



IEI udako
euskal
unibertsitatea

IRUÑEA 1984

EUSKO JAURLARITZAREN LAGUNTZAZ

Jabegoa: U.E.U.ko FISIKA Saila

Lege-gordailua: BI-724-1984

ISBN: 84-398-1683-9

Inprimategia: BOAN, S.A.

**FISIKA SAILEKO
EKITALDIAK
1983. urtea**

HITZAURREA

Udako Euskal Unibertsitateko 1983. urteko ekitaldiak bukatu ondoren eta hurrengo urterakoak prestatzen hasi aurretik, interesgarri ikusi genuen, bertan emandako hitzaldiak argitaratzea, honetan bi helburu jarririk: Batetik, UEU barrutik ezagutzeko dokumentu berezia gordetzea, eta bestetik, Unibertsitateko oinarritzko bibliografia euskalduna osotuz joatea, bertako irakastaldietarako testu osagarrien laguntza eskainiz.

Ohitura dugun legez, talde-lanaren emaitza duzu liburu hau. Hain guzuzen, azkenengo urteotan, UEUko Fisika Saileko lanen prestaketa dela eta, mintegi bat burutzen dugu astero Leioako Zientzi Fakultatean. Mintegi horretan banan-banan aztertutako eta eztabaidatu ditugu hemen agertzen diren gaiak, beraien azken idazkera erabaki aurretik. Mintegiko partaideak lan egileak izan dira, hots José Ramón Etxebarria, Oskar Ezenarro, Imanol Mazarredo, Jose Mari Pitarke, eta Patxi Ugalde.

Horretaz gainera, lan hauek makinarratu dituen Maite Atxikallende idazkariaren aipamen berezia egin behar da eta halaber berak lan egiten dueneko Euskal Herriko Unibertsitateko Euskarazako Kabinete Teknikoak eskaini digun laguntzarena. Formulen idazketa eta inudien marrazketa José Ramón Etxebarriaren kontura joan da eta azaleko inudiaren egilea Martxel Ensunza da.

Leioa, 1984.eko Apirilaren 13an.

AURKIBIDEA

I.- Erlatibitatearen Teoria.....	1
- Momentu linealaren kontserbazioaren eta energia- ren kontserbazioaren arteko erlazioa. J. R. ETXEBARRIA.....	3
- Seinale-abiaduren mugak. P. UGALDE.....	17
- Aldibereketasunaren erlatibotasunarekin loturiko zenbait problema. O. EZENARRO.....	25
- Paralelotasunaren erlatibotasuna. J. R. ETXEBARRIA	39
- Bikien paradoxa. J. M. PJTARKE.....	55
- Takioiak. J. M. PJTARKE.....	77
II.- Erlatibitatea eta Elektromagnetika.....	87
- Erlatibitatea eta Elektromagnetika: E eta B bektoreen transformazioa. J. R. ETXEBARRIA.....	89
- Maxwell-en ekuazioen aldaezintasuna. J. M. PJTARKE	103
III.- Mekanika Teorikoa.....	129
- Dinamikaren oinarritzko formulazio baliokideak. J. R. ETXEBARRIA.....	131
- Traupen-legeak. J. MAZARREDO.....	153
- Sistema eta eremu jarrak. O. EZENARRO.....	179
- Mekanika Klasikotik abiatuz. J. MAZARREDO.....	201

I. ERLATIBITATEAREN TEORIA



MOMENTU LINEALAREN KONTSERBAZIOAREN
ETA ENERGIAREN KONTSERBAZIOAREN
ARTEKO ERLAZIOA

J.R. Etxebarria

MOMENTU LINEALAREN KONTSERBAZIOAREN ETA ENERGIAREN

KONTSERBAZIOAREN ARTEKO ERLAZIOA

- Ikuspuntu ez-erlatibista
- Ikuspuntu erlatibista
- Oharrak
- Bibliografia

MOMENTU LINEALAREN KONTSERBAZIOAREN

ETA ENERGIAREN KONTSERBAZIOAREN

ARTEKO ERLAZIOA

Aspaldidanik ezaguna da, bi kontserbazio-printzipio hauek duten garrantzia eta, izan ere, Mekanikaren formulazioaren oinarri-oinarrian aurkitzen ditugu. Baina zein ote da bien arteko erlazioa, baldin eta elkarrekin zerikusirik badute? Ala elkarren independenteak ote dira?

Gauzak ez dira modu berean agertzen Mekanika ez-erlatibistan eta Erlatibitatearen Teoriaren barnean.

Has gaitezen Mekanika ez-erlatibistaren kasuarekin. Dakigunez, partikula-sistemen dinamikan, inertzi sistema bate-tatik behatuz, sistema isolatuen kasuan bete egiten da momentu linealaren kontserbazioaren printzipioa. Barne-interakzioak ez du inolako eraginik printzipio honetan eta, egon zein egon ez, sistemaren momentu lineala kontserbatu egiten da.

Energiaren kontserbazioaren kasuan, arazoa pixka bat gehiago korapilatzen da, energia zinetikoa kontsideratzean behintzat. Ez da nahikoa sistema isolatuak kontutan hartzea, barne-interakzioak ere eragina baitu, energia zinetikoan bere kontribuzioa emanik.

Ideiak bideratzeko asmoz, adibide klasiko bat hartuko dugu erreferentzia gisa, talken kasua alegia. Betidanik ezagutzen dugu talka elastiko eta ez-elastikoen arteko desberdintasuna. Bi partikularen arteko talka aztertzean, adibidez, sistema hori isolaturik dagoela jorik, baldin eta talka elastikoa bada, sistemaren momentu lineala eta energia zinetikoa kontserbatu egiten dira, hots, talka aurreko eta ondoko egoeretan balore berberak hartzen dituzte.

Mekanika klasiko ez-erlatibistaren ikuspuntutik, energia zinetikoa kontserbatu egiten da prozesuan zehar edo, bestela esanda, talkan parte hartu duten barne-indarrak kontserbakorrak dira, edo elastikoak.

Ostera, talka ez-elastikoaren kasuan, sistemaren momentu lineala kontserbatzen den arren, energia zinetikoa ez da kontserbatzen. Zergatik? Ba, nolabait esateko, barne-indarrak kontserbakorrak ez direlako; prozesuan zehar energia zinetikoa galdu (prozesu endoergikoa) edo irabazi (prozesu exoergikoa) egiten da. Bistan da, beste energi moten eraginez gertatzen dela hori, baina energia zinetikoa soilik hartzen denez, kontserbazio-printzipio horrek huts egiten du.

Dena den, Erlatibitatearen Teoriaren ikuspuntutik, masa eta energiaren arteko lotura kontutan hartzean, talka elastiko eta ez-elastikoen arteko desberdintasun hori desagertu egiten da.

Ikuspuntu ez-erlatibista.

Ikuspuntu honetatik, erlatibitatearen printzipioaren arauera, erreferentziazko inertzi sistema guztiak baliokideak dira lege fisikoak deskribitzeko eta sistema desberdinetako koordenatuak Galileo-ren transformazioen bidez erlazionatzen dira. Bestela esateko, lege fisikoen formulazioa aldaezina da Galileoren taldeko transformazioekiko.

Demagun, ba, horrelako bi sistema inertzial ditugula, S eta S' . Barne-interakziozko eremurik gabeko partikula-sistema isolatu bat kontsideratuko dugu eta, nahi izanez gero, denbora tarte batetan barne-interakzio gisako zerbait duela jo dezakegu ("talka" antzeko zerbait), gero barne-interakziorik gabeko beste egoera batera pasatzen dela jorik. Talka aurreko energia zinetikoa eta talka ondokoa berdinak direla kontsideratuko dugu, hots, energia zinetikoa kontserbatu egiten dela. Zer esanik ez, bi inertzi sistemetan kontserbatuko da.

S sisteman:

$$\sum_{i=1}^N \left(\frac{1}{2} m_i v_i^2 \right) = \text{Konstantea} \quad (1)$$

S' sisteman:

$$\sum_{i=1}^N \left(\frac{1}{2} m_i v_i'^2 \right) = \text{Konstantea} \quad (2)$$

Demagun S' sistema $\vec{u}$ abiaduraz higitzen ari dela S sistematikiko ($\vec{u} = k^{te}$, noski). Galileoren transformazioaren arauera:

$$\vec{v}_i' = \vec{v}_i - \vec{u} \quad (3)$$

Beraz, (2) adierazpena eramanez:

$$\sum_{i=1}^N \left[\frac{1}{2} m_i (\vec{v}_i - \vec{u})^2 \right] = k^{te} \quad (4)$$

edo

$$\sum_{i=1}^N \left(\frac{1}{2} m_i v_i^2 \right) - \sum_{i=1}^N \left(m_i \vec{v}_i \cdot \vec{u} \right) + \sum_{i=1}^N \left(\frac{1}{2} m_i u^2 \right) = k^{te} \quad (5)$$

Aldez aurretik konstante diren terminoak kenduz:

$$\sum_{i=1}^N \left(m_i \vec{v}_i \cdot \vec{u} \right) = k^{te} \quad (6)$$

$\vec{u} = k^{te}$ eta batugai guztietan berbera dela kontutan hartuz

$$\left(\sum_{i=1}^N m_i \vec{v}_i \right) \cdot \vec{u} = k^{te} \quad (7)$$

Ez da ahantzi behar, hemen erabilitako $\vec{u}$ delako hori edozein izan daitekeena, Galileoren edozein transformazio hartu baitugu, hots, S eta S' edozein bi sistema izan baitira.

Orain bi aldiune hartuko ditugu S sisteman, hasierako aldiunea (has) eta bukaerako aldiunea (buk) deituko ditugunak.
(7) adierazpena honela idatz dezakegu:

$$\left[\sum_{i=1}^N (m_i \vec{v}_i) \right]_{has} \cdot \vec{u} = \left[\sum_{i=1}^N (m_i \vec{v}_i) \right]_{buk} \cdot \vec{u} \quad (8)$$

berau edozein $\vec{u}$ abiaduraren kasuan betetzen delarik. Ondorioz:

$$\left[\sum_{i=1}^N (m_i \vec{v}_i) \right]_{has} = \left[\sum_{i=1}^N (m_i \vec{v}_i) \right]_{buk} \quad (9)$$

Baina hau momentu linealaren kontserbazioaren adierazpena besterik ez da. Argi ikusten da, beraz, kasu honetan energia zinetikoaren kontserbazioak momentu linealarena halabehartzen duela. Dena den, ezin dugu alderantziz egin, hots, momentu linealaren kontserbazioak ez dakar halabeharrez energia zinetikoarena, talka ez-elastikoen kasuan gertatzen den bezala.

Ikuspuntu erlatibista.

Kasu honetan ere inertzi sistema guztiak baliokideak dira lege fisikoak deskribitzeko, baina sistemaz aldatzean Lorentzen transformazioa erabili behar da.

Demagun Minkowski-ren espazioan gabiltzala. Bertako koordenatu-sistema hauxe da:

$$\begin{aligned} x^0 &= ct \\ x^1 &= x & x^2 &= y & x^3 &= z \end{aligned} \quad (10)$$

eta metrika hau du:

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 \quad (11)$$

hau da, honelakoa da g matrizea:

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (12)$$

Dakigunez, espazio horretan tetrabektore batzu kontsidera ditzakegu eta horien artean tetrabiadura eta tetramomentua ondoko eran definiturik:

$$\text{tetrabiadura: } u^\mu \equiv \frac{dx^\mu}{ds} \quad (13)$$

$$\text{tetramomentua: } p^\mu \equiv m c u^\mu \quad (14)$$

Hemen m delakoa pausaguneko masa izenaz ezagutzen den magnitudea da, tetramomentuaren moduluarekin honela erlazionaturik dagoelarik:

$$p^\mu p_\mu = m^2 c^2 \quad (15)$$

Egingo ditugun arrazonamenduetarako, interesgarria da tetramomentuaren osagaien balorea adieraztea:

$$p^0 = \frac{E}{c} \quad (16)$$

$$p^i = \frac{m v^i}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (17)$$

Noski, balore horik partikula bakar baten kasuari dagozkio, E delakoa partikularene energia eta v^i abiaduraren osagai tridimentsionalak izanik. Ikusten denez, osagai denboralak lotura handia du partikularene energiarekin eta horregatik tetrabektore honi bulkada-energia tetrabektorea deritzo. Ikus dezagun, nola transformatzen den erreferentzia azko inertzi sistemen aldaketa batetan.

Kalkuluak errazteko, kasurik orokorrena hartu ordez, x ardatzaren direkzioa duen, S eta S' sistemen arteko Lorentzen bultzada (boost) bat hartuko dugu:

$$p^{\mu'} = L^{\mu'}_{\nu} p^{\nu} \quad (18)$$

edo garaturik idatziz:

$$\begin{pmatrix} p^{0'} \\ p^{1'} \\ p^{2'} \\ p^{3'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p^0 \\ p^1 \\ p^2 \\ p^3 \end{pmatrix} \quad (19)$$

osagaiei dagokienez:

$$p^{0'} = \gamma (p^0 - \beta p^1) \quad (20)$$

$$p^{1'} = \gamma (p^1 - \beta p^0) \quad (21)$$

$$p^{2'} = p^2 \quad (22)$$

$$p^{3'} = p^3 \quad (23)$$

Adierazpen hauetan γ delakoa S eta S' sistema inertzia leri arteko abiadura erlatiboari (u) dagokiona da $\left(\gamma = (1 - u^2/c^2)^{-1/2} \right)$ eta gauza bera gertatzen da β horrekin $\left(\beta = \frac{u}{c} \right)$. Honelatan,

$p^0 = E/c$ dela kontutan hartuz, honela idatz ditzakegu aurreko adierazpenak, koordenatu cartesianetan:

$$E' = \gamma (E - u p_x) \quad (24)$$

$$p'_x = \gamma (p_x - \frac{u}{c^2} E) \quad (25)$$

$$p'_y = p_y \quad (26)$$

$$p'_z = p_z \quad (27)$$

Ikusten denez, transformazio-ekuazio hauk linealak dira bai energiari eta bai momentu linealaren osagaiei dagokienez. Beraz, partikula-sistema baten kasuan (barne-interakziorik gabe) energia eta momentu lineala honela definituz (bakoitza bere sistemako aldebereketasunez)

$$E = \sum_{i=1}^N E_i \quad (28)$$

$$\vec{P} = \sum_{i=1}^N \vec{P}_i \quad (29)$$

aurreko (24)→(27) adierazpenek partikula-sistema osoarentzat ere balio dute:

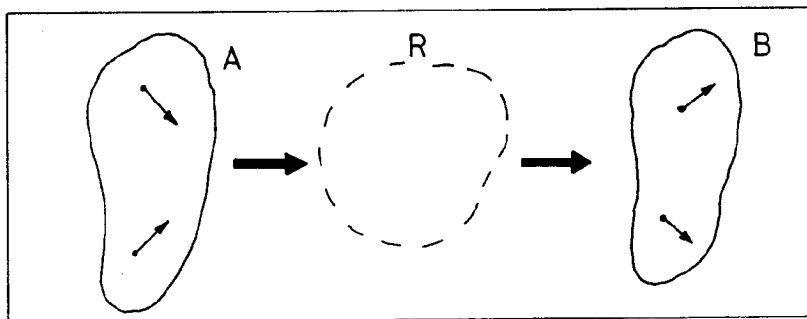
$$E' = \gamma (E - u P_x) \quad (30)$$

$$P'_x = \gamma (P_x - \frac{u}{c^2} E) \quad (31)$$

$$P'_y = P_y \quad (32)$$

$$P'_z = P_z \quad (33)$$

Demagun ondoko prozesua gertatzen dela. A egoeran partikula-sistema barne-interakziorik gabeko sistema isolatua da. R espazioaldean "talka" gisa jo daitekeen prozesu bat gertatzen da eta "talka" horren ondoren B egoerara pasatzen da, berau ere barne-interakziorik gabeko sistema isolatutzat har daitekeelarik.



S inertzi sistematik S' sistemara pasatzean, $\vec{P}_A$, $\vec{P}_B$, E_A , E_B magnitudeak (30) $\rightarrow$ (33) ekuazio berberaz transformatzen dira. Beraz, talkaren aurreko eta ondoko egoeren arteko momentu linealaren eta energiaren aldaketak kontsideratuz $\Delta \vec{P} = \vec{P}_B - \vec{P}_A$ eta $\Delta E = E_B - E_A$:

$$\Delta E' = \gamma (\Delta E - u \Delta P_x) \quad (34)$$

$$\Delta P'_x = \gamma (\Delta P_x - \frac{u}{c^2} \Delta E) \quad (35)$$

$$\Delta P'_y = \Delta P_y \quad (36)$$

$$\Delta P'_z = \Delta P_z \quad (37)$$

Transformazio-ekuazio hauk oinarritzat hartuz, kontserbazio-printzipioei buruzko gorabeherak aztertzen hasiko gara.

a) Demagun "talka" prozesu horretan momentu lineala kontserbatu egiten dela. Hori, noski, edozein inertzi sistematik beteko da:

$$\Delta \vec{P} = 0 \quad (38)$$

$$\Delta \vec{P}' = 0 \quad (39)$$

hots:

$$\vec{P} = kte \quad (40)$$

$$\vec{P}' = kte \quad (40')$$

Hori horrela bada, (35) ekuaziotik $\Delta E = 0$ dela ikus-
ten da

$$E = Kte \quad (41)$$

eta (34) ekuaziotik:

$$E' = Kte \quad (42)$$

Hau da, momentu linealaren kontserbaziotik, energiare-
na ondorioztatzen da.

b) Alderantziz eginik, inertzi sistema guztietan ener-
gia kontserbatzen dela joaz,

$$\Delta E = 0 \quad \Delta E' = 0 \quad (43)$$

(34) ekuaziotik:

$$\Delta P_x = 0 \quad (44)$$

eta (35) ekuaziotik:

$$\Delta P'_x = 0 \quad (45)$$

Hots, momentu lineala ere kontserbatu egiten da (kontu-
tan har, x ardatzaren aukera guztiz arbitrarioa izan dela).

Beraz, aurreko arrazonamenduetan azaldu denez, ikuspun-
tu erlatibistaren kasuan, momentu linealaren kontserbazioak ener-
giarena halabehartzen du eta, alderantziz, energiaren kontserba-
zioak, momentu linealarena. Honela ikuspuntu ez-erlatibistan ager-
tzen zen "asimetria" desagertu egiten da.

OHARRAK:

1.- Interesgarria da arazo honen erreferentzia historikoa egitea. Newton bizi zen aldian, eztabaida bizia egon zen, talketan kontserbatzen ziren magnitudeei buruz. Batzu Descartes-en eritzikoaak ziren, talketan momentu lineala (Descartesek "higidura-kantitatea" deitua kontserbatzen zela pentsatuz. Beste batzu Leibniz-en eritzikoaak ziren, talketan energia zinetikoa (Leibnizek "vis viva" deitua) kontserbatzen zela usterik. Dena den, tarteetan oker baten kausaz nahiko nahasirik zegoen eztabaida, momentu linealaren definiziorako $m|\vec{v}|$ magnitude eskalarra hartzen baitzuten, $m\vec{v}$ hartu ordez. Oker hau eztabaidaren azken partean zuzendu zen. Eta eztabaida talka elastiko eta ez-elastikoen banaketarekin bukatu zen.

2.- Mekanika ez-erlatibistan energiaren kontserbaziotik momentu linealarenera pasatzeko erabili dugun bidea, pasa den mendearen bukaera aldean E. Mach-ek erabilitakoa da, The Science of Mechanics (1893) liburuan, nahiz eta berak J.R. Schütz aipatzen duen.

3.- Fisikaren pedagogiari dagokionez, oso interesgarria da, Erlatibitatearen Teoriaren barnean momentu linealaren eta energiaren artean dagoen lotura azpimarkatzea. Izatez, gauza berbera dira edo, nahi bada, tetrabektore ber baten osagaiak, dimentsio-ekuazioaren arazo txiki bat gorabehera, $p^0 = E/c$ baita.

4.- Antzerako zerbait gertatzen da, masa eta energiaren arteko loturari dagokionez. Mekanika ez-erlatibistan bi kontzeptu guztiz desberdinak dira eta bataren kontserbazioak (masarena beti betetzen da) ez du zerikusirik bestearen kontserbazioarekin. Mekanika erlatibistaren kasuan lotura handia eta zuzena dago masa eta energiaren artean, (15) adierazpenean ikusten denez, tetramentuaren modulua — aldaezin eskalarra — pausaguneko masarekin loturik baitago konstante bat tartean dela (c). Bestalde, masari dagokionez, energi mota guztiek dute beren kontribuzioa.

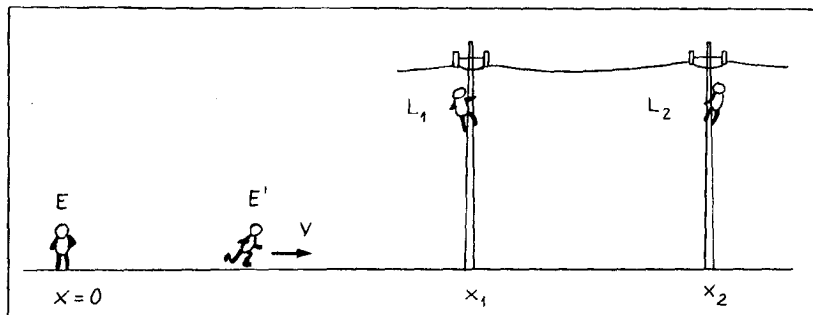
BIBLIOGRAFIA

- 1.- C.G. ADLER. "Connection Between Conservation of Energy and Conservation of Momentum". Am. J. Phys. 44, 483 (1976).
- 2.- R.A. MANN. "The Clasical Dynamics of Particles Galilean and Lorentz Relativity". Academic Press. New York (1974).
- 3.- Y.P. TERLETSKI. "Paradoxes in the Theory of Relativity. Plenum Press. New York (1968).
- 4.- A. SHADOWITZ. "Special Relativity", W.B. Saunders Company. Philadelphia (1968).

adibidean mota horretako gertaerak erabiliko ditugu:

2. adibidea:

L_1 eta L_2 lagunak langabezian dira eta aprobetan dihardute telefonikan lanpostuak lortzeko irriki bizian, E eta E' telefonikako enplegatuak kandidatuen trebetasuna kontrolatzen ari diren bitartean.



E enplegatuak aztertzen duenez, L_1 -k telefonoari t_1 aldiunean sakatzen dio, L_2 -k seinalea t_2 aldiunean entzuten duen larik. Dakusagun bi gertakizun horiek noiz jazotzen diren E' enplegatuaren ikuspuntutik, zeina v abiaduraz higitzen ari den. Hara:

$$t'_1 = \frac{t_1 - \frac{v}{c^2} x_1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$

$$t'_2 = \frac{t_2 - \frac{v}{c^2} x_2}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$

Adibide honetan, astronauten adibidean ez bezala, ezin diezaiokegu ($t_2 - t_1$) denbora-tarteari edo zer balore eman, oraingo gertaerak elkarrekin erlazionaturik baitaude eta, bistakoa denez, aipaturiko denbora-tarteak ($x_2 - x_1$) distantziaren eta halaber telefono-seinalearen abiaduraren dependentzia baitu. Hain zuzen ere, hau da erlazioa:

$$t_2 - t_1 = \frac{x_2 - x_1}{u}$$

u, kablean barrena telefono-seinaleak daraman abiadura izanik. Beraz, E'-ren erreferentzi sisteman igarotako denbora-tartea hauxe izango da:

$$t'_2 - t'_1 = \frac{(t_2 - t_1) - \frac{v}{c^2} u (t_2 - t_1)}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} = (t_2 - t_1) \frac{1 - \frac{v \cdot u}{c^2}}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$

E-ren ikuspuntutik $t_2 - t_1 > 0$ denez (lehen L_1 -k telefonoari sakatu dio eta gero L_2 -k seinalea entzun du), $t'_2 - t'_1 < 0$ desberdintasuna bete beharreen dago E'-rekiko sekuentzia denborala alderantzizkoa gerta dadin. Beraz:

$$\left. \begin{array}{l} t_2 - t_1 > 0 \\ (t_2 - t_1) \frac{1 - \frac{v \cdot u}{c^2}}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} < 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 1 - \frac{v \cdot u}{c^2} < 0 \Rightarrow u \cdot v > c^2$$

Bestaldetik, halabeharrez $v < c$ dela dakigunez gero, horrela gelditzen zaigu ezinbesteko baldintza:

$$u > c$$

Hots, baldintza hori betez gero E'-k zera ondorioztatu du, alegia, seinalearen jasoaldia bidalpena baino lehenagokoa izan dela. Hitz laburrez:

<<Kausalitate printzipioa zalantzan jarri ahal izateko, argia baino bizkorrago hedatzeko gauza den seinaleren bat suposatu behar da>>.

Gure adibidean seinalea korrante elektrikoaren bidez hedatu da eta, jakina denez, korrante elektrikoa ez da argia baino arinagoa. Beraz ez dago kezkatu beharrik, E'-k ez baitu ikusiko alderantziz gertaeren ordena. E'-ren sisteman nahiz E-ren sisteman, lehenbizian L_1 -k sakatu dio telefonoari eta geroago L_2 -k entzun du seinalea,* bi enplegatuek neurtzen duten

denbora-tarteak balore berekoak ez izan arren.

Kasu partikularretik orokorrera igaroz, argia baino agudoago hedatzen den inongo seinaleren berririk ez daukagula aitortu beharrean gaude. Dena dela, gure ezezagutza horrek ez du esan nahi, halako seinalerik ez denik, ondoan ikusiko dugu nez horixe suposatzea komeni bazaigu ere. Komenigarritasun ho ri dela eta, ondoko proposamena onartzen da postulatu gisa:

«Edozein seinaleren hedatze-abiaduraren muga, argia rena da».

Postulatu honen oinarria unibertsoaz dugun kontzeptuaren koherentzia mantendu ahal izatekotan datza. Zehazkiago, postulatu hau Termodinamikaren Bigarren Printzipioaren balio garritasuna gordetzearren inposatzen dela esan dezakegu. Horra hor zerk bultzatzen gaituen seinale guztien abiadurak mugaturik daudela suposatzea. Izan ere, une batez denbora "atzerantz" abiatzeko posibilitatea onartuko bagenu, zertan gelditu litzateke "prozesu itzulezin" delakoaren funtsa? Eta itzulezintasuna eztabaidan ipinita, zer arraio egin genezake, munduan jazotzen diren prozesu oro itzulezintzat jotzen ditugula kontutan harturik? Fisika berria asmatu beharko ote genuke, gaur egunerarte eraikitako egitura osoa goitik behera jaurtikiz? Ez du ematen merezi duenik. Askoz ere errezagoa da gauzak beren horietaz lagatzea, lehen aipatutako postulatura ontzat emanez... uhin elektromagnetikoak baino bizkorragoa den seinaleren bat aurkitu arte, bederen.



ALDIBEREKOTASUNAREN ERLATIBOTASUNAREKIN

LOTURIKO ZENBAIT PROBLEMA

O. Ezenarro

ALDIBEREKOTASUNAREN ERLATIBOTASUNAREKINLOTURIKO ZENBAIT PROBLEMA

- . Sarrera
- . Trenen problema bat
- . Suziri azeleratuaren problema bat
- . Bibliografia

ALDIBEREKOTASUNAREN ERLATIBOTASUNAREKIN LOTURIKO

ZENBAIT PROBLEMA

SARRERA.

Ugariak dira Erelatibitatearen Teoriaren barnean aldi-berekotasunaren erlatibotasunari loturik erabiltzen diren problemak. Zer esanik ez, honako honetan ez dut gauza berririk asmatuko, baina lantxo hau neurriei eta aldiberekotasunari dagozkien zenbait ideia argitzeko baliagarria bada, nire helbururik nagusia da beterrik eratuko da.

Lorentz-en transformazioaren gain, Minkowski-ren diagramak erabiliko ditut, ebazpen analitikoak zein geometrikoak lortzeko. Gainera, Minkowski-ren diagrametan Erelatibitatearen Teorian agertzen diren problemak, sarritan hobe ikusten direla uste dut.

1.- TRENEN PROBLEMA BAT.

Besterik esan gabe, pasa gaitezen gure lehenengo problemaren planteamendura: «Demagun trenbide zuzen batetan zehar v abiaduraz higitzen ari den L luzera propioa duen tren bat dugula. Trenbide horretan ℓ luzerazko tunel bat aurkitzen da, $\ell < L$ izanik. Problemaren promiaz, trenaren abiadura nahikoa da tunelaren gainean dagoen behatzaile batek haren luzera neurtzerakoan, $L' = \frac{L}{\gamma} < \ell$ dela neur dezan.

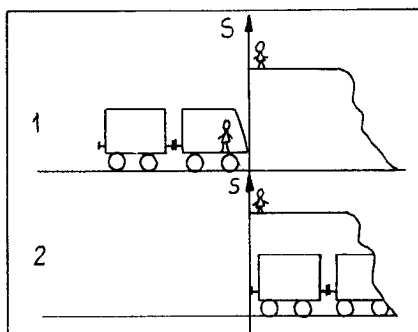
Tunelaren mutur bakoitzean ate bat dago. Tunelari loturik dagoen behatzailearekiko tren osoa barnean dagoenean, bapatean ate biak ixten ditu, trena tunel barnean gordeirik. Baina trenari loturik doan behatzailearekiko, tunelaren luzera $\ell' = \frac{\ell}{\gamma} < L$ da, eta beraren ikuspuntutik, besteak ezingo luke tren osoa tunel barnean gorde. Zer deritzozu behatzaile bien artean dagoen desakordioari?»

Has gaitezen problema hau aztertzen, Lorentz-en transformazioak direla medio.

Kontsidera ditzagun irudian ikusten diren gertaerak:

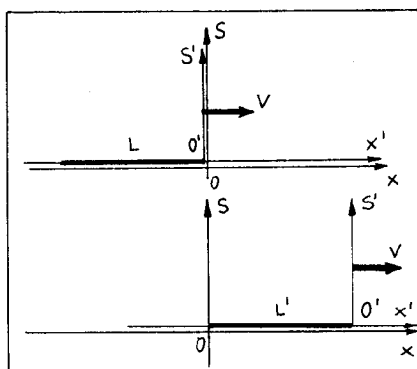
Lehenengoa: 1 Trenaren aurrekaldea tunelean sartzen ari denekoa.

Bigarrena: 2 Trenaren atzekaldea tunelean sartzen ari denekoa.



Behatzaile bien ikuspuntutik, honela adieraz ditzakegu gertaera bien koordinatu espazio-denboralak: (x, t) , (x', t') .

	S	S'
1	$(0, 0)$	$(0, 0)$
2	$(0, t)$	$(-L, t')$



Baina trenaren abiadura tunelean dagoen behatzailearekiko v denez, berak neurtuko dion luzera $L' = \frac{L}{\gamma}$ izango da. Beraz, zein denbora-tarte pasatuko da, behatzaile honen ikuspuntutik, trenaren atzekaldea tunelean sartu dadin, haren aurrekaldea sartu eta gero? Argi dagoenez, $t = \frac{L'}{v} = \frac{L}{\gamma v}$ izango da.

Lorentz-en transformazioa erabiliz, kalkula dezagun azken gertaera honi dagokion aldiunea, trenean doan behatzailearekiko. Sinpleki, hauxe da:

$$t' = \gamma \left(t - \frac{v}{c^2} x \right) = \gamma \left(\frac{L}{\gamma v} - \frac{v}{c^2} \cdot 0 \right) = \frac{L}{v}$$

Beraz, zera daukagu:

	S	S'
1	$(0, 0)$	$(0, 0)$
2	$(0, \frac{L}{\gamma v})$	$(-L, \frac{L}{v})$

Tunelean dagoen behatzaileak trenaren atzekaldearen sarrera neurtzen duenean, ate biak ixten ditu, bere sistemako aldiberekotasunarekin. Idatz ditzagun gertaera berri hauen koordenatu espazio-denboralak:

	S	S'
3	$(0, \frac{L}{\gamma v})$	$(-L, \frac{L}{v})$
4	$(\ell, \frac{L}{\gamma v})$	(x'_4, t'_4)

Berriro Lorentz-en transformazioa erabiliz:

$$x'_4 = \gamma(x_4 - vt_4) = \gamma(\ell - v \frac{L}{\gamma v}) = \gamma\ell - L$$

$$t'_4 = \gamma(t_4 - \frac{v}{c^2}x_4) = \gamma(\frac{L}{\gamma v} - \frac{v}{c^2}\ell) = \frac{L}{v} - \frac{\gamma v \ell}{c^2}$$

Hau da:

	S	S'
3	$(0, \frac{L}{\gamma v})$	$(-L, \frac{L}{v})$
4	$(\ell, \frac{L}{\gamma v})$	$(L + \gamma\ell, \frac{L}{v} - \frac{\gamma v \ell}{c^2})$

Ikusten denez, trenean doan behatzailearekiko, ate bi ak ez dira aldiune berean ixten. Beraren neurketaz baliatuz, irteerako atea $\Delta t' = \gamma v \ell / c^2$ denbora-tarte bat aurrerago ixten da, sarrerakoa baino. (Kontuz! Behatzaileak egiten dituen neurketei buruz hitz egiten ari gara, eta ez berak ikusten duenari buruz.

Hori beste kontu bat da). Gainera, $-L + \gamma l > 0$ da, zeren $\gamma l > L$ baita (ikus problemaren textuan bertan agertzen den hipotesia). Beraz, trenari loturik doan behatzailearekiko, O' delakoa, honela gertatuko dira ate bien itxierak:

Lehenengo, irteerako atea ixten da, trenaren aurrekaldea bertara iritsi baino lehenago, eta $\frac{\gamma v l}{c^2}$ denbora-tarte bat geroago, sarrerako atea itxiko da. Baina, zein lekutan aurkitzen ote da trenaren atzekaldea, O behatzailearekiko, O' delakoak irteerako atea itxi dela neurtzen duenean? Itzul gaitezen Lorentzen-en formulara:

$$x = \gamma(x' + vt') = \gamma\left[-L + v\left(\frac{L}{v} - \gamma \frac{v l}{c^2}\right)\right] = -\frac{\gamma^2 v^2 l}{c^2} < 0$$

Hau da, oraindino ez da sartu tunelean.

Bestalde, O' behatzailearekiko, tunelaren irteera v abiaduraz hurbiltzen da. Non legoke tunelaren irteera trenaren atzekaldea tunelean sartzen den aldiunean, bertan doan behatzailearekiko, O' delakoarekiko? Edota zer gertatuko litzateke ateen itxiera trenaren atzekaldea tunelean sartzen deneko aldiunean jazotzen bada (O' behatzailearekiko, noski)? Kasu horretan, kalkula dezagun zein izango den tunelaren irteeraren posizioa, O' delakoarentzat, $t' = \frac{L}{v}$ denean. Horretarako, kontutan eduki behar dugu O' behatzailearekiko tunel osoa v abiaduraz hurbiltzen dela, eta $\Delta t' = \frac{\gamma v l}{c^2}$ denbora-tartean, $\Delta x' = v \Delta t' = \frac{\gamma v^2 l}{c^2}$ espazio-tartea egiten du bereganantz aipaturiko tunelaren irteerako atea (hau da, x' ardatzaren norantza negatiboan). Beraz, $t' = \frac{L}{v}$ aldiunean, tunelaren irteera posizio honetan egongo da:

$$X'_4 = x'_4 - \Delta x' = -L + \gamma l - \gamma \frac{v^2 l}{c^2} = -L + \frac{l}{\gamma} < 0$$

zeren $l < L$ baita. Trenaren aurrekaldearen koordinatua $x'=0$ denez, emaitzak trena tuneletik irteten hasi dela adierazten du, beraren atzekaldea bertan sartu berria izan arren.

Eta, zer dio tunelari loturik dagoen behatzaileak? Kontsidera dezagun aipaturiko behatzailea tunelaren sarreran

aurkitzen dela. Trenaren atzekaldea bertan sartzen neurtzen duenean ("ikusten" esan genezake kasu honetan, zeren lekuberekotasuna kontsideratzen baitugu), ate biak ixten ditu, gertaera hauek aldiberekoak izanik. Baina, posible ote da hau? Ba, egia esan, trenaren atzekaldea tunelean sartzean ateen itxiera agintzen badu, ez, zeren berak bidaltzen duen seinaleak denbora-tarte bat, l/c hain zuzen, behar baitu irteerako atera iristeko. Orduan, irteerako atearen itxiera ez da izango, lehen ikusi dugun bezala, $L/\gamma v$ aldiunean, $L/\gamma v + l/c$ aldiunean baizik. Eta, non dago aldiune horretan, O delakoarekiko, trenaren aurrekaldea? Erraz kalkula daitekeenez, hauxe izango da haren koordinatua:

$$X = \frac{L}{\gamma} + v \frac{l}{c} = \frac{L}{\gamma} + \beta l$$

eta numerikoki frogatzea dezakegu nola X-en balorerik txikiena, $L > l$ bada, l baino handiagoa dela, trenaren abiadura edozein izanik. Ondorioz, tunelaren irteerako atea ixten denean, S sisteman, trena hasi da tuneletik irteten.

Era berean, aipaturiko sisteman, tunelaren ateen itxi erak aldiberekoak izan daitezten seinalea denbora-tartetxo bat lehenago irten beharko litzateke O delakoa dagoen posiziotik; hau da, trena bere luzera osoan sartu baino lehenago.

Pasa gaitezen problema berbera Minkowski-ren diagramak erabiliz aztertuz. Azken batez, Unibertsoan gertatzen diren jazoerak, geometria tetra-dimentsional honetan sar ditzakegu, eta ba dirudi Geometriako zuzen, lerro eta planoekin zerikuzirik daukaten problemak, errazagoak direla ebazterako orduan, nahiz eta aipaturiko Geometria lau dimentsiotakoa izan.

Has gaitezen, orduan, problema honi dagokion diagrama marrazten.

$\overline{OP} = \overline{OP}$: Trenaren luzera S' sisteman

L

$\overline{OP}''$: S sistematik neurturiko trenaren luzera:

$$\overline{OP}'' < \ell$$

$\overline{QI}$: S sistematik neurturiko trenaren luzera beraren atzekaldea tunelean sartzen deneko aldiunean.

$\overline{Q4} \equiv C$: Trenaren unibertso-egoera, beraren atzekaldea tunelean sartzen deneko aldiunean:

$$ct - \frac{cL}{\gamma v} = \frac{v}{c} x$$

T : S sisteman, Q puntuari dagokion aldiberekotasunaren lerroa:

$$ct = \frac{cL}{\gamma v}$$

OP : Trenaren aurrekaldea tunelean sartzen deneko aldiuneko trenaren egoera.

Q5 : Trenaren aurrekaldea tunelean sartzen deneko aldiunean bidalitako seinalearen unibertso-lerroa.

6 : 5 puntuari S' sisteman dagokion denbora-aldiunea.

Q2 : S sisteman, trenaren atzekaldea tunelean sartzen deneko aldiuneko tunelaren unibertso-egoera:

$$ct = \frac{cL}{\gamma v}$$

3 : S' sisteman, 2 puntuari dagokion denbora-aldiunea:

Diagrama honetan finkatuz, kalkula ditzagun zenbait puntu:

$$Q \left\{ \begin{array}{l} R_s: \quad x = 0 \\ R'_b: \quad ct = \frac{c}{v} \left(x + \frac{L}{\gamma} \right) \end{array} \right\} \longrightarrow Q \left(0, \frac{L}{\gamma \beta} \right)$$

$$1 \left\{ \begin{array}{l} T: \quad ct = \frac{cL}{\gamma v} \\ R'_b: \quad ct = \frac{c}{v} x \end{array} \right\} \longrightarrow 1 \left(\frac{L}{\gamma}, \frac{L}{\gamma \beta} \right)$$

$$2 \left\{ \begin{array}{l} T: \quad ct = \frac{cL}{\gamma v} \\ R_i: \quad x = \ell \end{array} \right\} \longrightarrow 2 \left(\ell, \frac{L}{\gamma \beta} \right)$$

$$3 \left\{ \begin{array}{l} \overline{32}: \quad ct = \frac{v}{c} (x - \ell) + \frac{cL}{\gamma v} \\ R'_b: \quad ct = \frac{c}{v} x \end{array} \right\} \longrightarrow 3 \left(\gamma L - \gamma^2 \beta^2 \ell, \frac{\gamma L}{\beta} - \gamma^2 \beta \ell \right)$$

$$4 \left\{ \begin{array}{l} C: \quad ct = \frac{v}{c} x + \frac{cL}{\gamma v} \\ R'_B: \quad ct = \frac{c}{v} x \end{array} \right\} \longrightarrow 4 \left(\gamma L, \frac{\gamma L}{\beta} \right)$$

$$5 \left\{ \begin{array}{l} Q5: \quad ct = x + \frac{cL}{\gamma v} \\ R'_L: \quad x = l \end{array} \right\} \longrightarrow 5 \left(l, l + \frac{L}{\gamma \beta} \right)$$

$$6 \left\{ \begin{array}{l} \overline{56}: \quad ct = \frac{v}{c} (x-l) + \left(l + \frac{cL}{\gamma v} \right) \\ R'_B: \quad ct = \frac{c}{v} x \end{array} \right\} \longrightarrow 6 \left(\gamma^2 \beta (1-\beta) l + \gamma L, \gamma^2 (1-\beta) l + \frac{\gamma L}{\beta} \right)$$

Puntu guzti hauek aztertuz, begi bistan dago ezen, hasierako baldintzak kontutuan harturik, S sistematik neurturiko trenaren luzera, l baino txikiagoa dela; hala ere, S sisteman ate bien itxiera aldiune berean gertatzen dela suposatzen baldin badugu, S' sisteman ez da horrela izango, irudian ikusten den bezala. Analitikoki, haxe izango litzateke S' sistematik neurturiko gertaera bion artean denbora-tartea:

$$t'_3 - t'_4 = -\gamma^2 \beta l / c$$

hau da, irteerako atearen itxiera, sarrerakoaren baino aurrera txoago jazoko da.

Irudian agertzen diren beste puntuen esangurak, nahi-ko argia dirudi, lehenengo partean ikusitakoa kontutuan harturik.

2.- SUZIRI AZELERATUAREN PROBLEMA BAT

Trenaren probleman ikusi dugun bezala, kasu honetan ere neurketen eta aldiberekotasunen arazoak aztertuko ditugu.

«Kontsidera ditzagun 100 m.tako luzera propioa duten bi suziri, beren muturrak 200 m.tako distantziara daudelarik, beren pausaguneko inertzi sisteman, S-n alegia

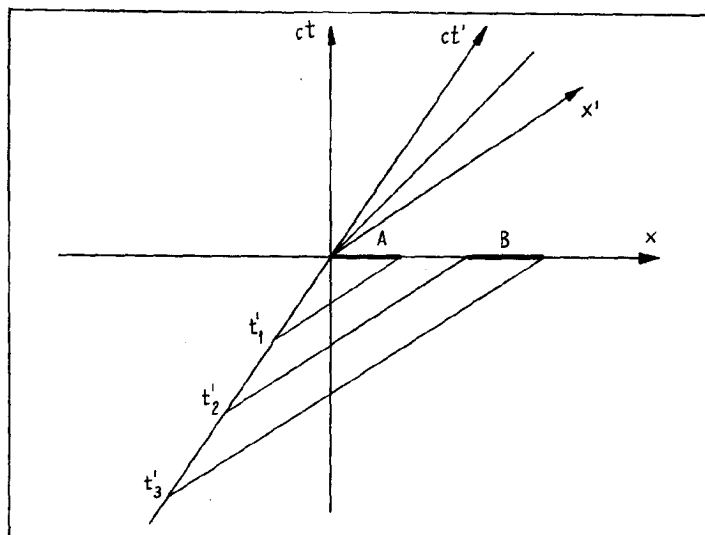
tendu egingo da. Horregatik, $v = \frac{4}{5} c$ abiadura lortzen duten aldiunean, muturren arteko distantzia ere mantendu egiten da: 200m. Baina suzirien luzerak, S sistematik neurturik, ez dira izango lehengoak. Lorentz-en uzkurduaren arauera $\gamma = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2} = \frac{5}{3}$ denez, orain neurtuko dugun luzera $\frac{100}{5/3} = 60 \text{ m}$ -takoa izango da.

- c.- Diagrama hau, a diagramari Lorentz-en uzkurdu aplikaturik lortzen da, eta nahiko argi ikusten dela suposatzen dugu.
- d.- Hau da azken egoera S' sistemarekiko. Dakigunez, suziri bien egoera berrian, pausagunean aurkitzen dira S' sisteman. Baina egoera honetara heltzeko aldiuneak, ez dira berdinak sistema honetan, gero ikusiko dugunez. Gainera, S' sistemaren ikuspuntutik, suziriak ez dira aldiune berean martxan jartzen; are gehiago, suziri bakoitzaren puntuak aldiune desberdinetan hasten dira higitzen.

Horrez gain, b diagramak, d diagramaren "uzkurtua" izan behar du, eta b diagraman agertzen diren luzerak kontutan hartuz, S' diagraman suzirien luzerek, 100m. takoa izan behar dute noski, eta haien muturren arteko distantzia: $200 = \frac{\ell'}{\gamma} \rightarrow \ell' = 333,33 \text{ m}$ -takoa.

Zer gertatzen zaio, ba, mutur biak lotzeko asmotan da goen astronautari? Argi ikusten denez, azken egoeran mutur bien arteko distantzia 333,33m-takoa da, eta berak daraman sokarena, 300-takoa. Horregatik, ezin ditu lotu mutur biak. Baina, eta S sistemaren ikuspuntutik, suziri bien arteko muturren distantzia, azken egoeran, 200m-takoa da. Lotu ahal ditzake mutur biak? Berriko esan behar dugu ezetz, zeren kasu honetan, S sistematik neurturik sokaren luzera $300/\gamma = 180 \text{ m}$ -takoa baita.

Azter ditzagun orain suzirien higidurak S' sistematik neurturik, Minkowski-ren diagrama batez baliatuz.



Hemen ikusten denez, aurreko suziria (B), atzekoa baino lehenago hasten da bere higiduran. Era berean, bestea baino lehenago geldituko da.

S'-ren ikuspuntutik, higidura hasi baino lehenago suziri bien muturren arteko distantzia 120m-takoa da, biak $v = \frac{4}{5}c$ abiaduraz ezkerrerantz higitzen daudelarik (esan genezake suziri-rien abiadura $v = -\frac{4}{5}c$ dela).

S' sisteman neurturik, B suziria frenatzen hasten da (edo S' sistemarekiko duen iheste-abiadura txikituz doa). Denbora-tarte bat geroago, A suziria ere frenatzen hasten da. Baina denbora-tarte horretan, suziri bien arteko distantzia handiagoa egin da. Gainera, S' sistemarekiko B suziria pausagunera heltzen denean oraindino A suziria ez da egoera horretara heldu, eta beraren abiadura oraindino negatiboa izango da, edo beste era batetan esanda, beraren iheste-higiduran segitzen du, bere abiadura S' sistemarena izan arte. Horrelatan, ba, suziri bien arteko distantzia handitu egingen da, 333,33m-takoa izan arte.

BIBLIOGRAFIA

- 1.- A.P. FRENCH: "Relatividad Especial". Ed. Reverté.
Barcelona (1974).
- 2.- W.G.V. ROSSER: "An Introduction to the Theory of Relativity"
Butterworth & Co. London (1971).
- 3.- A.A. EVETT: "A Relativistic Rocket Discussion Problem"
Am. Jour.Phy. Vol 40 (1972).
- 4.- R. RESNICK: "Introducción a la Teoría Especial de la Relatividad". Ed. Lumusa. México (1977).
- 5.- L.EMALDI, J.R. ETXEBARRIA, B. JAUREGIZAR, B. ZURIMENDI:
"Erlatibitatearen Teoria Espeziala". U.E.U.
Iruñea (1978).

PARALELOTASUNAREN ERLATIBOTASUNA

J.R. Etxebarria

PARALELOTASUNAREN ERLATIBOTASUNA

- 1.- Higitzen ari diren gorputzen arteko paralelotasuna ez da erlazio erreflexiboa.
- 2.- Higitzen ari diren gorputzen arteko paralelotasuna ez da erlazio iragankorra.
- 3.- Paralelotasuna eta sistema desberdinetako albiderekotasuna.
- 4.- Bibliografia.

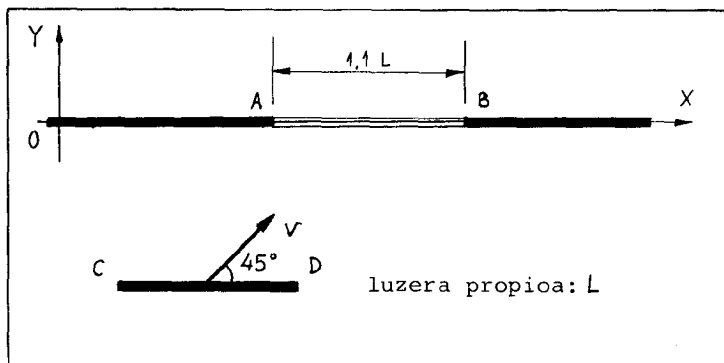
PARALELOTASUNAREN ERLATIBOTASUNA

Erlatibitatearen Teoriaren arloan aztertzen ditugun paradoxetan, hasieratik bertatik esan behar da, paradoxa izenez ezagutzen ditugunak, intuizio newtondar-euklidearraren bidez emaniko azalpen ez-zuzenak besterik ez direla; eta azalpenak Erlatibitatearen Teoria ongi erabiliz ematean, desagertu egiten dira paradoxak. Arazoa da, eskala arruntean absolututzat hartzen diren zenbait kontzeptuk, galdu egiten dutela beren absolututasuna, tartean abiadura handiak daudenean. Baina geure esperientzia hurbilean absolututasunera ohiturik gaudenez, kostatu egiten zaigu burua bestelako pentsabidean jartzea. Horrelako zerbait gertatzen zaigu, adibidez, paralelotasunari dagokionez.

Geometria euklidearrean bi zuzenen arteko paralelotasuna erlazio erreflexiboa eta iragankorra da. Hots, A B-ren paraleloa bada, B A-ren paraleloa da. Bestetik, A B-ren paraleloa izanik eta B C-rena, A C-ren paraleloa da. Eta hori besterik gabe onartzen dugu. Ostera, elkarrekiko higitzen ari diren gorputzen arteko paralelotasuna aztertzean, kasu orokorrean ez bata eta ez bestea ez dira betetzen, pentsamolde arrunterako zenbait paradoxa ekarriz.

1.- HIGITZEN ARI DIREN GORPUTZEN ARTEKO PARALELOTASUNA EZ DA ER-LAZIO ERREFLEXIBOA

Has gaitezen erreflexibotasuna kolokan jarriko duen problema bat aipatzen. Demagun, X ardatzaren direkzioa mantenduz higitzen ari den eta L luzera propioa duen barra bat, beraren abiaduraren norabideak, X ardatzarekin 45° -tako angelua osotzen duen moduan, irudian adierazten den bezala. Plataforma bat dago bidean, geldi eta X ardatzaren direkzio berean jarrita. Plataforma horretan zulo bat egin da, beronen luzera propioa l, l L izanik; horrela, abiadura txikitzen barra erraz pasa daiteke. Zer gertatzen da abiadurak $0,9c$ balio badu?^[1] (ikus 1. irudia.).



1. irudia

Bistan denez, arazoa bi erreferentzi sistematik azter daiteke, alegia, plataformaren sistematik eta barraren sistematik; eta bietatik ateratzen diren ondorioek, koherenteak izan behar du te. Hala ere, lehen pauso batetan, Erlatibitatearen Teoriaz jantzi egi ez dauden ikasleei, ondoko paradoxa agertzen zaie. Honela arrazonatu ohi dute: Demagun, higidura plataformaren sistematik aztertzen dugula; barrak luzeraren uzkurdua pairatzen duenez, la burrago neurtzen da eta, beraz, laburrago izanik, erraz pasatzen da zulotik. Barraren sistematik, ordea, alderantziz gertatzen dira gauzak; orain luzeraren uzkurdua pairatzen duena, zuloa da eta, ondorioz, zuloa L baino laburrago ager daiteke (abiaduraren arauera). Beraz, barra pasa ezinik gerta daiteke. Nola ote daite ke hori, prozesu fisikoa bakarra izanik? Hortxe sortzen da para doxa.

Segidan ikusiko dugunez, aurreko lerroetan eginiko arra zonamendua ez da zuzena izan, tartean paralelotasuna mantentzen dela suposatu baitugu. Arrazonamendu zuzena erabiltzean, desager tu egingo da paradoxa, zer esanik ez.

Azter dezagun arazoa plataformaren sistematik (S siste ma). S sistemako aldiberekotasunean, barra eta plataforma jarre ra paralelotan neurtzen dira, problemaren enuntziatuan horrela esaten baitzaigu. Plataformako zuloaren luzera, luzera propioa da, sisteman gelditu baitago; eta balio hau du:

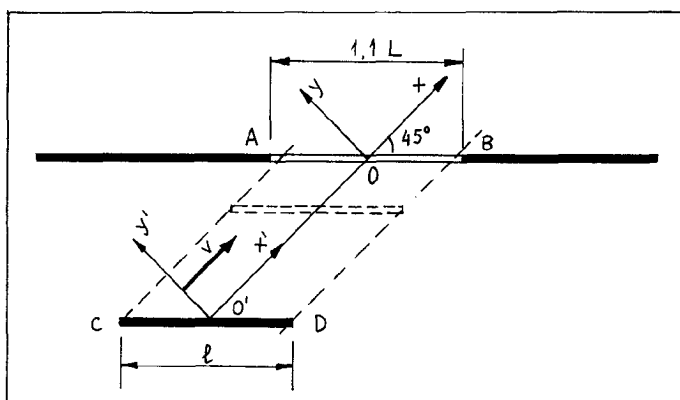
$$\overline{AB}_S = 1,1 L$$

Hala ere, barra higitzen ari da —paraleloki, hori bai!— eta beraz, S sistematik barraren luzera ez-propioa neurtzen da, ℓ . Kalkulu erraz batez eta v abiaduraren direkzioa kontutan hartuz, zera lortzen da:

$$\overline{CD}_{(S)} = \ell = L \sqrt{\frac{2}{1+\gamma^2}} < 1,1 L$$

Kasu honetan, $\gamma = 2,3$ da.

Hurrengo irudian (2. irudia) adierazten da aipaturiko egoera S sistemako aldeberekotasunez (Oxy).



2. irudia

S sistemako neurketetan, barra eta plataforma jarrera paralelotan neurtzen dira eta, ondorioz, C eta D puntuak aldiune berean pasatzen dira A eta B puntuen artean. $\ell < 1,1 L$ denez, ez dago inolako problemarik barra pasa dadin.

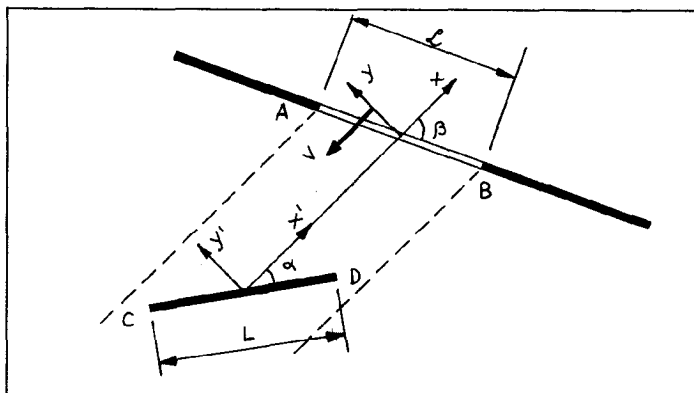
Azter dezagun orain arazoa barraren sistematik (S'). Bertatik barraren luzera propioa neurtuko da,

$$\overline{CD}_{(S')} = L$$

baina plataformaren zuloaren luzera ez-propioa neurtuko da, $\mathcal{L}$ deituko duguna:

$$\overline{AB}_{(S')} = \mathcal{L}$$

Horretaz gainera, lehengo ardatzek, hots, Oxy eta $O'x'y'$ ardatzek barrarekin eta plataformarekin osotzen dituzten angeluak, ez dira jadanik 45° -takoak, S' sisteman neurturik, bestelakoak baizik. 3. irudian S' sistemako aldebereketasunez neurtzen diren jarrerak adierazten dira.



3. irudia

Abiadurarekiko zeharkakoak diren luzerek ez dutela uz kurdurarik jasaten neurketan eta, ostera, luzeratakoek jasaten dutela kontutan edukiz eta kalkulu errazak eginez ikusten denez, kasu honetan:

$$\gamma = 2,3$$

$$\alpha = 24,4^\circ$$

$$\beta = 66,5^\circ$$

Ondorioz frogatzen da

$$\mathcal{L} = \frac{1,1 L}{\sqrt{\sin^2 \beta + \gamma^2 \cos^2 \beta}}$$

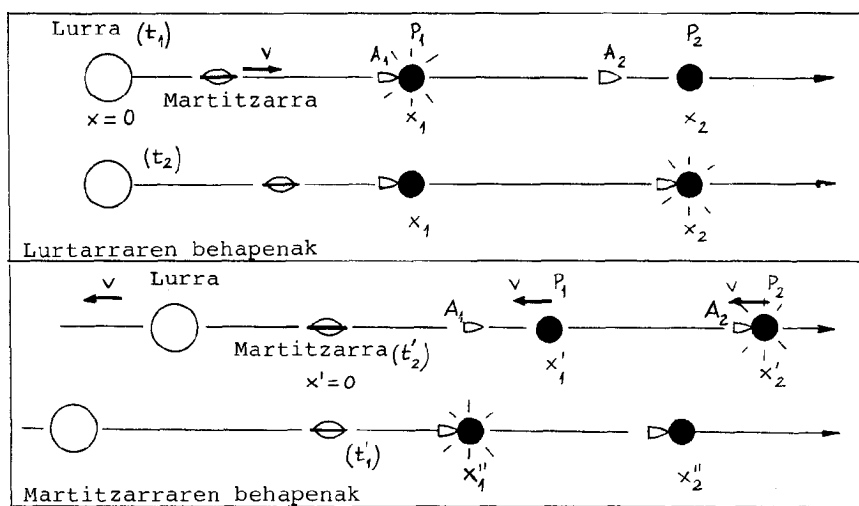
dela eta ikusten denez:

$$\mathcal{L} \sin \beta > L \sin \alpha$$

Berba gutxitan esanda, artikulu honen helburua erlatibitatearen teoriatik atera daitezkeen ondorio bitxietako bat argitzea da. Horretarako bi adibide sinplez baliatuko gara, bata numerikoa izanik eta bestea ez. Lehenengoari dagokionez, kontu egin dezagun argiaren abiadurari $c=3.10^5 \text{ Km. s}^{-1}$ balore biribila emango zaiola, kalkuluak errazteko asmotan. Has gaitezen, ba, aurreneko adibidea planteatzen:

1. adibidea

Demagun bi astronauta, bata yankia eta sobietarra bestea, nor bere espazialuntziaz bi planetatara abiatzen ari direla. Lurretik ikusita, A_1 astronauta (yankia esaterako) t_1 aldiu nean heltzen da P_1 planetara; A_2 astronauta (sobietarra, noski), bere aldetik, t_2 aldiunean heltzen delarik P_2 planetara. Planeta bion arteko distantzia $x_2 - x_1 = 5.10^6 \text{ Km}$ -takoa da, eta bidaietan emandako denboren arteko diferentzia $t_2 - t_1 = 6 \text{ s}$ -takoa.



Beraz, Lurretik astronauten bidaiak aztertzen ari den behatzailearen arauera, sobietarra sei segundu beranduago heltzen da P_2 planetara, hots, yankia P_1 planetara heldu eta gero.

Orain pentsa dezagun, astronautei segika martitzar bat doala, bere plater hegalaria $v=0,6c$ abiadura daramalarik

Lurrarekiko, eta kalkula dezagun, martitzarraren erreferentzi sisteman, A_1 -k bere bidaia bukatzen duenetik A_2 -k berea bukatzen duenerarte zenbat denbora igaro den. (Neurketetan korrekzioak eginez, noski). Hara:

$$t'_2 - t'_1 = \frac{(t_2 - t_1) - \frac{v}{c^2}(x_2 - x_1)}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} = \frac{6 - \frac{0,6 \cdot 3 \cdot 10^8}{9 \cdot 10^{16}} 5 \cdot 10^9}{\sqrt{1 - \left(\frac{0,6c}{c}\right)^2}} = -5s$$

Ikus daitekeenez, behatzaile martitzarra ez dator bat lurtarrak ateratako emaitzarekin, eta behin eta berriz aldarrikatuko du yankia P_1 planetara bost segundu beranduago iritsi dela, sobietarra P_2 planetara iritsi ondoren.

Nori sinetsi behar zaio? Nori arrazoia eman? Ondotxo dakigunez, halako kontuetan ez dago ez batari ez besteari arrazoia ematerik, nork bere erreferentzi sisteman, biok zintzo jokatuko baitute, eta behapenak erlatiboak direnez, bion emaitzak zuzenak baitira, nahiz eta harriagarria irudit. Labur esanda:

«Gertakizunen jarraipen denboralak ez du ezertan berbera izan beharrik erreferentzi sistema guztietan, "lehenago" eta "geroago" kontzeptuak alderantzizko bihur daitezkeelarik sistema batetik beste batetara pasatzean».

Ordea, proposamen hau, aurreko adibidean oinarrituta dagoena, erabat orokortzat har ote dezakegu? Edo, beste era batera, gertakizunak edozelakoak izanik denboraren aldrebeskotasu na beti jazo ote daiteke? Galdera ez da alferrikakoa, ez da hurrik ere. Izan ere, erakutsiriko adibidean elkarrekiko independenteak diren bi gertaera aztertu ditugu, hots, yankia P_1 planetara iristeak ez du inolaz baldintzatzen sobietarra P_2 planetara iristerik eta ez alderantziz ere. Haatik, elkarri loturiko gertaerarik egon ba dago unibertsoan. Errealitatean behin baino gehiagotan ikertzen ditugu lehenago jazotako beste batzuren ondorioak diren gertaerak, horrela suertatzen denean, alegia, gertaera bat beste baten ondorioa denean, bi gertaerok "kausalitate printzipioaz" erlazonaturik daudela diogularik. Hurrengo

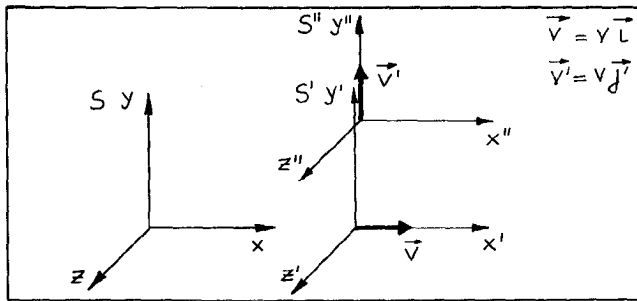
Beraz, plataforma inolako trabarik gabe pasatzen da eta hasieran aipaturiko paradoxa desagertu egiten da.

Dena den, interesgarria da zenbait irazkin egitea. Batetik, S' sisteman A eta B puntuak ez dira aldiune berean iraga ten CD barraren paretik. Horrek ez gaitu harritu behar, ongi bai takigu puntu desberdinetan jazotzen diren gertaeren aldibereko tasuna gauza erlatiboa dela, sistemaren arauarakoa hain zuzen. Bestetik, aurrekoarekin lotuta, higitzen ari diren gorputzen pa ralelotasuna ere kontzeptu erlatiboa dela ikusten dugu. Prezes ki, S sistemako aldiberekotasunean paraleloak direnak, S' siste makoa neurturik ez dira paraleloak. Zentzu horretan ulertu be har da, paralelotasuna ez dela erlazio erreflexiboa; hots, S sisteman neurturik, higitzen ari den barra geldi dagoen platafor maren paraleloa da, baina S' sisteman neurturik, higitzen ari den plataforma ez da geldi dagoen barraren paraleloa.

2.- HIGITZEN ARI DIREN GORPUTZEN ARTEKO PARALELOTASUNA EZ DA ERLAZIO IRAGANKORRA

Paralelotasunarekin segituz, Thomas-en prezesioa^[2],
^[3] aipa dezakegu, aurreko kasuarekin loturik baitago. Iragankor tasuna aztertzeke, hala ere, sistema kuasiparaleloen arteko el karren ondoko bi transformaziotan finkaturik dagoen kasu konkre tu bat aztertuko dugu, arazoa kualitatiboki ikusteko nahikoa bai ta.

Demagun, beraz, Lorentz-en bi bultzada egiten ditugu la, bata bestearen ondoren, 4. irudian eskematikoki adierazten den legez.



4. irudia

S' eta S sistemak elkarren kuasiparaleloak dira. S' V abiaduraz higitzen da x ardatzaren direkzioan, hasierako aldi unean kointzidenteak izan direlarik (talde homogenoa). Bestetik S'' eta S' ere elkarren kuasiparaleloak dira eta S'' sistema V' abiaduraz higitzen da S' sistemarekiko, y' ardatzaren direkzioan. Esan ote dezakegu S'' eta S elkarren kuasiparaleloak direnik? Horixe da planteatzen den galdera.

Pausoka ebatziko dugu arazoa. Lehenik eta behin Lorentz-en bi bultzaden osoketa aztertuko dugu, gero transformazio kuasiparalelo bati ote dagokion ikusteko. Horretarako, gertaera ber baten koordinatu espazio-denboralen arteko erlazioak aztertuko ditugu matrizialki

$$\begin{aligned} x' &= L_1 x \\ x'' &= L_2 x' \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad x'' = L_2 L_1 x$$

non L_1 eta L_2 ondokoak diren^[4]:

$$L_1 = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$L_2 = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & -\gamma\beta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & 0 & \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

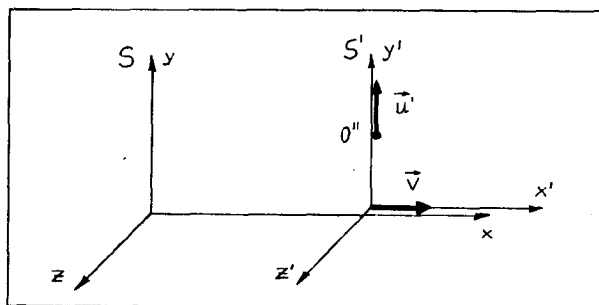
eta x ondoko zutabe matrizea:

$$X = \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Matrizeen arteko biderkaketa eginez, emaitza hau lortzen da:

$$L_2 L_1 = \begin{pmatrix} \gamma^2 & -\gamma^2\beta & -\gamma\beta & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ -\gamma^2\beta & \gamma^2\beta^2 & \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Matrize honek adierazten duen transformazioa sistema kuasiparaleloen artekoa denentz ikusteko, beste bide bati jarraituko gatzazkio, lehenik eta behin S' sistemako jatorriak, O'' puntuak alegia, S sistemarekiko duen abiadura kalkulatz. Horretarako 5. irudiko eskeman finkatuko gara:



5. irudia

$\vec{u}'$ delakoa O'' puntuak S' sisteman neurturik duen abiadura da. S sisteman neurturik, puntu berberak $\vec{u}$ abiadura du, bien arteko erlazio bektoriala ondokoa delarik^[5], [6] :

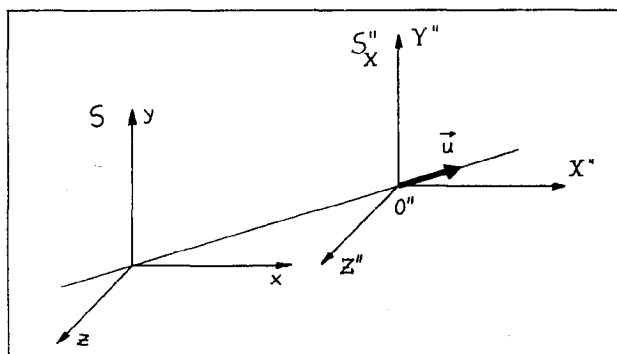
$$\vec{u} = \frac{\vec{u}' + \vec{v} \left[\frac{\vec{u}' \cdot \vec{v}}{v^2} (\gamma - 1) + \gamma \right]}{\gamma \left(1 + \frac{\vec{v} \cdot \vec{u}'}{c^2} \right)}$$

Gure kasuan $\vec{u}' = v \vec{j}'$ eta $\vec{v} = v \vec{i}'$ direla kontutan edukiz, zera lortzen dugu:

$$\vec{u} = v \vec{i} + \frac{v}{\gamma} \vec{j}$$

hemen $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$ izanik.

Behin $\vec{u}$ abiadura kalkulatu ondoren, kontsidera dezagun ardatz kuasiparaleloen, hots, biraketarik gabekoen arteko transformazioa ardatzen jatorriaren abiadura $\vec{u}$ izanik, 6. irudian adierazten den bezala.



6. irudia

Horretarako, biraketarik gabeko Lorentz-en transformazio orokorrera kontsideratuko dugu^[7], ondoko baloreetan finkatuz

$$u = \left| \vec{u} \right| = \sqrt{v^2 + \frac{v^2}{\gamma^2}} = v \frac{\sqrt{\gamma^2 + 1}}{\gamma}$$

$$\gamma_u = \frac{1}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} = \gamma^2$$

6. irudiaren arauera

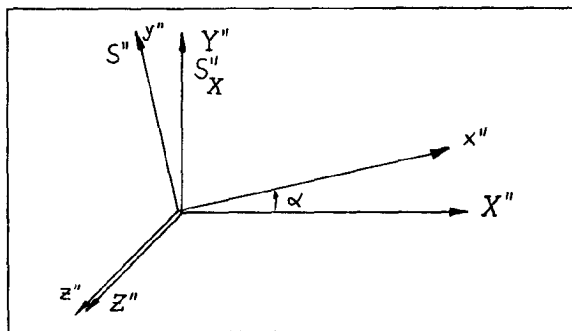
$$X'' = \mathcal{L}X$$

eta L-ren elementuak kalkulatzuz, zera lortzen da:

$$\mathcal{L} = \begin{pmatrix} \gamma_u & -\gamma_u \frac{v}{c} & -\gamma_u \frac{v}{\gamma c} & 0 \\ -\gamma_u \frac{v}{c} & \frac{1 + \gamma^2 \gamma_u}{\gamma^2 + 1} & \frac{(\gamma_u - 1) \gamma}{\gamma^2 + 1} & 0 \\ -\gamma_u \frac{v}{\gamma c} & \frac{(\gamma_u - 1) \gamma}{\gamma^2 + 1} & \frac{\gamma^2 + \gamma_u}{\gamma^2 + 1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Argi ikusten denez, $\mathcal{L} \neq L_2 L_1$. Zer esan gura du horrek?

Argi dago alde batetik S'_x eta S'' sistemek jatorri berbera dutela eta jatorri hori $\vec{u}$ abiaduraz higitzen dela. Beraz, bi sistemen artean biraketa dago, hain zuzen ere Z'' ardatzaren inguruan, berau higidurarekiko zeharkakoa baita. Bi sistemen jarrera erlatiboa 7. irudian adierazten da.



7. irudia

Biraketaren matrizea R letraz adieraziko dugu

$$x = \mathcal{R}X''$$

$$\mathcal{R} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ 0 & -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Zer esanik ez, denboran ez dago aldaketarik S'' eta S'_X sistemak geldi baitaude elkarrekiko. Denetara, honela erlaziona ditzakegu transformazioen matrizeak:

$$x'' = \mathcal{R}X'' = \mathcal{R}\mathcal{L}x \quad \Rightarrow \quad \mathcal{R}\mathcal{L} = L_2 L_1$$

$$x'' = L_2 L_1 x$$

$L_2 L_1$ biderkadura lehenago lortu dugu. $\mathcal{R}\mathcal{L}$ delakoa ondokoa da:

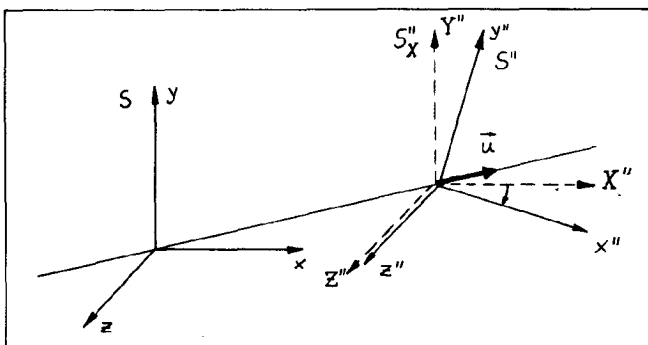
$$\mathcal{R}\mathcal{L} = \begin{pmatrix} \gamma^2 & -\gamma^2 \frac{v}{c} & -\gamma \frac{v}{c} & 0 \\ -\gamma^2 \frac{v}{c} \cos \alpha - \gamma \frac{v}{c} \sin \alpha & \frac{\gamma^4 + 1}{\gamma^2 + 1} \cos \alpha + \frac{(\gamma^2 - 1)\gamma}{\gamma^2 + 1} \sin \alpha & \frac{(\gamma^2 - 1)\gamma}{\gamma^2 + 1} \cos \alpha + \frac{2\gamma^2}{\gamma^2 + 1} \sin \alpha & 0 \\ \gamma^2 \frac{v}{c} \sin \alpha - \gamma \frac{v}{c} \cos \alpha & -\frac{\gamma^4 + 1}{\gamma^2 + 1} \sin \alpha + \frac{(\gamma^2 - 1)\gamma}{\gamma^2 + 1} \cos \alpha & -\frac{(\gamma^2 - 1)\gamma}{\gamma^2 + 1} \sin \alpha + \frac{2\gamma^2}{\gamma^2 + 1} \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Elementuak banan banan berdinak direla kontuan hartuz, hau da $\mathcal{R}\mathcal{L} = L_2 L_1$ eginez, ondoko baloreak lortzen ditugu α angeluaren sinu eta kosinurako:

$$\sin \alpha = - \frac{\gamma^2 - 1}{\gamma^2 + 1}$$

$$\cos \alpha = \frac{2\gamma}{\gamma^2 + 1}$$

Honetan, ba, ikusten da ezen, S sistematik neurturik, S'' sistemako ardatzak biraturik daudela, nahiz eta izatez 7. irudian adierazirikoaren aurkako norantzaz. S sistemako aldibereko tasunez, 8. irudian adierazten den bezala neurtuko lirateke S'' sistemako ardatzak.



8. irudia

Adibide honetan argi ikusten da, higitzen ari diren ardatzen arteko paralelotasuna ez dela erlazio iragankorra. Hor-tik dator, hain zuzen, ardatzen arteko erlazioari eman diogun izena bera ere: ardatz kuasiparaleloak direla esan dugu. Baina kuasiparalelotasunaren definizio arruntarekin^[8], erraz ikusten da transformazio horiek ez dutela azpitalderik osotzen. Orohar, elkarren ondoko bi Lorentz-en bultzada hartzean, bien osoketatik ez da modu bereko transformaziorik sortzen, sistemen arteko $\vec{v}$ eta $\vec{v}'$ abiadurak elkarren paraleloak izan ezik. Bistan denez, hau ez da izan gure adibideko kasua eta horretatik agertu zaigu biraketa.

3.- PARALELOTASUNA ETA SISTEMA DESBERDINETAKO ALDIBEREKOTASUNA

Aurreko adibide bietan agertu diren kasuak, harrigarri samar gertatzen dira, mekanika newtondar-euklidearrean ulertu na hi badira, paralelotasunari buruz arlo horretan dauden eritzi ab solutuak hautsi egiten baitira. Baina sakonera joanez, inolako paradoxarik edo kontraesanik ez dagoela ikusten da, Erlatibitatearen Teoria Bereziaren ikuspuntua hartuz gero.

Kontutan har dezagun, higitzen ari diren gorputzen edo ardatzen arteko paralelotasuna aztertzen dihardugula. Higitzen ari badira, higidurak osagai transbertsala edukiz gainera, gauzak ondo egiteko, paralelotasuna zein aldiunetan neurtzen den definitu behar da zehazki eta, horrela, zuzen-zuzen, aldiberekotasunaren definizioaren menpean erortzen gara. Aldez aurretik badakigu, aldiberekotasuna kontzeptu erlatiboa dela, sistema bakoitzari dagokiona zehatzago esateko, eta prezeski, neurketaren bidez sistema bakoitzean definitu den sinkronizazioaren arauera koa dela^{[9], [10], [11]}. Ondo dakigu, halaber, aldiberekotasunaren erlatibotasuna kontutan hartu behar dugula, paralelotasunaren er latibotasuna aurreko erlatibotasunaren ondorio zuzena besterik ez baita.

S, S' eta S'' sistemek, zeinek bere aldiberekotasuna daukate, sistema bakoitzean sinkronizaturik dauden erlojuen arau era definiturikoa hain zuzen. Ondorioz, modu desberdinez definitzen dute higitzen ari diren gorputz edo ardatzen arteko paralelotasuna, sinkronizazio desberdinen arauera.

Bukatzeko, ohar gisa, diogun ezen argi dagoela S eta S' sistemen arteko paralelotasuna alde batetik eta S' eta S'' sistemen artekoa bestetik, kasu bietan elkarrekin kointzidentekak diren bi ardatz daudelako (Ox eta O'x' lehenengo kasuan eta O'y' eta O''y'' bigarreanean). Bestalde, S eta S'_X sistemen arteko paralelotasuna definizioz egiten da, sistema bakoitzaren jatorriaren abiadura beste sistemarekiko dituen osagaien bidez ematean, $v_0^i = -v_0''^i$ eginez.

BIBLIOGRAFIA

- 1.- A.P. FRENCH. "Relatividad Especial". Ed. Reverté. Barcelona (1974). 140. or.
- 2.- C.MOLLER. "The Theory of Relativity". Oxford University Press. Delhi (1971). 52. or.
- 3.- H.M. SCHWARTZ. "Introduction to Special Relativity" McGraw-Hill. New York (1968). 65. or.
- 4.- R.A. MANN: "The Classical Dynamics of Partides. Galilean and Lorentz Relativity". Academic Press. New York (1974) 16. or.
- 5.- A. LICHNEROWICZ: "Elementos de Cálculo Tensorial". Aguilar. Madrid (1962). 216. or.
- 6.- Ik. 2. lib. 51. or.
- 7.- Ik. 1. lib. 15-16. or.
- 8.- Ik. 4. lib. 15. or.
- 9.- Ik. 1. lib. 83. or.
- 10.- L.EMALDI, J.R. ETXEBARRIA, B.JAUREGIZAR, B. ZURIMENDI.
"Erlatibitatearen Teoria Espeziala" UEU.
Iruñea (1978). 32. or. , 50. or.
- 11.- J.H. SMITH. "Introducción a la Relatividad Especial". Ed. Reverté. Barcelona (1969). 50. or. 64. or.

BIKIEN PARADOXA

J.M. Pitarke

B I K I E N P A R A D O X A

1.- Sarrera

1.1. Lorentz-en transformazio berezia

1.2. Minkowsky-ren diagramak

2.- Luzeraren kontrakzioa

3.- Denboraren zabalkuntza

4.- Bikien paradoxa

5.- Bibliografia

1.- SARRERA

Erlatibitatearen Printzipioaren arauera, S eta S' erreferentziazko inertzi sistemetan lortzen diren neurri espazio-denboralak, hots, x^μ eta x'^μ ($\mu = 0, 1, 2, 3$), Poincaré-ren transformazio baten bidez erlazionaturik datozkigu; hau da:

$$x'^\mu = L^\mu_\nu x^\nu + a^\mu$$

non L^μ_ν koefizienteek ondoko erlazioa betetzen duten:

$$g_{\mu\nu} L^\mu_\alpha L^\nu_\beta = g_{\alpha\beta}$$

$g_{\mu\nu}$ Minkowsky-ren espazioan definituriko funtsezko tentsore metrikoaren osagai kobarianteak direlarik.

Hasierako aldiunean, hots, $t=t'=0$ denean, S eta S' direlako koordenatu-sistemen jatorriak puntu berean baldin badaude, hots, $O \equiv O'$ baldin bada, orduan:

$$a^\mu = 0 \qquad \mu = 0, 1, 2, 3$$

eta beraz zera dugu:

$$x'^\mu = L^\mu_\nu x^\nu$$

Delako transformazio honi, Lorentz-en transformazio homogeneoa deritzogu.

S eta S' koordenatu-sistemen ardatzak paraleloak baldin badira, orduan inertzi sistema bien arteko neurri espazio-denboralen transformazioari Lorentz-en transformazio purua deritzogu. Honetaz gain, hasierako aldiunean, hots, $t=t'=0$ denean S eta S' erreferentzi sistemen koordenatu-ardatzak kointzidentek baldin badira, orduan dagokien transformazioa ondoko erara idatz dezakegu:

$$x'^\mu = L^\mu_\nu x^\nu$$

$$\begin{array}{ll}
 \text{non} & L^\mu_{\nu} = \gamma & \mu = \nu = 0 \\
 & L^\mu_{\nu} = -\gamma \beta^\nu & \mu = 0, \nu = i \quad (i, j = 1, 2, 3) \\
 & L^\mu_{\nu} = \delta^\mu_{\nu} - \frac{(\gamma-1) \beta^\mu \beta_\nu}{\beta^2} & \mu = i, \nu = j \\
 & L^\mu_{\nu} = -\gamma \beta^\mu & \mu = i, \nu = 0
 \end{array}$$

diren. S eta S' koordenatu-sistemen arteko abiadura bektoreak osagai ez-nulu bat bakarrik baldin badu, orduan esandako transformazio puruari Lorentz-en transformazio berezia deritzogu, eta delako osagai ez-nulua $c\beta^i$ baldin bada, orduan dagokion transformazioa ondoko erara idatz dezakegu:

$$\begin{array}{ll}
 x^{0'} = \gamma x^0 - \gamma \beta^i x^i & \\
 x^{j'} = -\gamma \beta^j x^0 + \gamma x^j & j = i \\
 x^{j'} = x^j & j \neq i
 \end{array}$$

non $\beta^i = \beta = \frac{v}{c}$ eta $\gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2}$ diren

1.1.- Lorentz-en transformazio berezia.

Orain arte esandakoaren arauera eta baldin ondoko notazio-aldaketa egiten badugu:

$$\begin{array}{ll}
 x^0 \longrightarrow ct \\
 x^1 \longrightarrow x \\
 x^2 \longrightarrow y \\
 x^3 \longrightarrow z \\
 \beta \longrightarrow \frac{v}{c}
 \end{array}$$

zera ondoriozta dezakegu:

Erlatibitatearen Printzipioaren arauera, S eta S' erreferentzi sistema inertzialak izanik,

- a) Hasierako aldiunean, hots, $t=t'=0$ denean, aipaturiko sistema bien ardatzak kointzidentek baldin badira eta
- b) S' sistema S sistemarekiko x ardatzerdi positiboaren norabidean eta norantzan v delako abiadura konstantez higitzen

baldin bada, orduan bi sistemetan eginiko neurketa espazio-denboralak, ondoko Lorentz-en transformazio bereziaren bidez erlazioaturik datozkigu:

$$t' = \gamma \left(t - \frac{v}{c^2} x \right)$$

$$t = \gamma \left(t' + \frac{v}{c^2} x' \right)$$

$$x' = \gamma (x - vt)$$

$$x = \gamma (x' + vt')$$

$$y' = y$$

$$y = y'$$

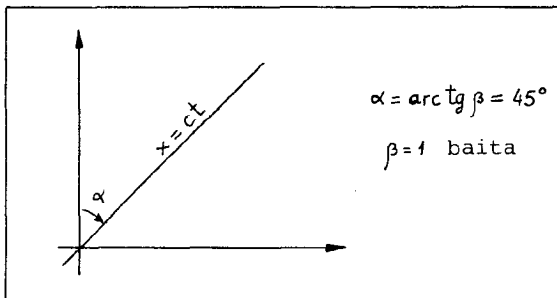
$$z' = z$$

$$z = z'$$

Lan honetan zehar oraintsu aipaturiko bi baldintzak betetzen direla suposatuko dugu beti; beraz, erreferentziatzeko inertzi sistema bitan egindako neurri espazio-denboralen artean erabiliko ditugun erlazioak aurrekoak izanen dira.

1.2.- Minkowsky-ren diagramak.

Demagun S inertzi sistema. Berau (x, ct) ardatz ortogonalez adieraziko dugu. Sistema honetan, x=0 eta t=0 puntutik eskuinetarantz irteten den argi-seinalearen unibertso-lerroa, ardatzen erdikaria da, baldin eta ardatz bietan aukeratu ditugun eskalak berberak badira.



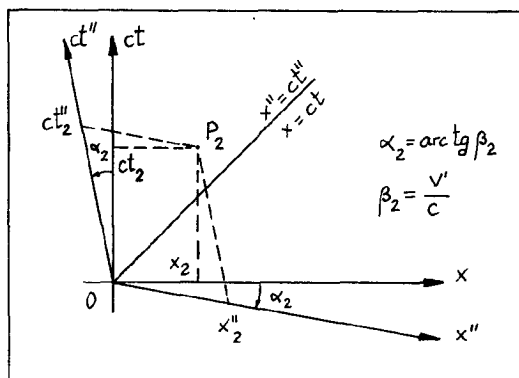
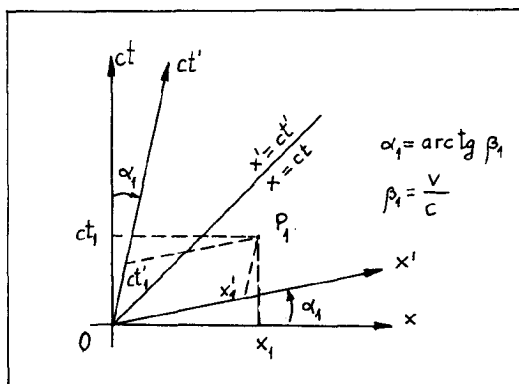
Argi-izpi horren ekuazioa, $x=ct$ da, noski.

Demagun ondoko bi sistemak ditugula:

S' sistema: Hasierako aldiunean S sistemarekin batera dator, baina S sistemarekiko x ardatzaren norabidean eta x ardatzerdi positiboaren norantzan v delako abiaduraz higitzen da, hots, $\vec{v} = v \vec{i}$.

S'' sistema: Hasierako aldiunean S sistemarekin batera dator, baina S sistemarekiko x ardatzerdi negatiboaren norabidean eta norantzan v' delako abiaduraz higitzen da, hots, $\vec{v} = -v' \vec{i}$.

Hurrengo irudietan agertzen diren (x', ct') eta (x'', ct'') ardatzen bidez, dagozkien S' eta S'' sistemetan edozein gertaera adierazi ahal izango dugu:



Orain ondoko galdera egin genezake: Diagrama ber batetan azaltzen diren koordinatu-sistema desberdinetan erabilitako luzera-eskalak berdinak al dira?

Galdera honi erantzuteko, Erlatibitatearen Printzipioa

ren arauera, Minkowsky-ren espazio tetradimentsionalean gertaera biren arteko distantzia, aukeraturiko inertzia sistemarekiko aldaezina dela hartuko dugu kontutan. Horrela,

$$P \begin{cases} (ct; x, 0, 0) \\ (ct'; x', 0, 0) \\ (ct''; x'', 0, 0) \end{cases} \quad \text{eta } O (0; 0, 0, 0)$$

direlako gertaeren arteko distantziatzat unitatea hartzen badugu, zera dugu:

$$\begin{aligned} d(O, P) &= \Delta x^\mu \Delta x_\mu = \Delta x^{\mu'} \Delta x_{\mu'} = \Delta x^{\mu''} \Delta x_{\mu''} = 1 \\ -c^2 t^2 + x^2 &= -c^2 t'^2 + x'^2 = -c^2 t''^2 + x''^2 = 1 \end{aligned}$$

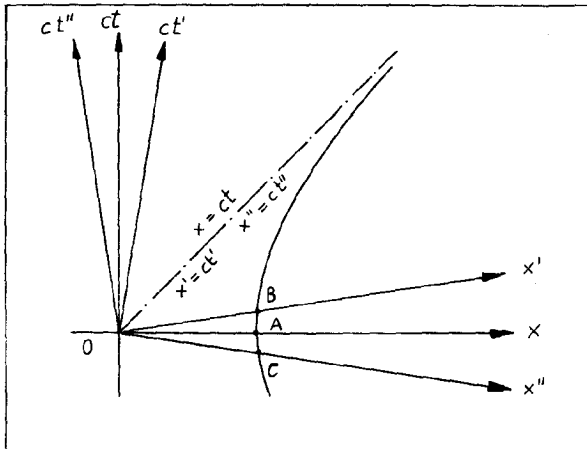
hau da:

$$x^2 - c^2 t^2 = 1 \quad S \text{ sisteman}$$

$$x'^2 - c^2 t'^2 = 1 \quad S' \text{ sisteman}$$

$$x''^2 - c^2 t''^2 = 1 \quad S'' \text{ sisteman}$$

Ondorioz, O delako puntuarekiko distantzikideak (distantzia unitatea izanik) diren puntu guztiek, hiperbola ekilatero berbera osotzen dute S, S' eta S'' direlako sistemetan, ondokoa hain zu zen ere:



A, B eta C hiperbola honen puntuak direnez, zera dugu:

$$x_A^2 - c t_A^2 = 1 \Rightarrow x_A = 1, \quad t_A = 0 \text{ baita}$$

$$x_B'^2 - c t_B'^2 = 1 \Rightarrow x_B' = 1, \quad t_B' = 0 \text{ baita}$$

$$x_C''^2 - c t_C''^2 = 1 \Rightarrow x_C'' = 1, \quad t_C'' = 0 \text{ baita}$$

Beraz:

$$x_A = OA = 1 \quad S \text{ sistemaren eskala da}$$

$$x_B' = OB' = 1 \quad S' \text{ sistemaren eskala da}$$

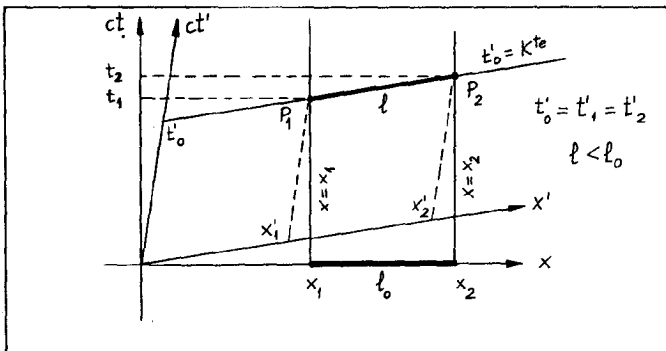
$$x_C'' = OC'' = 1 \quad S'' \text{ sistemaren eskala da}$$

Era honetan, ba, Minkowsky-ren diagramaren definizioa osoturik gelditzen da.

2.- LUZERAREN KONTRAKZIOA

S sisteman geldi dagoen barra baten luzera neurtuko dugu, S eta S' sistemetan.

Demagun S sisteman barraren mutur bien unibertso-lerroak $x=x_1$ eta $x=x_2$ direla, hots, S sisteman aipaturiko barra pausagunean dagoela, bere muturrak x_1 eta x_2 puntuetan daudelarik.



S sisteman neurturiko barraren luzera, ondoko hau da:

$$l_0 = x_2 - x_1$$

eta beroni luzera propioa deritzogu, barraren sistema propioan neurturiko luzera alegia.

S' sisteman neurturiko barraren luzera ondoko hau da:

$$l = x'_2 - x'_1$$

non x'_2 eta x'_1 posizioak aldiune bereberean neurtzen diren, hots, $t'_2 = t'_1$. Hau da, S' sisteman "barraren mutur bien posizioak aldi berekotasunez neurtzea" direlako gertaerak, P_1 eta P_2 alegia, S' sisteman aldiberekoak dira, noski, hots, $t'_2 = t'_1$, baina S sisteman ez dira aldibereko gertaerak, hots, $t_2 \neq t_1$. P_1 eta P_2 orain tsu aipaturiko gertaeren koordinatu espazio-denboralak, S eta S' direlako sistemetan neurturik, ondokoak dira:

	S sisteman	S' sisteman
P_1	(x_1, t_1)	(x'_1, t'_0)
P_2	(x_2, t_2)	(x'_2, t'_0)

Lorentz-en transformazio bereziak erabiliz, zera dugu:

$$\begin{aligned} x_1 &= \gamma(x'_1 + vt'_0) \\ x_2 &= \gamma(x'_2 + vt'_0) \end{aligned} \implies x_2 - x_1 = \gamma(x'_2 - x'_1)$$

$$\frac{l_0}{\gamma} = l$$

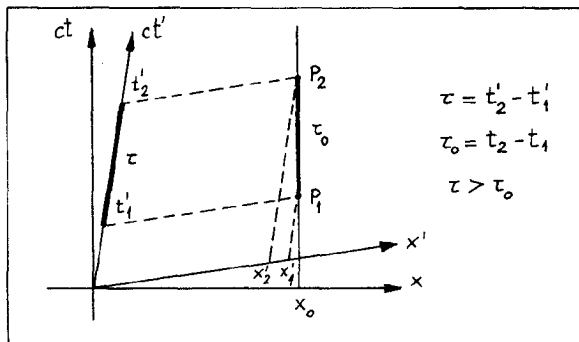
Hau da, luzera inpropioa beti luzera propioa baino txikiago neurtzen da, $\gamma > 1$ baita. Eraitza honi luzeraren kontrakzioa edo uzkur dura deritzogu, eta delako kontrakzio hau ez da luzeraren kontrakzio erreala, aldiberekotasunaren erlatibitasunaren ondorioa baizik. Aipaturiko kontrakzioa grafikoki ere ikus daiteke Minkowsky-ren diagramak direla medio, eskala desberdinak erabiltzen ditugula kontutan harturik.

Bira l_0 delako luzera propioa duten barra berdin bi, beraien orientazioa berbera izanik. Bata bestearekiko haien lu

zeraren norabidean abiadura konstantez higitzen badira, orduan lehen barraren sistema propioan bigarren barraren luzera l_0 baino txikiagoa neurtzen den bitartean, bigarren barraren sistema propioan lehen barraren luzera l_0 baino txikiagoa neurtzen da, baita ere. Beraz, zera ondorioztatzen da: "luzeraren kontrakzioa aztertzerakoan lortzen diren emaitzak, simetrikoak dira".

3.- DENBORAREN ZABALKUNTZA.

S sistemako puntu finko batetan, x_0 delakoan, jazotzen diren bi gertaeraren arteko denbora-tartea neurtzen saiatuko gara, S eta S' direlako sistemetan. Aipaturiko bi gertaerei, P_1 eta P_2 deritzegu.



P_1 eta P_2 gertaeren koordenatuak ondoko hauek dira:

	S sistematan	S' sistematan
P_1	(x_0, t_1)	(x'_1, t'_1)
P_2	(x_0, t_2)	(x'_2, t'_2)

non $x'_1 \neq x'_2$ den, noski.

Kasurik orokorrean, P_1 eta P_2 gertaeren koordenatuak (x_1, t_1) eta (x_2, t_2) izanik, $x_1 = x_2$ baldin bada, orduan $t_2 - t_1 = \tau_0$ delako denbora-tarteari denbora-tarte propioa deritzogu eta $x_1 \neq x_2$ baldin bada, orduan $t_2 - t_1 = \tau$ delako denbora-tarteari,

denbora-tarte inpropioa.

Kasu honetan, $x_1 = x_2 = x_0$ eta $x'_1 \neq x'_2$; beraz, lehen aipaturiko gertaeren arteko denbora-tarteari denbora-tarte propioa deritzogu S sisteman neurtzen baldin badugu eta denbora-tarte inpropioa S' sisteman neurtzen badugu; hots, $t_2 - t_1 = \tau_0$ delako denbora-tarteari, denbora-tarte propioa deritzogu eta $t'_2 - t'_1 = \tau$ delako denbora-tarteari denbora-tarte inpropioa.

Lorentz-en transformazio berezia erabiliz, ondokoa dugu:

$$\begin{aligned} t'_1 &= \gamma \left(t_1 - \frac{v}{c^2} x_0 \right) \\ t'_2 &= \gamma \left(t_2 - \frac{v}{c^2} x_0 \right) \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} t'_2 - t'_1 &= \gamma (t_2 - t_1) \\ \tau &= \gamma \tau_0 \end{aligned}$$

Honela, ba, denboraren zabalkuntza agertzen zaigu, hots, denbora-tarte inpropioa beti denbora-tarte propioa baino luzeago neurtzen da, $\gamma > 1$ baita.

Kontura gaitezen, bi gertaeraren artean S delako inertzi sisteman neurtzen den denbora-tarte propioa, bi gertaera berberen artean S' inertzi sisteman neurtzen den denbora-tarte inpropioa baino txikiagoa den bitartean, modu berean bi gertaeraren artean S' delako inertzi sisteman neurtzen den denbora-tarte propioa, bi gertaera berberen artean S inertzi sisteman neurtzen den denbora-tarte inpropioa baino txikiagoa dela. Beraz, A eta B direlako erlojuak izanik, A erlojua S sisteman pausagunean baldin badago eta B erlojua S' sisteman pausagunean baldin badago, oraintsu aztertutako denboraren zabalkuntzaren arauera, S sisteman B erlojua atzeratu egiten dela ateratzen da ondorioz; eta modu berean, S' sisteman A erlojua atzeratu egiten dela ateratzen da ondorioz, S eta S' direlako sistemak inertzialak baidira.

Demagun orain bi biki: A eta B. A bikia S sisteman pausagunean baldin badago eta B bikia S' sisteman pausagunean baldin badago, orduan, denboraren zabalkuntzaren simetrikotasunaren arauera, S sisteman B bikia A bikia baino gazteagoa dela atera-

tzen da ondorioz eta S' sisteman A bikia B bikia baino gazteagoa dela ateratzen da ondorioz. Hots, A bikiak bere anaia bera baino gazteagoa dela ondorioztatzen duen bitartean, B bikiak ere bere anaia bera baino gazteagoa dela ondorioztatzen du.

Azken ondorio honek bikien paradoxara garamatza, hots, bi bikiak berriz elkartzen baldin badira, orduan nor da benetan gazteena, A bikia ala B bikia?

4.- BIKIEN PARADOXA.

Demagun adin bereko A eta B bikiak Lurrean daudela. Suposa dezagun, A bikia Lurrean $I(0,0,0)$ delako puntuan gelditzen den bitartean, S bere erreferentzi sistema propioa izanik, B bikia suziri batetan sarturik v delako abiadura konstantez espazioan zehar bidaia bat egitera doala, beraren ibilbidea leerro zuzena izanik eta S' beraren erreferentzi sistema propioa delarik.

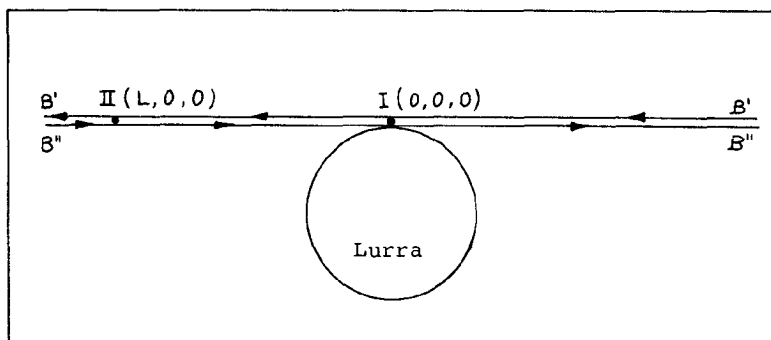
B bikia $t=t' = 0$ delako aldiunean $I(0,0,0)$ puntutik bidaia egitera irteten da eta S sisteman neurtzen den $II(L,0,0)$ delako puntuan denbora-tarte mesprezagarri batetan bira egin eta joanaren ibilbide berean eta abiadura ere berbera delarik Lurre-ra itzultzen da.

Demagun Lurrean geldirik dagoen bikiak bidaia osoaren denbora-tartea T dela neurtzen duela. Orduan A bikiak, B bikiak joanaren eta etorriaren bidaiak egiteko $T/2$ denbora-tarte inpropioa behar izan duela pentsa dezake, joanaren eta etorriaren ibilbideak berberak baitira. A bikiak denboraren zabalkuntzaren fenomenoaz ezagutzen duenez gero, B bikiak joatean $\frac{T}{2\gamma}$ denbora-tarte propioa neurtzen duela ondorioztatzen du, eta berdin etortzean, hots, B bikia bera baino gazteago itzultzen dela ateratzen du ondorioz. Baina lehen aipaturiko simetriaren arauera, arrazona mendu berbera eginez gero, B bikiak A bikia berarengana bera baino gazteago itzultzen dela aterako luke ondorioz. Orduan, bi bikiak berriz elkar aurkitzen dutenean, nor ote da benetan gazteena?

Hemen dugu, ba, bikien paradoxa deitutakoa, eta lehengo galdoraren erantzuna, hots, paradoxaren azalpena, ondokoa da:

Bi bikiek elkar aurkitzen dutenean, B bikia A bikia baino gazteagoa delakoan ados daude, bidaia zein bikik egin zuen mugatzea posible baita, hots, S' sistema ez baita inertziala eta beraz S eta S' sistemak ez baitira baliokideak. Diodanez, B bikiaren erreferentzi sistema propioa, S' delakoa, ez da inertziala, bidaiaren aldiune batetan azelarazio ez-nulua neur baitaiteke, hots, B bikiak bira egiterakoan, neur daitekeen azelarazio ez-nulua pairatzen baitu. Hemen datza, ba, paradoxaren azalpena.

Problema honetan agertzen den azelarazioa ezabatzea posiblea da, hirugarren erreferentzi sistema bat hartuz, eta haxe da, bikien paradoxa ebatzi ahal izateko guk eginen duguna. A bikiaren erreferentzi sistema propioari, S deritzogu. Bira B' eta B'' suziriak eta suposa dezagun v delako abiadura konstantez Lurreko I puntutik pasatzen direla, ibilbide berean zehar baina aurkako norantzan, eta suziri biak I eta II direlako puntu



etatik pasatzen direla. B' suziriaren erreferentzi sistema propioari S' deritzogu eta B'' suziriaren erreferentzi sistema propioari, S'' . Bistan denez, S , S' eta S'' erreferentzi sistemak inertzialak dira.

Demagun A bikiak eta suzirien pilotuek erloju bana du tela, baina B bikiak, hots, azeleratzen den bikiak, erlojurik ez duela.

B' suziria I puntutik pasatzen den aldiunean, B bikiak Lurretik B' suzirira jauzi egiten du. Bestalde, demagun B' eta B'' suziria II puntuan gurutzatzen direla, eta gurutzatzearen aldiunean, B bikiak B' suziritik B'' suzirira jauzi egiten duela. Azkenez, B'' suziria I delako puntutik pasatzen den aldiunean, B bikiak suziritik Lurrera jauzi egiten du.

B bikiaren, hots, azeleratzen den bikiaren erreferentzi sistema propioa inertziala ez denez gero, ezin konpara ditzakegu Lorentz-en transformazioen bidez, sistema honetan egindako neurriak S inertzi sisteman egindakoekin; bestalde, aldiz, S' eta S'' sistemak inertzialak direnez gero, sistema hauetan eginiko neurriak S delako sisteman eginiko neurriekin konpara ditzakegu. Hara!

Demagun "B' suziria I puntutik pasatzea" delako gertaeraren aldiunea $t=t'=0$ dela; orduan, "B bikiak Lurretik B' suzirira jauzi egitea" delako gertaera ondoko koordinatuen bidez adieraziko dugu Minkowsky-ren espazioan:

$(0;0,0,0)$ S sisteman

$(0;0,0,0)$ S' sisteman

"B' suziria II puntutik pasatzea" delako gertaeraren denbora-aldiune propio eta inpropioa ondokoak dira:

$t = L/v$ inpropioa

$t' = L/\gamma v$ propioa

Orduan, "B bikiak B' suziritik B'' suzirira jauzi egitea" delako gertatzeraren koordinatuak Minkowsky-ren espazioan ondokoak dira:

$(cL/v; L, 0, 0)$ S sisteman

$(cL/\gamma v; 0, 0, 0)$ S' sisteman

"B'' suziria II puntutik pasatzea" delako gertaeraren aldiunea $t'' = 0$ dela suposatzen baldin badugu, orduan "B'' suziria I puntutik pasatzea" delako gertaeraren aldiunea ondokoa da:

$$t = 2L/v$$

$$t'' = L/\gamma v$$

Beraz, "B bikiak B'' suziritik lurrera jauzi egitea" delako gertaeraren koordenatuak Minkowsky-ren espazioan ondoko hauek dira:

$(c2L/v; 0, 0, 0)$ S sisteman

$(cL/\gamma v; 0, 0, 0)$ S'' sisteman

B bikiak, II delako puntura heltzen denean, B' suziria ren pilotuari I puntutik II puntura joateko zenbat denbora behar izan duten galdetzen dio, eta pilotuaren erantzuna zera da: $L/\gamma v$ segundu. Modu berean, B bikiak, Lurrera heltzen denean, hots, I puntura heltzen denean, B'' suziriaren pilotuari II delako puntutik I delako puntura joateko zenbat denbora behar izan duten galdetzen dio, eta pilotuaren erantzuna zera da: $L/\gamma v$ segundu. Beraz, B bikiak, Lurrera itzultzen denean, ondoko ondorioa ateratzen du: "Lurretik irten nintzenetik hona $2L/\gamma v$ segundu pasatu da, hots, orduan baino $2L/\gamma v$ segundu zaharragoa naiz". Lur rean geratzen den bikiak, aldiz, bere anaia lurretik irten zenetik Lurrera berriz itzuli den arte $2L/v$ segundu pasatu dela ondorioztatzen du. Beraz, B bikia bidaiatik Lurrera gazteago itzultzen da, eta gainera biki biak daude horretan ados.

Orain arte lorturiko emaitzak, Minkowsky-ren diagrama ren laguntzaz argituak izan daitezke:

tuaren bidez adierazitako unibertso-lerroan zehar S eta S' erreferentzi sistema inertzialak konparatzen ditugu, eta AB segmen-
tuaren bidez adierazitako unibertso-lerroan zehar S eta S' erreferentzi sistema inertzialak konparatzen ditugu. Baina OAB
lerro hautsiaren bidez adierazitako unibertso-lerroan zehar, S
sistema inertziala eta B bikiaren erreferentzi sistema propioa,
ez-inertziala, konparatzen ditugu; beraz, azken kasu honetan ez
zaigu lehen aipaturiko simetria agertzen.

B delako bikiak B' suziritik B'' suzirira jauzi egite
ko behar duen denbora-tarte propio infinitesimala pasatuz gero,
S sisteman denboraren salto bat dagoela, α_1 delako puntutik α_2
delako puntura alegia, adierazten digu irudiak. Denbora-salto
honek grafikoki azaltzen digu problema honetan agertzen den asi
metria, baina delako denbora-saltoa ez da beha daitekeen efektu
errealak. Hau hobeki ulertzeko, Doppler efektuaren bidez azalduko
dugu aurrerantzean bikien paradoxa.

Demagun A bikia lurrean gelditzen dela eta B bikia su
zirian espazioan zehar bidaia bat egitera doan bikia dela. Lu-
rraren erreferentzi sistema propioan (S sisteman alegia) neurtu
rik, Lurretik L distantziara dagoen puntu batetan, B bikiak bi
ra egiten du. Demagun, halaber, A eta B bikiak radar bana dute-
la eta radar hauek biki bakoitzaren sistema propioan f pultsu
segundoko botatzen dutela.

Doppler efektuaren arauera, A eta B igorleak izanik,
batak bestearengandik hartzen duen frekuentzia ondokoa dugu:

$$f' = f (1 - \beta)^{1/2} / (1 + \beta)^{1/2} \quad \text{elkarrengandik aldentzen direnean}$$

$$f'' = f (1 + \beta)^{1/2} / (1 - \beta)^{1/2} \quad \text{elkarrengana hurbiltzen direnean}$$

f delakoa igorle bakoitzak igorritako frekuentzia izanik, dago-
kion sistema propioan, noski.

Beraz, Doppler efektuaren arauera, B bikia Lurretik al denduala, A eta B bikiek elkarrengandik hartzen duen frekuentzia, ondoko hau da:

$$f' = f \left(\frac{1-\beta}{1+\beta} \right)^{1/2}$$

Baina delako frekuentzia hau zenbat denboratan zehar hartzen dute A eta B direlako bikiek batak bestearengandik? Hementxe berton agertzen da, ba, gure arazoaren asimetria eta, beraz, paradoxaren azalpena. B bikiak bere ibilbidearen norantza aldatzen due nerarte, A bikiarengandik hartzen duen frekuentzia ondokoa da:

$$f' = f \left(\frac{1-\beta}{1+\beta} \right)^{1/2}$$

Baina A bikiaren kasuan ez da gauza bera gertatzen; hau da, B bikiak bere ibilbidearen norantza aldatu aurretik igorri duen azken seinaleak L/c denbora (S delako sisteman neurturiko denbora) behar du, A bikiak jaso dezan; beraz bidaiaren denbora-tarte oso aren erdia baino denbora luzeagotan zehar A bikiak B delakoarengandik hartzen duen frekuentzia, ondokoa da:

$$f' = f \left(\frac{1-\beta}{1+\beta} \right)^{1/2}$$

Bestalde, Doppler efektuaren arauera, B bikia lurrera hurbilduala, A bikiak B delakoarengandik eta B bikiak A delakoarengandik hartzen duten frekuentzia, ondoko hau da:

$$f'' = f \left(\frac{1+\beta}{1-\beta} \right)^{1/2}$$

B bikiak bere ibilbidearen norantza aldatzen duen aldiunetik aurrera, A bikiarengandik hartzen duen frekuentzia ondokoa da:

$$f'' = f \left(\frac{1+\beta}{1-\beta} \right)^{1/2}$$

A bikiak, aldiz, bidaiaren denbora-tarte osoaren erdia baino denbora laburragotan zehar hartzen du f'' delako frekuentzia B bikiarengandik.

Bikien paradoxaren azalpena Doppler efektuaren ondorioen bidez argi eta garbi gera dadin, ondoko eskemaz baliatu ko gara:

		A bikiak neurturikoa	B bikiak neurturikoa
1.	Bidaia osoaren denbora-tartea	$T = \frac{2L}{v}$	$T' = \frac{2L}{\gamma v}$
2.	Igorritako pultsuen kopuru osoa	$fT = \frac{2fL}{v}$	$fT' = \frac{2fL}{\gamma v}$
3.	B bikiaren bira detektaturikoaren aldiunea	$t_1 = \frac{L}{v} + \frac{L}{c} = \frac{L}{v} (1 + \beta)$	$t'_1 = \frac{L}{\gamma v}$
4.	f' delako frekuentziaz harturiko pultsuen kopurua	$f't_1 = f \frac{L}{v} (1 + \beta) \left(\frac{1 - \beta}{1 + \beta} \right)^{1/2} = f \frac{L}{v} (1 - \beta^2)^{1/2}$	$f't'_1 = f \frac{L}{v} (1 - \beta^2)^{1/2} \left(\frac{1 - \beta}{1 + \beta} \right)^{1/2} = f \frac{L}{v} (1 - \beta)$
5.	B delakoaren bira detektatu eta gero geratzen den bidaia-denbora	$t_2 = \frac{L}{v} - \frac{L}{c} = \frac{L}{v} (1 - \beta)$	$t'_2 = \frac{L}{\gamma v}$
6.	f'' delako frekuentziaz harturiko pultsuen kopurua	$f''t_2 = f \frac{L}{v} (1 - \beta) \left(\frac{1 + \beta}{1 - \beta} \right)^{1/2} = f \frac{L}{v} (1 - \beta^2)^{1/2}$	$f''t'_2 = f \frac{L}{v} (1 - \beta^2)^{1/2} \left(\frac{1 + \beta}{1 - \beta} \right)^{1/2} = f \frac{L}{v} (1 + \beta)$
7.	Harturiko pultsuen kopuru osoa	$f't_1 + f''t_2 = \frac{2fL}{\gamma v}$	$f't'_1 + f''t'_2 = \frac{2fL}{v}$
8.	Beste bikiak igaro duen denborari dagokion ondorioa	$T' = \frac{2L}{\gamma v}$	$T = \frac{2L}{v}$

Ondoren, adibide bat eginen dugu:

1984.eko Urteberri egunean, astronauta bat, B delakoa, Lurretik 0'8c delako abiadura konstantez irteten da eta Lurrean neurturik Lurretik lau argi-urtetako distantziara dagoen izarre ra abiatzen da. Behin aipaturiko izarrera heldu eta gero, bira egin eta berriz Lurrera itzultzen da, orain ere abiadura 0'8c izanik eta abiapuntura, hots, Lurrera, Lurrean neurturiko 1994. eko Urteberri egunean heltzen delarik. Aipaturiko astronautak biki bat du, A delakoa, Lurrean geratzen dena. Biki biek, bidai aria Lurrera itzuli arte, Urteberri egun bakoitzean telefono-ra dar baten bidez zorionak ematea erabakitzen dute. Orduan:

a) A bikiak hamar seinale bialtzen duen bitartean, B bikiak sei seinale bakarrik bialtzen du, bere bidaiaren azken egunean bialtzen duena barne delarik.

b) Minkowsky-ren diagraman A bikiak bialtzen dituen radar-seinale guztien unibertso-lerroak adieraziz gero, B bikiak bere bidaiaren joanean seinale bat bakarrik jasotzen duela eta falta diren bederatziak bere bidaiaren etorrian jasotzen di tuela ondorioztatzen da.

c) Minkowsky-ren diagraman B bikiak bialtzen dituen radar-seinale guztien unibertso-lerroak adieraziz gero, A bikiak bere anaiaren irteeratik Lurrean neurturiko bederatzigarren urtea bete arte, hiru urterik hiru urtera seinale bana hartzen duela eta azken urtean zehar hiru seinale gehiago hartzen duela ondorioztatzen da. Beraz, A bikiak 6 seinale hartzen duelarik eta B bikiak hamar seinale hartzen duelarik, astronauta delakoa Lurrean geratzen dena baino gazteago itzultzen delakoan ados daude biki biak.

d) Azkenez, emaitza hauek Doppler efektuaren bidez in terpreta daitezke.

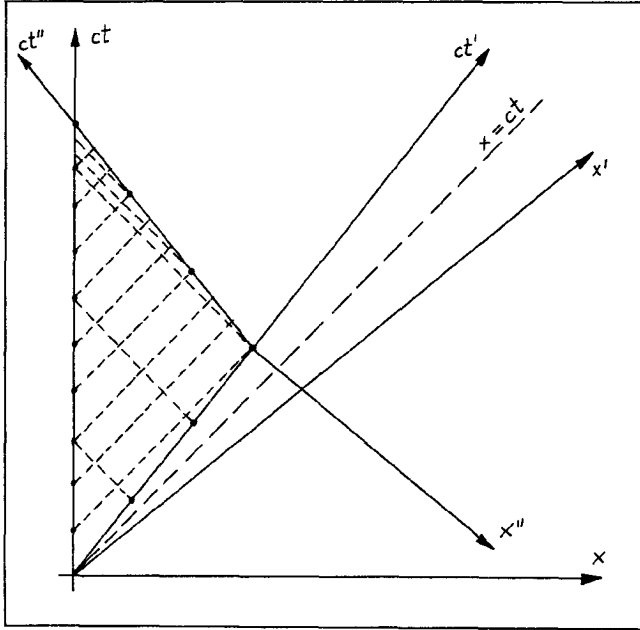
a) - Lurrean neurturiko denbora: $T = 10$ urte

A bikiak igorritako seinale-kopurua: $fT = 10$

- Suzirian neurturiko denbora: $T' = 6$ urte

B bikiak igorritako seinale-kopurua: $fT' = 6$

b) eta c)



d) A bikiak neurturikoa

1. $T = 10$ urte
2. $fT = 10$
3. $t_1 = \frac{T}{2} + \frac{L}{c} = \frac{T}{2} + \frac{Tv}{2} \cdot \frac{1}{c} = 9$
4. $f't_1 = f \left(\frac{1-\beta}{1+\beta} \right)^{1/2} t_1 = \frac{1}{3} \cdot 9 = 3$
5. $t_2 = \frac{T}{2} - \frac{L}{c} = 5 - 4 = 1$
6. $f''t_2 = f \left(\frac{1+\beta}{1-\beta} \right)^{1/2} t_2 = 3 \cdot 1 = 3$
7. $f't_1 + f''t_2 = 3 + 3 = 6$
8. $T' = 6$ urte

B bikiak neurturikoa

$$\begin{aligned}
 T' &= \frac{5}{\gamma} + \frac{5}{\gamma} = 6 \text{ urte} \\
 fT' &= 6 \\
 t'_1 &= \frac{T'}{2} = 3 \\
 f't'_1 &= f \left(\frac{1-\beta}{1+\beta} \right)^{1/2} t'_1 = \frac{1}{3} \cdot 3 = 1 \\
 t'_2 &= \frac{T'_2}{2} = 3 \\
 f''t'_2 &= f \left(\frac{1+\beta}{1-\beta} \right)^{1/2} t'_2 = 3 \cdot 3 = 9 \\
 f't'_1 + f''t'_2 &= 1 + 9 = 10 \\
 T &= 10 \text{ urte}
 \end{aligned}$$

B I B L I O G R A F I A

- J.L. ANDERSON. "Principles of Relativity Physics". Academic Press. New York. San Francisco. London. 174-178
- L. ESSEN. "The Special Theory of Relativity". Oxford Science Research Papers. 12-13.
- J.R. ETXEBARRIA & L. EMALDI & B. JAUREGIZAR & B. ZURIMENDI. "Erlatibitatearen Teoria Espeziala". VI. U.E.U. Iruinea, 1978. 49-62.
- A.P. FRENCH. "Relatividad Especial". Ed. Reverté 1.974. 177-188.
- M. SACHS. "Ideas of the Theory of Relativity". Israel Universities Press, Jerusalem. 69-76
- SHADOWITZ. "Special Relativity". W. B. Saunders Company, Philadelphia. London. Toronto. 43-47
- J.H. SMITH. "Introducción a la Relatividad Especial". Ed. Reverté 1.969. 87-95.
- Ya. P. TERLETSKII. "Paradoxes in the Theory of Relativity". Plenum Press, New York. 1.968. 38-41.

TAKIOIAK

J.M. Pitarke

T A K I O I A K

- 1.- Partikulen sailkapena, beraien abiadurari dagokionez.
- 2.- Takioien historia laburra
- 3.- Takioien eta Erlatibitatearen Teoriaren arteko bateragarri-
tasuna.
- 4.- Takioien masa eta energia.
- 5.- Takioiak eta kausalitatea.
- 6.- Azken ondorioak.
- 7.- Bibliografia.

1.- PARTIKULEN SAILKAPENA, BERAIEEN ABIADURARI DAGOKIONEZ

Partikulak, beraien abiadurari dagokionez, hiru talde tan sailka ditzakegu:

- a) Argiarena baino abiadura txikiagoz higitzen diren partikulak, tardioiak alegia ($v < c$, $\beta < 1$) .
- b) Argiaren abiaduraz higitzen diren partikulak, luxoiak alegia ($v = c$, $\beta = 1$) .
- d) Argiarena baino abiadura handiagoz higitzen diren partikula hipotetikoak, takioiak alegia ($v > c$, $\beta > 1$) .

Lehenengo eta bigarren taldeetako partikulak, hots, tardioiak eta luxoiak, eguneroko bizitzan aurkitzen ditugu; baina hirugarren taldeko partikulak, hots, takioiak, gaurkoz behintzat ez ditugu ezagutzen.

2.- TAKIOIEN HISTORIA LABURRA

Sommerfield-ek 1904. urtean argiarena baino abiadura handiagoko partikulak postulatu zituen, "überlichtgeschwindigkeitsteilchen" delako izenaz bataiatu zituelarik. Baina hurrengo urtean, 1905. urtean alegia, Einstein-ek Erlatibitatearen Teoria plazaratu zuelarik, Sommerfield-en ideiak konturagabekoak izan ziren, Einstein-en Teoriaren arauera materia arruntak lor dezakeen abiadurarik handiena argiaren abiadura izatera inoiz ere iristen ez baita, horretarako energia infinitua behar izango litzateke eta.

Beraz, urte askotan zehar, argiarena baino abiadura handiagoko partikulak Einstein-en Teoriarekin bateraezinak direla pentsatu izan dute fisikariek; baina azken urteotan zenbait artikulua agertu da, partikula horiek Erlatibitatearen Teoriarekin harmonian existi daitezkeela adieraziz. Hortaz hain zuzen, Feinberg-ek 1967. urtean partikula hiperluminiko horiei buruzko

idazlana burutu zuen, izena eman zielarik. Beronek "takioi" delako izenaz bataiatu zituen partikula hipotetiko horiek, "taki" delako erro grekoak "bizkor" esangura azaltzen baitu. Ordurik hona, takioiei buruzko artikulua eta idazlan piloa izan da.

3.- TAKIOIEN ETA ERLATIBITATEAREN TEORIAREN ARTEKO BATERAGARRI-TASUNA

Erlatibitatearen Teoriaren baitan, zera esan eta frogatu dezakegu: Inertzi sistema batekiko partikula baten abiadura argiarena baino txikiagoa baldin bada, orduan partikula horren abiadura argiarena baino txikiagoa izango da edozein inertzi sistemarekiko. Halaber, inertzi sistema batekiko partikula baten abiadura argiarena baldin bada, orduan beste edozein inertzi sistemarekiko ere partikula horren abiadura argiarena izango da. Azkenik, inertzi sistema batekiko partikula baten abiadura argiarena baino handiagoa baldin balitz, orduan beste edozein inertzi sistemarekiko ere partikula horren abiadura argiarena baino handiagoa izango litzateke. Hau da, tardioi, luxoi edo takioi izatea, zertasun aldaezina da. Horrela, edozein tardioi baten abiadura ez da inoiz argiaren abiadura izatera iritsiko eta edozein takioi baten abiadura ez litzateke inoiz ere argiaren abiadura izatera iritsiko, edozein luxoi baten abiadura beti argiarena izan den bezalaxe.

Ondorioz, takioiak Erlatibitatearen Teoriarekin batera garriak izan daitezkeela dirudi. Dena den, partikula hipotetiko hauen izaera azter baldin badezaguz, zenbait oztopo aurki dezakegu. Hara!

4.- TAKIOIEN MASA ETA ENERGIA

Partikula baten masa eta energia erlatibista ondokoak ditugu:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad (1)$$

$$E = mc^2 = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad (2) \quad \text{non } \beta = \frac{v}{c} \text{ den,}$$

v eta m_0 partikularen abiadura eta pausaguneko masa direlarik, hurrenez hurren.

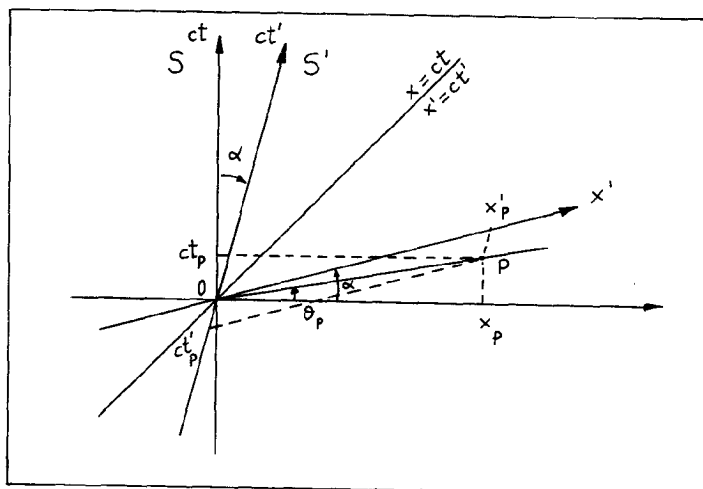
Takioien kasuan $\beta \gg 1$ denez gero, takioien masa eta energia irudikariak direla ondoriozta genezake, beraien pausaguneko masa erreala dela suposa baldin bageneza. Baina takioien pausaguneko masa irudikari purua dela suposa baldin badezagu, orduan haien masa eta energia errealak direla ondoriozta dezakegu, bi zenbaki irudikari pururen arteko zatidura zenbaki erreala baita.

Bestalde, takioien pausaguneko masa irudikaria izateak ez gaitu harritu behar, inertzi sistema guztiekiko beraien abiadura argiarena baino handiagoa baita, hots, takioiak pausagunean inoiz ere aurkitzen ez baitira. Hau da, fotoien kasuan gertatzen den bezalaxe, takioien pausaguneko masak ez du inolako esangura fisikorik.

Beraz, alde honetatik ez dugu oztoporik aurkitzen, takioien izaerari dagokionez.

5.- TAKIOIAK ETA KAUSALITATEA

Har dezagun ondoko Minkowsky-ren diagrama hau:



non $\alpha = \arctg \frac{v}{c}$ den, $\vec{v}(v, 0, 0)$ S' delako sistemak S delakoa-
rekiko duen abiadura izanik.

Diagrama honetan, $t=t'=0$, hots, hasierako aldiunean $x_0=x'_0=0$ delako puntutik irteten den partikula baten unibertso-le-
rroa adieraz dezakegu, zeinen malda partikula horrek S sistema-
rekiko duen abiaduraren arauerakoa den:

$$\operatorname{tg} \theta_p = \frac{ct_p}{x_p} = \frac{c}{v_p} = \frac{1}{\beta_p} \quad (3)$$

Ondorioz, tardioiei dagozkien unibertso-lerroen malda-
ren balio absolutua $(\frac{1}{|\beta|})$ unitatea baino handiagoa da, lu-
xoiei dagozkien unibertso-lerroen maldaren balio absolutua $(\frac{1}{|\beta|})$
unitatea da, eta takioiei dagozkien edo, hobeto esanik, legozkie-
keen unibertso-lerroen maldaren balio absolutua $(\frac{1}{|\beta|})$ unitatea
baino txikiagoa litzateke.

Demagun takioi baten unibertso-lerroa OP delako segmen-
tua dela, O puntuak eta P puntuak takioiaren "emisioa" eta "ab-
sortzioa" direlako gertaerak adierazten dizkigutelarik, hurrunez
hurren. Gertaera hauen koordinatuak S eta S' sistemekiko ondoko-
ak ditugu:

	S sistemarekiko	S' sistemarekiko
O	$(x_0, ct_0) = (0, 0)$	$(x'_0, ct'_0) = (0, 0)$
P	(x_p, ct_p)	(x'_p, ct'_p)

Baina kontura gaitezen, $t_p > t_0$ den bitartean $t'_p < t'_0$ de-
la; hau da, S sistemako behatzailearen ustez takioiaren absor-
tzioa, emisioa edo igorpena gertatu ondoren jazoko litzatekeen
bitartean, S' sistemaren behatzailearen ustez takioiaren absor-
tzioa, igorpena gertatu aurretik jazoko litzateke.

Arazo hau gainditzeko, takioien teoriaren aldekoek be-
rrinterpretazioaren printzipioa postulatu zuten. Printzipio ho-
nen arauera, S sistemako behatzaileak takioia x_0 delako puntuan

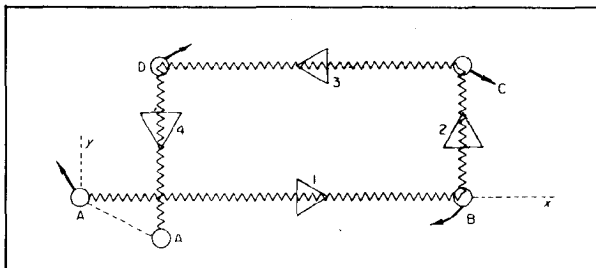
igorria dela eta x_p delakoan absorbitua dela behatzen duen bitartean, S' sistemako behatzaileak takioia x'_p delako puntuan igorria dela eta x'_0 delakoan absorbitua dela behatzen du. Hau da, S sistemako eta S' sistemako behatzaileak ez daude ados puntu bitan:

- takioiaren igorlea zein delakoan; halaber, hartzailea zein delakoan.
- takioiaren hedapenaren norantza zein delakoan.

Baina, honek onartezina badirudi ere, ez da luzeraren uzkurdura eta denboraren zabalkuntza, hots, azken batetan, aldi-berekotasunaren erlatibotasuna baino harrigarriagoa. Modu berean, Euskal Herriko behatzailea eta Zelanda Berriko behatzailea ez daude ados, "goia" edo "behea" zein delakoan eta lurrera erortzen ari den gorputz baten ibilbidearen norantza zein delakoan.

Ondorioz, berrinterpretazioaren printzipioa onartzekotan, badirudi takioien teoria kausalitatearen printzipioaren aurka ez lihoakeela.

Dena dela, takioien hipotesiaren aurkakoez ere ez zuten etsi eta takioien hipotesiak kausalitatearen printzipioa apurtu egiten duela frogatzeko, Pirani-k 1970. urtean, zenbait gertaeraren sekuentzia harturik, ondoko experimentu hipotetikoa proposatu zuen, azken gertaerak lehenengoari gerta ez dadin abisua ematen diolarik:



Demagun, A, B, C, eta D direlako behatzaile inertzialak XY planoan zehar higitzen ari direla. A behatzaileak 1 delako

takioia igortzen du, B behatzaileak jaso dezan; B behatzaileak 1 delako takioia jasotzen duen bezain laster, 2 delako takioia igortzen du, C behatzaileak jaso dezan; C behatzaileak 2 delako takioia jasotzen duen bezain laster 3 delakoa igortzen du D behatzaileak jaso dezan, eta azkenik, D behatzaileak 3 takioia jasotzen duen bezain laster 4 delakoa igortzen du, A behatzaileak jaso dezan. Ondorioz, S sistemarekiko, hots, A behatzailearen sistema propioarekiko, 4 delako takioia 1 delakoa 0 puntutik irten aurretik heltzen da 0 puntura, S sistemaren koordinatu-jatorrira alegia; hau da, A behatzaileak, 1 delako takioia igorri aurretik jasotzen du 4 takioia. Demagun orain, 4 delako takioiak A behatzailearengana heltzean, behatzaile honen takioi-igorlea apurtu egiten duela. Orduan, A behatzaileak 4 delako takioia 1 delakoa igorri aurretik jasotzen duelarik, hots, 1 takioia igorri aurretik beraren takioi-igorlea apurtzen delarik, zer ote da gertaeraren sekuentzia horretan benetan gertatuko litzatekeena? , 1 delako takioia igorria izanen al litzateke?

Piranik, emaitza paradoxiko honetan oinarriturik, takioien hipotesia ezinezkoa dela ondorioztatzen du.

Dena den, takioien hipotesiaren aldekoak Piranik proposaturiko experimentu hipotetikoa baliagabea delakoan daude, Piranik takioiak igortzeko eta jasotzeko, tardioiak, hots, argiaren abiadura baino abiadura txikiagoz higitzen diren takioi-igorle eta takioi-hartzaileak erabiltzen baititu.

Ondorioz, Piranik proposaturiko experimentu hipotetikoa onartzen ez dutelarik, takioien hipotesiaren aldekoek ez dute etsi eta berrinterpretazioaren printzipioan oinarriturik, kasualitatearen berrazterketa egin ondoren, takioien hipotesia kontsistentea dela ondorioztatzen dute. Hortaz hain zuzen, takioien hipotesia kontsistentea dela forgatzeko, Recamik, Schulman-ek eta beste fisikari askok azken urteotan zehar eta hainbat artikulutan zenbait azalpen proposatu dute.

6.- AZKEN ONDORIOAK

Takioien hipotesiaren aldekoek takioien hipotesia kon-sistentea eta baliagarria dela uste baldin badute ere, gaurkoz behintzat, takioiak ez ditugu ezagutzen edo, hobeki esanik, ez dugu takioien berririk. Baina, Erlatibitatearen Teoriaren arauera, takioiak baldin baleude ere, hots, existituko baldin balira ere, guri eskuraezinak izango litzaizkiguke. Ondorioz, teknika-ren aurreramenduaren laguntzaz etorkizunera bidaiatzeko aukera-rik egonen litzatekeen bitartean, zientzia fikzioz idazten du-ten batzuk proposatu dituzten iraganaldirako bidaiak egiteko po-sibilitaterik ez dago eta egonen ere ez.

Hala ere, guk takioiak ezin aurki genitzakeen arren, existituko baldin balira, badirudi tardioien eta takioien edo luxoen eta takioien artean nolabaiteko interakzioen bat detekta genezakeela. Hain zuzen ere, takioiak detektatzeko posibili-tate gisa zera genuke:

Edozein tardioi edo luxoi bat zulo beltzen batetara sartzen baldin bada, ez da inoiz ere irtengo, hori dela eta zu-lo horien izena; baina takioi bat zulo beltzen batetara sartuko balitz, badirudi irten egingo litzatekeela, ez takioi bezala ordea, tardioi bezala baizik, eta ondorioz, detekta genezakeela.

Dena dela, oraindik ez da takioien inolako arrastorik aurkitu; beraz, gaurkoz behintzat, takioiak fisikarien irudime-nean soilik aurkitzen dira.

7.- BIBLIOGRAFIA

- G. SPINELLI. "Absolute Synchronization: Faster-than-light Particles and Causality Violation". Nuovo Cimento 75B, 11 (1983).
- L. MARCHILDON & ADEL F. ANTIPPA. "Superluminal coordinate transformations: Four-dimensional case". Phys.Rev. 27, 1740 (1983).
- L. S. SHULMAN. "Tachyon Paradoxes". Am. J. Phys. 39, 481 (1971).
- O.M.P. BILANIUK & U.K. DESHPANDE & E.C.G. SUDARSHAN. "Meta Relativity" Am. J. Phys. 30, 718 (1962).
- S. PAHOR & J. STRUAD. "Superluminical Transformations and Tachyons". Nuovo Cimento 33B, 821 (1976).
- D.SHAY & K.L. Miller. "Causal and Noncausal Propagations of Both Tardyon and Tachyon Wave Functions". Nuovo Cimento 38A, 490 (1977).
- R.A. MANN. "The Classical Dynamics of Particles Galilean and Lorentz Relativity". Academic Press. New York (1968).
- LAURENCE M. FELDMAN. "Short Bibliography on faster-than-light Particles (Tachyons)". Am. J. Phys. 42, 179 (1974).

II. ERLATIBITATEA ETA ELEKTROMAGNETIKA

ERLATIBITATEA ETA ELEKTROMAGNETIKA:
 $\vec{E}$ ETA $\vec{B}$ BEKTOREEN TRANSFORMAZIOA

J.R. Etxebarria

ERLATIBITATEA ETA ELEKTROMAGNETIKA: $\vec{E}$ ETA $\vec{B}$ BEKTOREEN TRANSFORMAZIOA

- 1.- Newton-en legea Erlatibitatean
- 2.- $\vec{E}$ eta $\vec{B}$ bektoreen transformazioa
- 3.- Eremu elektromagnetikoaren adierazpena Minkowski-ren espazioan
- 4.- Bibliografia

ERLATIBITATEA ETA ELEKTROMAGNETIKA:

$\vec{E}$ ETA $\vec{B}$ BEKTOREEN TRANSFORMAZIOA

Elektromagnetikako teoria oso garaturik zegoen Maxwell-engandik (1831-79), baina, hala ere, dakigunez, XIX.mendearen bukaera-aldean hainbat oztopo agertu ziren, ezin baitzen ongi uztartu Mekanikaren printzipioekin. Eremu elektrikoa eta eremu magnetikoa elkarrekin zerikusirik ez zuten bi gauza desberdintzat harturik zeuden eta horrek mugatu egiten zuen teoriaren garapena.

Lorentz-en lanen azterketan finkaturik, Einstein-ek ardua bereziz arakatu zuen arazoa eta hortik bideratu zuen Erlatibitatearen Teoria Berezia, beronen hasieratzat jotzen den artikularen izenburuak berak ere argi adierazten digun bezala: "Higitzen ari diren gorputzen elektrodinamikaz" (1905). Geroago idatziriko gutun batetan, Michelson-en jaiotzaren mendeurrena ospatzeko egindako batzarre batetan (1952), Einsteinek berak zera idatzi zuen: Erlatibitatearen Teoria Berezira nolabait eramán ninduená, ondoko ustea izan zen, alegia, eremu magnetiko batetan higitzen ari den gorputz baten gainean eragiten duen indar elektroeragilea eremu elektriko bat baino ez dela.

Esaldi horretan garbi azpimarratzen da, eremu elektrikoaren eta eremu magnetikoaren artean dagoen lotura, azken batez, geroago ikusiko dugunez, tentsore elektromagnetikoaren osagai desberdinak baitira. Hain zuzen ere, lantxo honetan lotura honen oinarria azaltzen saiatuko gara, kualitatiboki ongi ulertzeko, prozesu pedagogikoa segituz; eta, horretarako, Lorentz-en transformazioa ezagutzen dela jorik, Newton-en bigarren legearen transformaziotik abiatuko gara.

1.- NEWTON-EN LEGEA ERLATIBITATEAN

Erlatibitatearen printzipioan oinarrituz, Naturako lege fisikoak modu berean adierazi behar dira inertzi sistema guztietan. Beraz, horrela izan beharko da Newton-en bigarren legeari

dagozkionez ere. Zein modutan adierazten da lege hori? Lehen maila batetan,

$$\vec{F} = m \vec{a} \quad (1)$$

erara egin ohi da, inplizituki masaren aldaezintasuna abiapuntu-tzat harturik. Dena den, Erlatibitatearen arloan abiatzean, kontuz ibili behar dugu eta hobe dugu oinarritzat momentu lineala hartzea. Honelatan, Newton-en legea ondoko erara azalduko da:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} \quad (2)$$

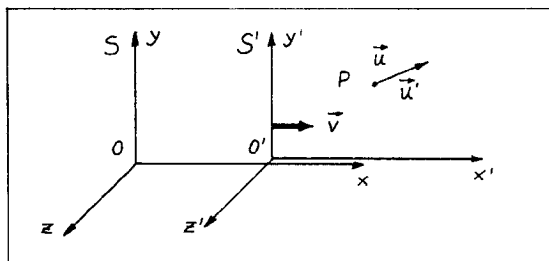
$$\text{non } \vec{p} = \frac{m \vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad \text{den.} \quad (3)$$

Egia esan, bere horretan, lege horrek ez du gako-funtzioa betetzen Erlatibitatearen arloan; baina, nahi izanez gero, mantendu egin liteke beraren forma, hots, beste inertzi sistema batetan

$$\vec{F}' = \frac{d\vec{p}'}{dt} \quad (4)$$

idatzi ahal izango dugu. Zertzu ondorio dakartza horrela jokatzek? Labur esanda, indarraren osagaiak modu bereziz transformatuko dira, baina ez tetrabektore gisa, nahiz eta birdefinizio batez antzeko tetrabektore bat (unibertso-indarra) defini daitekeen^[1].

Ohizkoa den bezala, S eta S' sistemen arteko transformazioa aztertuko dugu, hasieran ($t=t'=0$) sistemak kointzidenteak izanik eta S' sistema S sistemarekiko x ardatzaren direkzioan eta v abiaduraz higitzen delarik (Lorentz-en bultzada). (Ikus irudia)



Partikularen abiadura $\vec{u}$ izanik (S sisteman) eta kalkulu erraz batez ikus daitekeenez, ondokoak dira indarraren osagai en arteko transformazio-ekuazioak^{[2], [3]}:

$$F'_{x'} = \frac{F_x - \left(\frac{v}{c^2}\right) \vec{u} \cdot \vec{F}}{1 - \frac{u_x v}{c^2}} \quad (5a)$$

$$F'_{y'} = \frac{F_y}{\gamma \left(1 - \frac{u_x v}{c^2}\right)} \quad (5b)$$

$$F'_{z'} = \frac{F_z}{\gamma \left(1 - \frac{u_x v}{c^2}\right)} \quad (5c)$$

Ondorio bezala, interesgarria da, potentziak $-\vec{u} \cdot \vec{F}$ jotzen duen papera ikustea (ikus lehenengo ekuazioa, (5a)). Horretan finkatuz, ondoko erlazioa atera dezakegu^[4]:

$$\vec{u}' \cdot \vec{F}' = \frac{\vec{u} \cdot \vec{F} - v F_x}{1 - \frac{u_x v}{c^2}} \quad (6)$$

Ohar gisa diogun, ezen (6) ekuazio honek indarraren osagaien transformazioekin batera, eta zenbait aldaketarekin, te trabektore bat definitzeko balio dezakeela; baina ez dugu hori egingo. Bide horri jarraituz, Erlatibitatearen Teorian energiak eta momentu linealak Dinamika newtondarrean indarrak duen gako-funtzioa hartzen dutela ikusiko genuke^[5]. Bestelako oharrik ere egin dezakegu, hala nola indarraren eta azelerazioaren transformazio-ekuazioak desberdinak direla eta, ondorioz, indarrak eta azelerazioak ez dituztela direkzio paraleloak; baina gure helburu etarako horrek ez du garrantzirik eta, beraz, ez gara arlo horretan sartuko.

Gure ondoko azterketetarako, ordea, interesgarria da

aurreko (5) ekuazioen kasu berezi bat aztertzea. Demagun, partikula aldiune batetan S' sisteman geldi dagoela, non $\vec{F}'$ indarra, $(F'_{x'}, F'_{y'}, F'_{z'})$; jasaten duen. Sistema horretan (propioa) $\vec{u}' = 0$ denez, (5) ekuazioen alderantzizkoak honela geratzen dira:

$$F_x = F'_{x'} \quad (8a)$$

$$F_y = \frac{F'_{y'}}{\gamma} = F'_{y'} \sqrt{1 - v^2/c^2} \quad (8b)$$

$$F_z = \frac{F'_{z'}}{\gamma} = F'_{z'} \sqrt{1 - v^2/c^2} \quad (8c)$$

Emaitza hau hurrengo adibide batetan erabiliko dugu.

2.- $\vec{E}$ ETA $\vec{B}$ BEKTOREEN TRANSFORMAZIOA

Experientzian oinarriturik, indar elektromagnetikoa (Lorentz-en indarra izenaz ezagutua) honela adierazten da (MKSA sisteman):

$$\vec{F} = q (\vec{E} + \vec{u} \wedge \vec{B}) \quad (9)$$

non	$\vec{F}$: indarra q : partikularen karga $\vec{u}$: partikularen abiadura $\vec{E}$: eremu elektrikoa (puntu eta aldiune horretan) $\vec{B}$: eremu magnetikoa (puntu eta aldiune horretan)
-----	--

Ohar gisa diogun, ezen MKSA unitate-sistema erabiliko dugula, nahiz eta eremuen teoria aztertzean gehienek Gauss-en sistema erabili. Dena den, kontzeptualki ez dago inolako arazorik eta ohitura kontua besterik ez da.

Lege hori zuzena dela jorik, bistakoa da, Er^latibitate areⁿ Printzipioaren arauera, lege hau S' sisteman ere, modu bere an beteko dela:

$$\vec{F}' = q (\vec{E}' + \vec{u}' \wedge \vec{B}') \quad (10)$$

Adierazpen honetan explizituki jarri dugu kargaren al-
daezintasuna. Aurreko atalean ikusitako indarraren transformazio
etan finkatuz, eta zenbait kasu berezitan oinarrituz, $\vec{E}$ eta $\vec{B}$
bektoreen transformazio-ekuazioak lortuko ditugu.

Demagun q kargadun partikula aldiune batetan S' siste-
man geldi dagoela, $\vec{E}'$ eta $\vec{B}'$ eremuak dauden toki batetan. Geldi
dagoenez, S' sistemako indar elektromagnetikoa ($\vec{u}' = 0$):

$$\vec{F}' = q \vec{E}' \quad (11)$$

izango da. Ostera, S sisteman partikula horrek S' sistemaren ja-
torriaren abiadura duenez,

$$\vec{v} = v \vec{i} + 0 \vec{j} + 0 \vec{k} \quad (12)$$

indar elektromagnetikoaren balioa hauxe izango da:

$$\vec{F} = q (\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}) \quad (13)$$

(11) eta (13) adierazpenak (8) adierazpenarekin konbinatuz, hau-
xe lortzen dugu:

$$E'_{x'} = E_x \quad (14a)$$

$$E'_{y'} = \gamma (E_y - v B_z) \quad (14b)$$

$$E'_{z'} = \gamma (E_z + v B_y) \quad (14c)$$

eta honen alderantzizkoa:

$$E_x = E'_x, \quad (15a)$$

$$E_y = \gamma (E'_y + v B'_{z'}) \quad (15b)$$

$$E_z = \gamma (E'_{z'} - v B'_{y'}) \quad (15c)$$

(14) eta (15) adierazpenetan susmatzen hasten gara $\vec{E}$ eta $\vec{B}$ bektoreen artean dagoen erlazio estua, eremu elektrikoaren transformazioetan eremu magnetikoa agertzen baitzaigu. Prezeski, sistema batetan (S' -n) eremu elektriko hutsa agertzen den arren, bestean eremu elektrikoa eta magnetikoa agertzen zaizkigu. Hurrengo adibidean alderantziz gertatuko zaigu, nolabait.

Baina aurrera segitu baino lehenago, ohar bat egingo dugu aurreko adierazpenei buruz. Adibidean S' sistemaren abiadura, $\vec{v}$, x ardatzaren direkzioan bailitzen jarri dugu. Dena den, murriz keta hori ez da beharrezkoa. Izatez, eremuaren osagai paralekoak ($//$) eta perpendikularrak ($\perp$) kontutan hartuz, honela idatz daitezke ekuazioak:

$$E'_{//} = E_{//} \quad (16a)$$

$$E'_{\perp} = \gamma [E_{\perp} + (\vec{v} \wedge \vec{B})_{\perp}] \quad (16b)$$

Ikus dezagun orain eremu magnetikoaren transformazioa. Horretarako, lehenago egin dugunaren antzera, adibide sinple batetatik abiatuko gara.

Lehenengo sistema berberak hartuz (S eta S' , berau

$\vec{v} = v\vec{i} + 0\vec{j} + 0\vec{k}$ abiaduraz S -rekiko eta x - x' ardatz berbera). Demagun q kargadun partikula S' sisteman $\vec{u}' = 0\vec{i}' + u'\vec{j}' + 0\vec{k}'$ abiaduraz higitzen ari dela, hots, y' direkzioan. S' sistema hau xe izango da indarra:

$$\vec{F}' = q (\vec{E}' + \vec{u}' \wedge \vec{B}')$$

$$\left| \begin{array}{l} F'_{x'} = q (E'_{x'} + u' B'_{z'}) \\ F'_{y'} = q E'_{y'} \\ F'_{z'} = q (E'_{z'} - u' B'_{x'}) \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} (17a) \\ (17b) \\ (17c) \end{array}$$

Modu berean, abiaduraren transformazio-ekuazioak erabiliz, partikulak aldiune horretan S sisteman duen abiadura kalkula daiteke. Emaizta hau lortzen da:

$$u_x = v \quad (18a)$$

$$u_y = \frac{u'}{\gamma} \quad (18b)$$

$$u_z = 0 \quad (18c)$$

S sisteman haxe izango da indar elektromagnetikoa:

$$\vec{F} = q (\vec{E} + \vec{u} \wedge \vec{B})$$

$$\left| \begin{array}{l} F_x = q (E_x + u_y B_z) \\ F_y = q (E_y - v B_z) \\ F_z = q (E_z + v B_y - u_y B_x) \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} (18a) \\ (19b) \\ (19c) \end{array}$$

Aurreko adierazpenak indarren transformazioenekin konbinatuz, ondokoa lor daiteke:

$$B'_{x'} = B_x \quad (20a)$$

$$B'_{y'} = \gamma (B_y + \frac{v}{c^2} E_z) \quad (20b)$$

$$B'_{z'} = \gamma (B_z - \frac{v}{c^2} E_y) \quad (20c)$$

Egia esan, aurreko adibidearen bidez (20a) eta (20c) lotzen dira. (20b) lortzeko, z' ardatzaren direkzioan higitzen ari den partikula bat aztertu beharko genuke eta, ondoren, prozesu berberari jarraiki.

(20) adierazpenen alderantzizkoak, v abiaduraren ordeztuz jarritik lortzen dira:

$$B_x = B'_x, \quad (21a)$$

$$B_y = \gamma \left(B'_y - \frac{v}{c^2} E'_z \right) \quad (21b)$$

$$B_z = \gamma \left(B'_z + \frac{v}{c^2} E'_y \right) \quad (21c)$$

Lehenago eremu elektrikoa aztertzean egin dugunaren antzera, (20) eta (21) adierazpenak sistemen abiadura erlatiboaren direkzio paralelo eta perpendikularretarako orokor ditzakegu emaitzak:

$$B_{\parallel}' = B_{\parallel} \quad (22a)$$

$$B_{\perp}' = \gamma \left[B_{\perp} - \frac{1}{c^2} (\vec{v} \wedge \vec{E})_{\perp} \right] \quad (22b)$$

Eremu magnetikoaren transformazio-ekuazioetan eremu elektrikoa ere agertzen zaigu, alderantziz gertatzen zenaren antzera. Horrek berriro ere erakusten digu magnitude ber baten atalak direla, alegia, eremu elektromagnetikoaz bere osotasunean mintzatu behar dela, gauza bakar gisa, eta ez eremu elektrikoa eta eremu magnetikoa bi gauza desberdin bailiren.

3.- EREMU ELEKTROMAGNETIKOAREN ADIERAZPENA MINKOWSKI-REN ESPAZIOAN

Aurreko transformazio-ekuazioak Minkowski-ren espazioan eta era kobariantez aztertzea komeni da.

Potentzial bektorialaren ($\vec{A}$) eta potentzial eskalarraren (ϕ) bidez, potentzial elektromagnetikoa delako tetrabektorea (A^μ) definitzen da^{[10], [11], [12]} Minkowski-ren espazioan:

$$A^\mu \longrightarrow \begin{cases} A^0 = \phi \\ A^i = \vec{A} \end{cases} \quad (\phi, \vec{A}) \quad (23)$$

Bestetik dakigunez:

$$\vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \nabla \phi \quad (24)$$

$$\vec{B} = \text{rot } \vec{A} \quad (25)$$

Honetan finkatuz, A^μ tetrabektorearen errotazionalaz eremu elektromagnetikoa tetratentsorea definitzen da:

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \quad (26)$$

$$\text{non} \quad \partial_\mu A_\nu = \frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu} \quad \text{den}$$

Era horretara eginik, tentsore horren osagai kontrabarianteak (MKSA sisteman) hauek dira [12]:

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_1/c & -E_2/c & -E_3/c \\ E_1/c & 0 & -B_3 & B_2 \\ E_2/c & B_3 & 0 & -B_1 \\ E_3/c & -B_2 & B_1 & 0 \end{pmatrix} \quad (27)$$

erabiltzen ari garen metrika $\text{diag}(1, -1, -1, -1)$ izanik.

Behin eremu elektromagnetikoa delako tentsorea definitu ondoren, ikus dezagun, Lorentz-en transformazioa egitean beraren osagaiak nola transformatzen diren; eta, kasu berezi gisa, Lorentz-en bultzada aztertuko dugu, aurreko puntuetan egin ditugun kalkuluekin konparatzeko.

Dakigunez, ondokoak dira tentsorearen osagaien transformazioaren adierazpenak:

$$F^{\mu'\nu'} = L^{\mu'}_{\alpha} L^{\nu'}_{\beta} F^{\alpha\beta} \quad (28)$$

edo notazio matritzialez:

$$F' = L F \tilde{L} \quad (29)$$

S' sistema $\vec{v} = v \vec{l}$ abiaduraz higitzen da S sistemarekiko, hasierako aldiunean jatorrien kointzidentzia egonik (Lorentz-en bultzada). Beraz,

$$L_{\alpha}^{\mu'} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (30)$$

Eta (28) edo (29) adierazpenak ordeztuz jarri,

$$\begin{pmatrix} 0 & -E_1/c & -E_2/c & -E_3/c \\ E_1/c & 0 & -B_3 & B_2 \\ E_2/c & B_3 & 0 & -B_1 \\ E_3/c & -B_2 & B_1 & 0 \end{pmatrix} = \quad (31)$$

$$= \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -E_1/c & -E_2/c & -E_3/c \\ E_1/c & 0 & -B_3 & B_2 \\ E_2/c & B_3 & 0 & -B_1 \\ E_3/c & -B_2 & B_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{c} (-\gamma^2 \beta E_1 + \gamma^2 \beta E_1) & \frac{1}{c} (\gamma^2 \beta^2 E_1 - \gamma^2 E_1) & -\gamma \frac{E_2}{c} + \gamma \beta B_3 & -\gamma \frac{E_3}{c} - \gamma \beta B_2 \\ \frac{1}{c} (\gamma^2 E_1 - \gamma^2 \beta^2 E_1) & \frac{1}{c} (\gamma^2 \beta E_1 + \gamma^2 \beta E_1) & \gamma \beta \frac{E_2}{c} - \gamma B_3 & \gamma \beta \frac{E_3}{c} + \gamma B_2 \\ \gamma \frac{E_2}{c} - \gamma \beta B_3 & -\gamma \beta \frac{E_2}{c} + \gamma B_3 & 0 & -B_1 \\ \gamma \frac{E_3}{c} + \gamma \beta B_2 & -\gamma \beta \frac{E_3}{c} - \gamma B_2 & B_1 & 0 \end{pmatrix}$$

Lehenengo eta azken matrizeen elementuak banan-banan konparatuz, hauxe lortzen da:

$$E'_1 = E_1 \quad (32a)$$

$$E'_2 = \gamma (E_2 - v B_3) \quad (32b)$$

$$E'_3 = \gamma (E_3 + v B_2) \quad (32c)$$

eta halaber:

$$B'_1 = B_1 \quad (33a)$$

$$B'_2 = \gamma (B_2 + \frac{v}{c^2} E_3) \quad (33b)$$

$$B'_3 = \gamma (B_3 - \frac{v}{c^2} E_2) \quad (33c)$$

Horrela (14) eta (20) adierazpenetan lortzen genituen emaitza berberak erdietsi ditugu.

Minkowski-ren espazioan, ba, argi agertzen da $\vec{E}$ eta $\vec{B}$ bektoreen arteko lotura, izatez magnitude ber baten osagaiak bai tira (tentsore antisimetriko baten osagai hertsia). Ondorioz, Lorentz-en transformazioak egitean modu naturalez agertzen da $\vec{b}$ en arteko erlazioa.

BIBLIOGRAFIA

- 1.- A. LICHNEROWICZ: "Elementos de Cálculo Tensorial" Aguilar.
Madrid (1962) 224. or.
- 2.- R. RESNICK: "Introducción a la Teoría Especial de la Relatividad". Limusa. México (1977). 138 or.
- 3.- A.P.FRENCH: "Relatividad Especial" Reverté.
Barcelona (1974). 258or.
- 4.- Ik. 2. lib. 138 or.
- 5.- Ik. 3. lib. 259.or.
- 6.- R.A. MANN: "The Classical Dynamics of Particles Galilean and Lorentz Relativity". 56 eta 66. or.
- 7.- Ik. 1. lib. 240. or.
- 8.- A. SHADOWITZ: "Special Relativity". W.B. Saunders Company.
Philadelphia (1968). 150. or.
- 9.- L.LANDAU ET E. LIFSHITZ: "Théorie du Champ".
MIR. Moscou (1966). 77. or.
- 10.- Ik. 6. lib. 56. or.
- 11.- Ik. 1. lib. 240. or.
- 12.- J.D. JACKSON: "Electrodinámica Clásica". Alhambra Unibersidad. Madrid (1980). 558. or.

MAXWELL-EN EKUAZIOEN ALDAEZINTASUNA

J.M. Pitarke

MAXWELL-EN EKUAZIOEN ALDAEZINTASUNA

- 1.- Erlatibitatearen Teoria zertan oinarritzen den.
- 2.- Erlatibitatearen Printzipioa.
- 3.- Maxwell-en ekuazioen aldaezintasuna.
 - 3.1. Eremu elektromagnetikoaren osagaien transformazioak, Lorentz-en transformazioekiko.
 - 3.2. Karga-dentsitatearen eta korrante-dentsitatearen transformazioak, Lorentz-en transformazioekiko.
 - 3.3. Maxwell-en ekuazioen aldaezintasuna, Lorentz-en transformazioekiko.
- 4.- Mekanikaren ekuazioen aldaezintasuna.
 - 4.1. Mekanikaren ekuazioen aldaezintasuna, Lorentz-en transformazioekiko.
 - 4.2. Newton-en ekuazioen egokitasuna, Erlatibitatearen Teoriaren barrutian.
- 5.- Bibliografia.

1.- ERLATIBITATEAREN TEORIA ZERTAN OINARRITZEN DEN.

Erlatibitatearen Teoria ondoko bi postulatueta oinarritzen da:

- a) Lehen postulata: Erlatibitatearen Printzipioa.
- b) Bigarren postulata: Argiaren abiaduraren aldaezintasunaren Printzipioa.

- Erlatibitatearen Printzipioak zera diosku:

"Naturaren legeak, higidura uniformeaz higitzen diren erreferentzi sistema guztietan, hots, erreferentzi sistema inertzial guztietan, berdina dira".

- Argiaren abiaduraren aldaezintasunaren Printzipioak zera diosku:

"Argiak hutsean duen abiadura erreferentzi sistema inertzial guztietan berdina da, eta ez da igorlearen higiduraren menpekoa".

2.- ERLATIBITATEAREN PRINTZIPIOA.

Erlatibitatearen Printzipioa Galileok enuntziatu zuen lehenengoz. Berak zioenez, edozein experimentu fisikoren emaitza, ez da erreferentzi sistemaren higidura uniformearen menpekoa. Hau da, higidura uniformeaz higitzen diren erreferentzi sistema guztiak baliokideak dira gure Naturaren legeei dagokienez, eta aipaturiko erreferentzi sistema hauei erreferentzi sistema inertzialak edo erreferentziazko inertzi sistemak deritzegu.

Galileo, gertaera baten koordenatuak, hiru koordenatu espazialak eta denborari dagokion koordenatua hain zuzen, erreferentziazko inertzi sistema desberdinetan (S eta S') erlaziona

tzera saiatu zen, ondoko ekuazioak sortuz:

$$\begin{cases} \vec{r}' = \vec{r} - \vec{v}t \\ t' = t \end{cases} \quad (1)$$

hots:

$$\begin{cases} x' = x - v_x t \\ y' = y - v_y t \\ z' = z - v_z t \\ t' = t \end{cases} \quad (1')$$

non (x, y, z, t) , (x', y', z', t') eta $v(v_x, v_y, v_z)$ gertaera berberaren koordenatuak S eta S' direlako inertzi sistemekiko hurrenez hurren eta S' inertzi sistemak S inertzi sistemarekiko duen abiadura konstantea diren. Aurreko ekuazioei Galileo-ren transformazioak deritzegu.

S' delako inertzi sistemak S delakoarekiko duen abiadura $\vec{v}(v, 0, 0)$ baldin bada, orduan ondokoak izango ditugu Galileo-ren transformazioak:

$$\begin{cases} x' = x - vt \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = t \end{cases} \quad (2)$$

Erlatibitatearen Printzipioaren arauera, Mekanikaren ekuazioek tankera berekoak izan behar dute erreferentziazko inertzi sistema guztietan. Beraz, inertzi sistema desberdinetako koordenatuak erlazionatzen dituzten transformazioak Galileo-ren transformazioak direla onar baldin badezagu, orduan Mekanikaren ekuazioek Galileo-ren transformazioekiko aldaezinak izan behar-ko dute. Hara!

S delako inertzi sisteman Mekanikaren ekuazioak ondokoak ditugularik

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F} \quad (3)$$

$$\begin{cases} \frac{dp_x}{dt} = F_x \\ \frac{dp_y}{dt} = F_y \\ \frac{dp_z}{dt} = F_z \end{cases} \quad (3')$$

edo eta

$$\begin{cases} m \frac{d^2x}{dt^2} = F_x \\ m \frac{d^2y}{dt^2} = F_y \\ m \frac{d^2z}{dt^2} = F_z \end{cases} \quad (4)$$

zeren $\begin{cases} p_x = m \frac{dx}{dt} \\ p_y = m \frac{dy}{dt} \\ p_z = m \frac{dz}{dt} \end{cases}$ baitira,

S eta S' direlako sistemen koordenatuak, (x, y, z, t) , (x', y', z', t') , erlazionatzen dituzten transformazioak Galileoren transformazioak direla onar baldin badezagu

$$\begin{cases} x' = x - vt \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = t \end{cases}$$

orduan:

$$\begin{cases} \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d^2x'}{dt'^2} \\ \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{d^2y'}{dt'^2} \\ \frac{d^2z}{dt^2} = \frac{d^2z'}{dt'^2} \end{cases} \quad (5)$$

eta ondorioz, S' delako inertzi sisteman Mekanikaren ekuazioak ondokoak ditugu:

$$\begin{cases} m' \frac{d^2 x'}{dt'^2} = F'_x \\ m' \frac{d^2 y'}{dt'^2} = F'_y \\ m' \frac{d^2 z'}{dt'^2} = F'_z \end{cases} \quad (6)$$

$$\begin{cases} m = m' \\ F_x = F'_x \\ F_y = F'_y \\ F_z = F'_z \end{cases} \quad \text{baldin badira.} \quad (7)$$

Hau da, Mekanikaren ekuazioak aldaezinak dira Galileo-ren transformazioekiko, masa eta indarraren osagaiak aldaezinak direla onartzen badugu.

Baina Galileo-ren Fisika, Mekanika delako arlora hedatzen zen soilik.

1862. urtean Maxwell-ek eremu elektromagnetikoari buruzko oinarritzko ideak argitaratu zituen. Berehala elektromagnetikaren arloan burututako experimentuen ondorioz, Maxwell-en ekuazioak lortu ziren:

$$\begin{cases} \vec{\text{rot}} \vec{H} - \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \vec{j} \\ \vec{\text{rot}} \vec{E} + \mu_0 \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = 0 \\ \text{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \\ \text{div} \vec{H} = 0 \end{cases} \quad (\text{M.K.S. sisteman}) \quad (8)$$

Hutsean eta kargarik egon ezean, ondokoak ditugu Maxwell-en ekuazioak:

$$\begin{cases} \vec{\text{rot}} \vec{H} - \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = 0 \\ \vec{\text{rot}} \vec{E} + \mu_0 \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = 0 \\ \text{div} \vec{E} = 0 \\ \text{div} \vec{H} = 0 \end{cases} \quad (\text{M.K.S. sisteman}) \quad (9)$$

Horrela, Newton-en ekuazioek fenomeno mekanikoen jokatzea arautzen duten bitartean, Maxwell-en ekuazioek fenomeno elektromagnetikoen jokabidea arautzen dute. Bestalde, lehen aztertutako dugunez, Newton-en ekuazioak aldaezinak dira Galileo-ren transformazioekiko; baina, aldaezinak ote dira Maxwell-en ekuazioak Galileo-ren transformazioekiko? Galdera horri ezin diezaiokegu zuzenean erantzun, eremu elektromagnetikoaren osagaiak nola transformatzaren diren jakin artean; baina Maxwell-en ekuazioen ondorio beharrezkoa dugun eremu elektromagnetikoaren osagaien uhin-ekuazioa Galileo-ren transformazioekiko aldaezina ez denez, Maxwell-en ekuazioak ere Galileo-ren transformazioekiko aldaezinak ez direla ondoriozta dezakegu. Hara!

$$\vec{\text{rot}} \vec{\text{rot}} \vec{E} = -\mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \vec{\text{rot}} \vec{H} = -\epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

$$\vec{\text{rot}} \vec{\text{rot}} \vec{E} = \vec{\text{grad}} \text{div} \vec{E} - \nabla^2 \vec{E} = -\nabla^2 \vec{E}$$

$$\vec{\text{rot}} \vec{\text{rot}} \vec{H} = \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \vec{\text{rot}} \vec{E} = -\epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2}$$

$$\vec{\text{rot}} \vec{\text{rot}} \vec{H} = \vec{\text{grad}} \text{div} \vec{H} - \nabla^2 \vec{H} = -\nabla^2 \vec{H}$$

Hau da:

$$\nabla^2 \vec{E} - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0$$

$$\nabla^2 \vec{H} - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} = 0$$

$$\nabla^2 \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0 \quad (10)$$

$$\nabla^2 \vec{H} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} = 0$$

non $c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$ argiak hutsean duen abiadura baita.

Hau da, eremu elektromagnetikoaren osagai bakoitzak uhin-ekuazioa betetzen du. Froga dezagun orain, delako uhin-ekuazio hori, ez dela Galileo-ren transformazioekiko aldaezina:

S delako sisteman uhin-ekuazioa ondokoa dugarik,

$$\begin{aligned}\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} &= 0 \\ \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} &= 0\end{aligned}\quad (11)$$

S eta S' direlako sistemen koordenatuak, (x, y, z, t) , (x', y', z', t') erlazionatzen dituzten transformazioak, Galileo-ren transformazioak direla onar baldin badezagu:

$$\begin{aligned}x' &= x - vt \\ y' &= y \\ z' &= z \\ t' &= t\end{aligned}$$

orduan:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x'} \cdot \frac{\partial x'}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y'} \cdot \frac{\partial y'}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial z'} \cdot \frac{\partial z'}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial t'} \cdot \frac{\partial t'}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x'} \\ \frac{\partial^2}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2}{\partial x'^2} \\ \frac{\partial^2}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2}{\partial y'^2} \qquad \frac{\partial^2}{\partial z^2} = \frac{\partial^2}{\partial z'^2} \\ \frac{\partial}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial x'} \cdot \frac{\partial x'}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial y'} \cdot \frac{\partial y'}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z'} \cdot \frac{\partial z'}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial t'} \cdot \frac{\partial t'}{\partial t} = -v \frac{\partial}{\partial x'} + \frac{\partial}{\partial t'} \\ \frac{\partial^2}{\partial t^2} &= \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial}{\partial t} \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left(-v \frac{\partial}{\partial x'} + \frac{\partial}{\partial t'} \right) \\ \frac{\partial^2}{\partial t^2} &= v^2 \frac{\partial^2}{\partial x'^2} - 2v \frac{\partial^2}{\partial x' \partial t'} + \frac{\partial^2}{\partial t'^2}\end{aligned}$$

Hau da:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2}{\partial x'^2} & \frac{\partial^2}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2}{\partial y'^2} & \frac{\partial^2}{\partial z^2} &= \frac{\partial^2}{\partial z'^2} \\ \frac{\partial^2}{\partial t^2} &= v^2 \frac{\partial^2}{\partial x'^2} - 2v \frac{\partial^2}{\partial x' \partial t'} + \frac{\partial^2}{\partial t'^2}\end{aligned}$$

eta ondorioz, S' delako inertzi sisteman uhin-ekuazioa ondokoa dugu:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2}{\partial z'^2} - \frac{1}{c^2} \left[v^2 \frac{\partial^2}{\partial x'^2} - 2v \frac{\partial^2}{\partial x' \partial t'} + \frac{\partial^2}{\partial t'^2} \right] &= 0 \\ \nabla'^2 - \frac{1}{c^2} \left[v^2 \frac{\partial^2}{\partial x'^2} - 2v \frac{\partial^2}{\partial x' \partial t'} + \frac{\partial^2}{\partial t'^2} \right] &= 0\end{aligned}\quad (12)$$

Hau da, Galileo-ren transformazioen bidez transformaturiko uhin-ekuazioa, ez da tankera berekoa, hots, uhin-ekuazioa ez da aldaezina Galileo-ren transformazioekiko. Beraz, Maxwell-en ekuazioak ere Galileo-ren transformazioekiko aldaezinak ez direla ondoriozta dezakegu. Hau da, inertzi sistema desberdinetako koordinatuak erlazionatzen dituzten transformazioak Galileo-ren transformazioak direla onar baldin badezagu, Maxwell-en ekuazioak inertzi sistema guztietan tankera berekoak ez direla ondoriozta dezakegu.

Bestalde, Erlatibitatearen Printzipioaren arauera, Elektromagnetismoaren ekuazioek tankera berekoak izan behar du te inertzi sistema guztietan. Hori zela eta, zenbait posibilitate izan ziren aurkeztuak aurreko mendeko fisikarien artean:

- 1) Maxwell-en ekuazioak ez dira egokiak fenomeno elektromagnetikoen jokabidea arautzeko, Erlatibitatearen Printzipioaren aurka doazela baitirudi.
- 2) Maxwell-en ekuazioak egokiak dira fenomeno elektromagnetikoen jokabidea arautzeko, baina Erlatibitatearen Printzipioa ez da betetzen fenomeno elektromagnetikoei dagokienez, hots, elektromagnetismoari dagokionez. Horrela, elektromagnetismoari dagokionez behintzat, erreferentzi sistema pribilegiatua existitzen da, etere geldikorraren erreferentzi sistema hain zuzen ere.
- 3) Maxwell-en ekuazioak egokiak dira fenomeno elektromagnetikoen jokabidea arautzeko eta tankera berbera gordetzen dute inertzi sistema guztietan, hots, Erlatibitatearen Printzipioa elektromagnetismoari dagokionez ere betetzen da, baina inertzi sistema desberdinetako koordinatuak erlazionatzen dituzten transformazioak, ez dira Galileo-ren transformazioak.

Maxwell-en ekuazioak experimentu fisikoan ondorioz sortuak ziren alde batetik, eta eterea aurkitzeko experimentu

guztiak arrakasta gabekoak izan ziren beste alde batetik. Beraz, hirugarren posibilitatea onartu beharrekotan, Lorentz-ek 1904.urtean uhin-ekuazioa aldaezina uzten duten inertzia sistemen koordinatuen arteko transformazioak aurkitu zituen:

$$\begin{aligned}x' &= \gamma (x - vt) \\y' &= y \\z' &= z \\t' &= \gamma \left(t - \frac{v}{c^2} x \right)\end{aligned}\tag{13}$$

non $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$ den,

$$\beta = \frac{v}{c} \quad \text{izanik,}$$

S' delako inertzia sistema S delakoarekiko $\vec{v}(v,0,0)$ abiadura konstantez higi baldin badadi. Ekuazio horiei, Lorentz-en transformazioak deritzegu.

Froga dezagun orain lehen esandakoa, hots, Lorentz-en transformazioek uhin-ekuazioa aldaezina uzten dutela. Hara! S delako inertzia sisteman uhin-ekuazioa ondokoa dugarik:

$$\begin{aligned}\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} &= 0 \\ \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} &= 0\end{aligned}$$

S eta S' direlako sistemen koordinatuak, (x,y,z,t) , (x',y',z',t') , erlazionatzen dituzten transformazioak, Lorentz-en transformazioak direla onartzen badugu

$$\begin{aligned}x' &= \gamma (x - vt) \\y' &= y \\z' &= z \\t' &= \gamma \left(t - \frac{v}{c^2} x \right)\end{aligned}$$

orduan:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x'} \frac{\partial x'}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y'} \frac{\partial y'}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial z'} \frac{\partial z'}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial t'} \frac{\partial t'}{\partial x} = \gamma \frac{\partial}{\partial x'} - \gamma \frac{v}{c^2} \frac{\partial}{\partial t'} \\ \frac{\partial^2}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x'} \left(\gamma \frac{\partial}{\partial x'} - \gamma \frac{v}{c^2} \frac{\partial}{\partial t'} \right) \frac{\partial x'}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y'} \left(\gamma \frac{\partial}{\partial x'} - \gamma \frac{v}{c^2} \frac{\partial}{\partial t'} \right) \frac{\partial y'}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial z'} \left(\gamma \frac{\partial}{\partial x'} - \gamma \frac{v}{c^2} \frac{\partial}{\partial t'} \right) \frac{\partial z'}{\partial x} + \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial t'} \left(\gamma \frac{\partial}{\partial x'} - \gamma \frac{v}{c^2} \frac{\partial}{\partial t'} \right) \frac{\partial t'}{\partial x} = \gamma^2 \frac{\partial^2}{\partial x'^2} - 2\gamma^2 \frac{v}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial x' \partial t'} + \gamma^2 \frac{v^2}{c^4} \frac{\partial^2}{\partial t'^2} \\ \frac{\partial^2}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2}{\partial y'^2} \quad \frac{\partial^2}{\partial z^2} = \frac{\partial^2}{\partial z'^2} \\ \frac{\partial}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial x'} \frac{\partial x'}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial y'} \frac{\partial y'}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z'} \frac{\partial z'}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial t'} \frac{\partial t'}{\partial t} = -\gamma v \frac{\partial}{\partial x'} + \gamma \frac{\partial}{\partial t'} \\ \frac{\partial^2}{\partial t^2} &= \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial}{\partial t} \right) \\ \frac{\partial^2}{\partial t^2} &= \gamma^2 v^2 \frac{\partial^2}{\partial x'^2} - 2\gamma^2 v \frac{\partial^2}{\partial x' \partial t'} + \gamma^2 \frac{\partial^2}{\partial t'^2}\end{aligned}$$

eta ondorioz S' delako sisteman uhin-ekuazioa ondokoa dugu:

$$\begin{aligned}\gamma^2 \frac{\partial^2}{\partial x'^2} - 2\gamma^2 \frac{v}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial x' \partial t'} + \gamma^2 \frac{v^2}{c^4} \frac{\partial^2}{\partial t'^2} + \frac{\partial^2}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2}{\partial z'^2} - \frac{1}{c^2} \gamma^2 v^2 \frac{\partial^2}{\partial x'^2} + \frac{1}{c^2} 2\gamma^2 v \frac{\partial^2}{\partial x' \partial t'} - \frac{1}{c^2} \gamma^2 \frac{\partial^2}{\partial t'^2} &= 0 \\ \frac{\partial^2}{\partial x'^2} \gamma^2 (1 - \beta^2) + \frac{\partial^2}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2}{\partial z'^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t'^2} \gamma^2 (1 - \beta^2) &= 0 \\ \frac{\partial^2}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2}{\partial z'^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t'^2} &= 0 \\ \nabla'^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t'^2} &= 0\end{aligned}$$

Hau da, uhin-ekuazioa aldaezina da Lorentz-en transformazioekiko, argiak hutsean duen abiadura inertzia sistema guztietan berdina baldin bada, aldaezina baldin bada alegia.

Ondoren, Einstein-ek 1905. urtean Erlatibitatearen Teoria plazaratu zuen, ondoko bi postulatueta oinarritu zuelarik:

- 1) Erlatibitatearen Printzipioa.
- 2) Argiaren abiaduraren aldaezintasunaren Printzipioa.

Bi postulatu hauek berriz, inertzi sistema desberdinetako koordinatuak erlazionatzen dituzten transformazioak Lorentz-en transformazioak direla onartzera garamatzate.

3.- MAXWELL-EN EKUAZIOEN ALDAEZINTASUNA

Lehen, uhin-ekuazioa Lorentz-en transformazioekiko aldaezina dela frogatu dugu, baina oraindik ez dakigu Maxwell-en ekuazioak ere Lorentz-en transformazioekiko aldaezinak direnontz. Orain, saia gaitezen, ba, horretan.

3.1. Eremu elektromagnetikoaren osagaien transformazioak, Lorentz-en transformazioekiko

Maxwell-en ekuazioen aldaezintasuna frogatzeko, lehenengoz eremu elektromagnetikoaren osagaien transformazioak zeintzu diren jakin beharra dugu. Horretarako, formulazio kobariantea erabiliko dugu.

Biz Lorentziar koordinatuen $S (x^0, x^1, x^2, x^3)$ delako sistema, espazioko ardatz angeluzuzenen OXYZ delako sistemari dagokiona alegia. Sistema honetan, eremu elektrikoa eta magnetikoa espazioko potentzial-bektorearen eta potentzial-eskalarearen ($\vec{A}$ eta ϕ hurrenez hurren) bidez defini daitezke, ondoko modu honetara:

$$\vec{H} = \text{rot } \vec{A} \quad (14)$$

$$\vec{E} = -\text{grad } \phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

(C.G.S. unitate-sisteman)

Bira bestalde, A_x, A_y, A_z OXYZ ardatzekiko $\vec{A}$ espazio ko bektorearen osagaiak, eta $\vec{\Phi}$, S sistemarekiko ondoko lau osagai kontrabarianteen bidez definituriko unitertso-bektorea:

$$\varphi^0 = \phi; \quad \varphi^1 = A_x; \quad \varphi^2 = A_y; \quad \varphi^3 = A_z \quad (15)$$

edo eta ondoko lau osagai kobarianteen bidez defini-
turikoa:

$$\varphi_0 = -\phi ; \quad \varphi_1 = A_x ; \quad \varphi_2 = A_y ; \quad \varphi_3 = A_z \quad (16)$$

oinarrizko tentsore metrikotzat ondokoa hartzen ba-
dugu:

$$g^{\lambda\mu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (17)$$

Ondorioz, eremu elektromagnetikoaren osagaiak on-
doko modu honetara adieraz ditzakegu:

$$\begin{aligned} H_x &= (\vec{\text{rot}} \vec{A})_x = \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} = \partial_2 \varphi_3 - \partial_3 \varphi_2 \\ H_y &= (\vec{\text{rot}} \vec{A})_y = \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} = \partial_3 \varphi_1 - \partial_1 \varphi_3 \\ H_z &= (\vec{\text{rot}} \vec{A})_z = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} = \partial_1 \varphi_2 - \partial_2 \varphi_1 \\ E_x &= (-\vec{\text{grad}} \phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t})_x = -\frac{\partial \phi}{\partial x} - \frac{1}{c} \frac{\partial A_x}{\partial t} = \partial_1 \varphi_0 - \partial_0 \varphi_1 \\ E_y &= (-\vec{\text{grad}} \phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t})_y = -\frac{\partial \phi}{\partial y} - \frac{1}{c} \frac{\partial A_y}{\partial t} = \partial_2 \varphi_0 - \partial_0 \varphi_2 \\ E_z &= (-\vec{\text{grad}} \phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t})_z = -\frac{\partial \phi}{\partial z} - \frac{1}{c} \frac{\partial A_z}{\partial t} = \partial_3 \varphi_0 - \partial_0 \varphi_3 \end{aligned}$$

Hau da, $\vec{H}$ eta $\vec{E}$ espazio-bektoreen sei osagaiak,
unibertso-tentsore antisimetriko baten sei osagai
kobariante hertsien bidez emandakoak dira. Hain zu-
zen:

$$F_{\lambda\mu} = \partial_\lambda \varphi_\mu - \partial_\mu \varphi_\lambda \quad (C_4^2 = 6) \quad (18)$$

$$\begin{aligned} H_x &= F_{23} & E_x &= F_{10} \\ H_y &= F_{31} & E_y &= F_{20} \\ H_z &= F_{12} & E_z &= F_{30} \end{aligned}$$

izanik.

$\vec{H}$ eta $\vec{E}$ espazio-bektoreen sei osagaiak, aipaturiko unibertso-tentsore antisimetriko horren sei osagai kontrabariante hertsia direla medio ere adieraz daitezke:

$$H_x = F^{23}$$

$$E_x = F^{01}$$

$$H_y = F^{31}$$

$$E_y = F^{02}$$

$$H_z = F^{12}$$

$$E_z = F^{03}$$

$$\text{zeren } \begin{cases} F^{01} = -F^{10} \\ F^{02} = -F^{20} \\ F^{03} = -F^{30} \end{cases} \quad \text{baitira.}$$

Hau da, espazio-denboran eremu elektromagnetikoa bigarren ordenako ondoko tentsore antisimetrikoaren bidez definiturik datorkigu:

$$(F^{\lambda\mu}) = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & H_z & -H_y \\ -E_y & -H_z & 0 & H_x \\ -E_z & H_y & -H_x & 0 \end{pmatrix} \quad (19)$$

Delako tentsore honi, eremu elektromagnetikoaren tentsorea deritzogu. Halaber, φ^λ delako unibertso-bektoreari unibertsoko potentzial-bektorea deritzogu, eremu elektromagnetikoaren tentsorea unibertso-ko potentzial-bektorearen errotazionala izanik.

Eremu elektromagnetikoaren tentsorea bigarren ordenako tentsorea denez gero, tentsore horren osagaiak S sistemarekiko $F^{\lambda\mu}$ direlakoak baldin badira, orduan S' sistemarekiko osagai berriak ondokoak izanen ditugu:

$$F^{\lambda'\mu'} = \frac{\partial x^{\lambda'}}{\partial x^\lambda} \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^\mu} F^{\lambda\mu}$$

S eta S' direlako sistemen koordinatuak, (x^0, x^1, x^2, x^3) eta $(x^{0'}, x^{1'}, x^{2'}, x^{3'})$, erlazionatzen dituzten transformazioak Lorentz-en transformazioak direla onartzen badugu:

$$\begin{aligned} x^{1'} &= \gamma (x^1 - \beta x^0) \\ x^{2'} &= x^2 \\ x^{3'} &= x^3 \\ x^{0'} &= \gamma (x^0 - \beta x^1) \end{aligned} \quad (13')$$

non $\gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2}$ den,

$\vec{v} = (v, 0, 0)$ S' delako sistemak S delakoarekiko duen abiadura izanik, orduan S' sistemarekiko eremu elektromagnetikoaren osagaiak ondokoak izanen ditugu:

$$\begin{aligned} H_x' &= F^{2'3'} = \frac{\partial x^{2'}}{\partial x^{\lambda}} \frac{\partial x^{3'}}{\partial x^{\mu}} F^{\lambda\mu} = F^{23} = H_x \\ H_y' &= F^{3'1'} = \frac{\partial x^{3'}}{\partial x^{\lambda}} \frac{\partial x^{1'}}{\partial x^{\mu}} F^{\lambda\mu} = \gamma F^{31} - \gamma \beta F^{30} = \gamma (H_y + \beta E_z) \\ H_z' &= F^{1'2'} = \frac{\partial x^{1'}}{\partial x^{\lambda}} \frac{\partial x^{2'}}{\partial x^{\mu}} F^{\lambda\mu} = \gamma F^{12} - \gamma \beta F^{02} = \gamma (H_z - \beta E_y) \\ E_x' &= F^{0'1'} = \frac{\partial x^{0'}}{\partial x^{\lambda}} \frac{\partial x^{1'}}{\partial x^{\mu}} F^{\lambda\mu} = \gamma^2 F^{01} - \gamma^2 \beta F^{00} - \gamma^2 \beta F^{11} + \gamma^2 \beta F^{10} = F^{01} = E_x \\ E_y' &= F^{0'2'} = \frac{\partial x^{0'}}{\partial x^{\lambda}} \frac{\partial x^{2'}}{\partial x^{\mu}} F^{\lambda\mu} = \gamma F^{02} - \gamma \beta F^{12} = \gamma (E_y - \beta H_z) \\ E_z' &= F^{0'3'} = \frac{\partial x^{0'}}{\partial x^{\lambda}} \frac{\partial x^{3'}}{\partial x^{\mu}} F^{\lambda\mu} = \gamma F^{03} - \gamma \beta F^{13} = \gamma (E_z + \beta H_y) \end{aligned}$$

Hau da:

$$\begin{aligned} H_x' &= H_x & E_x' &= E_x \\ H_y' &= \gamma (H_y + \beta E_z) & E_y' &= \gamma (E_y - \beta H_z) \\ H_z' &= \gamma (H_z - \beta E_y) & E_z' &= \gamma (E_z + \beta H_y) \end{aligned} \quad (20)$$

edo eta

$$\begin{aligned}
 H_x &= H'_x & E_x &= E'_x \\
 H_y &= \gamma(H'_y - \beta E'_z) & E_y &= \gamma(E'_y + \beta H'_z) \\
 H_z &= \gamma(H'_z + \beta E'_y) & E_z &= \gamma(E'_z - \beta H'_y)
 \end{aligned} \quad (21)$$

3.2. Karga-dentsitatearen eta korrante-dentsitatearen transformazioak, Lorentz-en transformazioekiko.

Dakusagun orain, ρ eta $\vec{J}$, karga-dentsitatea eta korrante-dentsitatea alegia, Lorentz-en transformazio bereziekitiko nola transformatzen diren. Hara!

Demagun S sisteman neurturiko ρ delako karga-dentsitatea S sistemarekiko $\vec{v}$ delako abiaduraz higitzen ari dela. Bira S_0 delako karga-dentsitate horren pausaguneko sistema eta ρ_0 pausaguneko karga-dentsitatea, S_0 sisteman neurturikoa alegia.

Bira dV_0 eta $dV = \frac{1}{\gamma} dV_0$, S_0 eta S direlako sistemetan neurturiko oinarritzko bolumenak, hurrenez hurren. Delako oinarritzko bolumen horretan datzan karga-kopurua, ondokoa da:

$$dq_0 = \rho_0 dV_0 \quad S_0 \text{ sistemarekiko} \quad (22a)$$

$$dq = \rho dV \quad S \text{ sistemarekiko} \quad (22b)$$

Karga-kopurua aldaezina dela onartzen baldin badugu, orduan zera dugu:

$$\begin{aligned}
 dq_0 &= dq & \rho_0 dV_0 &= \rho dV = \rho \frac{1}{\gamma} dV_0 \\
 \rho &= \rho_0 \gamma
 \end{aligned}$$

non

$$\gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2}$$

baita, $\beta = \frac{v}{c}$ izanik.

Bestalde, S sistemarekiko korrante-dentsitatea $\vec{J} = \rho \vec{v}$ dugularik, ondoko unibertso-bektorea defini dezakegu, tetrakorrõntea hain zuzen ere:

$$J^\lambda = \rho_0 c u^\lambda \quad (23)$$

non $u^\lambda = (\gamma, \gamma \frac{v_x}{c}, \gamma \frac{v_y}{c}, \gamma \frac{v_z}{c})$ kargaren, hots, S_0 sistemak S sistemarekiko duen tetrabiadura baita. Hone la, zera dugu:

$$\begin{aligned} J^0 &= \rho_0 c \gamma = \rho c \\ J^1 &= \rho_0 c \gamma \frac{v_x}{c} = \rho v_x = J_x \\ J^2 &= \rho_0 c \gamma \frac{v_y}{c} = \rho v_y = J_y \\ J^3 &= \rho_0 c \gamma \frac{v_z}{c} = \rho v_z = J_z \end{aligned} \quad (23')$$

Oraintsu definituriko tetrakorrõntea unibertso-bektorea denez gero, beraren osagaiak S sistemarekiko J^λ baldin badira, orduan S' sistemarekiko osagai berriak ondokoak izanen ditugu:

$$J^{\lambda'} = \frac{\partial x^{\lambda'}}{\partial x^\lambda} J^\lambda$$

S eta S' direlako sistemen koordenatuak erlazionatzen dituzten transformazioak Lorentz-en transformazio bereziak direla onartzen baldin badugu:

$$\begin{aligned} x^{1'} &= \gamma (x^1 - \beta x^0) \\ x^{2'} &= x^2 \\ x^{3'} &= x^3 \\ x^{0'} &= \gamma (x^0 - \beta x^1) \end{aligned}$$

$$\text{non} \quad \gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2} \quad \text{den,}$$

$\vec{v}=(v,0,0)$ S' delako sistemak S delakoarekiko duen abiadura izanik, orduan S' sistemarekiko tetrakorrontearen osagaiak ondokoak izanen ditugu:

$$J^{0'} = \frac{\partial x^{0'}}{\partial x^\lambda} J^\lambda = \gamma J^0 - \gamma \beta J^1 = \gamma (\rho c - \beta J_x)$$

$$J^{1'} = \frac{\partial x^{1'}}{\partial x^\lambda} J^\lambda = \gamma J^1 - \gamma \beta J^0 = \gamma (J_x - \beta \rho c)$$

$$J^{2'} = \frac{\partial x^{2'}}{\partial x^\lambda} J^\lambda = J^2 = J_y$$

$$J^{3'} = \frac{\partial x^{3'}}{\partial x^\lambda} J^\lambda = J^3 = J_z$$

Hau da, karga-dentsitatearen eta korronte-dentsitatearen transformazioak, Lorentz-en transformazioekiko, ondokoak ditugu:

$$\rho' = \gamma \left(\rho - \frac{\beta}{c} J_x \right)$$

$$J_x' = \gamma (J_x - \beta \rho c)$$

$$J_y' = J_y \quad (24)$$

$$J_z' = J_z$$

edo eta

$$\rho = \gamma \left(\rho' + \frac{\beta}{c} J_x' \right)$$

$$J_x = \gamma (J_x' + \beta \rho' c)$$

$$J_y = J_y' \quad (25)$$

$$J_z = J_z'$$

3.3. Maxwell-en ekuazioen aldaezintasuna, Lorentz-en transformazioekiko

Eremu elektromagnetikoaren osagaien transformazioak, karga-dentsitatearenak eta korronte-dentsitatearenak

jadanik dazaguzkigularik, saia gaitezen, azkenik,
 Maxwell-en ekuazioak Lorentz-en transformazioekiko
 aldaezinak direla frogatzera.

Gaussiar unitate-sisteman, Maxwell-en ekuazioak on
 dokoak ditugu:

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{H} - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = 4\pi \frac{\vec{J}}{c}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 4\pi \rho \quad \text{Lehen ekuazio-taldea (26)}$$

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = 0$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{H} = 0 \quad \text{Bigarren ekuazio-taldea (27)}$$

Lehenengoz, lehen ekuazio-taldearen aldaezintasuna
 frogatzera saia gaitezen:

$$\begin{array}{l}
 \text{a) } \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} - \frac{1}{c} \frac{\partial E_x}{\partial t} = \frac{4\pi}{c} J_x \\
 \text{b) } \frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} - \frac{1}{c} \frac{\partial E_y}{\partial t} = \frac{4\pi}{c} J_y \\
 \text{c) } \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} - \frac{1}{c} \frac{\partial E_z}{\partial t} = \frac{4\pi}{c} J_z \\
 \text{d) } \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 4\pi \rho
 \end{array} \quad \longrightarrow \quad \text{Lehen ekuazio-taldea (26')}$$

$$\begin{aligned}
 \text{a) } & \frac{\partial}{\partial x'} \left[\gamma (H'_z + \beta E'_y) \right] \frac{\partial x'^1}{\partial x'^2} - \frac{\partial}{\partial x'} \left[\gamma (H'_y - \beta E'_z) \right] \frac{\partial x'^1}{\partial x'^3} - \frac{\partial}{\partial x'} \left[E'_x \right] \frac{\partial x'^1}{\partial x'^0} = \frac{4\pi}{c} \gamma (J'_x + \beta \rho' c) \\
 & \gamma \frac{\partial H'_z}{\partial y'} + \gamma \beta \frac{\partial E'_y}{\partial y'} - \gamma \frac{\partial H'_y}{\partial z'} - \gamma \frac{\partial E'_z}{\partial z'} + \gamma \beta \frac{\partial E'_x}{\partial x'} = \frac{4\pi}{c} \gamma (J'_x + \beta \rho' c) - \gamma \beta \frac{\partial E'_z}{\partial z'} \\
 & \beta \left(\frac{\partial E'_x}{\partial x'} + \frac{\partial E'_y}{\partial y'} + \frac{\partial E'_z}{\partial z'} \right) + \left(\frac{\partial H'_z}{\partial y'} - \frac{\partial H'_y}{\partial z'} - \frac{1}{c} \frac{\partial E'_x}{\partial t'} \right) = \beta 4\pi \rho' + \frac{4\pi}{c} J'_x \quad (28)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{d) } & \frac{\partial}{\partial x'} \left[E'_x \right] \frac{\partial x'^1}{\partial x'^1} + \frac{\partial}{\partial x'} \left[\gamma (E'_z + \beta H'_y) \right] \frac{\partial x'^1}{\partial x'^2} + \frac{\partial}{\partial x'} \left[\gamma (E'_y - \beta H'_z) \right] \frac{\partial x'^1}{\partial x'^3} = 4\pi \gamma (\rho' + \beta J'_x) \\
 & \gamma \frac{\partial E'_x}{\partial x'} - \gamma \beta \frac{\partial E'_x}{\partial t'} + \gamma \frac{\partial E'_y}{\partial y'} + \gamma \beta \frac{\partial H'_z}{\partial y'} + \gamma \frac{\partial E'_z}{\partial z'} - \gamma \beta \frac{\partial H'_y}{\partial z'} = 4\pi \gamma (\rho' + \beta J'_x) \\
 & \left(\frac{\partial E'_x}{\partial x'} + \frac{\partial E'_y}{\partial y'} + \frac{\partial E'_z}{\partial z'} \right) + \beta \left(\frac{\partial H'_z}{\partial y'} - \frac{\partial H'_y}{\partial z'} - \frac{1}{c} \frac{\partial E'_x}{\partial t'} \right) = 4\pi \rho' + \beta \frac{4\pi}{c} J'_x \quad (29)
 \end{aligned}$$

(29) adierazpena β -z biderkatuz, eta gero (28) eta (29) aldez alde kenduz, zera dugu:

$$(1 - \beta^2) \left(\frac{\partial H'_z}{\partial y'} - \frac{\partial H'_y}{\partial z'} - \frac{1}{c} \frac{\partial E'_x}{\partial t'} \right) = \frac{4\pi}{c} J'_x (1 - \beta^2)$$

Beraz, halabeharrez:

$$\frac{\partial H'_z}{\partial y'} - \frac{\partial H'_y}{\partial z'} - \frac{1}{c} \frac{\partial E'_x}{\partial t'} = \frac{4\pi}{c} J'_x \quad (30)$$

$\beta \neq 1$ baita.

(28) adierazpena β -z biderkatuz, eta gero (28) eta (29) aldez alde kenduz, zera dugu:

$$(\beta^2 - 1) \left(\frac{\partial E'_x}{\partial x'} + \frac{\partial E'_y}{\partial y'} + \frac{\partial E'_z}{\partial z'} \right) = (\beta^2 - 1) 4\pi \rho'$$

Beraz, halabeharrez:

$$\frac{\partial E'_x}{\partial x'} + \frac{\partial E'_y}{\partial y'} + \frac{\partial E'_z}{\partial z'} = 4\pi \rho' \quad (31)$$

$\beta \neq 1$ baita.

Bestalde:

$$b) \frac{\partial}{\partial x^i} \left[H'_{x^1} \frac{\partial x^{i1}}{\partial x^3} - \frac{\partial}{\partial x^{i1}} \left[\gamma (H'_{x^3} + \beta E'_{x^2}) \right] \frac{\partial x^{i1}}{\partial x^1} - \frac{\partial}{\partial x^{i1}} \left[\gamma (E'_{x^2} + \beta H'_{x^3}) \right] \frac{\partial x^{i1}}{\partial x^0} \right] = \frac{4\pi}{c} J'_y$$

$$\frac{\partial H'_x}{\partial z'} + \gamma^2 (\beta^2 - 1) \frac{\partial H'_z}{\partial x'} + \frac{1}{c} \gamma^2 (\beta^2 - 1) \frac{\partial E'_y}{\partial t'} = \frac{4\pi}{c} J'_y$$

$$\frac{\partial H'_x}{\partial z'} - \frac{\partial H'_z}{\partial x'} - \frac{1}{c} \frac{\partial E'_y}{\partial t'} = \frac{4\pi}{c} J'_y \quad (32)$$

$$c) \frac{\partial}{\partial x^{i1}} \left[\gamma (H'_{x^2} - \beta E'_{x^3}) \right] \frac{\partial x^{i1}}{\partial x^3} - \frac{\partial}{\partial x^{i1}} \left[H'_{x^1} \frac{\partial x^{i1}}{\partial x^3} - \frac{\partial}{\partial x^{i1}} \left[\gamma (E'_{x^3} - \beta H'_{x^2}) \right] \frac{\partial x^{i1}}{\partial x^0} \right] = \frac{4\pi}{c} J'_{x^3}$$

$$\gamma^2 (1 - \beta^2) \frac{\partial H'_y}{\partial x'} - \frac{\partial H'_x}{\partial y'} - \gamma^2 (1 - \beta^2) \frac{1}{c} \frac{\partial E'_z}{\partial t'} = \frac{4\pi}{c} J'_z$$

$$\frac{\partial H'_y}{\partial x'} - \frac{\partial H'_x}{\partial y'} - \frac{1}{c} \frac{\partial E'_z}{\partial t'} = \frac{4\pi}{c} J'_z \quad (33)$$

Hau da, S inertzi sisteman Maxwell-en lehen ekuazio-taldea ondokoa dugularik,

$$\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} - \frac{1}{c} \frac{\partial E_x}{\partial t} = \frac{4\pi}{c} J_x$$

$$\frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} - \frac{1}{c} \frac{\partial E_y}{\partial t} = \frac{4\pi}{c} J_y$$

$$\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} - \frac{1}{c} \frac{\partial E_z}{\partial t} = \frac{4\pi}{c} J_z$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 4\pi \rho$$

S eta S' inertzi sistemen koordinatuak erlazionatzen dituzten transformazioak Lorentz-en transformazioak direla onartzen baldin badugu, orduan S' inertzi sisteman Maxwell-en lehen ekuazio-taldea ondokoa izanen dugu:

$$\begin{aligned} \frac{\partial H'_z}{\partial y'} - \frac{\partial H'_y}{\partial z'} - \frac{1}{c} \frac{\partial E'_x}{\partial t'} &= \frac{4\pi}{c} J'_x \\ \frac{\partial H'_x}{\partial z'} - \frac{\partial H'_z}{\partial x'} - \frac{1}{c} \frac{\partial E'_y}{\partial t'} &= \frac{4\pi}{c} J'_y \\ \frac{\partial H'_y}{\partial x'} - \frac{\partial H'_x}{\partial y'} - \frac{1}{c} \frac{\partial E'_z}{\partial t'} &= \frac{4\pi}{c} J'_z \\ \frac{\partial E'_x}{\partial x'} + \frac{\partial E'_y}{\partial y'} + \frac{\partial E'_z}{\partial z'} &= 4\pi \rho' \end{aligned} \quad (34)$$

Saia gaitezen orain, bigarren ekuazio-taldearen aldaezintasuna frogatzera:

$$\begin{aligned} a) \quad & \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} + \frac{1}{c} \frac{\partial H_x}{\partial t} = 0 \\ b) \quad & \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} + \frac{1}{c} \frac{\partial H_y}{\partial t} = 0 \\ c) \quad & \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} + \frac{1}{c} \frac{\partial H_z}{\partial t} = 0 \\ d) \quad & \frac{\partial H_x}{\partial x} + \frac{\partial H_y}{\partial y} + \frac{\partial H_z}{\partial z} = 0 \end{aligned} \quad \longrightarrow \quad \text{Bigarren ekuazio-taldea} \quad (27')$$

$$\begin{aligned} a) \quad & \frac{\partial}{\partial x^1} \left[\gamma (E'_z - \beta H'_x) \right] \frac{\partial x^1}{\partial x^2} - \frac{\partial}{\partial x^1} \left[\gamma (E'_x + \beta H'_z) \right] \frac{\partial x^1}{\partial x^3} + \frac{\partial}{\partial x^1} H'_x \frac{\partial x^1}{\partial x^0} = 0 \\ & \gamma \frac{\partial E'_z}{\partial y'} - \gamma \beta \frac{\partial H'_y}{\partial y'} - \gamma \frac{\partial E'_y}{\partial z'} + \gamma \beta \frac{\partial H'_z}{\partial z'} + \gamma \frac{\partial H'_x}{\partial (ct')} - \gamma \beta \frac{\partial H'_x}{\partial x'} = 0 \\ & \left(\frac{\partial E'_z}{\partial y'} - \frac{\partial E'_y}{\partial z'} + \frac{1}{c} \frac{\partial H'_x}{\partial t'} \right) - \beta \left(\frac{\partial H'_x}{\partial x'} + \frac{\partial H'_y}{\partial y'} + \frac{\partial H'_z}{\partial z'} \right) = 0 \end{aligned} \quad (35)$$

$$\begin{aligned}
 d) \quad & \frac{\partial}{\partial x^i} H'_{x^i} \frac{\partial x^i}{\partial x^1} + \frac{\partial}{\partial x^i} \left[\gamma (H'_{x^2} - \beta E'_{x^3}) \right] \frac{\partial x^i}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial x^i} \left[\gamma (H'_{x^3} + \beta E'_{x^2}) \right] \frac{\partial x^i}{\partial x^3} = 0 \\
 & \gamma \frac{\partial H'_x}{\partial x^1} - \gamma \beta \frac{\partial H'_x}{\partial (ct^1)} + \gamma \frac{\partial H'_y}{\partial y^1} - \gamma \beta \frac{\partial E'_z}{\partial y^1} + \gamma \frac{\partial H'_z}{\partial z^1} + \gamma \beta \frac{\partial E'_y}{\partial z^1} = 0 \\
 & -\beta \left(\frac{\partial E'_z}{\partial y^1} - \frac{\partial E'_y}{\partial z^1} + \frac{1}{c} \frac{\partial H'_x}{\partial t^1} \right) + \left(\frac{\partial H'_x}{\partial x^1} + \frac{\partial H'_y}{\partial y^1} + \frac{\partial H'_z}{\partial z^1} \right) = 0 \quad (36)
 \end{aligned}$$

(36) β -z biderkatuz, eta gero (35) eta (36) aldez alde batuz, zera dugu:

$$(1 - \beta^2) \left(\frac{\partial E'_z}{\partial y^1} - \frac{\partial E'_y}{\partial z^1} + \frac{1}{c} \frac{\partial H'_x}{\partial t^1} \right) = 0$$

Beraz, halabeharrez:

$$\frac{\partial E'_z}{\partial y^1} - \frac{\partial E'_y}{\partial z^1} + \frac{1}{c} \frac{\partial H'_x}{\partial t^1} = 0 \quad (37)$$

$\beta \neq 1$ baita.

(35) β -z biderkatuz, eta gero (35) eta (36) aldez alde batuz, zera dugu:

$$(1 - \beta^2) \left(\frac{\partial H'_x}{\partial x^1} + \frac{\partial H'_y}{\partial y^1} + \frac{\partial H'_z}{\partial z^1} \right) = 0 \quad (38)$$

Beraz, halabeharrez:

$$\frac{\partial H'_x}{\partial x^1} + \frac{\partial H'_y}{\partial y^1} + \frac{\partial H'_z}{\partial z^1} = 0$$

$\beta \neq 1$ baita.

Bestalde:

$$\begin{aligned}
 b) \quad & \frac{\partial}{\partial x^i} E'_{x^i} \frac{\partial x^i}{\partial x^3} - \frac{\partial}{\partial x^i} \left[\gamma (E'_{x^3} - \beta H'_{x^2}) \right] \frac{\partial x^i}{\partial x^1} + \frac{\partial}{\partial x^i} \left[\gamma (H'_{x^2} - \beta E'_{x^3}) \right] \frac{\partial x^i}{\partial x^0} = 0 \\
 & \frac{\partial E'_x}{\partial z^1} - \gamma^2 \frac{\partial E'_z}{\partial x^1} + \gamma^2 \beta \frac{\partial H'_y}{\partial x^1} + \gamma^2 \beta \frac{\partial E'_z}{\partial (ct^1)} - \gamma^2 \beta^2 \frac{\partial H'_y}{\partial (ct^1)} + \gamma^2 \frac{\partial H'_y}{\partial (ct^1)} + \\
 & -\gamma^2 \beta^2 \frac{\partial E'_z}{\partial (ct^1)} - \gamma^2 \beta \frac{\partial H'_y}{\partial x^1} + \gamma^2 \beta^2 \frac{\partial E'_z}{\partial x^1} = 0
 \end{aligned}$$

$$\frac{\partial E'_x}{\partial z'} - \frac{\partial E'_z}{\partial x'} + \frac{1}{c} \frac{\partial H'_y}{\partial t'} = 0 \quad (39)$$

$$\begin{aligned} c) \frac{\partial}{\partial x'^1} \left[\gamma (E'_{x2} + \beta H'_{x3}) \right] \frac{\partial x'^1}{\partial x'} - \frac{\partial}{\partial x'^1} E'_{x1} \frac{\partial x'^1}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial x'^1} \left[\gamma (H'_{x3} + \beta E'_{x2}) \right] \frac{\partial x'^1}{\partial x^0} = 0 \\ \gamma^2 \frac{\partial E'_y}{\partial x'} + \gamma^2 \beta \frac{\partial H'_z}{\partial x'} - \gamma^2 \beta \frac{\partial E'_y}{\partial (ct')} - \gamma^2 \beta^2 \frac{\partial H'_z}{\partial (ct')} - \frac{\partial E'_x}{\partial y'} + \gamma^2 \frac{\partial H'_z}{\partial (ct')} + \\ + \gamma^2 \beta \frac{\partial E'_y}{\partial (ct')} - \gamma^2 \beta \frac{\partial H'_z}{\partial x'} - \gamma^2 \beta^2 \frac{\partial E'_y}{\partial x'} = 0 \end{aligned}$$

$$\frac{\partial E'_y}{\partial x'} - \frac{\partial E'_x}{\partial y'} + \frac{1}{c} \frac{\partial H'_z}{\partial t'} = 0 \quad (40)$$

Hau da, S inertzi sisteman Maxwell-en bigarren ekuazio-taldea ondokoa dugularik,

$$\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} + \frac{1}{c} \frac{\partial H_x}{\partial t} = 0$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} + \frac{1}{c} \frac{\partial H_y}{\partial t} = 0$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} + \frac{1}{c} \frac{\partial H_z}{\partial t} = 0$$

$$\frac{\partial H_x}{\partial x} + \frac{\partial H_y}{\partial y} + \frac{\partial H_z}{\partial z} = 0$$

S eta S' inertzi sistemen koordenatuak erlazionatzen dituzten transformazioak Lorentz-en transformazioak direla onartzen baldin badugu, orduan S' inertzi sisteman Maxwell-en bigarren ekuazio-taldea ondokoa izanen dugu:

$$\frac{\partial E'_z}{\partial y'} - \frac{\partial E'_y}{\partial z'} + \frac{1}{c} \frac{\partial H'_x}{\partial t'} = 0$$

$$\frac{\partial E'_x}{\partial z'} - \frac{\partial E'_z}{\partial x'} + \frac{1}{c} \frac{\partial H'_y}{\partial t'} = 0$$

$$\frac{\partial E'_y}{\partial x'} - \frac{\partial E'_x}{\partial y'} + \frac{1}{c} \frac{\partial H'_z}{\partial t'} = 0$$

$$\frac{\partial H'_x}{\partial x'} + \frac{\partial H'_y}{\partial y'} + \frac{\partial H'_z}{\partial z'} = 0$$

(41)

Ondorioz, Maxwell-en ekuazioak Lorentz-en transformazioekiko aldaezinak dira, argiak hutsean duen abiadura (c) aldaezina baldin bada. Beraz, inertzi sistema desberdinetako koordenatuak erlazionatzen dituzten transformazioak Lorentz-en transformazioak direla onartzen baldin badugu, orduan Erlatibitatearen

Printzipioa eta Maxwell-en ekuazioak bateragarriak direla ondoriozta dezakegu.

4.- MEKANIKAREN EKUAZIOEN ALDAEZINTASUNA

4.1. Mekanikaren ekuazioen aldaezintasuna, Lorentz-en transformazioekiko

Maxwell-en ekuazioak Lorentz-en transformazioekiko aldaezinak direla frogatu dugu, baina Mekanikaren ekuazioak aldaezinak ote dira Lorentz-en transformazioekiko? Hara!

S eta S' direlako inertzi sistemen koordenatuak erlazionatzen dituzten transformazioak Lorentz-en transformazioak direla onartzen baldin badugu, orduan, erraz froga daitekeenez, S inertzi sisteman Mekanikaren ekuazioak ondokoak ditugularik

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F} \quad (42)$$

S' inertzi sisteman ondokoak izanen ditugu:

$$\frac{d\vec{p}'}{dt'} = \vec{F}' \quad (43)$$

indarraren osagaiak modu honetara transformatzen direlarik:

$$\begin{aligned} F'_x &= \frac{F_x - \left(\frac{v}{c^2}\right) \vec{F} \cdot \vec{u}}{1 - v u_x / c^2} \\ F'_y &= \frac{F_y}{\gamma(1 - v u_x / c^2)} \\ F'_z &= \frac{F_z}{\gamma(1 - v u_x / c^2)} \end{aligned} \quad (44)$$

non $u_x = dx/dt$, $u_y = dy/dt$, $u_z = dz/dt$, $\vec{u} = u_x \vec{i} + u_y \vec{j} + u_z \vec{k}$
 eta $\vec{v} = (v, 0, 0)$ S' sistemak S delakoarekiko duen abiadura diren.

Ondorioz, sistema desberdinetako koordenatuak erlazionatzen dituzten transformazioak Lorentz-en transformazioak direla onartzen baldin badugu, fenomeno mekanikoen jokabidea arautzen duten ekuazioak eta fenomeno elektromagnetikoen jokabidea arautzen dutenak Erlatibitatearen Printzipioarekin bateragarriak direla ondoriozta dezakegu.

4.2. Newton-en ekuazioen egokitasuna Erlatibitatearen Teoriaren barrutian

Mekanikaren ekuazioak, hots, $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$ direlakoak, Lorentz-en transformazioekiko aldaezinak baldin badira ere, Mekanika Klasikoan Mekanikaren ekuaziotzat hartuak diren Newton-en ekuazioak, $\vec{F} = m \cdot \vec{a}$ direlakoak alegia, Galileo-ren transformazioekiko aldaezinak direlarik, ez dira Lorentz-en transformazioekiko aldaezinak. Orduan, egokiak ote dira Newton-en ekuazioak Erlatibitatearen teoriaren barrutian?. Galdera honen erantzuna ondoko honetan datza:

Aurreko mendeetan, Erlatibitatearen Teoriaren garapenaren aurretik hain zuzen ere, fisikariek partikula baten masa konstantea zelakoan zeudenez, zera ondoriozta zezaketen:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} \Rightarrow \vec{F} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} \Rightarrow \vec{F} = m \frac{d\vec{v}}{dt} \Rightarrow \vec{F} = m\vec{a}$$

Baina Erlatibitatearen Teoriaren ondorioa partikula baten masa konstante ez dela dugunez gero, ezin ditza-kegu Newton-en ekuazioak ondoriozta, eta ondorioz Erlatibitatearen Teoriaren barrutian Newton-en ekuazioak egokiak ez direla baieztatu dezakegu.

B I B L I O G R A F I A

- 1.- A.P. FRENCH: "Relatividad Especial". Ed. Reverté.
Barcelona (1974).
- 2.- A. LICHNEROWICZ: "Elementos de Cálculo Tensorial".
Aguilar. Madrid (1962).
- 3.- J.R. REITZ, F.M. MILFORD: "Fundamentos de la Teoría Elec
tromagnética". Unión Tipográfica. Edi-
torial Hispano Americana. México (1975).

III. MEKANIKA TEORIKOA

DINAMIKAREN OINARRIZKO
FORMULAZIO BALIOKIDEAK

J.R. Etxebarria

DINAMIKAREN OINARRIZKO FORMULAZIO BALIODIDEAK

- 1.- Newton-en formulazioa
- 2.- Lagrange-ren ekuazioak
- 3.- Hamilton-en printzipioa
- 4.- Hamilton-en ekuazio kanonikoak
- 5.- Hamilton-en akzio moldatu minimoaren printzipioa
- 6.- Poincaré-Cartan-en integral aldaezina
- 7.- Poincaré-ren integral aldaezin unibertsala
- 8.- Hamilton-Jacobi-ren formulazioa
- 9.- Bibliografia

DINAMIKAREN OINARRIZKO FORMULAZIO BALIOKIDEAK

Dakigunez, Dinamikaren helburua, gorputzen higidurak berauk sortzen dituzten kausekin lotzea da eta hori hizkuntza matematikoaren bidez adieraztea. Matematikoki azaldu nahi dena, beraz, esperientzian agertzen eta neurtzen diren sistema mekanikoen higidura da.

Higidura hori azaltzeko, aspaldidanik eredu egokiak prestatzen ari ziren, Newton heldu arte benetako itxura koherentea hartu ez zutelarik. Hain zuzen ere, Newton-ek indarra, masa eta azelerazioa adierazpen matematiko batetan lotzean, pauso finkoa eman zuen bide honetatik. Horrela, beraren legeak —eta konkretuki bigarrenak— sistema naturalen Dinamikaren oinarriko printzipioa osotzen dute.

Edozertara, Newton-engandik aurrera Matematikak berak hainbeste aurrerapauso eman zituen eta horrek eredu matematiko berrien posibilitatea eskaini zuen. Tresna matematiko ahaltsuagoak, sofistikatuagoak sortu ziren abstrakzio-prozesuaren aurrerapenaren adierazle; eta fisikarien lan-hizkuntza Matematika denez, horrek bere eragina izan zuen Dinamikaren oinarriko formulazioa adierazteko orduan. Horrela, historikoki Newton Fisika Matematikoaren sortzailetzat har daitekeen arren, bistakoa da Fisika gero eta era matematiko abstraktuagoz adierazteko joera susmatu dela, gaur eguneko egoerara heldu arte. Gainera, formulazio berriei esker, zuzen-zuzen Mekanikaren arloko arazoak ez diren batzu ere aztertzen dira eta Fisikaren arlo berrietarako bideak ere irekitzen zaizkigu.

Beraz, ordena progresibo batez, formulazio baliokide bakoitza zertan datzan eta bakoitzaren abantailak eta desabantailak zeintzu diren ikusiko dugu. Ohar gisa diogun, ezen hori guztiori Mekanika Erlatibistaren arloan sartu gabe egingo dugula.

1.- NEWTON-EN FORMULAZIOA

Hiru legetan eman ohi da, nahiz eta sakonera joanda, masa eta indarraren definizioan bestelako oinarritzko printzipioak erabiltzen ditugun.^[1]

Demagun N partikulaz osoturiko sistema mekanikoa. ν partikularene masa m_ν , letraz adieraziko dugu eta posizio-bekto_{rea} $\vec{r}_\nu$ letraz

Lehenengo legea inertziarena da, alegia, partikularene gainean inolako indarrik eragiten ez badu, azeleraziorik ez duela. Bigarrena, guri orain interesatzen zaiguna, indarraren eta azelerazioaren arteko erlazioa ematen diguna da. Honela adierazten da:

$$\vec{F}_\nu = m_\nu \ddot{\vec{r}}_\nu \quad \nu = 1, \dots, N \quad (1)$$

Hemen $\vec{F}_\nu$ delakoaren barnean ν partikularene gainean eragiten duten indar guztiak kontsideratzen ditugu (kanpokoak, sistema-
ren barnekoak, loturetakoak, ...). Eta hirugarren legea, akzio-
-erreakzioari dagokiona da. Dena den, geure konparaketarako (1) adierazpenean finkatuko gara, hirugarren legea besterik gabe be-
tetzen dela jorik.

Formulazio hau ohizkoa da eta, lehenengo maila bate-
tan, ezagunena eta erabiliena. Abantaila asko dauzka, dudarik
gabe, eta horietariko batzu aipatuko ditugu. Oso intuitiboa da,
alde batetik. Indar kontzeptua eguneroko esperientziatik zuzen
ateratzen da eta "ikusi" eta "ulertu" egiten den kontzeptua de-
la esan daiteke. Bestetik hiru dimentsiotako espazioan higitzen
gara eta bertan magnitude bektorialak erabiltzeak bere trabak
sortzen dituen arren, espazio horretara ohiturik gaudenez gero,
oso erabilgarri gertatzen zaigu. Gainera, arazo praktikoko arrun-
tetan, hots, teknikan eta ingeniarietan agertzen diren problemak
aztertzeke (Estatikan zein Dinamikan), guztiz egokia da Newton-
en formulazioa eta helburu horretarako nahikoa dela esan geneza-
ke.

Hala ere, ba ditu desabantaila batzu, orain aipatuko ditugunak, nahiz eta gehienak formulazio honen ingurumaritik irten gabe konpon daitezkeen. Lehenengo oztopoa (1) adierazpenean $3N$ ekuazio diferentzial egotetik dator. Bigarren oztopoa loturak jartzearekin agertzen da; higidura posibleei mugak jartzean, lotura-indarrak agertzen dira eta hauk aldezturik ezezagunak dira. Dena den, bigarren arazo hau lan birtualen printzipioaren bidez (D'Alembert) ebazten da [2]. Hirugarrenik, bektorialki adierazirik egoteak arazo latzak sor ditzake problema praktikoak ebaztean, bektoreen direkzioak kontutan hartzekoak baitira. Bestetik, formulazio honetan kontserbazio-printzipioak elkarrekin zerikusirik ez duten gauzen gisa agertzen zaizkigu, simetriaren garrantzia argiro somatzen ez delarik. Bukatzeko, diogun metodo honek ez digula bide egokirik eskaintzen Fisikaren arlo berriak lantzeko, hala nola Mekanika Kuantikoaren arloa.

2.- LAGRANGE-REN EKUAZIOAK

Mekanika Analitikoaren bidetik, aurrerapauso bat ematen da abstrakzioan. Horretarako auresuposapen batzu egiten dira loturen izaerari buruz.

Loturak holonomo eta idealak direla jorik, hots, era honetakoak [3]

$$f_{\alpha}(t, \vec{r}_{\nu}) = 0 \quad \alpha = 1, \dots, d \quad (2)$$

eta marruskadurarik gabekoak, beti aurki daitezke $n = 3N - d$ aldagai independente, $\{q_i\}_{i=1}^n$, koordenatu generalizatu izenaz ezagutzen direnak eta ondoko transformazio-ekuazioak betetzen dituztenak:

$$\vec{r}_{\nu} = \vec{r}_{\nu}(t, q_i) \quad \nu = 1, \dots, N \quad (3)$$

Honela partikula guztien posizioa adierazten dugu, n askatasun-graduak adierazten dizkiguten koordenatu generalizatuen bidez.

Baldintza horietan, (3) ekuazioak deribatuz, sistema mekanikoaren energia zinetikoa definitzen da:

$$T = T(t, q_i, \dot{q}_i) \equiv \frac{1}{2} \sum_{\nu=1}^N m_{\nu} \dot{\vec{r}}_{\nu} \cdot \dot{\vec{r}}_{\nu} \quad (4)$$

eta, halaber, indar generalizatuak:

$$Q_i = Q_i(t, q_j, \dot{q}_j) \equiv \sum_{\nu=1}^N \vec{F}_{\nu} \cdot \frac{\partial \vec{r}_{\nu}}{\partial \dot{q}_i} \quad i = 1, \dots, n \quad (5)$$

Azken hauk potentzial batetatik,

$$V = V(t, q_i) \quad (6)$$

edo potentzial generalizatu batetatik,

$$V = V(t, q_j, \dot{q}_j) = \sum_{i=1}^n V_i(t, q_j) \dot{q}_i + V_0(t, q_j) \quad (7)$$

eratorriak izatea exijitzen dugu, ondoko erlazioetako bat bete dadin:

$$Q_i = -\frac{\partial V}{\partial \dot{q}_i} \quad \text{edo} \quad Q_i = \frac{d}{dt} \frac{\partial V}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial V}{\partial q_i} \quad (8)$$

Kasu honetan sistemaren lagrangearra deitzen den funtzioa definitzen dugu:

$$L = L(t, q_i, \dot{q}_i) \equiv T - V \quad (9)$$

Ohar modura esan behar da, Erlatibitatearen Teorian funtzio Lagrangearra postulatu egingo dela, gero ekuazio egokiak ager daitezzen erara hain zuzen.

Newton-en ekuazioetatik abiatuz, erraz froga daitekeenez^{[4],[5]}, sistema mekanikoaren eboluzio denborala ondo ko ekuazio diferentzialen sistemaz adierazten da:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \quad i = 1, \dots, n \quad (10)$$

Ekuazio hauk Euler-Lagrange-ren ekuazioak deitzen di-ra eta sistema mekanikoaren dinamikaren oinarrian daude, horretaz Newton-en ekuazioen baliokideak izanik. Formulazio honekin Mekanika Analitikoaren arloan sartzen gara. Koordenatu generalizatuak definitu egiten dute erabat sistema osoaren egoera edozein aldiunetan (3) transformazioen bidez; eta higiduraren ebazpena bigarren ordenako n ekuazio diferentzialen ebazpenera laburtzen da. Picard-en existentzia eta bakartasunaren printzipioaren arauera^[6], ekuazio-sistema horrek soluzioa dauka eta bakarra gainera (Lipshitz-en baldintza betez gero). Honelatan, sistemaren ebazpena (10) ekuazioen soluzio diren

$$q_i = q_i(t, q_i^0, \dot{q}_i^0) \quad (11)$$

adierazpenen bidez ematen da, q_i^0 eta $\dot{q}_i^0$ hasierako baldintzak izanik.

Sistemaren eboluzioa adierazteko, koordenatu generalizatuen espazioa erabiltzen da, konfigurazioen espazioa deitua, bertako puntu bakoitza $\{q_i\}_{i=1}^n$ koordenatuez adierazirik datorrelarik. Sistemaren bilakaera denboran parametrizaturik dagoen espazio horretako kurba batek adierazten digu.

Aurreko formulazioarekin konparatzean, lotura-indarrak desagertu egin ditugula esan dezakegu, nahiz eta horretarako muga batzu jarri ditugun (lotura holonomo eta idealak izatea).

Oraingo q_i hauk ez dira zertan luzerak izan behar (angeluak izan daitezke, adibidez) eta horrela pauso bat eman dugu abstrakzio-bidean. Bestalde, prozesuak ez digu intuizio berezirik eskatzen, guztiz mekaniko-analitikoa izanik. Funtzioen erabilerari dagokionez, aurreko formulismoko $3N$ $\vec{F}_\nu(t, \vec{r}_\mu, \vec{r}_\mu)$

funtzioen ezagutza, $L(t, q_i, \dot{q}_i)$ funtzioaren ezagutza balio-kideaz aldatzen da. Bestelako abaintailen artean, Lagrange-ren formulazioa puntu-transformazioekiko aldaezina dela esan dezakegu. Diogun, halaber, formulazio hau mota diferentzialekoa dela, alegia, puntu baten ingurunea daukala soilik kontutan.

Lagrange-ren metodoarekin bukatzeko, ohar bi egingo ditugu, jarritako baldintza edo mugak betetzen ez direnean egin behar diren konponketetaz.

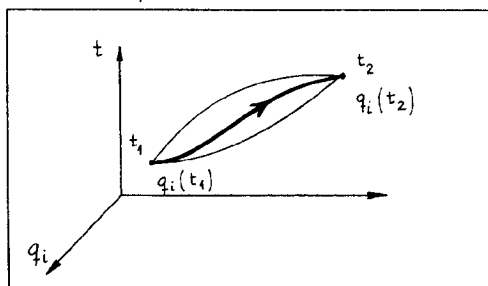
- a) Loturak holonomo ez direnean, Lagrange-ren biderkatzaileen metodoa^{[7] [8]} erabil daiteke. Metodo honetaz lotura-indarrak ere kalkulatzen dira bide batez.
- b) Loturetan (edo bestela) indar disipakorrak (marruskadurakoak) daudenean, Rayleigh-en funtzioa^[9] erabiltzen da.

Dena den, Lagrange-ren metodoa bestelako formulazioetarako bide bezala jotzen da eta gainera aurreko muga horik bete egingo dira guri interesatzen zaizkigun kasuetan.

3.- HAMILTON-EN PRINTZIOA

Bariazioen kalkuluan oinarrituz^[10], Lagrange-ren ekua zioen baliokidea den printzipio bariazional bat proposa dezakegu. Horretarako, funtzio lagrangearraren bidez, akzioaren integrala definitzen dugu:

$$I = \int_{t_1}^{t_2} L dt \quad (12)$$



Hamilton-en printzipioak dioenez, konfigurazioen espazioaren bi puntu harturik, akzioaren integrala extremala da higidura adierazten duen ibilbidearekiko:

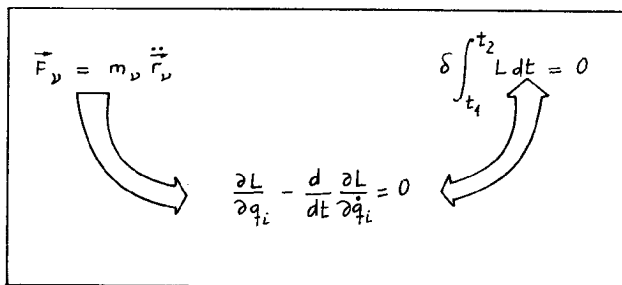
$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L dt = 0 \quad (13)$$

Bariazioen kalkuluaren teknikak erabiliz, (13) adierazpenetik (10) ekuazioak lortzen direla ikusten da eta bai alderantziz ere.

Zeintzu desberdintasun aurki ditzakegu bi printzipio hauen artean? Berez biek adierazten digute sistema mekanikoak konfigurazioen espazioan duen eboluzioa. Dena den, Lagrange-ren ekuazioek printzipio diferentziala osotzen duten moduan, Hamilton-en Printzipioa era integralekoa da eta bere barnean sistema ren higidura osoa dauka kontutan. Alde horretatik, ba, askoz ere trinkoagoa da eta lehenengo printzipio modura aurkeztua izateko egokiagoa.

Argi ikusten da, bestalde, bi aldiunetan konfigurazioen espazioko bi puntu emanik, problemak soluzio bakarra daukala.

Besterik gabe, aurreko formulazioaren baliokidetzat har daiteke eta orain arteko formulazioen arteko lotura, honela adieraz daiteke eskematikoki:



Horrela, Hamilton-ena Mekanikaren oinarritzko printzipio gisa aurkezten da eta Lagrange-ren ekuazioak beraren konkretzio edo ondorio modura. Hain zuzen ere horregatik, liburu askotan hortik abiatzen da Mekanikaren azterketa^{[11],[12]}.

4.- HAMILTON-EN EKUAZIO KANONIKOAK

Lehenago esan dugunez, Lagrange-ren ekuazioak bigarren ordenako n ekuazio diferentzial dira. Legendre-ren transformazio egokia eginez (Donkin-en teorema)^[13] lehen ordenako $2n$ ekuazio diferentzialen sistema baliokide hau lor dezakegu:

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \quad i = 1, \dots, n \quad (14)$$

Sistema honetako ekuazioei Hamilton-en ekuazio Kanonikoak deritze eta Lagrange-ren ekuazioen baliokideak dira. Horrela, ba, argi ikusten da, ez dela zertan formalismo lagrangeartetik hasi behar, eta abiapuntutzat (14) ekuazioak har daitezkeela. Bertan agertzen den H funtzioa, hamiltondar izenaz ezaguna, honek la adierazten da funtzio lagrangearraren bidez:

$$H = H(t, q_i, p_i) \equiv \sum_{i=1}^n p_i \hat{q}_i - \hat{L} \quad (15)$$

Hemen $\hat{q}_i$ eta $\hat{L}$ funtzioen gainean jarri dugun $\hat{\quad}$ ikurrak, kasu bietan q_i eta p_i koordenatu hamiltondarren funtzioz jarri ditugula esan nahi du, horretarako Legendre-ren transformazioaz baliatuz (14a).

Hamilton-en ekuazioek era honetako sistema diferentziala osotzen dute:

$$\dot{q}_i = f_i(t, q_j, p_j) \quad (16a)$$

$$\dot{p}_i = g_i(t, q_j, p_j) \quad i = 1, \dots, n \quad (16b)$$

Beraz, sistemaren egoera $2n$ koordenatuz, q_i, p_i , adierazten da, eta beraren eboluzioa faseen espazioan gertatzen da, hemen ere denbora parametro gisa harturik.

Zer abantaila ote du formulazio honek? Batetik aldagai kanonikoak erabiltzean, (q_i, p_i) , Mekanika Kuantikorako bideak prestatzen ari da. Bestetik aldaezintasunezko transformazio zabalagoak kontsidera daitezke, transformazio kanonikoak, Lagrange-ren kasuko puntu-transformazioen eremua zabalduz. Horrela sistemaren simetri propietateak aztertze bide egokiagoa du gu eta aldagai dinamikoak eta higidura-konstanteak aztertze bide ere bide erosoagoa eskaintzen digu.

Zer esanik ez, koordenatu bat ziklikoa izatean, arazoa erraztu egiten da

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 = \frac{\partial H}{\partial q_i} \implies \dot{p}_i = 0 \implies p_i = Kt + \alpha_i \quad (17)$$

eta orduan zuzenean integratzen da:

$$p_i = \alpha_i \implies \dot{q}_i = f_i(t, \alpha_i, q_j) \quad (18)$$

Koordenatu guztiak ziklikoak direnean, problemaren ebazpena nabaria da.

Ekuazio kanonikoak direla eta, ohar pare bat egitea komeni zaigu:

- a) Idazkerari dagokionez, zeinu arazoa dela eta ez dela, lehenengo begirada batetan, ekuazio horiek beren simetrikotasuna galduta daukatela dirudi. Simetrikotasuna berreskuratze bide, eta koordenatuak eta momentuak maila berean jartzeko, Poisson-en kortxe-teen bidezko idazkera erabil dezakegu.^[14] Orduan era simetrikotik honetan adierazten dira:

$$\begin{aligned} \dot{q}_i &= [q_i, H] \\ \dot{p}_i &= [p_i, H] \end{aligned} \quad i = 1, \dots, n \quad (19)$$

- b) Ba da, halaber, Lagrange-ren ekuazioen eta Hamilton-en ekuazioen arteko metodo hibridoa, Routh-en metodoa izenaz ezaguna^[15]. Kasu honetan aldagai batzuren Lagrange-ren metodoa erabiltzen da eta beste batzurekin Hamilton-ena, tartean Routh-en funtzioa definituz, berez lagrangearraren eta hamildondararren artekoa dena. Dena den, kontzeptualki ez du inolako ekarpen berezirik, beste metodoek ez daukatena behintzat.

5.- HAMILTON-EN AKZIO MOLDATU MINIMOAREN PRINTZIBIOA

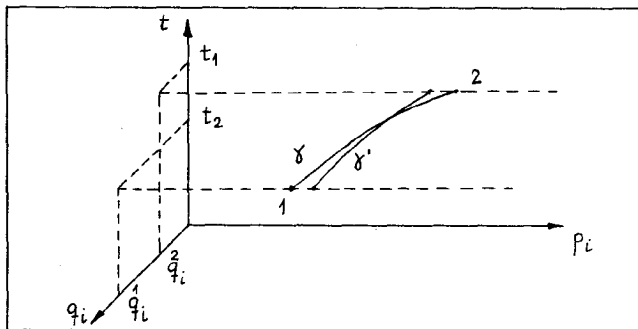
Hamilton-en ekuazio kanonikoetan berriro itzuli gara mota diferentzialeko printzipio batetara. Orain Hamilton-en printzipioa gogoratuz, honako galde hau egin dezakegu: Formula ote daiteke Hamilton-en printzipioaren baliokidea den printzipio bariazionalen bat baina aldagai hamilton-darrekin zuzenki eta ez formalismo lagrangear baliokidearen bidez? Erantzuna baiezkoa da, akzio moldatu minimoaren bidezkoa hain zuzen.

Faseen espazio hedatuan, (t, q_i, p_i) , haxe da sistema mekanikoaren akzio moldatua:

$$J = \int_{t_1}^{t_2} \left[\sum_{i=1}^n p_i \dot{q}_i - H(t, q_j, p_j) \right] dt \quad (20)$$

eta printzipioak zera dio: "Faseen espazio hedatuko kurba bat ibilbide ebazlea da, baldin eta soilik baldin kurba horretarako akzio moldatua egonkorra bada, muturretako koordinatu denboral eta generalizatuak aldatu gabe uzten dituzten bariazioetarako". Hots, baldintza horietan:

$$\delta J = 0 \quad (21)$$



Ondo konturaturaz gero, Hamilton-en printzipioaren forma hau, lehenago 3. atalean ikusi dugunaren desberdina da, nahiz eta baliokidea izan. Kasu honetan ere mota integraleko printzipio baraiazionala dugu, hots, higidura osoa kontutan hartzen duena. Zertan daude, ba, desberdintasunak?

- a) Integtrakizunak desberdinak dira. Han lagrangearra genuen, $L(t, q_i, \dot{q}_i)$, eta hemen beste zerbait.

$$L^*(t, q_i, \dot{q}_i, p_i) = \sum_{i=1}^n p_i \dot{q}_i - H \quad (22)$$

Bi horien arteko kointzidentzia ibilbide ebazlee-tan barrena ematen da soilik, ez faseen espazioko beste puntuetan.

- b) Kasu honetan kontsideratzen diren bariazioak, ordukoak baino orokorragoak dira, p_i direlakoak ere aldagai independenteak baitira. Hain zuzen, han konfigurazioen espazioan geunden eta hemen faseen espazio hedatuan.
- c) Konfigurazioen espazioan beti dago bi puntutatik pasatzen den ebazpen bat, $2n$ ingurune-baldintza baitaude. Faseen espazioan $4n$ ingurune-baldintza daude eta, hortaz, ezin segurta genezake edozein bi puntutatik pasatzen den ebazpenik egongo denik, nahiz eta hasierako ($\dot{q}_i^1$) eta bukaerako ($\dot{q}_i^2$) koordinatuak emanik (t_1 eta t_2 aldiuneetan), ebazpen bakarra dagoen.

Printzipio honek bide berriak eskaintzen dizkigu, bese telako bide baliokideetara pasatzeko, hala nola segidan ikusiko ditugun integral aldaezinen formulazioetara; eta honek transformazio kanonikoak aztertzeke bidea erraztuko digu.

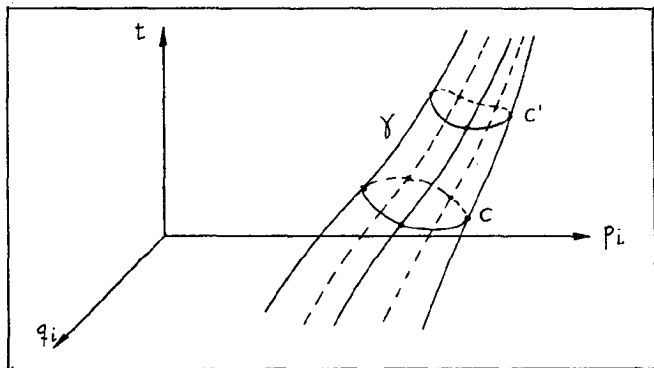
6.- POINCARÉ-CARTAN-EN INTEGRAL ALDAEZINA

Akzio moldatutik abiatuz lortzen den integral honek, batera hartzen ditu, faseen espazio hedatuko kurba itxi batetako puntuak hasierako baldintza gisa hartuz sistemak izan ditzakeen higidura guztiak.

Honelaxe formulatzen da printzipio hau: "Faseen espazio hedatuko edozein C kurba itxitan barrena eginiko

$$J = \oint_C \left[\sum_{i=1}^n p_i \delta q_i - H \delta t \right] \quad (23)$$

integral kurbilineoa konstante mantentzen da, Hamilton-en ekuazio kanonikoen ibilbide ebazleek osaturiko hodian barrenako edozein desplazamendurekiko (deformazioarekin, noski)" Hots, integral hori aldaezina da: Poincaré-Cartan-en integral aldaezina.



Modu berean, aurreko teoremaren alderantzizkoa ere eman dezakegu: "Baldin eta $H=H(t, q_i, p_i)$ funtzio batetarako,

$$\oint_C \left[\sum_{i=1}^n p_i \delta q_i - H \delta t \right] \quad (24)$$

integral kurbilineoa aldaezina bada

$$\dot{q}_i = Q_i(t, q_j, p_j) \quad i = 1, \dots, n \quad (25a)$$

$$\dot{p}_i = P_i(t, q_j, p_j) \quad (25b)$$

sistemaren ebazpenekiko (hau da, ebazpenek definitzen dituzten desplazamenduekiko —deformazioarekin, noski— konstante mantentzen bada) edo sistemaren ebazpenek definitzen duten hodian dau den C kurbetan barrena, orduan sistema hori hamiltondarra da eta beraren hamiltondarra H da, hots:

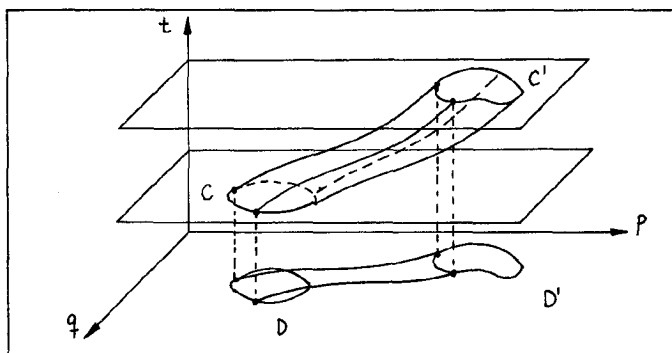
$$Q_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \quad P_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \quad i = 1, \dots, n \quad (26)$$

Ikusten denez, printzipio hau Hamilton-en ekuazio kanonikoen baliokidea da. Modu honetan beste era batetako printzipio integral batetan biltzen dira sistemaren higidura posibleak.

Printzipio honek oztopo txiki bat dauka, alegia, sistemaren funtzio hamiltondarra ezagutu behar dela; eta, ondorioz, ez da guztiz orokorra (edo unibertsala), hamiltondar bakoitzari baitagokio. Oztopo hori hurrengo printzipioarekin gainditzen da.

7.- POINCARÉ-REN INTEGRAL ALDAEZIN UNIBERTSALA

Izatez aurreko integral berbera da, baina baldintza txiki bat gehituz, hots, bertan aipatzen diren C kurba itxiak $t = K^{\text{te}}$ diren hiperplanoetan kokatuz.



Honelako kurbetan barrena $\delta t = 0$ denez, ondoko forma hartzen du (23) adierazpenak:

$$I_1 = \oint_C \sum_{i=1}^n p_i \delta q_i = \oint_D \sum_{i=1}^n p_i \delta q_i \quad (27)$$

Integral honek balio berbera izango du ibilbide ebazleen hodian osa daitezkeen kurba itxietan barrena eta, zer esanik ez, kurba itxi aldiberekoetan ere. Era honetako integral aldaezinari Poincaré-ren integral aldaezin unibertsala deritzo. Historikoki, Poincaré-Cartan-ena baino lehenago aurkitua izan zen^[16], hemen beronen ondorio gisa agertu badugu ere.

Begi kolpe arinez ikus daitekeenez, printzipio edo integral hau ematean ez da zertan hamiltondar berezirik ezagutu behar edo, bestela esanda, hamiltondarra edozein izanda ere beti balio du. Hortik datorkio unibertsal deitura, eta horixe da aurreko printzipioarekin konparatuz daukan abantail nagusia.

Printzipio honetaz ere oharren bat egitea komeni da. Pentsatu egin daiteke ea dagoen integral aldaezin unibertsal bakarra Poincaré-rena den. Erantzuna bi mailatan eman behar da.

Lehenengo maila batetan Lee Hwa-Chung-en teorema^[17] dauka. Beronek erakusten eta frogatzen digunez,

$$I' = \oint_D \sum_{i=1}^n (A_i \delta q_i + B_i \delta p_i) \quad (28)$$

erako integrala aldaezin unibertetsala izan dadin, c konstante bat existitu behar da, balentzia deitua, hauxe egiten duena:

$$I' = cI \quad (29)$$

Hots, Poincaré-ren integralaren anizkoitza da.

Bigarren maila batetan, bestelako erako integral aldaezinak ere ba daudela ikus daiteke. Horien artean ba dago bat, faseen espazioko eskualdearen hiperbolumenaren aldaezintasunarekin zerikusirik daukana, eta horrekin batera Liouville-ren teorema^[18] doa.

Honaino heldurik, kontzeptualki hain korapilatsu diren integral aldaezinen interesa zein den galde daiteke. Beraien balio estetiko-matematikoa ahortzi gabe, transformazio kanonikoak aztertzeke guztiz baliagarriak direla esan dezakegu.

Transformazio kanonikoen egitura aztertzean, atzerantz ko pausoa ematea komeni zaigu. Dakigunez, Lagrange-ren ekuazioak puntu-transformazioekiko aldaezinak dira, hots,

$$\tilde{q}_i = \tilde{q}_i(t, q_j) \quad i, j = 1, \dots, n \quad (30)$$

erako aldakuntza egitean,

$$L' = L'(t, \tilde{q}_i, \dot{\tilde{q}}_i) \equiv L(t, q_j, \dot{q}_j) \quad (31)$$

hartuz, bi lagrangeak hauetatik lortzen diren ekuazio-sistemak baliokideak dira, hau da:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\tilde{q}}_i} - \frac{\partial L}{\partial \tilde{q}_i} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L'}{\partial \dot{\tilde{q}}_j} - \frac{\partial L'}{\partial \tilde{q}_j} = 0 \quad (32)$$

$$i = 1, \dots, n \quad j = 1, \dots, n$$

Hamilton-en ekuazio kanonikoekin ere antzerako zerbait egitea espero daiteke. Baina kasu honetan faseen espazio an egonik, transformazio alderantzkarri korapilatsuagoak egitea pentsa daiteke, era honetakoak adibidez:

$$\tilde{q}_i = \tilde{q}_i(t, q_j, p_j) \quad (33a)$$

$$i, j = 1, \dots, n$$

$$\tilde{p}_i = \tilde{p}_i(t, q_j, p_j) \quad (33b)$$

Zer esanik ez, puntu-transformazioen mugak gainditu egiten dira horrela, bestelako transformazio posibleak edukiz. Baina ezin segurta daiteke, hamiltondarrarekin (31) erako aldakuntza egitean, koordenatu berriein Hamilton-en ekuazio kanonikoak beteko direnik. Hain zuzen ere, transformazio berezi batzuren kasuan soilik betetzen dira, transformazio kanonikoen kasuan.

Transformazio kanonikoek aparteko garrantzia dute Mekanika Teorikoaren arloan eta horien bidez are hobeki azter daitezke simetritzako transformazioak eta kontserbazio-teoremak. Dena den, puntu honekin bukatzeko, galdera bat egin daiteke, alegia, ea zer lotura duten transformazio kanonikoek oinarrizko printzipioekin. Erantzuna alderantzizkoa izango da. Prezeski, integral aldaezinak oso baliagarriak dira, kanonikotasunerako erizpideak definitzerakoan^[19]. Bestetik, Hamilton-Jacobi-ren formulaziora transformazio kanoniko berezi baten bidez hel-tzen da.

8.- HAMILTON-JACOBI-REN FORMULAZIOA

Kasu hau transformazio kanoniko berezi bat planteatzearen ondorio gisa agertzen zaigu. Demagun ikusi nahi dugula, ea $\tilde{H} = 0(+\hbar(t))$ egingo lukeen transformazio kanonikorik existituko denentz. Bistakoa denez, kasu honetan, aldagai berrietan problemaren ebazpena nabaria izango litzateke:

$$\tilde{q}_i = \tilde{q}_i^0 = \beta_i \quad (34a)$$

$$i = 1, \dots, n$$

$$\tilde{p}_i = \tilde{p}_i^0 = \gamma_i \quad (34b)$$

eta noski, transformazio kanonikoa alderanzkarria izanik, bide batez hasierako aldagaietan ere ebatzirik geratuko litzateke sistema:

$$q_i = q_i(t, \tilde{q}_j, \tilde{p}_j) = q_i(t, \beta_j, \gamma_j) \quad (35a)$$

$$p_i = p_i(t, \tilde{q}_j, \tilde{p}_j) = p_i(t, \beta_j, \gamma_j) \quad (35b)$$

Transformazio kanoniko hori bilatzerakoan, unibaletea eta bigarren motakoa dela jorik, S funtzio sortzailea existitu behar da,

$$S = S(t, q_i, \tilde{p}_i) \quad (36)$$

eta azkenean, S horren bilaketak, Hamilton-Jacobi-ren ekuazioa eramaten gaitu [20], [21].

$$H\left(t, q_j, \frac{\partial S}{\partial q_j}\right) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0 \quad (37)$$

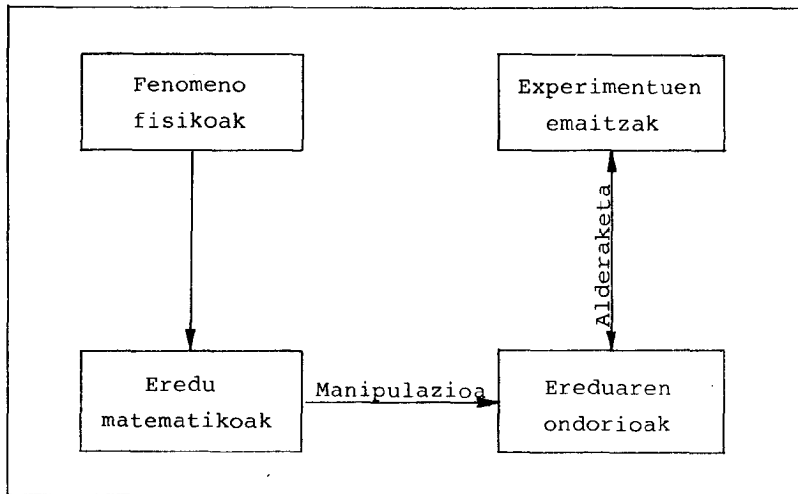
S funtzioari Hamilton-en funtzio nagusia deritzo. Metodo honekin Hamilton-en 2n ekuazio kanonikoak integratu ordez, Hamilton-Jacobi-ren ekuazio bakarrarekin geratu gara. Ekuazio hau lehen ordenako deribatu partzialetango ekuazio diferentziala da, (n+1) aldagaiak, $q_1, q_2, \dots, q_n$ eta t izanik. Ez gara orain hasiko, ekuazio horren ebazpenaz hitz egiten. Bakarrik esan, Mekanikaren oinarrizko formulazioen baliokidea dela eta geure kasuan horrek digu ardura.

Hamilton-Jacobi-ren metodoaren bidez aldagaien banaketa lantzen da eta, azkenik, Mekanika Kuantikoaren historiarako

garrantzizkoak izan diren ekintz aldagaiak eta angelu-aldagaiak, metodo honen bidez aztertu izan dira.

BUKATZEKO

Eredu matematikoak lantzea Mekanika Teorikoaren oinarrietako bat da. Izatez, lehiaketa moduko bat da, eredu matematikoen ondorioen eta experimentuen emaitzen artean. Berez, ere duak experimentuen emaitzak hizkuntza matematikoaren bidez adierazteko asmatu daude, lege fisiko-matematikoak errealtatearen hurbilketa izanik. Hala ere, gero hizkuntza matematiko abstraktu horren posibilitateetan finkatuz, aurrerapausoak eman daitezke, manipulazioaren bidez zenbait ondorio aterarik. Edozein kasutan, ondorio matematiko horik errealtatean gertatzen diren fenomenoekin alderatu behar dira. Teoriako emaitzen eta experimentuen emaitzen arteko adostasuna ona den neurrian, eredu matematikoa ona izango da; horrela ez denean, egokitu egin beharko da eredua. Prozesua alboko irudian adierazten da eskematikoki.



Fisika matematikoaren lana horixe da, prezieski, eredu egokiak prestatzea. Hain zuzen, lan honetan adierazi nahi izan dena, Dinamikaren arloan emaniko pausoen eboluzioa izan da.

BIBLIOGRAFIA

- 1.- R. LAPIEDRA: "Les lleis fonamentals de la Mecànica Clàssica"
Treballs de Física, 1 , nº 23 (1979).
- 2.- H. GOLDSTEIN: "Classical Mechanics". Addison-Wesley (1969).
14. or.
- 3.- F. GANTMATCHER: "Lectures in Analytical Mechanics". Mir Pu
blishers. Moscow (1970). 10. or.
- 4.- Ik. 2. lib. 18. or.
- 5.- J. SALETAN, A.H. CROMER: "Theoretical Mechanics" John Wiley
& Sons. New York (1971). 39. or.
- 6.- V. ARNOLD: "Equations différentielles ordinaires" Mir Moscou
- 7.- Ik. 2. lib. 41. or.
- 8.- R.M. MANN: "The Classical Dynamics of Particles. Galilean
and Lorentz Relativity". Academic Press. New
York (1974). 53. or.
- 9.- Ik. 2. lib. 21. or.
- 10.- Ik. 2. lib. 30. or.
- 11.- L. D. LANDAU, E.M. LIFSHITZ: "Mecánica" Ed. Reverté.
Barcelona (1970) 2. or.
- 12.- Ik. 8. lib. 46. or.
- 13.- Ik. 3. lib. 74. or.
- 14.- Ik. 2. lib. 225. or.
- 15.- Ik. 11. lib. 161. or.
- 16.- Ik. 3. lib. 119. or.
- 17.- Ik. 3. lib. 122. or.
- 18.- Ik. 3. lib. 127. or.
- 19.- Ik. 3. lib. 128-165. or.
- 20.- Ik. 2. lib. 273. or.
- 21.- Ik. 3. lib. 135. or.

IRAUPEN-LEGEAK

I. Mazarredo

I R A U P E N - L E G E A K

- 1.- Sarrera
- 2.- Iraupen-legeak eta Newton-en Mekanika
 - a) Partikula baten kasua
 - b) Partikula-sistemen kasua
- 3.- Iraupen-legeak Lagrange-ren formulazioan
- 4.- Noether-en Teorema
 - a) Iraupen-legeak eta Higidura-konstanteak
 - b) Transformazio infinitesimalak
 - c) Simetri transformazioak
- 5.- Iraupen-legeei buruzko burutapenak

1.- SARRERA

Fisikaren arloan iraupen-legeek daukaten garrantziaz ez gara mintzatuko. Adibide gisara, esan dezagun, zientzilariek lege hauek bete ez direla uste izan dutenean, maiz asko, fenomeno ondo aztertu ondoren, beste partikula berri bat aurkitua izan dela (neutrinoaren kasua).

Baina hau ez da gure helburua. Oinarritzko formulazio baliokidetan iraupen-legeak nola agertzen zaizkigun azaltzera saiaturiko gara. Ikusiko dugunez, Newton-en formulaziotik hasita, tratamendu matematikoa korapilatuz joango zaigu, etengabe, beti ondorio berberetara heltzeko.

Hau ikusita, batek baino gehiagok galde diezaioke bere buruari, zer dela eta arazoak korapilatzea, ezer herririk aurkitzen ez badugu. Erantzuna, Mekanika Analitikoak beti agertzen diguna, hots, Mekanika Klasikotik goi-ordenako teoretarainoko zubia besterik ez dela. Honelatan, bada, Newton-en Mekanika korapilatzen duten Lagrange eta Hamilton-en formalismoek, Eremuen Teoria Klasiko eta Kuantikoen ateak zabal-zabalik uzten dizkigute. Hona hemen, korapilatze honen zergatia.

2.- IRAUPEN-LEGEAK ETA NEWTON-EN MEKANIKAa) Partikula baten kasua

Dakigunez, partikula baten dinamika Newton-en bigarren legean oinarritzen da. Legea baino, indarraren definizioa besterik ez dela esan liteke. Partikularen masa m izanik, eta partikula honen erreferentzi sistema batekiko abiadura $\vec{v}$ delarik, momentu lineala ondoko adierazpen honen bidez definitzen da:

$$\vec{p} = m\vec{v} \quad (2.1)$$

Indarraren definizioa, besterik gabe, momentu linealaren denborarekiko aldaketa da. Matematikoki:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = m \frac{d\vec{v}}{dt} \quad (2.2)$$

Aurreko adierazpena aztertuz gero, zera esan genezake:

Partikula baten gainean inolako indarrik eragiten ez bada, $\vec{F}=0$, $\vec{p}$ magnitudeak konstante dirau denboran zehar.

Hauxe da, hain zuzen ere, momentu linealaren iraupen-legea.

Mekanika Klasikoan, sistema baten higidura aztertu ahal izateko, lagungarri suertatzen zaizkigun magnitude bi definitzen ditugu. Bata bektoriala, bestea eskalarra; momentu angeluarra eta lana hain zuzen. Bi definizio hauekin batera beste bi iraupen-lege datozkigu.

Azter dezagun, lehenengo eta behin, momentu angeluarra. Definizioz, kontsideraturiko erreferentzi sistemarekiko momentu angeluarra ondoko hau da:

$$\vec{L} = \vec{r} \wedge \vec{p} \quad (2.3)$$

$\vec{L}$ honek denboran zehar jasaten duen aldaketa hauxe da:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r} \wedge \frac{d\vec{p}}{dt} + \frac{d\vec{r}}{dt} \wedge \vec{p} = \vec{r} \wedge \vec{F} = \vec{\tau} \quad (2.4)$$

Hortaz, $\vec{\tau} = 0 \implies \vec{L} = \text{cte}$ eta partikularen momentu angeluarrak konstante dirau. Hauxe da momentu angeluarraren iraupen-legea.

(2.4) adierazpenetik

$$\vec{\tau} = 0 \implies \begin{cases} \vec{F} = 0 \text{ denean. Partikula askea,} \\ \text{edo} \\ \vec{r} \perp \vec{F} \text{ direnean. Indar zentralen kasua.} \end{cases}$$

Ekin gakizkion lanari. Definizioz, hauxe da $\vec{F}$ indarrak A eta B puntuen artean egiten duen lana:

$$W = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} \quad (2.5)$$

Alde batetik, integratuz,

$$W = \frac{1}{2} m v_B^2 - \frac{1}{2} m v_A^2 = T_B - T_A \quad (2.6)$$

non $T = \frac{1}{2} m v^2$ den . T delakoari energia zinetikoa deritzo.

Beste aldetik, indar-eremu kontserbakorrak definitzen dira, zeintzuetan A-tik B-rainoko bidea osotzean, egindako lana ibilbidearen menpean ez dagoen, hasiera eta amaierako puntuen menpean baizik. Besterik esaten ez bada, kasu honetan kokatuko gara aurrerantzean.

Eremu konterbakorrean hasiera eta amaierako puntuak puntu berbera badira, lana nulua da.

$$\oint \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0 \quad (2.7)$$

Stokes-en teoremaren arauera, indarrak kontserbakorrak izan daitezen baldintza beharrezko eta nahikoa, hauxe dugu:

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{F} = 0 \quad (2.8)$$

Beraz, V funtzioa existitzen da, non

$$-\vec{\nabla} V = \vec{F} \quad \text{den.} \quad (2.9)$$

Honelatan,

$$W = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_A^B (-\vec{\nabla} V) \cdot d\vec{r} = \int_A^B -dV = V_A - V_B \quad (2.10)$$

Indar kontserbakorren kasurako, (2.6) eta (2.10) adierazpenak elkartuz:

$$T_B - T_A = V_A - V_B \implies V_A + T_A = V_B + T_B \quad (2.11)$$

Ondorioz, $T + V$ magnitudea kontserbatu egiten da denborekin. $T+V=E$ magnitudeari, Energia Mekanikoa esaten zaio.

Honela agertzen zaizkigu Newton-en Mekanikan oso ezagunak diren iraupen-legeak, partikula baten kasuan, jakina.

b) Partikula-sistemen kasua

Partikula askoz osoturiko sistema ikertzeko, bi indar-mota hartu behar dira aintzakotzat. Kanpo-indarrak eta barne-indarrak. Lehendabizikoak, sistemaren partikulek elkarri eragiten diotenak. Honelatan, Newton-en bigarren legea, i partikularako, hauxe da:

$$\sum_j \vec{F}_{ji} + \vec{F}_i^{(e)} = \dot{\vec{p}}_i \quad (2.12)$$

non $\vec{F}_{ji}$, j partikulak i partikulan eragindako indarra eta $\vec{F}_i^{(e)}$ i partikularene gainean kanpotik eragindakoa diren.

i partikula guztietara batuz:

$$\sum_i \vec{F}_i^{(e)} + \sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}} \vec{F}_{ji} = \frac{d^2}{dt^2} \left(\sum_i m_i \vec{r}_i \right) \quad (2.13)$$

Akzio-erreakzioen printzipioaren arauera $\sum_{i,j} \vec{F}_{ji} = 0$, gainera $\sum_i \vec{F}_i^{(e)} = \vec{F}^{(e)}$ kanpotiko indarren erresultantea izanik, eta $\sum_i \frac{m_i \vec{r}_i}{M} = \vec{R}$ (masa-zentrua) egiten baldin badugu, (2.13) berdintza ondoko honetan bilakatzen da:

$$M \frac{d^2 \vec{R}}{dt^2} = \vec{F}^{(e)} \quad (2.14)$$

Baina

$$\frac{d^2 \vec{R}}{dt^2} = \frac{d^2}{dt^2} \left[\frac{1}{M} \sum_i m_i \vec{r}_i \right] = \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{M} \sum_i m_i \frac{d\vec{r}_i}{dt} \right] = \frac{1}{M} \frac{d\vec{P}}{dt}$$

$$\text{non} \quad \vec{P} = \sum_i m_i \frac{d\vec{r}_i}{dt} \quad \text{den} \quad (2.15)$$

$\vec{P}$ magnitudeari sistemaren momentu lineala deritzogu.

Orduan, (2.15) adierazpena kontutan harturik, (2.14) erlazioa honela gelditzen da:

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F}^{(e)} \quad (2.16)$$

Hortaz, $\vec{F}^{(e)} = 0 \implies \frac{d\vec{P}}{dt} = 0 \implies \vec{P} = \text{kte}$. Hau da, kanpo-indarren erresultantea nulua bada, partikula-sistemaren momentu

linealak konstante dirau denborarekiko (Momentu linealaren irau-pen-legea).

Momentu anguluarrari gagozkiolarik, ondokoa daukagu:

$$\vec{L} = \sum_i \vec{L}_i = \sum_i \vec{r}_i \wedge \vec{p}_i \quad (2.17)$$

Magnitude honen denborarekiko deribatua hauxe da:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\sum_i \vec{r}_i \wedge \vec{p}_i \right) = \sum_i \frac{d\vec{r}_i}{dt} \wedge \vec{p}_i + \sum_i \vec{r}_i \wedge \dot{\vec{p}}_i = \sum_i \vec{r}_i \wedge \dot{\vec{p}}_i \quad (2.18)$$

(2.12) adierazpena erabiliz:

$$\dot{\vec{L}} = \sum_i \vec{r}_i \wedge \left(\sum_j \vec{F}_{ji} + \vec{F}_i^{(e)} \right) = \sum_{i,j} \vec{r}_i \wedge \vec{F}_{ji} + \sum_i \vec{r}_i \wedge \vec{F}_i^{(e)} \quad (2.19)$$

Akzio-erreakzioen printzipioaren arauera $\sum_{i,j} \vec{r}_i \wedge \vec{F}_{ji} = 0$ daukagu, eta beraz:

$$\dot{\vec{L}} = \sum_i \vec{r}_i \wedge \vec{F}_i^{(e)} = \sum_i \vec{r}_i \wedge \dot{\vec{c}}_i^{(e)} = \dot{\vec{c}}^{(e)} \quad (2.20)$$

Ondorioz,

$\dot{\vec{c}}^{(e)} = 0 \Rightarrow \dot{\vec{L}} = 0 \Rightarrow \vec{L} = Kte$. Hau da, kanpo-indarren momentua nulua bada, $\vec{L}$ bektoreak konstante dirau denboran zehar (Momentu anguluarraren irau-pen-legea).

Energiari dagokionez, kanpo- eta barne-indarrak kontserbakorrak direneko kasuan egongo gara beti. Orduan,

$$W = \sum_i \int_A^B \vec{F}_i \cdot d\vec{r}_i = \sum_i \int_A^B m_i \dot{\vec{v}}_i \cdot \vec{v}_i dt = \sum_i \int_A^B d\left(\frac{1}{2} m_i v_i^2\right) = T_B - T_A \quad (2.21)$$

Bestaldetik,

$\vec{F}_i = \vec{F}_i^{(e)} + \sum_j \vec{F}_{ji}$ izanik eta $\vec{F}_i^{(e)}$ eta $\vec{F}_{ji}$ kontserbakorrak direnez,

$$\begin{aligned} W &= \sum_i \int_A^B \vec{F}_i^{(e)} \cdot d\vec{r}_i + \sum_{i,j} \int_A^B \vec{F}_{ji} \cdot d\vec{r}_i = \\ &= - \sum_i \int_A^B \vec{\nabla}_i V_i \cdot d\vec{r}_i - \frac{1}{2} \sum_{i,j} \int_A^B \vec{\nabla}_{ij} V_{ij} \cdot d\vec{r}_i = - \sum_i V_i \Big|_A^B - \frac{1}{2} \sum_{i,j} V_{ij} \Big|_A^B \end{aligned} \quad (2.22)$$

Beraz,

$$V = \sum_i V_i + \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} V_{ij} \quad \text{bada,} \quad (2.23)$$

$$W = V_A - V_B \quad (2.24)$$

(2.21) eta (2.24) adierazpenak kontutan harturik,

$$T_B - T_A = V_A - V_B \implies V_A + T_A = V_B + T_B \quad (2.25)$$

Hau da, $E = T + V$ magnitudea denborarekin kontserbatu egingo da (Energiaren iraupen-legea).

3.- IRAUPEN-LEGEAK LAGRANGE-REN FORMULAZIOAN

Lehenik, azal ditzagun aurrerantzean erabiliko ditugun erizpideak:

- a) Loturak idealak eta holonomoak izango dira.
- b) Sistema kontserbakorra da edota potentzial generalizatuak existitzen dira.
- c) Egingo diren kalkulu guztietan, lehen ordenako infinitesimoak gordeko dira soil-soilik.

Dakigunez, Mekanikaren oinarrizko teorema Hamilton-ena dugu:

$$I = \int_1^2 L(q_i, \dot{q}_j, t) dt \quad \text{integrala kontsideratuz, sistemaren higidurak}$$

I integrala extremala bihurtzen duen bidearen arauetako izan behar du konfigurazio-espazioan. Hizkuntza matematikoz:

$$\delta \int_1^2 L(q_i, \dot{q}_j, t) dt = 0 \quad (3.1)$$

Baldintza honetatik ateratzen dira sistemaren higidura-ekuazioak:

$$\frac{\partial L}{\partial q_j} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = 0 \quad j = 1, \dots, n \quad (3.2)$$

Formulazio honen arauera, sistemaren ezagupena L funtzio lagrangearrean datza. Honek, ikusiko dugunez, orain arte agertutako iraupen-legeak ikus eraziko dizkigu era ezberdinez.

L erabiliz, p_i momentu konjokatua definitzen da:

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \quad (3.3)$$

Beste aldetik, q_i koordenatua ziklikoa dela diogu, lagrangearrean agertzen ez denean.

Bi definizio hauek aintzakotzat harturik, eta baita (3.2) adierazpena ere, q_i koordenatua ziklikoa baldin bada:

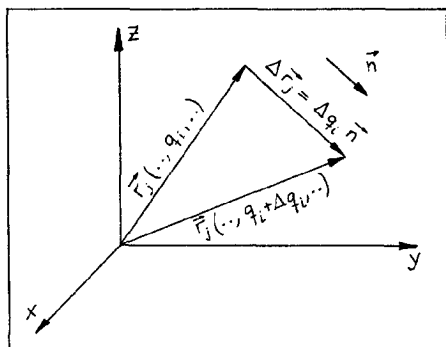
$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \frac{dp_i}{dt} = 0$$

ondorioz, $p_i = Kte$

Beraz, q_i koordenatua ziklikoa bada, beroni dagokion momentu konjokatua kontserbatu egiten da denborarekin (Iraupen-lege orokorra)

Ondoren, azter ditzagun p_i momentu konjokatuen esangurak

- a) Har dezagun q_i koordenatua, non Δq_i gehikuntzak sistemak bere osotasunean jasandako translazioa azaltzen digun. Aipaturiko translazioaren direkzio eta norantza $\vec{n}$ bektore unitarioaren bidez azaltzen da.



Sistemaren puntu guztien posizio-bektoreen gehikuntza, $\Delta q_i \vec{n}$ bektorea da.

$$\Delta \vec{r}_j = \vec{r}_j(\dots, q_i + \Delta q_i, \dots) - \vec{r}_j(\dots, q_i, \dots) = \Delta q_i \vec{n} \quad (3.5)$$

Beraz,

$$\frac{\partial \vec{r}_j}{\partial q_i} = \lim_{\Delta q_i \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}_j}{\Delta q_i} = \lim_{\Delta q_i \rightarrow 0} \frac{\Delta q_i \vec{n}}{\Delta q_i} = \vec{n} \quad (3.6)$$

Beste aldetik,

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = 0 \implies \frac{\partial T}{\partial q_i} - \frac{\partial V}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} + \frac{d}{dt} \frac{\partial V}{\partial \dot{q}_i} = 0 \quad (3.7)$$

Baina $\frac{\partial V}{\partial \dot{q}_i} = 0$, sistema kontserbakorra bait da. Honez gainera,

$$\frac{\partial T}{\partial q_i} = \frac{\partial}{\partial q_i} \left(\frac{1}{2} \sum_j m_j \dot{\vec{r}}_j \cdot \dot{\vec{r}}_j \right) = \sum_j m_j \dot{\vec{r}}_j \cdot \frac{\partial \dot{\vec{r}}_j}{\partial q_i} = \sum_j m_j \dot{\vec{r}}_j \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \vec{r}_j}{\partial q_i} \right) = \sum_j m_j \dot{\vec{r}}_j \cdot \frac{d}{dt} (\vec{n}) = 0 \quad (3.8)$$

Orduan, (3.7) adierazpena honela gelditzen da:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = - \frac{\partial V}{\partial q_i} \iff \dot{p}_i = Q_i \quad (3.9)$$

Q_i direlakoen definizioa kontutan harturik,

$$Q_i = \sum_j \vec{F}_j \cdot \frac{\partial \vec{r}_j}{\partial q_i} \implies Q_i = \sum_j \vec{F}_j \cdot \vec{n} = \vec{F} \cdot \vec{n} \quad (3.10)$$

Hau da, Q_i $\vec{F}$ indar erresultantearen $\vec{n}$ direkzioarekiko osagaia du.

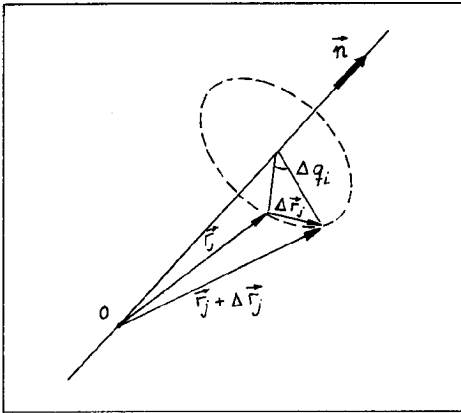
$$\begin{aligned} p_i &= \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = \sum_j m_j \dot{\vec{r}}_j \cdot \frac{\partial \dot{\vec{r}}_j}{\partial \dot{q}_i} = \\ &= \sum_j m_j \dot{\vec{r}}_j \cdot \frac{\partial \vec{r}_j}{\partial q_i} = \sum_j m_j \dot{\vec{r}}_j \cdot \vec{n} = \vec{P} \cdot \vec{n} \end{aligned} \quad (3.11)$$

Zeren $\frac{\partial \dot{\vec{r}}_j}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial \vec{r}_j}{\partial q_i}$ bait da.

Honela, p_i delakoa momentu lineal osoaren $\vec{n}$ direkzioarekiko osagaia da. Bereziki, q_i ziklikoa balitz, $p_i = K^{te}$ eta $\vec{n}$ direkzioan zehar momentu linealdien osagaia kontserbatu egiten da.

Sistema isolatua bada, hots $\vec{F}^{(e)} = 0$ bada, orduan edozein direkziotan, $\vec{F} \cdot \vec{n} = 0$. Hortaz, sistemaren momentu lineal osoak konstante dirau. (Newton-en Mekanikan aurkituriko emaitza berbera hain zuzen ere).

- b) Suposa dezagun, Δq_i gehikuntzak sistemaren biraketa adierazten digula. Biraketa-ardatzaren direkzio eta norantza $\vec{n}$ bektore unitarioren bidez azaltzen da.



Gehikuntza honen eraginez:

$$\Delta \vec{r}_j = \vec{r}_j(\dots, q_i + \Delta q_i, \dots) - \vec{r}_j(\dots, q_i, \dots)$$

$$\Delta \vec{r}_j = \Delta q_i \vec{n} \wedge \vec{r}_j \quad (3.12)$$

zeren

$|\Delta \vec{r}_j| = r_j \sin \theta \Delta q_i$ bait da eta $\Delta \vec{r}_j$ bektorea, $\vec{n}$ eta $\vec{r}_j$ bektoreen perpendikularra bait da, beronen norantza $\vec{n} \wedge \vec{r}_j$ bektorearena izanik.

Hortaz:

$$\frac{\partial \vec{r}_j}{\partial q_i} = \lim_{\Delta q_i \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}_j}{\Delta q_i} = \lim_{\Delta q_i \rightarrow 0} \frac{\Delta q_i \vec{n} \wedge \vec{r}_j}{\Delta q_i} = \vec{n} \wedge \vec{r}_j \quad (3.13)$$

Aurreko kasuan egin dugun bezalaxe:

$$\frac{\partial V}{\partial q_i} = 0$$

$$\frac{\partial T}{\partial q_i} = \sum_j m_j \dot{\vec{r}}_j \cdot \frac{\partial \dot{\vec{r}}_j}{\partial q_i} = \sum_j m_j \dot{\vec{r}}_j \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \vec{r}_j}{\partial q_i} \right) = \sum_j m_j \dot{\vec{r}}_j \cdot \frac{d}{dt} (\vec{n} \wedge \vec{r}_j) =$$

$$= \sum_j m_j \dot{\vec{r}}_j \cdot \left(\frac{d\vec{n}}{dt} \wedge \vec{r}_j + \vec{n} \wedge \dot{\vec{r}}_j \right) = 0 \quad (3.14)$$

Honelatan higidura-ekuazioa, i koordenatu generalizatu rako, hauxe da:

$$\dot{p}_i = Q_i \quad (3.15)$$

Kasu honetan Q_i eta p_i direlakoen esangurak ondokoak dirateke:

$$Q_i = \sum_{j=1}^n \vec{F}_j \cdot \frac{\partial \vec{r}_j}{\partial q_i} = \sum_{j=1}^n \vec{F}_j \cdot (\vec{n} \wedge \vec{r}_j) = \vec{n} \cdot \left(\sum_j \vec{r}_j \wedge \vec{F}_j \right) = \vec{n} \cdot \vec{\tau} \quad (3.16)$$

$$\begin{aligned} p_i &= \sum_j m_j \dot{\vec{r}}_j \cdot \frac{\partial \vec{r}_j}{\partial \dot{q}_i} = \sum_j m_j \dot{\vec{r}}_j \cdot \frac{\partial \vec{r}_j}{\partial \dot{q}_i} = \sum_j m_j \dot{\vec{r}}_j \cdot (\vec{n} \wedge \vec{r}_j) = \\ &= \vec{n} \cdot \left(\sum_j \vec{r}_j \wedge m_j \dot{\vec{r}}_j \right) = \vec{n} \cdot \vec{L} \end{aligned} \quad (3.17)$$

Hau da, $\vec{n}$ direkzioarekiko indar-momentu osoa eta momentu angeluar osoaren osagaiak, hurrenez hurren.

Honez gain, q_i ziklikoa balitz, orduan $p_i = K^{te}$ eta, beraz, $\vec{n}$ direkzioan momentu angeluarraren osagaiak konstante dirau.

Sistema isolatua baldin bada, indar-momentua nulua da, eta bai beronen edozein osagai ere. Ondorioz, sistemaren momentu angeluar osoa kontserbatu egiten da. Berriro, Newton-en Mekanikan erdietsitako emaitza.

Azkenik, gagozkion energiari. Hasteko, baldintza berri bat kontutan hartuko dugu. Suposatu egingo dugu lagrangear funtzioa denboraren pean ez dagoela: Honelatan, lagrangearra deribatuz:

$$\frac{dL}{dt} = \sum_j \left(\frac{\partial L}{\partial q_j} \frac{dq_j}{dt} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \frac{d\dot{q}_j}{dt} \right) \quad (3.18)$$

Lagrange-ren ekuazioak erabiliz:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} &= \frac{\partial L}{\partial q_j} \implies \\ \implies \frac{dL}{dt} &= \sum_j \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j + \sum_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \frac{d\dot{q}_j}{dt} \implies \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{dL}{dt} &= \sum_j \frac{d}{dt} \left(\dot{q}_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{d}{dt} \left(L - \sum_j \dot{q}_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) &= 0 \end{aligned} \quad (3.19)$$

Beraz,

$$L - \sum_j \dot{q}_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = H \quad \text{eginez, } H \text{ denborarekiko konstantea du-}$$

gu.

Erraz frogatu daitekeenez,

$$H = T + V \quad (3.20)$$

eta berriro, energiaren iraupen-legea dugu. Kontutan hartu behar da, hemen lorturiko iraupen-legea eta 2. atalean erdietsitakoa berdinak ez direla. Zeren eta, hemen, loturak idealak direnez, lotura-indarrek eginiko lana nulua bait da eta, beraz, han agertutako $\frac{1}{2} \sum_{i,j} V_{ij}$ delako gaia sartzen ez bait da V deritzzonean, atal honetan kontsideraturikoan, jakina. Ondorioz, hemen aurkitu rikoa aurrekoaren kasu berezitzat har dezakegu, $\frac{1}{2} \sum_{i,j} V_{ij} = 0$ deneko kasutzat hain zuzen.

Ostera ere, bada, Newton-en Mekanikan lortutako iraupen-legeak agertu zaizkigu. Ez dugu ezer berririk aurkitu. Are gehiago, metodo berri honek, zailtasun matematikoa ekarri ez ezik, esangura fisikoa izkutatu egin digu. Nolabait esanda, emaitza berbera lortu ahal izateko, bide luzeagoa eta askoz korapilatsuagoa. Zertarako?

4.- NOETHER-EN TEOREMA

a) Iraupen-legeak eta higidura-konstanteak

Dakigunez, edozein sistema mekaniko ondo definiturik gelditzen da, beronen posizioak eta abiadurak ezagutzen ditugunean. Ezaguera hau erdietsi ahal izateko, Hamilton-en printzipiotik lortutako Lagrange-ren higidura-ekuazioak ebatzi behar ditugu.

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = 0 \quad i = 1, \dots, n \quad (4.1)$$

Beraz, bigarren ordenako n ekuazio diferentzial arruntan sistema askatu behar da. Azken hau eginda, ondoko funtzioak aurki ditzakegu:

$$q_i = q_i(t, k_1, \dots, k_{2n}) \quad i = 1, \dots, n \quad (4.2)$$

non $k_1, \dots, k_{2n}$ direlakoak $2n$ konstante diren, hasierako baldintzak erabiliz kalkulatu behar direnak. Honetatik zera daukagu:

Edozein higiduratan, q_i koordenatu generalizatuak aldatuz doazen bitartean, $2n$ magnitude existitzen dira, zeintzuek h_i giduran konstante dirauten. Aipaturiko $2n$ magnitude hauek, $G(\dot{q}_j, q_j, t)$, ondoko bi baldintza baliokideak betetzen dituzte.

$$\frac{dG}{dt} = 0 \iff G(\dot{q}_j, q_j, t) = Kt$$

Hortaz, $G(\dot{q}_j, q_j, t)$ deritzenak ez dira benetako konstanteak, $q_i(t)$ funtzioak higidura-ekuazioen soluzioak direneko kasuan, denborarekiko deribatu nulua duten funtzioak baizik.

"Konstante" hauei higidura-konstanteak deritze.

Agerian dagoenez, K edozein konstante izanik.

$$\frac{d}{dt}(G+K) = 0 \implies G+K \text{ higidura-konstantea da.}$$

Aipaturiko higidura-konstanteak, konstante batez indefiniturik daude. Konstante batez ezberdintzen diren higidura-konstanteen multzoak, iraupen-lege bat definitzen du.

Lehenago ikusi dugunez, sistemaren askatasun-graduak dioskute zenbat higidura-konstante dauden. Sistemak n askatasun-gradu baldin baditu, $2n$ higidura-konstante independente ditu.

Argi dagoenez, $G_1, \dots, G_{2n}$ higidura-konstanteak direlarik, eta $f(x_1, \dots, x_{2n})$ edozein funtzio, ondoko berdintza betetzen da.

$$\frac{df(G_1, \dots, G_{2n})}{dt} = \sum_{i=1}^{2n} \frac{\partial f}{\partial G_i} \frac{dG_i}{dt} = 0 \quad (4.4)$$

Beraz, honela lorturiko higidura-konstanteek ez digute iraupen-lege berririk definitzen, eta ez dioskute ezer berririk sistemaren egoera fisikoari buruz; ziurren, informazio gutxiago ematen dute.

Azkenik, hitz egin dezagun higidura-konstanteen garrantziaz. Lehenengo eta behin, esan dezagun, sistemaren mekanika eta sistemaren higidura-konstanteak ezagutzea gauza bera direla.

Izan ere, demagun Lagrange-ren higidura-ekuazioak ebartzi egin ditugula. Orduan ondoko funtzioak ditugu:

$$q_j = q_j(t, k_1, \dots, k_{2n}) \quad j = 1, \dots, n \quad (4.5)$$

Berauek deribatuz,

$$\dot{q}_j = \dot{q}_j(t, k_1, \dots, k_{2n}) \quad j = 1, \dots, n \quad (4.6)$$

(4.5) eta (4.6) adierazpenak elkartuz, $2n$ ekuaziotako sistema dugu, non $k_1, \dots, k_{2n}$ higidura-konstanteak aska daitezkeen. Aitzitik, $2n$ $G_i(\dot{q}_j, q_j, t)$ higidura-konstante independente ezaguturik, $2n$ ekuaziotako sistema dugu berriro, non $\dot{q}_j, q_j$ funtzioak G_i konstanteen bidez azal daitezkeen.

Beste aldetik, maiz asko iraupen-legeek dakarkiguten informazioa higidura-ekuazioen ebazketa osoak dakarkiguna baino zabalago eta garrantzitsuago gerta dakiguke.

b.- Transformazio infinitesimalak.

Aipaturiko transformazioak koordinatu generalizatuen transformazio-ekuazioen bidez definitzen dira:

$$t \rightarrow t' = t + \delta t \quad q_j(t) \rightarrow q'_j(t') = q_j(t) + \delta q_j \quad (4.7)$$

$$\text{non} \quad \delta t = t' - t = \varepsilon f(t) \quad \text{eta} \quad \delta q_j = q'_j(t') - q_j(t) = \varepsilon g_j(q_k, t) \quad (j=1, \dots, n)$$

diren, ε delakoa infinitesimoa delarik.

Transformazio hauek direla eta, $\dot{q}_i$ abiadura generalizatuak ere aldatzen dira. Berauen aldaketa, froga daitekenez, ondokoa da:

$$\dot{q}_j \longrightarrow \dot{q}'_j(t') = \dot{q}_j(t) + \delta \dot{q}_j \quad (4.8)$$

$$\text{non } \delta \dot{q}_j = \frac{d\delta q_j}{dt} - \dot{q}_j \frac{d\delta t}{dt} \quad (j=1, \dots, n) \quad \text{den}$$

Lagrangearra ere aldatuko da. Soil-soilik, ekintz integralaren zenbakizko balioa aldatzen ez duten transformazio infinitesimalak kontutan hartuko ditugu:

$$L(\dot{q}_j(t), q_j(t), t) \longrightarrow L'(\dot{q}'_j(t'), q'_j(t'), t')$$

$$\text{non } L'(\dot{q}'_j(t'), q'_j(t'), t') \frac{dt'}{dt} = L(\dot{q}_j(t), q_j(t), t) \quad \text{den} \quad (4.9)$$

Transformazio hauek ez daukate zerikusirik desplazamendu birtualekin. Zeren eta, hauek denborarekiko independenteak bait dira; eta transformazio infinitesimalak, ez. Adibidez, (4.7) adierazpenetik zera daukagu:

$$\frac{dt'}{dt} = 1 + \frac{d\delta t}{dt} \quad (4.10)$$

c) Simetri transformazioak

Simetri transformazioak zerak dira, higidura-ekuazioen edozein soluzio transformatuz lortzen dena higidura-ekuazioen soluzioa izatea lortzen duten transformazioak. Beraz, higidura-ekuazioek eta transformaturiko ekuazioek soluzio-multzo berbera badaukate, transformazioa simetria zkoa da. Matematikoki:

$$\left[\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial}{\partial q_i} \right] L(\dot{q}_i, q_i, t) = \left[\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}'_i} - \frac{\partial}{\partial q'_i} \right] L'(\dot{q}'_i, q'_i, t) \quad (4.11)$$

Edo

$$\left[\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i'} - \frac{\partial}{\partial q_i'} \right] L(\dot{q}_i', q_i', t) = \left[\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i'} - \frac{\partial}{\partial q_i'} \right] L'(\dot{q}_i', q_i', t') \quad (4.12)$$

Erraz froga daiteke, aurreko baldintzak $\delta\Omega = \varepsilon Z(q_j, t)$ funtzioa existitzen bada betetzen direla, non transformaturiko lagrange funtzioaren eta hasierakoaren arteko kendura, $\delta\Omega$ funtzioaren denborarekiko deribatua den. Hau da,

$$L'(\dot{q}_j, q_j, t) = L(\dot{q}_j, q_j, t) + \frac{d\delta\Omega}{dt} \quad \text{bada,}$$

orduan transformazio infinitesimala simetria zkoa da. (4.13) adierazpena honela ere jar daiteke:

$$L'(\dot{q}_j', q_j', t') = L(\dot{q}_j', q_j', t') + \frac{d\delta\Omega}{dt'} \quad (4.14)$$

non $\frac{d\delta\Omega}{dt} = \frac{d\delta\Omega}{dt'}$ den (lehen ordenaraino).

Bereziki $\delta\Omega = 0$ bada, orduan $L'(\dot{q}_j, q_j, t) = L(\dot{q}_j, q_j, t)$ eta transformazioari inbariantzi transformazioa deritzo. Hauexek dira, hain zuzen ere, gero aztertuko ditugunak.

Emandako (4.8), (4.9) eta (4.10) adierazpenak baliokideak baldin badira ere, ez zaizkigu gehienetan erabilgarri suertatzen. Hau dela eta, beste baldintza erosoago bat bilatu beharra daukagu, simetri transformazio infinitesimala noiz daukagun jakiteko.

(4.8) eta (4.10) berdintzak kontutan harturik,

$$L'(\dot{q}_j', q_j', t') \left(1 + \frac{d\delta t}{dt} \right) = L(\dot{q}_j, q_j, t) \quad (4.15)$$

(4.14) erabiliz,

$$L(\dot{q}_j', q_j', t') \left(1 + \frac{d\delta t}{dt} \right) + \frac{d\delta\Omega}{dt} = L(\dot{q}_j, q_j, t) \quad (4.16)$$

Azken honetatik zera daukagu:

$$L(\dot{q}_j, q_j, t) \left(1 + \frac{d\delta t}{dt} \right) + \sum_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \delta \dot{q}_j + \sum_j \frac{\partial L}{\partial q_j} \delta q_j + \frac{\partial L}{\partial t} \delta t + \frac{d\delta\Omega}{dt} = L(\dot{q}_j, q_j, t) \quad (4.17)$$

$$\text{eta } \sum_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \delta \dot{q}_j + \sum_j \frac{\partial L}{\partial q_j} \delta q_j + \frac{\partial L}{\partial t} \delta t + L \frac{d\delta t}{dt} = - \frac{d\delta \Omega}{dt} \quad (4.18)$$

Orduan, baldin eta soilik baldin aurreko adierazpenaren ezkerreko atala q_i eta t aldagaien funtzio baten deribatua bada, transformazioa simetria-zkoa da. Bereziki, ezkerreko atala zero bada, hots, $\delta \Omega$ funtzioa nulua edo konstantea bada, transformazioa aldaezintasunezkoa da.

Noether-en teorema, transformazio infinitesimalen eta higidura-konstanteen arteko erlazioak erakusten dizkigun teorema du.

Ondoko hau kontutan harturik,

$$\frac{\partial L}{\partial t} = \frac{dL}{dt} - \sum_j \frac{\partial L}{\partial q_j} \dot{q}_j - \sum_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \ddot{q}_j \quad (4.19)$$

(4.18) adierazpena beste honetan bilakatzen da:

$$\frac{d}{dt} (L \delta t) + \sum_j \frac{\partial L}{\partial q_j} (\delta q_j - \dot{q}_j \delta t) + \sum_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} (\delta \dot{q}_j - \ddot{q}_j \delta t) + \frac{d\delta \Omega}{dt} = 0 \quad (4.20)$$

$$\frac{d}{dt} (L \delta t) + \sum_j \frac{\partial L}{\partial q_j} (\delta q_j - \dot{q}_j \delta t) + \sum_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \frac{d}{dt} (\delta q_j - \dot{q}_j \delta t) + \frac{d\delta \Omega}{dt} = 0 \quad (4.21)$$

edo

$$\frac{d}{dt} \left[\sum_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \delta q_j + \left(L - \sum_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j \right) \delta t + \delta \Omega \right] = \sum_j \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} \right) (\delta q_j - \dot{q}_j \delta t) \quad (4.22)$$

Baina, q_i funtzioak higidura-ekuazioen soluzioak badira,

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0$$

Ondorioz:

$$\frac{d}{dt} \left[\sum_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \delta q_j + \left(L - \sum_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j \right) \delta t + \delta \Omega \right] = 0 \quad (4.23)$$

eta

$$\sum_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \delta q_j + \left(L - \sum_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j \right) \delta t + \delta \Omega = K \delta t. \quad (4.24)$$

Beraz, simetri transformazio infinitesimal orori iraupen-lege bat dagokie, beronen higidura-konstantearen adierazpen matematikoa (4.24) adierazpenean datzalarik. Aipaturiko adierazpena honela berridatziko dugu:

$$\varepsilon G(\dot{q}_k, q_k, t) = \sum_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \delta q_j + \left(L - \sum_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j \right) \delta t + \delta \Omega \quad (4.25)$$

$G(\dot{q}_k, q_k, t)$ funtzioa konstante batez izan ezik definiturik dago, zeren $\delta \Omega$ delakoa deribatu baten barruan definitu bait dugu.

Kontutan hartu behar da $G(\dot{q}_k, q_k, t)$ eta $G(\dot{q}_k, q_k, t) + K$ higidura-konstanteek iraupen-lege berbera adierazten digutela.

Beste aldetik, dakigunez,

$$p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \quad \text{eta} \quad H = \sum_j p_j \dot{q}_j - L \quad (4.26)$$

Hortaz, $G(\dot{q}_k, q_k, t)$ konstantea era honetara azaltzen da:

$$\varepsilon G(\dot{q}_k, q_k, t) = \sum_j p_j \delta q_j - H \delta t + \delta \Omega \quad (4.27)$$

Puntu honetan gaudelarik, edonori burura dakioken galderra haxe liteke: Honek ba ote dauka zerikusirik momentu lineal, angeluar edo energiaren iraupen-legearekin?

Azter dezagun hirugarren puntuan egindako ikerketa. Han zera esan genuen: Har dezagun q_i koordenatua, non Δq_i gehikuntzak sistemak bere osotasunean jasandako translazioa azaltzen digun. Matematikoki azalduz:

$$\begin{aligned} \Delta q_i &= \delta q_i = \varepsilon \\ \delta q_i &= 0 \quad j \neq i \quad \text{eta} \quad \delta \dot{q}_j = 0 \quad \forall j \\ \delta t &= 0 \end{aligned} \quad (4.28)$$

Beraz, transformazio infinitesimala dugu. Simetriadakoa ote? Erabil dezagun (4.18) adierazpena,

$$\sum_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \delta \dot{q}_j + \sum_j \frac{\partial L}{\partial q_j} \delta q_j + \frac{\partial L}{\partial t} \delta t + L \frac{d\delta t}{dt} = \frac{\partial L}{\partial q_i} \epsilon \quad (4.29)$$

Zeren $\delta t = 0$, $\delta \dot{q}_j = 0 \quad \forall j$ eta $\delta q_j = 0 \quad j \neq i$ erlazioak betetzen bait dira. Hortaz,

$$\epsilon \frac{\partial L}{\partial q_i} = \frac{d\delta \Omega}{dt} \quad (4.30)$$

Baina q_i ziklikoa bada:

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \implies \frac{d\delta \Omega}{dt} \implies \delta \Omega = k t \epsilon. \quad (4.31)$$

Hau da, emandako transformazioa simetriadakoa ez ezik, aldaezintasunezkoa da. Noether-en teoremaren arauera, transformazio horri dagokion higidura-konstantea, (2.25) adierazpenetik atera dezakegu:

$$\epsilon G(\dot{q}_k, q_k, t) = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \epsilon = p_i \epsilon \implies G(\dot{q}_k, q_k, t) = p_i \quad (4.32)$$

Beraz, koordenatu zikliko baten momentu konjokatuak konstante dirau denboran zehar (lehenago aurkituriko iraupen-lege orokorra).

Bereziki, hirugarren puntuan ikusirikoaren arauera, q_i koordenatuak sistemaren traslazioa azaltzen badu, momentu linealaren iraupen-legea dugu. Aitzitik, q_i koordenatuak ardatz batekiko jasandako biraketa adierazten badu, momentu angeluarraren iraupen-legea dugu.

Energiari dagokionez, demagun ondoko transformazio hau

$$\begin{aligned} \delta q_j &= 0 \quad \forall j \\ \delta t &= \epsilon \\ \delta \dot{q}_j &= 0 \quad \forall j \end{aligned} \quad (4.33)$$

Aise ikus dezakegunez,

$$\frac{d\delta\Omega}{dt} = 0 \quad \text{eta inbariantziazko transformazioa dugu.}$$

Beroni dagokion higidura-konstantearen adierazpen matematikoa hauxe da:

$$\epsilon G(\dot{q}_k, q_k, t) = -\epsilon H \qquad G(\dot{q}_k, q_k, t) = -H = -(T + V) \quad (4.34)$$

Berriro, bada, energiaren iraupen-legea.

6.- IRAUPEN-LEGEEI BURUZKO BURUTAPENAK

Mekanika Klasikoaren legeek azaltzen dizkiguten fenomenoak, hiru taldetan bana genitzake, era zabalez. Lehenago eta behin, izarren eta planeten higidurak genituzke. Berauen ezaugarriak, doitasun handiz ezagutzen dira Mekanika Klasikoa dela medio. Kasurako, eguzki-sistemako planeten higiduren behaketa experimentalak eta teoriaren bidez lorturiko emaitzak bat datoz ia-ia erabat. Erlatibitate Orokorren bidez diferentzia txiki batzu aurkitzen dira, baina, oso xumeak dira saiakuntzaz ohartu ahal izateko. Soil-soilik Merkurio delako planetaren kasuan beha daiteke en diferentzia aurki genezake.

Bigarren taldea, Lurraren inguruan dauden gorputz makroskopiko eta mikroskopikoz osaturiko sistemei dagozkien fenomenoek gauzaturikoa litzateke. Hemen, Mekanika Klasikoa baliagarri suertatzen den arren, agertzen diren indarrak nahiko korapilatsuak direnez, planeten kasuan eginiko kalkuluen doitasuna murriztu egiten da. Esate baterako, marruskadura-indarren adierazpen matematikoa, ez da ezagutzen zehatz-mehatz. Halaz ere, ontzat eman daitezke erdietsitako emaitzak.

Hirugarren taldean molekula, atomo, elektroi eta abarreko sistemei dagozkien azalpenak kontutan hartu behar dira. Argi dagoenez, sistema hauen ezaugarrien azalpenak Mekanika Kuantikoaren bidez lortuak dira. Baina neurri handi batetan, fenomeno

askoren azalpenak Mekanika Klasikoaz lor daitezke. Alabaina, azterketa sakona egin, edota maila honetan gertatzen diren fenomeno^{en} zehaztasun guztiak ezagutu nahi izanez gero, ezinbestekoa dugu, Mekanika Kuantikoaren tekniketara jotzea.

Orain arte aipaturikoa kontutan harturik, joan gaitez, hiru talde hauetan, iraupen-legeen mugak aztertzeraz.

Momentu linealari dagokionez, zera esan dezakegu:

Higidura planetarioa, sistema makroskopiko eta mikroskopikoetan prezisioz betetzen dela. Zeren, berauetan, Newton-en hirugarren legea egia absolututzat har bait daiteke. Atomoen tamainuko partikulaz osaturiko sistemetan ere, oso-osorik betetzen da Newton-en hirugarren legea, partikulek dauzkaten abiadurak argiarenarekin konparatuz txikiak badira, bederen. Honela ez baltitz, hots, abiadurak argiarenaren ordenakoak balira, interakzio^{en} hedapen-abiadura finitua kontutan hartu beharko litzateke. Ondorioz, aipaturiko legea ez litzateke beteko. Adibidez, elektroi^{ar}in bat finko dagoen protoi baten eremuan sartzen bada, edozein unetan protoiak elektroia nabaritzen du, baina, beronek daukan posiziotik apur bat atzerago. Beraz, edozein unetan, moduluari dagokionez, beraien arteko indarrak ez dira berdinak, eta ez daukate direkzio berbera ere.

Honez gainera, partikula kargatu bat azeleratzen baldin bada, erradiatu egiten du ezinbestez, momentu lineala galduz. Bi kasu hauetan, momentu linealaren iraupen-legeari eutsi dakioke, baina, horretarako momentu linealaren definizioa birformulatu behar da, Ere^{mu} Elektromagnetikoaren momentu linealaren kontzeptua sartuz.

Beste aldetik, begi bistakoa da, gorputz zerutar^{ra}kk, makroskopikoak eta mikroskopikoak partikulak ez direla, baizik eta partikulaz osaturiko sistemak. Hala eta guztiz ere, Newton-en Mekanikan, berauen posizioen hiru koordenatuak ematea nahikoa da, beteriko ibilbidearen ezagupena lortzeko. Beraz, baldin eta soilik baldin fenomenoaren baldintzak azterturik, partikulen dimen-

tsioak gutxietsigarriak badira, $\vec{F} = m\vec{a}$ ekuazioa baliagarri suertatzen zaigu; eta bai, adierazpen horretatik ondorioztatzen den momentu linealaren iraupen-legea ere. Honela ez bada, sistemaren egitura hartu behar da aintzakotzat. Gainera, egitura honetan elektroiei, protoiei eta honelako partikulek parte hartzen baldin badute, goian aipaturiko Newton-en hirugarren legea desegoki gertatzen da. Beraz, lehenago esandako zuzenketak nahitaezkoak dira, sistemari dagokion azalpen egokia eman diezaiogun.

Momentu angeluarraren iraupen-legea, formulatu den legez betetzen da, gorputz zerutar eta gorputz makroskopiko eta mikroskopikoz osaturiko sistematarako, baldin berauen biraketak gutxietsigarriak badira. Aitzitik, kontsideraturiko gorputzen biraketak aintzakotzat hartu behar badira, iraupen-legea birformulatu beharra dago, biraketen ondorioak kontutan har daitezen. Berriro, bada, lehenago aurkituriko oztopoa agertzen zaigu, hots, sistemaren eboluzio zehatza adierazi nahi baldin badugu, partikula bakoitzaren higidura ezin daitekeela eman translaziozko hiru koordenaturen bidez soilik. Halaz ere, eguzki-sistemari dagokionez, beronen planeten biraketak, eguzkiarena barne dagoelarik, kontutan hartzen ez badira ere, momentu angeluarraren iraupen-legea doitasun handiz betetzen da. Baina, zehatz-mehatz bete dadin, biraketaren momentu angeluarra ere hartu behar da aintzakotzat. Zeren mareak direla eta, biraketaren momentu angeluarraren zati bat momentu angeluar orbital bilakatzen bait da.

Beste aldetik, planetarteko hautsarengatik momentu angeluarraren aldaketa bat suertatzen da, baina ondorio hau guztiz arbuia garria da.

Dakigunez, momentu lineal eta angeluarraren iraupen-legeak definitzeko, partikulaz osaturiko sistema baten kasuan, Newton-en hirugarren legea ezinbestekoa dugu. Hortaz, momentu linealari buruz hitz egin dugunean esan duguna, baliagarria da kasu honetan ere. Batez ere, kontsideraturiko sistemaren egituren elektroiei, protoiei eta abarreko partikulak sartzen badira.

Honez gain, partikula azpiatomikoei gagozkielarik, Me-

kanika Klasikoan antzekorik ez daukan beste fenomeno bat kontutan hartu behar dugu. Dakigunez, partikula azpiatomikoek biraketazko higidura intrintsekoa daukate, spin delakoa. Hortaz, momentu angeluarraren iraupen-legea oso-osorik bete ahal izateko, nahitaezkoa zaigu spin delako hori kontutan hartzea.

Azkenik, dakusagun energiari buruz zer esan dezakegun. Gorputz zerutarren arteko indarrak kontserbakorrak direnez gero, maila honetan energiaren iraupen-legea ia-ia erabateko doitasunez betetzen da. Soil-soilik, energiaren galtze txiki bat agertzen da planetarteko hautsak eraginiko marruskadura-indarrarengatik, baina, txikiegia da saiakuntzaren bidez ohartu ahal izateko.

Aldiz, marruskadura-indarrak izugarrizko garrantzia dauka gorputz lurtar makroskopikoz osoturiko sistemetan. Hortaz, energiaren iraupen-legea oso gutxitan erabil daiteke, guk ikusi dugun bezalaxe. Hala ere, Joule-k beroa energiaren beste aurpegi bat besterik ez zela eriden zuen. Honelatan, energia mekanikoa eta bero-energia hartuz, energiaren iraupen-legea birformula daiteke, aurreko energien batura kontserbatu egiten dena delarik, hain zuzen ere.

Kontsideraturiko sistemaren partikulak kargatuak badira, indar elektromagnetikoak azaltzen dira, zeintzu, oro har, kontserbakorrak ez diren. Kasu honetan, energiaren iraupen-legea birformulatu egin behar da berriro. Hau egiteko, eremu elektromagnetikoari eta gertatzen diren elkarrekintza guztiei, komenigarriak diren definizio berriak egokitzen zaizkie. Eginkizun hau, Mekanika Klasikotik at gelditzen da, Eremuen Teoria Klasiko eta Kuantikoari dagokielarik.

Laburpen gisara, zera esan genezake:

Mekanika Klasikoan definituriko iraupen-legeen oinarria, hiru aitzinasmotan datza, funts-funtsean:

- 1.- Gorputz baten posizioa hiru koordenaturen bidez azal daiteke.

- 2.- Newton-en hirugarren legea betetzen da.
- 3.- Energiari gagozkiolarik, sitema kontserbakorra da.

Ikusi dugunez, edozein azterketak, sakona bada behintzat, hiru aitzinasmo hauen balioa deuseztatzen du eta halaber aitzinasmo hauetatik ondorioztatzen diren iraupen-legeen balioa. Halaz ere, beti iraupen-lege hauek birformulatzea posible da. Kasu batzutan, beharrezkoak diren aldaketak, Mekanika Klasikoaren arloan kokatzen dira, marruskadura-indarra eta bero-energia kasu. Beste batzutan, sorturiko aldaketek ez daukate adierazpiderik Mekanika Klasikoan, spina edo indar-elektromagnetikoak kasu. Baina, fenomeno hauetaz arduratzen diren Mekanika Kuantiko, Eremu Teoria Klasiko eta Kuantikoan, momentu lineal, angeluar eta energia era egokiz definituz, beti eutsi dakieke iraupen-legeei.

Orduan, Noether-en teoremak dakarkigun korapilatze matematikoa kontextu honetan ulertu behar dugu. Zeren, Eremuen Teoria Klasiko eta Kuantikoari dagokienez, aipaturiko birformulazioan, Iraupen-legeei eutsi ahal izateko jakina, Noether-en teorema oso lanabes lagungarri suertatzen bait da.

B I B L I O G R A F I A

- B. FINZI. "Mecánica Racional I,II" Ed. Urmo. Bilbao. 1973.
- J.R. ETXEBARRIA. "Fisika Orokorra I". U.E.U. Iruñea. 1982.
- J.M. AGIRREGABIRIA, J. R. ETXEBARRIA. "Mekakika Analitikoa"
U.E.U. Iruñea. 1979.
- Ľ.D. LANDAU, E.M. LIFSHITZ. "Mecánica" Ed. Reverté.
Barcelona. 1975.
- M. ALONSO, J. FINN. "Física I". Fondo Educativo Interamericano
S. A. 1971.
- H. GOLDSTEIN. "Mecánica Clásica" Ed. Aguilar. Madrid. 1972.
- K.R. SIMON. "Mecánica". Aguilar. 1979.
- V. ARNOLD. "Métodos Matemáticos de la Mécanica Clásica".
Paraninfo. 1983.

SISTEMA ETA EREMU JARRAIK

O. Ezenarro

SISTEMA ETA EREMU JARRAIAK

- . Sarrera
- . Sistema diskretuetatik sistema jarraietarako trantsizioa.
- . Sistema eta eremu jarraien formulazio lagrangearra
- . Sistema jarraien formulazio hamiltondarra
- . Bibliografia

SISTEMA ETA EREMU JARRAIK

SARRERA

Mekanika klasikoan zehar aztertuak izan diren sistemak, Lagrange-ren eta Hamilton-en formulazioen bidez adieraziak izan dira, eta problema hauetan erabili izan dugun askatasun-graduaren kopurua, finitua. Baina horrelako problemak ebazterakoan ez ditugu kontutan eduki gorputzen barne-egiturak, egitura molekularra eta atomikoa hain zuzen.

Solido zurrunaren higidura aztertzerakoan, edo solido zurruna bera definitzerakoan, era bakar batetan ulertzen genuen zurruntasunaren ideia: solidoaren partikula guztiak erabat loturik aurkitzen zirela lotura-baldintzen ekuazioen arauera, eta solidoaren gainean eragiten zuten perturbazioak, aldiune berean heltzen zirela solidoaren puntu guztietara (azken batez, perturbazioen abiadura infinitutzat hartzen genuen).

Hau ez da horrela. Nahiz eta hurbilketa on batetan baliagarria izan zinematikazko problema gehienak ebazteko, ez da egokia solidoan zehar hedatzen diren uhinak aztertzeke, edota ez du zentzurik informazioa daraman seinale baten abiadura infinitua dela esateak (hau da, indarren kausaz agertzen diren perturbazioak ez dira solidoen puntu guztietara aldiune berean heltzen). Horrez gain, "aldiune berean" aipatzerakoan, burura etortzen zaigu "aldiberekotasuna" bera zer den. Dakigunez, aldiberekotasuna ez da absolutua, behatzaileen higidura-egoeren funtzioa baizik. Beraz, aldiberekotasunaren erlatibotasuna kontutan hartuz, solido zurrun baten puntu guztietara seinale bat aldiune berean heldu dela ontzat hartuko bagenu ere (behatzaile batekiko), ez litzateke horrela izango lehenengoarekiko higitzen den beste behatzaile batekiko.

Hala eta guztiz ere, ez dugu uste puntu honetan sakontzea komenigarria izango denik, zeren gure helburua sistema jarraiak aztertzeke eredu mekaniko egokiagoa eraikitzea baita,

Mekanika Klasikoaren barnean.

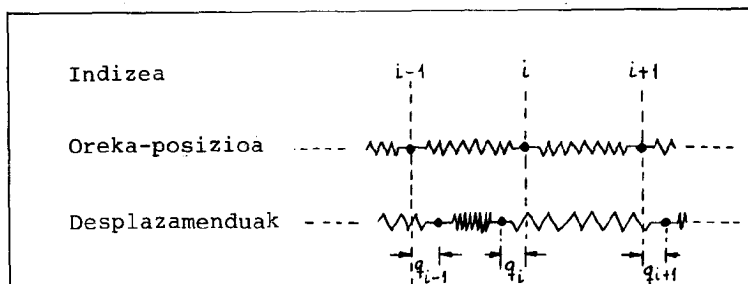
Zenbait problema mekanikotan agertzen diren sistemak, nahiz eta diskretuak izan, jarraiak direla kontsidera genezake. Adibidez, solido elastiko batek egiten dituen bibrazioen azterketan, solidoaren puntu bakoitzak parte hartzen du oszilazioetan, eta higidura osoa adierazteko, puntu bakoitzaren koordinatuak denboraren funtzioz eman beharko genituzke. Ongi ikusten denez, arazo ez-ebazkorra bihur lekiguke, zeren koordenatuen kopurua infiniturantz joan baitliteke. Horregatik merezi du ze haztasun hutsa galtzea ebazkortasunaren alde. Nola? Hauxe izango da gure lehenengo pausoa: sistema diskretu bat hartuz, sistema jarrai batetara pasatzeko zeintzu aldaketa egin beharko lirakeen aztertzea, lortutakoa funtzio jarraien bidez matematikoki adieraztea eta, azken batez, "EREMUA" zer den definitzea.

1.- SISTEMA DISKRETUETATIK SISTEMA JARRAIETARAKO TRANTSIZIOA.

Kontsidera dezagun kasu sinpleena: barra infinitu batetan zehar hedatzen diren luzerazko oszilazioak. Eredu fisiko ideala hartzeko asmotan, barra hori dimentsio bakar bateko segi da molekularrez osaturikoa dela onartuko dugu (azken batez, molekula triatomiko linealaren generalizazioa besterik ez da). Gainera, nahiz eta indar molekularrak nahiko konplikatuak izan, guretzat molekula edo masa biren arteko indarrak, kalkuluak errazteko, Hooke-ren legea betetzen duela esango dugu. Grafikoki adierazteko, molekulak, edo partikulak, konstante elastiko bereko eta luzera bereko erresortez loturik daudela esango dugu (barra guztiz homogeneoa da, noski), edozein erresorte biren arteko loturan m masa duen partikula bat dagoelarik.

Kontsidera dezagun, halaber, sistema diskretu honen izendapena i indizearen bidez egiten dela, non $i = -\infty, \dots, -1, 0, 1, \dots, \infty$ den. Edozein partikularen inguruan, beste pare bat aurkitzen da, eta erresorte bakoitzaren berezko luzera a bada, partikula bakoitzaren oreka-posizioa $x_{0i} = ia$ dela esango dugu.

Baina gure sistemak bibrazio bat egiten badu, partikula bakoitzak q_i desplazamendua jasango du bere oreka-posizioarekiko (ikus irudia).



Horregatik, $i=0$ partikularen oreka-posizioan erreferentzi sistema bat kokatzen badugu, edozein partikularen posizioa honela adierazita etorriko da:

$$x_i = i a + q_i$$

eta abiadura:

$$\dot{x}_i = \dot{q}_i$$

Beraz, sistema osoaren energia zinetikoa hauxe izango da:

$$T = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2} m_i \dot{x}_i^2 = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2} m \dot{q}_i^2$$

non $m_i = m$ den.

Sistemaren energia potentziala lortzeko, kalkula ditzagun partikulen arteko distantzia berriak, edo erresorteen deformazioak. Har ditzagun irudian agertzen diren hiru partikulak:

	<u>Oreka-egoeran</u>	<u>Ez oreka-egoeran</u>	<u>Deformazioak</u>
$i-1$ partikularen posizioa	$(i-1)a$	$(i-1)a + q_{i-1}$	$\left. \begin{array}{l} q_i - q_{i-1} \\ q_{i+1} - q_i \end{array} \right\}$
i " "	ia	$ia + q_i$	
$i+1$ " "	$(i+1)a$	$(i+1)a + q_{i+1}$	

Azken batez, hauek erresorteen desplazamenduen kenketak besterik ez dira. (Har ezazue kontutan, q_i -ren baloreak inplizituki positiboak edo negatiboak izan daitezkeela).

Beraz, sistema osoaren energia potentziala (beste edo zein motatako energia potentzialik ez dagoela suposatzen badugu), erresorte guztien energia potentzial elastikoen batuketaz lortuko dugu. Argi ikusten denez, eta erresorteen deformazioak kontutan hartuz, adierazpen honetara hel gaitezke:

$$V = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2} k (q_{i+1} - q_i)^2$$

Ondo dagoela frogatzeko, kalkula dezagun i partikularen gainean eragiten duen indar erresultantea, V funtzio potentzialaz balia tuz. Indar elastikoen eremua kontserbakorra denez, dimentsio bakoitzean batetara zera idatz dezakegu:

$$F_i = - \frac{\partial V}{\partial q_i}$$

Gara dezagun V , i partikularen inguruan agertzen diren gaiak hobereto ikusteko:

$$V = \sum_{j=-\infty}^{i-2} \frac{1}{2} k (q_{j+1} - q_j)^2 + \frac{1}{2} k (q_i - q_{i-1})^2 + \frac{1}{2} k (q_{i+1} - q_i)^2 + \sum_{j=i+1}^{\infty} \frac{1}{2} k (q_{j+1} - q_j)^2$$

Beraz,

$$F_i = - \frac{\partial V}{\partial q_i} = k(q_{i+1} - q_i) - k(q_i - q_{i-1})$$

non $k(q_{i+1} - q_i)$ eta $-k(q_i - q_{i-1})$, i partikularen gainean eragiten duten indarrak diren, bata eskuin aldetik (lehenengoa) eta bestea ezker aldetik. Irudiari begiratzuz, desplazamenduek zeinua inplizituki daramatela jakinik, ikus dezagun zein norantzarako indarra daukagun kasu horretan. Argi dagoenez:

$$q_{i+1} > 0$$

$$q_i < 0$$

$$q_{i-1} > 0$$

Beraz:

$$(q_{i+1} - q_i) > 0$$

$$(q_i - q_{i-1}) < 0$$

eta $k > 0$ denez:

$$k(q_{i+1} - q_i) > 0 \quad (\text{hau da: eskuinerantz})$$

$$-k(q_i - q_{i-1}) > 0 \quad (\text{hau ere, eskuinerantz})$$

espero genuen bezala erresorteei begiratu: Eskuineko erresorteak, luzaturik dagoenez, i partikulatik tiratu egiten du. Aitzitik, ezkerreko erresorteak, uzkuraturik dagoenez, bultza egiten dio i partikulari, eta indar biak norantza berekoak dira. Beste edozein zeinuren aukerak, F_i adirazpenaren zehaztasuna edo V funtzioaren egokitasuna ere frogatuko luke.

Pasa gaitezen sistemaren lagrangearra idaztera (orain dino, sistema diskretua, baina infinitua, aztertzen ari gara):

$$L = T - V = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{2} m \dot{q}_i^2 - \frac{1}{2} k (q_{i+1} - q_i)^2 \right]$$

eta hemendik, Euler-Lagrangeren ekuazioak idatziz:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \left(\frac{\partial L}{\partial q_j} \right) = 0 \longrightarrow m \ddot{q}_j + k(q_j - q_{j-1}) - k(q_{j+1} - q_j) = 0$$

edo:

$$k(q_{j+1} - q_j) - k(q_j - q_{j-1}) = m \ddot{q}_j \quad j = -\infty, \dots, +\infty$$

Egin dezagun orain aldaketa hau sistema diskretuan: m masa bakoitzaren ordez, $\frac{m}{M}$ masa duten M masatxo, $\Delta x = \frac{a}{M}$ luzera duten erresorteez loturik (hau da, lehengo erresortea ere M zatitan zatikatu dugu). Oraingo honetan, eta M nahiko handia bada, sistema berria, zaharra baino askoz "jarraiagoa" izango da.

Berrizenda ditzagun orain partikula berriak, q_i -ren ordez $q(x)$ ipinirik, non x partikula berri baten oreka-posizioa eta $q(x)$ partikula horren oreka-posizioarekiko desplazamendua diren.

Hona hemen nola idatz dezakegun sistema berriaren lagrangearra:

$$L = \sum \left[\frac{1}{2} \left(\frac{m}{M} \right) \dot{q}^2(x) - \frac{1}{2} k' (q(x + \Delta x) - q(x))^2 \right]$$

non k' erresorte berrien konstante elastikoa den. Konstante berri honen kalkulua erraza da: Erresorte zahar baten luzera q deformazio batetan aldatzeko, $|F| = kq$ indarra behar genuen. Hooke-ren legearen arauera, barra batek jasaten duen deformazio unitarioa (azken batez, erresorteak jasaten duena), berak jasaten duen tentsioaren proportziozkoa da, proportzionalitate-konstantea barraren ezaugarri bat izanik: Young-en modulua, Y , eta hau konstantea da barra homogeneo batekiko, handia nahiz txikia izan. Horregatik, barra osoaren kasuan, zera idatziko genuke:

$$F = kq = ka \left(\frac{q}{a} \right) = Y \left(\frac{q}{a} \right)$$

Haren zatitxo bat hartuz, q/M deformazioa dagokio, eta Hooke-ren indarra zera izango litzateke:

$$F' = k' \left(\frac{q}{M} \right) = \frac{k'a}{M} \left(\frac{q/M}{a/M} \right) = Y \left(\frac{q/M}{a/M} \right)$$

Young-en moduluak berdinak direnez:

$$ka = \frac{k'a}{M} \longrightarrow k' = Mk$$

Beraz, sistema berriaren lagrangearra honela idatz genezake:

$$L = \sum \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{m}{a} \right) \left(\frac{a}{M} \right) \dot{q}^2(x) - Mk \left(\frac{a}{M} \right)^2 \left[\frac{q(x + \Delta x) - q(x)}{a/M} \right]^2 \right\} =$$

$$L = \sum \Delta x \left\{ \frac{1}{2} \mu \dot{q}^2(x) - \frac{1}{2} Y \left[\frac{q(x + \Delta x) - q(x)}{\Delta x} \right]^2 \right\}$$

non $\mu = m/a$ luzera unitateko masa den (masa dentsitatea). Kasu honetan, batukaria finagoa da (M aldiz finagoa).

Hemendik datozkigun Euler-Lagrangeren ekuazioak, erraz froga daitekeenez, hauexek dira:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}(x)} - \frac{\partial L}{\partial q(x)} = 0$$

$$\mu \Delta x \ddot{q}(x) - \frac{Y}{\Delta x} [q(x + \Delta x) - 2q(x) + q(x - \Delta x)] = 0 \quad (1)$$

Orain, prest gaude sistema jarraira pasatzeko: M infiniturantz (edo gauza bera dena, Δx zerorantz) jotzea besterik ez dugu egitekorik. Honela, Δx tarte finitua, dx tarte infinitesimala bihurtzen da, eta batukaria, integrala.

Azkenez, gure sistema jarraiaren lagrangearra honela idatziko genuke:

$$L = \int \left\{ \frac{1}{2} \mu \dot{q}^2 - \frac{1}{2} Y \left(\frac{\partial q}{\partial x} \right)^2 \right\} dx \quad (2)$$

zeren, definizioz, $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{q(x + \Delta x) - q(x)}{\Delta x} = \frac{\partial q}{\partial x}$ baita (normalean, x oreka posizio bakoitzerako, q desplazamendua t denboraren funtzioa da. Horregatik, deribatu partzialak erabiltzen ditugu).

(1) ekuazioa erabiliz, $\Delta x \rightarrow 0$ limitera jotzen dugunean, sistemaren Euler-Lagrangeren ekuazioak lor ditzakegu, bai na limitera pasatu baino lehenago, Δx -ez zatitzea komeni da. Era honetan, zera geratzen zaigu:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[\mu \ddot{q}(x) - Y \frac{q(x + \Delta x) - 2q(x) + q(x - \Delta x)}{(\Delta x)^2} \right] = 0$$

Bigarren gaiaren limitea, $q(x)$ funtzioaren x -ekiko bigarren deribatua besterik ez da. Beraz, ondoko ekuaziora heltzen gara:

$$\boxed{\mu \frac{\partial^2 q}{\partial t^2} - Y \frac{\partial^2 q}{\partial x^2} = 0} \quad \text{"Uhinaren ekuazioa barran zehar"}$$

Aipagarria den azken ohar bat egin genezake: Gure kasuan, x ez da koordenatu generalizatua, i -ren ordeaz erabiltzen den indize jarraia baizik. Gure koordenatu generalizatu bakarra, $q(x, t)$

oreka-posizioarekiko desplazamendua da.

Azkenik, hemendik aurrera sistema eta eremu jarraietan sarri erabiliko dugun funtzio bat definituko dugu: dentsitate lagrangearra hain zuzen, $\mathcal{L}$. Honen bidez, (2) ekuazioa era honetan ere idatz dezakegu:

$$L = \int \mathcal{L} dx$$

non $\mathcal{L} = \frac{1}{2} \mu \dot{q}^2 - \frac{1}{2} Y \left(\frac{\partial q}{\partial x} \right)^2$ dentsitate lagrangearra den.

Ingurune tridimentsionala hartu izan bagenu, honela adieraziko genukeen $\mathcal{L}$ funtzioa:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L} \left(q, \frac{\partial q}{\partial x}, \frac{\partial q}{\partial y}, \frac{\partial q}{\partial z}, \frac{\partial q}{\partial t}, x, y, z, t \right)$$

non x, y, z, t parametro independenteak diren.

Ikusten denez, sistemaren higidura adierazteko, L lagrangearraren ordez, $\mathcal{L}$ dentsitate lagrangearra erabiliko dugu.

2.- SISTEMA ETA EREMU JARRAIEN FORMULAZIO LAGRANGEARRA.

Aurreko adibidean ikusi dugunez (hau da, barra jarrai batetan zehar hedatzen diren uhinen ekuazioak lortzerakoan), $\mathcal{L}$ dentsitate lagrangearra, $\frac{\partial q}{\partial t}$ eta $\frac{\partial q}{\partial x}$ adierazpenen funtzioa dela aurkitu dugu. Gainera, parametro biek, x eta t , jokabide berdina daukate dentsitate lagrangearraren adierazpenean, eta, esan dugunez, x ez da koordinatu generalizatu bezala hartzen, indize edo parametro jarrai bezala baizik.

Hiru dimentsiotako ingurune jarraietan, honela adieraz genezake dentsitate lagrangearra:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L} \left(q, \frac{\partial q}{\partial x}, \frac{\partial q}{\partial y}, \frac{\partial q}{\partial z}, \frac{\partial q}{\partial t}, x, y, z, t \right)$$

lehentxoago ikusi dugun bezala.

Sistema diskretu baten higiduraren ekuazioak lortzeko egiten den bezala, hemen ere Hamilton-en printzipioa aplika dezakegu Euler-Lagrange-ren ekuazioetara hel gaitezen:

$$\delta I = \delta \int_1^2 \iiint \mathcal{L} dx dy dz dt = 0$$

Bariazioaren izaera ia-ia erabilitakoaren berdina da. Kasu hone tan, t denboraren gain, beste hiru parametro ere (x, y eta z) aldatu gabe mantentzen dira ibilbide bariatuetan zehar. Beste era batetara esanik, bariozioak ez du eragiten ez denboraren gain, ez integrazio-bolumenaren gain ere, eta $q(x, y, z, t)$ koordenatu generalizatuaren bariozioak t_1 eta t_2 denboraren muturretan zero izan beharko du.

Azter dezagun kasurik sinpleena, azpiindizeekin nahas ez gaitezen: dimentsio bakarreko barra jarrai eta infinitu batena, hain zuen.

Esan bezala, koordenatu generalizatutzat, puntu batek bere oreka-posizioarekiko duen desplazamendua erabiliko dugu, $q(x, t)$ alegia. Honela, zera idatz dezakegu:

$$\delta I = \delta \int_{t_1}^{t_2} dt \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{L} \left(q, \frac{\partial q}{\partial t}, \frac{\partial q}{\partial x} \right) dx = 0 \quad (3)$$

Kalkulu bariozionala kontutan hartuz, honela gara dezakegu (3) ekuazioa:

$$\begin{aligned} \delta \int dt \int dx \mathcal{L} &= \int dt \int dx \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} \delta q + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\frac{\partial q}{\partial t} \right)} \delta \left(\frac{\partial q}{\partial t} \right) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\frac{\partial q}{\partial x} \right)} \delta \left(\frac{\partial q}{\partial x} \right) \right\} = \\ &= \int dt \int dx \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} \delta q - \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\frac{\partial q}{\partial x} \right)} \right] \delta q - \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\frac{\partial q}{\partial t} \right)} \right] \delta q \right\} = 0 \quad (4) \end{aligned}$$

azken bi gaien zatikako integrazioa eginez gero, ondoren adierazten den bezala:

$$\int_1^2 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\frac{\partial q}{\partial t} \right)} \delta \left(\frac{\partial q}{\partial t} \right) dt = \int_1^2 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\frac{\partial q}{\partial t} \right)} \frac{\partial}{\partial t} (\delta q) dt = - \int_1^2 \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\frac{\partial q}{\partial t} \right)} \right] \delta q dt$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\frac{\partial q}{\partial x} \right)} \delta \left(\frac{\partial q}{\partial x} \right) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\frac{\partial q}{\partial x} \right)} \frac{\partial}{\partial x} (\delta q) dx = - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\frac{\partial q}{\partial x} \right)} \right] \delta q dx$$

* Oharra: Interesgarria dirudi ondoko notazio laburtua erabiltzeak:

$$\frac{\partial q}{\partial x} = \partial_x q \quad \frac{\partial q}{\partial t} = \partial_t q \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} = \partial_q \mathcal{L}$$

(4) ekuaziotik, honela idatz dezakegu Euler-Lagrangeren ekuazioa:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\frac{\partial q}{\partial x} \right)} \right] + \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\frac{\partial q}{\partial t} \right)} \right] - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} = 0 \quad (5)$$

Ikusten denez, ekuazio bakar bat lortzen dugu, infinitu askatasun-graduako sistema izan arren. Sistema diskretuetan, askatasun-gradu bakoitzari ekuazio bat zegokion, baina kasu honetan askatasun-gradu guztiak (infinituak) x parametro jarraiaren bidez adierazirik agertzen dira eta, azken batez, Euler-Lagrangeren ekuazioaren emaitzan, $q = q(x, t)$, askatasun-gradu guztiak sarturik daude.

(5) ekuazioak, askoz ezagunagoa den beste tankera bat har dezake, deribatu funtzionala (edo bariazionala) deritzoguna honela definituz gero:

$$\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta q} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} - \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\frac{\partial q}{\partial x} \right)} \right]$$

Era berean, L -ren deribatu funtzionala $\dot{q}$ -rekiko, honela defini daiteke:

$$\frac{\delta L}{\delta \dot{q}} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\frac{\partial \dot{q}}{\partial x} \right)} \right] = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}}$$

zeren $\mathcal{L}$ dentsitateak ez baitu $\frac{\partial \dot{q}}{\partial x}$ -en dependentziarik.

Deribatu hauek erabiliz, Euler-Lagrangeren ekuazioaren itxura berria hauxe da:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\delta L}{\delta \dot{q}} \right) - \frac{\delta L}{\delta q} = 0$$

Argi dagoenez, honela idatzirik Euler-Lagrangeren ekuazioen betiko itxura gordetzen du erabat, gaiek esangura desberdina eduki arren.

Aplika diezaiogun lorturiko ekuazioa barra jarraia in finituari. Dakigunez:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \left\{ \mu \left(\frac{\partial q}{\partial t} \right)^2 - Y \left(\frac{\partial q}{\partial x} \right)^2 \right\}$$

Beraz:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_x q)} = -Y \left(\frac{\partial q}{\partial x} \right) \qquad \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_x q)} \right] = -Y \frac{\partial^2 q}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_t q)} = \mu \left(\frac{\partial q}{\partial t} \right) \qquad \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_t q)} \right] = \mu \frac{\partial^2 q}{\partial t^2}$$

Gainera, $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} = 0$ denez, zera geratzen zaigu:

$$\mu \frac{\partial^2 q}{\partial t^2} - Y \frac{\partial^2 q}{\partial x^2} = 0$$

edo:

$$\frac{\partial^2 q}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 q}{\partial x^2}$$

non $v = \sqrt{\frac{Y}{\mu}}$, barran zehar hedatzen diren luzetarako uhinen hedapen-abiadura den.

3.- SISTEMA JARRAIEN FORMULAZIO HAMILTONDARRA.

Formulazio lagrangearra aztertzerakoan, $\mathcal{L}$ dentsitate lagrangearra erabili dugu. Hemen ere, funtzio antzeko bat behar ko genuke, ingurune jarraiei dagokien formulazio hamiltondarra azaltzeko. Horretarako, itzul gaitezen berriz lehenengo atalean ikusitako barra jarraiaren eredu diskretua den m masa duten partikulaz osaturiko kate infinitura.

Edozein koordenatu generalizaturi, q_i , dagokion momentu konjokatuak, p_i , sistema diskretuen teoritik dakigunez, honela lor daiteke:

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$$

Gure kasuan: $p_i = m \dot{q}_i$, eta, hemendik: $\dot{q}_i = p_i/m$.

Beraz, sistemaren hamiltondarra honela idatz daiteke:

$$H = \sum_{i=-\infty}^{\infty} p_i \dot{q}_i - L = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \left[\frac{p_i^2}{2m} + \frac{1}{2} k (q_{i+1} - q_i)^2 \right]$$

eta partikula bakoitzaren higidura-ekuazioak:

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} = \frac{p_i}{m}$$

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} = k(q_{i+1} - q_i) - k(q_i - q_{i-1}) = m \ddot{q}_i$$

Hau da: Formulazio lagrangearraren bidez lortu genituenak.

Hurrengo pausoa, masa biren arteko tartea M -z zatitzen dugunean, sistema "jarraiagoa" lortuz eta lagrangear berria kontutan hartuz, honela idatziko genituzke momentu konjokatuak eta hamiltondarra bera:

$$p(x) = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}(x)} = \Delta x \mu \dot{q}(x) \longrightarrow \dot{q}(x) = \frac{p(x)}{\mu \Delta x}$$

$$H = \sum p(x) \dot{q}(x) - L = \sum \Delta x \left[\frac{p^2(x)}{2\mu(\Delta x)^2} + \frac{1}{2} Y \left(\frac{q(x+\Delta x) - q(x)}{\Delta x} \right)^2 \right]$$

Limite jarraira pasatzeko, $\Delta x \rightarrow 0$ besterik ez da egin behar. Eta puntu honetan, momentu konjokatuaren funtzioa betetzen duen beste funtzio bat definituko dugu: luzera-unitateko momentu konjokatua edo momentu-dentsitatea, $\Pi(x)$ hain zuzen. Honen bidez, berriro ditzagun momentu konjokatua eta hamiltondarra:

$$p(x) = \Pi(x) \Delta x = \Delta x \mu \dot{q}(x) \longrightarrow \Pi(x) = \mu \dot{q}(x)$$

$$H = \sum p(x) \dot{q}(x) - L = \sum \Delta x \left\{ \Pi(x) \dot{q}(x) - \left[\frac{1}{2} \mu \dot{q}^2(x) - \frac{1}{2} Y \left(\frac{q(x+\Delta x) - q(x)}{\Delta x} \right)^2 \right] \right\}$$

eta limite jarraiera pasatzean $\Delta x \rightarrow 0$ egin ondoren, zera gertatzen zaigu:

$$H = \int dx \left[\Pi(x) \dot{q}(x) - \mathcal{L} \right] = \int \mathcal{H} dx$$

non $\mathcal{H} = \Pi(x) \dot{q}(x) - \mathcal{L}$ dentsitate hamiltondarra den. Ikusten denez, $\Pi(x)$ beste era honetan ere lor daiteke:

$$\Pi(x) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}(x)}$$

hau da, momentu-dentsitatea, dentsitate lagrangearraren abiadura generalizatuekiko deribatua besterik ez da.

Hiru dimentsiotarako generalizazioa berehalakoa da. Kasu honetan, hamiltondarra honela adieraziko genuke:

$$H = \iiint \mathcal{H} dx dy dz = \iiint \left(\sum_{i=1}^3 \Pi_i \dot{q}_i - \mathcal{L} \right) dx dy dz$$

non $\pi_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}$ den.

Kalkula ditzagun orain Hamiltonen ekuazio kanonikoak, dimentsio bakar bateko kasuan, dentsitate hamiltondarra $q(x, t)$, $\frac{\partial q}{\partial x}$, $\pi(x, t)$ eta t -ren funtzioa dela kontutan harturik.

Horretarako, aplikatu diezaiogun aldaketa infinitesimal bat H hamiltondarrari. Zera lortzen dugu:

$$dH = \int \left\{ \left[\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q} dq + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \pi} d\pi + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \left(\frac{\partial q}{\partial x} \right)} d \left(\frac{\partial q}{\partial x} \right) \right] + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} dt \right\} dx$$

Lagrange-ren ekuazioak lortzeko egin dugun bezala, h_i rugarren gaiaren integraziotik haxe geratzen zaigu:

$$\int \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \left(\frac{\partial q}{\partial x} \right)} d \left(\frac{\partial q}{\partial x} \right) dx = - \int \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \left(\frac{\partial q}{\partial x} \right)} \right] dq dx$$

eta hemendik:

$$dH = \int \left\{ \left[\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q} dq + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \pi} d\pi - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \left(\frac{\partial q}{\partial x} \right)} \right) dq \right] + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} dt \right\} dx$$

Erabil ditzagun orain formulazio lagrangearrean definituriko deribatu funtzionalak. Han egin dugun bezalaxe:

$$\begin{aligned} \frac{\delta H}{\delta q} &= \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q} - \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \left(\frac{\partial q}{\partial x} \right)} \right] \\ \frac{\delta H}{\delta \pi} &= \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \pi} - \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \left(\frac{\partial \pi}{\partial x} \right)} \right] = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \pi} \end{aligned}$$

zeren $\mathcal{H}$ dentsitateak ez baitu $\frac{\partial \pi}{\partial x}$ delakoaren dependentziarik.

Beraz, zera dugu:

$$dH = \int \left\{ \left[\frac{\delta H}{\delta q} dq + \frac{\delta H}{\delta \pi} d\pi \right] + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} dt \right\} dx \quad (6)$$

Halaber, $H = \int dx [\pi \dot{q} - \mathcal{L}]$ denez, honela idatz genezake beraren diferentziala:

$$\begin{aligned} dH &= \int \left\{ \left[\pi d\dot{q} + \dot{q} d\pi - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} dq - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} d\dot{q} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\frac{\partial q}{\partial x}\right)} d\left(\frac{\partial q}{\partial x}\right) \right] - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} dt \right\} dx = \\ &= \int \left\{ \left[\pi d\dot{q} + \dot{q} d\pi - \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta q} dq - \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \dot{q}} d\dot{q} \right] - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} dt \right\} dx \end{aligned}$$

Parentesi barnean dauden lehenengo eta azken gaiak anu latu egiten dira, π momentu dentsitatearen arauera, eta Lagran geren ekuazioa kontutan hartuz, hirugarren gaia zera da:

$$\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta q} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \dot{q}} \right) = \dot{\pi}$$

Beraz,

$$dH = \int \left\{ \left(-\dot{\pi} dq + \dot{q} d\pi \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} dt \right\} dx$$

(6) ekuazioarekin konparatuz:

$$\dot{\pi} = -\frac{\delta H}{\delta q}$$

$$\dot{q} = \frac{\delta H}{\delta \pi}$$

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}$$

Hauexek dira ingurune jarraiei dagozkien "Hamiltonen ekuazioak".

$\mathcal{H}$ dentsitate hamiltondarraren funtzioaz, ekuazio hauen adierazpena beste hau da:

$$\dot{\pi} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q} + \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \left(\frac{\partial q}{\partial x}\right)} \right]$$

$$\dot{q} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \pi}$$

lehengo simetria galduta geratzen delarik.

Ariketa modura, azter dezagun orain arte erabilitako problema: barra elastikoan zehar hedatzen diren bibrazioak.

Kalkula dezagun Π momentu dentsitatea $\mathcal{L}$ dentsitate lagrangearraren bidez:

$$\Pi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} = \mu \dot{q} \longrightarrow \dot{q} = \frac{\Pi}{\mu}$$

Beraz, $\mathcal{H}$ dentsitate hamiltondarra era honetan idatz dezakegu:

$$\mathcal{H} = \Pi \dot{q} - \mathcal{L} = \frac{\Pi^2}{\mu} - \frac{1}{2} \mu \frac{\Pi^2}{\mu^2} + \frac{1}{2} Y \left(\frac{\partial q}{\partial x} \right)^2 = \frac{\Pi^2}{2\mu} + \frac{Y}{2} \left(\frac{\partial q}{\partial x} \right)^2$$

eta higidura-ekuazioak:

$$\dot{q} = \frac{\partial q}{\partial t} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \Pi} = \frac{\Pi}{\mu}$$

$$\dot{\Pi} = \frac{\partial \Pi}{\partial t} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q} + \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \left(\frac{\partial q}{\partial x} \right)} \right] = \frac{\partial}{\partial x} \left[Y \left(\frac{\partial q}{\partial x} \right) \right] = Y \frac{\partial^2 q}{\partial x^2} \quad (Y \text{ konstante} \text{ tzat hartuz}).$$

Baina $\Pi = \mu \dot{q}$ denez:

$$\dot{\Pi} = \mu \frac{\partial^2 q}{\partial t^2} = Y \frac{\partial^2 q}{\partial x^2}$$

Izan behar zuenez, Hamiltonen formulazioak toki berera garamatza.

Buka dezagun Hamiltonen formulazioarekin, q_k , $\frac{\partial q_k}{\partial x_j}$, Π_k , x_i , t-ren G funtzioa den denborarekiko deribatu osoaren adierazpenarekin, non, notazioa laburtzeko asmoarekin, koordena tu espazialak x_i berrizendatu ditugun, $i=1,2,3$ izanik.

Lehen bezala, kontsidera dezagun G funtzioa dentsitate funtzional batetik datorkigula, ondoko eran:

$$G = \iiint \mathcal{G} dx_1 dx_2 dx_3$$

Azkenez, suposa dezagun eremuak (edo sistema jarraiak) Hamiltonen ekuazio kanonikoak betetzen dituela. Honetan finkatuz, G funtzioaren denborarekiko deribatu osoa honela adieraz daiteke:

$$\frac{dG}{dt} = \iiint \left\{ \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial t} + \sum_j \left[\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial q_j} \frac{\partial q_j}{\partial t} + \sum_k \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \left(\frac{\partial q_j}{\partial x_k} \right)} \frac{\partial \left(\frac{\partial q_j}{\partial x_k} \right)}{\partial t} + \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \pi_j} \frac{\partial \pi_j}{\partial t} \right] \right\} dx_1 dx_2 dx_3$$

Idatz dezagun beste era batetan parentesi artean dagoen erdiko gaia:

$$\sum_k \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \left(\frac{\partial q_j}{\partial x_k} \right)} \frac{\partial \left(\frac{\partial q_j}{\partial x_k} \right)}{\partial t} = \sum_k \left\{ \frac{\partial}{\partial x_k} \left[\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \left(\frac{\partial q_j}{\partial x_k} \right)} \frac{\partial q_j}{\partial t} \right] - \frac{\partial}{\partial x_k} \left[\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \left(\frac{\partial q_j}{\partial x_k} \right)} \right] \frac{\partial q_j}{\partial t} \right\}$$

zeren x_k eta t parametro independenteak baitira eta horregatik al da daiteke deribazioaren ordena. Denborarekiko deribatua berrida tziz, zera geratzen zaigu:

$$\begin{aligned} \frac{dG}{dt} = \iiint \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial t} dx^3 + \iiint \sum_j \left\{ \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial q_j} \frac{\partial q_j}{\partial t} + \sum_k \frac{\partial}{\partial x_k} \left[\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \left(\frac{\partial q_j}{\partial x_k} \right)} \frac{\partial q_j}{\partial t} \right] + \right. \\ \left. + \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \pi_j} \frac{\partial \pi_j}{\partial t} - \sum_k \frac{\partial}{\partial x_k} \left[\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \left(\frac{\partial q_j}{\partial x_k} \right)} \right] \frac{\partial q_j}{\partial t} \right\} dx^3 \end{aligned}$$

non $dx^3 = dx_1 dx_2 dx_3$ den.

Ikus dezagun bigarren integralaren bigarren gaia zertan geratzen den:

$$\iiint \sum_k \frac{\partial}{\partial x_k} \left[\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \left(\frac{\partial q_j}{\partial x_k} \right)} \frac{\partial q_j}{\partial t} \right] dx_1 dx_2 dx_3$$

Gai hau hiru gainazal-integraletan banatzen da. Baina erabiltzen ari garen funtzio guztiek integrazio-eskualdearen gainazalean ze rorantz jotzen dutela onartuz gero, eskualde honen bolumena infi

niturantz doanean, aipaturiko hiru gainazal-integralak zerotzat har daitezke. Benetan, desplazamenduarekin loturik doazen funtzioak, perturbazioaren sortze-puntutik infiniturantz urruntzen goazenean ahulduz doazela kontsidera dezakegu, edota infinitura ia-ia ez dela perturbaziorik heltzen esan dezakegu.

Horrelatan, hona hemen gure deribatua zertan geratzen den:

$$\frac{dG}{dt} = \iiint \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial t} dx^3 + \iiint \left\{ \sum_k \left[\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial q_j} - \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \dot{q}_j} \right) \right] \frac{\partial q_j}{\partial t} + \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \pi_j} \frac{\partial \pi_j}{\partial t} \right\} dx^3$$

eta deribatu funtzionalaren definizioa erabiliz, bai eta inguru ne edo eremu jarraiak ekuazio kanonikoak betetzen dituela kontutan harturik, zera idatz daiteke:

$$\frac{dG}{dt} = \iiint \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial t} dx^3 + \iiint \sum_j \left[\frac{\delta G}{\delta q_j} \frac{\delta H}{\delta \pi_j} - \frac{\delta G}{\delta \pi_j} \frac{\delta H}{\delta q_j} \right] dx^3$$

Notazioa laburtuz:

$$\frac{dG}{dt} = \frac{\partial G}{\partial t} + [G, H]_{er}$$

$$\text{non} \quad \frac{\partial G}{\partial t} = \iiint \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial t} dx^3$$

$$[G, H]_{er} = \iiint \sum_j \left[\frac{\delta G}{\delta q_j} \frac{\delta H}{\delta \pi_j} - \frac{\delta G}{\delta \pi_j} \frac{\delta H}{\delta q_j} \right] dx^3 \quad \text{diren.}$$

Beraz, denboraren dependentziarik ez duen edozein funtzio integral batek hamiltondarrarekin daukan Poissonen kortxetea, zero bada, higiduraren konstantea da.

B I B L I O G R A F I A

H. GOLDSTEIN: "Mecánica Clásica" Ed. Aguilar (1966).

E.J. SALETAN -A.H. CROMER: "Theoretical Mechanics" John Wiley
& Sons Inc. (1971)

L.A. PARS: "A. Treatise on Analytical Dynamics". Heineman
London (1965)

P. APPELL: "Traité de Mécanique Rationnelle". Gautier-Villars
Paris (1955).

MEKANIKA KLASIKOTIK ABIATUZ

I. Mazarredo

MEKANIKA KLASIKOTIK ABIATUZ

- 1.- Sarrera
- 2.- Lau dimentsiotako espazioa
- 3.- Lau dimentsiotako espazioari dagokion tratamendu matematikoa
- 4.- Partikula erlatibista askea
- 5.- Eremuen Teoria Klasikoaren formulazio orokorra
- 6.- Eremuen eta partikulen arteko elkarrekintzak
- 7.- Bibliografia

1.- SARRERA

XIX. mendearen amaieran fisikariak ahalguztidun sentitzen ziren. Izan ere, Naturan gerta zitezkeen fenomeno guztiei zegozkien azalpenak emateko gauza zirelakoan zeuden. Higidura planetarioa eta Lurraren inguruan gertatzen ziren fenomeno makroskopikoak azalduta zeuden Newton-en Mekanika zela medio. Gainera, beronekin baliokideak ziren Lagrange eta Hamilton-en formalismoak garatuta zeuden. Orduan, gertaera naturalei azalpena eman ez ezik, oso dotorea zen formalismo berri batez jabetu ziren.

Beste aldetik, Maxwell-en ekuazioak zirela bide, karga elektrikoarekin zerikusirik zeukan gertaera fisiko oro azal zitekeen. Halaber, partikula askoz osoturiko sistemak ikertzen ziren, Termodinamikak gertaera hauei komenigarriak ziren azalpenak ematen zizkielarik.

Aipaturiko hiru atal hauek Fisika Klasikoa osotzen zuten. Batek baino gehiagok galde dezake zer dela eta izen hau. Galdera honi erantzun ahal izateko, denboran txango bat egin beharra daukagu, XX. mendearen hasieran koka gaitezen.

Alde batetik, garai hartan bizkor geratu ziren aparatuak, inoiz behatuak izan ez ziren sistemak agerian gelditu zirela. Hala nola, atomoak, molekulak eta beste. Sistema hauei azalpena emateko, fisikariak garai hartako lanabesa, Fisika Klasikoa alegia, erabiltzen saiatu ziren. Baina alferrikako ekintza suertatu zitzairen, zeren eta saiakuntzaren bidez lorturiko emaitzak eta teoriaren aurreanak bat ez bait zetozen. Zer edo zer aipatzekotan, ekar ditzagun gogora ondoko jazoera fisiko hauek: Gorputz beltzaren erradiazioa, efektu fotoelektrikoa eta Compton efektua.

Beste aldetik, uhin elektromagnetikoen hedapenarekin batera sortu zen eterearen arazoa askatua gelditu zen Einstein-iesker. Ebazpen honek Fisika Klasikoari zekarkion aldaketa urte batzu iragan ondoren, saiakuntzaz frogatuta gelditu zen.

Ondorioz, Fisika zabalik geratu zen, fisikarien aurrean izugarritzko lana zegoelarik. Momentu hartatik hona, begi bistakoa denez, inoiz pentsa ez zitezkeen fenomenoak agertu zaizkie zientzilariei, Fisika Klasikoan kokatzen ez direnak hain zuzen ere. Honela, Fisikaren adar berriak sortu dira, Fisika Klasikoan azalezinak ziren fenomenoak erantzuna emateko. Hala nola, hor dauzkagu Eremuen Teoriak eta Mekanika Kuantikoa.

Halaz ere, honek guztionek ez digu esan nahi Fisika Klasikoa baliagarria ez denik edo garrantzi txikikoa denik. Inola ere ez. Kontura gaitezen, esate baterako, gertaera fisiko askori dagokion azalpena beronen alorrean dagoela. Are gehiago, Mekanika Kuantikoari eta Eremuen Teoriari dagozkien azalpen asko Fisika Klasikoaren bitartez lor daitezke, baldin eta eskatutako doitasuna oso handia ez bada.

Gainera, Fisika Klasiko eta Modernoaren arteko harremanak sakonki aztertzen hasiko bagina, lehendabizikoaren garrantzia handitzen da nabari. Zeren eta, Fisika Klasikoa bestearen oinarria eta limitea dela ikus bait genezake. Honek ondoko hau adierazi nahi digu. Lehenengo eta behin, Fisika Klasikoan gaurturiko formalismoa onuragarria gertatzen dela Fisika Modernoaren fenomenoak aurre egiteko. Bigarrenez, Fisikaren adar berriek Fisika Klasikoa kasu berezitzat eduki behar dutela. Beraz, formulazio berri bat eraikitzean Mekanikak edo, hobeto esanda, Fisika Klasikoak, gidaritzat hartua izan behar du ezinbestez.

Guk, lan honetan, Mekanika Klasikoan gauzaturiko Lagrange-ren formalismoa, Erlatibitate Teorian eta Eremuen Teoria Klasikoan nola agertzen den azaltzera saiatuko gara.

3.- LAU DIMENTSIOTAKO ESPAZIOA

Jazoera fisiko bat agertzen denean, beronen magnitudeak erreferentzi sistema inertzial desberdinetan dauden behatzailerik beha eta neur ditzakete. Agerian dagoenez, beraien neurketak ez dira berdinak izango, nahiz eta jazoera bakarra den. Beraz, sistema desberdinetako behaketak elkarrekin erlazionatzea komeni da, biek jazoera berbera adierazi ahal izateko.

Mekanika Klasikoan edozein behatzaileraren neurketak beste edozeinek eskura ditzake, Galileo-ren transformazioa delabide. Kasurako, demagun erreferentzi sistema inertzial bat beste baten x ardatzaren direkzioan higitzen dela, lehendabizikoaren abiadura erlatiboa $\vec{v}$ delarik. Sistema hauei dagozkien behatzaileek eginiko neurketen arteko erlazioak, ondoko ekuazio ezagunen bidez lortzen dira:

$$\left\{ \begin{array}{lll} x = x' + vt' & y = y' & z = z' \\ v_x = v'_x + v & v_y = v'_y & v_z = v'_z \\ \vec{a} = \vec{a}' & & \\ t = t' & & \end{array} \right. \quad [1]$$

Transformazio hauek Galileo-ren Erlatibitatearen Printzipioaren adierazpen matematikoa dira. Hitzez hitz, zera esaten digu printzipio honek:

Erreferentzi sistema inertzial guztiak baliokideak dira, edota Mekanikaren legeak era berean betetzen dira sistema inertzial guztietan.

Honek ondokoa adierazi nahi digu. Har dezagun sistema batekiko Dinamikaren oinarritzko legearen adierazpen matematikoa $\vec{F} = m\vec{a}$. Beste sistema batetan legearen tankera matematikoa berbera izango da, hots, $\vec{F}' = m\vec{a}'$ non $\vec{F}, \vec{a}'$ bigarren sistema honekiko partikulak jasandako indarra eta azelerazioa bait dira. Beraz, Mekanikaren legeen adierazpen formala ez da aldatzen sistema batetatik beste batetara pasatzen denean, baldin eta erabiltako transformazioa Galileo-rena bada.

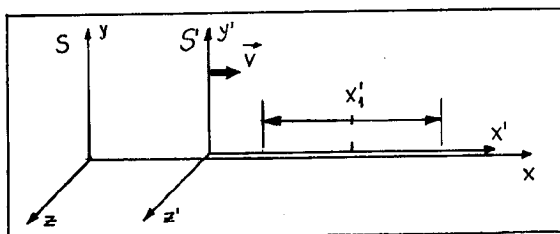
Haatik, Maxwell-en ekuazioei Galileo-ren transformazioa aplikatzen zaienean, bestelako emaitzak erdiesten ditugu, hots, berauen tankera formala ez da aldaezina. Ondorioz, Elektromagnetismoari dagozkion fenomenoek ez dute Galileo-ren transformazioaren arauera aldaezinki jokutzen. Uhin elektromagnetikoen hedapen-abiadura aztertzean ongi ikusten da hau.

Galileo-ren abiaduren konposaketaren legearen bitartez, uhin elektromagnetikoen hedapen-abiadura erreferentzi sistemaren arauetara da. Aitzitik, saiakuntzak, Michelson-en saiakuntzak hain zuzen, bestelako portaera adierazten digu, alegia uhin elektromagnetikoen hedapen-abiadura sistema inertzial guztietan berbera dela. Dakigunez, abiadura hau argiarena da, Naturan lor daitekeen abiadurarik handiena delarik. Ondorioz, elkarrekintzek, espazioan zehar hedatzeko, denbora-tarte bat behar dute.

Mekanika Klasikoari gagozkiolarik, alderantzizko jokatzea aurkitzen dugu. Hemen, partikulen arteko elkarrekintzak berauen koordinatuen funtzio baten bidez azaltzen dira, funtzio potentzialaren bidez alegia. Hau honela izanik, zera hartu behar dugu aintzakotzat: Partikularen batek aldaketa bat jasaten baldin badu, aipaturiko funtzio potentzialaren bidez gainerako partikula guztiak nolabaiteko aldaketa jasatera beharturik daude. Alabaina, funtzio potentziala denboraren menpean ez dagoenez gero, aldaketa, une berean pailaratzen dute gainontzeko partikulek. Hortaz, elkarrekintzaren hedapen-abiadura infinitutzat jo behar da Mekanika Klasikoan, Naturaren aurkako portaera, hain zuzen.

Hedapen-abiadurarik handienaren existentziak Mekanika Klasikoaren denbora eta distantziaren kontzeptuen deuseztapena dakarkigu. Hala nola erreferentzi sistema batetan bi gertaera al diberekoak badira, beste edozeinetan ere al diberekoak izango direla diosku Mekanika Klasikoak. Azter dezagun egoera, hedapen-abiadura finitua dela kontutan harturik.

Demagun, beheko irudiko erreferentzi sistema inertzial biak ditugula:



Bigarren sisteman x'_1 puntuarekiko distantzikideak diren bi puntutan ispilu bana jartzen da. Une batetan, x'_1 puntutik argi-izpi bi igortzen badira, ispiluetara une berean helitzen direla neurtuko da S' sisteman. Hau da, bi jazoera hauek aldiberekoak dira S' sisteman.

Azter dezagun prozesua S sisteman. Argi-izpi bien abiadura c izango da, uhinen hedapen-abiadura ez bait dago erreferentzi sistemaren menpean. Orain, ezker aldean dagoen ispilua argi-izpirantz doa $\vec{V}$ abiaduraz. Aitzitik, eskuinaldekoa argi-izpitik aldendu egiten da, $\vec{V}$ abiaduraz. Ondorioz, S sisteman, ezker aldeko ispilura argia lehenago helduko da, sistema honetan bi jazoerak aldiberekoak ez direlarik.

Honela, Mekanika Klasikoaren zutaberik garrantzitsuenetarikoa deuseztatuta gelditzen zaigu. Honelatan, Eremu Elektromagnetikoa ikertzerakoan, Mekanika Klasikoaren hipotesiak baliagarriak ez direla begi bistakoa da, zeren eta, hemen agertzen diren fenomenoek azalpenen oinarria, Maxwell-en ekuazioetan bilatu behar bait da. Dakigunez, Maxwell-en ekuazioen tankera formala aldaezina uzten duten transformazioak Lorentz-enak dira. Lehenago aipaturiko baldintzetan, transformazioaren ekuazioak hauek ditugu:

$$\begin{cases} x = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \\ y = y' \\ z = z' \\ t = \frac{t' + \frac{v}{c^2} x'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \end{cases} \quad [2]$$

Ikus dezakegunez, denboraren absolututasuna galdu egin da eta formula hauek, c delako horrek infiniturantz jotzen duenean, Galileo-ren ekuazioetan bilakatzen dira. Lehen gertatu zai gun bezalaxe, ekuazio hauek erlatibitate-printzipio bati dagozkionak dira, Einstein-en printzipioarenak hain zuzen ere. Bi legez osotuta daukagu:

- 1.- Gertaera fisikoak behatzeko erreferentzi sistema inertzial guztiak baliokideak dira.
- 2.- Argiaren abiaduraren balioa berbera da sistema guztietan.

Eremu elektromagnetikoa bera, beronen eta partikula kargatuen arteko erlazioak ikertzen dituen Fisikaren adarra, Eremuen Teoria Klasikoa dugu. Ikusitakoaren arauera, fenomeno hauei dagokion espazioa ez da inola ere ez hiru dimentsiotakoa, zerorain denbora aukeraturiko sistemaren menpean bait dago. Komeni da denbora posizio-aldaia bait litzen jotzea eta espazioari beste dimentsio bat eranstea. Beraz, gertaera fisikoak lau dimentsiotako espazio batetan gertatzen dira, sistema desberdinetako behatzaileek eginiko neurketak, goiko ekuazioen bidez erlazionaturik gelditzen direlarik. Espazio honi Minkowski-ren espazioa deritzogu. Aurrerantzean, M espazioa idatziko dugu, MekaniKa Klasikoari dagokion espazio euklidearra E ikurraz idatziz.

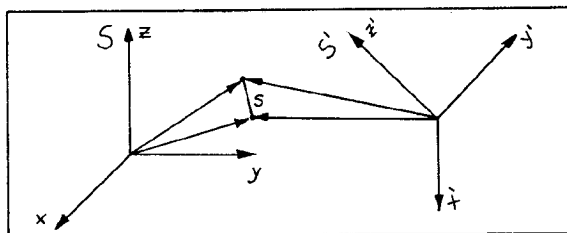
Espazio fisikoa M espazioa izanik, komenigarria litzai-guke MekaniKa Klasikoan agertzen diren zenbait kontzeptu edo magnituderen orokorpene gitea.

3.- LAU DIMENTZIOTAKO ESPAZIOARI DAGOKION TRATAMENDU MATEMATIKOA

Dakigunez, espazio euklidearrean bi punturen arteko distantzia ondoko adierazpen honez kalkulatzen da:

$$s = [(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2]^{1/2} \quad [3]$$

non (x_1, y_1, z_1) , (x_2, y_2, z_2) erreferentzi sistema batetan puntuen koordenatuak bait dira. Beste edozein sistema batetan aurreko puntuen koordenatuak edozeintzu diren arren, beraien arteko distantziak s izaten dirau beheko irudi honek adierazten digun bezalaxe.



Beraz, E espazioan bi punturen arteko distantzia aldaezina da. M espazioan, egoera bestelakoa da. Denbora sistemaren arauetarako denez gero, erreferentzi sistema batetatik beste batera pasa ahal izateko, Lorentz-en transformazioak ezinbestekoak ditugu. Honek lehen agerturiko aldaezintasuna apurtzen du, hau da

$$|\vec{r}_1 - \vec{r}_2| \neq |\vec{r}_1' - \vec{r}_2'|$$

Hala eta guztiz ere, distantziaren aldaezintasunari euts dakioke, baldin eta kontzeptu honi bestelako esangura ematen badiogu. Argi dagoenez, distantziaren definizio berri horrek baldintza bi bete behar ditu nahitaez:

1.- Denbora barne egotea

2.- Lorentz-en transformazioekiko aldaezina izatea.

Aurreko baldintza bi hauek betetzen dituen definizioa hauxe da:

$$s = [c^2(t_2 - t_1)^2 - (x_2 - x_1)^2 - (y_2 - y_1)^2 - (z_2 - z_1)^2]^{1/2} \quad [4]$$

Orain, distantziaren karratua lortzeko, ardatz desberdinei dagozkien koordenatuen kenketen karratuak ez dira zeinu berberaz batuz. Hau dela eta M espazioari sasieuklidearra esaten zaio (s^2 ez da definitu-positiboa).

Espazio honetan puntuak oso hurbil badaude, diferentziaren alaren bidez azalduko dugu distantzia. Honela, $x_2 - x_1 = dx$, $y_2 - y_1 = dy$, $z_2 - z_1 = dz$, $t_2 - t_1 = dt$ eginez, zera daukagu:

$$(ds)^2 = (cdt)^2 - (dx)^2 - (dy)^2 - (dz)^2 \quad [5]$$

Aurreko adierazpenean aldaketa batzu eginez:

$$(ds)^2 = (cdt)^2 \left[1 - \frac{1}{c^2} \left[\left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dz}{dt} \right)^2 \right] \right] \quad [6]$$

eta

$$ds = cdt \sqrt{1 - \frac{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}{c^2}} = cdt \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \quad [7]$$

[7] adierazpenak garrantzi handia du. Izan ere, Mekanika Klasikoaren parametroa t delakoa dugu. Hau da, gehienetan deribatuak eta integralak aldagai honekiko egiten dira. M espazioan t parametroari dagokiona s da hain zuzen. Orduan, oraintxe aipaturiko deribatu eta integralak, s parametroarekiko egingo dira M espazioan.

M espazioa lau dimentsiotakoa denez, puntu bat definitzeko lau koordenatu eman behar dira: ct, x, y, z . Sistema inertzial batetan emandako lau koordenatu horiek osotzen duten multzoari, posizio-tetrabektorea deitzen zaio. Analogia hau idatz dezakegu:

E espazioan

$$\vec{r} \equiv (x, y, z) \quad [8a]$$

M espazioan

$$x^\mu \equiv (ct, x, y, z) \equiv (x^0, x^1, x^2, x^3) \quad \mu = 0, 1, 2, 3 \quad [8b]$$

Posizio-tetrabektoreari dagokion moduluak, honelako definizioa dauka:

$$(ct)^2 - x^2 - y^2 - z^2 = (x^0)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2 \quad [9]$$

Ikusi dugunez, moduluaren balioa ez da aldatzen Lorentz-en transformazioaz. Espazio euclidear arruntean antzeko zerba it daukagu, hots, bektore baten modulua berbera da sistema guztietan.

Honekin posizio-bektorearen arazoa bukatutzat eman dezakegu, hiru dimentsiotako posizio-bektoreari M espazioan dagokiona aurkitu bait diogu. Dakigunez, Fisika Klasikoan posizio-bektorearen ez ezik, beste bektore asko agertzen dira. Adibidez, abiadura, azelerazioa, momentu lineala eta beste. Nola generaliza hauek?

Egin behar hau bete ahal izateko oinarritzat posizio-tetrabektorea hartuko dugu. Hortaz, ondoko definizioa emango dugu:

" A^μ direlako lau kantitateak tetrabektore bat osotzen dute, koordenatuen transformazio baten bidez x^μ posizio-tetrabektorearen koordenatuak bait liren transformatzen direnean"

Kasurako, Lorentz-en transformazioaren menpean ondoko ekuazioak lortu beharra dago:

$$A^0 = \frac{A'^0 + \frac{v}{c} A'^1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad A^1 = \frac{A'^1 + \frac{v}{c} A'^0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad A^2 = A'^2 \quad A^3 = A'^3 \quad [10a]$$

$$ct = \frac{ct' + \frac{v}{c} x'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad x = \frac{x' + \frac{v}{c} ct}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad y = y' \quad z = z' \quad [10b]$$

(Ikus bedi antzekotasuna).

Era berean tetrabektoreari dagokion modulua, haxe da:

$$(A^0)^2 - (A^1)^2 - (A^2)^2 - (A^3)^2 \quad [11]$$

Erosotasunarengatik bi osagai-mota sartzen dira: Kontra barianteak deritzenak, A^μ adierazitakoak, eta kobarianteak, A_μ idatzirikoak. Beraien arteko erlazioak hauexek ditugu:

$$A_0 = A^0 \quad A_1 = -A^1 \quad A_2 = -A^2 \quad A_3 = -A^3 \quad [12]$$

Honen arauera, jar dezagun adibide bat

$$x^\mu = (ct, \vec{r}) \quad x_\mu = (ct, -\vec{r}) \quad [13]$$

Bi osagai-mota hauek erabiliz, tetrabektore baten modu lua azal dezakegu:

$$(A^0)^2 - (A^1)^2 - (A^2)^2 - (A^3)^2 = A^0 A_0 + A^1 A_1 + A^2 A_2 + A^3 A_3 = A^\mu A_\mu \quad [14]$$

kasu honetan errepikatzen den μ indizeari mutua esaten zaio, goian ikus dezakegun batuketa azalduz.

Bi bektoreren arteko biderkadura eskalarrari gagozkiolarik, orokorpena hauxe da:

$$A^\mu B_\mu = A^0 B_0 + A^1 B_1 + A^2 B_2 + A^3 B_3 \quad [15]$$

$A^\mu B_\mu$ gaia, ikus daitekeenez, eskalarra da, baina kontutan hartu behar da, lau dimentsiotako espazio batetako eskalarea, hots, Lorentz-en transformazioaren menpean aldaezin dirauen magnitudea.

Bukatzeko, azter dezagun tetrabektore baten egitura. Ezinbestekoa zaigu posizio-tetrabektorearekin hastea. Dakigunez, berau honela adierazten da:

$$x^\mu = (ct, \vec{r})$$

Ageri-agerian dagoenez, x^μ tetrabektorea, ct delako elementuaz eta hiru dimentsiotako espazioaren bektore arrunt bategi osaturikoa dugu. Hortaz, $x^0 = ct$ osagaiari denborala esaten zaio eta x^1, x^2, x^3 osagaiari espazialak. Analogiari garraizkiolarik, edozein tetrabektorearen A^μ osagaiari denborala deritzogu eta A^1, A^2, A^3 direlakoei, espazialak.

Tetrabektoreen teoria ikusita, generaliza ditzagun abiadura eta azelerazioa. Horretarako lehenengo eta behin Mekanika Klasikoaren definizioak kontutan hartuko ditugu, beti beazla.

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} \equiv \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt} \right) \end{array} \right. \quad [16a]$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{a} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{d\vec{v}}{dt} \equiv \left(\frac{dv_x}{dt}, \frac{dv_y}{dt}, \frac{dv_z}{dt} \right) \end{array} \right. \quad [16b]$$

Ondoren, orain arte lorturiko baliokidetasunak.

$$t \rightarrow s \qquad \vec{r} \rightarrow x^\mu \equiv (x^0, x^1, x^2, x^3) \quad [17]$$

Goikoa kontsideratuz, u^μ abiaduraren definizioa hauexeda:

$$u^\mu = \frac{dx^\mu}{ds} \equiv \left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \frac{v_x}{c\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \frac{v_y}{c\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \frac{v_z}{c\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \right) \equiv \left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \frac{\vec{v}}{c\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \right) \quad [18]$$

Deribatuak egin ahal izateko, nahikoa da [7] eta [8] adierazpenak gogoratzea.

u^μ tetrabektorearen modulua hauexeda, aise froga daitetzkeenez:

$$u^\mu u_\mu = 1 \quad [19]$$

Beraz, tetrabiaduraren osagaiak aurreko adierazpenaren arauetarakoak izan behar dute.

Azelerazioa, era berean definitzen da.

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} \longrightarrow w^\mu = \frac{du^\mu}{ds} \quad [20]$$

Abiadura eta azelerazioaren arteko erlazioa, [19] adierazpena deribatuz lor daiteke:

$$u^\mu u_\mu = 1 \longrightarrow u^\mu \frac{du_\mu}{ds} = 0 \quad [21]$$

Hau da, M espazioan abiadura eta azelerazioa elkarren perpendikularrak dira.

Orain, Mekanika Klasikoan agertzen den beste elementu matematiko bat generalizatu behar dugu, tentsorea hain zuzen. Oso ezaguna da, esate baterako, solido zurruna ikertzerakoan, agertzen zaigun bigarren ordenako inertzia tentsorea.

Oro har, n dimentsiotako espazio batetan, m ordenako tentsorearen osagaien kopurua n^m da, Hau dela eta, inertzia tentsorearen osagaien kopurua $3^2 = 9$ da. Hortaz, lau dimentsiotako espazio baten bigarren ordenako tentsoreak 16 osagai ditu. Tetrabektore baten kasuan gertatzen zen antzera $A^{\mu\nu}$ direlako 16 kantitateek bigarren ordenako tentsore bat osotzen dute, koordenatuen transformazio batez era berezi batetan transformatzen direnean, bi tetrabektoreren osagaien arteko biderkadurak baita li ren transformatzen direnean hain zuzen. Bigarren ordenako tentsoreak adierazteko, ondoko idazkerak erabiliko ditugu:

$A^{\mu\nu}$ Kontrabariantea dena

$A_{\mu\nu}$ Kobariantea dena

$A^\mu{}_\nu, A_\mu{}^\nu$ Mixtoak direnak

Hiru mota hauetako tentsoreen osagaien arteko erlazioak, ondoko bi lege hauen arauetakoak ditugu, aukeratu dugun metrikan:

- 1.- Osagai denboralaren indizea igon edo jaitsi egiten denean osagaiaren zeinua ez da aldatzen.
- 2.- Osagai espazialaren indizea igon edo jaitsi egiten denean, osagaiaren zeinua aldatu egiten da.

Adibideak:

$$\begin{aligned} A_{00} &= A^{00}, \quad A_{01} = -A^{01}, \quad A_{11} = A^{11}, \dots \\ A_0^0 &= A^{00}, \quad A_0^1 = A^{01}, \quad A_1^0 = -A^{01}, \dots \end{aligned} \quad [22]$$

Erraz frogatu daitekeenez, transformazio bat denboraren funtzioa ez balitz, orduan bederatzi osagai espazialek, hots, A^{11} , A^{12} , ... direlakoek, tentsore tridimentsional bat bait liren jokatuko lukete.

Oso garrantzi handiko tentsoreak ondokoak ditugu:

$$\delta_i^k = \begin{cases} 1 & i=k \text{ bada} \\ 0 & i \neq k \text{ bada} \end{cases}$$

eta

$$(g^{ik}) = (g_{ik}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad [23]$$

Zeren eta beraien osagaiak erreferentzi sistema guztietan berberak bait dira.

Ondoren, gradiente eta integrazio arazoaz arduratuko gara, batez ere, Gauss-en teoremaren orokorpena lortzeko. Hona hemen gradientearen orokorpena.

Espazio euklidearrean, $\phi(\vec{r})$ funtzio eskalarra gradiente eragilearen bitartez bektore bilakatzen da. Ordea, $\vec{A}$ bektorea eskalare bihurtzen da.

$$\vec{\nabla} \phi \equiv \left(\frac{\partial \phi}{\partial x}, \frac{\partial \phi}{\partial y}, \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \quad [24]$$

M espazioko gradiente eragileari propietate berberak eskatu behar zaizkio, hots, eskalare bat tetrabektore bihurtzea, eta alderantzizkoa. Hona hemen aipaturiko propietateak betetzen dituen eragilea:

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} \equiv \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, \vec{\nabla} \right) \longrightarrow \frac{\partial \phi}{\partial x^\mu} \equiv \left(\frac{1}{c} \frac{\partial \phi}{\partial t}, \vec{\nabla} \phi \right), \quad \frac{\partial A^\mu}{\partial x^\mu} \quad [25]$$

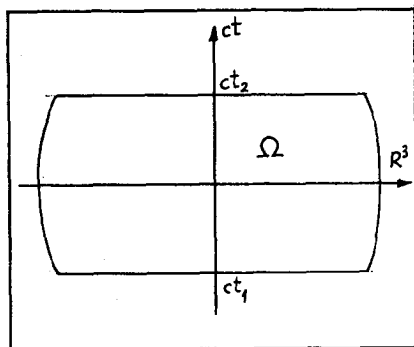
Beti bezala, c delakoak infiniturantz jotzen duenean, hiru dimentsiotako espaziorantz hurbiltzen gara.

Azter dezagun integrazio-arazoa. Dakigunez, hiru dimentsiotako espazioan hiru integrazio-mota ditugu. Hala nola, lerro-integrala, gainazal-integrala eta bolumen-integrala. Azken honen eta gainazal-integralaren arteko erlazioa, Gauss-en teoremak adierazten du.

$$\int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{A} \, dV = \oint_S \vec{A} \cdot d\vec{S} \quad [26]$$

M espazioan, lau-integrazio-mota ditugu: Lerro-integrala, gainazal-integrala, hipergainazal-integrala eta hiperbolumen-integrala. Goiko irudian, M espazioan mugaturiko Ω hiperbolumena ikus daiteke eta beroni dagokion hipergainazala ere. Mia de

zagun $ct = k$ hipergainazala.



Irudian ikus daitezkeenez, beronek R^3 espazioa t aldiunean adierazten digu. E espazioan edozein gainazal $\vec{S}$ bektorearen bidez adierazten da. Era berean, M espazioan hipergainazal bati S^μ tetrabektorea dagokio. Bereziki $ct = k$ hipergainazalaren kasuan S^μ delako tetrabektorea E espazioaren bolumenarekin harremanetan egongo da.

Ondoren emango ditugun baliokidetasunez erraz generaliza dezakegu Gauss-en teorema.

$$\begin{array}{ll}
 \int_V \longrightarrow \int_\Omega & \oint_S \longrightarrow \oint_{H_S} \\
 \vec{\nabla} \cdot \vec{A} \longrightarrow \frac{\partial A^\mu}{\partial x^\mu} & \vec{A} \longrightarrow A^\mu \quad [27] \\
 dV \longrightarrow d\Omega = dx^0 dx^1 dx^2 dx^3 & d\vec{S} \longrightarrow dS^\mu
 \end{array}$$

Hau guztiau kontutan harturik, M espazioan zera daukagu:

$$\int_\Omega \frac{\partial A^\mu}{\partial x^\mu} d\Omega = \oint_{H_S} A^\mu dS_\mu \quad [28]$$

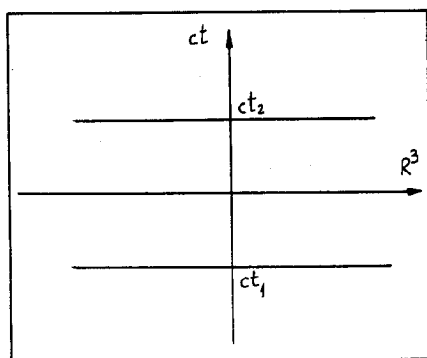
Eremuen Teorian oso interesgarria den Gauss-en teoremaren aplikazio bat egingo dugu.

Demagun, A^μ tetrabektoreak ondoko bi baldintza hauek betetzen dituela:

1.- $\frac{\partial A^\mu}{\partial x^\mu} = 0$

2.- $A^\mu = 0$ baldin $\vec{r}$ delakoa infiniturantz badoa

Suposa dezagun, halaber, $\frac{\partial A^\mu}{\partial x^\mu}$ funtzioaren hiperbolumen-integrala kalkulatu nahi dugula, behean agertzen zaigun hiperbolumena kontutan harturik.



Gauss-en teorema aplikatuz:

$$\int_{\Omega} \frac{\partial A^\mu}{\partial x^\mu} d\Omega = \oint_{H_S} A^\nu dS_\nu \quad [29]$$

Hipergainazal lateralak infinituan daudela suposatzen badugu, zera daukagu:

$$\int_{\Omega} \frac{\partial A^\mu}{\partial x^\mu} d\Omega = \int_{\text{goiko, beheko hipergainazalak}} A^\nu dS_\nu + \int_{\text{hipergainazal lateralak}} A^\nu dS_\nu \quad [30]$$

Irudian ikusten denez, hipergaizal lateralak $\vec{r} \rightarrow \infty$ delako baldintza aplikatuz lortzen dira. Baina 2. baldintzaren araua infinituan $A^\mu = 0$ da. Beraz, bigarren integrala ezabatu egiten da. Honez gain, lehendabiziko baldintza gogora ekarriz:

$$\int_{\text{goiko, beheko hipergainazalak}} A^\nu dS_\nu = \int_{\text{goiko hipergainazala}} A^\nu dS_\nu + \int_{\text{beheko hipergainazala}} A^\nu dS_\nu = 0 \quad [31]$$

Irudiari begiratzuz, dS_ν delakoak osagai ez-nulu baka-rra dauka, dS_0 osagaia hain zuzen ere. Hau honela da, goiko eta beheko hipergainazalen ekuazioak $ct=k$ tankerakoak izatearren. Gainera, goiko eta beheko hipergainazalen osagai denboralen arteko erlazioa, hauxe da: dS_0 delako balioaren esannahia dV da, lehenago ikusi dugun bezalaxe. Baina, tetrabektore gisa aurkako zeinukoak ditugu. Hori kontutan harturik, [31] adierazpena honela gelditzen da:

$$\int_{\substack{\text{goiko} \\ \text{hipergainazala}}} A^\nu dS_\nu = - \int_{\substack{\text{beheko} \\ \text{hipergainazala}}} A^\nu dS_\nu \quad \Rightarrow \quad \int_{t_2} A^\nu dV = \int_{t_1} A^\nu dV \quad [32]$$

Hau da, A^ν tetrabektoreak lehenago aipaturiko baldintzak betetzen baldin baditu, beraren osagai denboralaren bolumen-integralak, R^3 espaziora hedatu denak, konstante dirau den boran zehar.

Aztertuturiko adibidearen emaitza aise generaliza daiteke tetratentsore baten kasurako, beronek lehen aipaturiko baldintzak betetzen baditu, hots, $\frac{\partial A^\mu_\nu}{\partial x^\mu} = 0$ bada, eta $A^\mu_\nu = 0$ baldin $\vec{r}$ delakoak infiniturantz jotzen badu.

Gero ikusiko dugunez, esangura fisikoa daukaten tetrabektoreak eta tetratentsoreak existitzen dira, zeintzuek aipaturiko baldintzak betetzen dituzten. Honek aukera emango digu Eremuen Teoria Klasikoan iraupen-legeak orokortzeko.

4.- PARTIKULA ERLATIBISTA ASKEA.

Orain arte ikusi dugunez, espazio fisikoa berria sartu dugun arren, Fisika Klasikoaren espazio euklidearra izan dugu beti kontutan. Halaber, atal honetan eta ondoren garatuko ditugun ataletan. Fisika Klasikoaren formalismoa, edo zehazkiago esanda Mekanika Klasikoarena, hartuko dugu oinarritzat: Lagrange-rena hain zuzen. Berau dela medio, partikula erlatibista askea, Eremuaren Teoria Klasikoaren formalismo orokorra eta eremu eta partikulen arteko elkarrekintzak aztertuko ditugu. Has gaitezen partikula erlatibista askea aztertuz.

Mekanika Klasikoan gertatzen den bezalaxe, partikula erlatibista askea delako sistemari funtzio lagrangear bat dago-kio, non partikularen higidura-ekuazioak Hamilton-en printzipioaren arauerakoak diren. Kasu honetan, q_i ($i=1,2,3$) koordenatu generalizatu gisa, arruntak diren koordenatu cartesianak aukera-

tzea komeni da. Argi dago $L=T$ egingo bagenu, partikula erlatibista askeari dagozkion higidura-ekuazioak lortuko ez genituzkeela. Kontutan hartu egin behar da, Lagrange-ren formalismoa "a posteriori"-koa dela eta, beraz, sistema honen portaera ezaguna dela. Erizpide batzuren bidez saiatzzen den lagrangearra ondokoa da:

$$L = -m c^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \quad [33]$$

v txikia denean, hurbilketa hau egin daiteke:

$$L = -m c^2 + \frac{m v^2}{2} + \dots \quad [34]$$

hau da, $-mc^2$ delakoa izan ezik, partikula baten energia zinetiko klasikoa. Mekanika Klasikoan emaitza berbera daukagu.

Partikulari dagozkion momentu konjokatua¹, hauexek ditugu:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} &= p_i \\ \frac{\partial L}{\partial v_x} &= p_x = \frac{m v_x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad , \quad \frac{\partial L}{\partial v_y} = p_y = \frac{m v_y}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad , \quad \frac{\partial L}{\partial v_z} = \frac{m v_z}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = p_z \end{aligned} \quad [35]$$

Bektorialki:

$$\vec{p} = \frac{m \vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad [36]$$

Sistemari dagokion hamiltondarra, ondokoa da:

$$H = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - L = p_x v_x + p_y v_y + p_z v_z + m c^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \quad [37]$$

[33], [35] adierazpenak erabiliz:

$$H = \frac{m c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad [38]$$

Beraz, H partikula erlatibista askearen energia da, zeren Einstein-ek energiako proposaturiko ekuazioak lortu bait ditugu.

Ondorioz, Lagrange-ren formalismoa Mekanika Klasikoan gauzaturikoa bada ere, komeni den eraz birformulatuta, aurreko Mekanikarekin apurtzen duen Mekanika Erlatibistaren legeak azaldu ahal izateko gauza da.

Halaz ere, guk erabilitako formalismoa erlatibista da, nolabaiteko neurri batetan, Erlatibitatearen legeak azaltzen dituen neurrian hain zuzen ere. Kontsideratu behar dugu $I = \int_{t_1}^{t_2} L dt$ integralean, denbora eta koordinatu espazialak era desberdinez tratatzen direla, edota E espazioan mamituta dagoela argiago ikus dezagun, ekintza integrala M espaziora generalizatu behar dugu. Hau egiteko, ondoko baliokidetasunak izango ditugu aintzakotzat:

$$\begin{cases} t \rightarrow s/c = \tau \\ q_i \rightarrow x_\mu \\ \dot{q}_i \rightarrow u_\mu \end{cases} \quad I = \int_{t_1}^{t_2} L(q_i, \dot{q}_i, t) dt \rightarrow I = \int_{\tau_1}^{\tau_2} L(x_\mu, u_\mu, \tau) d\tau \quad [39]$$

Ikus bedi orain $t \rightarrow \frac{s}{c} = \tau$ egiteagatik, u^μ tetrabektoreak abiaduraren dimentsioa daukala. Aurreko definizioan adimentsionala zen. Hortaz, u^μ tetrabektoreari dagozkion adierazpenak hauexek dira:

$$u^\mu \equiv \left(\frac{c}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \frac{\vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right) \quad u^\mu u_\mu = c^2 \quad [40]$$

Hamilton-en printzipioa honela gelditzen da:

$$\delta I = \delta \int_{t_1}^{t_2} L(q_i, \dot{q}_i, t) dt = 0 \longrightarrow \delta I = \delta \int_{\tau_1}^{\tau_2} L(x_\mu, u_\mu, \tau) d\tau = 0 \quad [41]$$

Hau da:

" $I = \int_{\tau_1}^{\tau_2} L(x_\mu, u_\mu, \tau) d\tau$ integrala harturik, sistemaren higidura I integrala extremala bihurtzen duen bidearen arauetako izango da".

Printzipio honetatik ondoko higidura-ekuazioak ateratzen dira:

$$\frac{d}{d\tau} \left(\frac{\partial L}{\partial u_\mu} \right) - \frac{\partial L}{\partial x_\mu} = 0 \quad \mu = 0, 1, 2, 3 \quad [42]$$

Izatez, azken atal honetan ez dugu partikula aske bati buruz hitz egin; hortaz, garapen orokorra eta baliagarria da edozein sistematarako. Kasu bakoitzean komenigarria den lagrangearra aukeratu beharko da. Hautapen honetan, bi erizpideri jarrai gatzkieke nagusiki:

- 1.- Sistemaren higidura-ekuazioak ezagunak dira. Beraz, aukeratu riko lagrangearrak beraietara eraman behar gaitu.
- 2.- Lagrangearrak sistemaren aldaezina izan behar du; beraz, Lorentz-en transformazioaren bidez lau dimentsiotako espazio batetako eskalarra izango da, aipaturiko transformazioaren menpean hauek bait dira aldaezinak.

Partikula askeari gagozkiorik, egokia den lagrangearra hauxe da:

$$\vec{v} \rightarrow \dot{q}_i \rightarrow u_\mu \quad L = \frac{1}{2} m v^2 \longrightarrow L = \frac{1}{2} m u^\mu u_\mu \quad [43]$$

Deribatuak eginez:

$\frac{\partial L}{\partial x^\mu} = 0$ eta $\frac{\partial L}{\partial u_\mu} = m u^\mu$ direlarik, higidura-ekuazioak hauek dira:

$$\frac{d}{d\tau} \left(\frac{\partial L}{\partial u_\mu} \right) = 0 \Rightarrow \frac{d}{d\tau} (m u^\mu) = 0 \Rightarrow \frac{d u^\mu}{d\tau} = 0 \quad [44]$$

Ondorioz, partikula erlatibista askearen tetrabiadura konstantea da. Momentu generalizatuak ondokoak dira:

$$p_\mu = \frac{\partial L}{\partial u^\mu} = m u_\mu \quad [45]$$

[40] adierazpena erabiliz:

$$p_0 = \frac{mc}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{E}{c}, \quad p_1 = \frac{m v_x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad p_2 = \frac{m v_y}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad p_3 = \frac{m v_z}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad [46]$$

Hortaz, lehenago aurkituriko emaitzak ditugu, baina esangura apur bat desberdina da. Izan ere, froga daitekeenez, goi an definituriko p_μ delakoa tetrabektorea da. Honek Mekanika Klasikoan agertzen den energia eta momentu linealaren arteko desberdintasuna apurtzen du. IKusi dugunez, Hamilton-en printzipioaren orokorpen tetradimentsionala ere baliagarria suertatzen zaigu sistema erlatibistak ikertzeko. Esanda badago ere, aipagarria da esatea, garatutako formalismoa edozein sistematarako orokorra dela, bereziki partikula aske baten kasua arakatu dugun arren.

Azkenik, hitz egin dezagun laburki kobariantziaren arazoaz. Hiru dimentsiotako espazioan Lagrange-ren formalismoa kobariante izateak higidura-ekuazioen tankera formala koordinatu-transformazio batez ez aldatzea esan nahi du. Era berean, M espazioan Lagrange-ren formalismo erlatibista kobariante izateari antzeko azalpena dagokio, Lorentz-en transformazio baten bidez higidura-ekuazioen tankera formala aldatzen ez dela alegia.

Benetako espazioan baliagarriak diren transformazioak Lorentz-enak direla kontutan hartzen baldin badugu, Lagrange-ren formulazio tetradimentzionala Einstein-en Erlatibitate Teoria-ren arauerakoa dela esan dezakegu.

5.- EREMUEN TEORIA KLASIKOAREN FORMULAZIO OROKORRA.

Lehenengo eta behin, argi dezagun, Eremuen Teoria Klasikoaz hitz egitean zertan ari garen. Eremua espazioaren azpimultzoa da, zeinetako puntu guztietan funtzio bat edo gehiago definiturik dauden. Funtzio bat bakarrik daukagunean, eremua eskalarra da. Aitzitik, funtzio bat baino gehiago daukagunean, koordenatu-transformazio batez bektore baten osagaiak bait liren transformitzen badira, eremua bektoriala da. Antzera definitzen dira eremu tentsorialak.

Gure kasuan, aukeraturiko espazioa Minkowski-rena da, non dakigunez, oso hurbil dauden bi punturen arteko distantzia ondokoa den:

$$(ds)^2 = (dx^0)^2 - (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2 \quad [47]$$

Honelatan, galde daiteke zer dela eta deitzen dugun Teoria Klasikoa, kontsideraturiko espazioa euklidearra ez bait da. Teoria Klasikoa deritzogu kuantikoa ez delako, baina inola ez Fisika Klasikoarekin zerikusirik duelako. Azken hau argiturik, demagun Eremua ondoko funtzio hauen bidez definiturik dagoela.

$$\phi^i(x^\mu) \quad i = 1, \dots, r \quad [48]$$

Kontura gaitezkeenez, $\phi^i(x^\mu)$ deritzenak edozeintzu funtzio izan daitezke. Kasurako, $\phi^0 = \phi$ delakoa potentzial elektrikoa bada, eta $\phi^i = A^i(x^\mu)$ $i=1,2,3$, direlakoak potentzial bektorea-ren osagaiak badira, eremu elektromagnetikoa daukagu.

Ondorioz, aurrerantzean esango dugun guztia edozein eremutarako izango da baliagarria.

Eremua infinitu askatasun-gradu daukan sistematzat har daiteke. Honela, sistema mekaniko baten formulazio lagrangearra aplika dakioke. Beraz, eremuari funtzio lagrangearra dagokio, zein oro har $\phi^i(x^\mu)$ direlako funtzioen, beraien deribatuen, hots $\frac{\partial \phi^i}{\partial x^\mu} = \phi^i_{|\mu}$ direlako, eta t aldagaiaren funtzioa den:

$$L = L(t, \phi^i(\vec{x}, t), \phi^i_{|\mu}(\vec{x}, t)) \quad [49]$$

Berriro, ekintz integrala izango dugu:

$$I = \int_{t_1}^{t_2} L(t, \phi^i(\vec{x}, t), \phi^i_{|\mu}(\vec{x}, t)) dt \quad [50]$$

Ikus dezakegunez, ekintz integrala ez da kobariantea, hots, Lorentz-en transformazioaz ez da aldaezina eta, beraz, ez dago ados Einstein-en erlatibitatearen printzipioarekin. Oztopo hau gainditu ahal izateko, L funtzioa ondoko integralaren bi dez definitzen da.

$$L = \int_{R^3} \mathcal{L}(x^\mu, \phi^i(x^\mu), \phi^i_{|\mu}(x^\mu)) d^3x \quad [51]$$

non $\mathcal{L}$ delakoari dentsitate lagrangearra deritzon. L funtzioaren balioa kontutan harturik, ekintz integrala era honetara bilakatzzen da:

$$I = \int_{t_1}^{t_2} \left[\int_{R^3} \mathcal{L}(x^\mu, \phi^i, \phi^i_{|\mu}) d^3x \right] dt = \int_M \mathcal{L}(x^\mu, \phi^i, \phi^i_{|\mu}) d^4x \quad [52]$$

Orain sistemaren higidura-ekuazioak, eremuaren ekuazioak alegia, Hamilton-en printzipioen bitartez lortzea espero de

zakegu. Hau da, ϕ^i funtzioek I integrala extremal bihurtzen dutenak izan behar dute. Hortaz, Hamilton-en printzipioaren adierazpen matematikoa hauxe da:

$$\delta I = \delta \int \mathcal{L}(x^\mu, \phi^i, \phi^i_{|\mu}) d^4x = 0 \quad [53]$$

Mekanika Klasikoan egiten diren antzeko kalkulu batzueginez, ϕ^i funtzioek zer nolako ekuazioak bete behar dituzten lordezakegu, ondorengo emaitzak lortuz:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^i} - \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^i_{|\mu}} \right) = 0 \quad i = 1, \dots, r \quad [54]$$

(Eremuaren ekuazioak)

Sistema mekaniko bati dagozkion higidura-ekuazioen eta eremuaren ekuazioen arteko antzekotasuna begi bistakoa da, balio kidetasun hauek aintzakotzat harturik:

$$\left\{ \begin{array}{l} t \rightarrow x^\mu \\ q_i \rightarrow \phi^i \\ \dot{q}_i \rightarrow \phi^i_{|\mu} \equiv \frac{\partial \phi^i}{\partial x^\mu} \\ L \rightarrow \mathcal{L} \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = 0 \quad i = 1, \dots, r \quad [55a] \right. \\ \left. \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^i} - \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^i_{|\mu}} \right) = 0 \quad i = 1, \dots, r \quad [55b] \right) \right.$$

Analogiari baldin bagarraizkio, momentu generalizatuak defini ditzakegu:

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \longrightarrow \pi^\mu_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^i_{|\mu}} \quad [56]$$

Hamiltondar klasikoari legokiokeen magnitudea, hauxe litzateke:

$$H = \sum p_i \dot{q}_i - L \longrightarrow P_\nu{}^\mu = \phi_{|\mu}^i \pi_j^\mu - \delta_\nu{}^\mu \mathcal{L} \quad [57]$$

Magnitude hau tetratentsore bat da, energia-momentu tentsorea deritzona.

Agerian dagoenez, kasu klasikoan definituriko $L=T-V$ adierazpena baliorik gabekoa suertatzen da $\mathcal{L}$ funtziorako, zerena T magnitudeak eremu batetan zentzurik ez bait dauka. Oro har, ez dago formularik $\mathcal{L}$ funtzioari dagokion adierazpena erdietsi ahal izateko. Halaz ere, lehenago ikusi dugunez, aukera egoki ba tetara eraman gaitzaketen erizpide bi daude, ondorengoak hain zu zen ere:

- 1.- Eremuaren ekuazioak ezagunak dira
- 2.- $\mathcal{L}$ funtzioak, erlatibitatearen printzipioaren arauarakoa izateko, eskalarra izan behar du, zerena, honelakoa izanik, Lorentz-en transformazioaz aldaezina bait da. Honek mugatu egiten digu posibleak diren $\mathcal{L}$ funtzioen kopurua. Gainera, $\mathcal{L} x^\mu$ aldagaien menpean ez dagoela diosku, orduan ez litza teke aldaezina izango eta.

Lehenago ikusi dugun $P_\nu{}^\mu$ tentsorearen esangura fisikoa oso ilun agertu zaigu, idatzita dagoen erara behintzat. Beroni dagokion azalpena emateko, orain arte egindako garapen osoa erre pikatuko dugu, baina eremu eskalar baten kasuan.

Biz $\phi(x^\mu)$ funtzioa, eremu eskalar bat definitzen duena. Eremuari dagokion ekintz integrala hauxe da:

$$I = \int_{RCM} \mathcal{L}(\phi, \frac{\partial \phi}{\partial x^\mu}) d\Omega \quad [58]$$

Hamilton-en printzipioa erabiliz;

$$\delta I = \delta \int_{R \subset M} \mathcal{L}(\phi, \frac{\partial \phi}{\partial x^\mu}) d\Omega = \int_{R \subset M} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \delta \phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{|\mu}} \delta \phi_{|\mu} \right) d\Omega \quad [59]$$

non $\phi_{|\mu} = \frac{\partial \phi}{\partial x^\mu}$ den.

Kontutan harturik:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{|\mu}} \delta \phi_{|\mu} = \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{|\mu}} \delta \phi \right) - \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{|\mu}} \right) \delta \phi \quad [60]$$

dela, [59] adierazpena ondoko honetara bilakatzen da:

$$\delta I = \int_{R \subset M} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \delta \phi + \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{|\mu}} \delta \phi \right) - \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{|\mu}} \right) \delta \phi \right] d\Omega \quad [61]$$

Azter dezagun aurreko adierazpenaren bigarren integrala. Gauss-en teorema aplikatuz,

$$\int_{R \subset M} \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{|\mu}} \delta \phi \right) d\Omega = \int_{R \text{ hipergainazala}} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{|\mu}} \delta \phi dS_\mu \quad [62]$$

Kasu honetan hipergainazal honen mugak infinituan daude. Bidezkoa da, infinituan $\phi=0$ dela onartzea. Ondorioz, bigarren integrala ezabatu egiten da. Orduan,

$$\delta I = \int_{R \subset M} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \delta \phi - \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{|\mu}} \right) \delta \phi \right] d\Omega = \int_{R \subset M} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{|\mu}} \right) \right] \delta \phi d\Omega = 0 \quad [63]$$

Hortaz, $\delta I = 0$ delarik, $\phi(x^\mu)$ funtzioak betetzen duen ekuazioa hauxe da:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{|\mu}} \right) = 0 \quad \text{Eremuaren ekuazioa} \quad [64]$$

Momentu generalizatuak ondokoak ditugu:

$$\pi^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}_{|\mu}} \quad [65]$$

eta energia-momentu tentsorea:

$$P_\nu{}^\mu = \phi_{|\nu} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}_{|\mu}} - \delta_\nu{}^\mu \mathcal{L} \quad [66]$$

Tentsore honi esangura fisikoa emateko, kalkula dezagun ondoren agertuko zaigun deribatua, $\frac{\partial P_\nu{}^\mu}{\partial x^\mu}$ alegia.

$$\frac{\partial P_\nu{}^\mu}{\partial x^\mu} = \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left(\phi_{|\nu} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}_{|\mu}} - \delta_\nu{}^\mu \mathcal{L} \right) = \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left(\phi_{|\nu} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}_{|\mu}} \right) - \frac{\partial}{\partial x^\mu} (\delta_\nu{}^\mu \mathcal{L}) \quad [67]$$

Azter dezagun hirugarren ataleko deribatua.

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\mu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \frac{\partial \phi}{\partial x^\mu} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}_{|\nu}} \frac{\partial \dot{\phi}_{|\nu}}{\partial x^\mu} \quad [68]$$

[64] adierazpena arauera:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}_{|\mu}} \right) \quad [69]$$

Aurreko emaitza [68] adierazpenera eramanik,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\mu} &= \frac{\partial}{\partial x^\nu} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}_{|\nu}} \right) \frac{\partial \phi}{\partial x^\mu} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}_{|\nu}} \frac{\partial \dot{\phi}_{|\nu}}{\partial x^\mu} = \frac{\partial}{\partial x^\nu} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}_{|\nu}} \right) \frac{\partial \phi}{\partial x^\mu} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}_{|\nu}} \frac{\partial \dot{\phi}_{|\mu}}{\partial x^\nu} = \\ &= \frac{\partial}{\partial x^\nu} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}_{|\nu}} \phi_{|\mu} \right) \end{aligned} \quad [70]$$

Ondorioz, [67] adierazpena honela gelditzen da:

$$\begin{aligned}\frac{\partial P_\nu^\mu}{\partial x^\mu} &= \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left(\phi_{|\nu} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{|\mu}} \right) - \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left(\delta_\nu^\mu \mathcal{L} \right) = \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left(\phi_{|\nu} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{|\mu}} \right) - \delta_\nu^\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\mu} = \\ &= \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left(\phi_{|\nu} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{|\mu}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\nu}\end{aligned}\quad [71]$$

[70] adierazpena aintzakotzat harturik,

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\nu} = \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{|\mu}} \phi_{|\nu} \right) \quad [72]$$

[71] , [73] adierazpenera eramanez,

$$\frac{\partial P_\nu^\mu}{\partial x^\mu} = \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left(\phi_{|\nu} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{|\mu}} \right) - \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{|\mu}} \phi_{|\nu} \right) = 0 \quad [73]$$

Hirugarren atalean zera ikusi genuen: A^μ tetrabektoreak ondoko baldintza hauek betetzen dituenean, hots,

1.- $\frac{\partial A^\mu}{\partial x^\mu} = 0$ denean eta

2.- $A^\mu(x^\nu) = 0 \quad \vec{r} \rightarrow \infty$ jotzen duenean, orduan $\int_{R^3} A^0 dV$ integralak konstante dirau denboran zehar.

Tetratentsore batetarako, emaitza honen orokorpenean hau xe da:

$\int_{R^3} P_0^0 dV, \int_{R^3} P_1^0 dV, \int_{R^3} P_2^0 dV, \int_{R^3} P_3^0 dV$ direlako integralak konstante diraute denborarekin.

Hau xe litzateke, hain zuzen ere, eremu batetarako iraupen lege bat hots, $T_\mu = \int_{R^3} P_\mu^0 dV$ tetrabektoreak denborarekin konstante dirauela.

Guk T_μ tetrabektore magnitude ezagun batekin erla-
zionatu nahi dugu. Honetarako, azter dezagun T_0 osagaia. Horre-
la, [57] adierazpenean oinarriturik, zera daukagu:

$$P_0^0 = \phi_{10} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{10}} - \mathcal{L} \quad [74]$$

$$\phi_{10} = \frac{\partial \phi}{\partial x^0} = \dot{\phi} \quad \text{idazten badugu, ondokoa gelditzen zaigu:}$$

$$P_0^0 = \dot{\phi} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} - \mathcal{L} \quad H = \dot{q} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - L \quad [75]$$

Ondorioz, askatasun-gradu bateko sistema mekaniko ba-
ten hamiltondarra edo energia daukagu. Antzekotasuna begi bis-
takoa da. Beraz, $\int_{R^3} P_0^0 dV$ delako osagaiari dagokion magni-
tudea, eremuaren energia osoa da. Formulazio kobariante batetan
energiak eta momentuak tetrabektore bat osotzen dutela kontutan
harturik, $\int_{R^3} P_i^0 dV$ ($i=1,2,3$) bektorea eremuaren momentu linea-
la da.

Hemen lorturiko emaitzak aise generaliza daitezke fun-
tzio batzuren bidez definituriko eremu baten kasuan. Honela,
 $P_\nu^\mu = \phi_{,\nu}^\lambda \pi_\lambda^\mu - \delta_\nu^\mu \mathcal{L}$ tetratentsorearen osagai denboralak, P_ν^0 osa-
gaiak alegia, energia eta momentu linealaren dentsitate gisa in-
terpretatu behar dira, non berain integralek, R^3 espaziora heda-
tuak, eremuaren energia eta momentu lineal osoa adierazten diz-
kiguten.

Beraz, Lagrangeren formalismoaren bidez Mekanika Kla-
sikoan agertzen diren magnitude guztiak generaliza daitezke, bi-
denabar, iraupen-legeen egitura finkatuz.

6.- EREMUIEN ETA PARTIKULEN ARTEKO ELKARREKINTZAK

Orain arte, Lagrangeren formalismoa partikula erlatibista askea eta eremuaren portaera fisikoa azaldu ahal izateko gai dela ikusi dugu. Halaz ere, Naturan, partikulak eta eremuak elkarrekintzak direla medio erlazionatzen dira. Kasurako, partikula kargatu baten eta eremu elektromagnetiko baten arteko interakzioak kontsidera genitzake.

Nola azal lezake egoera hau Lagrange-ren formalismoak? Hona hemen, edonori burura lekiokoen galdera. Funts-funtsean, ikusitakoa baliagarria gertatzen zaigula esan dezakegu. Hots, $\mathcal{L}(x^\mu, \phi^i, \phi^i_{|\mu})$ dentsitate lagrangearra existitzen dela, zeinak sistema osoa, eremuak eta partikulek osaturikoa alegia, determinatzen duen. Era berean, $I = \int_{R \in M} \mathcal{L} d\Omega$ integrala daukagu, sistemaren ekuazioak Hamilton-en printzipioaren bidez lor ditzakegularik.

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^i} - \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^i_{|\mu}} \right) = 0 \quad i = 1, \dots, r \quad [76]$$

Sistemaren energia eta momentu linealaren dentsitateak ondokoak ditugu:

$$P_\nu{}^\mu = \phi_{|\nu}^\lambda \pi_\lambda{}^\mu - \delta_\nu{}^\mu \mathcal{L} \quad [77]$$

Formulismoa berbera izanik, nola bereiziko dugu geure eskuetan daukagun egoera fisikoa?. Hots, nola edo zeren bidez aztertuko dugu egoera, elkarrekintzak ere ditugularik?

Hau bideratzeko, ezagunak diren elkarrekintzek betetzen duten printzipioa ekarri behar dugu gogora, gainezarmenaren printzipioa hain zuzen ere. Honen arauera geure sistema beste hiru sistemen gainezarpina izango balitz bezala har dezakegu: Partikula askez, eremuaz eta partikulen eta eremuaren arteko elka-

rrekintzez osotutakoa. Sistema bakoitzari dentsitate lagrangea-
 bat dagokio eta sistema osoaren dentsitate lagrangearra, bera-
 ien arteko batura izango da. Hortaz, [76] eta [77] adierazpe-
 netan agerturiko dentsitatea hauxe da:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\text{partikula askeak}} + \mathcal{L}_{\text{eremua}} + \mathcal{L}_{\text{elkarrekintzak}} \quad [78]$$

$\mathcal{L}_{\text{elkarrekintzak}}$ bilatu ahal izateko erizpideak, aurreko bietan
 erabiliriko berberak ditugu.

7.- BIBLIOGRAFIA

- SOKOLNIKOFF, I.S. "Análisis Tensorial" Index, 1979
- LEVICH. "Física Teórica" Volumen I. Reverté, 1974
- LANDAU Y LIFSHITZ, "Teoría Clásica de los Campos"
Reverté
- LEITE LOPES, I. "Introducción a la electrodinámica
cuántica" Trillas, 1977
- ARNOLD, V.I. "Mecánica Clásica (métodos matemáticos)"
Paraninfo, 1983
- GOLDSTEIN, "Mecánica Clásica" Aguilar, 1972

