frac{ql}{2}$  direlarik -60(b).irudia-. (i) ekuazio tik ondorioztatzen da, momentu makurtzaileen diagrama, kurba paraboliko bat dela kasu honetan, bere ardatza bertikala izanik eta baoaren zentrutik iraganik -60(c).irudia-. Bermagunee-tako momentuak, hots  $x=0$  eta  $x=l$  direnean, nuluak dira eta mo-mentuen balio maximoa, baoaren edo argiaren erdigunean ematen da, indar ebakitzzailea zeinuz aldatzen den lekuan hain zuzen ere. Maximo hau (i) ekuazioan  $x = \frac{l}{2}$  balioa ordezkatzuz lor-tzen da eta honako hau ematen du:

$$M_{\max} = \frac{ql^2}{8}$$

Karga berdinbanatuak argiaren edo baoaren zati bat bakarrik estaltzen badu (61.irudia),  $a, b$  eta  $c$  luzeradun habea ren hiru zati har ditzakegu kontutan.



61. Irudia.

$R_1$  eta  $R_2$  erreakzioak kalkulatzeko, berdinbanatutako karga bere  $qb$  erresultanteaz ordezkatzuko dugu. Estatikako mo-mentu-ekuazioetatik A eta B-rekiko erlaziodunak harturik, hona ko hauek lortzen dira:

$$R_1 = \frac{qb}{1} \left( c + \frac{b}{2} \right) \quad \text{eta} \quad R_2 = \frac{qb}{1} \left( a + \frac{b}{2} \right)$$



Habearen ezkerreko zatiarentzat ( $0 \leq x \leq a$  baino), indar ebakitzaila eta momentu makurtzaila, honako hauek dira:

$$V = R_1 \quad \text{eta} \quad M = R_1 \cdot x \quad (j)$$

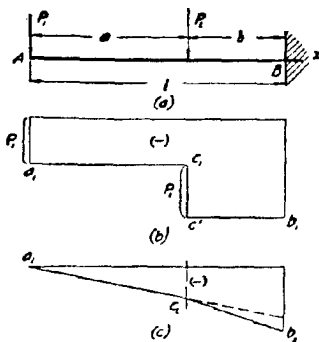
Habearen zati kargatua hautatutako  $mn$  sekzio baten-tzat, indar ebakitzaila, ezkerreko  $q(x-a)$  karga  $R_1$  erreakzioa-ri kenduz lortzen da. Sekzio berari dagokion momentu makurtzai-lea berriz, sekzioaren ezkerreko kargaren momentua  $R_1$  erreak-zioaren momentuari kenduz lortzen da. Era honetan:

$$V = R_1 - q(x-a) \quad \text{eta} \quad M = R_1 \cdot x - q(x-a) \cdot \frac{x-a}{2} \quad (k)$$

Habearen eskuineko zatiarentzat berriz, sekzioaren eskuineko indarrak kontutan hartuz, honako hau ateratzen da:

$$V = -R_2 \quad \text{eta} \quad M = R_2 (l-x) \quad (l)$$

(j), (k) eta (l) ekuazioen bidez, errazki marra dai-tezke indar ebakitzailen eta momentu makurtzailen diagramak. Indar ebakitzailen diagramak, -61(b).irudia-  $a_1c_1$  eta  $d_1b_1$  zati horizontalak ditu habearen zati deskargatuei dagozkienak eta  $c_2d_2$  ardatz bertikaldun kurba parabolikoa habearen zati kargatuari dagokiona. Momentu makurtzaila maximoa  $e_2$  puntuan agertzen da eta indar ebakitzaila zeinuz aldatzen den  $e_1$  pun-tuari dagokio.  $c_2$  eta  $d_2$  puntuetan, parabola  $a_2c_2$  eta  $d_2b_2$  le-rrero inklinatuak ukutzaila da. Hau, indar ebakitzailen dia-gramako  $c$  eta  $d$  puntuetan indar ebakitzailaren balioan alda-keta bortitzi ez izatetik ondorioztatzen da; beraz, (50) eku-a-zioaren bidez,  $e$  eta  $d$  puntuei dagokien momentu makurtzai-len diagramako maldaren balioetan ezinezkoa da aldaketa borti-zki izatea.



62, Irudia

Mentsula baten kasuan (62.irudia), metodo berbera eragiltzen da indar ebakitzailen eta momentu makurtzai-len diagramak marrazteko. Habearen ezkerreko muturretik  $x$  distantzia neurtuz eta  $P_2$  kargaren ezkerreko zatia kontutan hartuz ( $0 \leq x \leq a$  baino), honako hau lortzen da:

$$V = -P_1 \quad \text{eta} \quad M = -P_1 \cdot x$$

Ekuazio hauetako minus zeinua, 55(b) eta 56(b).irudietan adierazitako

zeinuen arauetik irten egiten da. Aipatu kargaren eskuineko zatia-erentzat ( $a \times 1$  baino) honako hau lortzen da:

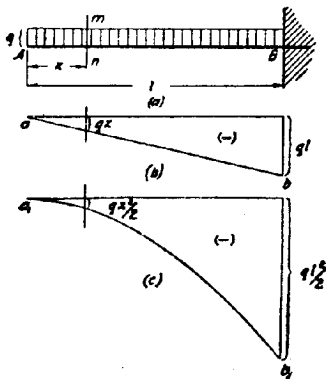
$$V = -P_1 - P_2 \quad \text{eta} \quad M = -P_1 x - P_2 (x-a)$$

Indar ebakitzaille eta momentu makurtzaileei dagozkien diagramak, 65(b) eta 65(c).irudietan ikusten dira.

Indar ebakitzailleen diagramaren azalera totala ez da nulua kasu honetan eta  $-P_1 l - P_2 b$  balioa du, hau da,  $M$  momentu makurtzaileak habearen B muturrean balio duena. Momentu makurtzaileen diagramak bi lerro inklinatu ditu  $a_2 c_2$  eta  $c_2 b_2$  eta berorien maldak, mentsulari dagozkion zatietako indar ebakitzailleen balioen berdina dira. Momentu makurtzaile maximoa, zenbakizko balioari dagokionez, habearen B mutur landatuan ematen da. Mentsula batek karga berdinbanatua jasaten badu (66. irudia), ezkerreko muturretik  $x$  distantziara dituen indar ebakitzaillea eta momentu makurtzailea, honako hauek dira:

$$V = -qx \quad \text{eta} \quad M = -qx \cdot \frac{x}{2} = -q \frac{x^2}{2}$$

Indar ebakitzailleen diagrama  $ab$  lerro zuzen inklinatua da eta momentu makurtzaileen berriz,  $a_1 b_1$  ardatz bertikal

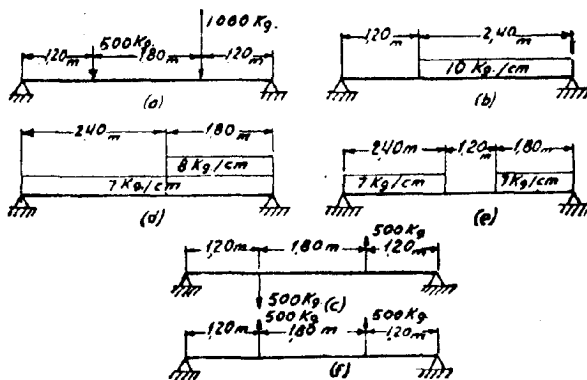


66. Irudia.

edozein sekzioerentzako momentu makurtzailea, 62(c) eta 63(c). irudietan irudikatutako diagramak dagozkien ordenatuak batuz lortzen da, hots elkar gainjarritik.

### ARIKETAK.

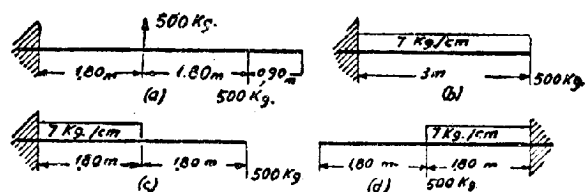
3.1.- Marraztu gutxi gorabeherako eskalan, 64.irudiko habeei dagozkien indar ebakitzaille eta momentu makurtzaileen diagramak. Akota diagrama horietan indar ebakitzaille eta momentu makurtzailearen balio maximoak, nola positiboak hala negatiboak.



64.Irudia.

Soluzioak:

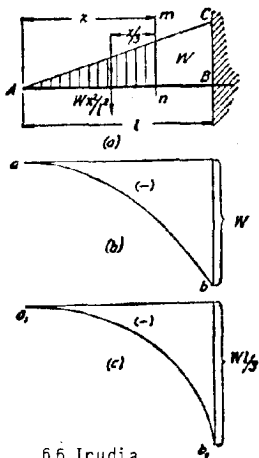
3.2.- Aurreko ariketako gauza berberak marratu eta kalkulatu  
65.irudiko habeentzat.



65.Irudia.

Soluzioak:

3.3.- Mentsula bat  $W$  karga totalak banaturik duen ihardunen pear dago, ezkerreko muturretik eskuineko muturreko lantapenera  $AC$  lerro zuzen inklinatuaren arabera -66(a).irudia- zerotik balio maximora doalarik. Marraztu itzazu indar ebakitzaille eta momentu makurtzaileen diagramak.



Soluzioa:

$mn$  sekzioan mentsularen ezkerreko muturretik  $x$  distantziara duen indar ebakitzaillea, marraduradun karga-zatiaren berdina da zenbaki-balioari dagokionez. Karga osoak  $W$  balio duenez eta  $ACB$  triangeluak irudikaturik dagoenez, marraduradun zatia,

$$\frac{Wx^2}{l^2}$$

balioduna da. Lehenago onartuta ko zeinuen arauarengatik (56. irudia), honako hau lortzen da:

$$V = -W \frac{x^2}{l^2}$$

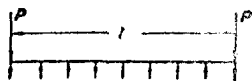
Indar ebakitzaille diagrama, 66(b).irudian  $a$  punturik iragaten den ardatz bertikaldun  $ab$  parabolak irudikaturik dago.  $mn$  sekzioko momentu makurtzailea,  $mn$  sekzioaren grabitate-zentruarekiko marraduradun karga-zatiaren momentua kalkulatuaz lortzen da:

$$M = -W \frac{x^2}{l^2} \cdot \frac{x}{3}$$

Momentu hau, 66(c).irudiko  $a_1 b_1$  kurbak irudikaturik dago.

3.4.-  $l$  luzeradun habe batek, bere luzera guztian berdinbanaturik bermetuak, bere bi muturretan bi  $P$  karga berdin jaseten ditu (67.irudia). Marraztu indar ebakitzaille eta momentu makurtzaileen diagramak.

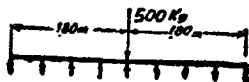
Soluzioa:



67. Irudia.

- 3.5.- 1 luzeradun habe batek, bere luzera guztian berdinbanatu rik bermatuak,  $P=500$  kgko karga bildu bat jasaten du erdi-erdian (68.irudia). Kalkula momentu makurtzaile maximoaren zenbakizko balioa. Marraztu indar ebakitzaille eta momentu makurtzaileen diagramak.

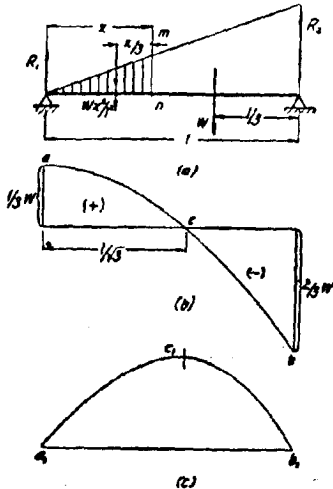
Soluzioa:



68. Irudia.

3.6.- 1 luzeradun soilki bermetutako habe batek,  $W$  karga total banatua jasaten du, baina berorren intentsitatea 69(a) irudiak adierazten duen eran (triangeluarki) ugaltzen da ezkerreko muturrean zerotik hasirik. Marraztu eskalan indar ebakitzaille eta momentu makurtzaileen diagramak,  $W=6000$  kg bada eta  $l=7,20$ m.

Soluzioa:



69. Irudia.

Soluzioa:

Kasu honetan, hauek dira bermaguneetako erreakzioak:

$$R_1 = \frac{1}{3} W = 2000 \text{ kg}$$

eta

$$R_2 = 4000 \text{ kg}$$

mn sekzioko indar ebakitzaillea,  $R_1$  erreakzioari kargaren marrazduradun zatia kenduz lortzen da. Beraz,

$$V = R_1 - W \frac{x^2}{l^2} = W \left( \frac{1}{3} - \frac{x^2}{l^2} \right)$$

Indar ebakitzaillearen diagrama 69(b).irudiko acb kurba parabolikoa da. mn sekzioko momentu makurtzailea honako hau da:

$$M = R_1 \cdot x - W \frac{x^2}{l^2} \cdot \frac{x}{3}$$

Momentuaren balio aldakor hauek, 69(c).irudiko  $a_1$   $c_1$   $b_1$  kurbak irudikaturik daude. Momentu makurtzailerik handiena,  $c_1$  ean gertatzen da, non indar ebakitzaillea, zeinuz aldatzen baita  $x = \frac{l}{\sqrt{3}}$  -rentzat.

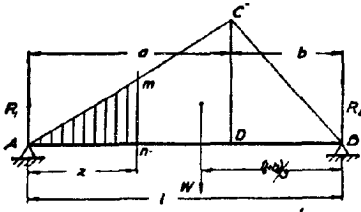
3.7.- Soilki bermatutako AB habe batek, karga banatuta jasaten du eta berorren intentsitatea, ACB triangeluak irudikatzen du (70.irudia). Aurkitu indar ebakitzaille eta momentu makurtzaileen ekuazioak mn sekzioarentzat.

Soluzioa:

$W$  karga totala ACB triangeluaren grabitate-zentruan apli

katua suposaturik, honako hauek dira bermaguneetako erreakzioak:

$$R_1 = W \frac{l+b}{3l} \quad \text{eta} \quad R_2 = W \frac{l+a}{3l}$$



70. Irudia.

Karga osoa ACD eta CBD triangeluek irudikaturikoetan bana daiteke bakoitzarenak  $\frac{Wa}{l}$  eta  $\frac{Wb}{l}$  balioko duelarik. Marraduradun zatiaren kargak

$$W \cdot \frac{a}{l} \cdot \frac{x^2}{a^2} = W \cdot \frac{x^2}{al}$$

balio du. mn sekzioko indar eba kitzailea eta momentu makurtzailea, honako hauek izango dira beraz:

$$V = R_1 - W \frac{x^2}{al} \quad \text{eta} \quad M = R_1 \cdot x - W \frac{x^2}{al} \cdot \frac{x}{3}$$

Era berean ondorioztatzen dira habearen DB zatiko edozein sekziari dagokion indar ebakitzaiaren eta momentu makurtzaileen ekuazioak.

- 3.8.- Kalkulatu aurreko ariketako  $M_{\max}$  baldin eta  $l=3,60$  m  $b=0,9$  m eta  $W=6000$  kg badira.

Soluzioa:

$$\text{Erantzuna: } M_{\max} = 3360 \text{ mkg}$$

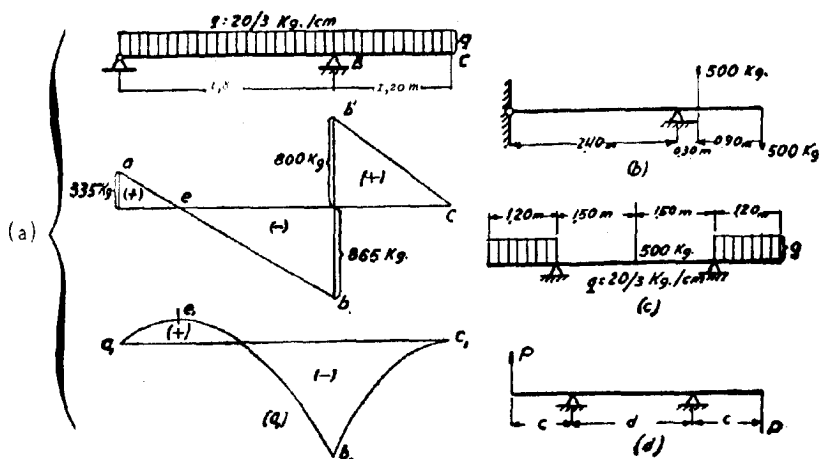
- 3.9.- Marraztu itzazu gutxi gorabeherako eskalan, 71.irudiko habe hegalkinetako indar ebakitzaille eta momentu makurtzaileen diagramak eta akota itzazu bertan balio maximo positibo eta negatiboak.



Soluzioa:

(a) habearen soluzioa:

71(a).irudiko kasuan, erreakzioek 335 kg eta 1665 kg balio dute. Habearen ezker aldeko zatian  $V=335-60 \times$  balio du indar ebakitzaillearen ekuazioak. Irudian ab lerro zuzenaz irudikaturik dago. Habearen eskuinaldeko zatiarentzako, indar ebakitzaillearen ekuazioa, mentsula baten kasuan bezala aurkitzen da eta b'c lerro zuzen inklinatuaz irudikaturik dago. Hor duen balioa  $V=335+1665-60x = 2000-60 \times$  da.



71.Irudia.

Habearen ezker aldeko zatiarentzako momentu makurtzailearen ekuazioa  $M=335 \times -60 \frac{x^2}{2}$  da eta a,c,b parabolaz irudikaturik dago. Momentu maximoa e puntuan ematen da eta berori e puntuari dagokio, indar ebakitzaillea zeinuz aldatzen denari alegia. Eskuineko zatiarentzako, momentu makurtzaileen diagrama ere, mentsula batenaren kidekoa da eta b<sub>1</sub> c<sub>1</sub> parabolaz errepresentaturik dago c<sub>1</sub> ean ukitzaile delarik. Ekuazioa berriz honako hau du:

$$M = 335 x + 1665(x-1,8) - 60 \frac{x^2}{2}$$

Egitzazue 71.irudiko (b),(c) eta (d) habeak aurreko honen gisara.

3.10.- Bi hegalkin berdindun habe batek (72.irudia), berdinbanatutako karga bat jasaten du eta  $l$  luzera du. Kalkulatu bermaguneen arteko  $d$  distantzia, momentu makurtzailearen balioak, habearen erdi-erdian eta bermaguneetan berdinek izan daitezen. Marraztu indar ebakitzaille eta momentu makurtzaileen diagramak kasu honentzat.

Soluzioa:



72.Irudia.

Erantzuna:  $d = 0,586 l$ .