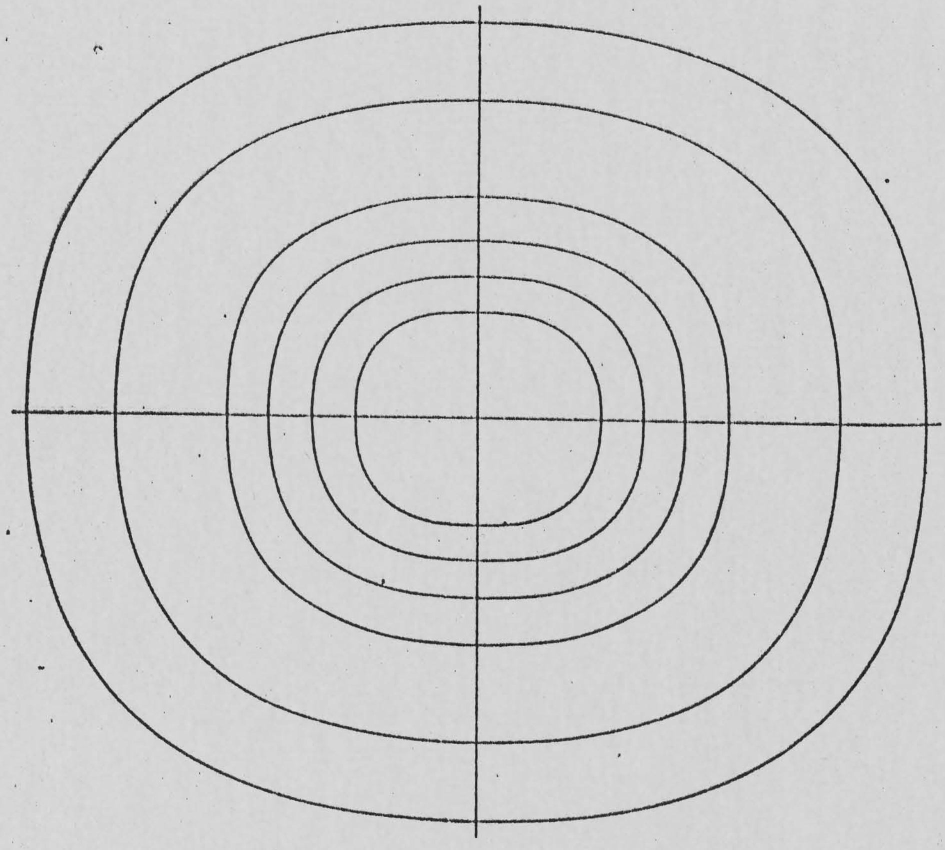
ANALISIA II

(Teoria-apunteak)



Patxi Angulo Martin

udako
euskal
unibertsitatea

AURKIBIDEA

INTEGRAZIOA

EKUAZIO DIFERENTZIALAK

9. gaia: Ekuazio diferentzialak

1. GAIA
INTEGRAL MUGAGABEA

1.1 INTEGRAL MUGAGABEA

1.1 Definizioa

Izan bedi $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ funtzio bat. $[a,b]$ tartean $F'(x) = f(x)$ baldintza betetzen duen edozein $F(x)$ funtziori $f(x)$-en jatorrizko funtzio esango diogu.

1.2 Proposizioa

Baldin $F_1(x)$ eta $F_2(x)$ $f(x)$ funtzioaren bi jatorrizko funtzio badira $[a,b]$ tartean, $F_1(x) - F_2(x) = K$ (konstantea) betetzen da.

Frogapena:
Hipotesiz $F'_1(x) = f(x)$ eta $F'_2(x) = f(x)$ dugu.
Har dezagun $G(x) = F_1(x) - F_2(x)$ funtzioa, bere deribatua $G'(x) = F'_1(x) - F'_2(x) =$
$= f(x) - f(x) = 0$ dugu, hau da $G(x) = K$ da $[a,b]$ tartean.

1.3 Ondorioa

Ondorio bezala zera esan dezakegu: $f(x)$ funtzioaren jatorrizko funtzio guztiak $F(x) + k$ erakoak dira, $F(x)$ jatorrizko funtzioa izanik.

1.4 Definizioa

$(F(x) + k)$ adierazpenari $f(x)$ funtzioaren integral mugagabe deituko diogu eta $\int f(x)\,dx = F(x) + k$ idatziko.

1.5 Ondorioa

- $(\int f(x)\,dx)' = (F(x) + k)' = F'(x) = f(x)$ Gauza bera da baina

  $d(\int f(x)\,dx) = d\,(F(x) + k) = f(x)\,dx$ idazkera desberdinez

- $\int d\,(F(x)) = \int F'(x)\,dx = \int f(x)\,dx = F(x) + k$

Lerro hauetan ikusten denez d eta $\int$, hots diferentzial eta integral. eragileak elkarren alderantzizkoak direla esan dezakegu.

1.6 Propietateak

a) Integral eragiiea lineala da:

$$\int (f_1(x) + f_2(x))\,dx = \int f_1(x)\,dx + \int f_2(x)\,dx$$
$$\int k\,f(x)\,dx = k \int f(x)\,dx$$

b) $\int f(ax)\,dx = 1/a\,F(ax) + k$

ANALISIA II

c) $\int f(x+b)\,dx = F(x+b) + k$

d) $\int f(ax+b)\,dx = 1/a\,F(ax+b) + k$

Funtzio Elementalen Integralen Taula. Berehalako integralak

1. $$\int 0\,dx = k$$

2. $$\int a\,dx = ax + k$$

3. $$\int x^{\alpha}\,dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + k \qquad \alpha \neq -1$$

$$\int g(x)^{\alpha}\,g'(x)\,dx = \frac{g(x)^{\alpha+1}}{\alpha+1} + k \qquad \alpha \neq -1$$

4. $$\int \frac{1}{x}\,dx = \mathrm{Ln}\,|x| + k$$

$$\int \frac{g'(x)}{g(x)}\,dx = \mathrm{Ln}\,|g(x)| + k$$

5. $$\int a^{x}\,dx = \frac{a^{x}}{\mathrm{Ln}\,a} + k$$

$$\int a^{g(x)}\,g'(x)\,dx = \frac{a^{g(x)}}{\mathrm{Ln}\,a} + k$$

6. $$\int e^{x}\,dx = e^{x} + k$$

$$\int e^{g(x)}\,g'(x)\,dx = e^{g(x)} + k$$

7. $$\int \frac{g'(x)}{\sqrt{g(x)}}\,dx = 2\sqrt{g(x)} + k$$

8. $$\int \sin x\,dx = -\cos x + k$$

$$\int g'(x)\sin g(x)\,dx = -\cos g(x) + k$$

9. $$\int \cos x\,dx = \sin x + k$$

$$\int g'(x) \cos g(x)\, dx = \sin g(x) + k$$

10. $$\int \operatorname{tg} x\, dx = - \operatorname{Ln} | \cos x | + k$$

$$\int g'(x) \operatorname{tg} g(x)\, dx = - \operatorname{Ln} | \cos g(x) | + k$$

11. $$\int \operatorname{ctg} x\, dx = \operatorname{Ln} | \sin x | + k$$

$$\int g'(x) \operatorname{ctg} g(x)\, dx = \operatorname{Ln} | \sin g(x) | + k$$

12. $$\int \operatorname{cosec}^2 x\, dx = - \operatorname{ctg} x + k$$

$$\int g'(x) \operatorname{cosec}^2 g(x)\, dx = - \operatorname{ctg} g(x) + k$$

13. $$\int \sec^2 x\, dx = \operatorname{tg} x + k$$

$$\int g'(x) \sec^2 g(x)\, dx = \operatorname{tg} g(x) + k$$

14. $$\int \frac{1}{a^2 + x^2}\, dx = \frac{1}{a} \operatorname{arc\,tg} \frac{x}{a} + k \qquad a \neq 0$$

$$\int \frac{g'(x)}{a^2 + g^2(x)}\, dx = \frac{1}{a} \operatorname{arc\,tg} \frac{g(x)}{a} + k \qquad a \neq 0$$

15. $$\int \frac{-1}{a^2 + x^2}\, dx = \frac{1}{a} \operatorname{arc\,ctg} \frac{x}{a} + k \qquad a \neq 0$$

$$\int \frac{- g'(x)}{a^2 + g^2(x)}\, dx = \frac{1}{a} \operatorname{arc\,ctg} \frac{g(x)}{a} + k \qquad a \neq 0$$

16. $$\int \frac{1}{x^2 - a^2}\, dx = \frac{1}{2a} \operatorname{Ln} \left| \frac{x - a}{x + a} \right| + k \qquad a \neq 0$$

17. $$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}\, dx = \operatorname{Ln} \left| x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right| + k \qquad a \neq 0$$

18. $$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}\, dx = \operatorname{arc\,sin} \frac{x}{a} + k \qquad a \neq 0$$

19. $\int \frac{-1}{\sqrt{a^2 - x^2}}\, dx = \arc\cos\frac{x}{a} + k \qquad a \neq 0$

20. $\int \mathrm{Sh}\, x\, dx = \mathrm{Ch}\, x + k$

21. $\int \mathrm{Ch}\, x\, dx = \mathrm{Sh}\, x + k$

OHARRA

Funtzio guztiek ez dute jatorrizko funtziorik, baina definizio-eremuan jarraiak diren funtzioek badute integral mugagabea.

Baina integral mugagabe guztiek ez dute, existitu arren, oinarrizko funtzioen konbinazio finitu bezala adierazterik.

1.7 Adibidea

- $\int x^m (a + b\, x^n)^{\alpha}\, dx$ integral binomikoak ez du oinarrizko funtzioen bidezko adierazpenik ondoko baldintzetan:

$a.b \neq 0 \qquad p\,,\ \frac{m+1}{n}\,,\ \frac{m+1}{n} + p$ zenbakiak osoak ez badira

$p = \frac{1}{2}\,,\ n = 3 \quad m = 1$

- $\int e^{-x^2}\, dx$ Laplace- edo Gauss-en funtzioa

- $\int \frac{\sin x}{x^n}\, dx, \quad \int \frac{\cos x}{x^n}\, dx, \quad \int \frac{e^x}{x^n}\, dx \qquad n \in \mathbb{N}$

- $\int \sqrt{1 - k^2 \sin^2 x}\; dx \qquad k < 1$ integral eliptikoa

1.2 INTEGRAZIO-METODOAK

Berehalako integrala ez denean "amarru" batzu egiten dira integrakizun ezaguna ager dadin.

1.2-1 Ordezkapen-metodoa edo aldagai-aldaketa

$\int f(x)\,dx$ integrala kalkulatzeko $x = \varphi(t)$, $dx = \varphi'(t)\,dt$ ordezkapena egingö dugu $\int f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt$ integrala lortuz.

Azken integrakizuna, $f(\varphi(t))\,\varphi'(t)$ alegia, lehenengoa $f(x)$ baino ezagunagoa izango da.

2-1.8 Adibidea

- $\displaystyle\int \sqrt{1 - x^2}\,dx$ integrala dugu

$x = \sin t \quad dx = \cos t\,dt$ ordezkapena egingo dugu

$f(x) = f(\sin t) = \sqrt{1 - \sin^2 t} = \cos t$ beraz $\displaystyle\int \cos t\,\cos t\,dt = \int \cos^2 t\,dt$

integrala lortzen dugu. $\cos^2 t = \dfrac{1 + \cos 2t}{2}$ dela kontutan hartuz

$$\int \cos^2 t\,dt = \int \frac{1 + \cos 2t}{2}\,dt = \frac{1}{2}\int dt + \frac{1}{2}\int \cos 2t\,dt = \frac{1}{2}t + \frac{\sin 2t}{4} + k$$

eta $t = \arc\sin x$ denez $\displaystyle\int \sqrt{1 - x^2}\,dx = \frac{1}{2}\arcsin x + \frac{\sin(2 \arcsin x)}{4} + k$

- $\displaystyle\int \frac{x}{1 + x^2}\,dx$ oraingoan $x^2 = t \quad 2x\,dx = dt$ aldaketa egingo dugu

$$\int \frac{1}{2}\frac{dt}{1+t} = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{1+t} = \frac{1}{2}\,\mathrm{Ln}\,|1 + t| + k$$ $\Rightarrow$ aldaketa deseginez

$$\int \frac{x}{1 + x^2}\,dx = \frac{1}{2}\,\mathrm{Ln}\,|1 + x^2| + k$$

1.2-2 Zatikako integrazioa

Izan bitez u eta v bi funtzio deribagarriak, zera betetzen da: $d(u\,v) = du\,v + u\,dv$ eta integratuz $u\,v = \int v\,du + \int u\,dv$ eta hemendik $\int u\,dv = u\,v - \int v\,du$

$\int u\,dv$ integrala kalkulatu nahi badugu metodo honen bidez $\int v\,du$ integrala kalkulatu beharko dugu, metodo hau azken integrala lehenengoa baino errezagoa denean erabiliko da.

2-2.9 Adibidea

- $\int \sin^2 x\,dx$ $\quad u = \sin x \quad$ aukeratuz gero $\quad du = \cos x\,dx$
$\quad dv = \sin x\,dx \quad v = -\cos x$

lortzen da, lau berdintza hauek ordezkatzen baditugu formulan

$$\int \sin^2 x\,dx = -\sin x \cos x - \int (-\cos x) \cos x\,dx = -\sin x \cos x + \int \cos^2 x\,dx =$$

$$= -\sin x \cos x + \int (1 - \sin^2 x)\,dx = -\sin x \cos x + \int dx - \int \sin^2 x\,dx \Rightarrow$$

$$2\int \sin^2 x\,dx = -\sin x \cos x + x \Rightarrow \int \sin^2 x\,dx = \frac{-\sin x \cos x + x}{2} + k$$

- $\int \operatorname{Ln} x\,dx$ $\quad u = \operatorname{Ln} x \quad du = 1/x\,dx \quad$ berdintza hauek erabiliz
$\quad dv = dx \quad v = x$

$$\int \operatorname{Ln} x\,dx = x \operatorname{Ln} x - \int x \frac{1}{x}\,dx = x \operatorname{Ln} x - \int 1\,dx = x \operatorname{Ln} x - x + k$$

1.2-3 Funtzio razionalen integrazioa

Funtzio razionalak $\frac{P(x)}{Q(x)}$ erakoak dira, non $P(x)$ eta $Q(x)$ polinomioak bait dira.

Integrala kalkulatzeko $\frac{P(x)}{Q(x)} = Z(x) + \frac{H(x)}{Q(x)}$ deskonposaketa egingo da, non $H(x)$-en maila $Q(x)$-ena baino txikiagoa den.

$Z(x)$ polinomio osoa da, bere integrala zuzenki kalkula daitekeelarik.
$\frac{H(x)}{Q(x)}$ laburtezina da, baina frakzio sinpleen baturan deskonposa daiteke ondoko era hauetan:

- $Q(x)$ polinomioak erro errealak bakarrik ditu
erroak bakunak direnean $Q(x) = (x - a_1)(x - a_2) \ldots\ldots (x - a_k)$

$$\frac{H(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{x - a_1} + \dots\dots + \frac{A_k}{x - a_k}$$

erroak anizkoitzak direnean $Q(x) = (x - a_1)^{\alpha_1} (x - a_2)^{\alpha_2} \dots (x - a_n)^{\alpha_n}$

$\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = k$ izanik

$$\frac{H(x)}{Q(x)} = \left(\frac{A_1}{x - a_1} + \dots + \frac{A_{\alpha_1}}{(x - a_1)^{\alpha_1}} \right) + \dots + \left(\frac{B_1}{x - a_n} + \dots + \frac{B_{\alpha_1}}{(x - a_n)^{\alpha_n}} \right)$$

- $Q(x)$ polinomioak erro erreal eta konplexuak baditu
erroak bakunak direnean $Q(x) = (x - a_1) \dots (x - a_n) [(x - p_1)^2 + q_1^2] \dots [(x - p_h)^2 + q_h^2]$

$$\frac{H(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{x - a_1} + \dots + \frac{A_n}{x - a_n} + \frac{M_1 x + N_1}{(x - p_1)^2 + q_1^2} + \dots + \frac{M_h x + N_h}{(x - p_h)^2 + q_h^2}$$

erroak anizkoitzak direncko kasua ez dugu ikusiko.

Hiru deskonposaketa hauetan hiru frakzio-mota agertzen dira:

- $\dfrac{A_i}{x - a_i}$ $\qquad \displaystyle\int \frac{A_i}{x - a_i}\, dx = A_i \,\mathrm{Ln}\, | x - a_i | + k$

- $\dfrac{A_i}{(x - a_i)^{\alpha_i}}$ $\qquad \displaystyle\int \frac{A_i}{x - a_i}\, dx = A_i \frac{(x - a_i)^{-\alpha_i + 1}}{-\alpha_i + 1} + k = \frac{A}{(1 - \alpha_i)(x - a_i)^{\alpha_i - 1}} + k$

- $\dfrac{M_i x + N_i}{(x - p_i)^2 + q_i^2}$ $\qquad \displaystyle\int \frac{M_i x + N_i}{(x - p_i)^2 + q_i^2}\, dx = \begin{bmatrix} x - p_i = t \\ dx = dt \end{bmatrix} = \int \frac{M_i(t + p_i) + N_i}{t^2 + q_i^2}\, dt = \int \frac{M_i t}{t^2 + q_i^2}\, dt +$

$$+ \int \frac{M_i p_i + N_i}{t^2 + q_i^2}\, dt = \frac{M_i}{2} \,\mathrm{Ln}\, | t^2 + q_i^2 | + \left(\frac{M_i p_i + N_i}{q_i} \right) \mathrm{arc\ tag}\, \frac{t}{q_i} + k =$$

$$= \frac{M_i}{2} \,\mathrm{Ln}\, | (x - p_i)^2 + q_i^2 | + \left(\frac{M_i p_i + N_i}{q_i} \right) \mathrm{arc\ tag} \left(\frac{x - p_i}{q_i} \right) + k$$

2-3.10 Adibidea

- $\displaystyle\int \frac{x^2+1}{x^3-ax-x^2}\,dx$

$$x^3-2x-x^2 = x\,(x^2-x-2) - x\,(x-2)\,(x+1) \Rightarrow \frac{x^2+1}{x(x-2)\,(x+1)} = \frac{A}{x}+\frac{B}{x-2}+\frac{C}{x+1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A=\frac{1}{2},\ B=\frac{5}{6},\ C=\frac{2}{3} \Rightarrow \int \frac{x^2+1}{x\,(x-2)\,(x+1)}\,dx = \int \frac{-1/2}{x}\,dx + \int \frac{5/6}{x-2}\,dx +$$

$$+\int \frac{2/3}{x+1}\,dx = -\frac{1}{2}\,\mathrm{Ln}\,|\,x\,| + \frac{5}{6}\,\mathrm{Ln}\,|\,x-2\,| + \frac{2}{3}\,\mathrm{Ln}\,|\,x+1\,| + k$$

- $\displaystyle\int \frac{x-1}{(x-2)^2\,(x+1)^2}\,dx$

$$\frac{x-1}{(x-2)^2\,(x+1)^2} = \frac{A}{x-2}+\frac{B}{(x-2)^2}+\frac{C}{x+1}+\frac{D}{(x+1)^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A=\frac{1}{27},\ B=\frac{1}{9},\ C=\frac{-1}{27},\ D=\frac{-2}{9}$$

$$\int \frac{x-1}{(x-2)^2\,(x+1)^2}\,dx = \int \frac{1/27}{x-2}\,dx + \int \frac{1/9}{(x-2)^2}\,dx - \int \frac{1/27}{x+1}\,dx - \int \frac{2/9}{(x+1)^2}\,dx =$$

$$= \frac{1}{27}\,\mathrm{Ln}\,|\,x-2\,| - \frac{1}{9(x-2)} - \frac{1}{27}\,\mathrm{Ln}\,|\,x+1\,| + \frac{2}{9(x+1)} + k =$$

$$= \frac{1}{27}\,\mathrm{Ln}\left|\frac{x-2}{x+1}\right| + \frac{x-5}{9(x-2)(x+1)} + k$$

- $\displaystyle\int \frac{x^2+1}{(x+1)(x^2-2x+5)}\,dx$

$$\frac{x^2+1}{(x+1)(x^2-2x+5)} = \frac{x^2+1}{(x+1)\,[(x-1)^2+2^2]} = \frac{A}{x+1}+\frac{Mx+N}{(x-1)^2+2^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A=\frac{1}{4},\ M=\frac{3}{4},\ N=\frac{-1}{4}$$

$$\int \frac{x^2+1}{(x+1)(x^2-2x+5)}\,dx = \int \frac{1/4}{x+1}\,dx + \int \frac{\frac{3}{4}x - \frac{1}{4}}{(x-1)^2+2^2}\,dx =$$

$$= \frac{1}{4}\,\mathrm{Ln}\,|x+1| + \frac{1}{8}\,\mathrm{arc\,tg}\left(\frac{x-1}{2}\right) + \frac{3}{8}\,\mathrm{Ln}\,|(x-1)^2+4| + k$$

1.2-4 Funtzio binomikoen integrazioa

$I = \int x^m (a+bx^n)^p\,dx$ erakoak dira $a,b \in \mathbb{R}$ eta $m,n,p \in \mathbb{Q}$ izanik.

a) $p \in \mathbb{Z}$ $\quad x = t^{1/n}$ edo $x^n = t$ aldaketa egin behar da.

b) $p \in \mathbb{Q} - \mathbb{Z}$, $p = q/s$ laburtezina eta $s > 0$, $\frac{m+1}{n} \in \mathbb{Z}$ $\quad a + bx^n = t^s$

c) p, $\frac{m+1}{n} \notin \mathbb{Z}$, $\frac{m+1}{n} + p \in \mathbb{Z}$ $\quad ax^{-n} + b = t^s$ aldaketa egingo da.

2-4.11 Adibidea

$$- I = \int \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}\,(1+\sqrt[3]{x^2})}$$

$$I = \int x^{-2/3}(1+x^{2/3})^{-1}\,dx \qquad m = \frac{-2}{3},\quad n = \frac{2}{3},\quad p = -1,\ p = -1 \in \mathbb{Z}$$

$x = t^{1/n} = t^{3/2}$ aldaketa egin behar da

$$dx = \frac{3}{2}t^{1/2}\,dt \qquad I = \int t^{-1}(1+t)^{-1}\frac{3}{2}t^{1/2}\,dt = \frac{3}{2}\int t^{-1/2}(t+t)^{-1}\,dt =$$

$$= \frac{3}{2}\int \frac{1}{t^{1/2}(1+t)}\,dt = \left[t^{1/2} = u \quad \frac{1}{2}t^{-1/2}\,dt = du\right] = \frac{3}{2}\int \frac{1}{u(1+u^2)}\,2u\,du =$$

$$= 3\int \frac{du}{1+u^2} = 3\,\mathrm{arc\,tg}\,u + k = 3\,\mathrm{arc\,tg}\,t^{1/2} + k = 3\,\mathrm{arc\,tg}\,x^{1/3} + k$$

- $I = \displaystyle\int \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}\, dx$

$$I = \int x^3 (1-x^2)^{-1/2}\, dx \quad m = 3,\ n = 2,\ p = -\frac{1}{2},\ s = 2 \quad p = -\frac{1}{2} \notin \mathbb{Z} \text{ eta } \frac{m+1}{n} = 2 \in \mathbb{Z}$$

$1 - x^2 = t^2$ | aldaketa egin behar da

$-2x\, dx = 2t\, dt$ | $I = -\displaystyle\int (\sqrt{1-t^2})^3 \cdot t^{-1} \frac{t\, dt}{\sqrt{1-t^2}} = -\int (1-t^2)\, dt = -t + \frac{t^3}{3} + k =$

$$= -\sqrt{1-x^2} + \frac{(\sqrt{1-x^2})^3}{3} + k$$

- $I = \displaystyle\int \frac{dx}{x^2 \sqrt{(1+x^2)^3}}$

$$I = \int x^{-2} (1+x^2)^{-3/2}\, dx \quad m = -2,\ n = 2,\ p = -\frac{3}{2},\ s = 2;\ p\ ,\ \frac{m+1}{n} \notin \mathbb{Z} \quad \frac{m+1}{n} + p = -2 \in \mathbb{Z}$$

$(x^{-2} + 1) = t^2$ | aldaketa egin behar da

$-2x^{-3}\, dx = 2t\, dt$ | $I = \displaystyle\int (t^2-1)\left(1 + \frac{1}{t^2-1}\right)^{-3/2} \frac{-t\, dt}{(\sqrt{t^2-1})^3} = \int (t^2-1) \frac{t^{-3} (\sqrt{t^2-1})^3}{(\sqrt{t^2-1})^3} (-t)\, dt =$

$$= \int (1-t^2)\, t^{-2}\, dt = \int \frac{dt}{t^2} - \int dt = -\frac{1}{t} - t + k = \frac{-1}{\sqrt{x^{-2}+1}} - \sqrt{x^{-2}+1} + k$$

1.2-5 Funtzio transzendenteen integrazioa

a) $I = \displaystyle\int R(a^x)\, dx$ erako integralak.

$a^x = t$ ordezkapena egiten da

2-5.12 Adibidea

$$-\int \frac{7^{2x}}{7^{2x}+5}\,dx$$

$t = 7^{2x} + 5 \quad dt = 2.7^{2x}\,\mathrm{Ln}\,7\,dx$ aldaketa eginez

$$\int \frac{7^{2x}\,dx}{7^{2x}+5} = \int \frac{dt}{(2\,\mathrm{Ln}\,7)\,t} = \frac{1}{2\,\mathrm{Ln}\,7}\,\mathrm{Ln}\,|\,t\,| + k = \frac{\mathrm{Ln}\,|\,7^{2x}+5\,|}{2\,\mathrm{Ln}\,7} + k$$

b) $I = \int R(\sin x, \cos x)\,dx$ erako integralak.

Orokorrean $\mathrm{tg}\,\frac{x}{a} = t$ ordezkapena egiten da, berdintza honetatik

$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$, $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ eta $dx = \frac{2\,dt}{1+t^2}$ berdintzak ateratzen ditugu.

2-5.13 Adibidea

$$-\int \frac{dx}{\sin x - \cos x + 2} = \left[\mathrm{tg}\,\frac{x}{2} = t\right] = \int \frac{\frac{2\,dt}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2} - \frac{1-t^2}{1+t^2} + 2} = \int \frac{2\,dt}{3t^2+2t+1} =$$

$$= \frac{2}{3}\int \frac{dt}{\left(t+\frac{1}{3}\right)^2 + \frac{2}{9}} = \frac{9}{\sqrt{2}}\,\mathrm{arc\,tg}\left(\frac{\sqrt{2}}{3}\left[\mathrm{tg}\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{1}{3}\right]\right) + k$$

b-1)	$I = \int R(\sin x)\cos x\,dx$	erakoetan	$\sin x = t$	**aldaketa**
b-2)	$I = \int R(\cos x)\sin x\,dx$	"	$\cos x = t$	"
b-3)	$I = \int R(\mathrm{tg}\,x)\,dx$	"	$\mathrm{tg}\,x = t$	"
b-4)	$I = \int R(\sin 2mx, \cos 2nx)\,dx$	"	$\mathrm{tg}\,x = t$	"
b-5)	$I = \int \sin mx\ \cos nx\ dx$	"	$m,n \in \mathbb{Z}$:	

. m edo n bakoitia denean $\cos x = t$ edo $\sin x = t$ **hurrenez hurren**

. $m,n \geq 0$ eta bikoitiak

$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$ $\quad \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$ formulak erabiltzen dira

. m edo n negatiboa eta biak bikoitiak $\operatorname{tg} x = t$ aldaketa

b-6) $\int \sin mx \cos nx \, dx$; $\int \sin mx \sin nx \, dx$; $\int \cos mx \cos nx \, dx$

$m \neq n$ izanik, kasu hauetan formula trigonometrikoak erabiltzen dira:

$$\cos ax + \cos bx = 2\cos\left(\frac{a+b}{2}x\right)\cos\left(\frac{a-b}{b}x\right)$$

$$\sin ax + \sin bx = 2\sin\left(\frac{a+b}{2}x\right)\cos\left(\frac{a-b}{b}x\right)$$

$$\cos ax + \cos bx = 2\sin\left(\frac{a+b}{2}x\right)\sin\left(\frac{a-b}{b}x\right)$$

2-5.14 Adibidea

- $\displaystyle\int \frac{\cos x}{\sin^3 x + 2\cos^2 x \sin x}\,dx$ (b-1), b-2))

$$\left.\begin{array}{l} \sin x = t \\ \\ \cos x \, dx = dt \end{array}\right| \quad I = \int \frac{dt}{t^3 + 2(1 - t^2)t} = \int \frac{dt}{-t^3 + 2t} = \int \frac{dt}{t(2 - t^2)}$$

- $\int \operatorname{tg}^2 x \, dx$ (b-3))

$$\left.\begin{array}{l} x = \operatorname{arc\,tg} t \\ \\ dx = \dfrac{dt}{1+t^2} \end{array}\right| \quad I \int t^2 \frac{dt}{1+t^2} = \int\left(1 - \frac{1}{1+t^2}\right)dt = \int dt - \int \frac{dt}{1+t^2}$$

- $\displaystyle\int \frac{\cos^2 x}{a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x}\,dx$ (b-4))

$$\operatorname{tg} x = t \qquad \sin x = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} \qquad \cos x = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \qquad dx = \frac{dt}{1+t^2}$$

$$I = \int \frac{\frac{1}{1+t^2}}{\frac{a^2}{1+t^2} + \frac{b^2 t^2}{1+t^2}} \frac{dt}{1+t^2} = \int \frac{dt}{(a^2+b^2t^2)(1+t^2)}$$

- $\displaystyle\int \frac{\cos^3 x}{\sin^4 x} dx$ (b-5))

$$\sin x = t \qquad \cos x \, dx = dt$$

$$I = \int \frac{(1-t^2)\,dt}{t^4} = \int t^{-4} dt - \int t^{-2} dt$$

- $\int \sin^4 x \, dx$ (b-5))

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2} \qquad \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$$

$$I = \int \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2 dx = \int \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{4}\cos^2 2x\right) dx =$$

$$= \int \frac{1}{4} dx - \frac{1}{2}\int \cos 2x \, dx + \frac{1}{4}\int \frac{1+\cos 4x}{2} dx$$

- $\displaystyle\int \frac{\sin^2 x}{\cos^6 x} dx$ (b-5))

$$\operatorname{tg} x = \qquad \sin^2 x = \frac{t^2}{1+t^2} \qquad \cos^2 x = \frac{1}{1+t^2} \qquad dx = \frac{dt}{1+t^2}$$

$$I = \int \frac{\frac{t^2}{1+t^2}}{\frac{1}{(1+t^2)^3}} \frac{dt}{1+t^2} = \int t^2 (1+t^2)\, dt$$

- $\int \sin 5x \sin 3x \, dx$ (b-6))

$$\frac{a+b}{2} = 5 \quad \frac{a-b}{2} = 3 \quad \Rightarrow \quad a = 8 \quad b = 2 \quad \Rightarrow \quad I = -\frac{1}{2} \int (\cos 8x - \cos 2x) \, dx$$

- $\int \sin 7x \sin 4x \, dx$ (b-6))

$$\frac{a+b}{2} = 7 \quad \frac{a-b}{2} = 4 \quad \Rightarrow \quad a = 11 \quad b = 3 \quad \Rightarrow \quad I = -\frac{1}{2} \int (\cos 11x - \cos 3x) \, dx$$

2. GAIA
INTEGRAL MUGATUA

2.1 *RIEMANN-EN INTEGRALAREN DEFINIZIOA*

Izan bedi f(x) [a,b] tartean definitutako funtzio bornatua.

1.1 Definizioa

Har dezagun $P = \{x_i\}^k{}_{i=0}$ [a,b] tarteko puntuen bilduma finitua non $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots\dots < x_{k-1} < x_k = b$ bait da. P multzoari [a,b] tartearen partiketa esaten zaio.

1.2 Definizioa

Izan bedi $P = \{x_i\}^k{}_{i=0}$ partiketa. $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ $i = 1,\dots,k$ i. azpitartearen luzera da. $\delta_P = \max\limits_{i=1,\dots,k} \Delta x_i$ zenbakiari P partiketaren luzera esaten zaio.

1.3 Definizioa

Har dezagun oraingoan $[x_{i-1},x_i]$ azpitarteetako ξ_i puntu bana $i=1,\dots,k$.

$\sigma(P) = \sum\limits_{i=1}^{k} \Delta x_i\, f(\xi_i)$ baturari Riemann-en batura esaten zaio.

1.4 Definizioa

f(x) funtzioa [a,b] tartean Riemann-en zentzuan integragarria da baldin I zenbaki bat existitzen bada non [a,b] tartearen edozein $P_n = \{x_0^{(n)}, x_1^{(n)},\dots, x_{k_n}^{(n)}\}$ partiketaren segidetarako $\lim\limits_{n\to\infty} \delta_{P_n} = 0$ izanik, eta edozein $\xi_i^{(n)} \in [x_{i-1}^{(n)},x_i^{(n)}]$ punturen hautapenetarako.

$$\lim_{n\to\infty} \sigma(P_n) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{k_n} \Delta x_i^{(n)}\, f(\xi_i^{(n)})$$ limitea existitzen den eta I balio bait du.

$\lim\limits_{n\to\infty} \sigma(P_n) = I$ $\quad \Delta x_i^{(n)} = x_i^{(n)} - x_{i-1}^{(n)}$ $\quad i=1,\dots,k_n$ $\quad n = 1,2,\dots$ izanik

Idazkeraz $\quad I = \displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ $\quad$, a,b integrazio-mugak dira.

Honek Riemann-en baturek I limite finiturantz jotzen dutela esan nahi du P_n partiketen eta $\xi_i^{(n)}$ puntuen menpean egon gabe, $\lim_{n\to\infty} \delta_{P_n} = 0$ baldintza bakarrik gordez gero.

1.5 Adibidea

Izan bitez $f(x) = x^2$ funtzioa eta $[0,b]$ tartea. $f(x)$ jarraia denez integragarria da.

Har dezagun $P_n = \{x_i^{(n)}\}_{i=0}^{k_n}$ partiketa non $\Delta x_i^{(n)} = \dfrac{b}{n}$ $i=1,\dots,k_n$ bait da. kasu honetan $k_n = n$ eta $x_0 = 0$, $x_1 = \dfrac{b}{n}$, $x_2 = \dfrac{2b}{n}$, ..., $x_{n-1} = \dfrac{(n-1)b}{n}$, $x_n = b$

$$\delta p_n = \max_{i=1,\dots,k_n} \Delta x_i^{(n)} = \max_{i=1,\dots,k_n} \frac{b}{n} = \frac{b}{n} = \Delta x \qquad \text{(denak berdinak direlako)}$$

$$\lim_{n\to\infty} \delta p_n = \lim_{n\to\infty} \frac{b}{n} = 0$$ baldintza hau betetzen da.

Osa ditzagun Riemann-en baturak $\sigma(P_n) = \sum_{i=1}^{k_n} \Delta x_i\, f(\xi_i)$ horretarako $\xi_i = x_{i-1}$ aukeratuko ditugu.

$$\sigma(P_n) = \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i^{(n)} f(x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} (x_i^{(n)} - x_{i-1}^{(n)})\,(x_{i-1}^{(n)})^2$$

$$x_{i-1}^{(n)} = (i-1)\,\Delta x \qquad \text{eta} \qquad \Delta x_i^{(n)} = \Delta x = \frac{b}{n} \qquad \forall\ i = 1,\dots,k_n$$

$$\sigma(P_n) = \sum_{i=1}^{n} \Delta x\,((i-1)\Delta x)^2 = \Delta x^3 \sum_{i=1}^{n} (i-1)^2$$

$$\sum_{i=1}^{n} (i-1)^2 = 0^2 + 1^2 + \dots + (n-1)^2 = \frac{(n-1)\,n\,(2(n-1)+1)}{6} = \frac{(n-1)\,n\,(2n-1)}{6}$$

$$\sigma(P_n) = \left(\frac{b}{n}\right)^3 \frac{(n-1)\,n\,(2n-1)}{6} = \frac{b^3}{6}\,\frac{2n^3 - 2n^2 + n}{n^3}$$

$$\lim_{n\to\infty} \sigma(P_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{b^3}{6}\,\frac{2n^3 - 3n^2 + n}{n^3} = \frac{2b^3}{6} = \frac{b^3}{3}$$

Hemendik $\displaystyle\int_0^b x^2\,dx = \frac{b^3}{3}$ dela ondoriozta daiteke.

Baldintza beharrezkoa

Funtzio bat [a,b] tartean integragarria bada, bornaturik dago tartean.

Baldintza hau ez da nahikoa ondoko kontradibidez ikusiko dugun bezala.

1.6 Adibidea

Har ditzagun [0,1] tartea eta bere edozein partiketa $P = \{x_i\}^k_{i=0}$

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$ funtzioa bornatua da

ξ_i puntuak razionalak hartuz $f(\xi_i) = 1$ eta $\sigma(P) = \sum_{i=1}^{k} \Delta x_i \cdot f(\xi_i) = \sum_{i=1}^{k} \Delta x_i = 1$ baina ξ_i puntuak irrazionalak hartuz gero $f(\xi_i) = 0$ eta $\sigma(P) = 0$ lortuko dugu. Hau da, ξ_i puntuen hautapenaren arabera batura desberdinak lortzen dira, beraz baturen limitea ez da berbera izango, horrexegatik funtzio hau ez da Riemann-en zentzuan integragarria.

2.2 *BEHE- ETA GOI-BATURAK*

Izan bitez f(x) [a,b] tartean definitutako funtzioa eta $P = \{x_i\}^k_{i=0}$ tartearen partiketa. Har ditzagun $m_i = \inf_{x\in I_i} f(x)$ eta $M_i = \sup_{x\in I_i} f(x)$ $I_i = [x_{i-1}, x_i]$ izanik

2.7 Definizioa

$$\overline{S}(P) = \sum_{i=1}^{k} M_i\,\Delta x_i$$ baturak goi-batura izena du.

$$\underline{S}(P) = \sum_{i=1}^{k} m_i\,\Delta x_i$$ baturak, aldiz, behe-batura izena du.

Batzutan U(P,f) eta L(P,f), hurrenez hurren, idazten dira.

2.8 Propietateak

a) $f(x)$ funtzio bornatua bada $\bar{S}(P)$ eta $\underline{S}(P)$ existitzen dira.

b) Edozein P partiketa eta $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ puntuen hautapenetarako

$$\underline{S}(P) \leq \sigma(P) \leq \bar{S}(P)$$

c) Baldin P eta P' tartearen bi partiketa badira, non $\delta p' < \delta p$ den

$$\underline{S}(P) \leq \underline{S}(P') \qquad \text{eta} \qquad \bar{S}(P') \leq \bar{S}(P)$$

d) P_1, P_2 edozein bi partiketa izanik $\underline{S}(P_1) \leq \bar{S}(P_2)$

2.9 Teorema

$f(x)$ funtzioa $[a,b]$ tartean Riemann-en zentzuan integragarria da baldin eta soilik baldin $\lim\limits_{\delta_p \to 0} \underline{S}(P) = I = \lim\limits_{\delta_p \to 0} \bar{S}(P)$ betetzen bada

Hau da, funtzio bat Riemann-en zentzuan integragarria bada, behe eta goi-baturek eta Riemann-en baturak I baliorantz jotzen dute partiketaren luzerak 0-rantz jotzen duenean.

Integralaren existentzi erizpideak (funtzio bat Riemann-en zentzuan integragarria izan dadin).

Kasu guztietan funtzioa bornatua dela suposatuko dugu

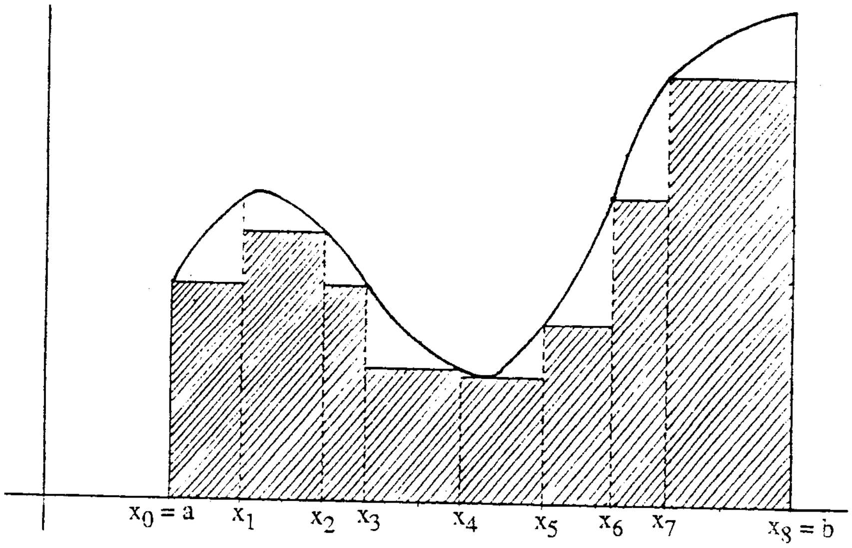
a) $f(x)$ monotonoa bada $[a,b]$ tartean integragarria da bertan

b) $f(x)$ $[a,b]$ tartean jarraia bada integragarria da bertan

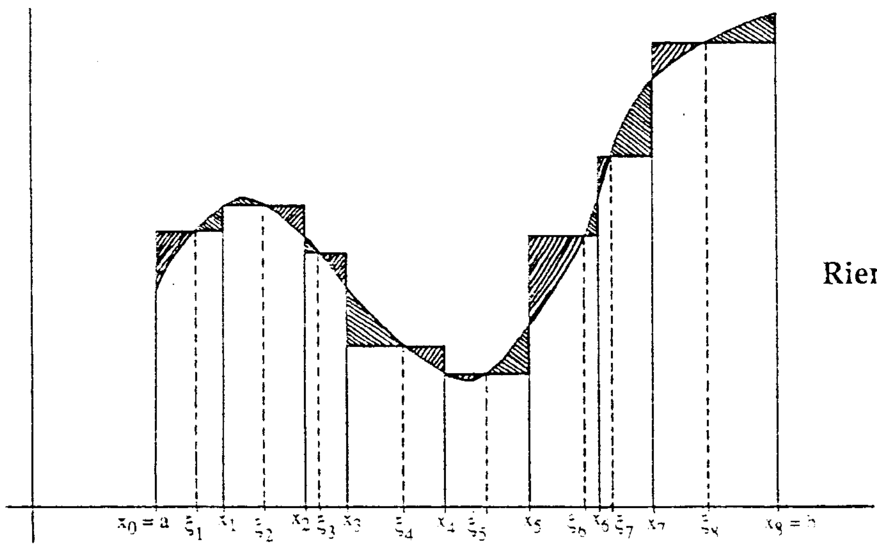
c) $f(x)$ funtzioak etenguneak kopuru finituan (edo infitu zenbakigarrian) baditu integragarria da ere $[a,b]$ tartean

d) $f(x)$ integragarria bada $|f(x)|$ ere integragarria da

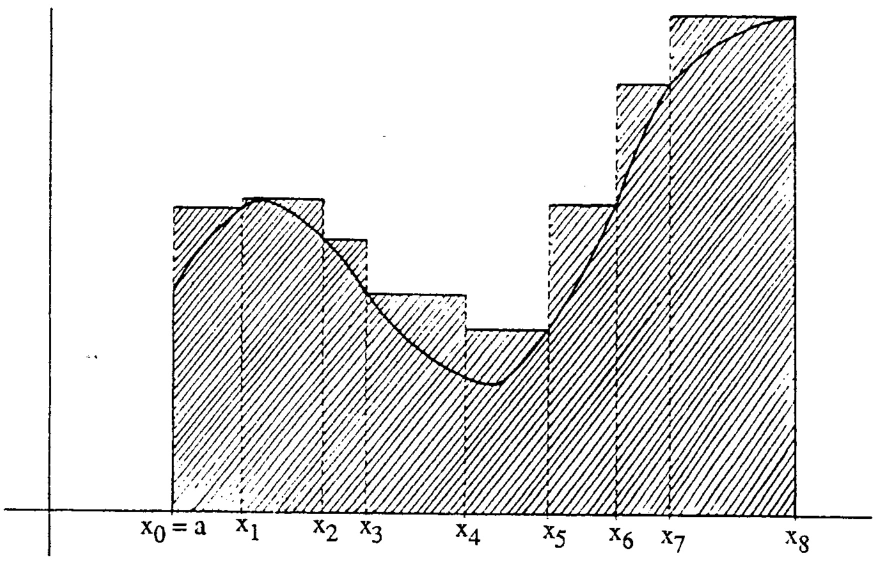
2.3 ADIERAZPEN GEOMETRIKOA



Behe-batura



Riemann-en batura

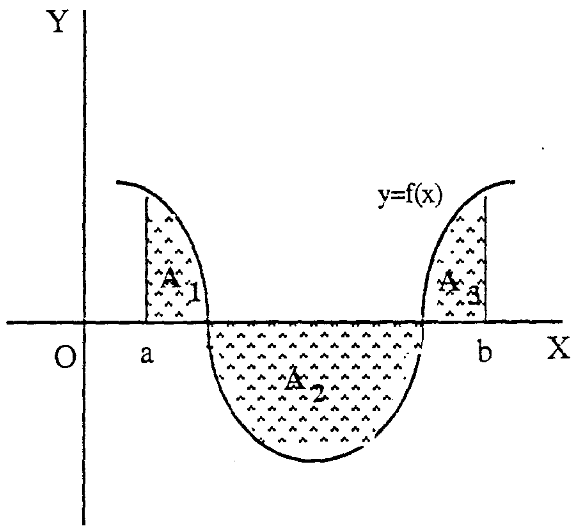


Goi-batura

Zera esan daiteke beraz, $y = f(x)$ kurbak eta $x=a$, $x=b$ eta $y=0$ zuzenek mugatzen duten eskualdearen azalera dela integrala

$f(x) \geq 0 \qquad \forall\, x \in [a,b] \qquad I > 0$

$f(x) < 0 \qquad \forall\, x \in [a,b] \qquad I < 0$



$$\int_a^b f(x)\,dx = \underset{(+)}{A_1} + \underset{(-)}{A_2} + \underset{(+)}{A_3}$$

$$\text{Azalera} = |A_1| + |A_2| + |A_3|$$

2.4 *INTEGRAL MUGATUAREN PROPIETATEAK*

a) $$\int_a^b \lambda\, f(x)\,dx = \lambda \int_a^b f(x)\,dx$$

b) $$\int_a^b (f_1(x) + f_2(x))\,dx = \int_a^b f_1(x)\,dx + \int_a^b f_2(x)\,dx$$

c) $\forall\, x \in [a,b] \quad f(x) \leq g(x)$ bada $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$.

d) Izan bitez $m = \min\limits_{x \in I} f(x)$ eta $M = \max\limits_{x \in I} f(x)$, $I = [a,b]$ izanik

$$m\,(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M\,(b-a)$$

e) *Batezbestekoaren teorema*

f(x) funtzioa [a,b] tartean jarraia bada $\xi \in [a,b]$ existizen da

non $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = f(\xi)\,(b-a)$ den

Frogapena:

Izan bitez m eta M f(x) funtzioaren minimo eta maximoa [a,b] tartean, aurreko propietatea erabiliz $m \le \dfrac{1}{(b-a)}\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \le M$, $\mu = \dfrac{1}{(b-a)}\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ idazten bada

$m \le \mu \le M$ eta f(x) jarraia denez m eta M balioen arteko balio guztiak hartzen ditu [a,b] tartean, beraz $\exists\, \xi \in [a,b] \,/\, f(\xi) = \mu$ edo

$f(\xi) = \dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ eta hemendik $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = f(\xi)\,(b-a)$ $\xi \in [a,b]$ izanik.

f) f(x) eta g(x) funtzio integragarriak badira, (f(x) g(x)) ere integragarria da.

g) $\forall$ a,b,c $a < c < b$ izanik $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$

h) $\displaystyle\int_a^a f(x)\,dx = 0$ definizioz

i) $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$

Batezbestekoaren teorema ondoko teoremaren korolario bezala atera daiteke.

Batazbesteko balioaren 1. teorema (integral mugatuetarako).

Jo dezagun a) f(x) eta g(x) [a,b] tartean integragarriak direla
b) $\forall\, x \in [a,b]$ $m \le f(x) \le M$ betetzen dela
c) g(x) funtzioa ez dela [a,b] tartean zeinuz aldatzen

$\mu \in [m,M]$ existitzen da non $\displaystyle\int_a^b f(x)g(x)\,dx = \mu \int_a^b g(x)\,dx$ den.

4.10 Korolarioa

$f(x)$ funtzioa $[a,b]$ tartean jarraia bada $\xi \in [a,b]$ existitzen da non $\displaystyle\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx =$

$$= f(\xi)\int_a^b g(x)\,dx \qquad \text{den.}$$

konkretuki $g(x) \equiv 1$ denean $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = f(\xi)\,(b-a)$

Integral mugatuetarako batezbesteko balioaren 2. teorema.

Izan bitez $f(x)$ funtzio jarraia eta $g(x)$ funtzio monotono jarraiki diferentziagarria $[a,b]$ artean. $\xi \in [a,b]$ existitzen da non $\displaystyle\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx = g(a)\int_a^\xi f(x)\,dx + g(b)\int_\xi^b f(x)\,dx$ den.

2.5 GOIKO MUGA ALDAKORREKO INTEGRAL MUGATUA

Izan bedi $f(x)$ funtzio jarraia $[a,b]$ tartean, $\displaystyle\int_a^x f(t)\,dt$ integrala hartzen dugu.

Integral hau x aldagaiaren funtzioa da eta $I(x)$ idatziko dugu eta funtzio integral esango

$$I(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

Kalkulu integralaren oinarrizko teorema.

f(x) funtzioa [a,b] tartean jarraia bada $I(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ funtzio integrala jatorrizko funtziotzat onartzen du.

Frogapena:
I(x) f(x)-en jatorrizko funtzioa izan dadin $I'(x) = f(x)$ bete behar da. Egiazta dezagun azken berdintza hau

$$I'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{I(x+h) - I(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(\int_a^{x+h} f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt\right) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\,dt$$

batezbestekoaren teorema [x,x+h] tartean aplikatuz

$$\exists\, \xi \in [x,x+h] \;/\; \int_x^{x+h} f(t)\,dt = f(\xi)\,(x+h-x) \qquad \text{beraz}$$

$$I'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} f(\xi)\,h = \lim_{h\to 0} f(\xi) \overset{*}{=} f(x)$$

* $h \to 0 \quad x+h \to x$ eta $x+h > \xi > x$ denez $\xi \to x$

Teorema honek funtzio integralaren deribatua eta integrakizunaren arteko erlazioa ematen digu.

Barrow-en formula

Baldin F(x) funtzioa f(x) funtzioaren edozein jatorrizko funtzio bat bada

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) \qquad \text{betetzen da.}$$

Frogapena:

Badakigu I(x) f(x)-en jatorrizko funtzioa dela
beraz $F(x) = I(x) + K$ (0.1.3)

$$F(b) = I(b) + K = \int_a^b f(t)\,dt + K \qquad \Rightarrow F(b) = \int_a^b f(t)\,dt + F(a) \Rightarrow$$

$$F(a) = I(a) + K = \int_a^a f(t)\,dt + K = K \qquad \int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a)$$

Barrow-en formularen aplikazioak.

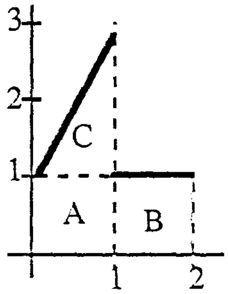
Formula aplikatu baino lehen f(x) jarraia dela egiaztatu behar da

5.11 Adibidea

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 1 & x \in [0,1] \\ 1 & x \in [1,2] \end{cases}$$

Kalkula dezagun

$$\int_0^2 f(x)\,dx$$



Formula aplikatuz

$$F(x) = \begin{cases} x^2 + x & x \in [0,1] \\ x & x \in [1,2] \end{cases}$$

$$\int_0^2 f(x)\,dx = F(2) - F(0) = 2 - 0 = 2$$

baina irudiari begiratuz A=1, B=1 eta C=1 dugu, beraz azalera 3 da eta ez 2.

a) Aldagaiaren aldaketa

Izan bedi $I = \int_a^b f(x)\,dx$, integral mugagabearen kalkulua $x = \varphi(t)$ $dx = \varphi'(t)\,dt$,

$f(x) = f(\varphi(t))$ aldaketaren bidez eginez gero, integrazio-mugak aldatu egingo dira $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$ badira integrazio-tarte berria $[\alpha,\beta]$ izango dugu, $f(x)$, $\varphi(t)$ eta $\varphi'(t)$ jarraiak badira.

.. beraz

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt$$

berdintza honekin ez dugu aldaketa desegin behar.

b) Zatikako integrazioa

u(x), v(x), u'(x) eta v'(x) [a,b] tartean jarraiak direla suposatuz

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b u(x)\,dv(x) = [u(x)\,v(x)]_a^b - \int_a^b v(x)\,du(x) \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \int_a^b u(x)\,v'(x)\,dx = [u(x)\,v(x)]_a^b - \int_a^b v(x)\,u'(x)\,dx$$

c) Barrow-ren formularen hedapena

Lehen mailako etenguneak kopuru finituan dituen funtzio bat hartuko dugu (kopurua infinitu zenbakigarria denean ere balio du). Jo dezagun f(x) [a,b] tartean definitutako funtzioak $c \in (a,b)$ puntuan etengune bat duela, bornatua izanik

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^{c-\varepsilon} f(x)\,dx + \int_{c-\varepsilon}^{c+\varepsilon} f(x)\,dx + \int_{c+\varepsilon}^b f(x)\,dx$$

$$I = \int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_a^{c-\varepsilon} f(x)\,dx + \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{c-\varepsilon}^{c+\varepsilon} f(x)\,dx + \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{c+\varepsilon}^b f(x)\,dx$$

$$\left| \int_{c-\varepsilon}^{c+\varepsilon} f(x)\,dx \right| \le \int_{c-\varepsilon}^{c+\varepsilon} |\,f(x)\,|\,dx \le \int_{c-\varepsilon}^{c+\varepsilon} K\,dx = 2\,K\,\varepsilon \qquad \text{non} \qquad K \qquad |\,f(x)\,|\text{-en}$$

bornea bait da $\lim_{\varepsilon \to 0} 2K\varepsilon = 0$ denez zera atera dezakegu:

$$I = \lim_{\varepsilon \to 0} \left(F(c-\varepsilon) - F(a) \right) + \lim_{\varepsilon \to 0} \left(F(b) - F(c+\varepsilon) \right) = F(b) - F(a) + F(c^-) - F(c^+)$$

hau da $\qquad I = (F(b) - F(a)) - (F(c^+) - F(c^-))$

$F(c^+) = F(c^-)$ denean Barrow-en formula izango dugu.

Deskonposaketa bera egingo da etengune gehiago izanez gero.

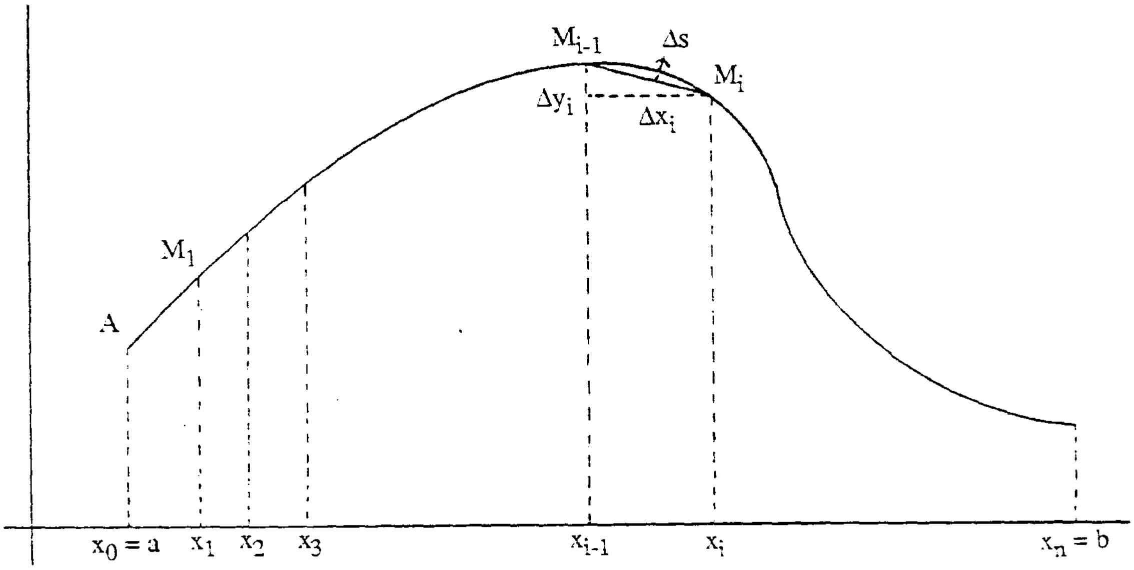
Aurreko adibidea berriro eginez:

$I = (F(2) - F(0)) - (F(1^+) - F(1^-)) = (2 - 0) - (1 - 2) = 2 + 1 = 3$

2.6 *INTEGRAL MUGATUAREN APLIKAZIOAK*

A) Kurba-arku baten luzera

- Koordenatu cartesiarretan



AB arkuaren luzera kalkulatu nahi da arkuaren gaineko $A, M_1, M_2,..., M_{n-1}$, B puntuak hartzen dira, haien abzisak $a, x_1, x_2, ..., x_{n-1}$, b izanik. Izan bedi

ΔS_i $\overline{M_{i-1} M_i}$ zuzenkiaren

luzera lerro poligonal osoaren luzera $\quad S_n = \sum_{i=1}^{n} \Delta S_i \quad$ da

$\max \Delta S_i \to 0$ denean $\quad S_n \to L$ = arkuaren luzera izango dugu.

hau da $\lim\limits_{\max \Delta S_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} \Delta S_i = L$. Limite honetan ordezkatuko ditugu

$$\Delta S_i = \sqrt{\Delta x_i^2 + \Delta y_i^2} = \Delta x_i \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\right)^2}$$, Lagrange-ren teorema erabiliz

$\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i} = f'(\xi_i) \quad x_{i-1} < \xi_i < x_i$ izanik, honelatan ba, $\Delta S_i = \Delta x_i \sqrt{1 + f'(\xi_i)^2}$

eta hemendik $$L = \lim_{\max \Delta S_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + f'(\xi_i)^2}\ \Delta x_i = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2}\ dx$$

- Ekuazio parametrikoetan

$x = \varphi(t)$	$\alpha \le t \le \beta$	funtzioak jarraiak eta deribatu jarraidunak
$y = \psi(t)$	$a = \varphi(\alpha),\ b = \varphi(b)$	dira eta $\varphi'(t) \neq 0$ [a,b] tartean izanik.

$$f'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\,\frac{dt}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)} \qquad dx = \varphi'(t)\,dt$$

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2}\ dx = \int_\alpha^b \sqrt{1 + \left(\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\right)^2}\ \varphi'(t)\,dt = \int_\alpha^\beta \sqrt{\varphi'(t)^2 + \psi'(t)^2}\ dt$$

Espazioan $$L = \int_\alpha^\beta \sqrt{\varphi'(t)^2 + \psi'(t)^2 + \chi'(t)^2}\ dt$$

- Koordenatu polarretan

$x = \rho\cos\theta = f(\theta)\cos\theta$

$y = \rho\sin\theta = f(\theta)\sin\theta$

$\rho = f(\theta)$

$$L = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{(f'(\theta)\cos\theta - f(\theta)\sin\theta)^2 + (f'(\theta)\sin\theta + f(\theta)\cos\theta)^2}\ d\theta =$$

$$= \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{f'(\theta)^2 + f(\theta)^2}\ d\theta$$

non $a = f(\theta_1)\cos\theta_1$ eta $b = f(\theta_2)\cos\theta_2$ diren

B) Kurben azpiko azaleren kalkulua

- Koordenatu cartesiarretan

* $f(x) > 0 \quad \forall\, x \in [a,b] \qquad A = \int_a^b f(x)\, dx$	f(x) funtzioa [a,b] tar-
$f(x) < 0 \quad \forall\, x \in [a,b] \qquad A = -\int_a^b f(x)\, dx$	tean zeinuz aldatzen bada

kopuru finitu aldiz, integrala azpitarteetako integralen baturan deskonposa daiteke, $f(x) < 0$ deneko kasuetan $A = -I$ dela kontutan hartuz

* Bi kurbek mugatutako azaleren kalkulua

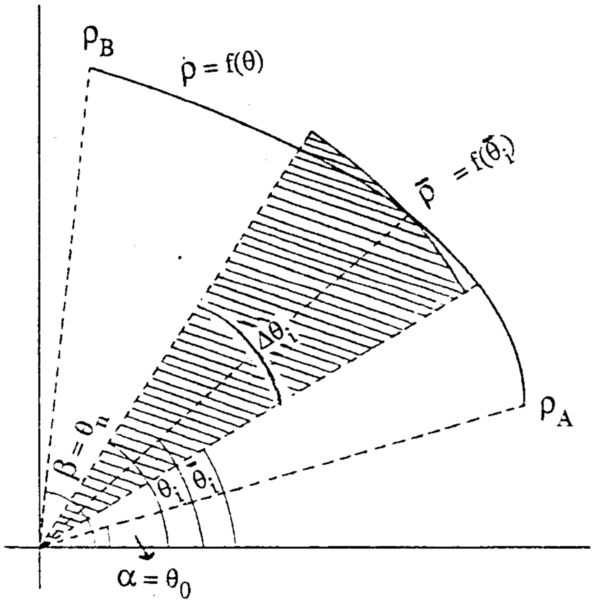
$y = f_1(x)$ eta $y = f_2(x)$ kurbak (a,z_1) eta (b,z_2), edo puntu gehiagotan elkar ebakitzen badute eta $f_1(x) \geq f_2(x)$ [a,b] tartean

$$A = \int_a^b (f_1(x) - f_2(x))\, dx = \int_a^b f_1(x)\, dx - \int_a^b f_2(x)\, dx$$

- Ekuazio parametrikoetan

$x = \varphi(t) \qquad dx = \varphi'(t)\, dt$	$A = \int_a^b f(x)\, dx = \int_a^b y\, dx = \int_\alpha^\beta \psi(t)\, \varphi'(t)\, dt$
$y = \psi(t) \qquad \varphi(\alpha) = a,\ \varphi(\beta) = b$	

- Sektore kurbatu baten azalera koordenatu polarretan



$f(\alpha) = \rho_A$ | $[\alpha, \beta]$ tartearen partiketa bat

$f(\beta) = \rho_B$ | $\alpha = \theta_0 < \theta_1 < \ldots < \theta_n = \beta$,

hartuz eta erradio-bektoreek eratutako angeluak $\Delta\theta_i = \theta_i - \theta_{i-1}$ $i = 1,\ldots,n$ izanik.

Bedi $\bar{\rho}_i$ $\bar{\theta}_i \in [\theta_{i-1}, \theta_i]$ edozein angeluri dagokion luzera, hots $f(\bar{\theta}_i) = \bar{\rho}_i$

Har dezagun $\bar{\rho}_i$ erradioa eta $\Delta\theta_i$ angelu zentrala dituen A_i sektore zirkularra, bere azalera $\Delta A_i = \frac{1}{2}\bar{\rho}_i^2 \Delta\theta_i$ da

Hau $\forall i$ egiten bada eta azaleren batura kalkulatu

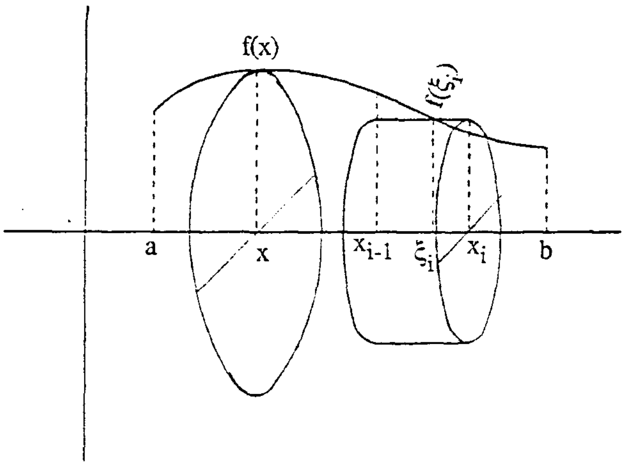
$$\sum_{i=1}^{n} \Delta A_i = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \bar{\rho}_i^2 \Delta\theta_i = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} f(\bar{\theta}_i)^2 \Delta\theta_i$$

limitea $\max \Delta\theta_i \to 0$ denean hartuz integrala, hots azalera, lortuko dugu:

$$A = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} \rho^2 \, d\theta = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} f(\theta)^2 \, d\theta$$

C) Bolumenen kalkulua

- Biraketa-gorputz baten bolumena

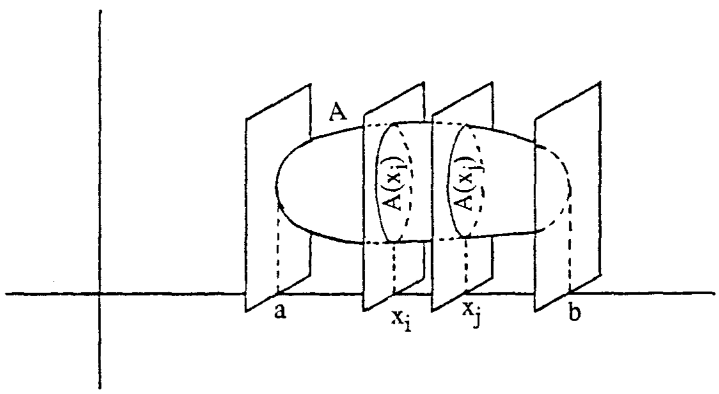


OX ardatzarekiko biraketa eginez sortutako gorputzaren bolumena kalkulatu nahi da $y = f(x)$ kurba biratuz $y_i = f(\xi_i)$ puntuak zirkunferentzia bat deskribatzen du, zirkunferentzia horrek mugatutako zirkuluaren azalera $A_i = \pi\, y_i^2$ edo $A_i = \pi\, f(\xi_i)^2$ da. [a,b] tartean partiketa bat hartuz, $a = x_0, x_1, \dots, x_n = b$, eta $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ aukeratuz, Δx_i altuera eta $f(\xi_i)$ erradioa dituzten zilindroak eraikitzen ditugu. Zilindro hauen bolumena $V_i = \pi\, f(\xi_i)^2\, \Delta x_i$ da, guztien bolumena

$$V_n = \sum_{i=1}^{n} \pi\, f(\xi_i)\, \Delta x_i$$ berdintza honetan limitea hartuz

$$V = \lim_{n\to\infty} V_n = \pi \int_a^b f^2(x)\, dx$$

- Sekzio paraleloen azaleren funtzioan gorputzen bolumenaren kalkulua

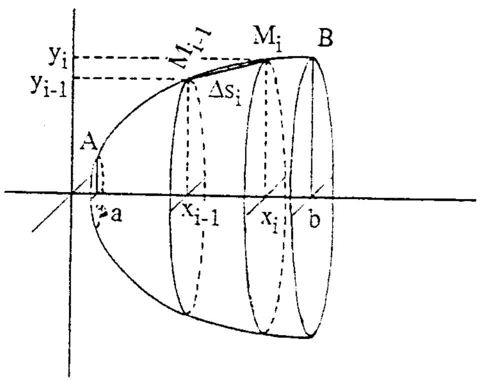


Sekzio paraleloen azalera A(x) funtzio jarraiaren bidez adierazten badugu, [a,b] tartearen $a = x_0, x_1, \ldots x_n = b$ partiketa bat hartuz eta $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ aukeratuz zilindro batzu osatzen ditugu zeinen bolumenak $V_i = A(\xi_i)\, \Delta x_i$ diren, bolumenen batura

$$V_n = \sum_{i=1}^{n} A(\xi_i)\, \Delta x_i \quad \text{eta bolumen osoa} \quad V = \int_a^b A(x)\, dx$$

D) Gorputz ez-laun baten azalera

- Biraketa-gorputz baten azalera



y = f(x) kurbaren biraketak sortutako azalera

$\overline{M_{i-1}\, M_i}$ kordak biratzean $A_i = \pi\, (y_i + y_{i-1})\, \Delta s_i$ azalerako

kono-enbor bat sortzen du. $\Delta s_i = \sqrt{\Delta x_i^2 + \Delta y_i^2} = \Delta x_i \sqrt{1 + f\,'(\xi_i)^2}$

$\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ izanik $\Rightarrow$ $A_i = \pi\, (y_i + y_{i-1})\, \Delta x_i \sqrt{1 + f\,'(\xi_i)^2}$

$$A_n = \sum_{i=1}^{n} \pi\, (y_i + y_{i-1})\, \Delta x_i \sqrt{1 + f\,'(\xi_i)^2} = \pi \sum_{i=1}^{n} (f(x_{i-1}) + f(x_i)) \sqrt{1 + f\,'(\xi_i)^2}\, \Delta x_i \Rightarrow$$

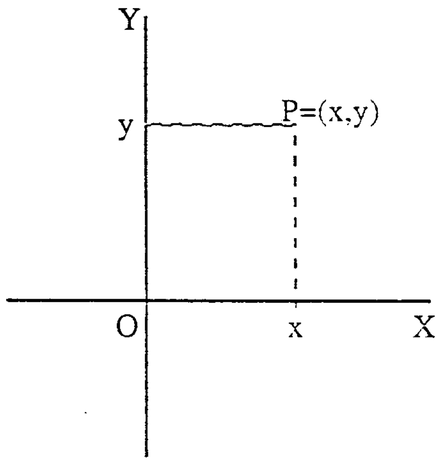
$$\Rightarrow \quad A = \lim_{\substack{\Delta x_i \to 0 \\ n \to \infty}} A_n = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + f\,'(x)^2}\, dx$$

3. GAIA
INTEGRAL ANIZKOITZAK

3.1 KOORDENATU-SISTEMAK

Bai planoan bai espazioan, erabiliko ditugun espazioak alegia, puntuak zenbait eratan adieraz daitezke. Planoan esaterako, puntuak koordenatu cartesiar eta koordenatu polarren bidez adieraziko ditugu; espazioan, ordea, koordenatu cartesiar, zilindriko eta esferikoen bidez.

3.1-1 Planoa

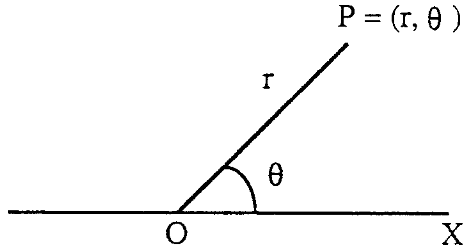


- Koordenatu cartesiarrak

OX eta OY zuzen elkartzutak ardatzak hartuz, planoko P edozein puntuk ardatz hauekiko bi koordenatu izango ditu, x eta y alegia; koordenatu hauek kalkulatzeko OX eta OY zuzenekiko paraleloak marrazten dira (begira irudiari) P puntutik.

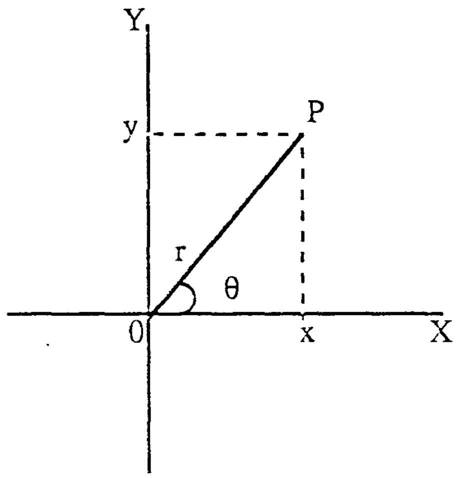
- Koordenatu polarrak

Kasu honetan OX zuzena finkatzen da eta bertan O puntua



P eta O puntuak zuzenki batez lotzen ditugu. Zuzenki honen luzera r bada eta zuzenkiak eta OX zuzenak osatzen duten angelua θ bada, P puntuaren koordenatuak (r,θ) direla esan dezakegu, koordenatu hauek polarrak dira.

Bi koordenatu-sistema hauen arteko erlazioa ikusteko irudiak bildu egingo ditugu:



(x,y) eta (r, θ) koordenatuen arteko erlazioa irudian agerian dago

$x = r \cos\theta$

$y = r \sin\theta$

Auzi hau integraletan aldagai-aldaketa bezala interpreta daiteke hau da, guk $\int_D f(x,y)\, ds$ integrala kalkulatu nahi badugu koordenatu polarretan, goian ditugun berdintzak erabili beharko ditugu.

Aldagai-aldaketa honi dagokion jacobiarra ondokoa izanik:

$$|J| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & -r\cos\theta \end{vmatrix} = r\cos^2\theta - r\sin^2\theta = r$$

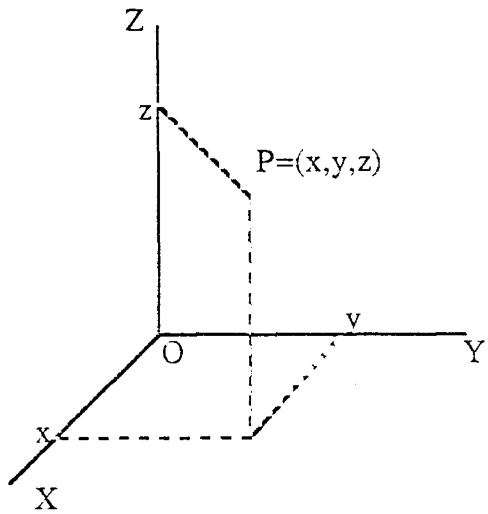
Beraz $\int_D f(x,y)\, ds = \int_{D'} g(r,\theta)\, r\, ds'$

3.1-2 Espazioa

- Koordenatu cartesiarrak

Espazioan hiru zuzen elkarrekiko elkartzut hartuko ditugu, OX, OY eta OZ alegia.

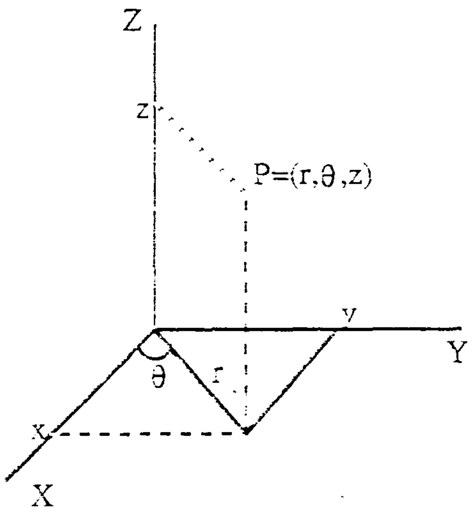
Espazioko puntu guztiek hiru ardatz hauekiko hiru koordenatu dituzte, (x,y,z) alegia. Koordenatu hauek P puntutik ardatzekiko hiru elkartzut marraztuz lortzen dira (begira irudiari).



- Koordenatu zilindrikoak

Koordenatu cartesiarrak planoko P puntuaren (x,y) koordenatu cartesiarrei z koordenatua erantsiz lortzen dira. Planoko koordenatuak cartesiarrak izan beharrean polarrak badira, z koordenatua erantsiz koordenatu zilindrikoak lortzen dira. Puntuaren koordenatuak, beraz, (r,θ,z) dira.

Koordenatu cartesiar eta zilindrikoen arteko erlazioa bilatzeko planoan cartesiar eta polarren artekoa kontutan hartu behar da: erlazioa ondorengo berdintzez definitzen da:



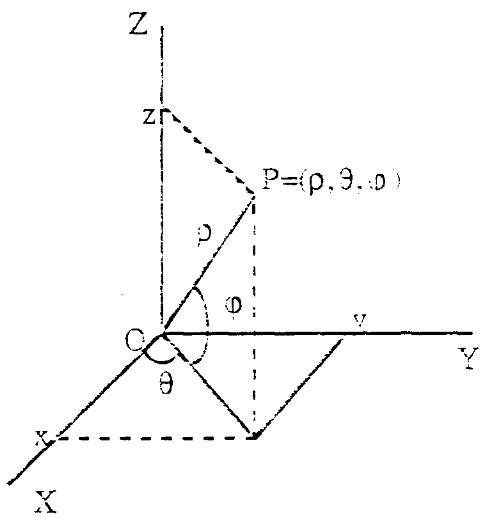
$x = r\cos\theta$ Berriro interpretatuko dugu integraletan
$y = r\sin\theta$ aldagai-aldaketa honi dagokion jacobiarra
$z = z$ beste hau delarik:

$$|J| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial z} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial z} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & r\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r$$

Kasu honetan $\int_D f(x,y,z)\, ds = \int_{D'} g(r,\theta,z)\, r\, ds'$

-Koordenatu esferikoak

Koordenatu hauek definitzeko P eta O puntuen arteko ρ distantzia hartzen da kontutan, baita $\overline{PO}$ zuzenkiak OXY planoarekiko osatzen duen φ angelua eta $\overline{PO}$ zuzenkiaren OXY planoko proiekzioak OX ardatzarekiko osatzen duen θ angelua ere, hau da (ρ,θ,φ) balioak.



Koordenatu cartesiar eta esferikoen arteko erlazioa bilatuko dugu orain.
z altuera $\rho \sin\varphi$ adierazpen trigonometrikoaz lortzen da. OP zuzenkiaren proiekzioa aldiz $\rho\cos\varphi$ dugu, beraz x koordenatua $\rho\cos\varphi\cos\theta$ eta y koordenatua $\rho\cos\varphi\sin\theta$ izango ditugu, hots

$$x = \rho\cos\theta\cos\varphi$$
$$y = \rho\sin\theta\cos\varphi$$
$$z = \rho\sin\varphi$$

Eta erlazio hau integraletan aldagai-aldaketa bezala interpretatzeko jacobiarra kalkulatuko dugu

$$|J| = \begin{vmatrix} \cos\theta\cos\varphi & -\rho\sin\theta\cos\varphi & -\rho\cos\theta\sin\varphi \\ \sin\theta\cos\varphi & \rho\cos\theta\cos\varphi & -\rho\sin\theta\sin\varphi \\ \sin\varphi & 0 & \rho\cos\varphi \end{vmatrix} =$$

$= \rho \cos\varphi\,[\rho\cos^2\theta\cos^2\varphi + \rho\sin^2\theta\cos^2\varphi] + \sin\varphi\,[\,\rho^2\sin^2\theta\sin\varphi\cos\varphi +$
$+ \rho^2\cos^2\theta\sin\varphi\cos\varphi] = \rho^2\cos^3\varphi + \rho^2\sin^2\varphi\cos\varphi = \rho^2\cos\varphi$

$$\int_D f(x,y,z)\,ds = \int_{D'} g(\rho,\theta,\varphi)\,\rho^2\cos\varphi\,ds'$$

3.2 *INTEGRAL ANIZKOITZAK*

3.2-1 *Riemann-en integral anizkoitzaren definizioa*

Izan bedi $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ funtzio bornatua

2-1.1 Definizioa

Izan bitez, $A_1,\ldots\ldots,A_n$ $\mathbb{R}$ multzoaren n tarte (bornatuak edo ez, irekiak, itxiak edo erdiitxiak izan daitezkeelarik). $A = A_1x\ldots\ldots xA_n$ erako multzoei n dimentsioko tarte esaten zaie non $(x_1,\ldots,x_n) \in A \iff x_i \in A_i$ $i=1,\ldots,n$ bait da.

A irekia (itxia) da baldin $\forall i$ A_i irekiak (itxiak) badira.

2-1.2 Definizioa

Izan bedi A $\mathbb{R}^n$ multzoaren tarte trinkoa. Baldin P_k A_k tartearen partiketa bat bada $P = P_1xP_2x\ldots..xP_n$ biderkadurari A-ren partiketa esaten zaio. P hau azken finean $m=m_1\cdot m_2\cdot\ldots\cdot m_n$ n-dimentsioko tarteen bildura besterik ez da, beraz

$P = \bigcup_{k=1}^{m} I_k$ idatziko dugu.

2-1.3 Definizioa

$I_k = I_{1h}xI_{2i}x\ldots..xI_{nj}$ izango da $\forall k=1,\ldots..m$ $\mu(I_k) = \Delta I_{1h}\cdot\Delta I_{2i}\cdot\ldots\cdot\Delta I_{nj}$ definitzen dugu non ΔI_{ml} I_{ml} tartearen luzera bait da. $\mu(I_k)$ zenbakiari I_k n-dimentsioko tartearen neurria esango diogu.

Kasu partikulartzat har ditzakegu $\mathbb{R}^2$ eta $\mathbb{R}^3$, hauetan

$I_k = I_{1h}xI_{2i}$ eta $\mu(I_k) = \Delta I_{1h}.\Delta I_{2i}$ I_k tartearen azalera da

$I_k = I_{1h}xI_{2i}xI_{3j}$ eta $\mu(I_k) = \Delta I_{1h}.\Delta I_{2i}.\Delta I_{3j}$ I_k tartearen bolumena

2-1.4 Definizioa

$\mu(P) = \max_{k=1,\dots,m} \mu(I_k)$ balioari P partiketaren diametro esango diogu

2-1.5 Definizioa

Har dezagun I_k tarteetatik puntu bana $t_k = (t_1^k, t_2^k, \dots, t_n^k)$, $k=1,\dots,m$

$\sigma(P) = \sum_{k=1}^{m} f(t_1^k, t_2^k, \dots, t_n^k)\, \mu(I_k)$ baturari Riemann-en batura deituko diogu.

2-1.6 Definizioa

$f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ funtzioa A tartean Riemann-en zentzuan integragarria da, $f \in R(A)$ idatziz, I zenbaki bat existitzen bada non
$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists P_\varepsilon$ A-ren partiketa / $\forall P \leq P_\varepsilon$ $(\mu(P) \leq \mu(P_\varepsilon))$ $|\sigma(P) - I| < \varepsilon$ bait da

edo $\lim_{\mu(P)\to 0} \sigma(P) = I$. Idazkeraz $I = \int_A f(x_1, x_2, \dots, x_n)\, d(x_1, \dots, x_n)$

$\mathbb{R}^2$ multzoan $\iint_A f(x,y)\, dx\, dy$ eta $\mathbb{R}^3$ multzoan $\iiint_A f(x,y,z)\, dx\, dy\, dz$
edo $\iint_A f(x,y)\, ds$ eta $\iiint_A f(x,y,z)\, dv$, $ds = dx.dy$ eta $dv = dx.dy.dz$ izanik.

3.2-2 *Behe- eta goi-baturak*

Izan bitez A n-dimentsioko tartean definituriko $f(x_1, \dots, x_n)$ funtzioa eta P A-ren partiketa bat, $P = \{I_1, \dots, I_m\}$. Har ditzagun

$$m_k(f) = \inf_{(x_1,\dots,x_n) \in I_k} f(x_1, \dots, x_n) \quad \text{eta} \quad M_k(f) = \sup_{(x_1,\dots,x_n) \in I_k} f(x_1, \dots, x_n) \qquad k = 1, \dots, m$$

2-1.7 Definizioa

$\overline{S}(P) = \sum_{k=1}^{m} M_k(f)\, \mu(I_k)$ baturari goi-batura diogu.

$\underline{S}(P) = \sum_{k=1}^{m} m_k(f)\, \mu(I_k)$ baturari, ordea, behe-batura.

Batzutan $U(P,f)$ eta $L(P,f)$ idazten dira.

2-2.8 Propietateak

a) $f(x_1,\ldots,x_n)$ funtzioa A tartean bornatua bada $\bar{S}(P)$ eta $\underline{S}(P)$ existituko dira

b) Edozein P partiketa eta $(t_1^k,t_2^k,\ldots,t_n^k) \in I_k$ puntuen hautapenetarako

$$\underline{S}(P) \leq \sigma(P) \leq \bar{S}(P)$$

c) Baldin P eta P' A-ren bi partiketa badira non $\mu(P) \geq \mu(P')$ den

$$\underline{S}(P) \leq \underline{S}(P') \quad \text{eta} \quad \bar{S}(P') \leq \bar{S}(P)$$

d) P_1, P_2 edozein bi partiketa izanik $\underline{S}(P_1) \leq \bar{S}(P_2)$

2-2.9 Teorema

$f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ funtzioa A n-dimentsioko tartean Riemann-en zentzuan integragarria da baldin eta soilik baldin:

$$\lim_{\mu(P)\to 0} \underline{S}(P) = \lim_{\mu(P)\to 0} \bar{S}(P) = I = \int_A f(x_1,\ldots,x_n)\, d(x_1,\ldots,x_n)$$

Hau da, behe eta goi-baturek Riemann-en integralaren I baliorantz jotzen badute partiketaren diametroak 0-rantz jotzen duenean.

Integralaren existentzi erizpideak

$f(x_1,\ldots,x_n)$ funtzioak nahitanahiez bornatua izan behar du A tartean.

a) $f(x_1,\ldots,x_n)$ A tartean jarraia bada integragarria izango da

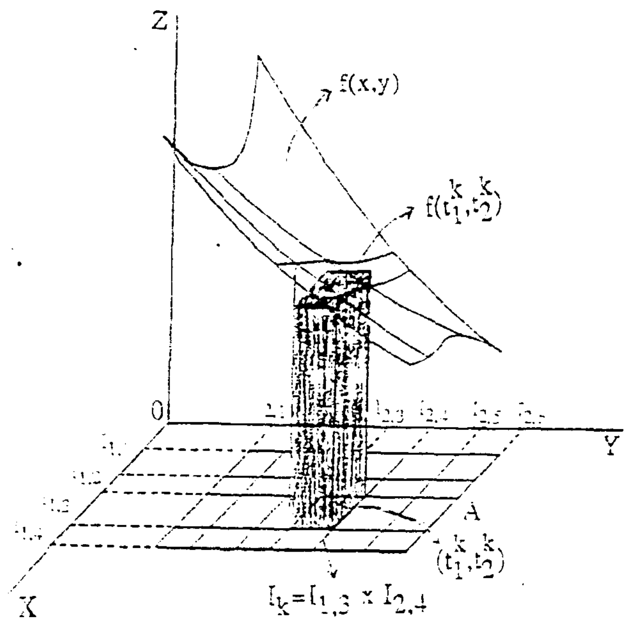
b) $f(x_1,\ldots,x_n)$ funtzioak etenguneak kopuru finituan, edo infinitu zenbakigarrian baditu integragarria izango da.

c) $f(x_1,\ldots,x_n)$ A n-dimentsioko tartearen barruan dagoen 0 neurriko multzo batean etena bada integragarria izango da.

- $A \subset \mathbb{R}^2$ bada, neurria azalera dela esan dugu, beraz 0 neurriko multzoak 0 azalerako multzoak dira, kurbak eta puntuen multzoak. Kasu honetan kurbeei Jordan-en kurba izateko baldintza ere ezarriko diegu, hau da, kurba itxi bakuna izan behar dute.
- $A \subset \mathbb{R}^3$ bada, neurria bolumena dugu eta 0 neurriko multzoak, 0 bolumenekoak alegia, gainazal, kurbak eta puntuak ditugu.

3.2-3 Adierazpen geometrikoa

$\mathbb{R}^2$ eta $\mathbb{R}^3$ multzoen kasuak bakarrik aipatuko ditugu hemen.



$f(x,y) \geq 0 \quad \forall(x,y) \in A$ bada $f(t_1^k, t_2^k)\, \mu(I_k)$ biderkadurak oinarriaren azalera $\mu(I_k)$ eta altuera $z = f(t_1^k, t_2^k)$ dituen prisma baten bolumena adierazten du. Gauza bera gertatzen da $M_k(f)\, \mu(t_k)$ eta $m_k(f)\, \mu(I_k)$ biderkadurarekin goi eta behe-baturetan, kasu hauetan altuerak $M_k(f)$ eta $m_k(f)$ izanik.

Limiteak kalkulatzerakoan, $\mu(P) \to 0$ denean, integrala eta $z = f(x,y)$ gainazalak, $z = 0$ planoak eta sortzailetzat A tartearen muga-kurba duen eta OZ ardatzarekiko paraleloa den gainazal zilindrikoak (gure kasuan prisma) mugatzen duten gorputzaren bolumena bat datoz.

$f(x,y) \leq 0$ denean $I = -V$, V aurreko bolumena izanik

$f(x,y)$ funtzioa A tartean zeinuz aldatzen bada, tartea azpitartetan banatzen da zeinetan funtzioa positiboa edo negatiboa, baina ez biak batera, bait da.

$\mathbb{R}^3$ multzoan beste interpretazio eman diezaiokegu integralari. $f(x,y,z)$ funtzioak $\mu(I_k)$ bolumenari dagokion dentsitatea adierazten du, beraz, $f(t_1^k, t_2^k, t_3^k)\, \mu(I_k)$ biderkadurak $\mu(I_k)$ bolumenaren masa adieraziko du eta integralak A 3-dimentsioko tartearen masa.

$f(x,y,z) \equiv 1$ denean $\iiint_V f(x,y,z)\, dv = \iiint_V dv = V$ bolumena lortzen da.

3.2-4 *Integral anizkoitzen propietateak*

a) Linealtasuna

$$\int_A (\lambda\ f(x_1,\dots,x_n) + \mu\ g(x_1,\dots,x_n))\ d(x_1,\dots,x_n) = \lambda \int_A f(x_1,\dots,x_n)\ d(x_1,\dots,x_n) +$$

$$+ \mu \int_A g(x_1,\dots,x_n)\ d(x_1,\dots,x_n)$$

b) Baldin $A = A_1 \cup A_2$ eta $A_1 \cap A_2 = \emptyset$ bada

$$\int_A f(x_1,..,x_n)\ d(x_1,..,x_n) = \int_{A1} f(x_1,..,x_n)\ d(x_1,..,x_n) + \int_{A2} f(x_1,..,x_n)\ d(x_1,..,x_n)$$

c) $\forall (x_1,\dots,x_n) \in A \qquad f(x_1,\dots,x_n) \le g(x_1,\dots,x_n)$ bada

$$\int_A f(x_1,\dots,x_n)\ d(x_1,\dots,x_n) \le \int_A g(x_1,\dots,x_n)\ d(x_1,\dots,x_n)$$

d) $\forall (x_1,\dots,x_n) \in A \qquad m \le f(x_1,\dots,x_n) \le M$ bada

$$m\ \mu\ (A) \le \int_A f(x_1,\dots,x_n)\ d(x_1,\dots,x_n) \le M\ \mu(A)$$

e) *Batezbestekoaren teorema*

$f(x_1,\dots,x_n)$ funtzioa A tartean jarraia bada $(\xi_1,\dots,\xi_n) \in A$ existitzen da non $I = \int_A f(x_1,\dots,x_n)\ d(x_1,\dots,x_n) = f(\xi_1,\dots,\xi_n)\ \mu(A)$ bait da.

Frogapena:

$f(x_1,\dots,x_n)$ jarraia denez A tartean minimo eta maximoa lortuko ditu, hau da. $\forall (x_1,\dots,x_n) \in A \quad m \le f(x_1,\dots,x_n) \le M$, aurreko propietatea erabiliz

$m\ \mu(A) \le I \le M\ \mu(A) \Rightarrow m \le \dfrac{I}{\mu(A)} \le M \quad f(x_1,\dots,x_n)$ jarraia denez

$$\exists\ (\xi_1,\dots,\xi_n) \in A\ /\quad f(\xi_1,\dots,\xi_n) = \frac{I}{\mu(A)} \Rightarrow$$

$$I = \int_A f(x_1,\dots,x_n)\ d(x_1,\dots,x_n) = f(\xi_1,\dots\xi_n)\ \mu(A)$$

f) $\forall (x_1,..,x_n) \in A \quad | f(x_1,..,x_n) | < M$ bada $\left| \int_A f(x_1,..,x_n)\ d(x_1,..,x_n) \right| < M\ \mu(A)$

3.2-5 Integral anizkoitzen integral berrituen bidezko kalkulua

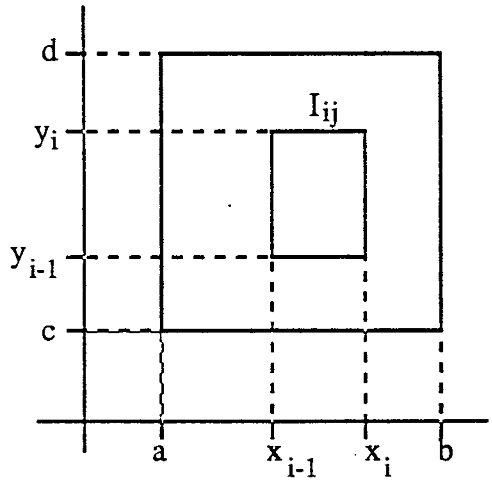
Berriro $\mathbb{R}^2$ eta $\mathbb{R}^3$ multzoetara, inportanteenak alegia, murriztuko gara. Idazkera ere multzo hauetara moldatuko dugu.

- $\mathbb{R}^2$ multzoan

f(x,y) A tartean jarraia suposatuko dugu , $A = [a,b] \times [c,d]$ f(x,y) jarraia denez $I = \int_A f(x,y)\, d(x,y)$ existituko da.

Har dezagun ondoko partiketa:

$$P = \left[\begin{array}{lll} a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b & \Delta x_i = x_i - x_{i-1} & i = 1,\dots,n \\ c = y_0 < y_1 < \dots < y_{m-1} < y_m = d & \Delta y_j = y_j - y_{j-1} & j = 1,\dots,m \end{array}\right.$$



beraz m x n laukizuzen izango dugu, zeinen azalera $\mu(I_{ij}) = \Delta x_i \cdot \Delta y_j$ $i = 1,\dots,n$ eta $j = 1,\dots,m$ bait da.

$$\sigma(P) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} f(t_i,t_j)\ \mu(I_{ij}) \quad (t_i,t_j) \in I_{ij}$$

Kalkula dezagun orain $\lim\limits_{\mu(P)\to 0} \sigma(P)$

$\mu(P) \to 0 \iff \max\limits_{i,j} \mu(I_{ij}) \to 0 \iff$

$\iff \mu(I_{ij}) \to 0 \iff \Delta x_i \cdot \Delta y_i \to 0$ azkenekoak erabiliko ditugu.

$$I = \lim_{\mu(P)\to 0} \sigma(P) = \lim_{\substack{\Delta x_i \to 0 \\ \Delta y_j \to 0}} \sigma(P) = \lim_{\substack{\Delta x_i \to 0 \\ \Delta y_j \to 0}} \left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} f(t_i,t_j)\ \Delta x_i\ \Delta y_j \right) =$$

$$\stackrel{(1)}{=} \lim_{\substack{\Delta x_i \to 0 \\ \Delta y_j \to 0}} \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i \left(\sum_{j=1}^{m} f(t_i,t_j)\ \Delta y_j \right) \stackrel{(2)}{=} \lim_{\Delta x_i \to 0} \left[\sum_{i=1}^{n} \Delta x_i \ (\lim_{\Delta y_j \to 0} \sum_{j=1}^{m} f(t_i,t_j)\ \Delta y_j) \right] =$$

$$\stackrel{(3)}{=} \lim_{\Delta x_i \to 0} \left[\sum_{i=1}^{n} \Delta x_i \left(\int_c^d f(t_i,y)\, dy \right) \right] \stackrel{(4)}{=} \lim_{\Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} g(t_i)\ \Delta x_i \stackrel{(5)}{=} \int_a^b g(x)\, dx =$$

$$\stackrel{(6)}{=} \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\, dy \right) dx$$

(1) eta (2) Δx_i ez dagoelako j-ren menpean

(3), (5) integral mugatuaren definizioa ((3)-an t_i-ren menpean dago)

(4), (6) $g(t_i) = \int_c^d f(t_i,y)\, dy$ izanik

Lehenengo pausuan Δx_i banandu beharrean Δy_i bananduz gero beste integral hau,

$\int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\, dx \right) dy$, lortuko genuke

- $\mathbb{R}^3$ multzoan

$f(x,y,z)$ A tartean jarraia da, $A = [a,b] \times [c,d] \times [e,f]$

Kasu honetan eta garapen bera eginez zera lortzen da

$$I = \int_A f(x,y,z)\, d(x,y,z) = \int_a^b \int_c^d \int_e^f f(x,y,z)\, dz\, dy\, dx$$

Hemen aztertu ditugun eremuak 2 eta 3-dimentsioko tarteak izan dira. Definizio-eremua tartea ez denean emaitza berbera lortzen da ondorengo urratsak jarraituz:

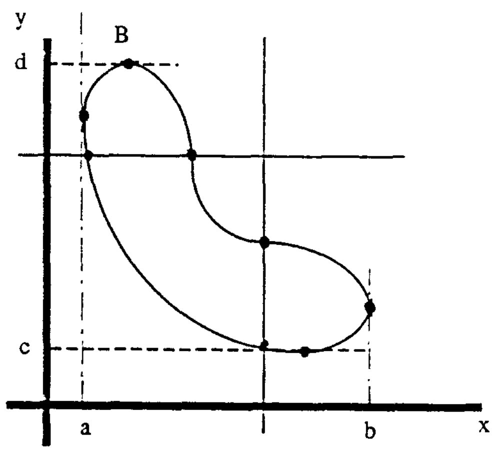
- Definizio-eremua eremu erregularretan zatitu egin behar da.

Eremu bat erregularra da baldin ardatz bakoitzarekiko zuzen paralelo bat eremuko puntu batetik pasatzen bada eta eremuaren muga bi puntutik bakarrik zeharkatzen badu.

Hau gertatzen denean eremuaren muga bi funtzioren bidez adieraz daiteke bi eratan

$y = \varphi_1(x)$, $y = \varphi_2(x)$ $x \in [a,b]$ edo

$x = \psi_1(y)$, $x = \psi_2(y)$ $y \in [c,d]$



Honek x eta y aldagaien mugak ondoko hauek direla esan nahi du

$a \le x \le b \qquad \varphi_1(x) \le y \le \varphi_2(x)$ edo

$c \le y \le d \qquad \psi_1(y) \le x \le \psi_2(y)$

Hiru edo aldagai gehiagorekin gauza bera gertatzen da, hots, eremuaren muga aldagai bat besteen funtzioan idatziz adieraz daitekeela $x_j = \varphi_1(x_1,...,\wedge,...,x_n)$ eta $x_j = \varphi_2(x_1,...,\wedge,...,x_n)$ esaterako. Bi funtzio hauek n-1 dimentsioko muga amankomunean dute, muga hau ere erregularra da eta berriro bi funtzioren bidez adieraz daiteke. Prozesu honi jarraituz aldagaien aldakuntza-tarteak lortuko ditugu

$x_n \in [\varphi_1(x_1,...,x_{n-1}),\varphi_2(x_1,...,x_{n-1})]$

$x_{n-1} \in [\psi_1(x_1,...,x_{n-2}),\psi_2(x_1,...,x_{n-2})]$

$x_3 \in [\varnothing_1(x_1, x_2),\varnothing_2(x_1, x_2)]$

$x_2 \in [\rho_1(x_1),\rho_2(x_1)]$

$x_1 \in [a,b]$

- Eremu erregular bakoitza A n-dimentsioko tartean sartzen da

- A tartean $f^*(x_1,...,x_n) = \begin{cases} f(x_1,...,x_n) & (x_1,...,x_n) \in B \\ 0 & (x_1,...,x_n) \notin B \end{cases}$ funtzioa

definitzen da eta bertan bere integrala kalkulatzen da:

$$I = \iint_B f(x,y)\,ds \overset{(1)}{=} \iint_A f^*(x,y)\,ds \overset{(2)}{=} \int_a^b\int_c^d f^*(x,y)\,dy\,dx \overset{(3)}{=} \int_a^b g(x)\,dx$$

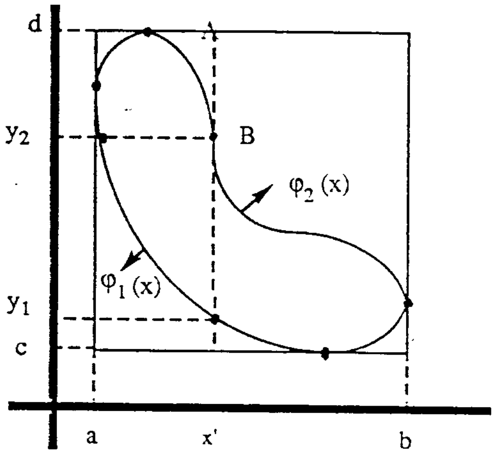
(1) 0 bakarrik sartu dugu A-B zatian

(2) A tartea delako $A = [a,b] \times [c,d]$

(3) $g(x) = \int_c^d f^*(x,y)\,dy$ integral hau x-en menpean dagoelako

$$g(x') = \int_c^d f^*(x',y)\,dy = \int_c^{y_1} f^*(x',y)\,dy +$$

$$+ \int_{y_1}^{y_2} f^*(x',y)\,dy + \int_{y_2}^{d} f^*(x',y)\,dy \quad \text{(x' finkoa da)}$$



$$\left.\begin{array}{l} y \in [c,y_1] \;\Rightarrow\; (x',y) \notin B \;\Rightarrow\; f^*(x',y) = 0 \\ y \in [y_2,d] \;\Rightarrow\; (x',y) \notin B \;\Rightarrow\; f^*(x',y) = 0 \end{array}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad g(x') = \int_{y_1}^{y_2} f^*(x',y)\,dy = \int_{\varphi_1(x')}^{\varphi_2(x')} f(x',y)\,dy \qquad y_1 = \varphi_1(x') \quad \text{eta} \quad y_2 = \varphi_2(x') \quad \text{izanik.}$$

Beraz azken berdintza hau $\quad I = \int_a^b g(x)\,dx \quad$ berdintzan ordezkatuz

$$I = \int_a^b \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy\,dx$$

Hiru aldagaiarekin prozesu berbera egin behar da:

$$I = \iiint_B f(x,y,z)\,dv = \iiint_A f^*(x,y,z)\,dv = \int_a^b \int_c^d \int_e^f f^*(x,y,z)\,dz\,dy\,dx =$$

$$= \int_a^b \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz\,dy\,dx$$

2-5.10 Adibidea

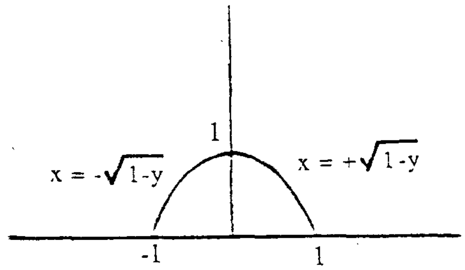
Determina ditzagun ondoko eremuen mugak

- $B = \{y = 0,\ y = 1 - x^2\}$ eremu erregularra da

$$0 \le y \le 1 \quad \text{eta} \quad -\sqrt{1-y} \le x \le \sqrt{1-y} \qquad \text{edo}$$

$$-1 \le x \le 1 \quad \text{eta} \quad 0 \le y \le 1 - x^2$$

$$I = \int_0^1 \left(\int_{-\sqrt{1-y}}^{\sqrt{1-y}} f(x,y)\,dx \right) dy \qquad \text{edo}$$



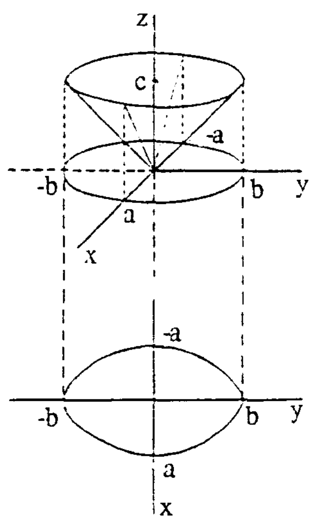
$$I = \int_{-1}^{1} \left(\int_0^{1-x^2} f(x,y)\,dy \right) dx$$

- $B = \left\{ \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = \dfrac{z^2}{c^2} \quad , \ z = c \right\}$

$$\left.\begin{array}{l} z = c \\ \\ z = c\sqrt{\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2}} \end{array}\right\} (z = c) \quad \left.\begin{array}{l} y = b\sqrt{1 - \dfrac{x^2}{a^2}} \\ \\ y = -b\sqrt{1 - \dfrac{x^2}{a^2}} \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} x = a \\ \\ x = -a \end{array}\right\}$$

hauek mugen ekuazioak dira eta integrala

$$I = \int_{-a}^{a} \int_{-b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}^{b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}} \int_{c\sqrt{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}}}^{c} f(x,y,z)\,dz\,dy\,dx$$



3.3 ALDAGAI-ALDAKETA INTEGRAL ANIZKOITZETAN

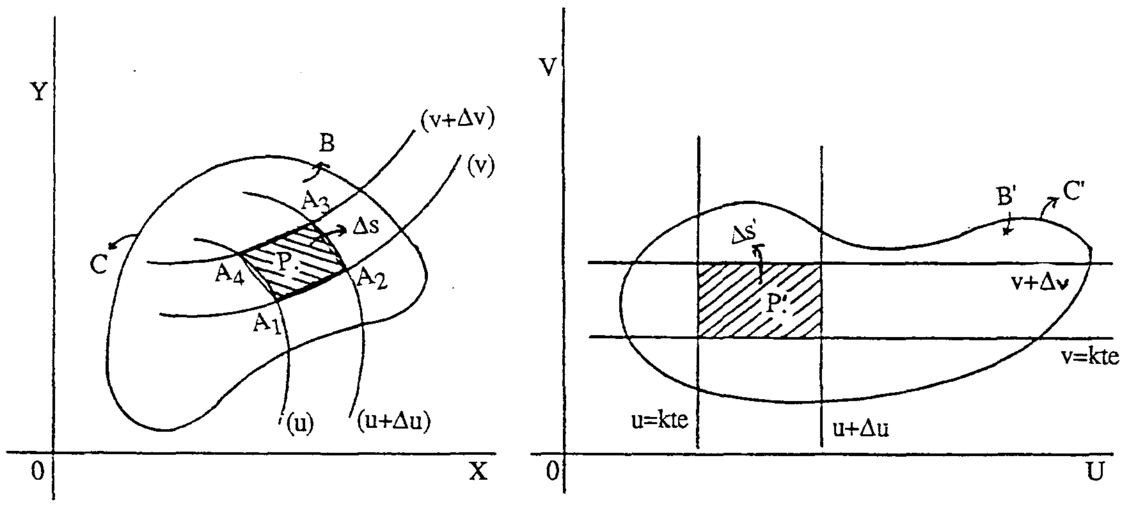
$\mathbb{R}^2$ eta $\mathbb{R}^3$ kasuak bakarrik aipatuko ditugu, $\mathbb{R}^2$-koa bakarrik garatuz.

Integral bikoitzak kalkulatzean zuzenean kalkulatzea zaila izatea gerta daiteke; arazo hau aldagai-aldaketen bidez konpon daitekeelakoan aldaketa hau nola egin behar den aztertuko dugu.

$\iint_B f(x,y)\, ds$ integrala kalkulatu nahi da, non $f(x,y)$ funtzioa C kurba batek mugatutako erèmu itxian jarraia bait da eta

$x = \varphi(u,v)$	aldagai-aldaketa egin nahi dugu φ eta ψ funtzioak B' eremuan
$y = \psi(u,v)$	uniformeak, jarraiak eta deribatu partzial jarraidunak izanik.

B' eremua B eremutik aipatutako aldaketaren bidez lortzen da $P = (x,y) \text{<-->} (u,v) = P'$, C kurba aldaketaren bidez C' kurba itxi bihurtzen da



B eta B' eremuek ez dute forma bera izan behar.

Har dezagun partiketa bana B eta B' eremuetan. B' eremuan $u = kte$ zuzenari B eremuan $\{x = \varphi(u,v),\ y = \psi(u,v)\}$ kurba dagokio baita $v = kte$ zuzenari ere beste kurba bat dagokio.

B' eremuan hartutako laukizuzenen partiketa bat B eremuan kurbez osatutako karratula bihurtuko da.

Kontsidera dezagun OUV planoan laukizuzen baten $\Delta s' = \Delta u . \Delta v$ azalera, honi OXY planoan dagokion Δs azalera orokorrean desberdina da. Batura integralean $\Delta s'$ eta Δs azaltzen direnez bion arteko erlazioa ezagutu beharko dugu.

$z = f(x,y) = f(\varphi(u,v),\psi(u,v)) = f^*(u,v)$, beti $\iint_B f(x,y)\, ds = \iint_{B'} f^*(u,v)\, ds'$ izango dugu integrazio-aldagaiak mutuak direlako.

Δs azalera kalkulatzeko A_1, A_2, A_3, A_4 erpinetatik abiatuko gara

$$A_1 \equiv (x_1,y_1) \left| \begin{array}{l} x_1 = \varphi(u,v) \\ y_1 = \psi(u,v) \end{array} \right. ; \qquad A_2 \equiv (x_2,y_2) \left| \begin{array}{l} x_2 = \varphi(u+\Delta u, v)) \\ y_2 = \psi(u+\Delta u, v) \end{array} \right.$$

$$A_3 \equiv (x_3,y_3) \left| \begin{array}{l} x_3 = \varphi(u+\Delta u, v+\Delta v) \\ y_3 = \psi(u+\Delta u, v+\Delta v) \end{array} \right. ; \qquad A_4 \equiv (x_4, y_4) \left| \begin{array}{l} x_4 = \varphi\,(u,v+\Delta v) \\ y_4 = \psi\,(u,v+\Delta v) \end{array} \right.$$

A_1A_2 , $A_2\,A_3$, A_3A_4 , A_4A_1 kurba-arkuak zuzen paraleloez hurbilduko ditugu eta funtzioen gehikuntzak hauen diferentzialez ordezkatuko, ordena handiagoko infinitesimoak mezpretxatuz (1. ordenakoak gordez).

$$\begin{array}{l|l|l|l} x_1 = \varphi(u,v)\ ; & x_2 = \varphi(u,v) + \dfrac{\partial \varphi}{\partial u}\Delta u ; & x_3 = \varphi(u,v) + \dfrac{\partial \varphi}{\partial u}\Delta u + \dfrac{\partial \varphi}{\partial v}\Delta v ; & x_4 = \varphi(u,v) + \dfrac{\partial \varphi}{\partial v}\Delta v \\ y_1 = \psi(u,v) & y_2 = \psi(u,v) + \dfrac{\partial \psi}{\partial u}\Delta u & y_3 = \psi(u,v) + \dfrac{\partial \psi}{\partial u}\Delta u + \dfrac{\partial \psi}{\partial v}\Delta v & y_4 = \psi(u,v) + \dfrac{\partial \psi}{\partial v}\Delta v \end{array}$$

Δs azalera kalkulatzeko kontsidera ditzagun $\overrightarrow{A_1A_2}$ eta $\overrightarrow{A_2\,A_3}$ bektoreak eta bion arteko biderkadura bektoriala

$$\overrightarrow{A_1A_2} = (x_2-x_1, y_2-y_1) = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u}\Delta u, \frac{\partial \psi}{\partial u}\Delta u \right) = \vec{a} \qquad \Delta s = |\vec{a} \wedge \vec{b}| = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \dfrac{\partial \varphi}{\partial u}\Delta u & \dfrac{\partial \psi}{\partial u}\Delta u & 0 \\ \dfrac{\partial \varphi}{\partial v}\Delta v & \dfrac{\partial \psi}{\partial v}\Delta v & 0 \end{vmatrix} =$$

$$\overrightarrow{A_2A_3} = (x_3-x_2, y_3-y_2) = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial v}\Delta u, \frac{\partial \psi}{\partial v}\Delta v \right) = \vec{b}$$

$$= \left| \frac{\partial \varphi}{\partial u}\Delta u \frac{\partial \psi}{\partial v}\Delta v - \frac{\partial \varphi}{\partial v}\Delta v \frac{\partial \psi}{\partial u}\Delta u \right| = \left| \frac{\partial \varphi}{\partial u}\frac{\partial \psi}{\partial v} - \frac{\partial \varphi}{\partial v}\frac{\partial \psi}{\partial u} \right| \Delta u \,.\, \Delta v =$$

$$= \begin{vmatrix} \dfrac{\partial \varphi}{\partial u} & \dfrac{\partial \varphi}{\partial v} \\ \dfrac{\partial \psi}{\partial u} & \dfrac{\partial \psi}{\partial v} \end{vmatrix} \Delta u \,.\, \Delta v = |J|\,\Delta s'$$

non $|J|$ jacobiarraren balio absolutua bait da

beraz $\Delta s = |J|\,\Delta s'$, berdintza hau batura integralean ordezkatuz

$\sigma(P) = \sum_{B} f(x,y)\ \Delta s = \sum_{B'} f^*(u,v)\ |J|\ \Delta s'$ eta partiketaren diametroa 0-rantz joeraziz $\Delta s,\ \Delta s' \to 0$

$$I = \iint_B f(x,y)\ ds = \iint_{B'} f^*(u,v)\ |J|\ ds'$$

Batzutan gehiago zehazteko asmoz $|J| = \left|\dfrac{\partial(\varphi,\psi)}{\partial(u,v)}\right|$ idazten da.

Integral hirukoitzekin prozesu berbera erabiltzen da, hipotesi berberen menpean.

$x = \varphi(u,v,w)$	aldaketa bada , φ, ψ, Φ funtzioak B' eremuan
$y = \psi(u,v,w)$	uniformeak, jarraiak eta deribatu partzial jarraidunak
$z = \Phi(u,v,w)$	izanik

$$I = \iiint_B f(x,y,z)\ dx\ dy\ dz = \iiint_{B'} f^*(u,v,w)\ |J|\ du\ dv\ dw$$

$f^*(u,v,w) = f(\varphi(u,v,w),\psi(u,v,w),\Phi(u,v,w))$ izanik

eta $|J| = \left|\dfrac{\partial(\varphi,\psi,\Phi)}{\partial(u,v,w)}\right| = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial\varphi}{\partial u} & \dfrac{\partial\varphi}{\partial v} & \dfrac{\partial\varphi}{\partial w} \\ \dfrac{\partial\psi}{\partial u} & \dfrac{\partial\psi}{\partial v} & \dfrac{\partial\psi}{\partial w} \\ \dfrac{\partial\Phi}{\partial u} & \dfrac{\partial\Phi}{\partial v} & \dfrac{\partial\Phi}{\partial w} \end{vmatrix}$ delarik

Gaiaren hasieran, koordenatu-sistemak aztertzean, berauek aldagai-aldaketa bezala onar zitezkeela esan genuen, bide batez zegozkien jacobiarrak kalkulatu genituen. Orain bi aldagai-aldaketa gehiago aipatuko dugu, koordenatu polar orokortu eta esferiko orokortuei dagozkienak hain zuzen ere.

(A) Koordenatu polar orokortuak

$\left.\begin{array}{l} x = a\,r\cos\varphi \\ y = b\,r\sin\varphi \end{array}\right\}$ ekuazioen bidez adieraz daitezkeenak dira, a,b=kte.

$$J = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial\varphi} \\ \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial\varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a\cos\varphi & -a\,r\sin\varphi \\ b\sin\varphi & -a\,r\cos\varphi \end{vmatrix} = a\,b\,r\cos^2\varphi + a\,b\,r\sin^2\varphi = a\,b\,r$$

beraz $|J| = |abr|$ eta $ds = |abr|\,ds'$

$r \in [0,\infty)$ eta $\varphi \in [0, 2\pi]$ aldakuntza-tarteak dira

(B) Koordenatu esferiko orokortuak

$x = a\,r\cos\theta\cos\varphi$ ekuazioen bidez adierazten dira a,b,c=kte.

$y = b\,r\sin\theta\cos\varphi$ eta dagokion jacobiarra:

$z = c\,r\sin\varphi$

$$J = \begin{vmatrix} a\cos\theta\cos\varphi & -a\,r\sin\theta\cos\varphi & -a\,r\cos\theta\sin\varphi \\ b\sin\theta\cos\varphi & b\,r\cos\theta\cos\varphi & -b\,r\sin\theta\sin\varphi \\ c\sin\varphi & 0 & c\,r\cos\varphi \end{vmatrix} = abc\,r^2\cos\varphi$$

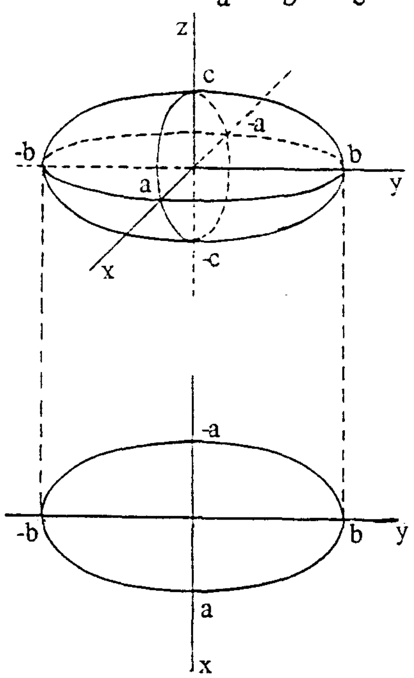
eta $|J| = |abc\,r^2\cos\varphi|$ eta $dv = |abc\,r^2\cos\varphi|\,dv'$

$r \in [0,\infty)$ $\theta \in [0, 2\pi]$ $\varphi \in [0, \pi]$ eremua da.

Bukatzeko adibide batzu egingo dugu:

3.11 Adibidea

Kalkula dezagun $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$ elipsoideak mugatzen duen bolumena



Aldagai-aldaketarik egokiena koordenatu esferiko orokortuetara pasatzen dena da

$x = a\,r\cos\theta\cos\varphi$ | $|J| = |abc\,r^2\cos\varphi|$

$y = b\,r\sin\theta\cos\varphi$ | jacobiarra da

$z = c\,r\sin\varphi$ | a,b,c>o

$0 \le r \le 1$

$0 \le \theta \le 2\pi$

$-\dfrac{\pi}{2} \le \varphi \le \dfrac{\pi}{2}$

$$V = \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} abc\, r^2 \cos \varphi \, d\, \varphi \, d\, \theta \, dr = 2\, \pi\, abc \int_0^1 r^2 \,(\sin \varphi \, |_{-\pi/2}^{\pi/2}\,)\, dr =$$

$$= 2\, \pi\, abc \int_0^1 2\, r^2\, dr \;\Rightarrow\; V = 4\, \pi\, abc \left(\frac{r^3}{3} \, |_0^1 \right) = \frac{4}{3}\, abc\, \pi$$

4. GAIA
INTEGRAL INPROPIOAK ETA PARAMETRO BATEN MENPEKO INTEGRALAK

4.1 INTEGRAL INPROPIOAK

Tarte batetan definituriko funtzio bornegabea edo tarte infinitu batetan definituriko funtzioa badugu, ez dago Riemann-en zentzuan haren integragarritasunaz mintzatzerik. Izan ere, integrala funtzio bornatuetarako eta tarte finituetarako definitu genuen.

Bi kasu hauetan integral kontzeptua hedatuko dugu limiteen bidez. Integral hauei integral inpropio esan ohi zaie.

A) 1. MOTAKO INTEGRAL INPROPIOAK

Mota honetan integrazio-tarte infinitua duten integralak daude:

A.1) $$\int_a^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{b\to\infty} \int_a^{b} f(x)\,dx$$

A.2) $$\int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx = \lim_{b\to-\infty} \int_b^{a} f(x)\,dx$$

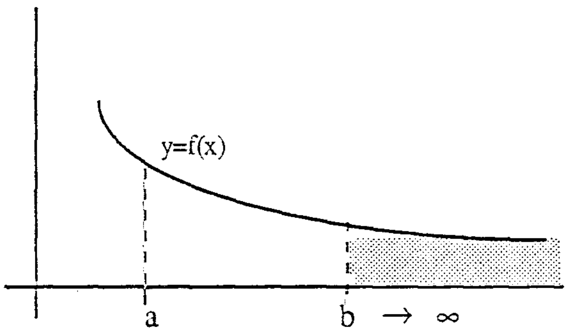
A.3) $$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx + \int_a^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{b\to-\infty} \int_b^{a} f(x)\,dx + \lim_{c\to\infty} \int_a^{c} f(x)\,dx$$

1.1 Definizioa

Aurreko hiru kasuetan limitea existitzen denean, (hots, finitua denean) integral inpropioa existitzen edo konbergentea dela esaten da. Limitea $\pm\infty$ bada edo ez bada existitzen integral inpropioa dibergentea dela edo ez dela existitzen esaten da.

A.3) kasuan bi limiteek existitu behar dute

Adierazpen geometrikoa



Oraingoan kalkulatu nahi dugun azalera $y = f(x)$ kurbak eta $x = a$ eta $y = 0$ zuzenek mugatutakoa da. Jo dezagun [a,b] tartean f(x) funtzioaren jatorrizko funtzio bat aurki dezakegula, hau da, $\int f(x)\,dx = F(x) + K$ idatz dezakegula. Kasu horretan

$$\int_a^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{b\to\infty} \int_a^{b} f(x)\,dx = \lim_{b\to\infty} (F(b) - F(a)).$$ Honexegatik limite honen balioak integral inpropioa existituko den ala ez esango digu.

Gauza bera esan liteke $\int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx$ eta $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$ integral inpropioez $\lim_{b\to-\infty} F(b)$ eta $\{\lim_{c\to\infty} F(c),\ \lim_{b\to-\infty} F(b)\}$, hurrenez hurren, limiteekiko.

B) 2. MOTAKO INTEGRAL INPROPIOAK

Mota honetan integrakizun bezala funtzio bornegabea duten integralak sartzen dira

B.1) $$\int_a^{b} f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx$$ [a,b) tartean

B.2) $$\int_a^{b} f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)\,dx$$ (a,b] tartean

B.3) $$\int_a^{b} f(x)\,dx = \lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \eta\to 0}} \int_{a+\eta}^{b-\varepsilon} f(x)\,dx$$ (a,b) tartean

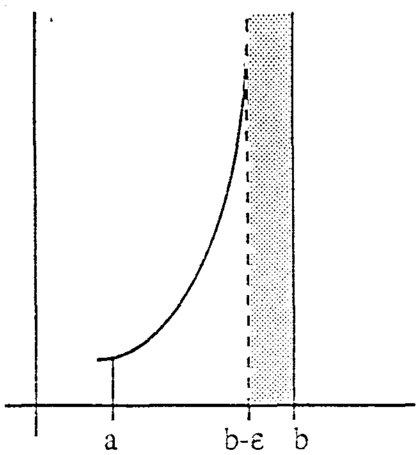
Kasu honetan funtzioa tarteko muturretan bornatua ez dela suposatu dugu. B.3) kasuan bi limite, ε eta η-rekiko alegia, agertzen dira, biak elkarren independenteak direlarik.

1.2 Definizioa

Aurreko hiru kasuetan, B.1), B.2) eta B.3), limiteak existitu eta finituak badira integral inpropioa existitu edo konbergentea dela esango dugu. Bestelako kasuetan ez dela existitzen edo dibergentea dela.

B.3) kasuan bi limiteek existitu behar dute.

Adierazpen geometrikoa



$x = b$ zuzena $y = f(x)$ kurbaren asintota da, beste kasuetan ere horrelako zerbait gertatzen da.

Eman dezagun $F(x)$, $f(x)$-en jatorrizko funtzioa dela $[a,b)$ tartean, hau da,

$$\int f(x)\,dx = F(x) + K\ ,\quad \int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0}(F(b-\varepsilon) - F(a)),$$

eta hemendik integral inpropioaren existentzia eta limitearena bat datozela. Gauza bera esan daiteke beste bi kasuetan.

$f(x)$ funtzioa bornagabea $c \in (a,b)$ puntuan balitz, $[a,c)$ eta $(c,b]$ azpitarteak hartuko genituzke eta hau kopuru finitu aldiz gertatuz gero hainbat azpitarte kontsideratuko genuke.

1.3 Adibidea

$$-\int_0^{\infty}\frac{dx}{1+x^2}$$

1. Motako integral inpropioa da, A.1) hain zuzen ere.

$$\lim_{b\to\infty}\int_0^b \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{b\to\infty}(\text{arc tg } x\,|_0^b) = \lim_{b\to\infty}(\text{arc tg } b - \text{arc tg } 0) = \lim_{b\to\infty}\text{arc tg } b = \frac{\pi}{2}$$

limitea existitu eta finitua denez integral inpropioa konbergentea da.

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}}$$

2. motako integral inpropioa, B.1) hain zuzen

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_0^{1-\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = \lim_{\varepsilon \to 0} \left(-2\sqrt{1-x}\,\Big|_0^{1-\varepsilon}\right) = \lim_{\varepsilon \to 0} \left(-2\sqrt{\varepsilon} + 2\right) = 2\,,$$

honetan ere limitea existitu eta finitua da, beraz integral inpropioa konbergentea da.

4.2 KONBERGENTZIAREN ANALISIA

Kasu askotan integral inpropioa konbergente ala dibergentea den bakarrik interesatzen zaigu jakitea, ez dugu, beraz, zertan integrala kalkulatu behar. Horretarako izaera ezaguna duten beste integralekin konparatuko dugu.

A) 1. MOTAKO INTEGRAL INPROPIOAK

2.4 Definizioa

Bi integral inpropio izaera berekoak direla esango dugu biak batera konbergenteak edo dibergenteak direnean.

2.5 Propietatea

$\int_a^\infty f(x)\,dx$ integral inpropioaren izaera ez dago "a" behe-mugaren menpean

Frogapena:

$a < a'$ dela suposatuz $\displaystyle\int_a^\infty f(x)\,dx = \int_a^{a'} f(x)\,dx + \int_{a'}^\infty f(x)\,dx$

$\displaystyle\int_a^{a'} f(x)\,dx$ konstantea da, finitua, beraz $\displaystyle\int_a^\infty f(x)\,dx$ eta $\displaystyle\int_{a'}^\infty f(x)\,dx$

integral inpropioek izaera berbera dute.

2.6 Propietatea

$\forall\, K \neq 0 \quad \int_a^{\infty} f(x)\,dx \quad \text{eta} \quad \int_a^{\infty} K\,f(x)\,dx$ integral inpropioek izaera berbera dute.

2.7 Teorema

Baldin $\forall\, x \in [a,\infty) \quad 0 \leq f(x) \leq g(x)$ eta $\int_a^{\infty} g(x)\,dx$ konbergentea da.

$\int_a^{\infty} f(x)\,dx$ integrala ere konbergentea da.

Frogapena:

$0 \leq f(x) \leq g(x)$ bada $\quad 0 \leq \int_a^{b} f(x)\,dx \leq \int_a^{b} g(x)\,dx \qquad \forall\, b \in [a,\infty)$

$b \to \infty$ joeraziz $\quad 0 \leq \lim\limits_{b\to\infty} \int_a^{b} f(x)\,dx \leq \lim\limits_{b\to\infty} \int_a^{b} g(x)\,dx = K$ (finitua

konbergentea delako). Alde batetik $\int_a^{b} f(x)\,dx$ b-ren funtzio gorakorra da, beste aldetik bornatua da, beraz limitea existitzen da eta finitua da.

2.8 Teorema

$\forall\, x \in [a,\infty) \quad 0 \leq f(x) \leq g(x)$ eta $\int_a^{\infty} f(x)\,dx$ dibergentea bada $\int_a^{\infty} g(x)\,dx$ dibergentea da.

Frogapena:

$\int_a^{\infty} g(x)\,dx$ integral konbergentea balitz, 2.7 Teorema aplikatuz $\int_a^{\infty} f(x)\,dx$ konbergentea litzateke, baina dibergentea denez besteak ere dibergentea izan behar du.

Konbergentzi erizpide orokorra

Funtzio positibo baten integral inpropioa konbergentea (dibergentea) da baldin majoratzaile (minoratzaile) batena konbergentea (dibergentea) bada.

Normalki $I_\alpha = \int_1^\infty \frac{dx}{x^\alpha}$ integrala hartzen da konparatzeko

$$I_\alpha = \int_1^\infty \frac{dx}{x^\alpha} \quad \begin{cases} \alpha > 1 & \text{denean konbergentea da} \\ \alpha \leq 1 & \text{denean dibergentea da} \end{cases}$$

2.9 Korolarioa

Izan bitez $\forall x \in [a,\infty)$ $0 \leq f(x)$ eta $0 < g(x)$ funtzioak. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = K$ existitzen eta finitua bada:

a) baldin $\int_a^\infty g(x)\,dx$ konbergentea eta $K \in [0,\infty)$ badira $\int_a^\infty f(x)\,dx$ konbergentea da

b) baldin $\int_a^\infty g(x)\,dx$ dibergentea eta $K \in [0,\infty)$ badira $\int_a^\infty f(x)\,dx$ dibergentea da

Praktikan $g(x) = \frac{1}{x^\alpha}$ funtzioa hartzen da eta $\lim\limits_{x\to\infty} x^\alpha f(x)$ finitu baina ez zero, egiten duen α bilatzen da, beraz orain:

$K \in [0,\infty)$ eta $\alpha > 1$ bada $\int_a^\infty f(x)\,dx$ konbergentea izango da eta

$K \in (0,\infty)$ eta $\alpha \leq 1$ bada $\int_a^\infty f(x)\,dx$ dibergentea

2.10 Teorema

Baldin $\displaystyle\int_a^\infty |f(x)|\,dx$ konbergentea bada $\displaystyle\int_a^\infty f(x)\,dx$ ere konbergentea da

Frogapena:

$$\int_a^\infty f(x)\,dx = \int_a^\infty (f(x) + |f(x)| - |f(x)|)\,dx = \underbrace{\int_a^\infty |f(x)|\,dx}_{I_1} - \underbrace{\int_a^\infty (|f(x)| - f(x))\,dx}_{I_2}$$

I_1 hipotesiz konbergentea da eta I_2 integralak,

$0 \le |f(x)| - f(x) \le 2\,|f(x)|$ denez, integral majoratzaile konbergentea onartzen du

$2\displaystyle\int_a^\infty |f(x)|\,dx$ hain zuzen, beraz I_2 ere konbergentea da eta hortik $\displaystyle\int_a^\infty f(x)\,dx$

integrala ere konbergentea da.

2.11 Definizioa

Baldin $\displaystyle\int_a^\infty |f(x)|\,dx$ konbergentea bada $\displaystyle\int_a^\infty f(x)\,dx$ absolutuki konbergentea dela esan ohi da.

2.12 Adibidea

- Azter dezagun $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{x^2(1+e^x)}$ integralaren izaera

$\displaystyle\frac{1}{x^2(1+e^x)} < \frac{1}{x^2}$ $\forall x > 1$, eta $\alpha = 2 > 1$ denez, $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx$ konbergentea da konparaziozko erizpidea erabiliz $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2(1+e^x)} dx$ ere konbergentea da

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx = \lim_{b\to\infty} \int_1^{b} \frac{1}{x^2} dx = \lim_{b\to\infty} \left(\frac{-1}{x} \Big|_1^b \right) = \lim_{b\to\infty} \left(\frac{-1}{b} + 1 \right) = 1$$

eta bere balioa 1 baino txikiagoa da.

- Azter dezagun $\int_1^{\infty} \frac{x+1}{\sqrt{x^3}} dx$ integralaren izaera

$$\frac{x+1}{\sqrt{x^3}} > \frac{x}{\sqrt{x^3}} = \frac{1}{x^{1/2}} \quad \forall\, x > 1 \;, \quad \alpha = \frac{1}{2} < 1 \text{ denez } \int_1^{\infty} \frac{1}{x^{1/2}} dx$$

dibergentea da, beraz $\int_1^{\infty} \frac{x+1}{\sqrt{x^3}} dx$ integrala ere dibergentea da.

- $\int_1^{\infty} \frac{\sin x}{x^3} dx$ integralaren izaera aztertuko dugu.

$\sin x$ zeinu aldakorreko funtzioa da, horrexegatik 2.10 teorema erabiliko dugu.

$$\left| \frac{\sin x}{x^3} \right| \le \left| \frac{1}{x^3} \right| \qquad x > 1 \text{ denez } \left| \frac{\sin x}{x^3} \right| \le \frac{1}{x^3}$$

Kasu honetan $\alpha = 3 > 1$ da eta $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^3}$ konbergentea,

bera $\int_1^{\infty} \left| \frac{\sin x}{x^3} \right| dx$ era konbergentea eta $\int_1^{\infty} \frac{\sin x}{x^3} dx$ absolutuki konbergentea.

B) 2. MOTAKO INTEGRAL INPROPIOAK

Mota honetarako ez ditugu teoremak frogatuko, horrez gain [a,b) tartean bakarrik arituko gara, baina (a,b] eta (a,b) tarteetarako ere balio du.

2.13 Proposizioa

$\int_a^b f(x)\,dx$ integral inpropioaren izaera ez dago a behe-mugaren menpean.

2.14 Proposizioa

$\forall K \neq 0 \quad \int_a^b f(x)\,dx$ eta $\int_a^b Kf(x)\,dx$ integral inpropioak izaera berekoak dira.

2.15 Teorema

Baldin f(x) eta g(x) funtzioak b puntuan bornegabeak badira eta

$\forall x \in [a,b) \quad 0 \leq f(x) \leq g(x)$ bada $\int_a^b g(x)\,dx$ konbergentea bada $\int_a^b f(x)\,dx$ konbergentea izango da. Eta $\int_a^b f(x)\,dx$ dibergentea bada $\int_a^b g(x)\,dx$ ere dibergentea izango da.

Konbergentzi erizpide orokorra

Funtzio positibo baten integral inpropioa konbergentea (dibergentea) da funtzio majoratzaile (minoratzaile) batena konbergentea (dibergentea) bada.

Normalki ondoko integrala erabiltzen da konparatzeko:

$$J_\alpha = \int_a^b \frac{dx}{(b-x)^\alpha}$$

$\alpha < 1$ denean konbergentea da

$\alpha \geq 1$ denean dibergentea da

[B.2) $\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^\alpha}$ erabiltzen da.]

2.16 Korolarioa

Izan bitez $0 \leq f(x)$, $0 < g(x)$ $\forall\, x \in [a,b)$ funtzioak, $\lim\limits_{x \to b^-} \dfrac{f(x)}{g(x)} = K$ existitzen eta finitua bada:

a) baldin $\displaystyle\int_a^b g(x)\,dx$ konbergentea eta $K \in [0,\infty)$ bada $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ konbergentea da.

b) baldin $\displaystyle\int_a^b g(x)\,dx$ dibergentea eta $K \in (0,\infty)$ bada $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ ere dibergentea da.

Praktikan $g(x) = \dfrac{1}{(b-x)^{\alpha}}$ $\left(\text{B.2) } \dfrac{1}{(x-a)^{\alpha}}\right)$ funtzioa hartzen da eta $\lim\limits_{x \to b^-} (b-x)^{\alpha} f(x)$ finitu eta ez zero egiten duen α bilatzen da,

$K \in [0,\infty)$ eta $\alpha < 1$ badira $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ konbergentea izango da eta

$K \in (0,\infty)$ eta $\alpha \geq 1$ badira dibergentea.

2.17 Teorema

Baldin $\displaystyle\int_a^b |\, f(x)\,|\,dx$ konbergentea bada $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ ere konbergentea da.

2.18 Definizioa

$\displaystyle\int_a^b |\, f(x)\,|\,dx$ integral inpropioa konbergentea denean $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ integrala absolutuki konbergentea dela esan ohi da.

Bai 2.10, bai 2.17 teoremak zeinu aldakorreko funtzioetarako erabiltzen dira.

2.19 Adibidea

- $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x+4x^3}}$ integrala konbergentea ote da?

$x = 0$ puntuan ez da bornatua funtzioa.

Bestalde $\dfrac{1}{\sqrt{x+4x^3}} < \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ $\forall\, x \in (0,1]$ eta $\alpha = \frac{1}{2} < 1$ denez $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$

konbergentea da beraz $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x+4x^3}}$ ere konbergentea da.

- $\displaystyle\int_{0'5}^1 \frac{dx}{\mathrm{Ln}\, x}$ integralaren izaera aztertu.

$f(x) = \dfrac{1}{\mathrm{Ln}\, x}$ eta $g(x) = \dfrac{1}{(1-x)^\alpha}$ biak bornagabeak dira $x = 1$ puntuan

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{-1/\mathrm{Ln}\, x}{1/(1-x)^\alpha} = \lim_{x\to 1^-} \frac{-(1-x)^\alpha}{\mathrm{Ln}\, x} = [\text{L' Hôpital}] = \lim_{x\to 1^-} \frac{\alpha(1-x)^{\alpha-1}}{1/x} =$$

$$= \left[\alpha = 1 \quad \text{aukeratuz}\right] = \lim_{x\to 1^-} (1-x)^0 \cdot x = \lim_{x\to 1^-} x = 1$$

$\alpha = 1$ denean $\displaystyle\int_{0'5}^1 \frac{1}{1-x}\,dx$ dibergentea da, beraz $\displaystyle\int_{0'5}^1 \frac{dx}{\mathrm{Ln}\, x}$ ere bai

4.3 PARAMETRO BATEN MENPEKO INTEGRALAK

Bi mota kontsideratuko dugu:

A) Integrazio-mugak konstanteak dira eta parametroa integrakizunean dago.

B) Bai integrakizuna bai integrazio-mugak parametroaren menpean daude.

A) INTEGRAZIO-MUGAK KONSTANTEAK.

Izen bedi $f(x,\lambda)$ bi aldagaiko funtzioa, non $a \leq x \leq b$ eta $c \leq \lambda \leq d$ den. Kontsidera dezagun $\int_a^b f(x,\lambda)\,dx$ integrala, λ-ren balio bakoitzerako integralaren balio bat lortzen da, hau da, integral hori λ-ren funtzioa da, horrexegatik $\varphi(\lambda) = \int_a^b f(x,\lambda)\,dx$ idatziko dugu.

3.20 Teorema

Baldin $f(x,\lambda)$ $[a,b] \times [c,d]$ laukizuzenean jarraia bada $\varphi(\lambda)$ jarraia da $[c,d]$ tartean.

Frogapena:

$$\Delta\varphi(\lambda) = \varphi(\lambda+\Delta\lambda) - \varphi(\lambda) = \int_a^b f(x,\lambda+\Delta\lambda)\,dx - \int_a^b f(x,\lambda)\,dx$$

$f(x,\lambda)$ $D = [a,b] \times [c,d]$ eremu itxian da jarraia, beraz uniformeki jarraia da bertan, hots $\forall\varepsilon > 0\ \exists\, \delta(\varepsilon) / \forall P_1,P_2 \in D \quad d(P_1,P_2) < \delta \Rightarrow |f(P_1) - f(P_2)| < \varepsilon$

baldin $P_1 = (x,\lambda+\Delta\lambda)$ eta $P_2 = (x,\lambda)$ aukeratzen baditugu $d(P_1,P_2) = \Delta\lambda$ da eta

$\Delta\lambda < \delta \Rightarrow |f(x,\lambda+\Delta\lambda) - f(x,\lambda)| < \varepsilon$ ere betetzen da, eta hemendik

$$|\Delta\varphi(\lambda)| = \left| \int_a^b f(x,\lambda+\Delta\lambda)\,dx - \int_a^b f(x,\lambda)\,dx \right| \leq \int_a^b |f(x,\lambda+\Delta\lambda)\,dx - f(x,\lambda)|\,dx < \int_a^b \varepsilon\,dx =$$

$$= \varepsilon\,(b-a) \qquad , \quad \varepsilon = \frac{\varepsilon'}{b-a} \quad \text{hartuz}$$

$\forall\varepsilon' > 0 \quad \exists\, \delta(\varepsilon') / \Delta\lambda < \delta$ bada $|\varphi(\lambda+\Delta\lambda) - \varphi(\lambda)| < \varepsilon'$ edo

$\lambda_2 = \lambda+\Delta\lambda$ eta $\lambda_1 = \lambda$ badira $\Delta\lambda = |\lambda_2 - \lambda_1| < \delta \Rightarrow |\varphi(\lambda_2) - \varphi(\lambda_1)| < \varepsilon'$

hau da, $\varphi(\lambda)$ jarraia da $[c,d]$ tartean.

Jarraitasun honek $\int$ eta **lim** zeinuak trukatzen uzten digu:

$$\lim_{\lambda\to\lambda_0} \int_a^b f(x,\lambda)\,dx = \lim_{\lambda\to\lambda_0} \varphi(\lambda) = \varphi(\lambda_0) = \int_a^b f(x,\lambda_0)\,dx = \int_a^b \lim_{\lambda\to\lambda_0} f(x,\lambda)\,dx .$$

3.21 Teorema

Baldin $f(x,\lambda)$ $D = [a,b] \times [c,d]$ eremuan eta $\dfrac{\partial f(x,\lambda)}{\partial \lambda}$ $\overset{\circ}{D} = (a,b) \times (c,d)$ eremu irekian jarraiak badira $\varphi'(\lambda) = \displaystyle\int_a^b \frac{\partial f(x,\lambda)}{\partial \lambda} dx$ betetzen da.

Frogapena:

$$\varphi'(\lambda) = \lim_{\Delta\lambda \to 0} \frac{\varphi(\lambda+\Delta\lambda) - \varphi(\lambda)}{\Delta\lambda} = \lim_{\Delta\lambda \to 0} \frac{\displaystyle\int_a^b f(x,\lambda+\Delta\lambda)\, dx - \int_a^b f(x,\lambda)\, dx}{\Delta\lambda} =$$

$$= \lim_{\Delta\lambda \to 0} \frac{\displaystyle\int_a^b (\, f(x,\lambda+\Delta\lambda) - f(x,\lambda)\,)\, dx}{\Delta\lambda}$$

x konstante bezala kontsideratuz aldagai bateko funtzioetarako batezbesteko balioaren teorema aplika dezakegu $[\lambda,\lambda+\Delta\lambda]$ tartean:

$$f(x,\lambda+\Delta\lambda) - f(x,\lambda) = \frac{\partial\ f(x,\lambda+\theta\Delta\lambda)}{\partial \lambda} . \Delta\lambda \qquad 0 < \theta < 1 \qquad (\Rightarrow \lambda+\theta\Delta\lambda \in [\lambda, \lambda+\Delta\lambda]\,)$$

$$\text{beraz } \varphi'(\lambda) = \lim_{\Delta\lambda \to 0} \frac{\displaystyle\int_a^b \frac{\partial f(x,\lambda+\theta\Delta\lambda)}{\partial \lambda} \Delta\lambda\, dx}{\Delta\lambda} = \lim_{\Delta\lambda \to 0} \int_a^b \frac{\partial f(x,\lambda+\theta\Delta\lambda)}{\partial \lambda} dx =$$

$$= \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \lambda} \text{ jarraia delako}\right) = \int_a^b \lim_{\Delta\lambda \to 0} \frac{\partial f(x,\lambda+\theta\Delta\lambda)}{\partial \lambda} dx \Rightarrow \varphi'(\lambda) = \int_a^b \frac{\partial f(x,\lambda)}{\partial \lambda} dx$$

Azken emaitza honek Leibnitz-en formula izena du.

3.22 Teorema

Baldin $f(x,\lambda)$ $D = [a,b] \times [c,d]$ eremuan jarraia bada $\varphi(\lambda)$ integragarria da $[c,d]$ tartean eta:

$$\int_c^d \varphi(\lambda)\,d\lambda = \int_c^d \underbrace{\left(\int_a^b f(x,\lambda)\,dx\right) d\lambda}_{I_1} = \int_a^b \underbrace{\left(\int_c^d f(x,\lambda)\,d\lambda\right) dx}_{I_2}$$

Frogapena:

I_1 eta I_2 integralek t-rekiko deribatu bera dutela ikusten hasiko gara, gero funtzio berberaren jatorrizko funtzioak direnez bion arteko kendura konstantea izango da, azkenik konstante hori zero dela frogatuko dugu.

$$I_1(t) = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,\lambda)\,dx\right) d\lambda \text{ , bedi } \quad I_1(t) = \int_c^t \left(\int_a^b f(x,\lambda)\,dx\right) d\lambda = \int_c^t \varphi(\lambda)\,d\lambda$$

$$I'_1(t) = \left(\int_c^t \varphi(\lambda)\,d\lambda\right)' = \varphi(t) = \int_a^b f(x,t)\,dx$$

Kalkulu integralaren oinarrizko teorema aplikatu dugu.

$$I_2 = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,\lambda)\,d\lambda\right) dx \text{ , } \quad \text{bedi } I_2(t) = \int_a^b \left(\int_c^t f(x,\lambda)\,d\lambda\right) dx = \int_a^b \psi(x,t)\,dx$$

$$I'_2(t) = \left(\int_a^b \psi(x,t)\,dx\right)' = \int_a^b \frac{\partial\, \psi(x,t)}{\partial t}\,dx \text{ ; } \quad \frac{\partial\, \psi(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\int_c^t f(x,\lambda)\,d\lambda\right) = f(x,t)$$

3.21 Teorema eta kalkulu integralaren oinarrizko teorema:

beraz $\quad I'_2(t) = \displaystyle\int_a^b f(x,t)\,dx$

Hasieran esan dugun bezala $\quad I_1(t) = I_2(t) + K$

$$I_2(c) = \int_a^b \left(\int_c^c f(x,\lambda)\,d\lambda\right) dx = 0 \text{ , } \quad I_1(c) = \int_c^c \left(\int_a^b f(x,\lambda)\,dx\right) d\lambda = 0$$

$$I_1(c) = I_2(c) + K \Rightarrow 0 = 0 + K \Rightarrow K = 0 \Rightarrow I_1 = I_2$$

Aurreko hiru teoremak "**lim**", "**d**" eta "$\int$" eragilen arteko permutaziotzat har daitezke, izan ere zera lortu dugu:

- $$\lim_{\lambda\to\lambda_0} \int_a^b f(x,\lambda)\,dx = \int_a^b \lim_{\lambda\to\lambda_0} f(x,\lambda)\,dx \quad \text{edo} \quad \varphi(\lambda_0) = \int_a^b f(x,\lambda_0)\,dx$$

- $$\left(\int_a^b f(x,\lambda)\,dx\right)'_\lambda = \int_a^b \frac{\partial f(x,\lambda)}{\partial\lambda}\,dx \quad \text{edo} \quad \varphi'(\lambda) = \int_a^b f'_\lambda(x,\lambda_0)\,dx$$

- $$\int_c^d \left(\int_a^b f(x,\lambda)\,dx\right) d\lambda = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,\lambda)\,d\lambda\right) dx \quad \text{edo} \quad \int_c^d \varphi(\lambda)\,d\lambda = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,\lambda)\,d\lambda\right) dx$$

Azken bi teoremak erabiliz integral mugatuak kalkula daitezke, deribatuz edo integratuz integral kalkulagarria lortzen denean.

3.23 Adibidea

- Kalkula dezagun $\int_0^1 x^\lambda (\mathrm{Ln}\, x)^n\,dx$, $\int_0^1 x^\lambda\,dx \quad \lambda \neq -1$ integralaren bidez.

$$\int_0^1 x^\lambda\,dx = \frac{x^{\lambda+1}}{\lambda+1}\Bigg|_0^1 = \frac{1}{1+\lambda} \quad \Rightarrow \quad \varphi(\lambda) = \int_0^1 x^\lambda\,dx \;\Bigg|\; = \frac{1}{1+\lambda}$$

$$\varphi'(\lambda) = \int_0^1 \frac{\partial (x^\lambda)}{\partial \lambda}\, dx = \int_0^1 x^\lambda \,\mathrm{Ln}\, x\, dx \qquad = \frac{-1}{(1+\lambda)^2}$$

$$\varphi''(\lambda) = \int_0^1 \frac{\partial (x^\lambda \,\mathrm{Ln}\, x)}{\partial \lambda}\, dx = \int_0^1 x^\lambda \,\mathrm{Ln}^2\, x\, dx \qquad = \frac{2}{(1+\lambda)^3}$$

$$\varphi'''(\lambda) = \int_0^1 \frac{\partial (x^\lambda \,\mathrm{Ln}^2\, x)}{\partial \lambda}\, dx = \int_0^1 x^\lambda \,\mathrm{Ln}^3\, x\, dx \qquad = \frac{-3.2}{(1+\lambda)^4}$$

$$\varphi''(\lambda) = \int_0^1 \frac{\partial (x^\lambda \,\mathrm{Ln}^{n-1}\, x)}{\partial \lambda}\, dx = \int_0^1 x^\lambda \,\mathrm{Ln}^n\, x\, dx \qquad = \frac{(-1)^n\, n!}{(1+\lambda)^{n+1}}$$

beraz, $\displaystyle\int_0^1 x^\lambda \,\mathrm{Ln}^n\, x\, dx = \frac{(-1)^n\, n!}{(1+\lambda)^{n+1}}$

- $\displaystyle I = \int_0^1 \frac{x^a - 1}{\mathrm{Ln}\, x}\, dx$ integrala kalkulatuko dugu orain.

Har dezagun $\displaystyle I(a) = \int_0^1 \frac{x^a - 1}{\mathrm{Ln}\, x}\, dx$

$$I'(a) = \int_0^1 \frac{\partial \left(\frac{x^a - 1}{\mathrm{Ln}\, x}\right)}{\partial a} = \int_0^1 \frac{x^a \,\mathrm{Ln}\, x}{\mathrm{Ln}\, x}\, dx = \int_0^1 x^a\, dx = \left.\frac{x^{a+1}}{a+1}\right|_0^1 = \frac{1}{a+1}$$

beraz $\displaystyle I(a) = \int \frac{1}{a+1}\, da = \mathrm{Ln}\,(a+1) + K$

I integral mugatua da, beraz K konstantea kalkulatu behar dugu

$a = 0 \quad I(a) = I(0) = 0 \quad$ eta $\quad Ln\,(0+1) = 0 \;\Rightarrow\; K = 0 \quad$ eta $\quad I = Ln\,(1+a)$

B) INTEGRAKIZUNA ETA INTEGRAZIO-MUGAK PARAMETROAREN MENPEAN DAUDE.

Kasu honetan $f(x,\lambda)$ $D = [a,b] \times [c,d]$ eremu itxian definiturik dago eta

$$\varphi(\lambda) = \int_{a(\lambda)}^{b(\lambda)} f(x,\lambda)\,dx$$ integrala kontsideratuko dugu.

3.24 Teorema

Baldin $f(x,\lambda)$ D eremuan eta $a(\lambda)$, $b(\lambda)$ $[c,d]$ tartean jarraiak badira $\varphi(\lambda)$ funtzioa jarraia da $[c,d]$ tartean eta

$$\varphi(\lambda_0) = \lim_{\lambda\to\lambda_0} \varphi(\lambda) = \lim_{\lambda\to\lambda_0} \int_{a(\lambda)}^{b(\lambda)} f(x,\lambda)\,dx = \int_{\lim\limits_{\lambda\to\lambda_0} a(\lambda)}^{\lim\limits_{\lambda\to\lambda_0} b(\lambda)} \lim_{\lambda\to\lambda_0} f(x,\lambda)\,dx = \int_{a(\lambda_0)}^{b(\lambda_0)} f(x,\lambda_0)\,dx$$

3.25 Teorema

Baldin $f(x,\lambda)$ D eremuan, $\dfrac{\partial f(x,\lambda)}{\partial\lambda}$ $\overset{o}{D}$ eremu irekian jarraiak eta $a(\lambda),b(\lambda)$

(c,d) tartean deribagarriak badira $\varphi(\lambda)$ deribagarria da (c,d) tartean eta

$$\varphi'(\lambda) = \int_{a(\lambda)}^{b(\lambda)} \frac{\partial f(x,\lambda)}{\partial\lambda}\,dx + b'(\lambda)\,f(b,\lambda) - a'(\lambda)\,f(a(\lambda),\lambda)$$

Frogapena:

$\varphi(\lambda)$ integral mugatua da, eta integral mugatuak integrazio-mugen menpean daude. Hau da $\varphi(\lambda)$ funtzioa egia esan $\varphi(a,b,\lambda)$ funtzioa da, eta kasu honetan $\varphi(a(\lambda),b(\lambda),\lambda)$ hain zuzen.

$$\varphi'(\lambda) = \frac{\partial \varphi}{\partial a}\frac{\partial a}{\partial \lambda} + \frac{\partial \varphi}{\partial b}\frac{\partial b}{\partial \lambda} + \frac{\partial \varphi}{\partial \lambda}$$ da katearen erregela aplikatuz

$\frac{\partial \varphi}{\partial \lambda}$, $\frac{\partial \varphi}{\partial a}$, $\frac{\partial \varphi}{\partial b}$ bilatzean beste aldagaiak konstantetzat hartzen

dira, hau da, $\frac{\partial \varphi}{\partial \lambda} = \frac{\partial}{\partial \lambda}\left(\int_{a(\lambda)}^{b(\lambda)} f(x,\lambda)\, dx\right) = \int_{a(\lambda)}^{b(\lambda)} \frac{\partial f(x,\lambda)}{\partial \lambda}\, dx$

$\frac{\partial \varphi}{\partial b} = \frac{\partial}{\partial b}\left(\int_{a(\lambda)}^{b(\lambda)} f(x,\lambda)\, dx\right) = f(b(\lambda),\lambda)$ kalkulu integralaren oinarrizko teorema

$$\frac{\partial \varphi}{\partial a} = \frac{\partial}{\partial a}\left(\int_{a(\lambda)}^{b(\lambda)} f(x,\lambda)\, dx\right) = \frac{\partial}{\partial a}\left(-\int_{b(\lambda)}^{a(\lambda)} f(x,\lambda)\, dx\right) = - f(a(\lambda),\lambda)$$

$\frac{\partial b}{\partial \lambda} = \frac{db}{d\lambda} = b'(\lambda)$, $\frac{\partial a}{\partial \lambda} = \frac{da}{d\lambda} = a'(\lambda)$ berdintza guzti hauek

lehenengoan ordezkatuz teoremaren tesia lortuko dugu:

$$\varphi'(\lambda) = \int_{a(\lambda)}^{b(\lambda)} \frac{\partial f(x,\lambda)}{\partial \lambda}\, dx + b'(\lambda)\, f(b(\lambda),\lambda) - a'(\lambda)\, f(a(\lambda),\lambda)$$

3.26 Adibidea

- Kalkula ezazu $I(\lambda) = \int_0^{\pi/4\lambda} \frac{t^2 \sin \lambda t}{\cos^3 \lambda t}\, dt$, $\int_0^{\pi/4\lambda} \operatorname{tg}(\lambda t) = \frac{\operatorname{Ln} 2}{2\lambda}$ ezagutuz.

$\varphi(\lambda) = \int_0^{\pi/4\lambda} \operatorname{tg}(\lambda t)\, dt \; \Big| = \frac{\operatorname{Ln} 2}{2\lambda}$ deribatuz,

$$\varphi(\lambda) = \int_0^{\pi/4\lambda} \frac{\partial\, \mathrm{tg}\,(\lambda t)}{\partial \lambda}\, dt + \left(\frac{\pi}{4\lambda}\right)' . \,\mathrm{tg}\left(\lambda \,.\, \frac{\pi}{4\lambda}\right) - (0)'\,\mathrm{tg}\,(\lambda.0) =$$

$$= \int_0^{\pi/4\lambda} \frac{t}{\cos^2 \lambda t}\, dt - \frac{\pi}{4\lambda^2}\,\mathrm{tg}\,\frac{\pi}{4} - 0 = \int_0^{\pi/4\lambda} \frac{t}{\cos^2 \lambda t}\, dt - \frac{\pi}{4\lambda^2}\ \Bigg| = \frac{-\mathrm{Ln}\, 2}{2\lambda^2} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_0^{\pi/4\lambda} \frac{t}{\cos^2 \lambda t}\, dt = \frac{-\mathrm{Ln}\, 2}{2\lambda^2} + \frac{\pi}{4\lambda^2} = \frac{1}{4\lambda^2}\,(\pi - 2\,\mathrm{Ln}\, 2) \qquad \text{eta hau deribatuz}$$

$$\left(\int_0^{\pi/4\lambda} \frac{t}{\cos^2 \lambda t}\, dt\right)' = \left(\frac{\pi - \mathrm{Ln}\, 4}{4\lambda^2}\right)' \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_0^{\pi/4\lambda} \frac{\partial \dfrac{t}{\cos^2 \lambda t}}{\partial \lambda}\, dt + \left(\frac{-\pi}{4\lambda^3}\right)\left(\frac{\dfrac{\pi}{4\lambda}}{\cos^2\left(\lambda \dfrac{\pi}{4\lambda}\right)}\right) = \frac{-2\,(\pi - \mathrm{Ln}\, 4)}{4\lambda^3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_0^{\pi/4\lambda} \frac{-2\, t^2(\cos \lambda t)\,(-\sin \lambda t)}{\cos^4 \lambda t}\, dt - \frac{\pi^2}{16\lambda^3}\,\frac{1}{1/2} = \frac{-(\pi - \mathrm{Ln}\, 4)}{2\lambda^3} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_0^{\pi/4\lambda} \frac{-2\, t^2 \sin \lambda t}{\cos^3 \lambda t}\, dt - \frac{\pi^2}{8\lambda^3} = \frac{\mathrm{Ln}\, 4 - \pi}{2\lambda^3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_0^{\pi/4\lambda} \frac{t^2 \sin \lambda t}{\cos^3 \lambda t}\, dt - \frac{1}{2}\left(\frac{-\mathrm{Ln}\, 4 - \pi}{2\lambda^3} + \frac{\pi^2}{8\lambda^3}\right) = \frac{4\,\mathrm{Ln}\, 4 - 4\pi + \pi^2}{16\lambda^3}$$

- Deriba ezazu $\varphi(\lambda) = \displaystyle\int_{\lambda^2}^{\lambda^3} \frac{\operatorname{tg} \lambda x}{x}\, dx$ funtzioa

$$\varphi'(\lambda) = \int_{\lambda^2}^{\lambda^3} \frac{\partial \frac{\operatorname{tg} \lambda x}{x}}{\partial \lambda}\, dx + (\lambda^3)' \frac{\operatorname{tg} (\lambda.\lambda^3)}{\lambda^3} - (\lambda^2)' \frac{\operatorname{tg} (\lambda.\lambda^2)}{\lambda^2} =$$

$$= \int_{\lambda^2}^{\lambda^3} \frac{1}{x} \frac{x}{\cos^2 \lambda x}\, dx + 3\lambda^2 \frac{\operatorname{tg} \lambda^4}{\lambda^3} - 2\lambda \frac{\operatorname{tg} \lambda^3}{\lambda^2} =$$

$$= \int_{\lambda^2}^{\lambda^3} \frac{1}{\cos^2 \lambda x}\, dx + \frac{3\operatorname{tg} \lambda^4}{\lambda} - 2\frac{\operatorname{tg} \lambda^3}{\lambda} = \frac{1}{\lambda} \operatorname{tg} \lambda x \Big|_{\lambda^2}^{\lambda^3} + \frac{3\operatorname{tg} \lambda^4 - 2\operatorname{tg} \lambda^3}{\lambda} =$$

$$= \frac{1}{\lambda} (\operatorname{tg} \lambda^4 - \operatorname{tg} \lambda^3) + \frac{3 \operatorname{tg} \lambda^4 - 2 \operatorname{tg} \lambda^3}{\lambda} = \frac{4 \operatorname{tg} \lambda^4 - 3 \operatorname{tg} \lambda^3}{\lambda}$$

4.4 PARAMETRO BATEN MENPEKO INTEGRAL INPROPIOAK

Integral propioetarako lortutako emaitzak integral inpropioetara hedatuko ditugu. Honelako integrakizunak kontsideratuko ditugu:

A) $\varphi(\lambda) = \displaystyle\int_a^{\infty} f(x,\lambda)\, dx \qquad \varphi(\lambda) = \lim_{b\to\infty} \int_a^b f(x,\lambda)\, dx \qquad f(x,\lambda)$ D eremuan bornatua .

B) $\varphi(\lambda) = \displaystyle\int_a^b f(x,\lambda)\, dx \qquad \varphi(\lambda) = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x,\lambda)\, dx$ non $\displaystyle\lim_{x\to b^-} f(x,\lambda) = \pm\infty$ eta

$(x,\lambda) \in [a,b) \times [c,d]$ bait da.

Bi mota hauek batera aztertzeko ondoko idazkera erabiliko dugu

A) eta B) $\varphi(\lambda) = \int_a^b f(x,\lambda)\, dx$ non b finitua edo infinitua izan bait daiteke,

b finitua deneko kasuan $f(x,\lambda)$ ez da bornatua izango eta B) izango dugu, b infinitua denean A) izango dugu.

4.27 Definizioa

$\varphi(\lambda)$ $[c,d]$ tartean konbergentea dela esaten da baldin $\forall\ \lambda_0 \in [c,d]$

A) $\varphi(\lambda_0) = \int_a^\infty f(x,\lambda_0)\, dx$ konbergentea bada

B) $\varphi(\lambda_0) = \int_a^b f(x,\lambda_0)\, dx$ konbergentea bada

4.28 Definizioa

$\varphi(\lambda)$ $[c,d]$ tartean uniformeki konbergentea da baldin $\forall\ \lambda_0 \in [c,d]$

A) eta B) $\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \eta_\varepsilon < b \,/\, \forall\, \eta\ \varepsilon\, (\eta_\varepsilon, b) \Rightarrow \left| \int_a^b f(x,\lambda_0)\, dx - \int_a^\eta f(x,\lambda_0)\, dx \right| < \varepsilon$ edo

$$\Rightarrow \left| \int_\eta^b f(x,\lambda_0)\, dx \right| < \varepsilon$$

η_ε ε-en menpean bakarrik dago eta ez λ_0-ren menpean.

4.29 Adibidea

- $\int_0^\infty \lambda\, e^{-x\lambda}\, dx$ $\lambda \in [0,\infty)$ konbergentea da eta $\lambda \in (-\infty,0)$ dibergentea, baina ez da uniformeki konbergentea

$$\int_0^{\infty} \lambda\, e^{-x\lambda}\, dx = \lim_{b\to\infty} \left(-e^{-x\lambda}\Big|_0^b\right) = \lim_{b\to\infty} \left(-e^{-b\lambda} + 1\right) = \left|\begin{array}{ll} \lambda > 0 & 1 \\ \lambda = 0 & 0 \\ \lambda < 0 & \infty \end{array}\right.$$

Ikus dezagun orain $\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \eta_\varepsilon > (0,\infty) \,/\, \eta \geq \eta_\varepsilon \quad \left| \int_\eta^{\infty} \lambda\, e^{-x\lambda}\, dx \right| < \varepsilon$

betetzen den ala ez

$$\left| \int_\eta^{\infty} \lambda\, e^{-x\lambda}\, dx \right| = \left| \lim_{b\to\infty} \int_\eta^{b} \lambda\, e^{-x\lambda}\, dx \right| = \left| \lim_{b\to\infty} \left(-e^{-x\lambda}\Big|_\eta^b\right) \right| =$$

$$= \left| \lim_{b\to\infty} e^{-\eta\lambda} - e^{-b\lambda} \right| \overset{*}{=} \left| e^{-\eta\lambda} \right| = e^{-\eta\lambda}$$

* $\lambda \in [0,\infty)$ denean bakarrik, konbergentea delako.

Integrala uniformeki konbergentea izan dadin $\lim_{\eta\to\infty} e^{-\eta\lambda} = 0$ bete behar da baina

$\lambda \in [0,\eta) \quad e^{\eta} < e^{\lambda} \Rightarrow e^{\eta^2} > e^{\eta\lambda} \Rightarrow \frac{1}{e^{\eta^2}} < \frac{1}{e^{\eta\lambda}}$ λ-ren balioen arabera bornatu

behar da eta $\lambda \in [\eta,\infty) \quad e^{\eta} < e^{\lambda} \Rightarrow e^{\eta^2} > e^{\eta\lambda} \Rightarrow \frac{1}{e^{\eta\lambda}} < \frac{1}{e^{\eta^2}} \Rightarrow \lim_{\eta\to\infty} e^{\eta\lambda} = 0$

orain ez dago λ-ren menpean

Weierstrass-en erizpidea

Baldin $[a,b)$ tartean definituriko eta $\forall\, \eta \in (a,b)$ $[a,\eta]$ tartean Riemann-en zentzuan integragarria den $\varphi(x)$ funtzio ez-negatiboa existitzen bada, non

a) $|f(x,\lambda)| \leq \varphi(x) \qquad \forall\, \lambda \in [c,d]$

b) $\int_a^b \varphi(x)\, dx$ konbergentea dela betetzen bait da,

$\varphi(\lambda) = \int_a^b f(x,\lambda)\, dx$ uniformeki konbergentea da $[c,d]$ multzoan.

Frogapena:

Konparaziozko erizpidea erabiliz $\int_a^b |f(x,\lambda)|\, dx$ konbergentea da (a) eta b) hipotesiak erabiliz, beraz $\int_a^b f(x,\lambda)\, dx$ absolutuki konbergentea eta konbergentea ere bada

b) hipotesian $\underline{\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \eta_\varepsilon < b \;/\; \eta_\varepsilon \le \eta < b} \Rightarrow \int_\eta^b \varphi(x)\, dx < \varepsilon$ dugu

orain a) aplikatuz : $\underline{\left| \int_\eta^b f(x,\lambda)\, dx \right|} \le \int_\eta^b |f(x,\lambda)|\, dx \le \int_\eta^b \varphi(x)\, dx \underline{< \varepsilon}$

eta hau da hain zuzen ere $\varphi(\lambda)$ uniformeki konbergentea izateko

baldintza $\underline{\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \eta_\varepsilon < b \;/\; \eta_\varepsilon \le \eta < b} \quad \underline{\left| \int_\eta^b f(x,\lambda)\, dx \right|} \underline{< \varepsilon}$

Cauchy-ren erizpidea

$\varphi(\lambda) = \int_a^b f(x,\lambda)\, dx$ integrala $[c,d]$ tartean uniformeki konbergentea da

b.s.b. $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \eta < b \,/\, \forall \eta_1, \eta_2 > \eta$ eta $\forall \lambda \in [c,d] \quad \left| \int_{\eta_1}^{\eta_2} f(x,\lambda)\, dx \right| < \varepsilon$ bada

Frogapena:

Baldin $\varphi(\lambda,\eta) = \int_a^\eta f(x,\lambda)\,dx$ bada $\varphi(\lambda)$ uniformeki konbergentea bada

$$\forall\, \varepsilon > 0 \ \ \exists\, \eta_\varepsilon < b \,/\, \forall\, \eta > \eta_\varepsilon \ \ \forall\, \eta > \eta_\varepsilon \ \ \forall\, \lambda \in [c,d] \ \ \left| \int_\eta^b f(x,\lambda)\,dx \right| < \varepsilon$$

edo orain $\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists\, \eta_\varepsilon < b / \forall \eta \geq \eta_\varepsilon \ \ \forall \lambda \in [c,d] \ \ | \varphi(\lambda) - \varphi(\lambda,\eta) | < \varepsilon$

$$\left[\ | \varphi(\lambda) - \varphi(\lambda,\eta) | = \left| \int_a^b f(x,\lambda)\,dx - \int_a^\eta f(x,\lambda)\,dx \right| = \left| \int_\eta^b f(x,\lambda)\,dx \right| \ \right]$$

Geuk $\left| \int_{\eta_1}^{\eta_2} f(x,\lambda)\,dx \right|$ bornatu nahi dugu $\forall\, \lambda \in [c,d], \ \ \eta_1,\eta_2 > \eta$

$$\left| \int_{\eta_1}^{\eta_2} f(x,\lambda)\,dx \right| = \left| \int_{\eta_1}^{b} f(x,\lambda)\,dx - \int_{\eta_2}^{b} f(x,\lambda)\,dx \right| \leq \left| \int_{\eta_1}^{b} f(x,\lambda)\,dx \right| + \left| \int_{\eta_2}^{b} f(x,\lambda)\,dx \right| =$$

$= | \varphi(\lambda) - \varphi(\lambda,\eta_1) | + | \varphi(\lambda) - \varphi(\lambda,\eta_2) | < 2\varepsilon$ baldin $\eta_1,\eta_2 \geq \eta_\varepsilon$ beraz, bilatzen dugun $\eta > \eta_\varepsilon$ da.

$$\forall\, \varepsilon > 0 \ \ \exists\, \eta < b \,/\, \forall\, \eta_1,\eta_2 \geq \eta \quad \text{eta} \quad \forall\, \lambda \in [c,d] \ \ \left| \int_{\eta_1}^{\eta_2} f(x,\lambda)\,dx \right| < \varepsilon$$

baldintza honetan η_1 finkatuz eta $\eta_2 \to b$ joeraziz

$$\forall\, \varepsilon > 0 \ \ \exists\, \eta < b \,/\, \forall\, \eta_1 > \eta \quad \text{eta} \quad \forall\, \lambda \in [c,d] \ \ \left| \int_{\eta_1}^{b} f(x,\lambda)\,dx \right| < \varepsilon \quad \text{dugu}$$

konbergentzia uniformearen definizioa hain zuzen ere.

Integral inpropioen konbergentzi uniformerako erizpidea

Jo ditzagun $f(x,\lambda)$ eta $g(x,\lambda)$ funtzioak $x \in [a,b)$ eta $\lambda \in [c,d]$ denean definiturik daudela eta $f(x,\lambda)$ eta $\dfrac{\partial\, g(x,\lambda)}{\partial x}$ x-ekiko jarraiak direla.

Baldin a) $\forall\, \lambda \in [c,d]$ $g(x,\lambda)$ x-ekiko monotonoa bada eta

[c,d] multzoan $\lim\limits_{x\to b} g(x,\lambda) = 0$ [uniformeki] betetzenbadu

b) $\varphi(\lambda,\eta) = \displaystyle\int_a^{\eta} f(x,\lambda)\,dx$ $(\eta,\lambda) \in [a,b) \times [c,d]$ multzoan bornatua bada,

$\displaystyle\int_a^b g(x,\lambda)\, f(x,\lambda)\,dx$ integrala uniformeki konbergentea da [c,d] multzoan.

Frogapena:

Teorema hau frogatzeko Cauchy-ren erizpidea aplikatuko dugu.

Zera frogatuko dugu $\forall\, \varepsilon > 0\ \ \exists\, \eta < b \,/\, \forall\, \eta_1,\eta_2 > \eta\ \ \forall\, \lambda \in [c,d]\ \left| \displaystyle\int_{\eta_1}^{\eta_2} f(x,\lambda)\,dx \right| < \varepsilon$

har ditzagun $\eta_1,\eta_2 > a$, batezbesteko balioaren 2. teoremak zera dio:

$$\int_{\eta_1}^{\eta_2} f(x,\lambda)\, g(x,\lambda) = g(\eta_1,\lambda) \int_{\eta_1}^{\xi} f(x,\lambda)\,dx + g(\eta_2,\lambda) \int_{\xi}^{\eta_2} f(x,\lambda)\,dx \quad \eta_1 < \xi < \eta_2 \text{ izanik.}$$

b) baldintzak $M > 0$ existitzen dela dio non $\left| \displaystyle\int_a^{\eta} f(x,\lambda)\,dx \right| \le M$

$\forall(\eta,\lambda) \in [a,b) \times [c,d]$, horregatik

$$\underline{\left|\int_{\eta_1}^{\xi} f(x,\lambda)\,dx\right|} = \left|\int_a^{\xi} f(x,\lambda)\,dx - \int_a^{\eta_1} f(x,\lambda)\,dx\right| \le$$

$$\le \left|\int_a^{\xi} f(x,\lambda)\,dx\right| + \left|\int_a^{\eta_1} f(x,\lambda)\,dx\right| \underline{\le 2\,M}$$

Gauza bera eginez $\underline{\left|\int_{\xi}^{\eta_2} f(x,\lambda)\,dx\right| \le 2\,M}$ lortzen dugu

$\lim\limits_{x \to b} g(x,\lambda) = 0$ [uniformeki] denez

$\underline{\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists \eta_\varepsilon \in (a,b) / \forall x > \eta_\varepsilon \ \ \forall \lambda \in [c,d]}$ $\underline{|g(x,\lambda)| < \frac{\varepsilon}{4M}}$ betetzen da

Azpimarratutako emaitzak josten baditugu zera lortzen da:

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \eta_\varepsilon \in (a,b) \ / \ \forall \eta_1, \eta_2 > \eta_\varepsilon \quad \forall \lambda \in [c,d]$

$$\left|\int_{\eta_1}^{\eta_2} f(x,\lambda)\, f(x,\lambda)\,dx\right| \le |g(\eta_1,\lambda)| \left|\int_{\eta_1}^{\xi} f(x,\lambda)\,dx\right| + |g(\eta_2,\xi)| \left|\int_{\xi}^{\eta_2} f(x,\lambda)\,dx\right| <$$

$$< \frac{\varepsilon}{4\,M} \cdot 2\,M + \frac{\varepsilon}{4\,M}\, 2\,M = \varepsilon$$

4.30 Adibidea

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1 + x^2 + y^2}$$ uniformeki konbergentea da $\forall y \in \mathbb{R}$

Weiertrass-en erizpidea erabiliko dugu.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = 2\int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{b\to\infty}\left(2\int_0^b \frac{dx}{1+x^2}\right) = 2\lim_{b\to\infty} \text{arc tg } x\,\Big|_0^b = 2\,\frac{\pi}{2} = \pi$$

konbergentea da, beraz b) baldintza betetzen du, $\varphi(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ izanik

eta $\forall\, y \in \mathbb{R}$ $\quad \dfrac{1}{1+x^2+y^2} \leq \dfrac{1}{1+x^2}$ $\quad$ a) baldintza ere

- $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{x \sin x\lambda}{1+x^2}\,dx$ uniformeki konbergentea da $\lambda \in [\lambda_0,\infty)$ tartean $\lambda_0 > 0$

Konbergentzia uniformerako erizpidea erabiliko dugu.

$g(x,\lambda) = \dfrac{x}{1+x^2}$ (hau da ez dago λ-ren menpean) eta $\lim\limits_{x\to\infty} g(x,\lambda) = 0$

Limite hau λ-ren menpean ez dagoenez 0-rantz uniformeki konbergentea da λ-rekiko, horretaz gain $\forall\, \lambda \geq \lambda_0$ $\dfrac{x}{1+x^2}$ monotono beherakorra da, beraz lehenengo baldintza betetzen da.

Gainera, $\eta_1 > 1$, $\left|\displaystyle\int_1^{\eta} \sin x\lambda\, dx\right| = \left|\dfrac{-\cos x\lambda}{\lambda}\Big|_1^{\eta}\right| = \left|\dfrac{\cos\lambda - \cos\eta\lambda}{\lambda}\right| \leq \dfrac{2}{\lambda} \leq \dfrac{2}{\lambda_0}$

hau da, bigarren baldintza ere betetzen da.

Beraz $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{x}{1+x^2} \sin x\lambda\, dx$ uniformeki konbergentea da $\forall\, \lambda \in [\lambda_0,\infty)$

OHARRAK

- Parametro baten menpeko integral inpropioak uniformeki konbergenteak direla suposatzen badugu 3.20,21,22,24,25 teoremak betetzen dira, hau da, "lim" eta "$\int$", "d" eta "$\int$" eta "$\int$" eta "$\int$" elkar truka daitezke.

- Parametro baterako hemen esandakoa zenbait parametro deneko kasura heda daiteke,

$$\varphi(\lambda,\mu) = \int_a^b f(x,\lambda,\mu)\,dx \qquad x \in [a,b],\ \lambda \in [c,d],\ \mu \in [e,f]$$

5. GAIA
Γ(P) ETA β(P,Q) FUNTZIOAK

5.1 Γ(p) GAMMA FUNTZIOA

Gauss-en formulak emandako funtzioahauxe da: $\Gamma(p) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n!\, n^p}{p(p+1)\dots(p+n)}$

eta funtzio faktorial izena du. Ez dago $p \in \mathbb{Z}^- \cup \{0\}$ puntuetan definiturik. Adierazpen hori erabilgaitza denez, bere adierazpen integrala, $\Gamma(p) = \displaystyle\int_0^\infty e^{-x} x^{p-1}\, dx$ alegia, erabiltzen da.

Integral inpropio hau $p > 0$ denean absolutuki konbergentea da, $p \le 0$ denean, aldiz, dibergentea. Bi adierazpide hauek baliokideak direla froga daiteke.

Ikus dezagun zer p-ren baliotarako den konbergentea Γ(p). Alde batetik integrazio-tartea infinitua da eta bestalde zenbait P-ren baliotarako $x = 0$ puntuan ez dago funtzioa definiturik, beraz integrala zatituko dugu: $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x} x^{p-1}\, dx = \int_0^1 e^{-x} x^{p-1}\, dx + \int_1^\infty x^{p-1} e^{-x}\, dx = I_1 + I_2$

I_2 integralaren konbergentzia aztertuz:

$$g(x) = \frac{1}{x^\alpha} \text{ hartuz} \quad \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty} x^\alpha x^{p-1} e^{-x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^{\alpha+p-1}}{e^x} = 0 \quad \forall p$$

zeren esponentziala azkarrago hazten bait da, $\alpha = 3$ har dezakegu I_2 integrala konbergentea izan dadin.

I_1 integralaren azterketa:

Oraingoan $g(x) = \dfrac{1}{(x-0)^\alpha} = \dfrac{1}{x^\alpha}$ hartuko dugu. $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0^+} x^\alpha x^{p-1} e^{-x} =$

$= \displaystyle\lim_{x\to 0^+} x^{\alpha+p-1} = 0$ izango da $\alpha + p - 1 > 0$ bada; I_1 integrala konbergentea izan dadin $\alpha < 1$ ere bete behar da, bi baldintza hauek bilduz $p > 0$ ateratzen dugu.

$\Gamma(p)$ konbergentea izan dadin I_1 eta I_2 integralek batera konbergenteak izan behar dute,

beraz $\forall\, p > 0 \quad \Gamma(p) = \int_0^{\infty} e^{-x}\, x^{p-1}\, dx$ konbergentea dugu.

OHARRA

Funtzio honi aurreko gaiaren 3.20,21,22,24,25 teoremak aplika dakizkioke.

5.2 $\Gamma(p)$ FUNTZIOAREN PROPIETATEAK

1) Errepikapena $\Gamma(p) = (p-1)\,\Gamma(p-1) \quad \forall\, p > 1$

$$\Gamma(p) = \int_0^{\infty} e^{-x}\, x^{p-1}\, dx = \left[\begin{array}{ll} u = x^{p-1} & du = (p-1)\, x^{p-2}\, dx \\ dv = e^{-x}\, dx & v = -\, e^{-x} \end{array}\right] =$$

$$= -\, e^{-x}\, x^{p-1} \Big|_0^{\infty} + \int_0^{\infty} (p-1)\, e^{-x}\, x^{p-2}\, dx = \lim_{b\to\infty} \left(-\, e^{-x}\, x^{p-1} \Big|_0^{b}\right) + (p-1) \int_0^{\infty} e^{-x}\, x^{p-2}\, dx =$$

$$= \lim_{b\to\infty} \left(-\, e^{-b}\, b^{p-1}\right) + (p-1)\,\Gamma(p-1) = (p-1)\,\Gamma(p-1)$$

2) $\Gamma(1) = 1$

$$\Gamma(1) = \int_0^{\infty} e^{-x}\, dx = \lim_{b\to\infty} \int_0^{b} e^{-x}\, dx = \lim_{b\to\infty} \left(-\, e^{-x} \Big|_0^{b}\right) = \lim_{b\to\infty} \left(-\, e^{-b} + 1\right) = 1$$

3) $\Gamma(n) = (n-1)! \qquad n \in \mathbb{N}$

1) aplikatuz $\Gamma(n) = (n-1)\,\Gamma(n-1) = (n-1)\,(n-2)\,\Gamma(n-2) = \ldots\ldots =$
$= (n-1)\,(n-2) \ldots (n-(n-1))\,\Gamma(n-(n-1)) = (n-1)\,(n-2) \ldots 2.1\,\Gamma(1) = (n-1)!\,\Gamma(1)$ baina
$\Gamma(1) = 1$ denez $\Gamma(n) = (n-1)!$

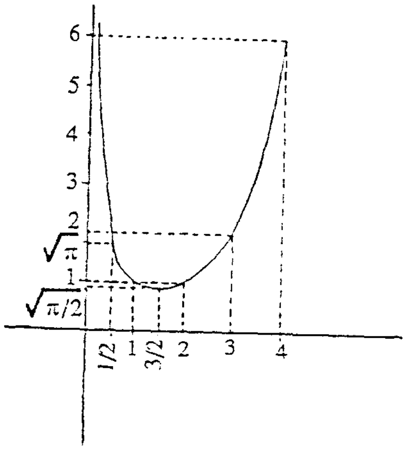
4) $\Gamma(P)$ funtzioaren balio guztiak ezagut daitezke $(1,2)$ tartekoak ezagutuz gero,
$p \geq 2\ \exists\, n \in \mathbb{N} \,/\, p = n + r \quad r \in (0,1)$ izanik eta 1) propietatea $(n-1)$ aldiz

aplikatuz $\Gamma(p) = (p-1)(p-2)....(p-(n-1))\,\Gamma(p-(n-1)) \Rightarrow$

$\Rightarrow \Gamma(p) = (p-1)(p-2)...(p-(n-1))\,\Gamma(1+r)$ eta $1+r \in (1,2)$

ez dugu $(0,1)$ tartea aukeratu $\Gamma(0^+) = \infty$ delako

$\Gamma(1) = 1 \quad \Gamma(2) = 1 \,.\, \Gamma(1) = 1$



5) Osagarri-formula $\qquad \Gamma(p)\,\Gamma(1-p) = \dfrac{\pi}{\sin(\pi p)}$

6) $\Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^\infty e^{-x}\,x^{1/2-1}\,dx = \int_0^\infty e^{-x}\,x^{-1/2}\,dx \qquad x = y^2 \qquad dx = 2\,y\,dy \quad \text{aldaketa eginez}$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^\infty e^{-y^2}\,y^{-1}.2.\,y\,dy = 2\underbrace{\int_0^\infty e^{-y^2}\,dy}_{} = 2\,A\;;$$

$$A^2 = \left(\int_0^\infty e^{-y^2}\,dy\right)\left(\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx\right) = \int_0^\infty\int_0^\infty e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy = \left|\begin{array}{ll} x = r\cos\theta & x,y \in [0,\infty) \\ & r \in [0,\infty) \\ y = r\sin\theta \quad |J| = r & \theta \in [0,\pi/2) \end{array}\right.$$

$$A^2 = \int_0^{\pi/2}\int_0^\infty e^{-r^2}\,r\,dr\,d\theta = \int_0^{\pi/2}\left(\frac{-e^{-r^2}}{2}\Big|_0^\infty\right)d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} d\theta = \frac{\pi}{4} \quad \Rightarrow \quad A = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

beraz $\quad \Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right) = 2\,.\,\dfrac{\sqrt{\pi}}{2} = \sqrt{\pi}$

7) $\Gamma\left(n + \dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{(2n-1)!!}{2^n}\sqrt{\pi}$ $\qquad$ idazkera $\qquad (2n)!! = 2.4.6..........2n = 2^n\,n!$

$(2n-1)!! = (2n-1)(2n-3)\;....\;5.3.1$

$$\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)=\left(n+\frac{1}{2}-1\right)\Gamma\left(n+\frac{1}{2}-1\right)=\ldots\ldots=\left(n+\frac{1}{2}-1\right)\left(n+\frac{1}{2}-2\right)\ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots\left(n+\frac{1}{2}-n\right)\Gamma\left(n+\frac{1}{2}-n\right)=\left(n-\frac{1}{2}\right)\left(n-\frac{1}{2}\right)\ldots\ \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=$$

$$=\left(\frac{2n-1}{2}-n\right)\left(\frac{2n-3}{2}\right)\ldots\frac{3}{2}\,\frac{1}{2}\,\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{(2n-1)!!}{2^n}\sqrt{\pi}$$

8) Bikoizketa-formula $\qquad \Gamma(2p)=\dfrac{2^{2p-1}\,\Gamma(p)\,\Gamma(p+1/2)}{\sqrt{\pi}}$

5.3 *Γ(p) FUNTZIOAREN BESTE ADIERAZPEN INTEGRALAK*

Aldagai-aldaketa eta Leibnitz-en formularen aplikaziotik datoz.

1) $y=x^p \qquad dy=p\,x^{p-1}\,dx \qquad$ aldaketa eginez

$$\Gamma(p)=\int_0^\infty e^{-x}\,x^{p-1}\,dx=\int_0^\infty e^{-y^{1/p}}\,\frac{1}{p}\,dy=\frac{1}{p}\int_0^\infty e^{-y^{1/p}}\,dy$$

orain $p'=\dfrac{1}{p}$ idatziz $\qquad \Gamma(1/p')=p'\displaystyle\int_0^\infty e^{-y^{p'}}\,dy \qquad$ letrak mutuak direnez,

$$\Gamma\left(\frac{1}{p}\right)=p\int_0^\infty e^{-x^p}dx\Rightarrow\int_0^\infty e^{-x^p}\,dx=\frac{1}{p}\,\Gamma\left(\frac{1}{p}\right)=\Gamma\left(\frac{1}{p}+1\right)\Rightarrow\boxed{\Gamma\left(1+\frac{1}{p}\right)=\int_0^\infty e^{-x^p}\,dx}$$

2) $x=ay \qquad dx=a\,dy \qquad a>0 \qquad$ aldaketa eginez

$$\Gamma(p)=\int_0^\infty e^{-x}\,x^{p-1}\,dx=\int_0^\infty e^{-ay}\,(ay)^{p-1}\,a\,dy=a^p\int_0^\infty e^{-ay}\,y^{p-1}\,dy$$

letrak mutuak direnez , $$\boxed{\Gamma(p) = a^p \int_0^\infty e^{-ax} x^{p-1}\, dx}$$

3) $x = ay^2$ $a > 0$ $dx = 2\,a\,y\,dy$ aldaketa eginez

$$\Gamma(p) = \int_0^\infty e^{-x} x^{p-1}\, dx = \int_0^\infty e^{-ay^2} (ay^2)^{p-1}\, 2\,a\,y\,dy = 2\,a^p \int_0^\infty e^{-ay^2} y^{2p-1}\, dy$$

$$\boxed{\Gamma(p) = 2\,a^p \int_0^\infty e^{-ax^2} x^{2p-1}\, dx}$$

4) $y = e^{-x}$ $dy = -\,e^{-x}\,dx$ $x = Ln\,\dfrac{1}{y}$ aldaketa eginez

$$\Gamma(p) = \int_0^\infty e^{-x} x^{p-1}\, dx = \int_1^0 y \left(Ln\,\frac{1}{y}\right)^{p-1} (-(y)^{-1})\, dy = \int_0^1 \left(Ln\,\frac{1}{y}\right)^{p-1} dy$$

$$\boxed{\Gamma(p) = \int_0^1 \left(Ln\,\frac{1}{x}\right)^{p-1} dx = (-1)^{p-1} \int_0^1 (Ln\ x)^{p-1}\, dx}$$

5) $\Gamma\,'(P)$-ren adierazpena kalkulatuko dugu.

$$\Gamma(p) = \int_0^\infty e^{-x} x^{p-1}\, dx\ ,\quad \Gamma\,'(p) = \int_1^0 \frac{\partial\,(e^{-x} x^{p-1})}{\partial p}\, dx = \int_0^\infty e^{-x} x^{p-1}\, Ln\,x\, dx$$

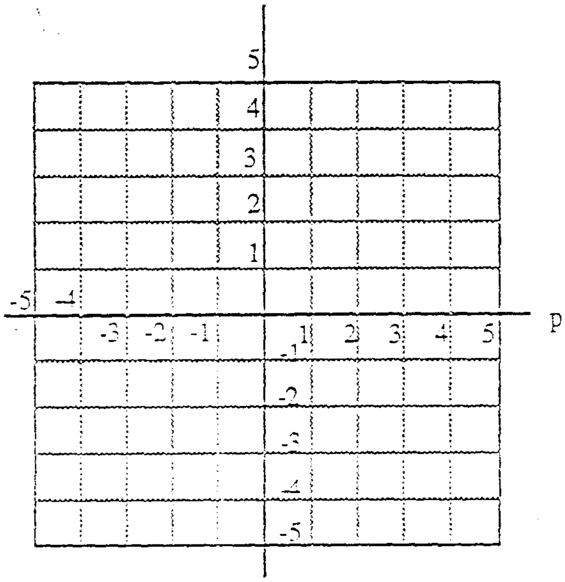
$$\boxed{\Gamma\,'(p) = \int_0^\infty e^{-x} x^{p-1}\, Ln\,x\, dx}$$

5.4 $\Gamma(p)$-REN HEDAPENA p-REN BALIO NEGATIBOETARAKO

Gauss-en formulak $p \in \mathbb{Z}^- \cup \{0\}$ izan ezik beste balioetarako ere balio badu, $\Gamma(p)$-ren adierazpen integralak $p > 0$ denean bakarrik balio du. Oraingo honetan bere definizioa zenbaki negatiboetara luzatuko dugu, $\mathbb{Z}^- \cup \{0\}$ multzokoetara ezik.

$\Gamma(p+1) = p\,\Gamma(p)$ $p \in (-1,0)$ hartuz, $p+1 \in (0,1) \Rightarrow \exists\, \Gamma(p+1)$ beraz, $\Gamma(p)$ funtzioaren balio-taula eta grafikoa

p	$\Gamma(p)$
1,00	1,0000
1,10	0,9514
1,20	0,9182
1,30	0,8975
1,40	0,8873
1,50	0,8862
1,60	0,8935
1,70	0,9086
1,80	0,9314
1,90	0,9618
2,00	1,0000



$\Gamma(p)$ ezagut dezakegu $p \in (-1,0)$ izanik, $\Gamma(p) = \dfrac{\Gamma(p+1)}{p}$ eta errepikapenaz behin $\Gamma(p)$, $p \in (-1,0)$, ezagutuz gero $\Gamma(p)$, $p \in (-2,-1)$, ezagut daiteke zeren $p \in (-2,-1)$ bada $p+1 \in (-1,0)$ eta $\Gamma(p) = \dfrac{\Gamma(p+1)}{p}$, prozesu honekin jarraituz

$$p \in (-(n+1),-n) \qquad \Gamma(p) = \frac{\Gamma(p+n+1)}{p(p+1)\ldots(p+n)} \qquad p+n+1 \in (0,1)$$

Formula horrekin $\Gamma(P)$-ren grafikoa marraz dezakegu

$$\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right) = -3'5 \;;\quad \Gamma\left(-\frac{3}{2}\right) = 2'36 \;;\quad \Gamma\left(-\frac{5}{2}\right) = -0'94 \;;\quad \Gamma\left(-\frac{7}{5}\right) = 0'27$$

5.5 $\Gamma(p)$ FUNTZIORAKO FORMULA ASINTOTIKOA $P \to \infty$ DENEAN

$\Gamma(p) = \int_0^\infty e^{-x} x^{p-1}\,dx \quad p > 0$ funtzioa $\sqrt{2\pi}\; e^{-p}\, p^{p+\frac{1}{2}}$ formularen bidez hurbil dezakegu $p \to \infty$ denean, hau da $\Gamma(p+1) \sim \sqrt{2\pi}\; e^{-p}\, p^{p+\frac{1}{2}} \quad p \to \infty$,

$p \in \mathbb{N} \quad \Gamma(p+1) = p!$ eta $p! \sim \sqrt{2\pi}\; e^{-p}\, p^{p+\frac{1}{2}} \quad p \to \infty$ Stirling-en formula da, beraz $\Gamma(p+1) \sim \sqrt{2\pi p}\; e^{-p}\, p^{p}$ dugu

$\left(\text{Egia esan } \Gamma(p+1) = \sqrt{2\pi}\; e^{-p}\, p^{p+\frac{1}{2}}\, e^{\frac{\theta}{12(p+1)}} \quad 0 < \theta < 1 \text{ baina } \lim_{p\to\infty} e^{\frac{\theta}{12(p+1)}} = 1 \text{ da} \right)$

5.6 $\beta(p,q)$ BETA FUNTZIOA

$\beta(p,q) = \int_0^1 x^{p-1} (1-x)^{q-1}\,dx$ funtzioa da, uniformeki konbergentea da

$\forall\, p,q > 0$. $\beta(p,q)$ funtzioa $(0,1)$ tarteko muturretan integral inpropioa da.

Ikus dezagun non den konbergentea, horretarako

$$\beta(p,q) = \int_0^{1/2} x^{p-1} (1-x)^{q-1}\,dx + \int_{1/2}^1 x^{p-1} (1-x)^{q-1}\,dx = I_1 + I_2$$

I_1 integralaren izaera aztertuz

$g(x) = \dfrac{1}{(x-0)^\alpha}$ hartuz, $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0^+} x^\alpha x^{p-1} (1-x)^{q-1} = \lim_{x\to 0^+} x^{\alpha+p-1} = 0$

izango da $\alpha + p - 1 \geq 0$ bada eta konbergentea izan dadin $\alpha < 1$, bi baldintza hauetatik $p > 0$ eta $\forall q$ baldintzak ondorioztatzen ditugu.

I_2 integralaren analisia

$g(x) = \frac{1}{(1-x)^{\alpha}}$ hartuko dugu $\lim\limits_{x\to 1^-} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to 1^-} (1-x)^{\alpha}\, x^{p-1}\, (1-x)^{q-1} = \lim\limits_{x\to 1^-} (1-x)^{\alpha+p-1} = 0$

da $\alpha + P - 1 > 0$ bada eta konbergentea izateko $\alpha < 1$ bete behar da, biak batuz $q > 0$ eta $\forall p$ ateratzen dugu.

$\beta(p,q)$ · funtzioa konbergentea izan dadin bai I_1 bai I_2 integralek batera konbergenteak izan behar dute, eta hori $p,q > 0$ direnean bakarrik gertatzen da.

$\beta(p,q)$ funtzioa konbergentea ezezik uniformeki konbergentea ere bada, eta 3.20,21,22,24,25 teoremak aplika dakizkioke.

5.7 $\beta(p,q)$ FUNTZIOAREN PROPIETATEAK

1) $\beta(p,q) = \beta(q,p)$, hau da, simetrikoa da.

$$\beta(p,q) = \int_0^1 x^{p-1} (1-x)^{q-1}\, dx = [\, y = 1-x \quad dy = -dx\,] = \int_1^0 (1-y)^{p-1}\, y^{q-1}\, (-1)\, dy =$$

$$= \int_0^1 (1-y)^{p-1}\, y^{q-1}\, dy = \beta(q,p)$$

2) $\beta(p,1) = \frac{1}{p}$

$$\beta(p,1) = \int_0^1 x^{p-1}\, dx = \frac{x^p}{p}\Big|_0^1 = \frac{1}{p}$$

3) Laburketa-formula

A) $q-1 > 0 \quad \beta(p,q) = \frac{q-1}{p+q-1}\, \beta(p,q-1) \quad [\mathbf{p} \leftrightarrow \mathbf{q}] \quad p-1 > 0 \quad \beta(p,q) = \frac{p-1}{p+q-1}\, \beta(p-1,q)$

B) $q-1 > 0 \quad \beta(p,q) = \frac{q-1}{p}\, \beta(p+1,q-1) \quad [\mathbf{p} \leftrightarrow \mathbf{q}] \quad p-1 > 0 \quad \beta(p,q) = \frac{p-1}{q}\, \beta(p-1,q+1)$

$$B)\ \beta(p,q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx = \begin{bmatrix} u=(1-x)^{q-1} & du = -(q-1)(1-x)^{q-2}\,dx \\ dv = x^{p-1}\,dx & v = \frac{x^p}{p} \end{bmatrix} =$$

$$x = \frac{x^p(1-x)^{q-1}}{p}\Big|_0^1 + \int_0^1 \frac{x^p}{p}(q-1)(1-x)^{q-2}\,dx = \frac{q-1}{p}\int_0^1 x^p(1-x)^{q-2}\,dx = \frac{q-1}{p}\ \beta(p+1,q-1)$$

A) $x^p(1-x)^{q-2} = x^{p-1}x(1-x)^{q-2} = x^{p-1}(x-1+1)(1-x)^{q-2} = x^{p-1}(1-x)^{q-2} -$
$- x^{p-1}(1-x)(1-x)^{q-2} = x^{p-1}(1-x)^{q-2} - x^{p-1}(1-x)^{q-1} \Rightarrow$ B) formulan ordezkatuz

$$\Rightarrow \beta(p,q) = \frac{q-1}{p}\int_0^1 (x^{p-1}(1-x)^{q-2} - x^{p-1}(1-x)^{q-1})\,dx = \frac{q-1}{p}\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-2}\,dx -$$

$$-\frac{q-1}{p}\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx = \frac{q-1}{p}\beta(p,q-1) - \frac{q-1}{p}\beta(p,q) \Rightarrow \text{ beste aldera pasatuz}$$

$$\Rightarrow \left(1+\frac{q-1}{p}\right)\beta(p,q) = \frac{q-1}{p}\ \beta(p,q-1) \Rightarrow \beta(p,q) = \frac{q-1}{p+q-1}\ \beta(p,q-1)$$

4) $\forall\ p>0 \quad n \in \mathbb{N} \qquad \beta(p,n) = \beta(n,p) = \dfrac{(n-1)!}{p(p+1)\ldots(p+n-1)}$

$$\beta(p,n) = \frac{n-1}{p+n-1}\ \beta(p,n-1) = \left(\frac{n-1}{p+n-1}\right)\left(\frac{n-2}{p+n-2}\right)\beta(p,n-2) = \ldots = \left(\frac{n-1}{p+n-1}\right)\left(\frac{n-2}{p+n-2}\right)\ldots$$

$\ldots\left(\dfrac{n-(n-1)}{p+1}\right)\beta(p,1) = \dfrac{(n-1)!}{(p+n-1)(p+n-2)\ldots(p+1).p}$ 3) eta 2) propietateak erabiltzen dira.

5) $\forall\ m,n \in \mathbb{N} \qquad \beta(m,n) = \dfrac{(n-1)!\,(m-1)!}{(n+m-1)!}$

4)-an $p = m$ eginez $\beta(m,n) = \dfrac{(n-1)!}{(m+n-1)(m+n-2)\ldots(m+1)\,m} =$

$$\frac{(n-1)!\,(m-1)\,(m-2)\ldots2.1.}{(m+n-1)(m+n-2)\ldots(m+1)\ m\ (m-1)(m-2)\ldots2.1.} = \frac{(n-1)!\,(m-1)!}{(m+n-1)!}$$

6) $$\beta(p,q) = \frac{\Gamma(p)\,\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$$

$p,q \in \mathbb{N}$ $\quad \beta(p,q) = \dfrac{(p-1)!\,(q-1)!}{(p+q-1)!} = \dfrac{\Gamma(p)\,\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$, $\beta(p,q)$-ren 5. propietatea eta $\Gamma(p)$-ren 3. propietatea erabiliz.

7) $$\beta\left(n+\frac{1}{2}, m+\frac{1}{2}\right) = \frac{(2n-1)!!\,(2n-1)!!}{2^{n+m}\,(m+n)!}\,\pi \qquad n,m \in \mathbb{N}$$

6) aplikatuz $$\beta\left(n+\frac{1}{2}, m+\frac{1}{2}\right) = \frac{\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(m+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\,(m+n+1)} = \frac{\dfrac{(2n-1)!!}{2^n}\sqrt{\pi}\;\dfrac{(2m-1)!!}{2^m}\sqrt{\pi}}{(m+n)!} =$$

$$= \frac{(2n-1)!!\,(2m-1)!!}{2^{n+m}\,(m+n)!}\,\pi$$ $\Gamma(p)$-ren 7. eta 3. propietateak erabiliz.

5.8 $\beta(p,q)$ FUNTZIOAREN BESTE ADIERAZPENAK

Kasu honetan ere aldagai-aldaketen bidez lortzen dira.

1) $x = \sin^2 y \quad dx = 2\sin y \cos y\, dy \quad x = 0 \leftrightarrow y = 0\ ,\ \ x = 1 \leftrightarrow y = \dfrac{\pi}{2}$ aldaketa

$$\beta(p,q) = \int_0^1 x^{p-1}\,(1-x)^{q-1}\,dx = \int_0^{\pi/2} (\sin^2 y)^{p-1}\,(1-\sin^2 y)^{q-1}\,2\sin y \cos y\, dy =$$

$$= 2\int_0^{\pi/2} \sin^{2p-1} y\ \cos^{2q-1} y\, dy$$ eta letrak mutuak direnez

$$\boxed{\beta(p,q) = 2\int_0^{\pi/2} \sin^{2p-1} x\ \cos^{2q-1} x\ dx}$$

2) $x = \dfrac{y}{1+y}$ $\quad dx = \dfrac{1}{(1+y)^2}\, dy \quad x = 0 \leftrightarrow y = 0 \quad x = 1 \leftrightarrow y = \infty$ aldaketaren bidez

$$\beta(p,q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\, dx = \int_0^\infty \left(\frac{y}{1+y}\right)^{p-1}\left(1 - \frac{y}{1+y}\right)^{q-1} \frac{1}{(1+y)^2}\, dy =$$

$$= \int_0^\infty \left(\frac{y}{1+y}\right)^{p-1}\left(\frac{y}{1+y}\right)^{q-1}\left(\frac{1}{1+y}\right)^2 dy = \int_0^\infty \frac{y^{p-1}}{(1+y)^{p+q}}\, dy$$

$$\boxed{\beta(p,q) = \int^\infty \frac{x^{p-1}}{(1+x)^{p+q}}\, dx}$$

6. GAIA
FOURIER-EN SERIEAK

6.1 SISTEMA ORTOGONALAK

1.1 Definizioa

Izan bitez $f,g : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bi funtzio integragarri, f eta g A multzoan funtzio ortogonalak direla esaten da baldin $\int_A f(x)\, g(x)\, dx = 0$ bada.

1.2 Definizioa

$S = \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \dots\}$ funtzio-sistema ortogonala da baldin sistema osatzen duten funtzioak binaka hartuz ortogonalak badira, hau da,

$$\forall\, i \neq j \qquad \int_A \varphi_i(x)\, \varphi_j(x)\, dx = 0$$

1.3 Definizioa

$$\| \varphi \| = \left(\int_A \varphi^2(x)\, dx \right)^{1/2}$$ balio φ funtzioaren norma da A multzoan

1.4 Definizioa

$S = \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \dots\}$ funtzio-sistema ortonormala da baldin ortogonala bada eta $\forall i$ $\| \varphi_i \| = 1$ betetzen bada.

1.5 Adibidea

$S = \{1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \cos 3x, \sin 3x, \dots\}$ sistema ortogonala da $[-\pi,\pi]$ tartean (2π luzerako edozein tartetan).

Esandakoa egiaztatzeko zera frogatu behar da:

a) $$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \sin mx\, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos mx\, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \sin mx\, dx = 0$$

b) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx\,dx = \pi = \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx\,dx$ eta $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cos nx\,dx = 0$

a) $\cos nx \sin mx = \frac{1}{2}(\sin(m-n)x + \sin(m+n)x)$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \sin mx\,dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \sin(m-n)x\,dx + \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \sin(m+n)x\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{-\cos(m-n)x}{m-n}\Big|_{-\pi}^{\pi}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{-\cos(m+n)x}{m+n}\Big|_{-\pi}^{\pi}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{-(-1)^{m-n} + (-1)^{m-n}}{m-n}\right) +$$

$$+ \frac{1}{2}\left(\frac{-(-1)^{m+n} + (-1)^{m+n}}{m-n}\right) = 0$$

Beste integraleetan ondorengo berdintzak erabili behar dira

$$\cos nx \cos mx = \frac{1}{2}(\cos(n-m)x + \cos(n+m)x)$$

$$\sin nx \sin mx = \frac{1}{2}(\cos(n-m)x + \cos(n+m)x)$$

b) $\sin nx \cos nx = \frac{1}{2}\sin 2nx$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cos nx\,dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \sin 2nx\,dx = \frac{1}{2}\,\frac{-\cos 2nx}{2n}\Big|_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{2}\left(\frac{-1+1}{2n}\right) = 0$$

$$\cos^2 nx = \frac{1}{2}(1 + \cos 2nx)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx\,dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}(1 + \cos 2nx)\,dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} dx + \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \cos 2nx\,dx = \frac{1}{2}\left(x + \frac{\sin 2nx}{2n}\Big|_{-\pi}^{\pi}\right) = \pi$$

$$\sin^2 nx = \frac{1}{2}(1 - \cos 2nx)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx \, dx = \pi$$

Azken bi integral hauek ez dira erabili behar sistema ortogonala dela frogatzeko, baina bai funtzioen norma ezagutzeko.

$$\int_{-\pi}^{\pi} 1 \, dx = x \Big|_{-\pi}^{\pi} = 2\pi \qquad \text{1 funtzioaren norma: } \| 1 \| = \sqrt{2\pi}$$

Sistema hau normalizatzeko beraien normaz zatitu behar dira.

$$S = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}}, \ldots\ldots\ldots \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}} \ldots\ldots \right\}$$ sistema ortonormala da.

6.2 FOURIER-EN SERIEAK

2.6 Definizioa

$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ funtzio-seriea serie trigonometriko deitzen da eta a_0, a_n, b_n $(n = 1,2,....)$ konstante errealak serie trigonometrikoaren koefizienteak dira.

Aurreko serie trigonometrikoa konbergentea bada, bere batura 2π periododun funtzio bat dela esan behar dugu, hain zuzen ere $\sin nx$ eta $\cos nx$ funtzioak 2π periododunak direlako.

2.7 Teorema

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ eta $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ zenbaki-serieak absolutuki konbergenteak badira, serie trigonometrikoa absolutu eta uniformeki konbergentea da $\mathbb{R}$ multzoan

Frogapena:

$| a_n \cos nx + b_n \sin nx | \leq | a_n | + | b_n |$ $\quad n = 1,2,....\quad \forall x \in \mathbb{R}$

$\sum_{n=1}^{\infty} | a_n |$ eta $\sum_{n=1}^{\infty} | b_n |$ absolutuki konbergenteak direnez, Weierstrass-en erizpidea aplikatuz teorema frogatzen dugu.

2.8 Definizioa

Izan bedi f(x) funtzio integragarria eta $2l$ periododuna,

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{\pi n x}{l} + b_n \sin \frac{\pi n x}{l} \right)$$ serie trigonometrikoa, zeinen koefizienteak

$$a_0 = \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} f(x)\, dx, \quad a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} f(x) \cos \frac{\pi n x}{l}\, dx \quad \text{eta} \quad b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} f(x) \sin \frac{\pi n x}{l}\, dx \qquad n = 1,2,\ldots$$

formulen bidez lortzen bait dira, f(x) funtzioaren Fourier-en serie deitzen da eta koefizienteak Fourier-en koefizienteak.

Egiazta dezagun serie trigonometrikoa uniformeki konbergentea bada eta bere batura f(x) (funtzio jarraia) bada, seriearen koefizienteak emandako formulen bidez kalkulatzen direla.

Serie trigonometrikoa uniformeki konbergentea bada gaiz-gai integra daiteke:

$$\int_{-l}^{l} f(x)\, dx = \int_{-l}^{l} \frac{a_0}{2}\, dx + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_{-l}^{l} a_n \cos \frac{\pi n x}{l}\, dx + \int_{-l}^{l} b_n \sin \frac{\pi n x}{l}\, dx \right)$$

$$\left.\begin{array}{l} \displaystyle\int_{-l}^{l} \frac{a_0}{2}\, dx = l\, a_0 \\[2ex] \displaystyle\int_{-l}^{l} a_n \cos \frac{\pi n x}{l}\, dx = a_n \left[\frac{\sin \frac{\pi n x}{l}}{\frac{\pi n}{l}} \right]_{-l}^{l} = \frac{l\, a_n}{\pi n} (\sin \pi n - \sin(-\pi n)) = 0 \\[2ex] \displaystyle\int_{-l}^{l} b_n \sin \frac{\pi n x}{l}\, dx = b_n \left[\frac{-\cos \frac{\pi n x}{l}}{\frac{\pi n}{l}} \right]_{-l}^{l} = \frac{l\, b_n}{\pi n} (-\cos \pi n + \cos(-\pi n)) = 0 \end{array}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_{-l}^{l} f(x)\, dx = l\, a_0 \quad \Rightarrow \quad a_0 = \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} f(x)\, dx$$

Beste koefizienteak kalkulatzeko 1.5 Adibidearen emaitzak erabiliko ditugu. Aztertzen ari garen funtzioek, $\sin \frac{\pi nx}{l}$ eta $\cos \frac{\pi nx}{l}$ alegia, argumentu desberdina badute ere emaitzek balio izango dute:

$$n \neq m \qquad \int_{-l}^{l} \cos \frac{\pi nx}{l} \cos \frac{\pi mx}{l}\, dx = 0 \qquad\qquad n = m \qquad \int_{-l}^{l} \cos^2 \frac{\pi nx}{l}\, dx = l$$

$$\int_{-l}^{l} \cos \frac{\pi nx}{l} \sin \frac{\pi mx}{l}\, dx = 0 \qquad\qquad \int_{-l}^{l} \cos \frac{\pi nx}{l} \sin \frac{\pi nx}{l}\, dx = 0$$

$$\int_{-l}^{l} \sin \frac{\pi nx}{l} \sin \frac{\pi mx}{l}\, dx = 0 \qquad\qquad \int_{-l}^{l} \sin^2 \frac{\pi nx}{l}\, dx = l$$

a_k koefizienteak kalkulatzeko bi atalak $\cos \frac{\pi kx}{l}$ funtzioz biderkatuko ditugu:

$$f(x) \cos \frac{\pi kx}{l} = \frac{a_0}{l} \cos \frac{\pi kx}{l} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{\pi nx}{l} \cos \frac{\pi kx}{l} + b_n \sin \frac{\pi nx}{l} \cos \frac{\pi kx}{l} \right) \quad \text{serie}$$

hau ere uniformeki konbergentea dela 2.7 Teorema aplikatuz froga liteke. Gaiz gai integratuz $[-l,l]$ tartean:

$$\int_{-l}^{l} f(x) \cos \frac{\pi kx}{l}\, dx = \int_{-l}^{l} \frac{a_0}{2} \cos \frac{\pi kx}{l}\, dx + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \int_{-l}^{l} \cos \frac{\pi nx}{l} \cos \frac{\pi kx}{l}\, dx + \right.$$

$$\left. + b_n \int_{-l}^{l} \sin \frac{\pi nx}{l} \cos \frac{\pi kx}{l}\, dx \right)$$

batukarian agertzen diren integralen artean a_k koefizienteari dagokiona bakarrik ez da anulatzen goiko berdintzak kontutan hartzen baditugu, beraz

$$\int_{-l}^{l} f(x) \cos \frac{\pi kx}{l}\, dx = a_k \int_{-l}^{l} \cos^2 \frac{\pi kx}{l}\, dx = l\, a_k \;\Rightarrow\; a_k = \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} f(x) \cos \frac{\pi kx}{l}\, dx$$

b_k koefizienteak kalkulatzeko oraingoan $\sin\frac{\pi kx}{l}$ funtzioaz biderkatzen da, lortzen den serie berria uniformeki konbergentea delarik. Serie hau gaiz gai integratzen badugu $[-l,l]$ tartean

$$\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{\pi kx}{l}\,dx = \frac{a_0}{2}\int_{-l}^{l}\sin\frac{\pi kx}{l}\,dx + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\int_{-l}^{l}\cos\frac{\pi kx}{l}\sin\frac{\pi kx}{l}\,dx +\right.$$

$$\left. + b_n\int_{-l}^{l}\sin\frac{\pi nx}{l}\sin\frac{\pi kx}{l}\,dx\right)$$

Kasu honetan anulatzen ez den integral bakarra b_k koefizienteari dagokiona da

$$\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{\pi kx}{l}\,dx = b_k\int_{-l}^{l}\sin^2\frac{\pi kx}{l}\,dx = l\,b_k$$ berdintza lortzen da eta hortik

$$b_k = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{\pi kx}{l}\,dx$$

6.3 FUNTZIO BAT FOURIER-EN SERIEZ GARAGARRIA IZATEKO BALDINTZA NAHIKOA

Orain funtzio batek Fourier-en seriez garagarria izan dadin bete behar dituen baldintzak aztertuko ditugu.

3.9 Definizioa

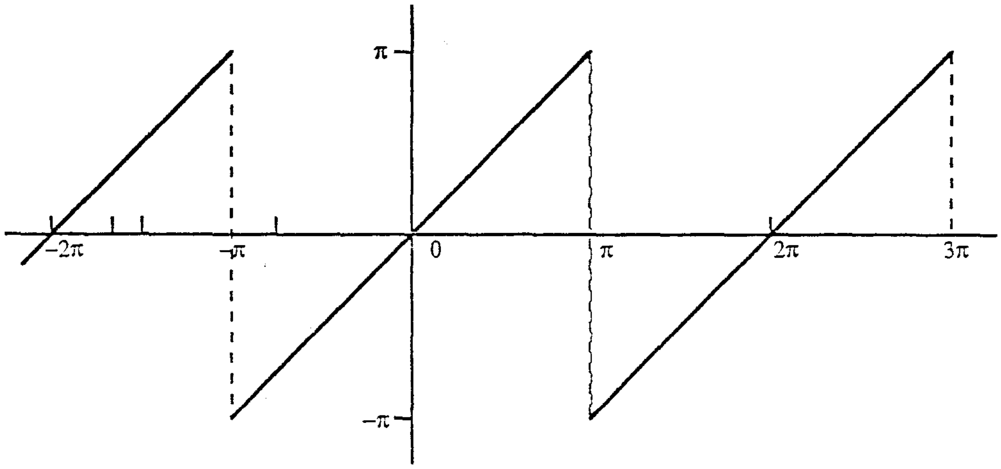
Izan bedi $f(x)$ (a,b) tartean definituriko funtzio bat. Tartea kopuru finitu azpitartetan, zeinetan $f(x)$ funtzioa monotonoa eta jarraia bait da, deskonposa badaiteke $f(x)$ funtzioak Dirichlet-en baldintzak betetzen dituela esan ohi da.

3.10 Teorema

$2l$ periododun $f(x)$ funtzioak $(-l,l)$ tartean Dirichlet-en baldintzak betetzen baditu, beraren Fourier-en seriea $f(x)$ funtziorantz konbergentea da jarraitasun-puntuetan eta $\frac{f(x^-)+f(x^+)}{2}$ baliorantz etenguneetan.

3.11 Adibidea

- Izan bedi $f(x) = x$ $\quad -\pi < x \leq \pi \quad$ 2π periododun funtzioa



f(x) funtzioak Dirichlet-en baldintzak betetzen ditu $(-\pi,\pi)$ tartean, hau da, monotono eta jarraia da.

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\,dx = \frac{1}{\pi}\left.\frac{x^2}{2}\right|_{-\pi}^{\pi} = 0$$

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\cos kx\,dx = \begin{bmatrix} x = u & dx = du \\ \cos kx\,dx = dv & v = \dfrac{\sin kx}{k} \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\left.\frac{x\sin kx}{k}\right|_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{k}\int_{-\pi}^{\pi}\sin kx\,dx\right) = \frac{1}{\pi}\,\frac{1}{k}\left(\left.\frac{\cos kx}{k}\right|_{-\pi}^{\pi}\right) = \frac{1}{\pi k}\left(\frac{(-1)^k - (-1)^k}{k}\right) = 0$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\sin kx\,dx = \begin{bmatrix} x = u & dx = du \\ \sin kx\,dx = dv & v = \dfrac{-\cos kx}{k} \end{bmatrix} =$$

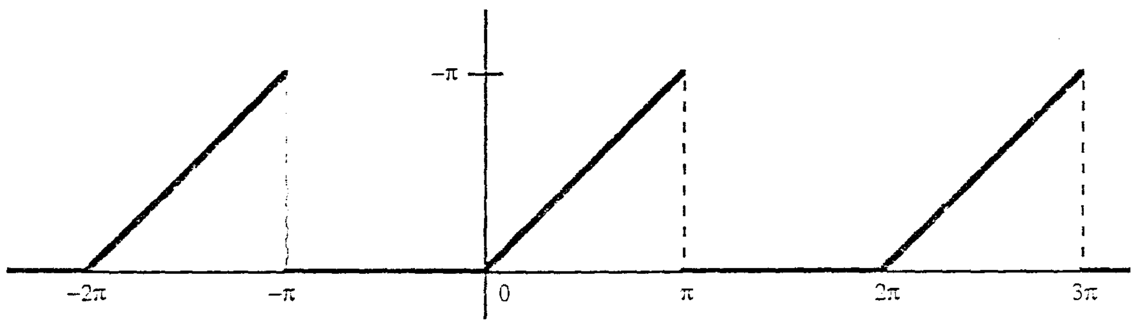
$$= \frac{1}{\pi}\left(\left.\frac{-x\cos kx}{k}\right|_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{k}\int_{-\pi}^{\pi}\cos kx\,dx\right) =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\frac{-\pi\,(-1)^k + (-1)^k\,\pi}{k}\right) + \frac{1}{\pi k}\;\frac{\sin kx}{k}\;\Big|_{-\pi}^{\pi} = \frac{-2(-1)^k}{k} = (-1)^{k+1}\,\frac{2}{k}$$

$$f(x) = 2\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1}\,\frac{\sin kx}{k}$$ jarraitasun puntuetan $(x \neq \pm k\pi)$, etenguneetan ordea,

$$\frac{f(x^-) + f(x^+)}{2} = \frac{\pi - \pi}{2} = 0$$ baliorantz.

- Kontsidera dezagun $f(x) = \begin{cases} 0 & -\pi < x \leq 0 \\ x & 0 < x \leq \pi \end{cases}$ 2π periododun funtzioa



f(x) funtzioa monotono eta jarraia da $(-\pi,\pi]$ tartean

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{0} 0\,dx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} x\,dx = \frac{1}{\pi}\,\frac{x^2}{2}\Big|_0^{\pi} = \frac{1}{\pi}\,\frac{\pi^2}{2} = \frac{\pi}{2}$$

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} 0\cos kx\,dx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} x\cos kx\,dx = \frac{1}{\pi}\left(\frac{x\sin kx}{k}\Big|_0^{\pi} - \frac{1}{k}\int_0^{\pi}\sin kx\,dx\right) =$$

$$= \frac{1}{k\pi}\,\frac{\cos kx}{k}\Big|_0^{\pi} = \frac{-2}{k^2\,\pi}$$ k bakoitia bada eta 0 k bikoitia bada

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} 0 \sin kx\,dx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} x \sin kx\,dx = \frac{1}{\pi}\left(\frac{-x\cos kx}{k}\Big|_0^{\pi} + \frac{1}{k}\int_0^{\pi}\cos kx\,dx\right) =$$

$$= \frac{-\pi\,(-1)^k}{\pi k} + \frac{1}{k\pi}\,\frac{\sin kx}{k}\Big|_0^{\pi} = \frac{1}{k} \quad \text{k bakoitia bada eta} \quad \frac{-1}{k} \quad \text{k bikoitia bada}$$

jarraitasun-puntuetan: $f(x) = \frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi}\left(\frac{\cos x}{1^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \ldots\right) + \left(\frac{\sin x}{1} - \frac{\sin 2x}{2} + \right.$

$\left. + \frac{\sin 3x}{3} + \ldots\right)$ eta etenguneetan $\frac{f(x^+) + f(x^-)}{2} = \frac{\pi + 0}{2} = \frac{\pi}{2}$ baliorantz.

6.4 FUNTZIO BAKOITI ETA BIKOITIETARAKO FOURIER-EN SERIEZKO GARAPENA

4.12 Lema

Demagun $\psi(x)$ funtzioa $[l,l]$ tartean integragarria dela

a) $\psi(x)$ bakoitia bada $\int_{-l}^{l} \psi(x)\,dx = 0$ $\qquad [\psi(x) = -\psi(-x)]$

b) $\psi(x)$ bikoitia bada $\int_{-l}^{l} \psi(x)\,dx = 2\int_{0}^{l} \psi(x)\,dx$ $\qquad [\psi(x) = -\psi(-x)]$

Frogapena:

a) $\int_{-l}^{l} \psi(x)\,dx = \int_{-l}^{0} \psi(x)\,dx + \int_{0}^{l} \psi(x)\,dx = [x = -t \; dx = -dt] =$

$$= \int_{l}^{0} -\psi(-t)\,dt + \int_{0}^{l} \psi(x)\,dx = -\int_{0}^{l} \psi(t)\,dt + \int_{0}^{l} \psi(x)\,dx = 0$$

b) $$\int_{-l}^{l} \psi(x)\,dx = \int_{-l}^{0} \psi(x)\,dx + \int_{0}^{l} \psi(x)\,dx = [x = -t \quad dx = -dt] =$$

$$= \int_{l}^{0} -\psi(-t)\,dt + \int_{0}^{l} \psi(x)\,dx = \int_{0}^{l} \psi(t)\,dt + \int_{0}^{l} \psi(x)\,dx = 2\int_{0}^{l} \psi(x)\,dx$$

4.13 Teorema

Demagun f(x) funtzioa Fourier-en seriez garagarria dela, f(x) bikoitia bada beraren Fourier-en serieak $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{\pi n x}{l}$ forma hartzen du

$$a_k = \frac{2}{l}\int_{0}^{l} f(x)\cos\frac{\pi k x}{l}\,dx \qquad k = 0,1,2,\ldots \quad \text{izanik.}$$

Frogapena:

Formula orokorretan $a_k = \frac{1}{l}\int_{0}^{l} f(x)\cos\frac{\pi k x}{l}\,dx$ eta $b_k = \frac{1}{l}\int_{0}^{l} f(x)\sin\frac{\pi k x}{l}\,dx$

f(x) bikoitia bada $\cos\frac{\pi k x}{l}$ bikoitia eta $\sin\frac{\pi k x}{l}$ bakoitia direnez, $f(x)\cos\frac{\pi k x}{l}$ bikoitia eta $f(x)\sin\frac{\pi k x}{l}$ bakoitia dira, 4.12 Lema aplikatuz

$$a_k = \frac{2}{l}\int_{0}^{l} f(x)\cos\frac{\pi k x}{l}\,dx \quad \text{eta} \quad b_k = 0 \quad \text{balioak lortzen dira.}$$

4.14 Teorema

f(x) funtzio bakoitia eta Fourier-en seriez garagarria bada bere Fourier-en seriea $\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{\pi n x}{l}$ erakoa da $b_k = \frac{2}{l}\int_{0}^{l} f(x)\sin\frac{\pi k x}{l}\,dx$ k = 1,2,... izanik.

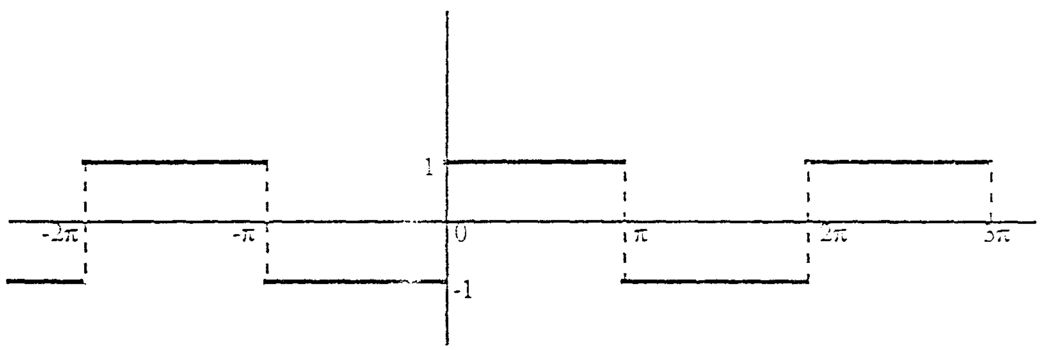
Frogapena:

f(x) bakoitia bada $f(x)\cos\frac{\pi kx}{l}$ bakoitia eta $f(x)\sin\frac{\pi kx}{l}$ bikoitia dira, formula orokorretan 4.12 Lema aplikatuz $a_k = 0 \quad k = 0,1,2\ldots$ eta $b_k = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{\pi kx}{l}\,dx$ balioak lortzen dira.

4.15 Adibidea

- Gara dezagun Fourier-en seriez $f(x) = \begin{cases} -1 & -\pi < x < 0 \\ 0 & x = 0, \pi \\ 1 & 0 < x < \pi \end{cases}$

  2π periododun funtzioa



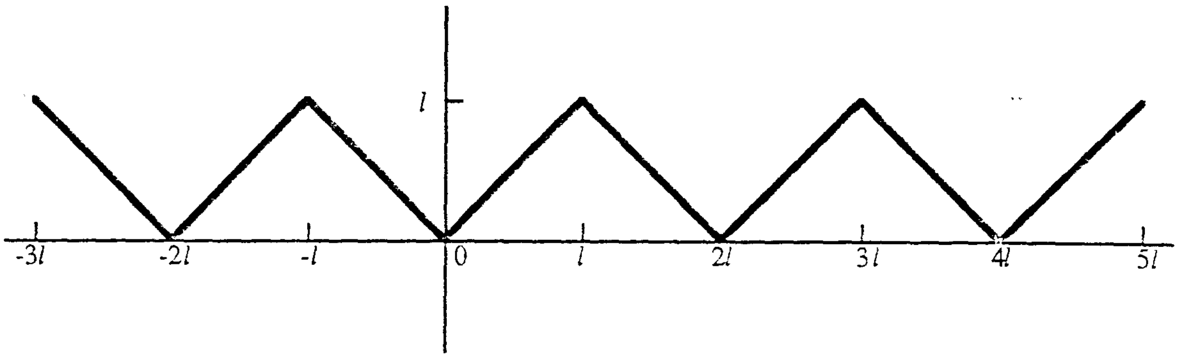
f(x) funtzioa bakoitia da $\Rightarrow \; \forall k = 0,1,2,\ldots \quad a_k = 0$

$$b_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(1)\sin\frac{\pi kx}{\pi}\,dx = \frac{2}{\pi}\left(\frac{-1}{k}\cos kx\,\Big|_0^{\pi}\right) = \frac{2}{k\pi}(-(-1)^k + 1) = \frac{4}{(2m+1)\pi}$$

$k = 2m+1$ denean

orduan $f(x) = \sum_{m=0}^{\infty}\frac{4}{(2m+1)\pi}\sin(2m+1)x = \frac{4}{\pi}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\sin(2m+1)x}{2m+1}$

- Har dezagun $f(x) = |x| \quad -l \le x \le l \quad 2l$ periododun funtzioa
  funtzio hau bikoitia da, beraz $\forall k = 1,2,\ldots \; b_k = 0$ dugu



$$a_0 = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} |x|\, dx \; \frac{2}{l}\int_0^l x\, dx = \frac{2}{l}\,\frac{x^2}{2}\Big|_0^l = l$$

$$a_k = \frac{2}{l}\int_0^l x \cos\frac{\pi k x}{l}\, dx = \left[\frac{\pi}{l}x = t \quad \frac{\pi}{l}dx = dt\right] = \frac{2}{l}\int_0^{\pi} \frac{l}{\pi}\, t\,(\cos kt)\,\frac{l}{\pi}\, dt =$$

$$= \frac{2l}{\pi^2}\int_0^{\pi} t\cos kt\, dt = \frac{2l}{\pi^2}\left(\frac{-2}{(2m+1)^2}\right) = [k = 2m+1 \text{ denean}] = \frac{-4l}{(2m+1)^2\,\pi^2}$$

$$|x| = \frac{l}{2} - \frac{4l}{\pi^2}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\cos\frac{(2m+1)\pi x}{l}}{(2m+1)^2}$$

6.5 FUNTZIO EZ-PERIODIKOEN FOURIER-EN SERIEZKO GARAPENA

Demagun f(x) funtzioa $(0,l)$ tartean definiturik dagoela eta bertan Dirichlet-en baldintzak betetzen dituela. Ikusiko dugunez, f(x) funtzioa jarraitasun-puntuetan Fourier-en seriez garagarria da.

Horretarako zuzen errealean f(x)-en hedadura kontsideratuko dugu.

5.16 Definizioa

Izan bedi $(0,l)$ tartean definituriko f(x) funtzioa. $\psi(x)$ funtzioa f(x) funtzioaren hedadura periodiko eta bikoitia da baldin

1) $\psi(x) = f(x)$ $\quad 0 < x < l$ $\quad$ baldintzak betetzen baditu

2) $\psi(-x) = \psi(x)$ $\quad \forall x \in \mathbb{R}$

3) $\psi(x+2l) = \psi(x)$ $\quad \forall x \in \mathbb{R}$

$\psi(x)$ funtzioa $f(x)$ funtzioaren hedadura periodiko eta bakoitia da baldin

1') $\psi(x) = f(x)$ $\quad 0 < x < l$ $\quad$ baldintzak betetzen baditu

2') $\psi(-x) = -\psi(x)$ $\quad \forall x \in \mathbb{R}$

3') $\psi(x+2l) = \psi(x)$ $\quad \forall x \in \mathbb{R}$

5.17 Teorema

$f(x)$ funtzioak $(0,l)$ tartean Dirichlet-en baldintzak betetzen baditu, tarte horretan kosinuetako Fourier-en seriez garagarria da eta $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{\pi n x}{l}$ $\quad 0 < x < l$

$$a_k = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \cos \frac{\pi k x}{l} \, dx \quad \text{izanik.}$$

Frogapena:
Garapena lortzeko $\psi(x)$ $f(x)$-en hedadura periodiko eta bikoitia hartzen da eta $\psi(x)$ funtzio honi 4.13 Teorema aplikatzen zaio $\psi(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{\pi n x}{l}$

$$\forall k = 1,2,\ldots \quad b_k = 0 \quad \text{eta} \quad a_k = \frac{2}{l} \int_0^l \psi(x) \cos \frac{\pi k x}{l} \, dx \quad \text{izanik,}$$

a_k kalkulatzeko integrala $(0,l)$ tartean egiten da eta bertan $\psi(x) = f(x)$ dugu. Beraz

$$f(x) = \psi(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{\cos \pi n x}{l} \quad x \in (0,l) \quad \text{eta} \quad b_k = 0 \quad \forall k = 1,2,\ldots.$$

$$a_k = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \cos \frac{\pi k x}{l} \, dx \quad \text{direlarik.}$$

5.18 Teorema

f(x) funtzioak $(0,l)$ tartean Dirichlet-en baldintzak betetzen baditu bertan sinuetako Fourier-en seriez gara daiteke.

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{\pi n x}{l} \qquad \text{non} \qquad b_k = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{\pi n x}{l}\,dx \qquad k = 1,2,\ldots \quad \text{diren}$$

Frogapena:

Aurreko teoreman egin dugun bezala baina hedadura bikoitiaren ordez bakoitia hartu behar da eta honi aplikatzen zaion teorema T.4.14 da eta emaitza enuntziatuan idatzi duguna.

5.19 Definizioa

Izan bedi $f(x)$ (a,b) tartean definitutako funtzioa. $F(x)$ funtzioa $f(x)$ funtzioaren hedadura periodikoa dela esango dugu

1) $F(x) = f(x)$ $\quad a < x < b$ $\quad$ baldintzak betetzen dituenean

2) $F(x+T) = f(x)$ $\quad T = b - a$ izanik

5.20 Lema

$\psi(x)$ funtzio integragarri eta ω periododuna bada. $\forall\alpha \displaystyle\int_\omega^{\alpha+\omega} \psi(x)\,dx = \int_0^\omega \psi(x)\,dx$,

hots, ω zabalerako tarte guztietan integralak balio bera hartzen du.

Frogapena:

$$\int_\alpha^{\alpha+\omega} \psi(x)\,dx = \int_\alpha^0 \psi(x)\,dx + \int_0^\omega \psi(x)\,dx + \int_\omega^{\alpha+\omega} \psi(x)\,dx$$

azken integralean $x = \omega + t$ $\quad dx = dt$ $\quad$ aldaketa egingo dugu

$$\int_\omega^{\alpha+\omega} \psi(x)\,dx = \int_0^\alpha \psi(\omega+t)\,dt = \int_0^\alpha \psi(t)\,dt = \int_0^\alpha \psi(x)\,dx, \quad \text{beraz}$$

$$\int_\alpha^{\alpha+\omega} \psi(x)\,dx = \int_\alpha^0 \psi(x)\,dx + \int_0^\omega \psi(x)\,dx + \int_0^\alpha \psi(x)\,dx = \int_0^\omega \psi(x)\,dx$$

5.21 Teorema

$f(x)$ funtzioak (a,b) tartean Dirichlet-en baldintzak betetzen baditu bertan $f(x)$ Fourier-en sinu eta kosinuetako seriez gara daiteke, hots,

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{\pi n x}{l} + b_n \sin\frac{\pi n x}{l}\right) \quad a<x<b \;, \text{ non } \quad a_k = \frac{1}{l}\int_a^b f(x)\cos\frac{\pi k x}{l}\,dx \;,$$

$$b_k = \frac{1}{l}\int_a^b f(x)\sin\frac{\pi n x}{l}\,dx$$ eta $2l = b-a$ bait dira, (a,b) tarteko funtzioaren etenguneetan

seriearen batura $\dfrac{f(x^-)+f(x^+)}{2}$ delarik.

Frogapena:

Izan bedi $F(x)$ $f(x)$ funtzioaren hedadura periodikoa $\mathbb{R}$ multzoan $F(x)$ seriez garagarria da eta $F(x) = \dfrac{a_0}{2} + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{\pi n x}{l} + b_k \sin\frac{\pi n x}{l}\right)$ non

$$a_k = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} F(x)\cos\frac{\pi k x}{l}\,dx \quad \text{eta} \quad b_k = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} F(x)\sin\frac{\pi n x}{l}\,dx \qquad b-a = 2l \text{ bait dira.}$$

$F(x)$ funtziorako lortutako formulek $(-l,l)$ tartean balio dute, baina $f(x)$ funtzioak ez du $(-l,l)$ tartean zertan definiturik egon behar. Baina $F(x)\cos\dfrac{\pi n x}{l}$ eta $F(x)\sin\dfrac{\pi k x}{l}$ funtzioak $2l$ periododunak dira eta 5.20 Lema aplikatuz:

$$\int_{-l}^{l} F(x)\cos\frac{\pi k x}{l}\,dx = \int_a^b F(x)\cos\frac{\pi k x}{l}\,dx$$

$$\int_{-l}^{l} F(x)\cos\frac{\pi k x}{l}\,dx = \int_a^b F(x)\cos\frac{\pi k x}{l}\,dx$$ eta (a,b) tartean $F(x) = f(x)$ denez,

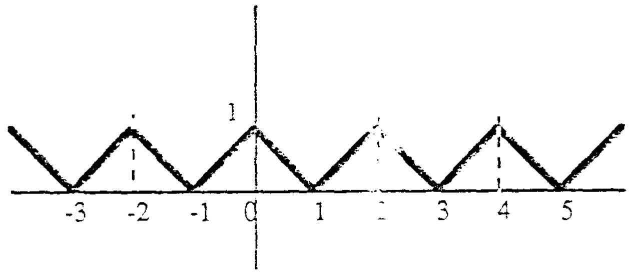
$$a_k = \frac{1}{l}\int_a^b f(x)\cos\frac{\pi kx}{l}\,dx\,, \quad b_k = \frac{1}{l}\int_a^b f(x)\cos\frac{\pi kx}{l}\,dx \qquad \text{ditugu eta}$$

$$f(x) = F(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{\pi nx}{l} + b_n \sin\frac{\pi nx}{l}\right) \qquad \forall\ x \in (a,b)$$

5.22 Adibidea

Bila dezagun (0,1) tartean definituriko $f(x) = 1 - x$ funtzioaren garapena: I) kosinuetan; II) sinuetan; III) sinu eta kosinuetan.

I) $f(x)$ funtzioaren hedadura periodiko eta bikoitia erabiliko dugu



$$2l = (1-(-1)) = 2 \quad \Rightarrow l = 1$$

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \pi nx$$

$$a_0 = 2\int_0^1 (1-x)\,dx = 2\,\frac{-(1-x)^2}{2}\Big|_0^1 = 1$$

$$a_k = 2\int_0^1 (1-x)\cos \pi kx\,dx = \begin{bmatrix} u = 1 - x & du = -\,dx \\ \cos \pi kx\,dx = dv & V = \dfrac{\sin \pi kx}{\pi k} \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{-2}{\pi k}\left[(1-x)\sin \pi kx\,\Big|_0^1 + \int_0^1 \sin \pi kx\,dx\right] = \frac{-2}{\pi^2 k^2}\cos \pi kx\,\Big|_0^1 =$$

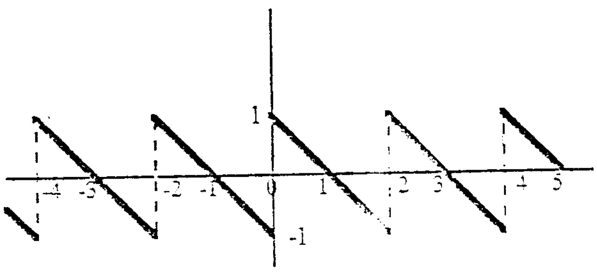
$$= \frac{-2}{\pi^2 k^2}\left((-1)^k - 1\right) = \begin{cases} 0 & k \text{ bikoitia denean} \\ \dfrac{4}{\pi^2 k^2} & k \text{ bakoitia denean} \end{cases}$$

beraz $$1 - x = \frac{1}{2} + \frac{4}{\pi^2}\left(\frac{\cos \pi x}{1^2} + \frac{\cos 3\pi x}{3^2} + \frac{\cos 5\pi x}{5^2} + \dots\right) =$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{4}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos(2n+1)\pi x}{(2n+1)^2} \qquad 0 < x < 1$$

II) Oraingoan f(x) funtzioaren hedadura periodiko eta bakoitia;

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \pi n x \quad \text{eta} \quad b_k = 2\int_0^1 (1-x)\ \sin \pi k x\ dx \quad \text{eta} \quad a_k = 0 \quad \forall\ k = 0,1,\dots$$



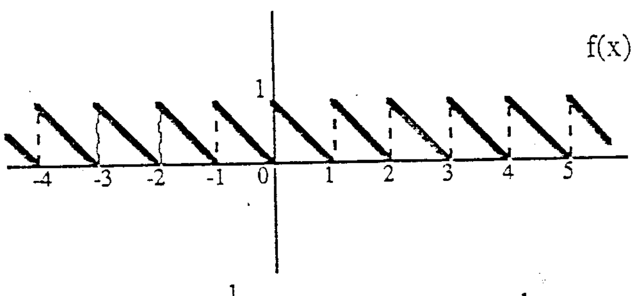
$$b_k = 2\int_0^1 (1-x)\sin \pi k x\ dx =$$

$$= \begin{bmatrix} u = 1-x & du = -dx \\ \sin \pi k x\ dx = dv & v = \dfrac{-\cos \pi k x}{\pi k} \end{bmatrix} =$$

$$= 2\left[\left(\frac{(x-1)\cos \pi k x}{\pi k}\Bigg|_0^1 - \int_0^1 \frac{\cos \pi k x}{\pi k}dx\right)\right] = 2\left(\frac{1}{\pi k} - \frac{1}{\pi^2 k^2}\sin \pi k x\ \Bigg|_0^1\right) = \frac{2}{\pi k}$$

beraz $$1 - x = \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin \pi n x}{n} \qquad 0 < x < 1$$

III) Orain f(x) funtzioaren hedadura periodikoa bakarrik;



$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos 2\pi n x + b_n \sin 2\pi n x)$$

$$2l = 1 - 0 \Rightarrow l = \frac{1}{2}$$

$$a_0 = \frac{1}{1/2}\int_0^1 (1-x)\,dx = 2\,\frac{(1-x)^2}{2}\Bigg|_0^1 = 1$$

$$a_k = \frac{1}{1/2}\int_0^1 (1-x)\cos 2\pi kx \; dx = \begin{bmatrix} u = 1-x & du = -\,dx \\ \cos 2\pi kx \; dx = dv & v = \dfrac{\sin 2\pi kx}{2\pi k} \end{bmatrix} =$$

$$= \left(\frac{(1-x)\sin 2\pi kx}{2\pi k}\Bigg|_0^1 + \int_0^1 \frac{\sin 2\pi kx}{2\pi k}\,dx \right) = \frac{1}{\pi k} - \frac{-\cos 2\pi kx}{2\pi k}\Bigg|_0^1 = 0$$

$$b_k = \frac{1}{1/2}\int_0^1 (1-x)\sin 2\pi kx \; dx = \begin{bmatrix} u = 1-x & du = -\,dx \\ \sin 2\pi kx \; dx = dv & v = \dfrac{-\cos 2\pi kx}{2\pi k} \end{bmatrix} =$$

$$= \left(\frac{(x-1)\cos 2\pi kx}{2\pi k}\Bigg|_0^1 + \int_0^1 \frac{\cos 2\pi kx}{2\pi k}\,dx \right) = \frac{1}{\pi k} - \frac{\sin 2\pi kx}{4\pi^2 k^2}\Bigg|_0^1 = \frac{1}{\pi k}$$

beraz $\quad 1 - x = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2\pi kx}{k} \qquad 0 < x < 1$

7. GAIA
FOURIER-EN TRANSFORMATUA

7.1 *FOURIER-EN TRANSFORMATUAREN APLIKAZIOAK*

Izan bedi f(t) funtzio erreala eta jarraia. Definitzen dugu Fourier-en transformatua

$$F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \quad e^{-i\omega t} \, dt \qquad \omega = 2\pi f$$

eta alderantzizkoa

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) \quad e^{i\omega t} \, df \qquad \omega = 2\pi f$$

$F(\omega)$ existitzeko, f(t)-k baldintza batzu bete behar ditu, baina orain ez gara horretaz arduratuko.

Baina Zer da $F(\omega)$? Zer gertatzen zaio $f(\omega)$ funtzioari $F(\omega)$ aldatzen badugu? Zer informazio ematen digu $F(\omega)$-k, f(t)-ri buruz?

Zer da $F(\omega)$*?*

$F(\omega)$-k, f(t)-ren maiztasun-deskonposaketa ematen digu. Gutxi gorabehera honek esan nahi du f(t) funtzioa sinusoidalen integral bezala idatz dezakegula. Maiztasun f_0 baterako, $F(f_0) \neq 0$ baldin bada, funtzio sinusoidalen integral horretan f_0 maiztasuneko sinusoide bat agertzen da, eta $F(f_0)$ zenbaki konplexua dela kontutan hartuz, hau da, modulu bat eta fase bat duela, hortik ateratzen ditugu f_0 maiztasuneko sinusoidearen fasea eta anplitudea. Beste era batera esateko, $F(\omega)$ funtzioak esaten digu zein maiztasunetako sinusoideak agertzen diren aipatutako integralean.

Honek esan nahi du, $F(\omega)$ eta f(t) gauza berdina definitzen dutela, hau da, funtzio bat. $F(\omega)$ aldatzen badugu, f(t) aldatzen dugu, eta f(t) aldatzen badugu, $F(\omega)$ aldatzen dugu.

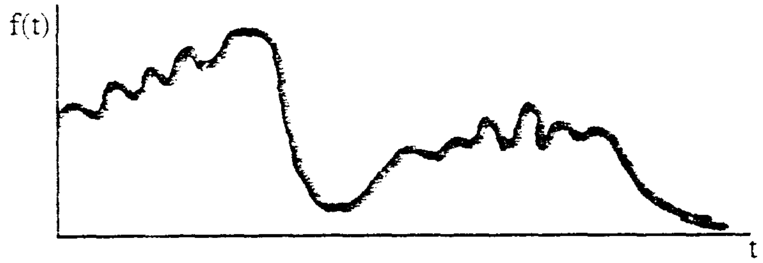
Zer gertatzen da $F(\omega)$ ***aldatzen dugunean ?***

Izan bedi f(t) funtzio bat, eta $F(\omega)$ bere Fourier-en transformatua. Alda dezagun $F(\omega)$, $H(\omega)$ funtzio konplexu batez biderkatuz. Eragiketa hau iragazketa deitzen da.

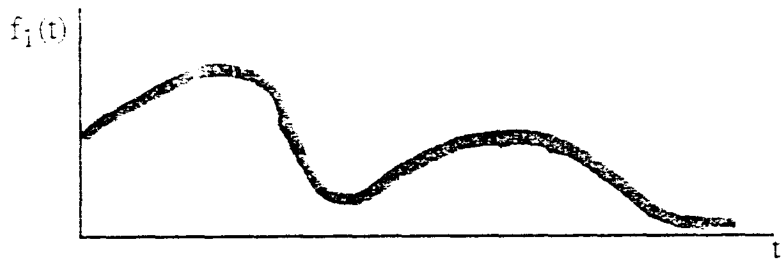
Biderketa horren ondorioz f_0 maiztasun bakoitza aldatuta geratzen da bai fasean bai anplitudean. Funtzio iragaziaren transformatua $F(\omega)\,H(\omega)$ izango da.

Gutxi gora behera ulertzeko zer gertatzen den funtzio batekin iragazten dugunean, horrela pentsa dezakegu: $f(t)$ funtzioaren aldakuntza azkarrak goi-maiztasunen ondorioz agertzen dira, eta $f(t)$ funtzioaren aldakuntza mantsoak behe-maiztasunen ondorioz agertzen dira.

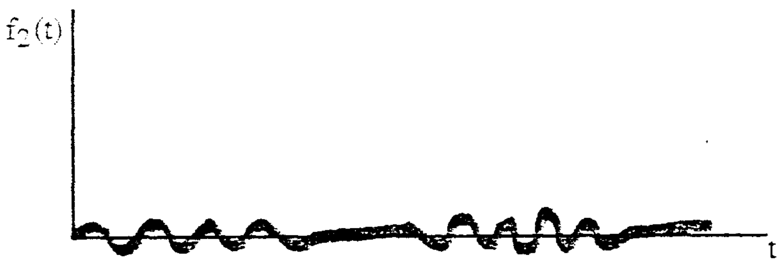
Adibidez:



Aldakuntza azkar hauek lortzeko goi-maiztasuneko sinusoideak beharko ditugu. Horregatik, funtzio honen transformatuak goi-maiztasunak izango ditu. Goi-maiztasun hauek kentzen baditugu, hau da, funtzioa iragazten badugu goi-maiztasunak kenduaz, beste funtzio hau lortzen dugu:



$f_1(t)$ funtzioa $f(t)$ funtzioaren antzekoa da baina aldakuntza azkarrak desagertu egin dira. Alderantziz, $f(t)$ funtzioaren behe-maiztasunak kentzen baditugu honako funtzioa lortzen dugu:



Ikusten dugunez $f_2(t)$ funtzio honetan $f(t)$ funtzioaren aldakuntza mantsoak galdu egin dira.

Adibideak

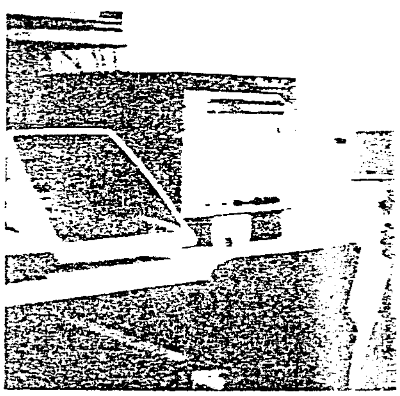
Fourier-en transformatua asko erabiltzen da seinale-tratamenduaren munduan. Adibidez, irudien tratamenduan, Fourier-en aplikazioak oso interesgarriak dira.

Orain ikusiko dugu nolako tratamenduak egin daitezkeen konputagailuen bidez. Kasu honetan, irudiak ez dira erabiltzen funtzio jarraiak bezala, funtzio diskretuak bezala baizik. Funtzio diskretu hauek erabiltzeko Fourier-en transformatuaren espresio berezia erabiltzen da, baina orain ez gara arduratuko gauza guzti hauetaz.

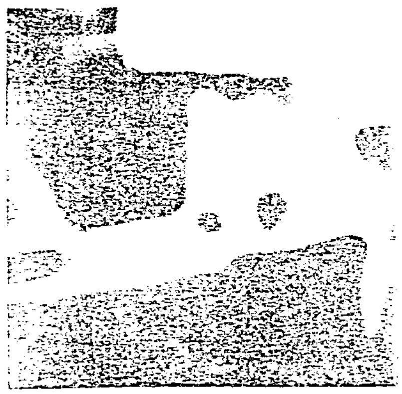
Fourier-en transformatua bi dimentsiotan defini dezakegu irudiak erabiltzeko. Goi--maiztasun eta behe-maiztasun kontzeptuak lehen bezalakoak izango dira. Irudien xehetasunak goi-maiztasunen ondorioz agertuko dira.

Ikus ditzagun batzu

a)



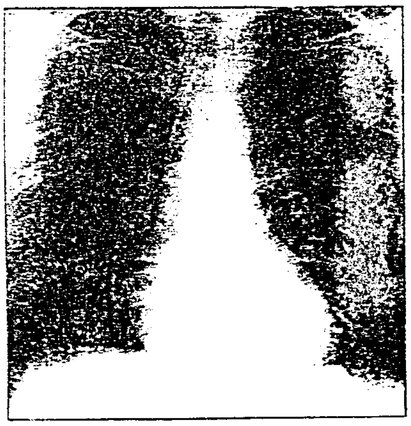
Irudia



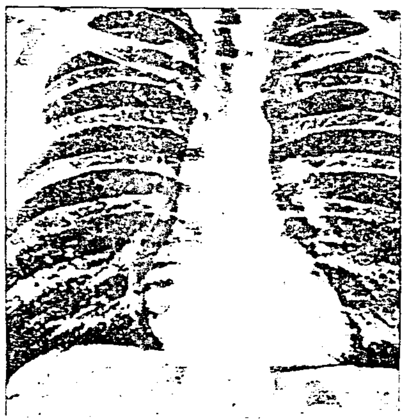
Irudi iragazia

Kasu honetan, irudi iragazia lortzeko, goi-maiztasunak kendu dira. Ondorioz, irudiaren xehetasunak galdu egin dira.

b)



Irudia



Irudi iragazia

Kasu honetan, behe-maiztasunak kendu dira. Ondorioz, beste eragiketa batzu egin ondoren, irudiaren xehetasunak hobeto ikusten dira.

c)

Irudia

Irudi iragazia

Baldintza batzu betetzen badira, mugituta dagoen argazki bat konpon dezakegu. Hau ere iragazketaren bidez lortzen da.

Fourier-en transformatuaren aplikazioak irudi-tratamenduaren munduan ez dira hauek bakarrik. Gai honetaz informazio gehiago lortzeko:

"Digital image processing"
Rafael C. González and Paul Wintz. Ed. Addison-Wesley. 1978

"An introduction to digital image processing"
Wayne Niblack. Ed. Pretice/Hall. 1986

"Digital image processing"
William K. Pratt. Ed. Wiley-Interscience. 1978

7.2 FOURIER-EN INTEGRALA

2.1 Definizioa

$$\int_0^{\infty} (A(\omega)\cos \omega x + B(\omega)\sin \omega x)\, d\omega \qquad \text{integrala, non} \qquad -\infty < x < \infty \qquad \text{eta}$$

$$A(\omega) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos \omega t\, dt \quad \text{eta} \quad B(\omega) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin \omega t\, dt \quad \text{bait dira, } f(x) \text{ funtzioaren}$$

Fourier-en integral deitzen da.

$\dfrac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ Fourier-en seriean $n \in \mathbb{N}$ aldagaia $\omega \in [0,\infty)$ aldagai jarraiaz trukatzen badugu, aldi berean $\sum_{n=0}^{\infty}$ batukaria $\int_0^{\infty}$ integral bihurtuz,

eta $a_n \to A(\omega)$ eta $b_n \to B(\omega)$ aldaketa logikoak kontutan hartuz f(x) funtzio ez-periodikoari legokiokeen seriea Fourier-en integral bihurtzen da. Izan ere, Fourier-en integrala seriearen hedadura da $l \to \infty$ deneko kasura, hots, funtzio ez-periodikoetara.

Fourier-en integralaren teorema

Baldin f(x) eta f'(x) funtzioak zatika jarraiak badira $\mathbb{R}$-ko tarte guztietan eta $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\,dx$ integrala konbergentea bada (hau da, $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$ absolutuki konbergentea bada):

$$\frac{f(x^-)+f(x^+)}{2} = \int_0^{\infty} (A(\omega)\cos \omega x + B(\omega)\sin \omega x)\,d\omega \qquad -\infty < x < \infty$$

$$A(\omega) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos \omega t\,dt \quad \text{eta} \quad B(\omega) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin \omega t\,dt \quad \text{direlarik.}$$

Hemendik aurrera $\frac{f(x^-)+f(x^+)}{2}$ zatiduraren ordez f(x) idatziko dugu, jarraitasun--puntuetan hala delako eta etenguneetan baturaerdia dela kontutan hartuz.

7.2-1 Fourier-en integralaren beste adierazpenak

Ikus ditzagun, orain, teorema honen beste adierazpen batzu:

A(ω) eta B(ω)-ren formulak Fourier-en integralean ordezkatuz

$$f(x) = \int_0^{\infty}\left[\left(\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos \omega t\,dt\right)\cos \omega x + \left(\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin \omega t\,dt\right)\sin \omega x\right]d\omega =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,(\cos \omega t\cos \omega x + \sin \omega t\sin \omega x\,dt\right)d\omega = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos (x-t)\omega\,dt\,d\omega$$

hau da, $$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos (x-t)\,\omega\,dt\,d\omega$$

$\cos(x-t)\omega$ eta $\sin(x-t)\omega$ ω-rekiko bikoitia eta bakoitia direnez hurrenez hurren,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \cos(x-t)\omega\, d\omega = 2\int_{0}^{\infty} \cos(x-t)\omega\, d\omega \quad \text{eta} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \sin(x-t)\omega\, d\omega = 0 \quad \text{beraz,}$$

$$\int_{0}^{\infty} \cos(x-t)\omega\, d\omega = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \cos(x-t)\omega\, d\omega = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} (\cos(x-t)\omega + i\sin(x-t)\omega)\, d\omega =$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i(x-t)\omega}\, d\omega, \text{ berdintza hau aurrekoan ordezkatuz: } f(x) = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos(x-t)\omega\, dt\, d\omega =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{0}^{\infty} \cos(x-t)\omega\, d\omega\right) f(t)\, dt = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i(x-t)\omega}\, d\omega\, dt, \quad \text{hots}$$

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{i(x-t)\omega}\, d\omega\, dt \quad \text{edo} \quad f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega x}\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-i\omega t}\, dt\right) d\omega$$

7.2-2 Funtzio bakoiti eta bikoitien Fourier-en integralak

$f(x)$ bikoitia bada $\cos\omega t$ ere bikoitia denez, $A(\omega) = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_{0}^{\infty} f(t)\cos\omega t\, dt$ dugu

eta $\sin\omega t$ bakoitia denez $B(\omega) = 0$ beraz $f(x)$ funtzioaren Fourier-en integrala

$$f(x) = \int_{0}^{\infty} A(\omega)\cos\omega x\, d\omega \quad \text{edo} \quad f(x) = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty}\left(\int_{0}^{\infty} f(t)\cos\omega t\, dt\right)\cos\omega x\, d\omega$$ kosinuetako Fourier-en integrala.

$f(x)$ aldiz bakoitia bada $A(\omega) = 0$ eta $B(\omega) = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_{0}^{\infty} f(t)\sin\omega t\, dt$ izango dira eta

dagokion Fourier-en integrala $f(x) = \displaystyle\int_{0}^{\infty} B(\omega)\sin\omega x\, d\omega$ edo

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\left(\int_0^{\infty} f(t)\sin\omega t\,dt\right)\sin\omega x\,d\omega \qquad \text{sinuetako Fourier-en integrala.}$$

OHARRA:

$f(x)$ $\forall\, x > 0$ bakarrik definiturik badago, $f(x)$-en hedadura bikoitia edo bakoitia hartzen dira eta lortutako azken formulak erabiltzen.

7.3. FOURIER-EN TRANSFORMATUA

3.2 Definizioa

$f(x)$ funtzioa emanik, ondoko integralari $f(x)$-en Fourier-en transformatua deitzen zaio eta $F[f(x)]$ edo $F(\omega)$ idazten:

$$F[f(x)] = F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,e^{-i\omega t}\,dt$$

- $e^{-i\omega t}$ transformazioaren nuna esan ohi da
- integral parametriko inpropioa da, hots, ω-ren funtzioa.

Fourier-en integralaren adierazpide esponentzialari begiratzen badiogu bere barruan $f(x)$ funtzioaren transformatua duenaz konturatuko gara

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega x}\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,e^{-i\omega t}\,dt\right)d\omega = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\,e^{i\omega x}\,dx$$

Azken formula honek Fourier-en alderantzizko transformatua ematen digu.

7.3-1 Funtzio bakoiti eta bikoitien Fourier-en transformatuak

$f(x)$ bakoitia bada $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\omega t\,dt = 0$ eta $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin\omega t\,dt = 2\int_0^{\infty} f(t)\sin\omega t\,dt$

integrakizunak funtzio bakoitia eta bikoitia direlako hurrenez hurren.

$$F[f(x)] = F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)(\cos\omega t - i\sin\omega t)\,dt = \frac{-i}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin\omega t\,dt =$$

$$= \frac{-2\,i}{\sqrt{2p}} \int_0^{\infty} f(t) \sin \omega t \, dt \;=\; -i \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(t) \sin \omega t \, dt$$

3-1.3 Definizioa

$F_S(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(t) \sin \omega t \, dt$ balioari sinuetako Fourier-en transformatua esango diogu.

Balio hau funtzio bakoitien Fourier-en integralean ordezkatuz

$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} F_S(\omega) \sin \omega x \, d\omega$ lortzen da, sinuetako Fourier-en alderantzizko transformatua alegia.

$f(x)$ bikoitia bada $\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin \omega t \, dt = 0$ eta $\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos \omega t \, dt = 2 \int_0^{\infty} f(t) \cos \omega t \, dt$

eta $F[f(x)] = F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) (\cos \omega t - i \sin \omega t) \, dt = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} f(t) \cos \omega t \, dt$, hau da

$$F[f(x)] = F(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos \omega t \, dt$$

3-1.4 Definizioa

$F_C(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(t) \cos \omega t \, dt$ balioa kosinuetako Fourier-en transformatua deitzen da.

Baldintza hori $f(x)$-en Fourier-en integralean ordezkatuz

$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} F_C(\omega) \sin \omega x \, d\omega$ lortzen dugu, hau, hain zuzen ere, kosinuetako Fourier-en alderantzizko transformatua da.

3-1.5 Adibidea

- Bila ezazu ondoko funtzioaren Fourier-en transformatua

$$f(x) = \begin{cases} 1 & |x| < a \\ 0 & |x| > a \end{cases}$$

$$F[f(x)] = F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-i\omega t}\, dt$$

$$\omega \neq 0 \qquad F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-a}^{a} e^{-i\omega t}\, dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{-1}{i\omega} e^{-i\omega t} \Big|_{-a}^{a} \right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{i\omega} (e^{ia\omega} - e^{-ia\omega}) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{2}{\omega} \sin a\omega = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin a\omega}{\omega}$$

$$\omega = 0 \qquad \lim_{\omega \to 0} F(\omega) = \lim_{\omega \to 0} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin a\omega}{\omega} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, a$$

$$\Rightarrow F(\omega) = \begin{cases} \sqrt{\dfrac{2}{\pi}} \dfrac{\sin a\omega}{\omega} & \omega \neq 0 \\ \sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\, a & \omega = 0 \end{cases}$$

- Bila dezagun aurreko funtzioaren kosinuetako Fourier-en transformatua

$$F_c(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(t) \cos \omega t\, dt = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{a} \cos \omega t\, dt = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin \omega t}{\omega} \Big|_0^a =$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin a\omega}{\omega} \qquad \omega \neq 0 \qquad\qquad \omega = 0 \qquad \lim_{\omega \to 0} F_c(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, a$$

transformatu bera lortzen da funtzioa bikoitia delako.

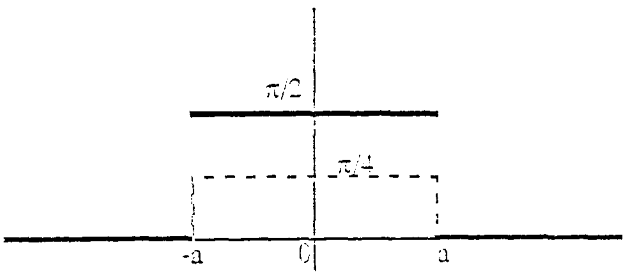
- Kosinuetako Fourier-en alderantzizko transformatua erabiliz kalkula dezagun

$$I = \int_0^{\infty} \frac{\sin a\omega \cos x\omega}{\omega}\, d\omega \qquad \text{integrala.}$$

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty F_C(\omega) \cos x\omega \, d\omega = \frac{2}{\pi} \int_0^a \frac{\sin a\omega}{\omega} \cos x\omega \, d\omega = \frac{2}{\pi} I$$

hemen aurreko emaitza erabili dugu, hau da, $F_C(\omega) = \dfrac{2}{\pi} \displaystyle\int_0^\infty \dfrac{\sin a\omega}{\omega}$

$$I = \frac{2}{\pi} f(x) = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2} & |x| < a \\ \dfrac{\pi}{4} & |x| = a \\ 0 & |x| > a \end{cases}$$



7.3-2 Fourier-en transformatuaren propietateak

Baldin $F[f(x)] = F(\omega)$ bada

a) $F[f(x-a)] = e^{-ia\omega} F(\omega)$

Frogapena:

$$F[f(x-a)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t-a)\, e^{-i\omega t} dt = [t-a=y \quad dt=dy] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(y)\, e^{-i\omega(y+a)} dy =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(y)\, e^{-i\omega a} e^{-i\omega y} dy = e^{-i\omega a} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(y)\, e^{-i\omega y} dy \right) = e^{-ia\omega} F(\omega)$$

b) $F[f(ax)] = \dfrac{1}{a} F\left(\dfrac{\omega}{a}\right)$

Frogapena:

$$F[f(ax)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(at)\, e^{-i\omega t} dt = [at=y \quad adt=dy] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(y)\, e^{-i\omega(y/a)} \frac{dy}{a} =$$

$$= \frac{1}{a\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(y)\, e^{-i\left(\frac{\omega}{a}\right)y}\, dy = \frac{1}{a} F\left(\frac{\omega}{a}\right)$$

c) $F[e^{ia\omega} f(x)] = F(\omega - a)$

Frogapena:

$$F[e^{iax} f(x)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{iat} f(t)\, e^{-i\omega t}\, dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-i(\omega-a)t}\, dt = F(\omega - a)$$

d) $F[x^n f(x)] = i^n F^{n)}(\omega)$

Frogapena:

$$F[f(x)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-i\omega t}\, dt \Rightarrow [\omega\text{-rekiko deribatuz}]\ F'(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} -it\, f(t)\, e^{-i\omega t}\, dt$$

berriro deribatuz $F''(\omega) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} (-it)^2 f(t)\, e^{-i\omega t}\, dt$, n aldiz deribatuz

$$F^{n)}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (-it)^n f(t)\, e^{-i\omega t}\, dt \Rightarrow F^{n)}(\omega) = (-i)^n \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} t^n f(t)\, e^{-i\omega t}\, dt =$$

$$= (-i)^n F[x^n f(x)] \Rightarrow F[x^n f(x)] = \frac{1}{(-i)^n} F^{n)}(\omega) = (i)^n F^{n)}(\omega) \left(i.(-i) = 1 \Rightarrow \frac{1}{(-i)^n} = i^n \right)$$

e) $F[f'(x)] = i\omega F(\omega)$ baldin $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = 0$ bada

Frogapena:

$$F[f'(x)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f'(t)\, e^{-i\omega t}\, dt = \left[\begin{matrix} e^{-i\omega t} = u & du = -i\omega\, e^{-i\omega t}\, dt \\ f'(t)\, dt = dv & v = f(t) \end{matrix} \right] =$$

$$= \left.\frac{f(t)\, e^{-i\omega t}}{\sqrt{2\pi}}\right|_{-\infty}^{\infty} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (-i\omega)\, f(t)\, e^{-i\omega t}\, dt = \frac{i\omega}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-i\omega t}\, dt = i\omega F(\omega)$$

$$\frac{f(t)\, e^{-i\omega t}}{\sqrt{2\pi}} \Bigg]_{-\infty}^{\infty} \rightarrow 0 \qquad \lim_{x \to \mp\infty} f(x) = 0 \qquad \text{delako}$$

f) f(x) bikoitia bada $\quad F(\omega) = F_C(\omega)$

g) f(x) bakoitia bada $\quad F(\omega) = - i\, F_S(\omega)$

Azken bi hauek dagoenekoz frogatuta daude

3-2.6 Adibidea

- Kalkula dezagun $g(x) = x \quad x \in (-a,a)$ eta $g(x) = 0 \quad |x| > a$ funtzioaren Fourier-en transformatua

2-1.5 Adibidean $\quad f(x) = \begin{cases} 1 & |x| < a \\ 0 & |x| > a \end{cases}$ $\quad$ funtzioaren transformatua

$$F(\omega) = \begin{cases} \sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\ \dfrac{\sin a\omega}{\omega} & \omega \neq 0 \\ \sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\ a & \omega = 0 \end{cases} \qquad \text{funtzioa dela ikusi dugu}$$

$g(x) = x\, f(x) \quad \Rightarrow \quad F[g(x)] = F[x\, f(x)] = (i)^1\, F'(\omega)$ $\quad$ d) propietatea

aplikatuz , beraz

$$G(\omega) = \begin{cases} \sqrt{\dfrac{2}{\pi}} \left(\dfrac{a\omega \cos a\omega - \sin a\omega}{\omega^2} \right) i & \omega \neq 0 \\ 0 & \omega = 0 \end{cases}$$

- Kalkula dezagun orain $\quad F[g(ax)] = \dfrac{1}{a}\, G\!\left(\dfrac{\omega}{a}\right) \quad$ beraz

$$F[g(ax)] = \begin{cases} \dfrac{1}{a}\left(\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\ \dfrac{a\left(\frac{\omega}{a}\right)\cos a\left(\frac{\omega}{a}\right) - \sin a\left(\frac{\omega}{a}\right)}{\left(\frac{\omega}{a}\right)^2}\right) i & \omega \neq 0 \\ 0 & \omega = 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\ a\ \dfrac{\omega \cos \omega - \sin \omega}{\omega^2}\ i & \omega \neq 0 \\ 0 & \omega = 0 \end{cases}$$

7.4 *KONBOLUZIOA*

4.7 Definizioa

f eta g funtzioen arteko konboluzioa era honetan definitzen da:

$$(f*g)(x) = h(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)\, g(y)\, dy$$

konboluzio hau integral inpropioa konbergentea den eremuan definiturik dago.

4.8 Adibidea

- Izan bitez $f(y) = \begin{cases} e^{-y} & y \geq 0 \\ 0 & y < 0 \end{cases}$ eta $g(y) = \begin{cases} \sin y & 0 \leq y \leq \frac{\pi}{2} \\ 0 & \text{kanpoan} \end{cases}$

konboluzioa kalkulatu baino lehen f(x-y) g(y) funtzioa definitu beharko da:

$$f(x-y)\, g(y) = \begin{cases} e^{-(x-y)} \sin y & 0 \leq y \leq \min\left(\frac{\pi}{2}, x\right) \ * \\ 0 & \text{kanpoan} \end{cases}$$

f(x-y) ez da nulua $x - y \geq 0$ edo $x \geq y$, beraz

f(x-y) nulua da (x,∞) eta ez da nulua $(-\infty,x]$

hauen

g(y) nulua da $(-\infty,0)$ eta $(\pi/2,\infty)$ tartean, ez da nulua $[0,\pi/2]$ ebakidura kalkulatzen bada biderkadura $[0, \min(\pi/2,x)]$ tartean ez da nulua, eta kanpoan bai $x > 0$ izanik

beraz, $$(f*g)(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\min\left(\frac{\pi}{2},x\right)} e^{-(x-y)} \sin y \, dy$$

hau da, $\frac{\pi}{2} \le x$ $$(f*g)(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-(x-y)} \sin y \, dy = \frac{e^{\frac{\pi}{2}} + 1}{2\sqrt{2\pi}} e^{-x}$$

$\frac{\pi}{2} > x > 0$ $$(f*g)(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{x} e^{-(x-y)} \sin y \, dy = \frac{\sin x - \cos x + e^{-x}}{2\sqrt{2\pi}}$$

Konboluzio-teorema

Baldin f(x) eta g(x) funtzioak integragarriak badira $\mathbb{R}$ osoan, eta gutxienez bat jarraia eta bornatua, $F[f(x)] = F(\omega)$ eta $F[g(x)] = G(\omega)$ suposatuz $F[(f*g)(x)] = F(\omega)\, G(\omega)$ berdintza betetzen da.

Frogapena:

Alderantzizko trasformatua erabiliz $$f(x-y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\, e^{i\omega(x-y)}\, d\omega$$

eta hau konboluzioaren definizioan ordezkatuz

$$(f*g)(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\, e^{i\omega(x-y)}\, d\omega \right) g(y)\, dy =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\, e^{i\omega x} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(y)\, e^{-i\omega y}\, dy \right) d\omega = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\, e^{i\omega x}\, G(\omega)\, d\omega$$

hau da, hain zuzen ere, $F(\omega)\ G(\omega)$ biderkaduraren Fourier-en alderantzizko transformatua, hots, $F^{-1}[F(\omega)\ G(\omega)] = (f*g)(x)$

Beraz, $F[(f*g)(x)] = F(\omega)\ G(\omega)$

Fourier-en integraletarako Parseval-en identitatea

Baldin $f(x)$ eta $g(x)$ funtzioak $\mathbb{R}$-ko tarte guztietan zatika jarraiak badira eta

$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, g(t)\, dt$ integrala konbergentea bada

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\ g(t)\ dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\ \overline{G(\omega)}\ d\omega$$

$G(\omega)$ funtzio konplexua da, $\overline{G(\omega)}$ bere konjokatua

$f(x) = g(x)$ hartuz $F(\omega) = G(\omega) \Rightarrow F(\omega)\ \overline{G(\omega)} = F(\omega)\ \overline{F(\omega)} = |F(\omega)|^2$

eta $f(t)\, g(t) = f^2(t)$ beraz $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} (f(t))^2\, dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2\, d\omega$

OHARRAK:

Kosinuetako eta sinuetako Fourier-en transformatuak OX ardatzerdi positiboan definiturik dauden funtzioei aplika dakizkieke, absolutuki integragarriak badira eta Dirichlet-en baldintzak betetzen badituzte. Era honetan, sinuetako transformatua $f(x)$ funtzioaren hedadura bakoitiak emango digu, kosinuetako transformatuak, aldiz, hedadura bikoitiak.

Gai honetako Fourier-en integral guztietan $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(u)\, du$ idaztean bere "balio nagusia" adierazi nahi da, hau da

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(u)\, du = \lim_{N\to\infty}\int_{-N}^{N} f(u)\, du$$

(ez nahastu $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(u)\, du = \lim_{b\to\infty}\int_{a}^{b} f(u)\, du + \lim_{c\to\infty}\int_{c}^{a} f(u)\, du$ balioarekin).

8. GAIA
LAPLACE-REN TRANSFORMATUA

8.1 LAPLACE-REN TRANSFORMATUA

Integral eragilearen bidezko trasformatua da eta hasierako balioa duten ekuazio diferentzialak ebazteko erabiltzen da.

1.1 Definizioa

Izan bedi $(0,\infty)$ tartean definituriko $f(t)$ funtzioa. Ondoko integralari $f(t)$-ren Laplace-ren transformatua esaten zaio eta $L[f(t)]$ edo $F(s)$ idazten

$$L[f(t)] = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt = F(s)$$

$f(t)$ funtzioa $\mathbb{R}$ osoan egon daiteke definiturik baldin $f(t) = 0 \quad \forall\, t < 0$

Laplace-ren transformatua existitzen da baldin s-ren balioak existitzen badira zeinetarako integrala konbergentea bait da.

s aldagai konplexua da orokorrean. baina guk $s \in \mathbb{R}$ deneko kasua aztertuko dugu.

Hemendik aurrera, besterik ez badiogu, funtzioak $(0,\infty)$ tartean definituko ditugu,

hots, $f(t) = 1$ idaztean $f(t) = \begin{cases} 1 & \forall\, t > 0 \\ 0 & \forall\, t < 0 \end{cases}$ →

→ funtzioa adierazi nahi da

1.2 Adibidea

- $f(t) = 1$ kalkula dezagun $L[1]$

$$L[1] = \int_0^\infty e^{-st}\, 1\, dt = \frac{-1}{s}\, e^{-st}\Big|_0^\infty = \begin{cases} \dfrac{1}{s} & s > 0 \\ \infty & s \le 0 \end{cases}$$

.. beraz $L[1] = F(s) = \dfrac{1}{s} \qquad s > 0$

- Izan bedi $f(t) = e^{at}$ $a \in \mathbb{R}$, Zein da $L[e^{at}]$?

$$L[e^{at}] = \int_0^\infty e^{-st} e^{at}\, dt = \int_0^\infty e^{-(s-a)t}\, dt = \frac{-1}{s-a} e^{-(s-a)t} \Big|_0^\infty =$$

$$= \left| \begin{array}{ll} \dfrac{1}{s-a} & s > a \\ \infty & s \leq a \end{array} \right.$$

beraz $$L[e^{at}] = \frac{1}{s-a} \qquad s > a$$

s-ren balioren batetarako $\int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt$ existitzeak zera esan nahi du:

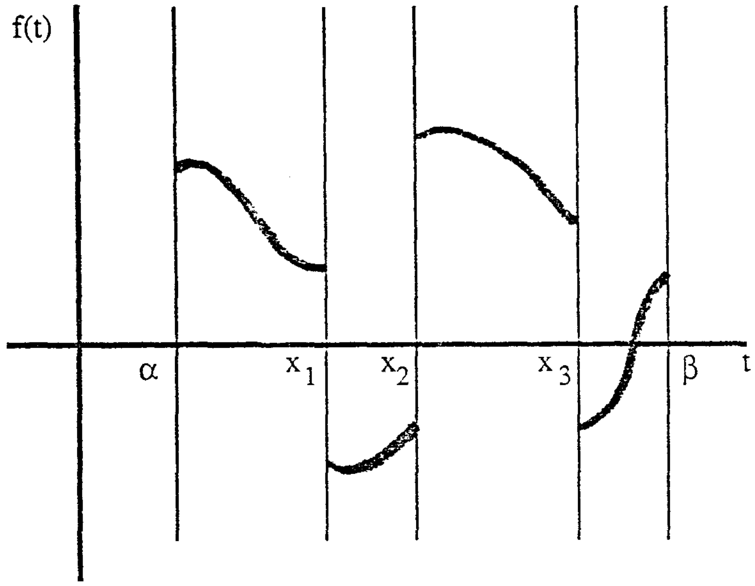
a) $\int_0^T e^{-st} f(t)\, dt$ integralak existitu behar du $\forall\, T > 0$, gutxienez s-ren balio baterako.

b) $\int_0^T e^{-st} f(t)\, dt$ integralak $T \to \infty$ denean konbergentea izan behar du s-ren balioaren batetarako. Izan ere $\lim\limits_{t \to \infty} e^{-st} f(t) = 0$ bete behar da integrala konbergentea izan dadin $T \to \infty$ denean.

Aurreko baldintzak bete daitezen bi definizio emango ditugu.

1.3 Definizioa

f(t) funtzioa $[\alpha,\beta]$ tartean zatika jarraia da baldin tarteko puntu guztietan, puntuen kopuru finituan izan ezik, jarraia bada, etengune hauetan alboetako limiteak finituak direlarik.



Funtzio hauen gehien interesatzen zaigun propietatea integragarritasuna da.

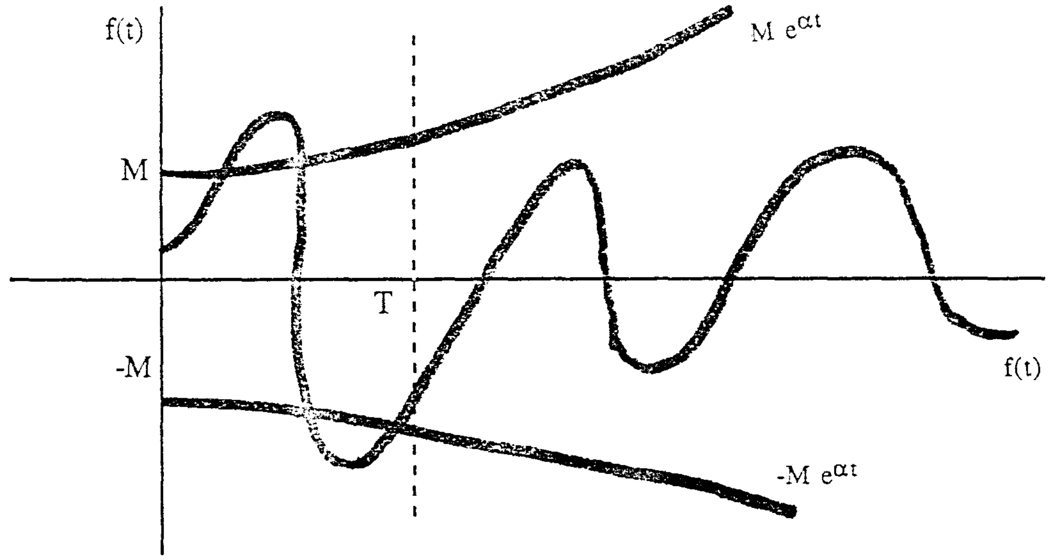
Funtzio hauek $[\alpha, \beta]$ tartean integragarriak dira.

Funtzio hauen artean $[0,T]$ motako tarte guztietan zatika jarraiak direnak interesatzen zaizkigu, azken hauetaz $[0,\infty)$ tartean zatika jarraiak direla esango dugu.

1.4 Definizioa

f(t) funtzioa ordena esponentzialekoa da $t \to \infty$ denean, baldin $M, T > 0$ eta $\alpha \in \mathbb{R}$ zenbakiak existitzen badira non

$|f(t)| < M e^{\alpha t}$ $\forall t > T$ (edo $|e^{-\alpha t} f(t)| < M$ $\forall t > T$)



t aldagai askearen T balio batetik aurrera f(t) funtzioa $M e^{\alpha t}$ eta $-M e^{\alpha t}$ kurben artean dago.

Adibide bezala K, t, sin at, cos at, e^{at}, t^n sin at e^{bt},....... funtzioak eta haien arteko konbinazioak jar ditzakegu.

1.5 Adibidea

- Ikus dezagun e^{t^2} funtzioa ez dela ordena esponentzialeko funtzioa

$\alpha \in \mathbb{R}$ existituko balitz non $|e^{-\alpha t} f(t)| < M \ \forall t > T$ den $e^{-\alpha t} e^{t^2} = e^{t^2-\alpha t} = e^{t(t-\alpha)}$

eta $\lim\limits_{t\to\infty} e^{t^2-\alpha t} = \infty$ da, hots ez da bornatua, beraz ezin da ordena esponentzialekoa izan.

Izan bedi $\mathcal{A} = \{ f(t) \quad t > 0 \ / \ f(t) \quad [0,\infty)$ tartean zatika jarraia eta $t \to \infty$ denean ordena esponentzialekoa bait da$\}$

1.6 Teorema

$f(t) \in \mathcal{A}$ bada $\alpha \in \mathbb{R}$ existitzen da, non $L[f(t)] = F(s)$ existizen bait da $\forall s > \alpha$.

Frogapena:

$f(t) \in \mathcal{A} \Rightarrow \exists M, T > 0, \alpha \in \mathbb{R} \ / \ |f(t)| < Me^{\alpha t} \quad \forall t > T$

T finkoa da, $\displaystyle\int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt$ integrala konbergentea da $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \quad \displaystyle\int_0^T e^{-st} f(t)\,dt$ eta $\displaystyle\int_T^\infty e^{-st} f(t)\,dt$ konbergenteak badira.

* $\forall s \quad \displaystyle\int_0^T e^{-st} f(t)\,dt$ existizen da, $f(t) \quad [0,T]$ tartean zatika jarraia

eta $\forall s \quad e^{-st}$, bertan ere, jarraia direlako

$$* \int_T^\infty e^{-st} f(t)\,dt \le \int_T^\infty |e^{-st} f(t)|\,dt \le \int_T^\infty |e^{-st} M e^{\alpha t}|\,dt \le M \int_0^\infty e^{-(s-\alpha)t}\,dt =$$

$$= \frac{-M}{s-\alpha}\left(e^{-(s-\alpha)t}\Big|_0^\infty\right) = \begin{cases} \dfrac{M}{s-\alpha} & s > \alpha \text{ bada} \\ \infty & s \le \alpha \text{ bada} \end{cases}$$

Hau da, $\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-st} f(t)\, dt$ integrala $s > \alpha$ denerako konbergentea den integral maioratzaile bat onartzen du, beraz bera ere konbergentea da.

Bi integralak elkartuz $\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-st} f(t)\, dt$ integrala $\forall\, s > \alpha$ denean konbergenta dela ondorioztatzen da.

Hots, $\forall\, s > \alpha \quad \exists\, L[f(t)]$

Aurreko teorematik $F(s)$ funtzioaren definizio-eremuak $[\alpha,\infty)$ erako tartea barnean duela atera dezakegu. Har dezagun $s_0 = \inf \{ s_0 \in \mathbb{R} \,/\, \forall\, s > s_0 \;\; \exists\, L[f(t)] \}$ balioa, $\forall\, s > s_0$ $F(s)$ existitzen da. $F(s)$ $s < s_0$ denean dibergentea dela eta definizio-eremua (s_0, ∞) edo $[s_0, \infty)$ erakoa dela froga litezke. s_0 balioak s-ren konbergentzi abzisa izena hartzen du.

Elkarrekiko teorema ez da orokorrean egia. Izan ere $\mathcal{A}$ multzoan ez dauden eta transformatua onartzen duten funtzioak existitzen dira.

1.7 Adibidea

Izan bedi $\displaystyle f(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}$ $t > 0$ funtzioa.

Funtzio hau ez da $[0,T]$ tartean zatika jarraia zeren,

$\displaystyle\lim_{t\to 0^+} f(t) = \infty$ bait da, beraz $f(t) \notin \mathcal{A}$

Hala ere $\displaystyle L[f(t)] = \int_0^{\infty} e^{-st} \frac{1}{\sqrt{t}}\, dt = \int_0^{\infty} e^{-st}\, t^{-1/2}\, dt$

$s\,t = x \qquad s > 0 \qquad t = \dfrac{x}{s} \qquad dt = \dfrac{dx}{s}$ aldaketa eginez

$$L[f(t)] = \int_0^{\infty} e^{-x} \left(\frac{x}{s}\right)^{-1/2} \frac{dx}{s} = \frac{1}{s^{1/2}} \int_0^{\infty} e^{-x}\, x^{-1/2}\, dx = \frac{1}{s^{1/2}}\, \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\frac{\pi}{s}} \qquad s > 0$$

hau da $\forall\, s > 0$ $\displaystyle F(s) = \sqrt{\frac{\pi}{s}}$ funtzioa existitzen da.

Laplace-ren transformatuaren linealtasuna

Baldin $L[f(t)] = F(s) \quad \forall\, s > s_1$ eta $L[g(t)] = F(s) \quad \forall\, s > s_2$ badira $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$
$L\,[\alpha\, f(t) + \beta\, g(t)] = \alpha\, L\,[f(t)] + \beta\, L\,[g(t)] = \alpha\, F(s) + \beta\, G(s) \qquad \forall\, s > \max\,\{s_1, s_2\}$

Frogapena:

$$L\,[\alpha\, f(t) + \beta\, g(t)] = \int_0^\infty e^{-st}\,(\alpha\, f(t) + \beta\, g(t))\, dt = \alpha \underbrace{\int_0^\infty e^{-st}\, f(t)\, dt}_{\forall\, s > s_1} + \beta \underbrace{\int_0^\infty e^{-st}\, g(t)\, dt}_{\forall\, s > s_2} =$$

$$= \alpha\, F(s) + \beta\, G(s) \qquad \forall\, s > \max\,\{s_1, s_2\}.$$

Teorema honek funtzioen transformatuak existitzea eskatzen du, baina baturaren transformatua existi daiteke batugaien transformatuak existitu gabe. Izan ere, $f(t)$ funtzioak ez badu transformaturik onartzen $-f(t)$ funtzioak ere ez du onartuko baina $f(t) - f(t) = \theta(t)$ funtzioak bai $L[f(t) - f(t)] = L[\theta(t)] = \theta(s)$.

1.8 Adibidea

- Izan bitez $f(t) = e^{at}$ eta $g(t) = e^{-at}$ $a > 0$ funtzioak, hauen transformatuak

$\frac{1}{s-a} \quad s > a$ eta $\frac{1}{s+a} \quad s > -a$ dira hurrenez hurren

beraz $L[f(t) + g(t)] = \frac{1}{s-a} + \frac{1}{s+a} = \frac{2\,s}{s^2 - a^2} \qquad s > a$

- Har ditzagun $f_1(t) = e^{at}$ $a > 0$ eta $f_2(t) = -e^{at}$ $a > 0$ funtzioak

$L[f_1(t)] = \frac{1}{s-a} \quad s > a$ eta $L[f_2(t)] = \frac{-1}{s-a} \quad s > a$ beraz

$L[f_1(t) + f_2(t)] = \frac{1}{s-a} - \frac{1}{s-a} = 0 \qquad s > a$

Hala ere $f_1(t) + f_2(t) = \theta(t)$ eta $L[\theta(t)] = \theta(s) \quad \forall s$

Adibide honetan ikusi duguna dela eta ondoko definizioa emango dugu:

1.9 Definizioa

s-aldagaiko bi funtzio berdinak direla esango dugu s-ren balio batetik aurrera berdinak badira.

Definizio berri honekin linealtasun-propietateak balio izango du.

8.1-1 Funtzio elementalen transformatuak

a) $L[e^{at}] = \dfrac{1}{s-a}$ $\quad s > a \qquad L[e^{-at}] = \dfrac{1}{s+a} \quad s > -a$

$L[ke^{at}] = \dfrac{k}{s-a} \quad s > a \qquad L[ke^{-at}] = \dfrac{k}{s+a} \quad s > -a$

$L[1] = \dfrac{1}{s} \quad s > 0 \qquad L[k] = \dfrac{k}{s} \quad s > 0$

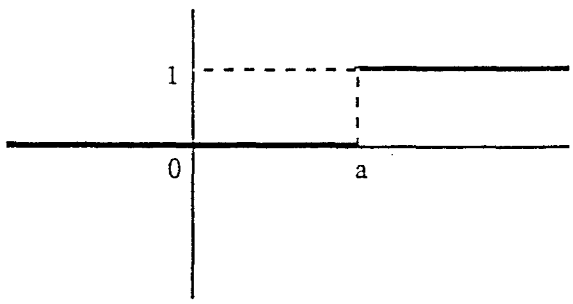
b) $L[t^n] = \dfrac{n!}{s^{n+1}} \quad s > 0 \qquad n \in \mathbb{N}$

c) $L[t^\alpha] = \dfrac{\Gamma(\alpha+1)}{s^{\alpha+1}} \quad s > 0 \qquad \alpha \in \mathbb{R} \qquad \alpha > -1$ ($\Gamma(\alpha+1)$ existi dadin)

d) $L[\sin at] = \dfrac{a}{s^2+a^2} \quad s > 0 \qquad L[\cos at] = \dfrac{s}{s^2+a^2} \quad s > 0 \qquad a > 0$ izanik

e) $L[\mathrm{Sh}\ at] = \dfrac{a}{s^2-a^2} \quad s > |a| \qquad L[\mathrm{Ch}\ at] = \dfrac{s}{s^2-a^2} \quad s > |a|$

f) Heaviside-ren unitate funtzioa edo unitate-maila funtzioa



$$U_a(t) = U(t-a) = \begin{cases} 0 & t < a \\ 1 & t > a \end{cases}$$

$$L[U(t-a)] = \frac{e^{-as}}{s} \qquad s > 0$$

1-1.10 Adibidea

- Demagun $f(t) = -3\,t^2 + 2\,t + 6$. $L[f(t)]$ kalkulatuko dugu

$$L[f(t)] = L[-3\,t^2 + 2\,t + 6\,] = -3\,L[t^2] + L[t] + L[6] =$$

$$= -3\left(\frac{2!}{s^3}\right) + 2\left(\frac{1!}{s^2}\right) + 6\ \frac{1}{2} = \frac{-6}{s^3} + \frac{2}{s^2} + \frac{6}{s} = \frac{6s^2 + 2s - 6}{s^3} \qquad s > 0$$

- Orain $f(t) = 5\,e^{4t} + 2\sin 2t - t^3$ dugu

$$L[f(t)] = L[5\,e^{4t} + 2\sin 2t - t^3] = 5\,L[e^{4t}] + 2\,L[\sin 2t] - L[t^3] =$$

$$= 5\,\underset{\substack{\uparrow \\ s>4}}{\frac{1}{s-4}} + 2\,\underset{\substack{\uparrow \\ s>2}}{\frac{2}{s^2+4}} - \underset{\substack{\uparrow \\ s>0}}{\frac{3!}{s^4}} = \frac{5}{s-4} + \frac{4}{s^2+4} - \frac{6}{s^4} \qquad s>4$$

- $f(t) = t^{7/2}$ bada kalkula dezagun $L[t^{7/2}]$

$$L[f(t)] = L[t^{7/2}] = \frac{\Gamma\left(\frac{7}{2}+1\right)}{s^{7/2+1}} = \frac{\Gamma\left(\frac{9}{2}+1\right)}{s^{9/2}} = \frac{\frac{7}{2}\cdot\frac{5}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\,\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{s^{9/2}} = \frac{\frac{7.5.3.\sqrt{\pi}}{2^4}}{s^4\sqrt{s}} \qquad s>0$$

$$= \frac{105}{16\,s^4}\sqrt{\frac{\pi}{s}} \qquad s>0$$

8.1-2 Laplace-ren tansformatuaren propietateak

1) 1. Translazio-propietatea

$f(t) \in A$ eta $L[f(t)] = F(s)$ bada $L[e^{at} f(t)] = F(s-a)$

Frogapena:

$$L[e^{at} f(t)] = \int_0^\infty e^{-st}\, e^{at} f(t)\, dt = \int_0^\infty e^{-(s-a)t} f(t)\, dt = F(s-a)$$

1-2.11 Adibidea

- $L[e^{-2t}\cos 3t] = \dfrac{(s+2)}{(s+2)^2+9}$ $\quad s+2>0 \quad\Rightarrow\quad F(s) = \dfrac{s+2}{s^2+4s+13} \quad s>-2$

- $L[e^{3t}\, t^4] = \dfrac{4!}{(s-3)^5}$ $\quad s-3>0 \quad\Rightarrow\quad F(s) = \dfrac{24}{(s-3)^2} \quad s>3$

2) 2. Translazio-propietatea

$f(t) \in A$ eta $L[f(t)] = F(s)$ bada $L[f(t-a)\,U(t-a)] = e^{-as} F(s)$ $\quad a>0$

Frogapena:

$$L[f(t\text{-}a)\,U(t\text{-}a)] = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t\text{-}a)\,U(t\text{-}a)dt = \int_a^{\infty} e^{-st} f(t\text{-}a)\;dt = \begin{bmatrix} t\text{-}a = x & t \in (a,\infty) \\ dt = dx & x \in (0,\infty) \end{bmatrix}$$

$$= \int_0^{\infty} e^{-s(x+a)} f(x)\,dx = e^{-as} \int_a^{\infty} e^{-sx} f(x)\,dx = e^{-as}\,F(s)$$

1-2.12 Adibidea

- Kalkula dezagun $g(t) = (t\text{-}1)^3 \quad t > 1$ funtzioaren transformatua

$$g(t) = t^3\,u(t\text{-}1) \qquad \text{beraz} \qquad L[g(t)] = e^{-s}\,L[t^3] = e^{-s}\,\frac{3!}{s^4} = \frac{6\,e^{-s}}{s^4} \qquad s > 0$$

3) Eskala-aldaketa

$f(t) \in A$ eta $L[f(t)] = F(s)$ bada $L[f(at)] = \dfrac{1}{a}\,F\left(\dfrac{s}{a}\right)$ $a > 0$ izanik

Frogapena:

$$L[f(at)] = \int_0^{\infty} e^{-st} f(at)\,dt = \begin{bmatrix} at = x \\ t = x/a \\ dt = dx/a \end{bmatrix} = \int_0^{\infty} e^{-s\left(\frac{x}{a}\right)} f(x)\,\frac{dx}{a} =$$

$$= \frac{1}{a} \int_0^{\infty} e^{-\left(\frac{s}{a}\right)x} f(x)\,dx = \frac{1}{a}\,F\left(\frac{s}{a}\right) \qquad s > a\,s_0 \quad \text{denean}$$

1-2.13 Adibidea

- $L[\cos t] = \dfrac{s}{s^2+1}$ $s > 0$ dela jakinik $L[\cos at]$ kalkulatuko dugu.

$$L[\cos at] = \frac{1}{a}\,F\left(\frac{s}{a}\right) = \frac{1}{a}\,\frac{\frac{s}{a}}{\left(\frac{s}{a}\right)^2+1} = \frac{\frac{s}{a^2}}{\frac{s^2+a^2}{a^2}} = \frac{s}{s^2+a^2} \qquad \left(\frac{s}{a}\right) > 0 \quad \text{edo} \quad s > 0$$

4) Funtzio baten deribatuaren transformatua

f(t) funtzioa $[0,\infty)$ tartean jarraia eta $t \to \infty$ ordena esponentzialekoa bada $f'(t)$ gutxienez $[0,\infty)$ tartean zatika jarraia eta ordena esponentzialekoa ere izango da. Kasu honetan $L[f'(t)] = s\,L[f(t)] - f(0^+)$

Frogapena:
Jo dezagun $f'(t)$ funtzioak etengune bakarra duela $t = c$ puntuan

$$L[f'(t)] = \int_0^{\infty} e^{-st} f'(t)\,dt = \lim_{T\to\infty} \int_0^{T} e^{-st} f'(t)\,dt \qquad T > c \text{ hartuko dugu}$$

$$I = \int_0^{T} e^{-st} f'(t)\,dt = \int_0^{c} e^{st} f'(t)\,dt + \int_c^{T} e^{-st} f'(t)\,dt$$

$(0,c)$ eta (c,T) tarteetan bai $f'(t)$ bai $f(t)$ jarraiak dira

$e^{-st} = u \quad du = -s\,e^{-st}\,dt$ zatikako-integrazioa eginez

$f'(t)\,dt = dv \quad v = f(t)$

$$I = f(t)\,e^{-st}\Big|_0^c + s\int_0^{c} e^{-st} f(t)\,dt + f(t)\,e^{-st}\Big|_c^T + s\int_c^{T} e^{-st} f(t)\,dt =$$

$$= f(c)\,e^{-sc} - f(0^+) + f(T)\,e^{-sT} - f(c)\,e^{-sc} + \int_0^{T} e^{-st} f(t)\,dt = I$$

$$f(t) \in \mathcal{A} \Rightarrow \exists\, L[f(t)] = \lim_{T\to\infty} \int_0^{T} e^{-st} f(t)\,dt = F(s), \quad \text{hau alde batetik}$$

bestetik $\exists\, M, T_1 > 0$ eta $\alpha \in \mathbb{R}$ / $|f(t)| < M e^{\alpha t} \quad \forall t > T_1$ beraz

$T > T_1 \quad |f(T)\,e^{-sT}| < e^{-(s-\alpha)T} M$ eta $T \to \infty$ denean $\lim\limits_{T\to\infty} e^{-(s-\alpha)T} M = 0$

beraz $\lim\limits_{T\to\infty} f(T)\,e^{-sT} = 0 \qquad s > \alpha$ denean

$$I = f(T)\,e^{-sT} - f(0^+) + s\int_0^{T} e^{-st} f(t)\,dt \qquad \text{eta}$$

$$L[f'(t)] = \lim_{T\to\infty} I = \lim_{T\to\infty} \left(s\int_0^{T} e^{-st} f(t)\,dt + f(T)\,e^{-st} \right) - f(0^+) = s\,F(s) - f(0^+)$$

1-2.14 Teorema

f(t) funtzioak t = a puntuan etengune bat badu

$$L[f'(t)] = s\,L[f(t)] - f(0^+) - e^{-as}\left(f(a^+) - f(a^-)\right)$$

Orokorrean $t = a_1$, $t = a_2$,..., $t = a_n$ puntuetan etena bada

$$L[f'(t)] = s\,L[f(t)] - f(0^+) - \sum_{i=1}^{n} e^{-a_i s}\,[f(a_i^+) - f(a_i^-)]$$

Lehenengo deribaturako lortu ditugun emaitzak orokortuz:

1-2.15 Teorema

Izan bitez $f, f', \ldots, f^{n-1)}$ $[0,\infty)$ tartean jarraiak eta $T \to \infty$ ordena esponentzialekoak eta $f^{n)}$ $[0,\infty)$ tartean zatika jarraia bada $L[f^{n)}(t)]$ transformatua existituko da eta zera balio izango du:

$$L[f^{n)}(t)] = s^n L[f(t)] - s^{n-1} f(0^+) - s^{n-2} f'(0^+) - \ldots\ldots\ldots - s\, f^{n-2)}(0^+) - f^{n-1)}(0^+)$$

Frogapena:

Frogapena indukzio-metodoaren bidez egiten da

$$L[f''(t)] = s\,L[f'(t)] - f'(0^+) = s\,(\,s\,L[f(t)] - f(0^+)\,) - f'(0^+) =$$

$$= s^2\,L[f(t)] - s\,f(0^+) - f'(0^+)$$

1-2.16 Adibidea

- $L[1]$ kalkulatzeko $f(t) = 1$ funtzioa eta bere $f'(t) = 0$ deribatua erabiliko dugu
  $L[f'(t)] = L[\theta(t)] = \theta(s)$ jakinik $L[f'(t)] = s\,L[f(t)] - f(0^+)$ $\Rightarrow$
  $\Rightarrow 0 = s\,L[1] - 1 \Rightarrow L[1] = 1/s$

- $L[\sin at]$ kalkulatuko dugu

  $f(t) = \sin at$ $f'(t) = a\cos at$ $f''(t) = -a^2 \sin at$

  formula aplikatuz $L[-a^2 \sin at] = s^2\,L[\sin at] - s\,f(0^+) - f'(0^+)$

  edo $-a^2\,L[\sin at] = s^2\,L[\sin at] - 0 - a \Rightarrow a = (\,s^2 + a^2)\,L[\sin at] \Rightarrow$

  $\Rightarrow L[\sin at] = \dfrac{a}{s^2 + a^2}$

5) Integralen transformatua

$$f(t) \in A \qquad \text{eta} \quad L[f(t)] = F(s) \quad \text{bada} \quad L\left[\int_a^{\infty} F(x)\,dx\right] = \frac{F(s)}{s} - \frac{1}{s}\int_0^a f(x)\,dx \qquad a \geq 0$$

- Kasu partikularra

$$a = 0 \qquad \text{bada} \qquad L\left[\int_0^t f(x)\,dx\right] = \frac{F(s)}{s}$$

- Orokorrean

$$L\left[\int_a^t\left(\int_a^{x_n}\left(\int_a^{x_{n-1}} \cdots \left(\int_a^{x_3}\left(\int_a^{x_2} f(x_1)\,dx_1\right)dx_2\right) \cdots dx_{n-2}\right)dx_{n-1}\right)dx_n\right] =$$

$$= \frac{F(s)}{s^n} - \frac{1}{s^n}\int_0^a f(x_1)\,dx_1 - \frac{1}{s^{n-1}}\int_0^a\left(\int_a^{x_2} f(x_1)\,dx_1\right)dx_2 -$$

$$- \frac{1}{s^{n-2}}\int_0^a\left(\int_a^{x_3}\left(\int_a^{x_2} f(x_1)\,dx_1\right)dx_2\right)dx_3 - \cdots -$$

$$- \frac{1}{s}\int_0^a\left(\int_a^{x_n} \cdots \left(\int_a^{x_2} f(x_1)\,dx_1\right) \cdots dx_{n-1}\right)dx_n$$

Frogapena:

$f(t)$ ordena esponentzialekoa bada $g(t) = \int_a^t f(x)\,dx$ ere ordena esponentzialekoa dela frogatutzat joko dugu

$$L\left[\int_a^t f(x)\,dx\right] = L[g(t)] = \int_0^{\infty} e^{-st}\,g(t)\,dt = \left|\begin{array}{ll} g(t) = u & g'(t)\,dt = f(t)\,dt = du \\ e^{-st}\,dt = dv & v = -\dfrac{e^{-st}}{s} \end{array}\right| =$$

$$= -\frac{g(t)\ e^{-st}}{s}\Big|_0^{\infty} + \frac{1}{s}\int_0^{\infty} e^{-st} f(t)\ dt = \lim_{T\to\infty} \frac{-g(T)\ e^{-sT}}{s} + \frac{g(0)}{s} + \frac{1}{s} F(s) = *$$

$$= \frac{F(s)}{s} + \frac{1}{s}\int_a^0 f(x)\ dx = \frac{F(s)}{s} - \frac{1}{s}\int_0^a f(x)\ dx \qquad a \geq 0$$

$*$ $g(t)$ ordena esponentzialekoa denez $\lim_{T\to\infty} \frac{g(T)\ e^{-sT}}{s} = 0$ da

1-2.17 Adibidea

- Kalkula dezagun $L\left[\int_0^t x^2\ dx\right]$

formula aplikatuz $L\left[\int_0^t x^2\ dx\right] = \frac{L[t^2]}{s}$ (kasu partikularra da)

$$L[t^2] = \frac{2!}{s^3} \quad \Rightarrow \quad L\left[\int_0^t x^2\ dx\right] = \frac{2!/s^3}{s} = \frac{2}{s^4} \qquad s > 0$$

6) t^n faktorezko biderkaketa

$f(t) \in A$ eta $L[f(t)] = F(s)$ bada $L[t^n f(t)] = (-1)^n F^{n)}(s)$

Frogapena:

Indukzio-metodoa erabiliko dugu frogatzeko
$n = 1$ $L[t\ f(t)] = F'(s)$ frogatu behar da

$$F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t)\ dt \quad \Rightarrow \quad F'(s) = \left(\int_0^{\infty} e^{-st} f(t)\ dt\right)' = \int_0^{\infty} (e^{-st})'_s\ f(t)\ dt =$$

$$= \int_0^{\infty} -t\ e^{-st} f(t)\ dt = -\int_0^{\infty} e^{-st} (t\ f(t))\ dt = -L[t\ f(t)] \quad \Rightarrow \quad L[t\ f(t)] = -F'(s)$$

$n = n$ denean betetzen dela suposatuko dugu, hots, $L[t^n f(t)] = (-1)^n F^{n)}(s)$
eta $(n+1)$-erako ere betetzen dela frogatuko dugu

$$(-1)^n F^{n)}(s) = \int_0^\infty e^{-st}\, t^n f(t)\, dt$$ s-rekiko deribatuz gero

$$(-1)^n F^{n+1)}(s) = \left(\int_0^\infty e^{-st}\, t^n f(t)\, dt \right)'_s = \int_0^\infty (e^{-st})'_s\, t^n f(t)\, dt = \int_0^\infty -t\; e^{-st}\, t^n f(t)\, dt =$$

$$= -\int_0^\infty e^{-st}\, t^{n+1} f(t)\, dt = -L[t^{n+1} f(t)] \;\Rightarrow\; L[t^{n+1} f(t)] = (-1)^{n+1} F^{n+1)}(s)$$

1-2.18 Adibidea

Kalkula dezagun $L[t\, e^{4t}]$

$$L[e^{4t}] = \frac{1}{s-4} \quad s > 4 \quad \text{beraz} \quad L[t\, e^{4t}] = -F'(s) = -F'(s) = -\left(\frac{1}{s-4}\right)' = \frac{1}{(s-4)^2} \quad s > 4$$

7) F(s) funtzioaren portaera $s \to \infty$ denean

$f(t) \in A$ eta $L[f(t)] = F(s)$ bada $\lim\limits_{s\to\infty} F(s) = 0$

Frogapena:

f(t) $[0,T]$ tartean zatika jarraia denez bornatua da beraz

$\forall\, t \in [0,T] \quad |f(t)| \le M_1 \quad \Rightarrow \quad |f(t)| \le M_1\, e^{\alpha t} \quad \alpha > 0 \quad \forall\, t \in [0,T]$

f(t) $t \to \infty$ ordena esponentzialekoa da ere, beraz $\exists\, M_2$, $T > 0$ eta

$\alpha \in \mathbb{R}^+ \;/\; |f(t)| < M_2\, e^{\alpha t} \quad \forall\, t > T$

Hau da $M = \max\{M_1, M_2\}$ bada $\forall\, t > 0 \quad |f(t)| < M\, e^{\alpha t}$

$$|F(s)| = \left| \int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt \right| \le \int_0^\infty |e^{-st} f(t)|\, dt < \int_0^\infty e^{-st} M\, e^{\alpha t}\, dt =$$

$$= M \int_0^\infty e^{-(s-\alpha)t}\, dt = \frac{-M}{s-\alpha}\left(e^{-(s-\alpha)t}\Big|_0^\infty\right) = \frac{M}{s-\alpha} \qquad s > \alpha \qquad \text{beraz}$$

$$\lim_{s\to\infty} |F(s)| < \lim_{s\to\infty} \frac{M}{s-\alpha} = 0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{s\to\infty} F(s) = 0$$

8) t faktorezko zatiketa

$f(t) \in \mathcal{A}$ eta $L[f(t)] = F(s)$ bada $L[f(t)/t] = \displaystyle\int_s^{\infty} F(x)\,dx$

Frogapena:

Izan bedi $g(t) = f(t)/t \quad t \neq 0$ edo $f(t) = t\,g(t)$ bi atalen transformatua bilatuz $L[f(t)] = L[t\,g(t)]$, baldin $L[g(t)] = G(s)$ bada $F(s) = -G'(s) \Rightarrow$
$\Rightarrow G(s) = -\int F(s)\,ds + K$ K bilatzeko 7) propietatea erabiliko dugu, hots, $\lim\limits_{s\to\infty} G(s) = 0$

$\int F(s)\,ds = H(s)$ dela suposatuz $G(s) = -H(s) + K$ izango dugu.

$\lim\limits_{s\to\infty} G(s) = \lim\limits_{s\to\infty} (-H(s) + K) \Rightarrow 0 = -\lim\limits_{s\to\infty} H(s) + K \Rightarrow K = \lim\limits_{s\to\infty} H(s) = H(\infty)$
beraz $G(s) = -H(s) + H(\infty)$ eta Barrow-en erregela aplikatuz

$$G(s) = H(\infty) - H(s) = \int_s^{\infty} F(s)\,ds \quad \text{lortuko dugu.}$$

Hau da
$$L\left[\frac{f(t)}{t}\right] = \int_s^{\infty} F(x)\,dx$$

1-2.19 Adibidea

$$L\left[\frac{\sin t}{t}\right] = \int_s^{\infty} \frac{2}{x^2+1}\,dx = \text{arc tg } x\,\Big|_s^{\infty} = \frac{\pi}{2} - \text{arc tg } s$$

9) Funtzio periodikoen transformatua

$f(t) \in \mathcal{A}$ funtzio periodikoa bada, T periododuna hain zuzen ere,

$$L[f(t)] = \frac{1}{1-e^{-sT}} \int_0^{T} e^{-st} f(t)\,dt$$

Frogapena:

$$L[f(t)] = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t)\,dt = \int_0^{T} e^{-st} f(t)\,dt + \int_T^{2T} e^{-st} f(t)\,dt + \int_{2T}^{3T} e^{-st} f(t)\,dt + \ldots\ldots$$

lehenengo integralean $t = u$, bigarrenean $t = T + u$, hirugarrenean $t = 2T + u, \ldots\ldots$ aldaketak egiten baditugu zera lortuko dugu:

$$L[f(t)] = \int_0^{T} e^{-su} f(u)\,du = \int_0^{T} e^{-s(T+u)} f(T+u)\,du + \int_0^{T} e^{-s(2T+u)} f(2T+u)\,du + \ldots\ldots =$$

$$\overset{(1)}{=} \int_0^{T} e^{-su} f(u)\,du + e^{-st} \int_0^{T} e^{-su} f(u)\,du + e^{-2sT} \int_0^{T} e^{-su} f(u)\,du + \ldots\ldots =$$

$$= (1 + e^{-sT} + e^{-2sT} + \ldots.) \int_0^{T} e^{-su} f(u)\,du \overset{(2)}{=} \frac{1}{1-e^{-sT}} \int_0^{T} e^{-st} f(t)\,dt$$

(1) $f(t)$ T periododuna denez $f(u) = f(T+u) = f(2T+u) = \ldots\ldots$

(2) progresio geometriko baten batura, arrazoia $e^{-sT} < 1$ izanik, $\frac{1}{1-e^{-sT}}$ da

10) Hasierako balioaren teorema

$f(t) \in \mathcal{A}$ eta $L[f(t)] = F(s)$ bada, $f'(t) \in \mathcal{A}$ bada $\lim_{t\to 0^+} f(t) = \lim_{s\to\infty} s\,F(s)$

Frogapena:

$$L[f'(t)] = \int_0^{\infty} e^{-st} f'(t)\,dt = s\,F(s) - f(0^+)$$

7) aplikatuz $\lim_{s\to\infty} L[f'(t)] = 0 \Rightarrow \lim_{s\to\infty} (s\,F(s) - f(0^+)) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \lim_{s\to\infty} s\,F(s) = f(0^+) = \lim_{t\to 0^+} f(t)$ dugu.

1-2.20 Adibidea

- $f(t) = \cos t$ $\qquad L[\cos t] = \dfrac{s}{s^2+1}$

$$\lim_{t\to 0} \cos t = 1 \qquad \lim_{s\to\infty} s\left(\frac{s}{s^2+1}\right) = \lim_{s\to\infty} \frac{s^2}{s^2+1} = 1$$

11) Bukaerako balioaren teorema

$$f(t) \in \mathcal{A} \text{ eta } L[f(t)] = F(s) \text{ bada, } f'(t) \in \mathcal{A} \text{ bada } \lim_{t\to 0^+} f(t) = \lim_{s\to\infty} s\,F(s)$$

Frogapena:

$$L[f'(t)] = s\,F(s) - f(0^+) = \int_0^\infty e^{-st} f'(t)\,dt \Rightarrow \lim_{s\to 0} \int_0^\infty e^{-st} f'(t)\,dt = \int_0^\infty f'(t)\,dt =$$

$$= \lim_{t\to\infty} (f(t) - f(0)) = \lim_{s\to 0} (s\,F(s) - f(0^+)) \Rightarrow \lim_{s\to 0} s\,F(s) = \lim_{t\to\infty} f(t)$$

$[0,\infty)$ tartean ari garelako $f(0) = f(0^+)$

8.2 *LAPLACE-REN ALDERANTZIZKO TRANSFORMATUA*

$\mathcal{A}$ multzoa jadanik ezagutzen dugu. Har dezagun orain beste hau: $\mathcal{F} = \{[s_0,\infty)$ erako tarteetan definituriko funtzioak$\}$. Laplace-ren transformatua bi multzo hauen arteko aplikazioa besterik ez da, hau da

$$L : \mathcal{A} \to \mathcal{F} \qquad L[f(t)] = F(s) \qquad s > s_0$$

Orain ondorengo bi galderei erantzuten saiatuko gara

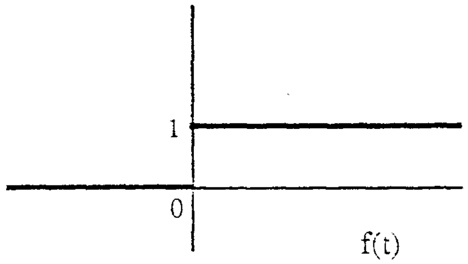
a) ba al da aplikazio hau injektiboa?

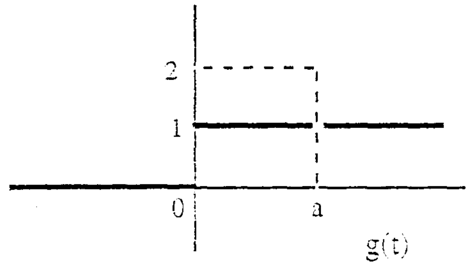
b) eta suprajektiboa?

a) $f, g \in \mathcal{A}$ eta $L[f(t)] = L[g(t)] \quad \Rightarrow \quad f(t) = g(t)$

Beste era batera: Ba al du $L[f(t)] = \emptyset(s)$ ekuazioak soluzio bakarra? Erantzuna ezezkoa da, ikus dezagun kontrabidea:

2.21 Adibidea





$$\mathcal{L}[f(t)] = \frac{1}{s} \quad s > 0 \qquad \mathcal{L}[g(t)] = \int_0^\infty e^{-st}\, g(t)\, dt = \int_0^a e^{-st}\, dt + \int_a^\infty e^{-st}\, dt =$$

$$= \int_0^\infty e^{-st}\, dt = \frac{1}{s} \quad s > 0 \qquad \mathcal{L}[f(t)] = \mathcal{L}[g(t)] \quad \text{baina } f(t) \neq g(t)$$

2.22 Definizioa

$$\forall\, t > 0 \qquad \int_0^t N(u)\, du = 0$$ baldintza betetzen duen funtziori funtzio nulu esango diogu.

Funtzio nuluen artean puntu-kopuru finituan edo infinitu zenbakigarrian izan ezik, besteetan 0 balioa hartzen duten funtzioak ditugu.

Lerch-en teorema.

Baldin $f(t)$ eta $g(t) \in \mathcal{A}$ eta s_0 existitzen bada non $\forall\, s > s_0$ $\mathcal{L}[f(t)] = \mathcal{L}[g(t)]$ bait da $f(t) = g(t) + N(t)$.

Honek $f(t)$ eta $g(t)$ etenguneetan ezik berdinak direla esan nahi du. Beraz $f(t)$ eta $g(t)$ jarraiak aukeratuz gero $\mathcal{L}[f(t)] = \emptyset(s)$ ekuazioak soluzio bakar bat izango du.

2.23 Definizioa

Baldin $F(s) \in \mathcal{F}$ emanik $f(t) \in \mathcal{A}$, non $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$ bait da, existitzen bada, $f(t)$ $F(s)$ funtzioaren Laplace-ren alderantzizko transformatua dela esango dugu eta $f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)]$ idatziko. Hau da.

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)] \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{L}[F(t)] = F(s)$$

b) Ba al du F multzoko edozein funtziok alderantzizko transformaturik?

Berriro ezezko erantzuna eman behar diogu galdera honi. Honen zergatia transformatuaren propietateetan bila dezakegu:

10) Hasierako balioaren teorema $\lim\limits_{t\to 0} f(t) = \lim\limits_{s\to\infty} s\,F(s)$ bete dadin

$\lim\limits_{s\to\infty} s\,F(s) = \lim\limits_{s\to\infty} s \,.\, \lim\limits_{s\to\infty} F(s)$ eta $\lim\limits_{t\to 0} f(t) \neq \infty$ direnez $\lim\limits_{s\to\infty} F(s) = 0$ derrigorrez bete behar da (7) propietatea). Aldi berean $\lim\limits_{s\to\infty} s\,F(s) \neq \infty$ ere bete behar da. Baldintza hauekin s, $\dfrac{1}{\sqrt{s}}$, e.a. funtzioek ezin dute alderantzizko transformaturik onartu. $\dfrac{1}{s}$ funtzioak, ordea, eduki lezake.

8.2-1 Laplace-ren alderantzizko transformatuaren propietateak

Alderantzizko transformatuaren propietateak transformatuaren propietateei dagozkienak dira, hau dela eta aipatu besterik ez dugu egingo

0) Linealtasuna

$$\mathcal{L}^{-1}[\alpha\, F(s) + \beta\, G(s)] = \alpha\, \mathcal{L}^{-1}[F(s)] + \beta\, \mathcal{L}^{-1}[G(s)] = \alpha\, f(t) + \beta\, g(t)$$

1) 1. Translazio-propietatea

$$\mathcal{L}^{-1}[F(s-a)] = e^{at} f(t) = e^{at} \mathcal{L}^{-1}[F(s)] \qquad a \geq 0$$

2) 2. Translazio-propietatea

$$\mathcal{L}^{-1}[e^{-as} F(s)] = \begin{cases} f(t-a) & t > a \\ 0 & t < a \end{cases}$$

3) Eskala-aldaketa

$$\mathcal{L}^{-1}[F(as)] = \frac{1}{a} f\left(\frac{t}{a}\right)$$

4) Funtzio deribatuen alderantzizko transformatua

$$\mathcal{L}^{-1}[F^{n)}(s)] = (-1)^n t^n f(t)$$

5) Integralen alderantzizko transformatua

Baldin $\lim_{t\to 0} \frac{f(t)}{t} < \infty$ bada $\quad L^{-1}\left[\int_s^{\infty} F(u)\,du\right] = \frac{f(t)}{t}$

6) s^n faktorezko biderkaketa

Baldin $f^{n)}(t)$ $(0,\infty)$ tartean existitzen bada eta $f(0^+) = f'(0^+) = \ldots = f^{n-1)}(0^+) = 0$

$L^{-1}[s^n F(s)] = f^{n)}(t)$

7) s^n faktorezko zatiketa

$$L^{-1}\left[\frac{F(s)}{s^n}\right] = \int_0^t \left(\int_0^{x_n} \ldots\ldots \left(\int_0^{x_2} f(x_1)\,dx_1\right) \ldots\ldots dx_{n-1}\right) dx_n$$

8.3 *KONBOLUZIOA*

8.24 *Definizioa*

Izan bitez $f(t)$ eta $g(t)$ absolutuki integragarriak $\mathbb{R}$ multzoan. Kontsidera dezagun

$h(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-t)\,g(t)\,dt$ $\quad$ t-rekiko integrala, x parametroa duelarik, $h(x)$ integrala konbergentea den multzoan definiturik dago; izan bedi A multzo hori. A multzoan, $h(x)$ $f(t)$ eta $g(t)$ funtzioen arteko konboluzio da eta $h = f * g$ idatziko dugu.

Kasu partikular bezala, $\forall\, t < 0$ $\quad f(t) = g(t) = 0$ funtzioak hartzen baditugu $f(x-t) = 0$ $\quad \forall\, t > x$ dela kontutan hartuz

$$h(x) = (f*g)(x) = \int_0^x f(x-t)\,g(t)\,dt$$

Konboluzioaren bidez ondoko galdera honi erantzun nahi diogu:

$H(s) = F(s)\,G(s)$ bada non $F(s) = L[f(t)]$ eta $G(s) = L[g(t)]$ bait dira ba al da $H(s) = L[f(t)\,g(t)]$? edo $L[f(t)\,g(t)] = L[f(t)]\,L[g(t)]$? Berriro ere erantzuna ezezkoa da hurrengo adibideak frogatzen duenez:

3.25 Adibidea

$f(t) = t$ eta $g(t) = e^t$ funtzioak hartuz $L[t] = \dfrac{1}{s^2}$, $L[e^t] = \dfrac{1}{s-1}$

$$L[f(t)\,g(t)] = L[t\,e^t] = -\,(L[e^t])' = -\left(\frac{1}{s-1}\right)' = \frac{1}{(s-1)^2} \qquad s > 1$$

bi emaitzak

eta $$L[f(t)]\,L[g(t)] = \frac{1}{s^2}\cdot\frac{1}{s-1} = \frac{1}{s^2\,(s-1)} \qquad s > 1$$

konparatuz

desberdinak direla ikus daiteke.

Orain galdera beste era honetan egingo dugu: ba al dago $h(t)$ funtziorik non $L[h(t)] = L[f(t)]\,L[g(t)]$ beteko bait du? eta existitzen bada zer-nolako erlazio du $f(t)$ eta $g(t)$ funtzioekin?

Galdera hauei erantzuteko konboluzio teorema emango dugu:

Konboluzio-teorema

$f(t), g(t) \in A$ eta $L[f(t)] = F(s)$, $L[g(t)] = G(s)$ badira

$$L^{-1}[F(s)\,G(s)] = \int_0^t f(t-x)\,g(x)\,dx = (f*g)(x) \qquad \text{edo}$$

$$L^{-1}[F(s)\,G(s)] = L^{-1}[F(s)] * L^{-1}[G(s)]\,, \qquad \text{eta transformatuarekin}$$

$$L[(f*g)\,(t\,)] = L[f(t)]\,L[g(t)] = F(s)\,G(s)$$

Frogapena:

Demagun $L[f(t)]$ eta $L[g(t)]$ existitzen direla $\forall\, s > s_0$

$$L[(f*g)(t)] = \int_0^\infty e^{-st}\,(f*g)(t)\,dt = \int_0^\infty e^{-st}\left[\int_0^t f(t-x)\,g(x)\,dx\right]$$

$t \in [0,\infty)$ eta $x \in [0,t]$ dugu, integralak elkartrukatzen baditugu integrazio-mugak hauxe izango ditugu $x \in [0,\infty)$ eta $t \in [x,\infty)$

beraz $$L[(f*g)(t)] = \int_0^\infty\left(\int_x^\infty e^{-st}\,f(t-x)\,dt\right)g(x)\,dx\,,$$ barruko integralean t - x = u eginez $L[(f*g)(t)] = \int_0^\infty \left(\int_0^\infty e^{-s(u+x)} f(u)\, du \right) g(x)\, dx =$

$$= \int_0^\infty e^{-sx} \left(\int_0^\infty e^{-su} f(u)\, du \right) g(x)\, dx = \int_0^\infty e^{-sx} F(s)\, g(x)\, dx = F(s) \int_0^\infty e^{-sx} g(x)\, dx \Rightarrow$$

$L[(f*g)(t)] = F(s)\, G(s) = L[f(t)]\, L[g(t)]$

8.3-1 Konboluzioaren propietateak

1) Trukatze-propietatea

$(f*g) = (g*f)$

Frogapena:

$(f*g)(x) = \int_0^x f(x-t)\, g(t)\, dt =$ [u = x-t du = -dt] aldaketa eginez =

$$= \int_x^0 -f(u)\, g(x-u)\, du = \int_0^x g(x-u)\, f(u)\, du = (g*f)(x)$$

2) Elkartze-propietatea

$f*(g*h) = (f*g)*h$

3) Batuketarekiko banatze-propietatea

$f*(g + h) = (f*g) + (f*h)$

4) $(f*\theta) = \theta$

Baina orokorrean $f*1 \neq f$

3.26 Adibidea

- Bila dezagun $L^{-1}\left[\dfrac{1}{(s+3)\,(s-1)}\right]$

$$F(s) = \frac{1}{s+3} \quad \text{eta} \quad G(s) = \frac{1}{s-1} \quad \text{aukeratuz}$$

$$\mathcal{L}^{-1}[F(s)] = e^{-3t} = f(t) \qquad \mathcal{L}^{-1}[G(s)] = e^{t} = g(t)$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s+3)\,(s-1)}\right] = \mathcal{L}^{-1}[F(s)\,G(s)] = \int_0^t f(t-x)\,g(x)\,dx = \int_0^t e^{-3(t-x)}\,e^{x}\,dx =$$

$$= e^{-3t}\int_0^t e^{4x}\,dx = e^{-3t}\left(\frac{e^{4x}}{4}\Big|_0^t\right) = e^{-3t}\left(\frac{e^{4t}-1}{4}\right) = \frac{e^{t}-e^{-3t}}{4}$$

- Bila dezagun $h(t)$ funtzioa zeinen Laplace-ren transformatua

$$H(s) = \frac{1}{s^2(s+1)} \quad \text{bait da.}$$

$$H(s) = \frac{1}{s^2}\,\frac{1}{(s+1)} = F(s)\,G(s) \quad \Rightarrow \quad F(s) = \mathcal{L}[t] \quad \text{eta} \quad G(s) = \mathcal{L}[e^{-t}]$$

$$h(t) = \int_0^t f(t-x)\,g(x)\,dx = \int_0^t (t-x)\,e^{x}\,dx = t\int_0^t e^{-x}\,dx - \int_0^t x\,e^{-x}\,dx =$$

$$= \begin{bmatrix} x = u & du = dx \\ e^{-x}\,dx = dv & -e^{-x} = v \end{bmatrix} = t\,(-e^{-x}\,|_0^t) - \left[-xe^{-x}\,|_0^t - \int_0^t e^{-x}\,dx\right] =$$

$$= t\,(1-e^{-t}) - (-t\,e^{-t} + (-e^{-x}|_0^t)) =$$

$$= t\,(1-e^{-t}) + t\,e^{-t} - (1-e^{-t}) = t - 1 + e^{-t}$$

9. GAIA
EKUAZIO DIFERENTZIALAK

9.1 SARRERA

1.1 Definizioa

$F(x,y,y',...,y^{n)}) = 0$ motako ekuazioak, non $y' = \frac{dy}{dx}, ..., y^{n)} = \frac{d^n y}{dx^n}$ diren eta

F funtzioak x aldagai askea y, menpeko aldagaia, eta bere n lehenengo deribatuei lotzen bait die n. ordenako ekuazio diferentzial arrunt izena du.

1.2 Definizioa

Ekuazio diferentzial baten ordena ekuazioan agertzen den y-ren deribaturik handienarena da.

1.3 Definizioa

Ekuazio diferentzial baten maila F funtzioa polinomioa denean bakarrik definitzen da eta zera da: F polinomioaren $y,y',...,y^{n)}$-arekiko maila.

1.4 Adibidea

- $3x^2 y'^2 + \sin x\, y' + y^3 e^x = 0$

  ekuazio diferentzial hau x aldagaiarekiko ez da polinomioa, baina horrek ez du axolarik, $y, y',..., y^{n)}$ aldagaiekiko izan behar duelako polinomioa.

  ordena : deribaturik handiena y' denez 1 da ordena
  maila : y-rekiko polinomiotzat hartuz 3 mailakoa da
  y'-rekiko polinomiotzat hartuz 2 mailakoa

- $y''^2 = Kx\,(1+y'^2)^3$

  ordena 2 da y'' agertzen delako
  maila : y'-arekiko 6 mailakoa da
  y''-arekiko, aldiz, 2 mailakoa.

1.5 Definizioa

$$F\left(x,y,u,\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y},\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y},\frac{\partial^2 u}{\partial y^2},.......\right) = 0$$ motako ekuazioak non F funtzioak

bi edo aldagai aske gehiago, beraien u funtzioa eta honen n. ordenaraino deribatu partzialei lotzen bait dizkie, n. ordenako deribatu partzialetako ekuazio diferentzial izena du.

1.6 Adibidea

Laplace-ren ekuazioa $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0$ $u = u(x,y,z)$ izanik.

1.7 Definizioa

Ekuazio bat baino gehiago dagoenean ekuazio diferentzial arrunt edo deribatu partzialetako ekuazio diferentzialezko sistemak ditugu.

1.8 Definizioa

$F(x,y,y',...,y^{n)}) = 0$ ekuazioa identitate bihurtzen duen edozein $y = \varphi(x)$ funtziori soluzio esaten zaio. Hau da, $F(x,\varphi(x),\varphi'(x),...,\varphi^{n)}(x)) = 0$ betetzen denean. Soluzioaren grafikoari kurba integral esan ohi zaio.

1.9 Definizioa

Ekuazio diferentzialaren soluzioa era inplizitutara lortzen badugu, hots, $\emptyset(x,y) = 0$ erara, soluzioak ekuazio diferentzialaren integral izena hartzen du.

1.10 Definizioa

Integratzen den bakoitzean konstante bat agertzen dela kontutan hartuz bai soluzioek bai integralek hautazko konstanteak izaten dituzte; kasu honetan soluzio orokor edo integral orokor izenak hartzen dute hurrenez hurren. Konstante hauei balioak emanez soluzio edo integral partikularrak lortzen dira.

1.11 Definizioa

Soluzioa edo integrala bakarrak izan daitezen ezezagun funtzioari, y aldagaiari alegia, mugalde edo hastapen izenetako baldintzak ezartzen zaizkio.

1.12 Definizioa

Konstanteei balioak emanez lortu ezin diren integralei integral singular esaten zaie.

1.13 Adibidea

$y = x^2 + Kx$ funtzioa $y'x - x^2 - y = 0$ ekuazioaren soluzio orokorra dela egiaztatuko dugu.

$y = x^2 + Kx \quad \rightarrow \quad y' = 2x + K$ eta ekuazioan ordezkatuz
$(2x + K)x - x^2 - (x^2 + Kx) = 2x^2 + Kx - x^2 - x^2 - Kx = 0$ betetzen da.

Orain hastapen-baldintza ezarriko diogu: (3,1) puntutik igaro behar du soluzioak, hau da $y = 1$ bete behar da $x = 3$ puntuan.

$$y = x^2 + Kx \quad \rightarrow \quad 1 = (3)^2 + K.(3) \quad \Rightarrow \quad 1 = 9 + 3K \quad \Rightarrow \quad 3K = -8 \quad \Rightarrow \quad K = \frac{-8}{3}$$

beraz $\quad y = x^2 - \frac{8}{3}x \quad$ soluzio partikularra lortzen dugu.

9.2 LEHEN ORDENAKO EKUAZIO DIFERENTZIALAK

$F(x,y,y') = 0$ erakoak dira. Ekuazio hau $y' = f(x,y)$ erara idatz daitekeenean forma normal esango diogu.

Oso kasu partikularra da $y' = f(x)$ motako forma normala, $f(x)$ funtzioa integragarria dela suposatuz $\frac{dy}{dx} = f(x) \Rightarrow dy = f(x)\,dx \Rightarrow y = \int f(x) + K = \varphi(x) + K$ soluzio orokorra lor daiteke.

Bi arazo nagusirekin egiten dugu topo ekuazio diferentzial bat ebazten saiatzen garenean:

a) funtzioa ez da beti integragarria izango

b) soluzioa ez da bakarra, aitzitik infinitu soluzio dago

1. ordenako ekuazio diferentzialaren soluzioaren existentzi eta bakartasun-teorema

$y' = f(x,y)$ ekuazio diferentziala emanik, $f(x,y)$ D eremuan jarraia bada, $(x_0,y_0) \in D$ puntua hartuz gutxienez ekuazio diferentzialaren soluzio bat existitzen da zeina (x_0,y_0) puntutik igarotzen bait da. Horretaz gain $\frac{\partial f}{\partial y}$ existitu eta jarraia bada soluzioa bakarra izango da.

Teorema honetatik infinitu soluzio dagoela ondorioztatzen da, D eremuko puntuoi dagozkienak alegia. Soluzioa (x_0,y_0) puntutik igaraten deneko emaitza hastapen-baldintzaz izendatu duguna da hain zuen ere.

2.14 Definizioa

$y = \varphi(x,K)$ funtzioa, K hautezko konstantea izanik, soluzio orokorra da baldin:

a) $\forall K$ ekuazio diferentziala betetzen badu

b) $\forall (x_0,y_0) \in D \qquad \exists K_0 / \quad y_0 = \varphi(x_0,K_0)$

$y = \varphi(x,K_0)$ $\quad (x_0,y_0)$ puntutik igarotzeko hastapen-baldintza ezarriz lortzen den soluzio partikularra da.

9.2-1 *Aldagai bananduetako ekuazioa*

- $y' = \dfrac{P(x)}{Q(y)}$ erara idatz daitezkeenak dira , edo $y = \dfrac{dy}{dx}$ idatziz

$$\frac{dy}{dx} = \frac{P(x)}{Q(y)} \qquad \Leftrightarrow \qquad Q(y)\,dy = P(x)\,dx$$

- Soluzio orokorra $\int Q(y)\,dy = \int P(x)\,dx + K$

Mota honen barruan beste bi hauek sartuko ditugu

* Aldagai banangarrietako ekuazioa

- $y' = \dfrac{f_1(x)\,g_1(y)}{f_2(x)\,g_2(y)}$ erakoak dira, eta aldagaiak banan daitezke

$$y' = \frac{dy}{dx} \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{f_1(x)\,g_1(y)}{f_2(x)\,g_2(y)} \quad \Rightarrow \quad \frac{g_2(y)}{g_1(y)}\,dy = \frac{f_1(x)}{f_2(x)}\,dx$$ era honetan

aldagai bananduetako ekuazioa dugu.

* Aldagai banangarri bihurgarrietako ekuazioa

- $y' = f(ax+by+c)$ erakoak dira
- soluzio orokorra bilatzeko $ax + by + c = z$ aldaketa egiten da eta aldagai bananduetako ekuazio bat lortzen da.

2-1.15 Adibidea

$$(t^2 - x\,t^2)\,x' + x^2 + t\,x^2 = 0$$

$$x' = \frac{-x^2 - t\,x^2}{t^2 - x\,t^2} = \frac{-x^2\,(1+t)}{t^2\,(1-x)} \quad \Rightarrow \quad \frac{dx}{dt} = \frac{x^2\,(1+t)}{t^2\,(x-1)}$$ aldagai banangarrietakoa

$$\frac{x-1}{x^2}\,dx = \frac{1+t}{t^2}\,dt \quad \Rightarrow \quad \int \frac{x-1}{x^2}\,dx = \int \frac{1+t}{t^2}\,dt + K \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \mathrm{Ln}\,|x| + \frac{1}{x} = -\frac{1}{t} + \mathrm{Ln}\,|t| + K \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{t} + \frac{1}{x} + \mathrm{Ln}\,|x| - \mathrm{Ln}\,|t| = K \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \frac{x+t}{x\,t} + \mathrm{Ln}\left|\frac{x}{t}\right| = K$$

9.2-2 *Ekuazio homogenoa*

- $f(x,y)$ funtzioa n mailako homogenoa da baldin $f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n f(x,y)$ betetzen badu.

- Euler-en teorema : $f(x,y)$ n mailako funtzio homogenoa bada

$$\frac{\partial f}{\partial x} x + \frac{\partial f}{\partial y} y = n\, f(x,y) \qquad \text{betetzen da}$$

- $P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0$ erako ekuazio diferentziala homogenoa da $P(x,y)$ eta $Q(x,y)$ funtzioak maila berberako funtzio homogenoak direnean.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-P(x,y)}{Q(x,y)} = f(x,y) \ ; \quad f(\lambda x, \lambda y) = \frac{-P(\lambda x, \lambda y)}{Q(\lambda x, \lambda y)} = \frac{-\lambda^n P(x,y)}{\lambda^n Q(x,y)} = \frac{-P(x,y)}{Q(x,y)} = f(x,y)$$

hau da, $y' = f(x,y)$ erako ekuazio diferentziala homogenoa da $f(x,y)$ 0 mailako funtzio homogenoa bada.

- $f(x,y)$ 0 mailako funtzio homogenoa bada, $g\left(\frac{y}{x}\right)$ erara idatz daiteke.

- Soluzio orokorra $u = \frac{y}{x} \leftrightarrow y = u \ \Rightarrow \ y' = u + x u'$ aldaketa egiten da eta

$y' = f(x,y) = g\left(\frac{y}{x}\right)$ ekuazioan ordezkatuz $u + x u' = g(u)$ ekuazioa lortzen da

eta hemendik $x u' = g(u) - u \ \Rightarrow \ x \frac{du}{dx} = g(u) - u \ \Rightarrow \ \frac{du}{g(u) - u} = \frac{dx}{x} \ \Rightarrow$

$$\Rightarrow \int \frac{du}{g(u) - u} = \operatorname{Ln}|x| + K \qquad \text{gero aldagai-aldaketa desegin behar da.}$$

Mota honen barruan ondoko hau sartuko dugu

* Ekuazio homogeno bihurgarria

- $y' = f\left(\frac{ax + by + c}{a'x + b'y + c'}\right)$ erakoak dira

- Ekuazio homogeno bihurtzeko c eta c' desagerrerazi behar ditugu.

  . Ardatz-traslazio baten bidez, $(0,0)$ puntua (α,β) puntura eraman behar da non (α,β) $ax + by + c = 0$ eta $a'x + b'y + c' = 0$ zuzenen elkargunea bait da.

Aldaketa beraz $\left| \begin{array}{ll} x = X + \alpha & dx = dX \quad dy = dY \Rightarrow y' = Y' \\ y = Y + \beta & \text{izango da eta emaitza:} \end{array} \right.$

$$Y' = f\left(\frac{a(X+\alpha) + b(Y+\beta) + c}{a'(X+\alpha) + b'(Y+\beta) + c'}\right) = f\left(\frac{aX + bY}{a'X + b'Y}\right)$$ ekuazio homogenoa

. Bi zuzenak paraleloak badira $a' = \lambda a,\ b' = \lambda b,\ c' = \lambda c$ izango dugu eta $u = ax + by$ aldaketa egingo dugu.

$u' = a + by' \Rightarrow y' = \dfrac{u' - a}{b}$, ekuazioan ordezkatuz

$$\frac{u' - a}{b} = f\left(\frac{ax + by + c}{\lambda ax + \lambda by + c'}\right) = f\left(\frac{u + c}{\lambda u + c'}\right) \Rightarrow \frac{u'}{b} = f\left(\frac{u + c}{\lambda u + c'}\right) + \frac{a}{b} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow u' = b\, f\left(\frac{u + c}{\lambda u + c'}\right) + a = \psi(u)$$ aldagai banandueтako ekuazioa.

. Bi zuzenak zuzen bera badira $a' = \lambda a,\ b' = \lambda b,\ c' = \lambda c$ dira beraz

$$y' = f\left(\frac{ax + by + c}{\lambda ax + \lambda by + \lambda c}\right) = f\left(\frac{1}{\lambda}\right) = \lambda_1 .$$ konstantea $\Rightarrow y = \lambda_1 x + K$ da

soluzioa kasu honetan.

2-2.16 Adibidea

$(x + 2y + 1)\, dx - (2x - 3)\, dy = 0$

$$y' = \frac{x + 2y + 1}{2x - 3}$$ ekuazio homogeno bihurgarria

$\left.\begin{array}{l} x + 2y + 1 = 0 \\ 2x - 3 = 0 \end{array}\right| \begin{array}{l} \Rightarrow x = \dfrac{3}{2} = \alpha \\ y = \dfrac{-1 - \dfrac{3}{2}}{2} = \dfrac{-5}{4} = \beta \end{array}$ hau da $(\alpha, \beta) = \left(\dfrac{3}{2}, \dfrac{-5}{4}\right)$ eta aldaketa ondoko hau:

$$x = X + \frac{3}{2} \qquad y' = Y' \Rightarrow Y' = -\frac{\left(X+\frac{3}{2}\right)+2\left(Y-\frac{5}{4}\right)+1}{2\left(X+\frac{3}{2}\right)-3} = \frac{X+2Y}{2X} \quad \text{ekuazio homogenoa}$$

$$y = Y - \frac{5}{4} \qquad \text{orain } Y' = \frac{1}{2} + \frac{Y}{X} \quad \text{idatziko dugu eta}$$

$u = \frac{Y}{X}$ $\quad Y' = u'X + u$ $\quad$ aldaketa egingo, beraz

$$u'X + u = \frac{1}{2} + u \Rightarrow u'X = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{du}{dX} = \frac{1}{2X} \Rightarrow du = \frac{dX}{2X} \Rightarrow$$

$$u = \frac{1}{2}\,\mathrm{Ln}\,|X| + K_1 = \frac{1}{2}\,\mathrm{Ln}\,|X| + \mathrm{Ln}\,K = \mathrm{Ln}\,K\,|X|^{1/2} \Rightarrow \text{azken aldaketa deseginez}$$

$$\frac{Y}{X} = \mathrm{Ln}\,K\,|X|^{1/2} \Rightarrow Y = X\,\mathrm{Ln}\,K\,|X|^{1/2} \quad \text{eta orain lehenengo aldaketa}$$

$$\text{desegingo dugu} \quad y - \frac{5}{4} = \left(x - \frac{3}{2}\right)\mathrm{Ln}\left(K\sqrt{\left|x-\frac{3}{2}\right|}\right) \quad \text{soluzio orokorra lortuz.}$$

9.2-3 *Diferentzial zehatza. Faktore integratzaileak*

- $P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0$ erako ekuazioa diferentzial zehatza deitzen da baldin $u(x,y)$ funtzio bat existitzen bada non $du(x,y) = P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy$ bait da

beste erara $\quad \frac{\partial u}{\partial x} = P(x,y) \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = Q(x,y)$

Heffter-Young-en teoremaren baldintzak ezarriz gero

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial x} \quad \text{beteko da.} \quad \text{hau da} \quad \frac{\partial P(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}$$

Azken berdintza hau izango da diferentzial zehatza dela egiaztatzeko erabiliko duguna.

- Soluzio orokorra bilatzeko ondoko erabideari jarraituko gatzaizkio

$$\frac{\partial u}{\partial x} = P(x,y) \Rightarrow u(x,y) = \int P(x,y)\,dx + \varphi(y)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = Q(x,y) \quad \Rightarrow \quad Q(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\int P(x,y)\,dx + \varphi(y)\right) = \int \frac{\partial P(x,y)}{\partial y}\,dx + \varphi'(y) \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \varphi'(y) = Q(x,y) - \int \frac{\partial P(x,y)}{\partial y}\,dx \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \varphi(y) = \int\left(Q(x,y) - \int \frac{\partial P(x,y)}{\partial y}\,dx\right)dy + K \qquad \text{beraz}$$

$$u(x,y) = \int P(x,y)\,dx + \int\left(Q(x,y) - \int \frac{\partial P(x,y)}{\partial y}\,dx\right)dy + K$$

ekuazio diferentzialak $du(x,y) = 0$ dela dio, hau da $u(x,y)$ funtzioa konstante dela, hau da hain zuzen ere soluzioa:

$$u(x,y) = K \qquad \text{edo} \qquad \int P(x,y)\,dx + \int\left(Q(x,y) - \int \frac{\partial P(x,y)}{\partial y}\,dx\right)dy = K$$

- Ekuazio diferentziala ez bada diferentzial zehatza $\left(\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}\right)$ baina

$\mu(x,y)$ funtzio bat existitzen bada non

$\mu(x,y)\,P(x,y)\,dx + \mu(x,y)\,Q(x,y)\,dy = 0$ ekuazioa diferentzial zehatza bait da, azken ekuazio honi aurreko ebazpena aplika lekioke soluzio orokorra lortzeko.

. $\mu(x,y)$ funtzio guztioi faktore integratzaile esan ohi zaie
. Ikus dezagun faktore integratzaileek bete behar duten baldintza ekuazio berria diferentzial zehatza izan dadin:

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\mu(x,y)\,P(x,y)\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\mu(x,y)\,Q(x,y)\right) \qquad \text{bete beharko da}$$

garatuz gero $\quad \frac{\partial \mu}{\partial y} P + \mu \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial \mu}{\partial x} Q + \mu \frac{\partial Q}{\partial x} \quad \Rightarrow$

$$\Rightarrow \quad P\frac{\partial \mu}{\partial y} - Q\frac{\partial \mu}{\partial x} = \mu\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)$$

Baina deribatu partzialetako ekuazio hau ebaztea lehenengoa baino zailagoa gerta liteke, arazo hau ekiditeko faktore integratzailari zenbait baldintza ezartzen zaio.

Ikus ditzagun, beraz, faktore integratzaile berezi batzu:

9.2-3.A $\mu(x)$ erako faktore integratzailea

$\mu = \mu(x)$ bada $\frac{\partial \mu}{\partial y} = 0$ eta betebeharrezko baldintza

$$-Q\frac{\partial \mu}{\partial x} = \mu\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)$$ izango dugu eta hemendik

$$Q\frac{d\mu}{dx} = \mu\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) \Rightarrow \frac{d\mu}{\mu} = \frac{P'_y - Q'_x}{Q}dx$$ honek zera esan nahi du:

$\mu(x)$ erako faktore integratzailea existi dadin $\frac{P'_y - Q'_x}{Q}$ zatidurak x aldagaiaren funtzio hutsa izan behar du, hau bete ezik ez da honelako faktore integratzailerik existituko. Eta existituz gero

$$\mathrm{Ln}\,\mu = \int \frac{P'_y - Q'_x}{Q}dx \Rightarrow \mu(x) = e^{\int \frac{P'_y - Q'_x}{Q}dx}$$ izango da

9.2-3.B $\mu(y)$ erako faktore integratzailea

$\mu = \mu(y)$ bada $\frac{\partial \mu}{\partial x} = 0$, beraz $P\frac{\partial \mu}{\partial y} = \mu\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)$ baldintza lortuko dugu, eta hortik: $P\frac{\partial \mu}{\partial y} = \mu\,(Q'_x - P'_y) \Rightarrow \frac{d\mu}{\mu} = \frac{Q'_x - P'_y}{P}dy$

hau da $\mu(y)$ erako faktore integratzailea existi dadin $\frac{Q'_x - P'_y}{P}$ zatidurak y aldagaiaren funtzio hutsa izan behar du, eta horrela gertatzen bada

$$\mathrm{Ln}\,\mu = \int \frac{Q'_x - P'_y}{P}dy \Rightarrow \mu(y) = e^{\int \frac{Q'_x - P'_y}{P}dy}$$ faktorea lortuko da

9.2-3.C $\mu(xy)$ erako faktore integratzailea

Izan bedi $z = xy$ beraz $\mu = \mu(z)$, ikus dezagun nola geratzen den baldintza kasu honetan

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial \mu}{\partial x} = \dfrac{d\mu}{dz}\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{d\mu}{dz}\, y \\[2ex] \dfrac{\partial \mu}{\partial y} = \dfrac{d\mu}{dz}\dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{d\mu}{dz}\, x \end{array}\right| \begin{array}{l} \Rightarrow\ P\left(\dfrac{d\mu}{dz}\,x\right) - Q\left(\dfrac{d\mu}{dz}\,y\right) = \mu\,(Q'_x - P'_y) \quad \Rightarrow \\[2ex] (x\,P - y\,Q)\,\dfrac{d\mu}{dz} = \mu\,(Q'_x - P'_y) \quad \Rightarrow \quad \dfrac{d\mu}{\mu} = \dfrac{Q'_x - P'_y}{x\,P - y\,Q} \end{array}$$

beraz $\mu(z)$ existi dadin $\dfrac{Q'_x - P'_y}{x\,P - y\,Q}$ z-ren funtzio hutsa izan behar du

eta orduan $\quad \mathrm{Ln}\,\mu = \displaystyle\int \frac{Q'_x - P'_y}{x\,P - y\,Q}\,dz \quad \Rightarrow \quad \mu(z) = e^{\int \frac{Q'_x - P'_y}{x P - y Q} dz}$ da faktorea

9.2-3.D $\mu(x-y)$ erako faktore integratzailea

Izan bedi $z = x + y$, hots $\mu = \mu(z)$ eta baldintza horrela geratuko da:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial \mu}{\partial x} = \dfrac{d\mu}{dz}\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{d\mu}{dz}\,.\,1 \\[2ex] \dfrac{\partial \mu}{\partial y} = \dfrac{d\mu}{dz}\dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{d\mu}{dz}\,.\,1 \end{array}\right| \begin{array}{l} \Rightarrow\ P\left(\dfrac{d\mu}{dz}\,.\,1\right) - Q\left(\dfrac{d\mu}{dz}\,.\,1\right) = \mu\,(Q'_x - P'_y) \quad \Rightarrow \\[2ex] \dfrac{d\mu}{dz}\,(P - Q) = \mu\,(Q'_x - P'_y) \quad \Rightarrow \quad \dfrac{d\mu}{\mu} = \dfrac{Q'_x - P'_y}{P - Q}\,dz \end{array}$$

hots $\mu(z)$ existitzeko $\dfrac{Q'_x - P'_y}{P - Q}$ z-ren funtzio hutsa behar du izan

honelatan $\quad \mathrm{Ln}\,\mu = \displaystyle\int \frac{Q'_x - P'_y}{P - Q}\,dz \quad \Rightarrow \quad \mu(z) = e^{\int \frac{Q'_x - P'_y}{P - Q} dz}$ faktorea lortzen da.

9.2-3.E $\mu(y/x)$ erako faktore integratzailea

Orain $z = y/x$ eta $\mu = \mu(z)$ eta baldintza horrela aldatuko da:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial \mu}{\partial x} = \dfrac{d\mu}{dz}\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{d\mu}{dz}\,\dfrac{-y}{x^2} \\[2ex] \dfrac{\partial \mu}{\partial y} = \dfrac{d\mu}{dz}\dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{d\mu}{dz}\,\dfrac{1}{x} \end{array}\right| \begin{array}{l} \Rightarrow\ P\left(\dfrac{d\mu}{dz}\,\dfrac{1}{x}\right) - Q\left(\dfrac{d\mu}{dz}\,\dfrac{-y}{x^2}\right) = \mu\,(Q'_x - P'_y) \quad \Rightarrow \\[2ex] \Rightarrow\ \dfrac{d\mu}{dz}\left(P\,\dfrac{1}{x} + Q\,\dfrac{y}{x^2}\right) = \mu\,(Q'_x - P'_y) \Rightarrow \quad \dfrac{d\mu}{\mu} = \dfrac{Q'_x - P'_y}{\dfrac{1}{x}\,P + \dfrac{y}{x^2}\,Q}\,dz \end{array}$$

hau da, $\mu(z)$ existi dadin, $\dfrac{x^2\,(Q'_x - P'_y)}{x\,P + y\,Q}$ z-ren funtzio hutsa izan behar du

hala bada $\quad \operatorname{Ln}\mu = \displaystyle\int \frac{x^2\,(Q'_x - P'_y)}{x\,P + y\,Q}\,dz \quad$ eta $\quad \mu(z) = e^{\int \frac{x^2 (Q'_x - P'_y)}{x P + y Q} dz}$ faktorea

lortzen da.

9.2-3.F $\mu(x^2+y^2)$ erako faktore integratzailea

$z = x^2 + y^2$ bada $\mu = \mu(z)$ izango dugu. Kalkula dezagun baldintza:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \mu}{\partial x} &= \frac{d\mu}{dz}\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{d\mu}{dz}\,2x \\ \frac{\partial \mu}{\partial y} &= \frac{d\mu}{dz}\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{d\mu}{dz}\,2y \end{aligned}\right| \begin{aligned} &\Rightarrow P\left(\frac{d\mu}{dz}2y\right) - Q\left(\frac{d\mu}{dz}2x\right) = \mu\,(Q'_x - P'_y) \Rightarrow \\ &= (2y\,P - 2x\,Q)\frac{d\mu}{dz} = \mu\,(Q'_x - P'_y) \Rightarrow \frac{d\mu}{\mu} = \frac{Q'_x - P'_y}{2y\,P - 2x\,Q}\,dz \end{aligned}$$

berriro ere $\mu(x^2+y^2)$ existi dadin $\dfrac{Q'_x - P'_y}{2y\,P - 2x\,Q}$ zatidurak z aldagaiaren funtzio hutsa behar du izan, eta hori gertatzen denean:

$\operatorname{Ln}\mu = \displaystyle\int \frac{Q'_x - P'_y}{2y\,P - 2x\,Q}\,dz \quad$ beraz faktorea $\quad \mu(z) = e^{\int \frac{Q'_x - P'_y}{2y P - 2x Q} dz}$ izango da.

9.2-3.G Ekuazio homogenoen faktore integratzailea

Baldin $P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0$ ekuazio homogenoa bada $\mu(x,y) = \dfrac{1}{x\,P + y\,Q}$ beraren faktore integratzailea da.

Hori frogatzeko $\dfrac{P(x,y)}{x\,P(x,y) + y\,Q(x,y)}\,dx + \dfrac{Q(x,y)}{x\,P(x,y) + y\,Q(x,y)}\,dy = 0$ diferentzial

zehatza dela ikusi behar da.
$P(x,y)$ eta $Q(x,y)$ n mailako funtzio homogenoak direla suposatuko dugu.

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{P}{x\,P + y\,Q}\right) &= \frac{P'_y\,(x\,P + y\,Q) - P\,(x\,P'_y + Q + y\,Q'_y)}{(x\,P + y\,Q)^2} = \frac{y\,Q\,P'_y - y\,P\,Q'_y - P\,Q}{(x\,P + y\,Q)^2} \\ \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{Q}{x\,P + y\,Q}\right) &= \frac{Q'_x\,(x\,P + y\,Q) - Q\,(P + x\,P'_x + y\,Q'_x)}{(x\,P + y\,Q)^2} = \frac{x\,P\,Q'_x - x\,Q\,P'_x - P\,Q}{(x\,P + y\,Q)^2} \end{aligned}\right]$$

aurreko bi balioak berdinak izan daitezen zenbakitzaileek berdinak izan behar dute, hots: $y\,Q\,P'_y - y\,P\,Q'_y - P\,Q = x\,P\,Q'_x - x\,Q\,P'_x - P\,Q$ edo $y\,Q\,P'_y - y\,P\,Q'_y =$
$= x\,P\,Q'_x - x\,Q\,P'_x$ eta hemendik

$y\,Q\,P'_y + x\,Q\,P'_x = x\,P\,Q'_x + y\,P\,Q'_y \;\Rightarrow\; Q\,(y\,P'_y + x\,P'_x) = P\,(x\,Q'_x + y\,Q'_y)$

$P(x,y)$ eta $Q(x,y)$ Euler-en teorema betetzen dute homogenoak direlako

$$\left.\begin{array}{l} x\,P'_x + y\,P'_y = n\,P \\ x\,Q'_x + y\,Q'_y = n\,Q \end{array}\right| \Rightarrow Q\,n\,P = P\,n\,Q$$

eta azken berdintza betetzen denez aurreko guztiak ere betetzen dira eta ekuazioa diferentzial zehatza da.

2-3.17 Adibidea

$(x^2 + y^2 + x)\,dx + x\,y\,dy = 0$

$$\left.\begin{array}{ll} P(x,y) = x^2 + y^2 + x & \dfrac{\partial P}{\partial y} = 2y \\ Q(x,y) = x\,y & \dfrac{\partial Q}{\partial x} = y \end{array}\right| \Rightarrow P'_y \neq Q'_x$$

beraz ez da diferentzial zehatza. Bila dezagun faktorea:

$\mu(x)$? erako faktorea existitzeko $\dfrac{P'_y - Q'_x}{Q}$ x-en menpean egon beharko du.

$$\frac{P'_y - Q'_x}{Q} = \frac{2y - y}{x\,y} = \frac{y}{x\,y} = \frac{1}{x}$$ betetzen da baldintza beraz

$$\frac{d\mu}{\mu} = \frac{1}{x}\,dx \Rightarrow \mathrm{Ln}\,\mu = \mathrm{Ln}\,x \Rightarrow \mu(x) = x$$ da faktore integratzailea. Beraz

ondoko ekuazioa $x\,(x^2 + y^2 + x)\,dx + x^2\,y\,dy = 0$ diferentzial zehatza da

$$\frac{\partial u}{\partial x} = x^3 + x\,y^2 + x^2 \Rightarrow u(x,y) = \int (x^3 + x\,y^2 + x^2)\,dx + \varphi(y) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow u(x,y) = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2\,y^2}{2} + \frac{x^4}{4} + \varphi(y)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = x^2\,y \quad \text{eta} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = x^2\,y + \varphi'(y) \Rightarrow x^2\,y = x^2\,y + \varphi'(y) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \varphi'(y) = 0 \Rightarrow \varphi(y) = K \quad \text{eta} \quad u(x,y) = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2\,y^2}{2} + \frac{x^4}{4} + K$$

eta ekuazioaren soluzioa $\dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^2\,y^2}{2} + \dfrac{x^4}{4} = K$ da.

9.2-4 Ekuazio lineala

- $y' + \alpha(x)\, y = \beta(x)$ erako ekuazioa da, zeinean y eta y'-aren mailak bat bait dira.
- Soluzio orokorra era esplizitutara kalkula daiteke, horretarako lau metodo emango dugu:

9.2-4.A $y = u(x)\, v(x)$ aldaketaren bidez

$y = u(x)\, v(x)$ eta $y' = u'(x)\, v(x) + u(x)\, v'(x)$ bi berdintzak ekuazioan ordezkatuz

$(u'(x)\, v(x) + u(x)\, v'(x)) + \alpha(x)\,(u(x)\, v(x)) = \beta(x)$ edo

$v(x)\,(u'(x) + u(x)\,\alpha(x)) + u(x)\, v'(x) = \beta(x)$ ekuazioa lortzen da.
Jatorrizko ekuazioan y ezezagun funtzio bakarra genuen, ekuazio berrian bi dira ezezagun funtzioak, u eta v alegia, beraz horietako bat geuk aukera genezake. Aukera hori $u'(x) + u(x)\,\alpha(x) = 0$ baldintza ezarriz gauzatuko dugu. Baldintza honetatik $u(x)$ funtzioa lortuko da

$$u'(x) = -\,u(x)\,\alpha(x) \Rightarrow \frac{u'(x)}{u(x)} = -\,\alpha(x) \Rightarrow \operatorname{Ln} u(x) = -\int \alpha(x)\, dx \Rightarrow u(x) = e^{-\int \alpha(x)\, dx}$$

kasu honetan konstanterik gabe. Baldintza hori ezarriz geratzen den ekuazioa $u(x)\, v'(x) = \beta(x)$ da $u(x)$ ezaguna izanik beraz

$$v'(x) = \frac{\beta(x)}{u(x)} \quad \Rightarrow \quad v(x) = \int \frac{\beta(x)}{u(x)}\, dx + K$$ eta u-ren balioa ordezkatuz

$$v(x) = \int \beta(x)\, e^{\int \alpha(x)\, dx}\, dx + K$$ beraz y soluzio orokorra:

$$y = u(x)\, v(x) = e^{-\int \alpha(x)\, dx} \left(\int \beta(x)\, e^{\int \alpha(x)\, dx}\, dx + K \right)$$ da.

9.2-4.B $y' + \alpha(x)\, y = 0$ ekuazio ez-osoa edo homogeno asoziatua ebatziz:

$$y' = -\,\alpha(x)\, y \Rightarrow \frac{dy}{y} = -\,\alpha(x)\, dx \Rightarrow \operatorname{Ln} y = -\int \alpha(x)\, dx + K \Rightarrow y = e^{-\int \alpha(x)\, dx + K}$$

edo beste erara $y = K\, e^{-\int \alpha(x)\, dx}$ ekuazio ez-osoaren soluzio orokorra.

Demagun, orain, $K = K(x)$ funtzioa dela, eta kalkula dezagun $K(x)$ funtzioa

$y = K(x)\, e^{-\int \alpha(x)\, dx}$ ekuazioaren soluzioa izan dadin horretarako

$y' = K'(x)\, e^{-\int \alpha(x)\, dx} + (-\alpha(x))\, K(x)\, e^{-\int \alpha(x)\, dx}$ ordezkatuko dugu

$$\left(K'(x)\, e^{-\int \alpha(x)\, dx} - \alpha(x)\, K(x)\, e^{-\int \alpha(x)\, dx}\right) + \alpha(x)\left(K(x)\, e^{-\int \alpha(x)\, dx}\right) = \beta(x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad K'(x)\, e^{\int \alpha(x)\, dx} = \beta(x) \quad \Rightarrow \quad K'(x) = \beta(x)\, e^{\int \alpha(x)\, dx} \quad \Rightarrow$$

$\Rightarrow \quad K(x) = \int \beta(x)\, e^{\int \alpha(x)\, dx}\, dx + K_1$ beraz ekuazioaren soluzio orokorra

$y = \left(\int \beta(x)\, e^{\int \alpha(x)\, dx}\, dx + K_1\right) e^{-\int \alpha(x)\, dx}$ da.

OHARRA:

Bi metodo hauek zailtasun-maila berekoak dira. Izan ere, bi metodoetan bi integral kalkulatu behar da, $\int \alpha(x)\, dx$ eta $\int \beta(x)\, e^{\int \alpha(x)\, dx}\, dx$ hain zuzen, bi integral hauek bi metodoetan agertzen bait dira.

9.2-4.C Soluzio partikular bat erabiliz

Aurreko soluzio orokorrean, $y = \left(\int \beta(x)\, e^{\int \alpha(x)\, dx}\, dx + K\right) e^{-\int \alpha(x)\, dx}$ edo

$y = \left(\int \beta(x)\, e^{\int \alpha(x)\, dx}\, dx\right)\left(e^{-\int \alpha(x)\, dx}\right) + K\, e^{-\int \alpha(x)\, dx}$ azken batugaia, $K\, e^{-\int \alpha(x)\, dx}$ ekuazio ez-osoaren soluzio orokorra da.

Bestalde $K = 0$ balioa aukeratzen badugu ekuazioaren soluzio partikularra lortuko dugu $y_0 = \left(\int \beta(x)\, e^{\int \alpha(x)\,dx}\, dx \right) \left(e^{-\int \alpha(x)\,dx} \right)$ alegia. Beraz ekuazioaren soluzio orokorra $y = K\, e^{-\int \alpha(x)\,dx} + y_0$ idatz daiteke, hots, soluzio partikular bat gehi ekuazio ez-osoaren soluzio orokorra.
Honek zera esan nahi du: ekuazioaren soluzio partikular bat ezagutuz gero soluzio orokorra lortzeko nahikoa dugu ekuazio ez-osoaren soluzio orokorra bilatu eta soluzio partikularrari gehitzea.

9.2-4.D $\mu(x) = e^{\int \alpha(x)\,dx}$ faktore integratzailearen bidez

$y' + \alpha(x)\, y = \beta(x)$ ekuazioa transformatuko dugu

$$\frac{dy}{dx} = \beta(x) - \alpha(x)\, y \;\Rightarrow\; dy = (\beta(x) - \alpha(x)\, y)\, dx \;\Rightarrow\; (\alpha(x)\, y - \beta(x))\, dx + dy = 0$$

$P(x,y) = \alpha(x)\, y - \beta(x)$	$\Rightarrow$ $P'_y = \alpha(x)$	$\Rightarrow$	ez da beraz diferentzial zehatza
$Q(x,y) = 1$	$Q'_y = 0$		bila dezagun $\mu(x)$ erako faktorea

$$\frac{P'_y - Q'_x}{Q} = \frac{\alpha(x) - 0}{1} = \alpha(x) \;\Rightarrow\; \operatorname{Ln} \mu = \int \alpha(x)\, dx \;\Rightarrow\; \mu(x) = e^{\int \alpha(x)\,dx}$$

9.2-4.E Bi soluzio partikular ezagutuz

$y = K\, e^{-\int \alpha(x)\,dx} + y_0$ dugu soluzio orokorra,

$y_0 = \left(\int \beta(x)\, e^{\int \alpha(x)\,dx}\, dx \right) \left(e^{-\int \alpha(x)\,dx} \right) = \varphi(x)$ izanik, hots $y = K\, e^{-\int \alpha(x)\,dx} + \varphi(x)$

$f(x) = e^{-\int \alpha(x)\,dx}$ bada $y = K\, f(x) + \varphi(x)$ idatz dezakegu.

eta K konstanteari K_1 eta K_2 balioak emanez zera izango dugu:

$$\left.\begin{array}{ll} y = K\,f(x) + \varphi(x) & \text{I} \\ y_1 = K_1\,f(x) + \varphi(x) & \text{II} \\ y_2 = K_2\,f(x) + \varphi(x) & \text{III} \end{array}\right| \Rightarrow \begin{array}{ll} \text{III-II} & y_2 - y_1 = (K_2 - K_1)\,f(x) \\ \text{I-II} & y - y_1 = (K - K_1)\,f(x) \end{array} \Bigg| \Rightarrow$$

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{K - K_1}{K_2 - K_1} = \text{konstantea} = A \Rightarrow$$

$\Rightarrow \; y - y_1 = A\,(y_2 - y_1) \quad \Rightarrow \quad y = (y_2 - y_1)\,A + y_1$ hau da bi soluzio partikular ezagutuz soluzio orokorra lor daiteke.

2-4.18 Adibidea

$$y' - \frac{2y}{x+1} = (x+1)^3 \qquad \alpha(x) = \frac{-2}{x+1} \qquad \beta(x) = (x+1)^3$$

9.2-4.B metodoa erabiliko dugu

$$y' - \frac{2y}{x+1} = 0 \quad \text{ek. ez-osoa} \quad y' = \frac{2y}{x+1} \;\Rightarrow\; \frac{dy}{y} = \frac{2}{x+1}\,dx \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \; \text{Ln}\, y = 2\,\text{Ln}\,(x+1) + \text{Ln}\, K \;\Rightarrow\; y = K\,(x+1)^2$$

$y = K(x)\,(x+1)^2$ eginez eta $y' = K'(x)\,(x+1)^2 + 2\,K(x)\,(x+1)$ erabiliz soluzio orokorra lortuko dugu

$$[\,K'(x)\,(x+1)^2 + 2\,K(x)\,(x+1)\,] - \frac{2}{x+1}\,(K(x)\,(x+1)^2) = (x+1)^3 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow K'(x)\,(x+1)^2 = (x+1)^3 \Rightarrow K'(x) = x+1 \Rightarrow K(x) = \frac{(x+1)^2}{2} + K_1 \quad \text{beraz}$$

soluzio orokorra $\displaystyle y = \left(\frac{(x+1)^2}{2} + K_1\right)(x+1)^2$ da edo $\displaystyle y = \frac{(x+1)^4}{2} + K_1\,(x+1)^2$

9.2-5 *Bernouilli-ren ekuazioa*

- $y' = A(x)\,y + B(x)\,y^n$ erakoa da $n \neq 0,1$ izanik
- Soluzio orokorra bilatzeko $z = y^{1-n} = \dfrac{1}{y^{n-1}}$ aldaketa egiten da,

$$z' = (1-n)\,y^{-n}\,y' = \frac{1-n}{y^n}\,y' \qquad \text{beraz} \qquad \frac{y'}{y^n} = \frac{z'}{1-n} \qquad \text{dugu}$$

ekuazioan gai guztiak zati y^n egiten badugu

$$\frac{y'}{y^n} = \frac{A(x)\,y}{y^n} + B(x) \;\Rightarrow\; \frac{z'}{1-n} = A(x)\,z + B(x)$$ ekuazio lineala lortzen da.

2-5.19 Adibidea

$x\,y' + y = y^2 \,\mathrm{Ln}\, x$

$y' = \frac{-1}{x} y + \frac{\mathrm{Ln}\, x}{x} y^2$ kasu honetan $n = 2$ beraz $z = \frac{1}{y}$ eta $\frac{y'}{y^2} = \frac{z'}{-1}$ ordezkatuz

$\frac{y'}{y^2} = \frac{-1}{x}\,\frac{1}{y} + \frac{\mathrm{Ln}\, x}{x}$ ekuazioan $-z' = \frac{-1}{x} z + \frac{\mathrm{Ln}\, x}{x}$ ekuazio lineala lortzen da

$$z' = \frac{1}{x} z \;\Rightarrow\; \frac{dz}{z} = \frac{1}{x} dx \;\Rightarrow\; \mathrm{Ln}\, z = \mathrm{Ln}\, x + \mathrm{Ln}\, K \;\Rightarrow\; z = K\,x$$

$z = K(x)\,x \;\Rightarrow\; z' = K'(x)\,x + K(x) \;\Rightarrow$ ekuazio linealean ordezkatuz

$$-(K'(x)\,x + K(x)) = \frac{-1}{x}(K(x)\,x) + \frac{\mathrm{Ln} x}{x} \;\Rightarrow\; K'(x) = \frac{-\mathrm{Ln}\, x}{x^2}$$

eta $K(x) = \int \frac{-\mathrm{Ln}\, x}{x^2} dx = \frac{1}{x}(\mathrm{Ln}\, x + 1) + K_1$ (Zatikako-integrazioa erabiliz)

beraz $z = \left(\frac{1}{x}(\mathrm{Ln}\, x + 1) + K_1\right)x = 1 + \mathrm{Ln}\, x + K_1\, x$ eta orain $z = \frac{1}{y}$

aldaketa deseginez $\frac{1}{y} = 1 + \mathrm{Ln}\, x + K_1\, x$ soluzioa dugu.

9.2-6 Ricatti-ren ekuazioa

- $y' = A_0(x) + A_1(x)\,y + A_2(x)\,y^2$ erakoa da $A_2(x) \neq 0$ izanik.
- Soluzio orokorra kalkulatzeko soluzio partikular bat ezagutu behar da, izan bedi $y = y_1(x)$ soluzio partikular hori

  $y = y_1 + \frac{1}{z}$ eta $y' = y'_1 - \frac{z'}{z^2}$ aldaketa egin beharko da.

  Beraz $y'_1 - \frac{z'}{z^2} = A_0(x) + A_1(x)\left(y_1 + \frac{1}{z}\right) + A_2(x)\left(y_1 + \frac{1}{z}\right)^2 \;\Rightarrow$

$$\Rightarrow \quad \underline{y'_1} - \frac{z'}{z^2} = \underline{A_0(x)} + \underline{A_1(x)\, y_1} + A_1(x)\, \frac{1}{z} + \underline{A_2(x)\, y_1^2} + A_2(x) \left(\frac{2y_1}{z} + \frac{1}{z^2} \right)$$

y_1 soluzio partikularra bada $y'_1 = A_0(x) + A_1(x)\, y_1 + A_2(x)\, y_1^2$ betetzen du beraz azpimarratutako gaiak sinplifikatzen dira,

$$-\frac{z'}{z^2} = A_1(x)\, \frac{1}{z} + A_2(x) \left(\frac{2y_1}{z} + \frac{1}{z^2} \right)$$ geratzen delarik, edo garatuz

$- z' = A_1(x)\, z + A_2(x)\, (2\, y_1\, z + 1) = (\, A_1(x) + 2y_1\, A_2(x))\, z + A_2(x)$ ekuazio lineala lortzen da

- $A_0(x)$, $A_1(x)$ eta $A_2(x)$ koefizienteak polinomioak direnean soluzio partikularra era polinomikoan bila daiteke.

2-6.20 Adibidea

$y'(1 - x^3) + 2x + x^2 y - y^2 = 0$

y_1 n mailako polinomio bat izan daiteke, n maila bilatu behar dugu. y'_1-aren maila $n - 1$ denez maila handieneko batugaiak x^{3+n-1}, x^{2+n} eta x^{2n} izango dira, mailak berdinduz $n + 2 = 2n \Rightarrow n = 2$ maila lortzen da.

Beraz $y_1 = ax^2 + bx + c$ polinomioa da. Orain a, b, c koefizienteek bete behar duten baldintza bilatuko dugu.

$y'_1 = 2ax + b$ ekuazioan ordezkatuz:

$(2ax + b)\,(1 - x^3) + 2x + x^2\,(ax^2 + bx + c) - (ax^2 + bx + c)^2 = 0$ eta garatuz

$2ax - 2ax^4 + b - bx^3 + 2x + ax^4 + bx^3 + cx^2 - a^2x^4 - b^2x^2 - c^2 - 2abx^3 - 2acx^2 -$

$- 2bcx = 0$ eta sinplifikatuz $-(a^2 + a)\, x^4 - 2abx^3 + (c - b^2 - 2ac)\, x^2 + (2a + 2 -$

$- 2bc)\, x + (b - c^2) = 0$ polinomioa nulua izan dadin koefizienteek 0 balioa behar dute: $- a^2 - a = 0$; $- 2ab = 0$; $c - b^2 - 2ac = 0$; $2a + 2 - 2bc = 0$; $b - c^2 = 0$

sistema hori ebatzi behar dugu

(1) $a^2 + a = 0$	$\Rightarrow$ (1) $a(a+1) = 0 \Rightarrow a = 0$ edo $a = -1$
(2) $2ab = 0$	$\underline{a = 0}$ (4) $bc = 1$ eta (5) $b = c^2 \Rightarrow c^3 = 1 \Rightarrow c = 1$
(3) $c - b^2 - 2ac = 0$	eta $b = 1$
(4) $2(a + 1 - bc) = 0$	beraz soluzio bat $y_1 = x + 1$
(5) $b - c^2 = 0$	$\underline{a = -1}$ (2) $b = 0$ (5) $c = 0$

beste soluzio bat $y_2 = -x^2$ da

Guk batekin nahikoa dugunez $y_1 = x + 1$ aukeratuko dugu.

$y = (x + 1) + \frac{1}{z}$ $\qquad y' = 1 - \frac{z'}{z^2}$ $\qquad$ aldaketa egin behar da

ekuazioa $\quad y' = \frac{-2x}{1 - x^3} - \frac{x^2}{1 - x^3}\, y + \frac{1}{1-x^3}\, y^2$ $\qquad$ erara idatziko dugu

beraz $\quad \underbrace{1} - \frac{z'}{z^2} = \underbrace{\frac{-2x}{1 - x^3}} - \underbrace{\frac{x^2}{1 - x^3}\left((x + 1)} + \frac{1}{z}\right) + \underbrace{\frac{1}{1 - x^3}\left((x + 1)} + \frac{1}{z}\right)^2$

Azpimarratutako gaiak y_1 soluzio partikularrari dagozkienak dira eta ikusi dugunez sinplifika daitezke.

$$-\frac{z'}{z^2} = -\frac{x^2}{1 - x^3}\,\frac{1}{z} + \frac{1}{1-x^3}\left(\frac{2(x + 1)}{z} + \frac{1}{z^2}\right)$$ ekuazioa geratzen delarik

edo $\quad -z' = \left(-\frac{x^2}{1 - x^3} + \frac{2(x + 1)}{1 - x^3}\right) z + \frac{1}{1-x^3}$ $\qquad$ ekuazio lineala

eta sinplifikatuz gero $\qquad z' = \left(\frac{x^2 - 2x - 2}{1 - x^3}\right) z - \frac{1}{1 - x^3}$

$$z' = \left(\frac{x^2 - 2x - 2}{1 - x^3}\right) z \quad \Rightarrow \quad \frac{dz}{z} = \frac{x^2 - 2x - 2}{1 - x^3}\, dx \quad \Rightarrow \quad \operatorname{Ln} z = \int \frac{x^2 - 2x - 2}{1 - x^3}\, dx + K$$

$$\int \frac{x^2 - 2x - 2}{1 - x^3}\, dx = \int \frac{-1}{1 - x}\, dx - \int \frac{2x + 1}{x^2 + x + 1}\, dx = \operatorname{Ln}(x - 1) - \operatorname{Ln}(x^2 + x + 1) \quad \Rightarrow$$

$$\operatorname{Ln} z = \operatorname{Ln} \frac{x - 1}{x^2 + x + 1} + \operatorname{Ln} K \quad \Rightarrow \quad z = K\left(\frac{x - 1}{x^2 + x + 1}\right)$$

eta orain $K = K(x)$ egiten badugu $\qquad z = K(x)\left(\frac{x - 1}{x^2 + x + 1}\right)$

$$z' = K'(x)\left(\frac{x - 1}{x^2 + x + 1}\right) + K(x)\left(\frac{x - 1}{x^2 + x + 1}\right)'$$ eta ekuazio linealean idatziz gero

$$K'(x)\left(\frac{x - 1}{x^2 + x + 1}\right) + K(x)\left(\frac{x - 1}{x^2 + x + 1}\right)' = \left(\frac{x^2 - 2x - 2}{1 - x^3}\right)\left(K(x)\,\frac{x - 1}{x^2 + x + 1}\right) - \frac{1}{1 - x^3} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad K'(x)\left(\frac{x - 1}{x^2 + x + 1}\right) = \frac{-1}{1 - x^3} \quad \Rightarrow \quad K'(x) = \frac{x^2 + x + 1}{x - 1}\,\frac{-1}{1 - x^3} = \frac{1}{(x - 1)^2} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad K(x) = \int \frac{1}{(x-1)^2}\, dx = \frac{-1}{x - 1} + K_1$$ eta ekuazio linealaren soluzio orokorra

$$z = \left(\frac{-1}{x - 1} + K_1\right)\frac{x - 1}{x^2 + x + 1} = \frac{-1}{x^2 + x + 1} + K_1\,\frac{x - 1}{x^2 + x + 1}$$

Ricatti-ren ekuazioaren soluzioa bilatzeko $y = (x + 1) + \frac{1}{z}$ aldaketa desegitea besterik ez da falta

$$\frac{1}{z} = y - x - 1 \quad \Rightarrow \quad z = \frac{1}{y - x - 1} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{y - x - 1} = \frac{-1}{x^2 + x + 1} + K_1\,\frac{x - 1}{x^2 + x + 1}$$

9.3 ORDENA BEHERAGARRIA DUTEN EKUAZIOAK

Ekuazio hauetan aldaketa baten bidez ordena behera daiteke. Lau kasu berezi bakarrik aipatuko dugu.

9.3-1 y aldagaia ez duen ekuazioa

- $f(x,y',y'',\dots,y^{n)}) = 0$ erakoak dira

- $y' = p$ aldagai berria hartuko da ekuazio berria $f(x,p,p',\dots,p^{n-1)}) = 0$ geratzen delarik. Hemendik $p = \varphi(x,c_1,\dots,c_{n-1})$ soluzioa lortuko dugu eta gero $y = \int p\, dp$ integrala kalkulatuz n. konstantea.

3-1.21 Adibidea

- $y'' = \dfrac{y'}{x} + x \sin x$

  $y' = p$ eginez gero $p' = \dfrac{p}{x} + x \sin x$ lortzen da

  azken hau p-rekiko ekuazio lineala da

  $p' = \dfrac{p}{x} \quad \Rightarrow \quad p = K\,x$

  $p = K(x)\,x \quad \Rightarrow \quad K'(x)\,x + K(x) = \dfrac{K(x)}{x}\,x = x \sin x \quad \Rightarrow \quad K(x) = -\cos x + K_1$

  beraz $p = (-\cos x + K_1)\,x = K_1\,x - x \cos x$ eta hemendik

  $y' = p \quad \Rightarrow \quad y' = K_1\,x - x \cos x \quad \Rightarrow \quad y = \int (K_1\,x - x\, \mathrm{cox}\, x)\, dx$

  integratuz gero $y = K_1 \dfrac{x^2}{2} - (x \sin x + \cos x) + K_2$

9.3-2 x aldagaia ez duen ekuazioa

- $f(y,y',y'',\dots,y^{n)}) = 0$ erakoak dira

- y aldagai independentetzat eta $p = y'$ menpeko aldagaitzat hartzen dira ekuazioa $F(y,p,p',\dots,p^{n-1)}) = 0$ geratzen direlarik.

  $y' = p$ bada $y'' = \dfrac{dy'}{dx} = \dfrac{dp}{dy}\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dp}{dy}\,p$;

  $$y''' = \frac{dy''}{dx} = \frac{dy''}{dy}\frac{dy}{dx} = \frac{dy''}{dy}\,p = \left(\frac{d^2p}{dy^2}\,p + \left(\frac{dy''}{dx}\right)^2\right)p = \frac{d^2p}{dy^2}\,p^2 + \left(\frac{dy''}{dx}\right)^2 p \;;$$

  eta abar direla hartu behar da kontutan.

$p = \varphi(x,c_1,\dots,c_{n-1})$ lortuz gero $y' = p \Rightarrow dx = \dfrac{dy}{\varphi(x,c_1,\dots,c_{n-1})}$ eta

hemendik $x = \Phi\,(y,c_1,\dots,c_n)$ soluzio orokorra

3-2.22 Adibidea

- $1 + y'^2 = -\,y\,y''$

$p = y'$ aldaketa eginez gero, eta $y'' = \dfrac{dp}{dy}\,p$ dela jakinez, $1 + p^2 = -\,y\,\dfrac{dp}{dy}\,p$ ekuazio berria aterako da non p menpeko aldagaia eta y aldagai independentea bait dira. Ekuazio berria aldagai banangarrietako ekuazioa da

$$-\frac{dy}{y} = \frac{p}{1+p^2}\,dp \Rightarrow \frac{1}{2}\,\mathrm{Ln}\,(1+p^2) = -\,\mathrm{Ln}\,y + \mathrm{Ln}\,K_1 \Rightarrow 1+p^2 = \left(\frac{K_1}{y}\right)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow p^2 = \frac{K_1^2}{y^2} - 1 = \frac{K_1^2 - y^2}{y^2} \Rightarrow p = \frac{\sqrt{K_1^2 - y^2}}{y} \Rightarrow y' = \frac{\sqrt{K_1^2 - y^2}}{y} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{y}{\sqrt{K_1^2 - y^2}}\,dy = dx \Rightarrow -\sqrt{K_1^2 - y^2} = x + K_2 \Rightarrow (x+K_2)^2 + y^2 = K_1^2$$

soluzio orokorra.

9.3-3 *y eta x aldagaiak ez dituen ekuazioa*

- Kasu honetan 2. ordenakoak berehala labur daitezke

- $y'' = f(y')$ bere forma normala bada $y' = p$ eginez gero

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{dp}{dx} \Rightarrow \frac{dp}{dx} = f(p) \Rightarrow dx = \frac{dp}{f(p)} \Rightarrow x = \int \frac{dp}{f(p)} + K_1$$

eta hemendik $dy = p\,dx = \dfrac{p\,dp}{f(p)} \Rightarrow y = \displaystyle\int \frac{p\,dp}{f(p)} + K_2$

era honetan soluzio orokorra ekuazio parametrikoetan lortzen dugu p parametroa izanik.

3-3.23 Adibidea

- $(1 + y'^2)^{3/2} = K\,y''$

$y' = p$ aldaketa eginez gero $(1+p^2)^{3/2} = K\,\dfrac{dp}{dx} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \quad dx = \frac{K\,dp}{(1+p^2)^{3/2}} \quad \Rightarrow \quad x = K\frac{p}{\sqrt{1+p^2}} + K_1 \qquad \text{eta}$$

$$y = \int \frac{K\,p\,dp}{(1+p^2)^{3/2}} + K_2 \quad \Rightarrow \quad y = -\frac{K}{\sqrt{1+p^2}} + K_2 \qquad \text{eta sinplifikatuz}$$

$$(x-K_1)^2 + (y-K_2)^2 = \frac{K^2 p^2}{1+p^2} + \frac{K^2}{1+p^2} = K^2 \qquad \text{soluzio orokorra}$$

9.3-4 $\quad y^{n)} = f(y^{n-2)})$ ***erako ekuazioa***

- 2. ordenako ekuazioei gagozkielarik y' eta x aldagaiak ez dituzten ekuazioak dira hain zuzen ere, hots $y'' = f(y)$.

- $y' = \frac{dy}{dx} \quad \Rightarrow \quad dy = y'\,dx \quad \Rightarrow \quad y''\,y'\,dx = f(y)\,dy$ amarrua erabiltzen da.

Azken berdintza integratzen bada $\int y''\,y'\,dx = \frac{1}{2}(y')^2$ eta $\int f(y)\,dy + K_1$

lortzen ditugu, hots $\frac{1}{2}(y')^2 = \int f(y)\,dy + K_1 \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \sqrt{2\int f(y)\,dy + K_1}$

1. ordenako aldagai bananduetako ekuazioa

$$x = \int \frac{dy}{\sqrt{2\int f(y)\,dy + K_1}} + K_2 \qquad \text{soluzio orokorra da}$$

- Kasu orokorrean $y^{n-2)} = \eta$ aldagai berritzat hartzen da.

3-4.24 Adibidea

- $my'' = -Ky$

$$f(y) = \frac{-Ky}{m} \quad \Rightarrow \quad \int f(y)\,dy = \int \frac{-Ky}{m}\,dy = \frac{-Ky^2}{2m} + K_1$$

$$x = \int \frac{dy}{\sqrt{2\left(\frac{-Ky^2}{2m}\right) + K_1}} + K_2 = \int \frac{\sqrt{m}\ dy}{\sqrt{-Ky^2 + K_1 m}} + K_2 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \qquad x = \sqrt{\frac{m}{K}}\ \text{arc sin}\left(\sqrt{\frac{K}{K_1 m}}\ y\right) + K_2$$

9.4 N. ORDENAKO EKUAZIO DIFERENTZIAL LINEALAK

$y, y', \dots, y^{n)}$ aldagaiekiko lineala den n. ordenako ekuazio diferentziala da, beste erara esateko:

$a_0(x)\, y^{n)} + a_1(x)\, y^{n-1)} + \dots + a_{n-1}(x)\, y' + a_n(x)\, y = b(x)$ erako n. ordenako ekuazio diferentziala da.

$b(x) = 0$ deneko kasuari ekuazio lineal homogeno edo ekuazio lineal ez-oso esaten zaio.

Jo dezagun $a_0(x) \neq 0$ $\forall x \in I$ (I, $a_i(x)$, $b(x)$ $i = 0, \dots, n$ funtzioak definituta dauden tartea izanik).

Ondoko propietateak betetzen dira:

a) Baldin y_1 ekuazio homogenoaren soluzio partikularra bada, Cy_1 funtzioa ere soluzioa da.

b) Baldin y_1, y_2 funtzioak ekuazio homogenoaren soluzio partikularrak badira, $y_1 + y_2$ funtzioa ere izango da soluzioa.

c) Baldin $y_1, \dots, y_m$ funtzioak ekuazio homogenoaren soluzio partikularrak badira, $y = C_1 y_1 + \dots + C_m y_m$ ere da soluzioa.

d) Baldin $y_1, \dots, y_n$ funtzio linealki independenteak ekuazio homogenoaren soluzio partikularrak badira $y = \sum_{i=1}^{n} C_i\, y_i$ funtzioa ekuazio homogenoaren soluzio orokorra izango da.

e) y_1 ekuazio homogenoaren soluzio partikular bat ezagutuz $y = y_1 \left(\int u\, dx\right)$ aldaketaren bidez ekuazioaren, bai homogenoaren bai osoaren, ordena jaisten da linealtasun eta homogenotasuna gordez.

f) Baldin y_H ekuazio homogenoaren soluzio orokorra bada eta y_0 ekuazio osoaren soluzio partikular bat bada, $y = y_H + y_0$ funtzioa ekuazio osoaren soluzio orokorra izango da.

Propietate hauei esker ekuazio lineal osoaren soluzio orokorra bilatzeko ekuazio lineal homogenoarena eta soluzio partikular bat bilatzea nahikoa da. Bila ditzagun beraz bi soluzio horiek.

$$a_0(x)\, y^{n)} + a_1(x)\, y^{n-1)} + \dots\dots + a_{n-1}(x)\, y' + a_n(x)\, y = \varphi(x) \qquad \text{ekuazioa}$$

beste erara idatziko dugu:

$[\, a_0(x)\, D^n + a_1(x)\, D^{n-1} + \dots\dots + a_{n-1}(x)\, D + a_n(x)](y) = \varphi(x)$ non D^k eragileak k. deribatua adierazten bait du, hau da $D^k(y) \equiv y^{k)}$.

Eta orain $[\, a_0(x)\, D^n + a_1(x)\, D^{n-1} + \dots\dots + a_{n-1}(x)\, D + a_n(x)] = P(D)$ idatziz ekuazioa $P(D)(y) = \varphi(x)$ bihurtuko da.

Bila dezagun ekuazio osoaren soluzio partikularra. Horretarako $y = C_1 y_1 + \dots + C_n y_n$ ekuazio ez-osoaren soluzio orokorra dela suposatuko dugu, eta $C_i = C_i(x)$ idatziko, beraz orain $y = C_1(x)\, y_1 + \dots + C_n(x)\, y_n$ dugu. Jatorrizko ekuazioan y ezezagun funtzio bat bagenuen orain $C_1(x), \dots, C_n(x)$ n funtzioak dira ezezagunak, beraz (n-1) baldintza ezar dezakegu.

$$y = \sum_{i=1}^{n} C_i(x)\, y_i$$

$$y' = \sum_{i=1}^{n} C'_i(x)\, y_i + \sum_{i=1}^{n} C_i(x)\, y'_i \qquad \text{1. baldintza} \quad \sum_{i=1}^{n} C'_i(x)\, y_i = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad y'' = \sum_{i=1}^{n} C'_i(x)\, y'_i + \sum_{i=1}^{n} C_i(x)\, y''_i \qquad \text{2. baldintza} \quad \sum_{i=1}^{n} C'_i(x)\, y'_i = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad y^{n-1)} = \sum_{i=1}^{n} C'_i(x)\, y_i^{n-2)} + \sum_{i=1}^{n} C_i(x)\, y_i^{n-1)} \qquad \text{(n-1). baldintza} \quad \sum_{i=1}^{n} C'_i(x)\, y_i^{n-2)} = 0$$

Hau dena sinplifikatzen badugu eta n. deribatua ere kalkulatzen

$y = \sum_{i=1}^{n} C_i(x)\, y_i$	badugu eta berdintza guztiak $P(D)(y) = \varphi(x)$
$y' = \sum_{i=1}^{n} C_i(x)\, y'_i$	ekuazioan ordezkatuz gero eta $y_1, \dots, y_n$
$y'' = \sum_{i=1}^{n} C_i(x)\, y''_i$	ekuazio homogenoaren soluzio partikularrak
$y^{n-1)} = \sum_{i=1}^{n} C_i(x)\, y_i^{n-1)}$	direla kontutan hartuz gero
$y^{n)} = \sum_{i=1}^{n} C_i(x)\, y_i^{n)} + \sum_{i=1}^{n} C'_i(x)\, y_i^{n-1)}$	$a_0(x) \sum_{i=1}^{n} C'_i(x)\, y_i^{n-1)} = \varphi(x).$

Azken berdintza hau ezarritako (n-1) baldintzekin bilduz sistema lineal ez homogenoa osatzen da, zeinean ezezagunak $C'_1(x), \dots, C'_n(x)$ funtzioak bait dira; horretaz gain, sistema bateragarri determinatua da $y_1, \dots, y_n$ funtzioak linealki independenteak direlako. Sistema honetatik $C'_1(x) = \psi'_1(x), \dots, C'_n(x) = \psi'_n(x)$ funtzioak lortzen dira, berdintza hauek integratuz gero $C_1(x) = \int \psi_1(x)\, dx + K_1$; ..... ; $C_n(x) = \int \psi_n(x)\, dx + K_n$ soluzioak lortzen dira, beraz ekuazio osoaren soluzio orokorra

$$y = \left(\int \psi_1(x)\, dx + K_1\right) y_1 + \dots\dots + \left(\int \psi_n(x)\, dx + K_n\right) y_n \qquad \text{da}$$

4.25 Adibidea

Ebatz dezagun $x\, y'' + y' = x^2$ ekuazioa

Ekuazio homogeno asoziatua $x\, y'' + y' = 0$

$$y'' = \frac{dy'}{dx} \Rightarrow x \frac{dy'}{dx} = -y' \Rightarrow \frac{dy'}{y'} = \frac{-1}{x} dx \Rightarrow \text{Ln } y' = -\text{Ln } x + \text{Ln } K_1$$

$$\Rightarrow y' = \frac{K_1}{x} \Rightarrow y = K_1 \text{Ln } x + K_2$$ ekuazio ez-osoaren soluzio orokorra.

Orain $K_1 = K_1(x)$ eta $K_2 = K_2(x)$ eginez $y = K_1(x)\, \text{Ln } x + K_2(x) \Rightarrow$
$y' = K'_1(x)\, \text{Ln } x + K_1(x) \frac{1}{x} + K'_2(x)$ 1. baldintza $K'_1(x)\, \text{Ln } x + K'_2(x) = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \quad y' = \frac{K_1(x)}{x} \quad \text{eta} \quad y'' = \frac{K'_1(x)}{x} - \frac{K_1(x)}{x^2} \quad \text{ekuazioan ordezkatuz}$$

$$x\left(\frac{K'_1(x)}{x} - \frac{K_1(x)}{x^2}\right) + \frac{K_1(x)}{x} = x^2 \quad \Rightarrow \quad K'_1(x) = x^2 \quad \Rightarrow \quad K_1(x) = \frac{x^3}{3} + K_1$$

eta 1. baldintzatik $\quad K'_1(x)\, \mathrm{Ln}\, x + K'_2(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2\, \mathrm{Ln}\, x + K'_2(x) = 0$

beraz $\quad K'_2(x) = -x^2\, \mathrm{Ln}\, x \quad \Rightarrow \quad K_2(x) = \frac{-x^3}{3}\, \mathrm{Ln}\, x + \frac{x^3}{9} + K_2$

eta soluzio orokorra $\quad y = \left(\frac{x^3}{3} + K_1\right) \mathrm{Ln}\, x + \left(\frac{-x^3}{3}\, \mathrm{Ln}\, x + \frac{x^3}{9} + K_2\right)$

eta sinplifikatuz gero $\quad y = \frac{x^3}{9} + K_1\, \mathrm{Ln}\, x + K_2$

Oraingo eginkizuna ekuazio lineal homogenoaren soluzio orokorra bilatzean datza. Erabidea sinplifikatzeko asmoz baldintza bat eskatuko diegu koefizienteei, hau da $a_0(x), a_1(x), \ldots\ldots, a_n(x)$ eta $b(x)$ funtzioi. Baldintza hau I tarte batean funtzioak analitikoak (hau da, berredura-seriean garagarriak) izatea. Baldintza honekin ekuazioak soluziotzat funtzio analitikoa onartzen duela ziurtatzen da (segitu baino lehen metodo honek ekuazio osorako, hots, $b(x) \neq 0$ denean balio duela esan behar da, $b(x)$ analitikoa izanik).

$P(D)(y) = 0$ ekuazioa badugu eta $\quad y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n \quad$ funtzio analitikoa soluzioa dela frogatu nahi badugu y-ren lehenengo n deribatuak kalkulatzen dira, eta ekuazioan ordezkatzen. Geratzen den berdinketatik seriearen a_n koefizienteak lortzen dira. Baina hau dena hobeto ulertzeko adibide bat egingo dugu:

- *4.26 Adibidea*

$x\, y'' - y' + 4x^3\, y = 0$

Izan bedi $\quad y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad$ soluzio analitikoa

$$y' = \sum_{n=1}^{\infty} n\, a_n\, x^{n-1} \quad \text{eta} \quad y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)\, a_n\, x^{n-2}$$

hiru berdintza hauek ekuazioan ordezkatuz gero

$$x\left(\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)\, a_n\, x^{n-2}\right) - \left(\sum_{n=1}^{\infty} n\, a_n\, x^{n-1}\right) + 4x^3\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n\right) = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)\, a_n\, x^{n-1} - \sum_{n=1}^{\infty} n\, a_n\, x^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} 4\, a_n\, x^{n+3} = 0 \quad \Rightarrow$$

$$2.1\, a_2 x + 3.2\, a_3 x^2 + \sum_{n=4}^{\infty} n(n-1)\, a_n x^{n-1} - a_1 - 2a_2 x - 3a_3 x^2 - \sum_{n=4}^{\infty} n\, a_n x^{n-1} +$$

$$+\sum_{n=0}^{\infty} 4\, a_n x^{n+3} = 0 \quad \Rightarrow \quad -a_1 + 3a_3 x^2 + \sum_{n=4}^{\infty} (n(n-1)\, a_n - n\, a_n)\, x^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} 4\, a_n x^{n+3} = 0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} 4\, a_n\, x^{n+3} = \sum_{n=4}^{\infty} 4\, a_{n-4}\, x^{n-1}$$ beraz ondoko berdintza lortzen dugu

$$-a_1 + 3a_3 x^2 + \sum_{n=4}^{\infty} [n(n-1)\, a_n - n\, a_n + 4\, a_{n-4}]\, x^{n-1} = 0$$ eta berdintza

hau bete dadin $-a_1 = 0$, $3\, a_3 = 0$ eta $n \geq 4$ $n(n-2)\, a_n + 4\, a_{n-4} = 0$ bete beharko da, berdintza hauetatik a_n $n = 0,1,\ldots$ koefizienteak aterako ditugu.
$a_1 = a_3 = 0$ zuzenean lortu ditugu.

$n = 4 \qquad 4.2\, a_4 + 4\, a_0 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad a_4 = \dfrac{-a_0}{2}$

$n = 5 \qquad 5.3\, a_5 + 4\, a_1 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad a_5 = \dfrac{-4\, a_1}{15} = 0 \quad (a_1 = 0$ delako)

$n = 6 \qquad 6.4\, a_6 + 4\, a_2 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad a_6 = \dfrac{-a_2}{6}$

$n = 7 \qquad 7.5\, a_7 + 4\, a_3 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad a_7 = \dfrac{-4\, a_3}{35} = 0 \quad (a_3 = 0$ delako)

$n = 8 \qquad 8.6\, a_8 + 4\, a_4 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad a_8 = \dfrac{-a_4}{12} = \dfrac{a_0}{24} \quad (a_4 = \dfrac{-a_0}{2}$ delako)

$n = 9 \qquad 9.7\, a_9 + 4\, a_5 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad a_9 = \dfrac{-4\, a_5}{93} = 0 \quad (a_5 = 0$ delako)

$n = 10 \qquad 10.8\, a_{10} + 4\, a_6 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad a_{10} = \dfrac{-a_6}{20} = \dfrac{a_2}{120} \quad (a_6 = \dfrac{-a_2}{6}$ delako)

Horraino zera ikusten da: $a_1 = a_3 = a_5 = a_7 = ... = a_{2k+1} = 0 \quad \forall k$ eta azpiindize bikoitiko gaiak bitan banatzen direla.

$$a_{4k} = \frac{(-1)^k a_0}{(2k)!} \qquad \left(a_4 = \frac{(-1)^1 a_0}{2!} \ ; \ a_8 = \frac{(-1)^2 a_0}{4!} \ ; \ a_{12} = \frac{(-1)^3 a_0}{6!} \ ; \ ..... \right)$$

$$a_{4k+2} = \frac{(-1)^k a_2}{(2k+1)!} \qquad \left(a_6 = \frac{(-1)^1 a_2}{3!} \ ; \ a_{10} = \frac{(-1)^2 a_2}{5!} \ ; \ a_{14} = \frac{(-1)^3 a_2}{7!} \ ; \ ..... \right)$$

beraz $\quad y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad$ funtzioa era honetan idatz daiteke:

$$y = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k a_0}{(2k)!} x^{4k} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k a_2}{(2k+1)!} x^{4k+2} \qquad \text{edo}$$

$$y = a_0 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} (x^2)^{2k} + a_2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} (x^2)^{2k+1} \qquad \text{idazten badugu}$$

bi serie horiek $\cos x^2$ eta $\sin x^2$ funtzioen berredura-serieak direla ikus daiteke erraz, beraz $y = a_0 \cos x^2 + a_2 \sin x^2$. Teorian soluzio bat lortu behar dugu, baina hemen bi konstanteren menpeko soluzio lortzeaz gain agertzen diren bi funtzioak, $\cos x^2$ eta $\sin x^2$ hain zuzen, linealki independenteak dira; beraz, lortu dena soluzio orokorra besterik ez da ($\cos x^2$ eta $\sin x^2$ funtzioak soluzio partikularrak direla egiazta daiteke zuzenean ekuazioan).

OHARRA

1) Hasieran $a_0(x) \neq 0 \quad \forall x \in I$ suposatu genuen. Aurreko adibidean betetzen ez bada ere garapenak balio du. Izan ere, $a_0(x) = x$ da eta $x = 0 \quad a_0(0) = 0$. Adibidean agertzen den ekuazioa $\exists x_0 / a_0(x_0) = 0$ kasuaren barruan dago, baina hau ez dugu aztertuko.

2) $\forall x \in I \quad a_0(x) \neq 0 \quad a_0(x)\, y^{n)} + a_1(x)\, y^{n-1)} + ... + a_{n-1}(x)\, y' + a_n(x)\, y = 0$ ekuazioa $a_0(x)$ funtzioaz zatituz gero $y^{n)} + b_1(x)\, y^{n-1)} + ... + b_{n-1}(x)\, y' + b_n(x)\, y = 0$ erako ekuazioa lortzen dugu $\forall i \quad b_i(x) = \dfrac{a_i(x)}{a_0(x)}$ izanik.

9.4-1 Koefiziente konstantedun ekuazio lineala

- $a_0(x), a_1(x), ..., a_n(x)$ koefizienteak konstanteak direnean $a_0\, y^{n)} + a_1\, y^{n-1)} +...+ a_{n-1}\, y' + a_n\, y = b(x)$ motako ekuazioa lortzen da.

- Ekuazio hau ebazteko lehendabiziz ekuazio ez-osoaren soluzio orokorra aurkitu behar dugu.
$a_0\, y^{n)} + a_1\, y^{n-1)} +...+ a_{n-1}\, y' + a_n\, y = 0$ ekuazioan y^k gaia r^k gaiaz ordezkatzen dugu eta polinomiotzat joko dugu $a_0\, r^n + a_1\, r^{n-1} +...+ a_{n-1}\, r + a_n = 0$ polinomioari polinomio karakteristiko edo ekuazio karakteristiko esan ohi zaio. Ekuazio ez-osoaren soluzio orokorra polinomio honen erroen araberakoa da. Izan bitez $r_1, r_2,..., r_n$ polinomioaren erroak.

a) $\forall$ i,j $r_i \neq r_j$ erro desberdinak badira

$e^{r_1 x}, e^{r_2 x},...., e^{r_n x}$ soluzio partikularrak dira eta soluzio orokorra
$y = K_1\, e^{r_1 x} + K_2\, e^{r_2 x} + ... + K_n\, e^{r_n x}$ erara idatz dezakegu.

- Kasu partikularra: $r_h = \alpha + \beta i$ erro konplexua dugunean r_h erro konplexua bada $r_l = \alpha - \beta i$ konplexu konjokatua ere polinomioaren erroa izango da.

Har ditzagun erro hauei dagozkien batugaiak $K_h\, e^{r_h x} + K_l\, e^{r_l x}$

$$K_h\, e^{r_h x} + K_l\, e^{r_l x} = K_h\, e^{(\alpha+\beta i)x} + K_l\, e^{(\alpha+\beta i)x} = K_h\, e^{\alpha x}\, e^{\beta x i} + K_l\, e^{\alpha x}\, e^{-\beta x i} =$$
$$= K_h\, e^{\alpha x} (\cos \beta x + i \sin \beta x) + K_l\, e^{\alpha x} (\cos \beta x - i \sin \beta x) =$$
$$= e^{\alpha x} (K_h \cos \beta x + i\, K_h \sin \beta x) + e^{\alpha x} (K_l \cos \beta x - i\, K_l \sin \beta x) =$$
$$= e^{\alpha x} [(K_h + K_l) \cos \beta x + i\, (K_h - K_l) \sin \beta x) = e^{\alpha x} (A \cos \beta x - B \sin \beta x) =$$

Honek zera esan nahi du: r_h eta r_l errooi dagozkien soluzio partikularrak $e^{\alpha x} \cos \beta x$ eta $e^{\alpha x} \sin \beta x$ erara idatz daitezkeela eta
$K_h\, e^{r_h x} + K_l\, e^{r_l x} = A\, e^{\alpha x} \cos \beta x + B\, e^{\alpha x} \sin \beta x$

b) Erroak anizkoitzak direnean

Demagun r_i k ordenako erroa dela, hala bada r_i erroari k soluzio partikular dagokio $e^{r_i x}, x\, e^{r_i x}, x^2\, e^{r_i x},..., x^{k-1}\, e^{r_i x}$ hain zuzen ere. Beraz soluzio orokorra honela idatziko genuke:

$$y = K_1\, e^{r_1 x} + K_2\, e^{r_2 x} +....+ A_0\, e^{r_i x} + A_1\, e^{r_i x} +....+ A_{k-1}\, x^{k-1}\, e^{r_i x} +....$$

- erro anizkoitzen bat konplexua denean
$r_h = \alpha + \beta i$ eta bere konjokatua $r_l = \alpha - \beta i$, k ordenako erro anizkoitzak badira

dagozkien 2k soluzio partikularrak ondokoak dira:

$e^{\alpha x}\cos\beta x\ ,\ x\, e^{\alpha x}\cos\beta x\ , \ldots\ldots,\ x^{k-1} e^{\alpha x}\cos\beta x$

$e^{\alpha x}\sin\beta x\ ,\ x\, e^{\alpha x}\sin\beta x\ , \ldots\ldots,\ x^{k-1} e^{\alpha x}\sin\beta x$

Ekuazio ez-osoa behin ebatziz gero, ekuazio osoa ebazteko bere soluzio partikularra bilatu beharko dugu. Soluzio partikular hau $b(x)$ gaiaren funtzioan lortuko dugu. Azter dezagun, beraz, $b(x)$ gaia, eta bila dezagun dagokion y_1 soluzio partikularra.

a) $b(x) = a\, e^{\alpha x}$ erakoa da

I) α ez bada ekuazio karakteristikoaren erroa $y_1 = k\, e^{\alpha x}$

II) α ekuazio karakteristikoaren erro bakuna bada $y_1 = k\, x\, e^{\alpha x}$

III) α ekuazio karakteristikoaren p ordenako erroa bada $y_1 = k\, x^p\, e^{\alpha x}$

b) $b(x) = a\cos\beta x + b\sin\beta x$ (nahiz eta a edo b nuluak izan)

I) βi ez bada ekuazio karakteristikoaren erroa $y_1 = h\cos\beta x + k\sin\beta x$

II) βi ekuazio karakteristikoaren erro bakuna bada $y_1 = h\, x\cos\beta x + k\, x\sin\beta x$

III) βi ekuazio karakteristikoaren p ordenako erroa bada $y_1 = h\, x^p\cos\beta x + k\, x^p\sin\beta x$

c) $b(x) = b_0 x^h + b_1 x^{h-1} + \ldots + b_{h-1} x + b_h = P_h(x)$ h mailako polinomioa

I) $a_n \neq 0$ edo 0 ez bada ekuazio karakteristikoaren erroa $y_1 = Q_h(x)$

II) $a_n = 0$ edo 0 ekuazio karakteristikoaren erro bakuna bada $y_1 = x\, Q_h(x)$

III) 0 ekuazio karakteristikoaren p ordenako erroa bada $y_1 = x^p\, Q_h(x)$

Hiru kasuetan $Q_h(x)$ h mailako polinomioa da

d) $b(x) = P_h(x)\, e^{\alpha x}$ kasu orokorra

I) α ez bada ekuazio karakteristikoaren erroa $y_1 = Q_h(x)\, e^{\alpha x}$

II) α ekuazio karakteristikoaren erro bakuna bada $y_1 = x\, Q_h(x)\, e^{\alpha x}$

III) α ekuazio karakteristikoaren p ordenako erroa bada $y_1 = x^p\, Q_h(x)\ e^{\alpha x}$

e) $b(x) = A(x) + B(x) + C(x)$

Kasu honetan bi zatitan banatzen da ebazpena; lehendabiziz $b(x) = A(x)$ deneko kasuaren y_1 soluzio partikularra bilatzen da, baita $b(x) = B(x)$ eta $b(x) = C(x)$ kasuen y_2 eta y_3 soluzio partikularrak ere. Gero hiru soluzio batzen dira aurkitu nahi dugun soluzio partikularra lortzeko $y_0 = y_1 + y_2 + y_3$ alegia.

Azterketa honi ohar batzu erantsi behar diogu:

- Soluzio partikular guztietan agertzen diren h,k,... konstanteak kalkulatu behar dira
- $Q_h(x)$ polinomioaren koefizienteak ere bai.
- d) kasuan, kasu orokorra, α bai erreala bai konplexua izan daiteke. Azken kasu honetan $\alpha \equiv \alpha + \beta i$ bada $b(x) = P_h(x)\ e^{\alpha x}\,(\cos \beta x + i \sin \beta x)$ izango da, beraz soluzio partikularra ere $y_1 = Q_h(x)\ e^{\alpha x}\,(\cos \beta x + i \sin \beta x)$ erakoa izango da. Kontutan hartzekoa da "i" zenbaki konplexua konstantea dela.

4-1.27 Adibidea

$y''' + 3y'' - 4y = x\ e^{-2x}$

* ekuazio lineal ez-osoa $\quad y''' + 3y'' - 4\,y = 0$

polinomio karakteristikoa $\quad r^3 + 3r^2 - 4 = 0$

polinomio karakteristikoaren erroak $r_1 = 1$ eta $r_2 = -2$ bikoitza beraz ekuazio lineal ez-osoaren soluzio orokorra ondoko hau izango da $y = K_1\, e^x + K_2\, e^{-2x} + K_3\, x\, e^{-2x}$

* ekuazio lineal osoa $\quad y''' + 3y'' - 4\,y = x\ e^{-2x}$

$b(x) = P_h(x)\ e^{\alpha x}$ kasua da, non $P_h(x) = x$ eta $\alpha = -2$ bait dira; beraz, $\alpha = -2$ polinomio karakteristikoaren erro bikoitza denez, bilatu behar den soluzio partikularra $y_1 = x^2\,(ax + b)\ e^{-2x}$ erakoa da ($Q_h(x) = ax + b$ 1 mailako polinomioa).

$y_1 = (ax^3 + bx^2)\ e^{-2x}$ $\quad$ a eta b konstanteak kalkulatu behar dira

$$y_1' = (3ax^2 + 2bx)\ e^{-2x} - 2\,(ax^3 + bx^2)\ e^{-2x} = (-2ax^3 + (3a-2b)\,x^2 + 2bx\,)\ e^{-2x}$$

$$y_1'' = (-6ax^2 + 2(3a-2b)x + 2b)\ e^{-2x} - 2\,(-2ax^3 + (3a-2b)x^2 + 2bx)\ e^{-2x} =$$
$$= (4ax^3 + (4b-12a)x^2 + (6a-8b)x + 2b)\ e^{-2x}$$

$$y_1''' = (12ax^2 + 2(4b-12a)x + (6a-8b))\ e^{-2x} - 2\,(4ax^3 + (4b-12a)x^2 + (6a-8b)x +$$
$$+ 2b)\ e^{-2x} = (-8ax^3 + (36a-8b)x^2 + (24b-36a)x + (6a-12b))\ e^{-2x}$$

ekuazioan ordezkatu eta sinplifikatuz gero

$$(6a - 6b - 18ax)\, e^{-2x} = x\, e^{-2x} \quad \Rightarrow \quad 6a - 6b - 18ax = x = \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad a = b \quad \text{eta} \quad -18a = 1 \quad \Rightarrow \quad a = \frac{-1}{18} \quad \text{eta} \quad b = \frac{-1}{18}$$

beraz soluzio partikularra $y_1 = x^2 \left(\frac{-1}{18} x - \frac{1}{18} \right) e^{-2x}$ da

eta soluzio orokorra $y = K_1 e^x + K_2 e^{-2x} + K_3 x\, e^{-2x} - \frac{1}{18} x^2 (x+1)\, e^{-2x}$

9.4-2 Euler-en ekuazioa

Koefiziente aldakorrak (funtzioak) dituen eta erraz integra daitezkeenetariko bat da, ($ax + b$) polinomioaren mailarik handiena eta y-ren deribaturik handiena bat datozeneko kasua bakarrik ikusiko dugu), ondoko ekuazioa da:

$$a_0 (ax+b)^n y^{n)} + a_1 (ax+b)^{n-1} y^{n-1)} + \dots + a_{n-1} (ax+b)\, y' + a_n y = b(x)$$

integratzeko $ax + b = e^t$ $\quad dx = \frac{e^t}{a} dt$ aldaketa egiten da

$$\text{beraz} \quad y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{dy/dt}{e^t/a} = a\, e^{-t} \frac{dy}{dt}$$

$$y'' = \frac{d}{dx}(y') = \frac{d}{dx}\left(a\, e^{-t} \frac{dy}{dt} \right) = \frac{d}{dt}\left(a\, e^{-t} \frac{dy}{dt} \right) \frac{dt}{dx} = \left(-a\, e^{-t} \frac{dy}{dt} + a\, e^{-t} \frac{d^2y}{dt^2} \right) \frac{a}{e^t} =$$

$$= \left(-a^2 e^{-2t} \frac{dy}{dt} + a^2 e^{-2t} \frac{d^2y}{dt^2} \right) = a^2 e^{-2t} \left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} \right)$$

horrela segitu behar da $y^{n)}$ kalkulatu arte.

Berdintza horiek jatorrizko ekuazioan ordezkatuz koefiziente konstantedun ekuazioa lortzen da

$$b_0 \frac{d^n y}{dt^n} + b_1 \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \dots\dots + b_{n-1} \frac{dy}{dt} + b_n y = C(x)$$

4-2.28 Adibidea

$x^2 y'' + x y' + y = 1$

Kasu honetan $ax + b \equiv x$, beraz aldaketa $x = e^t$ da

$$x = e^t \quad \Rightarrow \quad dx = e^t dt \quad \Rightarrow \quad \frac{dx}{dt} = e^t \;, \quad \frac{dt}{dx} = e^{-t}$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \frac{dt}{dx} = e^{-t} \frac{dy}{dt}$$

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{dy'}{dt}\frac{dt}{dx} = \frac{d}{dt}\left(e^{-t}\frac{dy}{dt}\right)\frac{dt}{dx} = \left(-e^{-t}\frac{dy}{dt} + e^{-t}\frac{d^2y}{dt^2}\right)e^{-t} =$$
$$= e^{-2t}\left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right)$$

Hau dena ekuazioan ordezkatuz

$$e^{2t}\left[e^{-2t}\left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right)\right] + e^t\left(e^{-t}\frac{dy}{dt}\right) + y = 1 \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} + \frac{dy}{dt} + y = 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2y}{dt^2} + y = 1$$

orain aldagai askea t dela kontutan hartuz ekuazioa $y'' + y = 1$ idatziko dugu sinplifikatzeko. Ekuazio lineal ez-osoa $y'' + y = 0$, polinomio karakteristikoa $r^2 + 1 = 0$ eta erroak $r_1 = i$ $r_2 = -i$ beraz ekuazio lineal ez-osoaren soluzio orokorra

$$y = K_1 \cos t + K_2 \sin t$$

ekuazio lineal osoa $y'' + y = 1$ da eta $b(t) = 1$ beraz $y_1 = Q_1(t)$ erako soluzio partikularra bilatu behar da eta $Q_1(t) = K$ $y_1 = K$ $y'_1 = 0$ $y''_1 = 0$ $\Rightarrow$ ekuazioan ordezkatuz $K = 1$ beraz soluzio partikularra $y_1 = 1$ da eta soluzio orokorra

$$y = K_1 \cos t + K_2 \sin t + 1$$

$x = e^t$ aldaketa deseginez gero $t = \mathrm{Ln}\, x$

$$y = K_1 \cos(\mathrm{Ln}\, x) + K_2 \sin(\mathrm{Ln}\, x) + 1$$

9.5 *LAPLACE-REN TRANSFORMATUAREN BIDEZKO EBAZPENAK*

Laplace-ren transformatuak funtzio baten deribatua s faktorezko biderkaketa bihurtzen du. Honexegatik aplikatzen da ekuazio diferentzialeen ebazpenean.

$a_0\, y^{n)} + a_1\, y^{n-1)} + \dots + a_{n-1}\, y' + a_n\, y = b(x)$ ekuazioa emanik, aplika dezagun Laplace-ren transformatua bi ataletan

$$L[y] = F(s) \; ; \; L[y'] = s\,F(s) - y(0) \; ; \; L[y''] = s^2\,F(s) - s\,y(0) - y'(0); \dots\dots$$
$$\dots\dots L[y^{n)}] = s^n\,F(s) - s^{n-1}\,y(0) - s^{n-2}\,y'(0) - \dots - y^{n-1)}(0) \qquad L[b(t)] = \Phi(s)$$

jatorrizko ekuazioan ordezkatzen baditugu

$$a_0(s^n\,F(s) - s^{n-1}\,y(0) - \dots - y^{n-1)}(0)) + a_1(s^{n-1}\,F(s) - s^{n-2}\,y(0) - \dots - y^{n-2)}(0)) + \dots$$
$$\dots + a_{n-1}(s\,F(s) - y(0)) + a_n\,F(s) = \Phi(s) \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad F(s)\ \underbrace{[a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + ... + a_{n-1} s + a_n]}_{\psi(s)} \underbrace{- y(0)\ [a_0 s^{n-1} + a_1 s^{n-2} + \ldots + a_{n-1}] - .....}_{D(s)}$$

$$\underbrace{.....- a_0\, y^{n-1)}(0)}_{D(s)} = \Phi(s)$$

eta sinplifikatuz $\quad F(s)\,\psi(s) + D(s) = \Phi(s) \quad$ eta hemendik

$$F(s) = \frac{\Phi(s) - D(s)}{\psi(s)} \qquad \text{eta} \qquad y = L^{-1}\left[\frac{\Phi(s) - D(s)}{\psi(s)}\right]$$

y ezagut dezagun, lehenago $y(0), y'(0), y''(0),...$ ezagutu behar ditugu; horregatik lortzen den soluzioa partikularra da.

5.29 Adibidea

- $y'' + y = t \qquad y(0) = 0 \qquad y'(0) = 2$ hastapen-baldintzak

$$L[y] = F(s) \qquad L[y''] = s^2 F(s) - s\,y(0) - y'(0) \qquad L[t] = \frac{1}{s^2}$$

$$(s^2 F(s) - s\,y(0) - y'(0)) + F(s) = \frac{1}{s^2} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F(s)\,(s^2 + 1) - 2 = \frac{1}{s^2} \quad \Rightarrow \quad F(s) = \frac{\frac{1}{s^2} + 2}{s^2 + 1} = \frac{2s^2 + 1}{s^2(s^2 + 1)} \quad \Rightarrow \quad y = L^{-1}\left[\frac{2s^2 + 1}{s^2(s^2 + 1)}\right]$$

$$\frac{1 + 2s^2}{s^2(s^2 + 1)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{Cs + D}{s^2 + 1} \qquad (A = 0\ ,\ B = 1\ ,\ C = 0\ ,\ D = 1) \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{1 + 2s^2}{s^2(s^2 + 1)} = \frac{1}{s^2} + \frac{1}{s^2 + 1} \qquad \text{eta} \qquad L^{-1}\left[\frac{1}{s^2} + \frac{1}{s^2 + 1}\right] = t + \sin t$$

beraz ekuazioaren soluzioa $y = t + \sin t$ da.

- $t\,y'' + (2t + 3)\,y' + (t + 3)\,y = 0 \qquad y(0) = 2$ izanik

$$L[y] = F(s) \qquad L[t\,y] = -F'(s)$$

$$L[y'] = s\,F(s) - y(0) = s\,F(s) - 2 \qquad L[t\,y'] = -\frac{d}{ds}(L[y']) = -\frac{d}{ds}(s\,F(s) - 2) =$$
$$= -F(s) - s\,F'(s)$$

$$L[t\,y''] = -\frac{d}{ds}(L[y'']) = -\frac{d}{ds}(s^2 F(s) - s\,y(0) - y'(0)) = -\frac{d}{ds}(s^2 F(s) - 2s - K) =$$
$$= -(2s\,F(s) + s^2 F'(s) - 2)$$

balio hauek emandako ekuazioan ordezkatuz

$$- (2s\,F(s) + s^2\,F'(s) - 2) + 2\,(-F(s) - s\,F'(s)) + 3\,(s\,F(s) - 2) + (-F'(s)) + 3\,F(s) = 0$$

eta $\quad F(s)\,(-2s - 2 + 3s + 3) + F'(s)\,(-s^2 - 2s - 1) + 2 - 6 = 0 \quad \Rightarrow$

$$\Rightarrow \quad F(s)\,(s + 1) - F'(s)\,(s^2 + 2s + 1) - 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad F(s)\,(s + 1) - F'(s)\,(s + 1)^2 = 4$$

edo $\quad F'(s) - F(s)\,\dfrac{1}{s+1} = \dfrac{-4}{(s+1)^2}$ $\qquad$ ekuazio lineala

$$\frac{F'(s)}{F(s)} = \frac{1}{s+1} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{Ln}\,F(s) = \mathrm{Ln}\,(s + 1) + \mathrm{Ln}\,K \quad \Rightarrow \quad F(s) = K(s + 1)$$

$F(s) = K(s)\,(s + 1) \quad \Rightarrow \quad F'(s) = K'(s)\,(s + 1) + K(s)$ $\qquad$ eta ordezkatuz

$$(K'(s)\,(s + 1) + K(s)) - (K(s)\,(s + 1))\,\frac{1}{s+1} = \frac{-4}{(s+1)^2} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad K'(s)\,(s + 1) = \frac{-4}{(s+1)^2} \quad \Rightarrow \quad K'(s) = \frac{-4}{(s+1)^3} \quad \Rightarrow \quad K(s) = \frac{2}{(s+1)^2} + K_1 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad F(s) = \left(\frac{2}{(s+1)^2} + K_1\right)(s + 1) = \frac{1}{s+1} + K_1\,(s + 1)$$

K_1 bilatzeko $\lim\limits_{s \to \infty} F(s) = 0$ propietatea erabiliko dugu.

$\lim\limits_{s \to \infty} \left(\dfrac{2}{s+1} + K_1\,(s + 1)\right) = 0$ izan dadin $\lim\limits_{s \to \infty} K_1\,(s + 1) = 0$

izan behar du $\quad \Rightarrow \quad K_1 = 0$

$F(s) = \dfrac{2}{s+1}$ $\qquad$ eta $\qquad y = L^{-1}\left[\dfrac{2}{s+1}\right] = 2\,e^{-t}$ $\qquad$ soluzioa lortzen da.

BIBLIOGRAFIA

T.M. APOSTOL. Análisis Matemátiko. Ed. Reverté.

G.N. BERMAN. Problemas y ejercicios de Análisis Matemático. Ed. MIR.

R. BEONTE ABAURREA. Cálculo Infinitesimal e Integral.

D. DEMIDOVICH. 5000 Problemas de Análisis Matemático. Ed. Paraninfo.

L.D. KUDRIAVTSEV. Curso de Análisis Matemático. Vol. 1 y 2. Ed. MIR.

LOSADA-RODRIGUEZ. Análisis Diferencial e Integral. Ed. Montaner y Simon S.A.

P. PUIG ADAM. Ecuaciones Diferenciales. Vol. 2. Ed. Biblioteca Matemática S.L.

W. RUDIN. Principios de Análisis Matemático. Ed. Mac Graw-Hill.

M. SPIVAK. Calculus. Cálculo Infinitesimal. Ed Reverté.