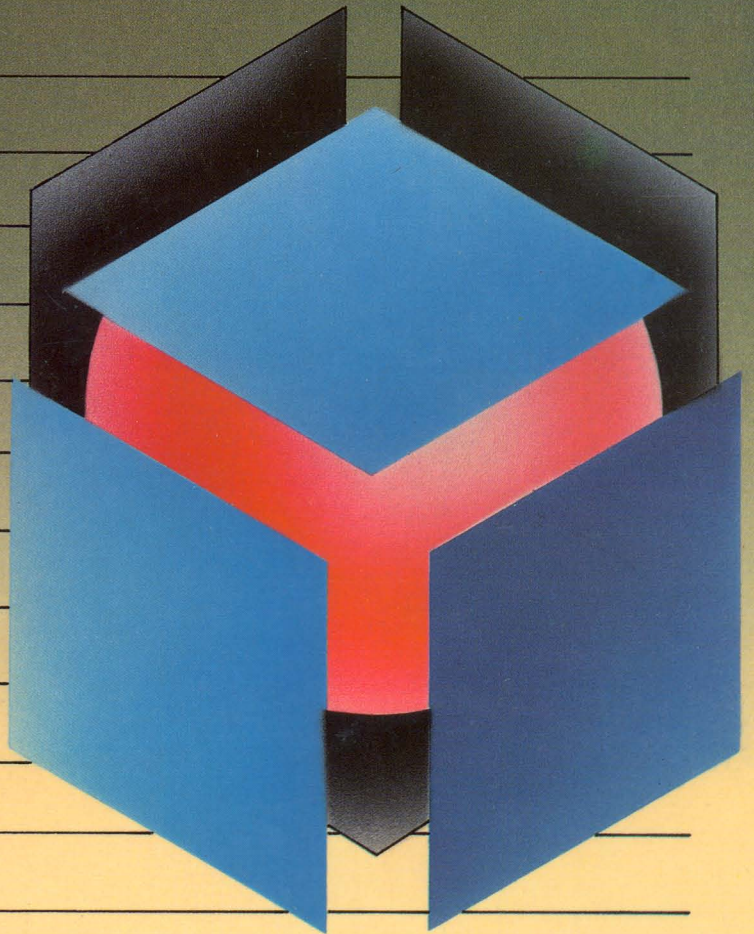


FISIKA OROKORRA

ARIKETAK



IEI KOFISIKA SAILA

FISIKA OROKORRA

Ariketak

U.E.U.ko Fisika Saila

M. Ensunza

*Fisika Teorikoa. Zientzi Fakultatea.
Euskal Herriko Unibertsitatea.*

J. R. Etxebarria

*Fisika Teorikoa. Zientzi Fakultatea.
Euskal Herriko Unibertsitatea.*

O. Ezenarro

*Fisika Aplikatua. Zientzi Fakultatea.
Euskal Herriko Unibertsitatea.*

J. M. Pitarke

*Fisika Teorikoa. Zientzi Fakultatea.
Euskal Herriko Unibertsitatea.*

P. Ugalde

Industri Ingeniaria

N. Zabala

*Elektrika eta Elektronika. Zientzi Fakultatea.
Euskal Herriko Unibertsitatea.*

Udako Euskal Unibertsitatea

Iruñea, 1989.

***HEZKUNTZA, UNIBERTSITATE ETA IKERKETA SAILAK ONETSIA
(1.989-XII)***

© U.E.U.ko Fisika Saila
General Concha 25, 6. 48010 BILBO

I.S.B.N.: 84-86967-18-X
Lege-gordailua: BI-2542-89

Inprimategia: BOAN S.A.
Particular de Costa 12, 48010 BILBO
Azalaren diseinua: Fernando García

AURKIBIDEA

<i>Sarrera</i>	VII
1. <i>Dimentsio-ekuazioak</i>	1
2. <i>Kalkulu bektoriala</i>	9
3. <i>Puntuaren zinetika</i>	27
4. <i>Higidura erlatiboa</i>	41
5. <i>Partikularen dinamika</i>	61
6. <i>Lana eta energia</i>	87
7. <i>Partikula-sistemen dinamika</i>	109
8. <i>Solido zurrunaren zinetika</i>	133
9. <i>Solido zurrunaren dinamika</i>	153
10. <i>Estatika</i>	171
11. <i>Fluidoaren mekanika</i>	187
12. <i>Higidura oszilakorra</i>	213
13. <i>Uhin-higidura</i>	235
14. <i>Interakzio grabitatorioa</i>	257
15. <i>Interakzio elektrikoa</i>	283
16. <i>Korronte elektrikoa</i>	315
17. <i>Interakzio magnetikoa</i>	347
18. <i>Termodinamikaren lehenengo printzipioa</i>	389
19. <i>Gas idealak</i>	407
20. <i>Termodinamikaren bigarren printzipioa</i>	427

SARRERA

"Fisika Orokorra (I). Problemak eta Ariketak" liburua argitaratu genuenetik bederatzi urte pasatu direlarik, beharrezkoa eritzi diogu, orduko lan hura eta hurrengo urteko *"Fisika Orokorra (II). Problemak eta Ariketak"* berraztertzeari eta berrantolatzeari. Berrikusketa horren fruitua da, hain zuzen, orain plazaratu dugun lan hau, sarriegi gure artean bat bitan banatzeko dagoen joera alderantzikatuz, biak batean emanik.

Orohar, lehengo liburuak izan dira abiapuntu eta oinarri. Oraingoan, ordea, lehenagoko akatsen zuzenketari lotu gatzaizkio –zuzendu gabe geratu zaizkigunak eta sartu ditugun akats berriak gutxi ai lira!– alde batetik, bestetik ariketa berriak gehitzeari ekin diogularik.

Ariketa-liburu honen bidez, teoriaren arloan burutu ditugun liburuetarako material osagarria eskaini nahi dugu. Dena den, hemengo gaien kopurua ez da teori liburuen bezainbestekoa, eta bertako gai batzuren ariketarik ez dugu hemen aurkeztu. Jokamodu horren zergatikoaren azalpena, arrazoi praktikoetan finka dezakegu soilik. Denbora etsai izan dugularik, nahiago izan dugu lehengo egiturari jarraitzea, gai berrien prestaketan aritzea baino, azken lan hau, etorriko diren argitarapenentarako utzirik. Lan beharrezkoa zen, ikasleek behar bait zuten, eta denborak gure aurka jotatzen bait zuen. Nahi genukeenaren eta epe-barnean ahal genuenaren arteko konpromezu horren emaitza da, beraz, baina egitura osotzeko asmo irmorik ba dugu.

Bestalde, hasierako liburuetan izandako lankideen kopurua bikoiztuta ikustean ba da aldaketarik, zer esanik ez! Poztu egiten gaitu, ez soilik katea eten ez dela, baizik eta luzatu egin dela ikusteak, gerorako emaitza sendoagoen adierazletzat hartu nahi genukeena. Horrelaxe ai litz!

UEUko Fisika Saila

1. GAIA

DIMENTSIO-EKUAZIOAK

1.1. Kualitatiboki, pendulu baten oszilazio-periodoa (P) bere luzeraren (l) eta grabitatearen azelerazioaren (g) menpekoa dela ba dakigu. Dimentsio-ekuazioak kontutan harturik, idatz bedi P periodoa l -ren eta g -ren funtzioan.

Aipaturiko hiru magnitudeen dimentsio-ekuazioak hauexek dira:

$$[P] = T \quad ,$$

$$[l] = L \quad ,$$

$$[g] = L T^{-2} \quad .$$

Enuntziatuaren arauera, ondoko lotura dimentsionala agertu behar da penduluaren legeari:

$$[P] = [l]^{\lambda} [g]^{\mu} \quad .$$

Beraz,

$$T = L^{\lambda} L^{\mu} T^{-2\mu} \quad ,$$

eta hemendik:

$$\lambda + \mu = 0 \quad ,$$

$$- 2\mu = 1 \quad .$$

Hots, lotura funtzional hau dago:

$$[P] = \sqrt{\frac{[l]}{[g]}} \quad .$$

Izatez, hiru magnitude horien arteko lotura hau da:

$$P = 2 \pi \sqrt{\frac{l}{g}} \quad .$$

1.2. F indarra, S azalera, ρ dentsitatea eta v abiadura konbinatuz, lor bedi dimentsiorik gabeko adierazpen monomiko bat.

Magnitude horien dimentsio-ekuazioak ondokoak dira:

$$[f] = M L T^{-2} ,$$

$$[S] = L^2 ,$$

$$[\rho] = M L^{-3} ,$$

$$[v] = L T^{-1} .$$

Lortu nahi dugun adierazpen monomikoa, ondokoa da:

$$f^{\lambda} S^{\mu} \rho^{\nu} v^{\alpha} ,$$

eta beronen dimentsio-ekuazioa,

$$[f^{\lambda} S^{\mu} \rho^{\nu} v^{\alpha}] = M^0 L^0 T^0 .$$

Beraz, lehengo ekuazioak garatuz,

$$[f]^{\lambda} [S]^{\mu} [\rho]^{\nu} [v]^{\alpha} = M^{\lambda + \nu} L^{\lambda + 2\mu - 3\nu + \alpha} T^{-2\lambda - \alpha} ,$$

hots,

$$\lambda + \nu = 0 ,$$

$$\lambda + 2\mu - 3\nu + \alpha = 0 ,$$

$$- 2\lambda - \alpha = 0 .$$

Hiru ekuazio eta lau ezezagun ditugunez, zenbatnahi soluzio daude. Egin dezagun, adibidez, $\lambda = 1$. Ondoko soluzioak ditugu:

$$\lambda = 1 ; \mu = -1 ; \nu = -1 ; \alpha = -2 .$$

Beraz, ondoko monomio adimentsionala dugu:

$$f S^{-1} \rho^{-1} v^{-2} = \frac{f}{S \rho v^2} ,$$

eta hauxe da bilatzen ari ginena.

1.3. e eta m_e elektroiaren karga eta masa, c argiak hutsean duen abiadura eta ϵ_0 hutseko permitibitatea monomioa osotuz konbina itzazue, denetara monomio horrek luzera-dimentsioa eduki dezan moduan. Luzera horri *elektroiaren erradio klasikoa* deritzo eta elektroiaren autoenergia eta beraren masaren eta argiaren abiaduraren karratuaren arteko biderkadura (Einstein-en formula) berdinduz lor daiteke.

Karga elektrikoa laugarren oinarritzko magnitude gisa aukeratuz,

$$r_e = k e^\alpha m_e^\beta c^\gamma \epsilon_0^\delta .$$

Bestalde, permitibitatearen dimentsioak ondokoak dira:

$$[\epsilon_0] = Q^2 L^{-2} [F]^{-1} = Q^2 L^{-3} M^{-1} T^2 .$$

Hots, denetara, k delako zenbaki adimentsionala dela kontutan edukiz,

$$[r_e] = Q^\alpha M^\beta L^\gamma T^{-\gamma} Q^{2\delta} L^{-3\delta} M^{-\delta} T^{2\delta} .$$

$$\alpha + 2\delta = 0 ; \quad \beta - \delta = 0 ; \quad 2\delta - \gamma = 0 ; \quad \gamma - 3\delta = 1 .$$

$$\text{Hortik} \quad \delta = -1 ; \quad \gamma = -2 ; \quad \beta = -1 ; \quad \alpha = 2 .$$

Bestalde, froga daitekeenez, k konstantearen balioa $1/4\pi$ da. Alegia, era honetara eman daiteke r_e erradioa:

$$r_e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{m c^2} ,$$

eta bertan ageri diren magnitudeen balio numerikoak ordezkatzuz, $r_e = 2.82 \times 10^{-13} \text{ cm}$ lortuko da. Dena den, praktikan bestelako magnitude hauek erabili ohi dira:

$$\frac{e^2}{\epsilon_0} : \text{luzera-unitateko energia.}$$

$$m c^2 : \text{energia.}$$

$$\frac{e^2}{\epsilon_0 m c^2} : \text{luzera.}$$

1.4. Lor bedi esfera batek fluido biskotsu batetan erortzean jasango duen balaztatze-indarraren legearen adierazpena.

Aipaturiko prozesuaren azterketatik, tartean egon behar duten magnitudeak, biskositatea, esferaren erradioa eta beraren abiadura direla dirudi. Beraz,

$$F = k \mu^\alpha r^\beta v^\gamma .$$

non k doikuntzarako erabiliko dugun konstante edo zenbaki adimentsional bat den. Beharrezko ordezkapenak eginez,

$$M L T^{-2} = (M L^{-1} T^{-1})^\alpha L^\beta L^\gamma T^{-\gamma} = M^\alpha L^{-\alpha + \beta + \gamma} T^{-\alpha - \gamma} .$$

$$\alpha = \beta = \gamma = 1 .$$

k konstanteak 6π balio duela jakinik, indarraren adierazpena hauxe da:

$$F = 6\pi \mu r v .$$

ARIKETAK.

- 1.- Fluidoaren kasuan, Newton-en biskositatearen legea honela adierazi ohi da:

$$\tau = \mu \frac{dv}{dy} ,$$

non τ ebakidura-tentsioa den (hau da, azalera-unitateko indarra, F/S) eta dv/dy deformazioaren abiadura angeluarra (v abiadura eta y luzera). μ delakoari biskositate-koefizientea deritzo. Zein da μ horren dimentsio-ekuazioa?

Emaitza: $[\mu] = M L^{-1} T^{-1} .$

- 2.- Aurreko ariketan definituriko μ delako biskositate-koefizienteari, biskositate absolutu edo dinamikoa deritzo. Horretaz gainera, biskositate zinematikoa definitu ohi da, $\nu = \mu/\rho$ eginez, non ρ dentsitatea den. Zein da biskositate zinematikoaren dimentsio-ekuazioa?

Emaitza: $[\nu] = L^2 T^{-1} .$

- 3.- Reynolds-en zenbakia, fluidoaren mekanikan erabiltzen den zenbakietariko bat da. Honelaxe definitu ohi da: $R = (v l \rho)/\mu$ non v fluxuaren abiadura berezi bat den, l luzera berezia, ρ dentsitatea eta μ biskositate-koefizientea. Lor bedi R -ren dimentsio-ekuazioa.

Emaitza: $[R] = M^0 L^0 T^0 .$

- 4.- Korrante-lerro batetan honelaxe idatzi ohi da Bernouilli-ren ekuazioa, fluido baten kasuan (ikus Fisika Orokorra (II) 13.8. atala):

$$\frac{p}{\gamma} + z + \frac{v^2}{2g} = k .$$

Gai guztien dimentsio-ekuazioa, berbera al da?

Emaitza: Bai, L .

- 5.- Erraz froga daitekeen legez, pausagunetik irten eta libreki erortzen ari den gorputz baten erorketak dirauen denbora (t), erorketaren altueraren (h) menpekkoa da. Bestalde, erorketaren kausa grabitatea

dela jakinik, aipaturiko denbora eta grabitatearen azelerazioa (g) erlazionaturik egoteak logikoa dirudi. Lor bedi, t , h eta g -ren arteko erlazioa, dimentsio-ekuazioa erabiliz.

Eraitza: $[t] = \sqrt{\frac{[h]}{[g]}}$.

Adierazpen osoa : $t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$.

- 6.- Demagun zuloa duen ontzi bat. Zulotik irteteen likidoak duen abiadurak (v) zuloaren ur-azaletiko sakontasunaren (h), likidoaren dentsitatearen (ρ) eta grabitatearen azelerazioaren (g) menpekotasuna duela pentsa dezakegu lehenengo begiradan. Horrela ote da? Aurki bedi aipaturiko magnitudeen arteko erlazioa.

Eraitza: $[v] = \sqrt{[g] [h]}$.

Izatez, ez dago ρ -ren menpekotasunik.

Adierazpen osoa: $v = \sqrt{2 g h}$.

- 7.- Presta bedi, gitarra-hariek sortzen duten soinuaren oinarritzko maiztasuna (ν) emateko adierazpen egokia, beraren luzera-unitateko dentsitatea (λ), luzera (l) eta hariaren tentsioa (F) erabiliz.

Eraitza: $\nu = \frac{1}{2l} \sqrt{\frac{F}{\lambda}}$.

2. GAIA

KALKULU BEKTORIALA

2.1. $A = 3i + 4j - 5k$ eta $B = -i + 2j + 6k$ bektoreak emanik, lor bitez:

- a) $|A|$, $|B|$, $|A + B|$, $|A - B|$.
- b) $A \cdot B$ biderkadura eskalarra.
- c) Bien artean eraturiko angelua.
- d) Bakoitzaren kosinu zuzentzaileak.
- e) $A \wedge B$ biderkadura bektoriala.
- f) $A \cdot (B \wedge A)$ biderkadura mixtoa.

$$a) |A| = \sqrt{3^2 + 4^2 + 5^2} = \sqrt{50} ,$$

$$|B| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 6^2} = \sqrt{41} ,$$

$$A + B = (3-1)i + (4+2)j + (-5+6)k = 2i + 6j + k ,$$

$$|A + B| = \sqrt{2^2 + 6^2 + 1^2} = \sqrt{41} ,$$

$$A - B = (3+1)i + (4-2)j + (-5-6)k = 4i + 2j - 11k ,$$

$$|A - B| = \sqrt{4^2 + 2^2 + 11^2} = \sqrt{141} .$$

$$b) A \cdot B = 3 \cdot (-1) + 4 \cdot 2 + (-5) \cdot 6 = -3 + 8 - 30 ,$$

$$A \cdot B = -25 .$$

$$c) A \cdot B = |A| |B| \cos (A , B) ,$$

$$\cos (A , B) = \frac{A \cdot B}{|A| |B|} = \frac{-25}{\sqrt{50} \sqrt{41}} .$$

$$d) \quad \cos \alpha_A = \frac{3}{\sqrt{50}} , \quad \cos \alpha_B = \frac{-1}{\sqrt{41}} ,$$

$$\cos \beta_A = \frac{4}{\sqrt{50}} , \quad \cos \beta_B = \frac{2}{\sqrt{41}} ,$$

$$\cos \lambda_A = \frac{-5}{\sqrt{50}} , \quad \cos \gamma_B = \frac{6}{\sqrt{41}} .$$

$$e) \quad \mathbf{A} \wedge \mathbf{B} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 3 & 4 & -5 \\ -1 & 2 & 6 \end{vmatrix} = \mathbf{i} (24 + 10) + \mathbf{j} (5 - 18) + \mathbf{k} (6 + 4) ,$$

$$\mathbf{A} \wedge \mathbf{B} = 34 \mathbf{i} - 13 \mathbf{j} + 10 \mathbf{k} .$$

f) $\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \wedge \mathbf{A}) = 0$. Beraz, ez da zertan kalkulatu behar, zeren eta bi bektore ($\mathbf{A}$ eta $\mathbf{A}$) berberak izatean, biderkadura mixtoa nulua bait da. Dena den, hori erraz konproba daiteke:

$$\mathbf{B} \wedge \mathbf{A} = -34 \mathbf{i} + 13 \mathbf{j} - 10 \mathbf{k}$$

$$\mathbf{A} = 3 \mathbf{i} + 4 \mathbf{j} - 5 \mathbf{k}$$

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \wedge \mathbf{A}) = -34 \cdot 3 + 13 \cdot 4 + (-10) \cdot (-5) = -102 + 52 + 50 = 0$$

2.2. a) Deskonposa bedi $\mathbf{V} = 7 \mathbf{i} + 5 \mathbf{j}$ bektorea, $\mathbf{a} = \mathbf{i} + \mathbf{j}$ eta $\mathbf{b} = 2 \mathbf{i} + \mathbf{j}$ bektoreen norabideetan.

b) Lor bitez $\mathbf{V}$ bektoreak norabide horietan dituen proiektzio errektangeluarrak.

c) Lor bedi, ardatzen jatorritik pasaturik $\mathbf{V}$ bektorearen norabidea duen zuzena.

a) Demagun, l eta m parametroak ditugula

$$\mathbf{V} = l \mathbf{a} + m \mathbf{b}$$

$$7 \mathbf{i} + 5 \mathbf{j} = l (\mathbf{i} + \mathbf{j}) + m (2 \mathbf{i} + \mathbf{j})$$

Hemendik :

$$7 = l + 2m$$

$$5 = l + m$$

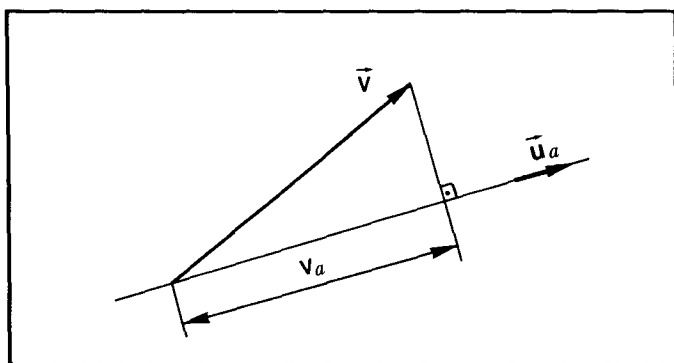
Beraz, ebatzirik, $l = 3$, $m = 2$

Hots, bi osagaiak hauexek dira:

$$\mathbf{V}_a = 3 \mathbf{a} = 3 \mathbf{i} + 3 \mathbf{j}$$

$$\mathbf{V}_b = 2 \mathbf{b} = 4 \mathbf{i} + 2 \mathbf{j}$$

b) Projekzio errektangeluarrak honela kalkulatzek dira:



$$V_a = \mathbf{V} \cdot \mathbf{u}_a = \mathbf{V} \cdot \frac{\mathbf{a}}{a} ; \quad V_b = \mathbf{V} \cdot \mathbf{u}_b = \mathbf{V} \cdot \frac{\mathbf{b}}{b}$$

$$V_a = (7 \mathbf{i} + 5 \mathbf{j}) \cdot \frac{\mathbf{i} + \mathbf{j}}{\sqrt{1+1}} = \frac{7+5}{\sqrt{2}} = 6\sqrt{2}$$

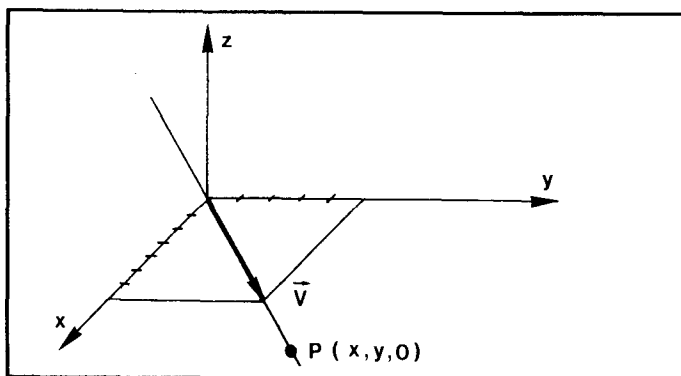
$$V_b = (7 \mathbf{i} + 5 \mathbf{j}) \cdot \frac{2 \mathbf{i} + \mathbf{j}}{\sqrt{4+1}} = \frac{14+5}{\sqrt{5}} = 19 \frac{\sqrt{5}}{5}$$

c) P delakoa, zuzenaren puntu bat izanik,

$$\vec{OP} \wedge \mathbf{V} = 0$$

$$P \longrightarrow z = 0 ,$$

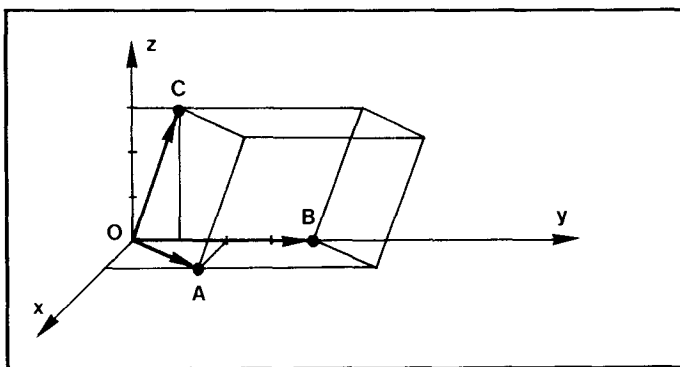
eta baldintza hauekin zuzenean kalkulatu dugu eskatu zaigun zuzenaren ekuazioa:



$$\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x & y & 0 \\ 7 & 5 & 0 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \begin{cases} z = 0 \\ 5x - 7y = 0 \end{cases}$$

2.3. Paralelepipedo baten ertzak ardatzen jatorritik ondoko puntuetara doaz: $A(1,2,0)$, $B(0,4,0)$, $C(0,1,3)$. Lor bedi paralelepipedoaren bolumena.

Hurrengo irudian adierazi dira $\vec{OA}$, $\vec{OB}$ eta $\vec{OC}$ bektoreak.



Beraien balioa hauxe da:

$$\vec{OA} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j}$$

$$\vec{OB} = 4\mathbf{j}$$

$$\vec{OC} = \mathbf{j} + 3\mathbf{k}$$

Dakigunez, paralelepipedoaren bolumena hiru bektore horien arteko biderkadura mixtoa da:

$$\vec{OA} \cdot (\vec{OB} \wedge \vec{OC}) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 12 .$$

2.4. Froga bedi, ezen $\mathbf{a} = \mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k}$ eta $\mathbf{c} = \mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 5\mathbf{k}$ bektoreek triangelu baten aldeak izan daitezkeela.

Hasteko, hiru bektoreok planokideak izan behar dute. Hori ikusteko, aski da hiru bektore ez-nulu hauen arteko biderkadura mixtoa kalkulatzeari, eta berori zero baldin bada, planokideak direla esan dezakegu:

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \wedge \mathbf{c}) = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & -5 \end{vmatrix} = 0 .$$

Beraz, planokideak dira.

Triangelu baten aldeak izan daitezen,

$$m \mathbf{a} + n \mathbf{b} + l \mathbf{c} = \mathbf{0}$$

adierazpena bete behar da, m , n eta l parametroen balioa $+1$ edo -1 delarik. Ikus dezagun ea honela den.

$$m(\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}) + n(2\mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k}) + l(\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 5\mathbf{k}) = \mathbf{0} .$$

Hemendik

$$m + 2n + l = 0 ,$$

$$-2m + n + 3l = 0 ,$$

$$3m - 2n - 5l = 0 .$$

Sistema homogeno honek ebazpen ez-nabaririk eduki dezan, koefizienteen determinanteak nulua izan behar du. Eta

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \\ 3 & -2 & -5 \end{vmatrix} = 0$$

denez, ekuazio bat ken dezakegu. Beraz,

$$\begin{array}{rcl} m + 2n + l = 0 & \longrightarrow & 2m + 4n + 2l = 0 \\ -2m + n + 3l = 0 & & -2m + n + 3l = 0 \\ \hline & & 5n + 5l = 0 \\ & & l = -n \end{array}$$

Eta lehen ekuaziotik: $m = -2n - l = -n$.

Honelatan, bada, $n = 1$ eginik,

$$n = 1 \quad l = -1 \quad m = -1.$$

Hots, era honetara eratuko dute triangelua:

$$-a + b - c = 0.$$

2.5. Ondoko bektoreak, $A = 2i - j + k$ eta $B = i + 2j - 3k$, eta dagozkien aplikazio-puntuak emanik, $P(1, -7, -2)$ eta $Q(0, 1, 2)$ hurrenez hurren, lor bitez:

- Koordenatuen jatorriarekiko momentua.
- Ardatz koordenatuekiko momentuak.
- Jatorritik pasaturik, bere kosinu zuzentzaileak 1, 3 eta 5 zenbakien proportzionalak dituen OE ardatzarekiko momentua.
- Sistemaren momentu minimoa.

$$a) M_O = \vec{OP} \wedge A + \vec{OQ} \wedge B.$$

Beraz

$$M_O = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -7 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \end{vmatrix}$$

$$\mathbf{M}_O = -16 \mathbf{i} - 3 \mathbf{j} + 12 \mathbf{k} .$$

b) Definizioz, ardatz batekiko momentua ardatz horretako edozein punturekiko momentuak ardatz horrekiko duen projekzioa da. Ardatz koordenatuekiko momentuak, jatorriarekiko momentuaren osagaiak dira, nabariki ikus daitekeenez, alegia:

$$M_x = \mathbf{i} \cdot \mathbf{M}_O = -16$$

$$M_y = \mathbf{j} \cdot \mathbf{M}_O = -3$$

$$M_z = \mathbf{k} \cdot \mathbf{M}_O = 12$$

c) Kosinu zuzentzaileen definiziotik eta (x,y,z) OE ardatzeko edozein puntu izanik, ondokoa beteko dela ba dakigu:

$$\cos \alpha = \frac{x}{r} ; \quad \cos \beta = \frac{y}{r} ; \quad \cos \gamma = \frac{z}{r} .$$

Beraz, enuntziatuaren arauera,

$$\frac{1}{\cos \alpha} = \frac{3}{\cos \beta} = \frac{5}{\cos \gamma} .$$

Edo, berdina dena:

$$\frac{x}{1} = \frac{y}{3} = \frac{z}{5} .$$

OE ardatzeko norabideko bektoreak, era honetakoak dira:

$$\lambda \mathbf{i} + 3 \lambda \mathbf{j} + 5 \lambda \mathbf{k} .$$

Kalkula dezagun λ parametroa, bektore unitarioaren kasuan:

$$|\mathbf{u}| = 1 = \sqrt{\lambda^2 + 3^2 \lambda^2 + 5^2 \lambda^2} = \sqrt{35} \lambda .$$

Beraz:

$$\mathbf{u} = \frac{1}{\sqrt{35}} (\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 5\mathbf{k}) .$$

Honelatan, bada, OE ardatzarekiko momentua ondokoa izango da:

$$M_{OE} = \mathbf{M}_O \cdot \mathbf{u} = \frac{1}{\sqrt{35}} [-16 \cdot 1 + (-3) \cdot 3 + 12 \cdot 5] = \frac{35}{\sqrt{35}} ,$$

$$M_{OE} = \sqrt{35} .$$

d) Dakigunez, honela kalkulatu ohi da momentu minimoa:

$$\tau = \frac{\mathbf{M}_O \cdot \mathbf{R}}{R^2} R$$

$$\mathbf{R} = 3\mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k} \quad (\text{erresultantea})$$

$$R^2 = 3^2 + 1 + 4^2 = 14$$

Beraz,

$$\tau = -\frac{75}{14} (3\mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k}) .$$

2.6. Froga bedi ezen $\mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_2 + \mathbf{V}_3 = 0$ baldin bada, orduan $\mathbf{V}_1 \wedge \mathbf{V}_3 = \mathbf{V}_3 \wedge \mathbf{V}_2 = \mathbf{V}_2 \wedge \mathbf{V}_1$ dela. Erlazio hauen bidez, froga bedi ondokoa beteko dela:

$$\frac{V_1}{\sin(\mathbf{V}_2, \mathbf{V}_3)} = \frac{V_2}{\sin(\mathbf{V}_3, \mathbf{V}_1)} = \frac{V_3}{\sin(\mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2)} .$$

Azter ditzagun $\mathbf{V}_1 \wedge \mathbf{V}_3$ eta $\mathbf{V}_3 \wedge \mathbf{V}_2$:

$$\mathbf{V}_2 = -\mathbf{V}_1 - \mathbf{V}_3 \text{ denez,}$$

$$\mathbf{V}_3 \wedge \mathbf{V}_2 = \mathbf{V}_3 \wedge (-\mathbf{V}_1 - \mathbf{V}_3) = -\mathbf{V}_3 \wedge \mathbf{V}_1 - \mathbf{V}_3 \wedge \mathbf{V}_3 = \mathbf{V}_1 \wedge \mathbf{V}_3 .$$

Gauza berbera egin dezakegu, $\mathbf{V}_1 \wedge \mathbf{V}_3$ eta $\mathbf{V}_2 \wedge \mathbf{V}_1$ hartuz.

Hemen ere $\mathbf{V}_2 = -\mathbf{V}_1 - \mathbf{V}_3$ denez,

$$\mathbf{V}_2 \wedge \mathbf{V}_1 = (-\mathbf{V}_1 - \mathbf{V}_3) \wedge \mathbf{V}_1 = -\mathbf{V}_1 \wedge \mathbf{V}_1 - \mathbf{V}_3 \wedge \mathbf{V}_1 = \mathbf{V}_1 \wedge \mathbf{V}_3 .$$

Beraz, frogaturik dago lehenengo partea.

Bigarren partea frogatzeko, har ditzagun lehen zati biak:

$$\mathbf{V}_1 \wedge \mathbf{V}_3 = \mathbf{V}_3 \wedge \mathbf{V}_2 .$$

Garatuz,

$$V_1 V_3 \sin(\mathbf{V}_1, \mathbf{V}_3) = V_3 V_2 \sin(\mathbf{V}_3, \mathbf{V}_2) .$$

Eta V_3 sinplifikatuz, honako hau dugu azkenean:

$$\frac{V_1}{\sin(\mathbf{V}_3, \mathbf{V}_2)} = \frac{V_2}{\sin(\mathbf{V}_1, \mathbf{V}_3)} .$$

Eta bi zatiei zeinua aldatuz, problemaren enuntziatukoa lortuko dugu:

$$\frac{V_1}{\sin(\mathbf{V}_2, \mathbf{V}_3)} = \frac{V_2}{\sin(\mathbf{V}_3, \mathbf{V}_1)} .$$

Berdin eginez, frogapen osoa egin daiteke. Bestalde, erraz ikus daitekeenez, hau sinuaren teorema besterik ez da.

2.7. Demagun kurtsore-sistema hau: $\mathbf{A}_1 = \mathbf{i} + a\mathbf{j}$, $P_1 (2,0,0)$ puntuan aplikaturik eta $\mathbf{A}_2 = 2\mathbf{i} + \mathbf{j}$, $P_2 (0,2,0)$ puntuan. Lor bitez:

- a) a parametroaren balioa, koordenatu-jatorria ardatz zentralekoa izan dadin.
- b) Ardatz zentralaren ekuazio cartesiarra.

a) Lehenik eta behin, sistema, ardatzen jatorrira erreduzituko dugu.

$$\mathbf{R} = \mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2 = 3\mathbf{i} + (a+1)\mathbf{j} ,$$

$$\tau_o = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & a & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (2a - 4) \mathbf{k} .$$

Ikus daitekeenez, aldaezin eskalarra nulua da:

$$\tau_O \cdot \mathbf{R} = 3 \cdot 0 + (a+1) \cdot 0 + 0 \cdot (2a-4) = 0 \quad .$$

Beraz, emaitza horrek, momentu minimoa nulua dela esan nahi du. Hots, jatorria ardatz zentralakoa izan dadin, $\tau_O = 0$ izan behar dela,

$$2a - 4 = 0 \rightarrow a = 2 \quad .$$

b) P ardatz zentralaren puntu bat izanik, $P(x, y, z)$, ondokoa beteko da:

$$\vec{OP} \wedge \mathbf{R} = 0$$

$$\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x & y & z \\ 3 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad , \quad \mathbf{R} = 3\mathbf{i} + 3\mathbf{j} \quad \text{bait da} \quad .$$

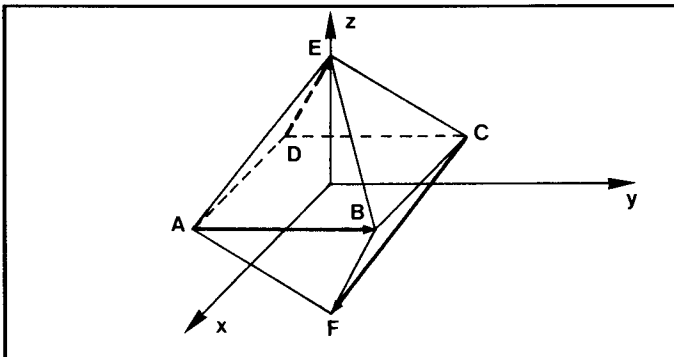
$$-3z \mathbf{i} + 3z \mathbf{j} + (3x - 3y) \mathbf{k} = 0 \quad .$$

Beraz, ardatz zentralaren ekuazioak hauexek dira:

$$x - y = 0 \quad ,$$

$$z = 0 \quad .$$

2.8. Irudian ageri den, $2l$ luzerako ertzak dituen eta jatorrian zentratuturik dagoen $ABCDEF$ oktaedro erregularrean, $\vec{AB}$, $\vec{CF}$ eta $\vec{DE}$ kurtsoreak daude. Lor bedi hiruren artean osoturiko sistemaren tortsorea eta ardatz zentralaren ekuazioak.



Erpinen koordenatuak ondokoak dira:

$$A (l, -l, 0) \quad B (l, l, 0) \quad C (-l, l, 0)$$

$$D (-l, -l, 0) \quad E (0, 0, \sqrt{2}l) \quad F (0, 0, -\sqrt{2}l)$$

$$\text{Hortik, } \vec{AB} = 2l \mathbf{j}, \quad \vec{CF} = l (\mathbf{i} - \mathbf{j} - \sqrt{2} \mathbf{k}), \quad \vec{DE} = l (\mathbf{i} + \mathbf{j} + \sqrt{2} \mathbf{k}),$$

$$\text{eta horien erresultantea: } \mathbf{R} = 2l (\mathbf{i} + \mathbf{j}), \quad \text{hots, } R = 2\sqrt{2} l.$$

Jatorriarekiko momentu osoa zuzenean kalkula daiteke:

$$\tau_O = \vec{OA} \wedge \vec{AB} + \vec{OD} \wedge \vec{DE} + \vec{OC} \wedge \vec{CF} = 2l^2 (-\sqrt{2} \mathbf{i} + \mathbf{k}).$$

Teorian ikusi dugunez, baldin eta $P (x, y, z)$ puntua ardatz zentralekoa bada, orduan

$$\tau_P = \tau_O + \vec{PO} \wedge \mathbf{R} = \lambda \mathbf{R}$$

da eta hortik, osagaien bidez λ parametroa ezabatuz,

$$\frac{-2\sqrt{2} l^2 + 2 l z}{2 l} = \frac{-2 l z}{2 l} = \frac{2 l^2 - 2 l x + 2 l y}{0},$$

alegia, ardatz zentralaren ekuazioak honakoak dira:

$$x - y = l,$$

$$z = \frac{\sqrt{2}}{2} l.$$

Eta momentu minimoa ondokoa da:

$$\tau = \frac{\tau_O \cdot \mathbf{R}}{R^2} \mathbf{R} = -\sqrt{2} l^2 (\mathbf{i} + \mathbf{k}).$$

ARIKETAK

- 1.- Lor bitez, $\mathbf{r} = x \mathbf{i} + y \mathbf{j} + z \mathbf{k}$ bektoreak ardatz koordinatuen norantza positiboekin osoturiko α , β eta γ angeluak eta froga bedi ezen $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$ dela.

$$\text{Emitza: } \cos \alpha = \frac{x}{r}, \quad \cos \beta = \frac{y}{r}, \quad \cos \gamma = \frac{z}{r}.$$

- 2.- a) Lor bedi, Q (-3, 6, 12) puntutik pasaturik $\mathbf{V} = 4 \mathbf{i} - \mathbf{j} + 3 \mathbf{k}$ bektorearen paraleloa den zuzenaren eta P (4, 5, -7) puntuaren arteko distantzia.
b) Halaber, lor bedi, Q puntutik pasaturik $\mathbf{V}$ bektorearen perpendikularra den planoaren eta P puntuaren arteko distantzia.

$$\text{Emitza: a) } 19,52. \quad \text{b) } 5,49.$$

- 3.- Froga bedi ezen bi bektoreren arteko baturaren eta kenduraren moduluak berdinak badira, orduan, bi bektore horiek elkarren perpendikularrak direla.
- 4.- Bektore ezagun baten, $\mathbf{a}$, eta ezezagun baten, $\mathbf{x}$, arteko biderkadura eskalarrek p balio du eta biderkadura bektorialaren moduluak b . Kalkula bedi $\mathbf{x}$ bektorearen modulua.

$$\text{Emitza: } |\mathbf{x}| = \frac{(p^2 + b^2)^{1/2}}{a}.$$

- 5.- $\mathbf{V}_1 = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\mathbf{V}_2 = 2\mathbf{i} + \mathbf{k}$, $\mathbf{V}_3 = 3\mathbf{j}$, $\mathbf{V}_4 = 4\mathbf{i} + 5\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$ bektoreak emanik, lor bitez a, b, c zenbakiak, $\mathbf{V}_4 = a \mathbf{V}_1 + b \mathbf{V}_2 + c \mathbf{V}_3$ izan dadin.

$$\text{Emitza: } 2, 1, 1.$$

- 6.- Puntu berean aplikaturiko $\mathbf{A} = \mathbf{i} + \mathbf{k}$ eta $\mathbf{B} = \mathbf{i} + \mathbf{j}$ bektoreek, plano bat eratzen dute.
a) Lor bedi, plano horren perpendikularra den $\mathbf{u}$ bektore unitarioa.
b) Lor bedi $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ norabideko $\mathbf{v}$ bektore unitarioa.
c) Lor bedi $\mathbf{u}$ -ren eta $\mathbf{v}$ -ren perpendikularra den $\mathbf{w}$ bektore unitarioa.

Emitza:

$$\mathbf{u} = \frac{1}{\sqrt{3}} (-\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}), \quad \mathbf{v} = \frac{1}{\sqrt{6}} (2\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}), \quad \mathbf{w} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\mathbf{j} - \mathbf{k}).$$

- 7.- Demagun $(7, 3, 1)$ puntuan aplikaturiko $\mathbf{F} = -3\mathbf{i} + \mathbf{j} + 5\mathbf{k}$ bektorea. Lor bitez:

- a) Bektore horren ardatzen jatorriarekiko momentua.
b) $(0, 10, 0)$ puntuarekiko momentua.

Eraitza: $14\mathbf{i} - 38\mathbf{j} + 16\mathbf{k} , -36\mathbf{i} -38\mathbf{j} -14\mathbf{k} .$

- 8.- $P(1, 3, 4)$, $Q(-2, 1, -1)$, $R(0, -3, 2)$ puntuak emanik, lor bedi PQR triangeluaren azalera.

Eraitza: $\frac{1}{2} \sqrt{933} .$

- 9.- Metodo bektorialak erabiliz, froga bedi triangeluen kosinuaren teorema.

- 10.- $\mathbf{V}_1 = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$ eta $\mathbf{V}_2 = 2\mathbf{i} - \mathbf{j}$ bektoreak $P_1(0, 0, 2)$ eta $P_2(2, -1, 0)$ puntuetan aplikaturik daude, hurrenez hurren. Lor bitez:

- a) P_1P_2 zuzenaren kosinu zuzentzaileak.
b) Erresultantea.
c) P_1 puntuarekiko momentua.
d) P_1P_2 ardatzarekiko momentua.
e) Ardatzen jatorriarekiko momentua.
f) Sistemaren aldaezin eskalarra.

Eraitza: $\frac{2}{3} , -\frac{1}{3} , -\frac{2}{3} ; 3\mathbf{i} + \mathbf{j} - 3\mathbf{k} ; -2\mathbf{i} - 4\mathbf{j} ;$
 $0 ; -4\mathbf{i} + 2\mathbf{j} ; -10 .$

- 11.- Demagun $P_1(2, 2, 0)$, $P_2(2, 1, 0)$, $P_3(x, y, 0)$ puntuetan hurrenez hurren aplikaturiko $\mathbf{A}_1 = 2\mathbf{i} + \mathbf{j}$, $\mathbf{A}_2 = \mathbf{i} - \mathbf{j}$, $\mathbf{A}_3 = a\mathbf{i} + b\mathbf{j}$ bektoreek eraturiko sistema. Lor bitez a eta b parametroak eta P_3 puntuaren koordinatuak, sistema hori orekan egon dadin.

Eraitza: $a = -3 , b = 0 .$
 x edozein, $y = \frac{5}{3} .$

- 12.- Adieraz ezazu $\mathbf{a} = \alpha\mathbf{i} + \beta\mathbf{j} + \gamma\mathbf{k}$ bektorearen norabidea duen eta $P_0(x_0, y_0, z_0)$ puntutik pasatzen den zuzenaren ekuazioa.

Eraitza: $x = x_0 + \lambda \alpha ; y = y_0 + \lambda \beta ; z = z_0 + \lambda \gamma .$

- 13.- Adieraz ezazu $\mathbf{a} = \alpha \mathbf{i} + \beta \mathbf{j} + \gamma \mathbf{k}$ bektorearekiko perpendikularra den eta $P_0(x_0, y_0, z_0)$ puntutik pasatzen den planoaren ekuazioa.

Emaitza: $\alpha(x - x_0) + \beta(y - y_0) + \gamma(z - z_0) = 0$.

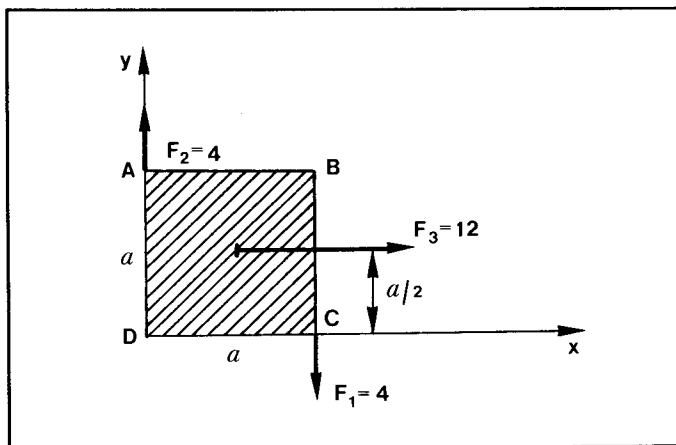
- 14.- Froga itzazu ondoko erlazioak:

$$\mathbf{a} \wedge (\mathbf{b} \wedge \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) \mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \mathbf{c}.$$

$$(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) \wedge (\mathbf{c} \wedge \mathbf{d}) = [\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \wedge \mathbf{d})] \mathbf{c} - [\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \wedge \mathbf{c})] \mathbf{d}.$$

$$(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{c} \wedge \mathbf{d}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{d}) - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{d})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}).$$

- 15.- Ondoko irudiko solido karratuan, bertan adierazitako indarrak eragiten ari dira.



Lor bitez:

- Sistemaren ardatz zentrala
- C erpinean ipini behar den indarra eta B eta D puntuetan jarri behar den indar-bikotea, hiruren artean irudiko sistemaren baliokidea lortzeko.

Emaitza: a) $y = \frac{10}{12} a$

b) $\mathbf{F}_C = 12 \mathbf{i}$

$$\mathbf{F}_{By} - \mathbf{F}_{Bx} = -10 ; \mathbf{F}_D = -\mathbf{F}_B$$

16.- Hiru bektore ez-planokide emanik, $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$, ondoko eran definituriko bektoreei *bektore erreziprokoak* deritze:

$$\mathbf{a}^1 = \frac{\mathbf{a}_2 \wedge \mathbf{a}_3}{m} ; \quad \mathbf{a}^2 = \frac{\mathbf{a}_3 \wedge \mathbf{a}_1}{m} ; \quad \mathbf{a}^3 = \frac{\mathbf{a}_1 \wedge \mathbf{a}_2}{m} ;$$

$$\text{non } m = \mathbf{a}_1 \cdot (\mathbf{a}_2 \wedge \mathbf{a}_3) \text{ den.}$$

a) Froga ezazu ezen ondoko erlazioak beteko direla:

$$\mathbf{a}^i \cdot \mathbf{a}_i = 1 \text{ eta } \mathbf{a}^i \cdot \mathbf{a}_j = 0 \quad (i, j = 1, 2, 3)$$

b) Eztabaida ezazu hiru bektore erreziprokoek hasierako $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ eta $\mathbf{a}_3$ bektoreekiko duten jarrera geometrikoa.

17.- $P_1(2, 1, 2)$ eta $P_2(1, 3, 0)$ puntuetan aplikaturiko $\mathbf{V}_1 = \mathbf{i} + \mathbf{k}$ eta $\mathbf{V}_2 = 2\mathbf{i} - \mathbf{j} - 2\mathbf{k}$ bektoreek eraturiko kurtsore-sistema kontutan hartuz, lor bedi, ardatzen jatorritik pasaturik, sistema berria bikote edo momentu baten baliokidea egingo duen kurtsorea. Zein da sistema berriaren momentu minimoa?

$$\text{Emaitza: } \mathbf{V}_3 = -3\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k} .$$

$$\mathbf{m} = -5\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 8\mathbf{k} .$$

3. GAIA

PUNTUAREN ZINEMATIKA

3.1. Partikula baten ibilbidea modu honetan adierazi da denboraren funtzioan:

$$\mathbf{r} = (3t^2 - t) \mathbf{i} + 2t^3 \mathbf{j} .$$

Lor bitez:

- a) Lehen aldiuneko abiadura eta azelerazioa ($t = 0$ denean).
- b) 5 segundu ($t = 5$) iragan ondoko abiadura eta azelerazioa.
- c) Azelerazioaren osagai tangente eta normala, aipaturiko bi kasuetan.
- d) Kurbadura-erradioa $t = 8$ denean.
- e) Ibilbidearen ekuazioaren adierazpen analitikoa.

a)

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = (6t - 1) \mathbf{i} + 6t^2 \mathbf{j} ,$$

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = 6 \mathbf{i} + 12t \mathbf{j} .$$

$t = 0$ aldiunean,

$$\mathbf{v}_0 = - \mathbf{i} ,$$

$$\mathbf{a}_0 = 6 \mathbf{i} .$$

b) $t = 5$ aldiunean, $\mathbf{v}_5 = (6 \cdot 5 - 1) \mathbf{i} + 6 \cdot 5^2 \mathbf{j} = 29 \mathbf{i} + 150 \mathbf{j} ,$

$$\mathbf{a}_5 = 6 \mathbf{i} + 12 \cdot 5 \mathbf{j} = 6 \mathbf{i} + 60 \mathbf{j} .$$

c) Teoriatik dakigunez,

$$a_T = \frac{dv}{dt} ,$$

$$a_N = \frac{v^2}{\rho} .$$

$$v = \sqrt{(6t - 1)^2 + 36t^4} ,$$

$$a_T = \frac{dv}{dt} = \frac{6 \cdot 2 (6t - 1) + 144t^3}{2\sqrt{(6t - 1)^2 + 36t^4}} ,$$

$t = 0$ aldiunean,

$$a_{T0} = \frac{-12}{2\sqrt{(-1)^2}} = -6 .$$

Bestalde, azelerazioaren osagai normala honela ere kalkula dezakegu,

$$a_N = \frac{v^2}{\rho} = \sqrt{a^2 - a_T^2} .$$

Eta $t = 0$ denean, $a = 6$ denez, $a_{N0} = 0$.

Zer esanik ez, a_{T5} eta a_{N5} modu berean kalkula daitezke.

d) Kurbadura-erradioa lortzeko honelaxe egin dezakegu:

$$a_N = \frac{v^2}{\rho} = \sqrt{a^2 - a_T^2} .$$

$$\text{Beraz,} \quad \rho = \frac{v^2}{\sqrt{a^2 - a_T^2}} .$$

$t = 8$ aldiunean v , a eta a_T magnitudeek harturiko balioez ordezkatzuz, erraz lortuko da kurbadura-erradioa.

$$e) \quad x = 3t^2 - t ,$$

$$y = 2t^3 ,$$

$$z = 0 .$$

Hiru ekuazio hauen multzoa da, berez, ibilbidearen ekuazioa; baina parametrikoki emana, t parametroaren funtzioan. Beraz, parametririk gabeko adierazpen analitikoa lortzeko, t parametroa ezabatu beharko dugu. Bigarren ekuaziotik,

$$t = \left[\frac{y}{2} \right]^{1/3} ,$$

eta lehenengora eramanez,

$$x = 3 \left[\frac{y}{2} \right]^{2/3} - \left[\frac{y}{2} \right]^{1/3} ,$$

$$z = 0 .$$

Ikus daitekeenez, ibilbidea Oxy planoan dago ($z = 0$).

3.2. Higitzen ari den gorputz baten koordenatuak ondoko hauek dira: $x = 2 \sin \omega t$; $y = 2 \cos \omega t$, non $\omega =$ ktea den.

- a) Lor bedi ibilbidearen ekuazio cartesiarra.
- b) Kalkula bedi abiaduraren balioa edozein aldiunetan.
- c) Kalkula bitez azelerazioaren osagai tangential eta normala edozein aldiunetan.
- d) Aurreko ekuazioak ikusirik, azal bedi higidura nolakoa den.

a) t parametroa ezabatu behar dugu:

$$x = 2 \sin \omega t \quad \longrightarrow \quad x^2 = 4 \sin^2 \omega t$$

$$y = 2 \cos \omega t \quad \longrightarrow \quad y^2 = 4 \cos^2 \omega t$$

$$\overline{x^2 + y^2 = 4} .$$

Eta hau $R = 2$ erradiodun zirkunferentzia baten ekuazioa da.

b)

$$\frac{dx}{dt} = 2 \omega \cos \omega t ,$$

$$\frac{dy}{dt} = -2 \omega \sin \omega t .$$

Beraz, abiadura hauze izango da:

$$\mathbf{v} = 2 \omega (\cos \omega t \mathbf{i} - \sin \omega t \mathbf{j}) .$$

c) Dakigunez,

$$\mathbf{a} = \frac{dv}{dt} \mathbf{u}_T + \frac{v^2}{\rho} \mathbf{u}_N .$$

Abiaduraren modulua ondokoa da:

$$v = \sqrt{4\omega^2 \cos^2 \omega t + 4\omega^2 \sin^2 \omega t} = 2\omega = \text{Ktea} .$$

Beraz,

$$\frac{dv}{dt} = 0 ,$$

$$a_N = \frac{v^2}{\rho} = \frac{4 \omega^2}{R} .$$

$$\text{Hots,} \quad \mathbf{a} = \frac{4 \omega^2}{R} \mathbf{u}_N .$$

d) Higidura hau zirkular uniforme da, zirkunferentzia batetan zehar gertatzen ari baita eta, bestalde, abiaduraren modulua ere konstantea baita.

3.3. Hasieran pausagunean dagoen gorputz bat (hots, $t = 0$ unean, $\theta = 0$, $\omega = 0$), azeleratu egin da $1,3 \text{ m}$ -tako erradiodun ibilbide zirkular batetan, $\alpha = 120 \text{ t}^2 - 48 \text{ t} + 16$

azelerazio angeluarraz. Lor bitez abiadura angeluarra eta posizio angeluarra denboraren funtzioan, eta bai azelerazioaren osagai tangentiala eta normala ere.

Dakigunez,

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} .$$

Hemendik, $\alpha dt = d\omega$. Eta integrazio-limiteak jarritz,

$$\int_0^{\omega} d\omega = \int_0^t \alpha dt ,$$

$$\omega = \int_0^t (120t^2 - 48t + 16) dt = \left[120 \frac{t^3}{3} - 48 \frac{t^2}{2} + 16t \right]_0^t ,$$

$$\omega = 40t^3 - 24t^2 + 16t .$$

Posizio angeluarra ere erraz lortuko dugu,

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} \longrightarrow \int_0^{\theta} d\theta = \int_0^t \omega dt ,$$

$$\theta = \left[40 \frac{t^4}{4} - 24 \frac{t^3}{3} + 16 \frac{t^2}{2} \right]_0^t ,$$

$$\theta = 10t^4 - 8t^3 + 8t^2 .$$

Higidura zirkular honetan, ondoko eran erdietsiko ditugu azelerazioaren osagai tangential eta normala:

$$a_T = \frac{dv}{dt} = R \alpha \longrightarrow a_T = 1,3 (120t^2 - 48t + 16) .$$

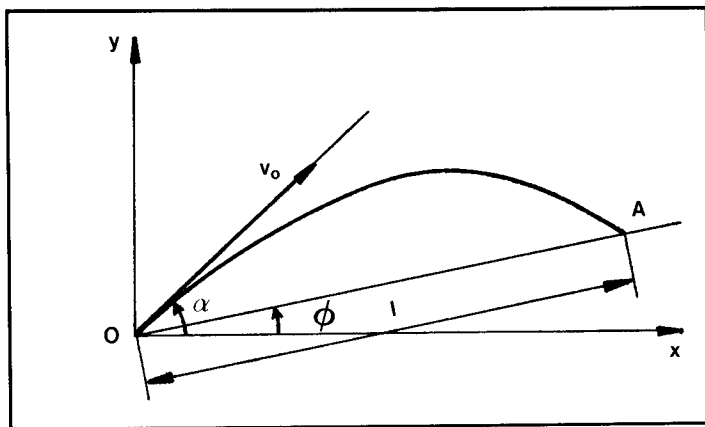
Bestalde $v = \omega R$ da, hots,

$$a_N = \frac{v^2}{\rho} = \frac{\omega^2 R^2}{R} \rightarrow a_N = 1,3 (40t^3 - 24t^2 + 16t)^2.$$

3.4. Kanoi bat muino baten behekaldean kokatu da, muinoak eta horizontalak eraturiko angelua ϕ delarik. Kanoiak projektila α angeluaz eta v_0 abiaduraz jaurtikitakoan, lor bedi kanoitik projektila eroriko deneko punturainoko distantzia, muinoan neurturik. Zein α angelurako lortuko da distantziarik handiena?

Teoriari esker dakigunez, eta irudiko koordenatu-ardatzak hartuz,

$$\begin{aligned} x &= v_0 t \cos \alpha, \\ y &= v_0 t \sin \alpha - \frac{1}{2} g t^2. \end{aligned}$$



A puntuan baldintza hau beteko da:

$$\frac{y}{x} = \operatorname{tg} \phi \quad \longrightarrow \quad y = x \operatorname{tg} \phi.$$

Beraz, lehengo ekuazioak erabiliz eta baldintza hori dela eta:

$$v_0 t \cos \alpha \operatorname{tg} \phi = v_0 t \sin \alpha - \frac{1}{2} g t^2 .$$

$$t \left(\frac{1}{2} g t + v_0 \cos \alpha \operatorname{tg} \phi - v_0 \sin \alpha \right) = 0 .$$

Ekuazio honek bi soluzio ditu:

$$t = 0 \quad \longrightarrow \quad O \text{ puntuari dagokio} ,$$

$$t_A = 2 \frac{v_0 \cos \alpha (\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \phi)}{g} .$$

Azkenean, t_A -ren funtzioan, x_A eta y_A lortuko ditugu:

$$x_A = v_0 t_A \cos \alpha = 2 \frac{v_0 \cos \alpha (\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \phi)}{g} ,$$

$$y_A = x_A \operatorname{tg} \phi = 2 \frac{v_0 \cos \alpha (\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \phi)}{g} \operatorname{tg} \phi .$$

Bukatzeko, $l^2 = x_A^2 + y_A^2$ eginik, problema ebatzirik dago, alegia,

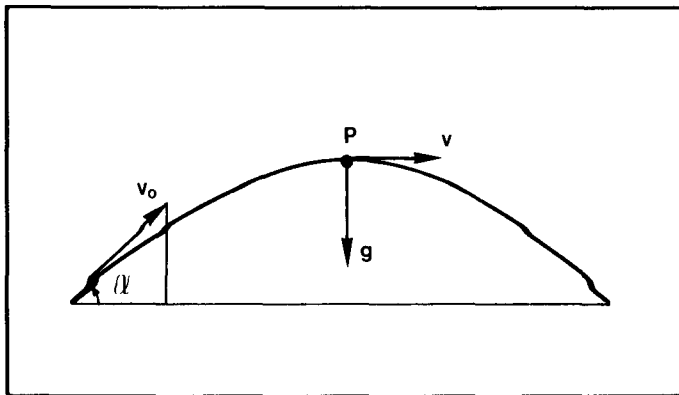
$$l = \frac{2 (\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \phi) v_0^2 \cos^2 \alpha}{g} \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \phi} .$$

Dakusagunez, l distantzia hori α angeluaren funtzioa da, beste parametro guztiak konstante gorderik. Beraz, beraren deribatua nulua egiten duen α angelua da lortu nahi duguna, hots,

$$\frac{dl}{d\alpha} = \frac{2 v_0^2 \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \phi}}{g} \cdot \left[\frac{1}{\cos^2 \alpha} \cdot \cos^2 \alpha - (\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \phi) 2 \cos \alpha \sin \alpha \right] = 0 .$$

Hortik lortutako α_m angelua da distantzia maximoari dagokiona.

3.5. Lor bedi α angeluaz eta v_0 abiaduraz jaurtikitako projektilaren ibilbidearen punturik goreneko kurbadura-erradioa.



Punturik altuenean,

$$a_T = 0 ; a_N = g .$$

Baina, bestalde dakigunez,

$$a_N = \frac{v^2}{\rho} .$$

Beraz,

$$\rho = \frac{v^2}{a_N} .$$

$$v = v_{0x} = v_0 \cos \alpha \quad \text{denez,}$$

$$\rho = \frac{v_0^2 \cos^2 \alpha}{g} .$$

ARIKETAK.

- 1.- Hasieran geldi dagoen gorputz puntual bat ($\theta = 0$ eta $\omega = 0$, $t = 0$ denean), $R = 2 \text{ m}$ -tako erradiodun ibilbide zirkular batetan azeleratuz joan da, $\alpha = 3t$ azelerazio angeluarraz.

- Lor bitez abiadura angeluarra (ω) eta posizio angeluarra (θ), denboraren funtzioan.
- Lor bitez azelerazioaren osagai tangential eta normala edozein aldiunetan.

Eraitza: a) $\omega = \frac{3}{2} t^2$; $\theta = \frac{1}{2} t^3$.

b) $a_T = 6 t$; $a_N = \frac{9}{2} t^4$.

- 2.- Partikula baten posizio-bektorea honela adierazi da denboraren funtzioan: $\mathbf{r} = t^2 \mathbf{i} + 2t^3 \mathbf{j}$ (luzerak metroan eta denbora segundotan). Kalkula itzazu:

- Partikularen posizioa, abiadura eta azelerazioa $t = 1$ aldiunean.
- Azelerazioaren osagai tangential eta normala aldiune berean.
- Azelerazioaren osagai erradial eta transbertsala aldiune berean.
- Ibilbidearen kurbadura-erradioa aldiune horretan.
- Ibilbidearen ekuazio kartesiarra.

Eraitza: a) $\mathbf{r}(1) = \mathbf{i} + 2 \mathbf{j}$; $\mathbf{v}(1) = 2 \mathbf{i} + 6 \mathbf{j}$; $\mathbf{a}(1) = 2 \mathbf{i} + 12 \mathbf{j}$.

b) $12,02 \text{ m s}^{-2}$; $1,9 \text{ m s}^{-2}$.

c) $11,63 \text{ m s}^{-2}$; $3,58 \text{ m s}^{-2}$.

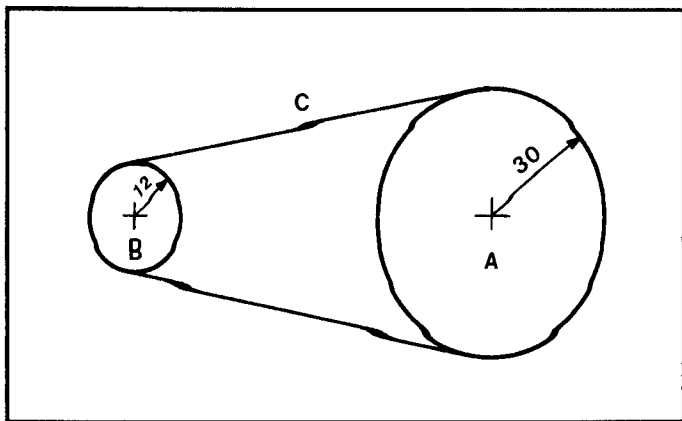
d) $21,05 \text{ m}$.

e) $y = 2 x^{3/2}$.

- 3.- Partikula bat plano batetan higitzen ari da, beraren ordenatua $y = at$ eta angelu polarra $\theta = bt$ izanik. Lor bedi partikularen ibilbidearen ekuazioa.

Eraitza: $r = \frac{a\theta}{b \sin\theta}$.

- 4.- A gurpilak 30 cm-tako erradioa du eta pausagunetik hasirik beraren abiadura angeluarra uniformeki emendatuz doa $0,4 \pi \text{ s}^{-2}$ azelerazio angeluarraz. Gurpil horrek B gurpila martxan jarri du (12 cm-tako erradioduna) C uhalaren bidez.



Lor bedi bi gurpilen azelerazio angeluarren arteko erlazioa. Zenbat denbora beharko du B gurpilak 300 bira/minutu balioko abiadura erdiesteko?

Emaitza: $\alpha_B / \alpha_A = 2,5 ; 10 \text{ s} .$

- 5.- v abiadura kostanteaz higitzen ari den tren baten barnean, gorputz bat erortzen utzi da. Zein da gorputzaren ibilbidea?
 a) Treneko erreferentzialarekikoa.
 b) Trenbidean geldi dagoen sistemarekikoa.

Emaitza: a) Zuzen bertikala. b) Parabola.

- 6.- Partikula batek plano batetan duen higidura, honela adierazi da denboraren funtzioan:

$$\mathbf{r} = (t^2 + 4t + 3) \mathbf{i} + (t + 1) \mathbf{j}$$

Kalkula itzazu:

- a) Ibilbidearen ekuazio kartesiarra. Zer eratako kurba da?
 b) Azelerazioaren osagai normal eta tangenziala, jatorritik pasatu den aldiunean.
 c) Aldiune horretan -hots, jatorritik pasatzean- lor bedi ibilbidearen kurbadura-erradioa.

Emaitza: a) $x = y^2 + 2y$. Parabola.

b) $a_T = \frac{4\sqrt{5}}{5}$; $a_N = \frac{2\sqrt{5}}{5}$.

$$c) \rho = \frac{5\sqrt{5}}{2} .$$

- 7.- Bi gorputz aldiune berean eta puntu beretik utzi dira erortzen, baina lehenengoari beherantz $v_0 = 1 \text{ m s}^{-1}$ hasierako abiadura eman zaion bitartean, bigarrena hasierako abiadura nuluaz hasi da erortzen. Zein aldiunetan izango da bien arteko distantzia 18 m-takoa?

$$\text{Emitza: } t = 18 \text{ s} .$$

- 8.- Higidura zuzena duen partikula bat $a = -2x$ balio duen azelerazioa jasaten ari da. Lor bedi v abiaduraren eta x posizioaren arteko erlazioa, baldin eta $x = 0$ denean $v = 4 \text{ m s}^{-1}$ bada.

$$\text{Emitza: } v = \sqrt{16 - 2x^2} .$$

- 9.- Baldin eta azelerazioaren eta abiaduraren arteko erlazioa $a = 32 - 4v$ bada, eta $t = 0$ denean $x = 0$ eta $v = 4$ badira, lor bitez $v(t)$, $x(t)$ eta $x(v)$.

$$\begin{aligned} \text{Emitza: } v(t) &= 4(2 - e^{-4t}) , \\ x(t) &= e^{-4t} + 8t - 1 , \\ 4x &= 4 - v + 8 \ln \frac{4}{8 - v} . \end{aligned}$$

- 10.- Etxe baten teilatuaren ertzean dagoen gizon batek, harri bat jaurtiki du gorantz 20 m s^{-1} -tako abiaduraz. Harria kalera 7 s geroago heldu bada, lor bedi etxearen altuera.

$$\text{Emitza: } h = 100,1 \text{ m} .$$

- 11.- Ehiztari batek bere bizi-puntu bakarrean apuntatuz egin dio tiro zuhaitz baten abarrean dagoen urtxintxa bati. Tirocketaren aldiunean, urtxintxak bere burua erortzen utzi du abarretik lurrera. Froga ezazu ezen, bizirik irauteko, urtxintxak geldi egotea besterik behar ez zuela eta, alderantziz, egin zezakeen higidurarik txarrena egin duela.

- 12.- Hegazkin bat horizontalki higitzen ari da h altueran eta v abiaduraz. Hegazkina kanoi baten gaineko bertikaletik pasatu den aldiunean,

kanoiak tiro egin du. Kalkula ezazu zenbat balio behar duen v_0 abiadura minimoak, projektalak hegazkina jo ahal dezan. Halaber, kalkula ezazu abiadura minimoa erabiliz zein α angeluz jautiki behar den projektila, helburu hori lortzeko.

Eraitza:
$$v_0 = \sqrt{v^2 + 2 g h} ,$$
$$\alpha = \arctg \sqrt{\frac{2 g h}{v^2}} .$$

4. GAIA

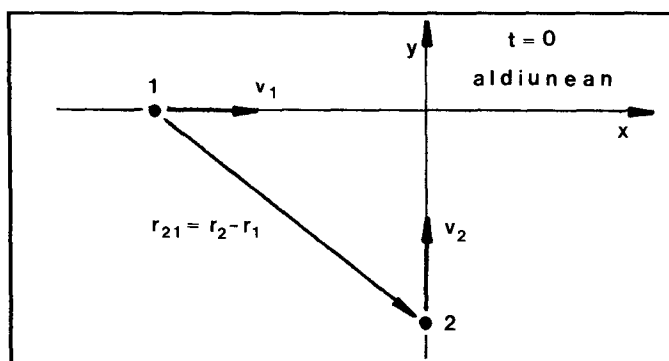
HIGIDURA ERLATIBOA

4.1. 1 eta 2 izeneko partikulak Ox eta Oy ardatzetan higitzen ari dira $v_1 = 2 \text{ i m/s}$ eta $v_2 = 3 \text{ j m/s}$ abiadurez, hurrenez hurren. $t = 0$ aldiunean, haien posizio-bektoreak ondoko hauexek dira:

$$\mathbf{r}_1 = -3 \text{ i} , \quad \mathbf{r}_2 = -3 \text{ j} .$$

Lor bitez:

- 2 partikularen 1 partikularekiko posizioa adieraziko duen $\mathbf{r}_{21}$ bektorea.
- 2 partikularen 1 partikularekiko abiadura.
- Noiz daude partikulok elkarretik hurbilen?



a) Bi partikulak abiadura konstantez higitzen ari direnez, hauexek izango dira beraien posizio-bektoreak:

$$\mathbf{r}_1 = (-3 + 2t) \text{ i} + 0 \text{ j}$$

$$\mathbf{r}_2 = 0 \text{ i} + (-3 + 3t) \text{ j}$$

$$\mathbf{r}_{21} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1 = (3 - 2t) \text{ i} + (3t - 3) \text{ j} .$$

b) Denborarekiko deribatuz, abiadura erlatiboa erdietsiko dugu:

$$\mathbf{v}_{21} = \frac{d \mathbf{r}_{21}}{dt} = \frac{d \mathbf{r}_2}{dt} - \frac{d \mathbf{r}_1}{dt} .$$

Honelatan, bada:

$$\mathbf{v}_{21} = -2 \text{ i} + 3 \text{ j} .$$

c) Hurbilen non dauden ikusteko, lehenik distantzia lortu behar dugu, hots r_{21} bektorearen modulua:

$$|r_2 - r_1| = \sqrt{(3 - 2t)^2 + (3t - 3)^2} \quad .$$

Eta hau, denboraren funtzioa delarik, handien edo txikien izan dadin, beronen denborarekiko deribatua anulatu egin beharko da:

$$\frac{d |r_2 - r_1|}{dt} = 0 \quad .$$

Deribatuz:

$$\frac{2(-2)(3 - 2t) + 2 \cdot 3(3t - 3)}{2\sqrt{(3 - 2t)^2 + (3t - 3)^2}} = 0 \quad .$$

Beraz, ekuazio hau dugu:

$$-12 + 8t + 18t - 18 = 0 \longrightarrow t = \frac{15}{13} \quad .$$

Alegia, aldiune horretan ($t = 15/13$ denean) daude hurbilen.

4.2. Bere autoan 80 km/h-tako abiaduraz euripean doalarik, alboko leihatilan ur-tantek bertikalarekin 80°-tako angelua osatu dutela ikusi du gizon batek. Autoa gelditurik, izatez tantak bertikalki jausten ari direla dakusa.

Lor bedi euri-tantek autoarekiko duten abiadura erlatiboa:

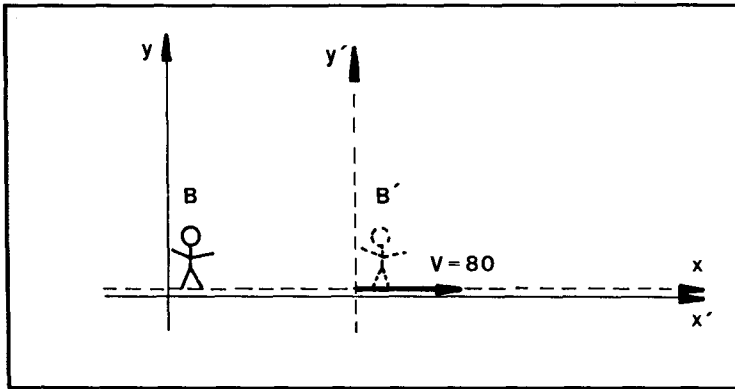
a) geldirik dagoenean.

b) 80 km/h-tako abiaduraz higitzen ari denean.

Bi behatzaile (edo erreferentzi sistema) desberdin daude:

B : geldi dagoena

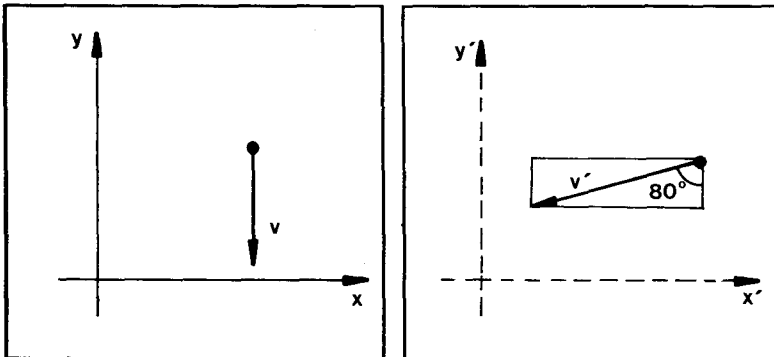
B' : autoan doana ($V = 80$ km/h-tako abiaduraz)



B' translazio-abiadura konstantez higitzen da B -rekiko. Beraz, biek neurtzen dituzten abiaduren arteko erlazioa, ondoko hau izango da:

$$\mathbf{v} = \mathbf{V} + \mathbf{v}'$$

Euri-tanten abiadura honelaxe adieraz daiteke bi sistemetan:



Bestalde, $\mathbf{V} = 80 \mathbf{i}$ (km/h) da.

Beraz, lehengo adierazpena erabiliz:

$$-v \mathbf{j} = 80 \mathbf{i} - v' \sin 80 \mathbf{i} - v' \cos 80 \mathbf{j}$$

$$v = v' \cos 80$$

$$0 = 80 - v' \sin 80$$

Hemendik ondokoak lortuko ditugu:

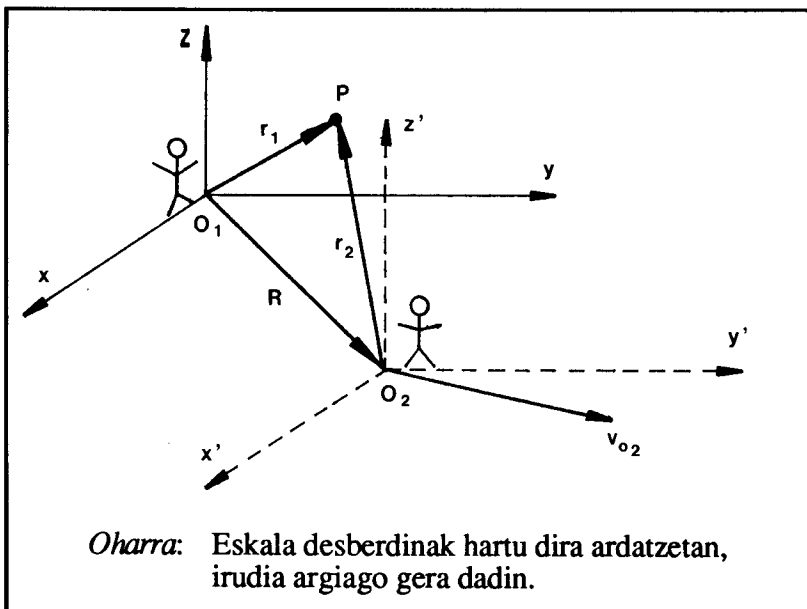
$$v = \frac{80}{\tan 80} \quad ; \quad v' = \frac{80}{\sin 80}$$

4.3. Erreferentzi sistema batetan geldi dagoen O_1 behatzailea, ondoko posizio-bektorea duen partikula bat behatzen ari da:

$$\mathbf{r}_1 = (t^3 - t^2 + 2)\mathbf{i} + (t^2 - 1)\mathbf{j} + (2t - 2)\mathbf{k}.$$

O_2 behatzailea $\mathbf{v}_{O2} = 3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$ abiaduraz higitzen ari da O_1 behatzailearekiko. Behatzaile biak (edo hobeto esan, beren sistemen jatorriak) toki berean daude $t = 0$ aldiunean, eta beren sistemak paraleloki higitzen ari dira elkarrekiko. Lor bitez:

- O_1 behatzailearekiko $\mathbf{r}_2(t)$ posizio-bektorea.
- Behatzaile biekiko, partikularen posizioa, abiadura eta azelerazioa $t = 5\text{ s}$ aldiunean.
- Zergatik balio dute berdin sistema biekiko azelerazioek?



a) Alboko irudian argi ikus daitekeenez:

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{R} + \mathbf{r}_2.$$

Bestalde,

$$\mathbf{R} = \mathbf{v}_{O2} t = 3t\mathbf{i} + 2t\mathbf{j} - t\mathbf{k}.$$

Beraz, denetara:

$$\mathbf{r}_2 = (t^3 - t^2 + 2 - 3t)\mathbf{i} + (t^2 - 2t - 1)\mathbf{j} + (3t - 2)\mathbf{k}.$$

$$b) \mathbf{r}_1 = (t^3 - t^2 + 2)\mathbf{i} + (t^2 - 1)\mathbf{j} + (2t - 2)\mathbf{k} ,$$

$$\mathbf{v}_1 = \frac{d\mathbf{r}_1}{dt} = (3t^2 - 2t)\mathbf{i} + 2t\mathbf{j} + 2\mathbf{k} ,$$

$$\mathbf{a}_1 = \frac{d\mathbf{v}_1}{dt} = (6t - 2)\mathbf{i} + 2\mathbf{j} .$$

$t = 5$ aldiunean, ondokoa dugu:

$$\mathbf{r}_1(5) = 102\mathbf{i} + 24\mathbf{j} + 8\mathbf{k} ,$$

$$\mathbf{v}_1(5) = 65\mathbf{i} + 10\mathbf{j} + 2\mathbf{k} ,$$

$$\mathbf{a}_1(5) = 28\mathbf{i} + 2\mathbf{j} .$$

O_2 behatzailearen neurketak hauexek izango dira:

$$\mathbf{r}_2 = (t^3 - t^2 - 3t + 2)\mathbf{i} + (t^2 - 2t - 1)\mathbf{j} + (3t - 2)\mathbf{k} ,$$

$$\mathbf{v}_2 = \frac{d\mathbf{r}_2}{dt} = (3t^2 - 2t - 3)\mathbf{i} + (2t - 2)\mathbf{j} + 3\mathbf{k} ,$$

$$\mathbf{a}_2 = \frac{d\mathbf{v}_2}{dt} = (6t - 2)\mathbf{i} + 2\mathbf{j} .$$

Eta $t = 5$ aldiunean,

$$\mathbf{r}_2(5) = 87\mathbf{i} + 14\mathbf{j} + 13\mathbf{k} ,$$

$$\mathbf{v}_2(5) = 62\mathbf{i} + 8\mathbf{j} + 3\mathbf{k} ,$$

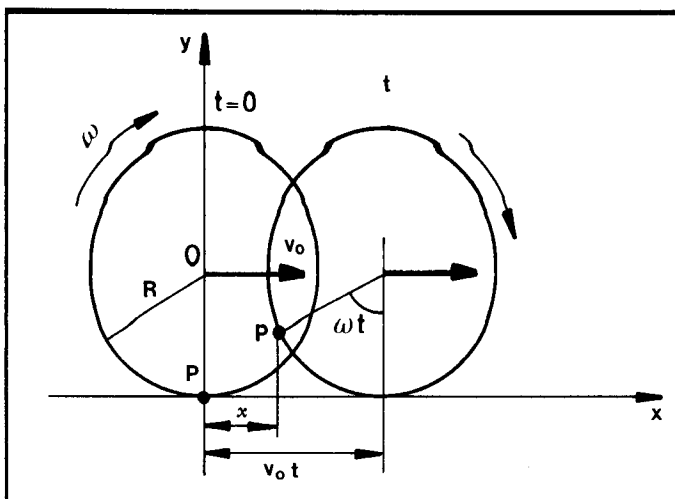
$$\mathbf{a}_2(5) = 28\mathbf{i} + 2\mathbf{j} .$$

c) Azelerazio biek balio berbera dute ($\mathbf{a}_1 = \mathbf{a}_2$), bi behatzaileak, elkarrekiko, abiadura konstanteaz eta paraleloki higitzen ari bait dira, hots, bien arteko transformazioa galilearra da eta.

4.4. R erradiodun disko bat v_O abiadura konstanteaz errotatzen ari da plano horizontal baten gainean. Froga bedi, ezen beraren ertzean dagoen edozein punturen posizioa $x = R(\omega t - \sin \omega t)$ eta $y = R(1 - \cos \omega t)$ ekuazioez

adieraz daitekeela, $\omega = v_0 / R$ delakoa diskoaren abiadura angeluarra izanik eta t , puntu hori planoarekin kontaktuan dagoenetik neurturik egonik. Halabér, lor bitez puntuaren abiadura eta azelerazioa. Froga ezazue, kontaktu-puntua diskoaren edozein punturen aldiuneko biraketa-zentrua dela.

Bi modu desberdinez ebatziko dugu problema hau. Lehenik, metodo geometrikoa erabiliko dugu.



a) Irudian diskoaren bi posizio adierazi dira ($t = 0$ eta $t = t$ aldiuneetan). Bietan ageri da P puntua. xy ardatzak ($t = 0$ aldiunean) erreferentziatzen hartuz, P puntuak $t = t$ aldiunean dituen koordenatuak lortu behar ditugu. Irudiaren arauera,

$$\begin{aligned} x &= v_0 t - R \sin \omega t & x &= R (\omega t - \sin \omega t) \\ y &= R - R \cos \omega t & y &= R (1 - \cos \omega t) \end{aligned} \quad , \text{hots,}$$

Beraz, frogaturik dago enuntziatukoa.

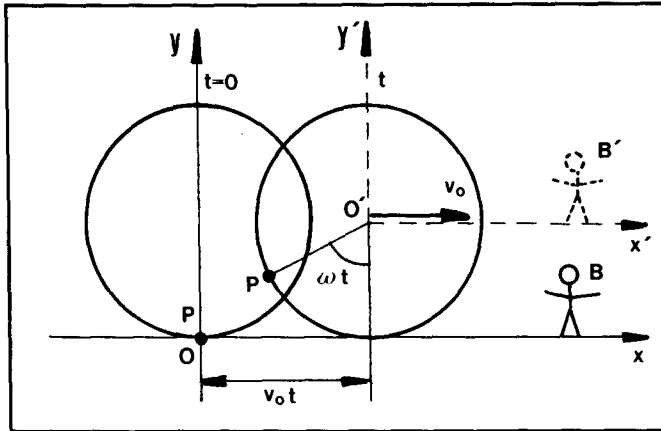
Abiadura eta azelerazioa erraz lor daitezke (P puntuarenak, noski):

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= R (\omega t - \sin \omega t) \mathbf{i} + R (1 - \cos \omega t) \mathbf{j} \quad , \\ \mathbf{v} &= \frac{d\mathbf{r}}{dt} = R \omega (1 - \cos \omega t) \mathbf{i} + R \omega \sin \omega t \mathbf{j} \quad , \\ \mathbf{a} &= \frac{d\mathbf{v}}{dt} = +R \omega^2 \sin \omega t \mathbf{i} + R \omega^2 \cos \omega t \mathbf{j} \quad . \end{aligned}$$

Azelerazioaren modulua hau da:

$$a = \sqrt{R^2 \omega^4 \sin^2 \omega t + R^2 \omega^4 \cos^2 \omega t} = R \omega^2 \quad .$$

- b) Beste metodo batez ere ebatz dezakegu, higidura erlatiboaren ekuazioak erabiliz.



Bi erreferentzi sistema ditugu. Bata (Oxy) geldi dago, eta bestea ($O'x'y'$) abiadura konstanteaz higitzen ari da eskuinetarantz. Hasierako aldiunean, $t = 0$, Oy eta $O'y'$ ardatzak toki berean zeuden eta gero paraleloki higitu dira. $t = t$ aldiunean $v_A = 0$ B behatzailearekiko, diskoa errotatzen ari bait da. Baina B' behatzailearekiko, hots, $O'x'y'$ sisteman, P puntuak abiadura zirkular uniforme du. Beraz,

$$\mathbf{v}'_A = -\omega R \mathbf{i} .$$

Eta higidura erlatiboaren ekuazioak erabiliz,

$$\mathbf{v}_A = \mathbf{v}_O + \mathbf{v}'_A ,$$

$$0 = v_O \mathbf{i} - \omega R \mathbf{i} \longrightarrow \omega = \frac{v_O}{R} .$$

Datu hau enuntziatuak berak eman digu. Orain posizio-bektoreak kontsideratuz,

$$\mathbf{r} = \mathbf{R} + \mathbf{r}' .$$

P puntuaren kasuan,

$$\mathbf{r} = x \mathbf{i} + y \mathbf{j} ,$$

$$\mathbf{R} = v_O t \mathbf{i} + R \mathbf{j} ,$$

$$\mathbf{r}' = -R \sin \omega t \mathbf{i} - R \cos \omega t \mathbf{j} .$$

Beraz, kalkuluak burutuz, azkenean ondokoa dugu:

$$x = R (\omega t - \sin \omega t) ,$$

$$y = R (1 - \cos \omega t) .$$

hots, frogatu nahi genuena hain zuzen ere.

c) Bukatzeko, kontaktu-puntua diskoaren edozein punturen aldiuneko biraketa-zentrua dela frogatzeko, nahikoa da, P puntuaren abiadura eta AP bektoreak elkarren perpendikularrak direla frogatzea. Hori nabariki ikus daiteke bi bektore hauen osagaiak ipiniz:

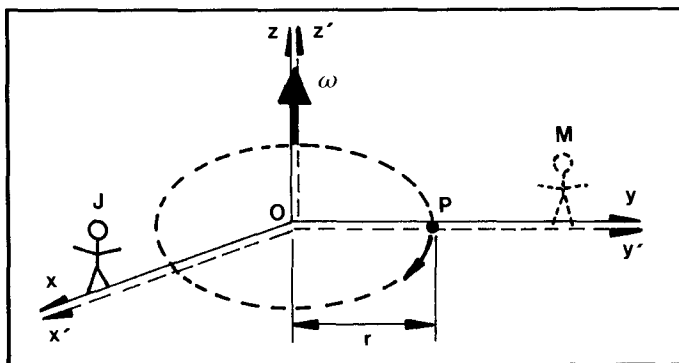
$$\mathbf{v}_P = R \omega (1 - \cos \omega t) \mathbf{i} + R \omega \sin \omega t \mathbf{j}$$

$$\mathbf{v}_P \wedge \mathbf{AP} = 0 .$$

$$\mathbf{AP} = -R \sin \omega t \mathbf{i} + R (1 - \cos \omega t) \mathbf{j}$$

4.5. Mikel eta Jon Σ' ($Ox'y'z'$) eta Σ ($Oxyz$) sistemetatik egiten ari dira beren behaketak, hurrenez hurren. Σ' sistema ω k abiaduraz higitzen ari da Σ sistemarekiko, sistema biek jatorri berbera eta Oz ardatz berbera dutelarik. Biak ari dira gorputz bat behatzen. Jonen ikuspegitik puntu hori geldi dago Oz ardatzetik r distantziara. Zein da Mikelen ikuspegitik gorputz horrek duen azelerazio erlatiboa? Eta Mikelek dakusan Coriolis-en azelerazioa?.

Kalkuluak errazteko, P puntua Oy ardatzean kokatuko dugu Oz ardatzetik r distantziara. Eta t aldiunean bi sistemen egoera erlatiboa irudian ageri dena dela joko dugu.



Enuntziatuaren arauera, Jonen ikuspegitik,

$$\mathbf{v} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{a} = \mathbf{0}.$$

Higidura zirkular uniformearen denez, bi behatzaileen neurketen artean ondoko erlazioak beteko dira (teorian ikusitakoaren arauera):

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}',$$

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}' + \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{r}'.$$

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}' + \boldsymbol{\omega} \wedge (\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{r}') + 2 \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{v}'.$$

Guk $\mathbf{a}'$ lortu behar dugu.

$$\mathbf{a}' = \mathbf{a} - \boldsymbol{\omega} \wedge (\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{r}') - 2 \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{v}'.$$

Beraz, lehenik $\mathbf{v}'$ lortu behar dugu.

$$\mathbf{v}' = \mathbf{v} - \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{r}',$$

$$\boldsymbol{\omega} = \omega \mathbf{k}$$

$$\mathbf{r}' = r \mathbf{j}$$

$$\longrightarrow \mathbf{v}' = \omega r \mathbf{i}.$$

Eta hau aurrekora eramanez, azkenean ondokoa dugu:

$$\mathbf{a}' = -\omega^2 r \mathbf{j}.$$

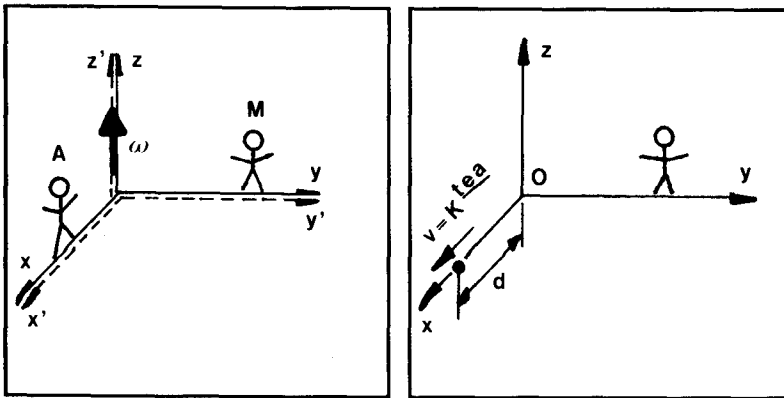
Ikus daitekeenez, higidura zirkular uniformeari dagokion azelerazioa zentripetua da. Hori normala da, Mikelek P puntua higidura zirkular uniformeaz higitzen bait dakusa.

Mikelek dakusan Coriolis-en azelerazioa haxe izango da:

$$-2 \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{v}' = -2 \omega^2 r \mathbf{j}.$$

Oharra: Bi ardatz sistemak t aldiunean kointzidenteak aukeratzean, $\mathbf{i} = \mathbf{i}'$, $\mathbf{j} = \mathbf{j}'$, $\mathbf{k} = \mathbf{k}'$ direnez, biziki erraztuko dira kalkuluak.

4.6. Alaitz eta Mainer $\Sigma' (Ox'y'z')$ eta $\Sigma (Oxyz)$ sistemetako behatzaileak dira. Σ' sistema $\omega \mathbf{k}$ abiadura angeluarraz higitzen ari da Σ sistemarekiko. Biak ari dira partikula berberaren higidura aztertzen. Mainerren eritziz, partikula horren higidura askea da, hots, abiadura konstanteaz, eta Oxy planoan gertatzen ari da Ox ardatzaren norabidean. Zeintzu dira Alaitzen ikuspegitik partikularen azelerazioaren osagai erradial eta transbertsala?



Aurreko problemaman bezala eta arrazoi berberengatik, bi erreferentzi sistemen ardatzak norabide berekoak hartuko ditugu.

$\mathbf{a}'$ azelerazioa lortu behar dugu. Erabili behar diren ekuazioak hauexek dira:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}' + \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{r}'$$

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}' + \boldsymbol{\omega} \wedge (\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{r}') + 2 \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{v}'$$

Ezagunak diren datuak hauexek dira:

$$\mathbf{v} = v \mathbf{i}$$

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r} = d \mathbf{i}$$

$$\mathbf{a} = 0$$

$$\boldsymbol{\omega} = \omega \mathbf{k}$$

Lehenik $\mathbf{v}'$ lortuko dugu:

$$\mathbf{v}' = \mathbf{v} - \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{r}' = v \mathbf{u}_r' - \omega d \mathbf{u}_\theta'.$$

Ondoren, azelerazioa:

$$\mathbf{a}' = -\boldsymbol{\omega} \wedge (\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{r}') - 2 \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{v}',$$

$$\mathbf{a}' = -\omega^2 d \mathbf{u}_r' - 2 \omega v \mathbf{u}_\theta'.$$

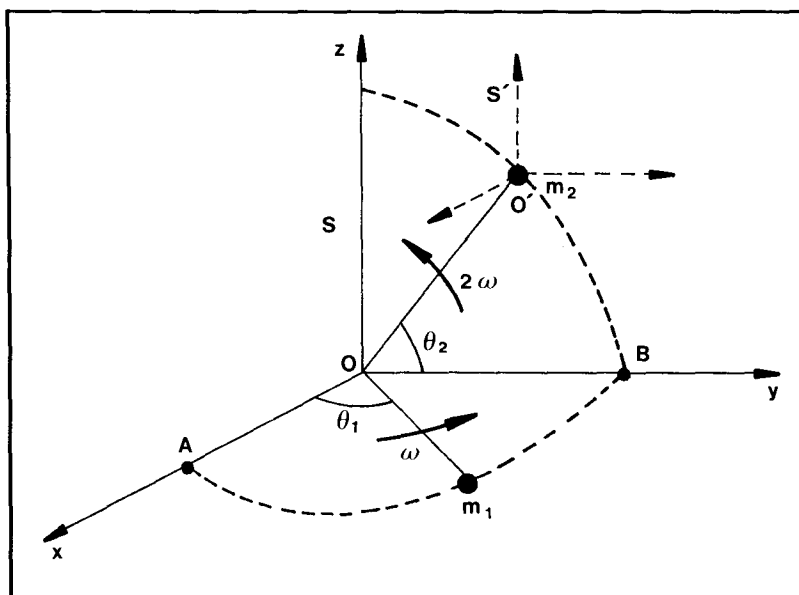
Puntu horretan norabide erradiala Ox ardatzarene denez, azelerazioaren osagai erradiala

$$a_r' = -\omega^2 d$$

da eta osagai transbertsala, ondokoa:

$$a'_{\theta} = -2\omega v \quad .$$

- 4.7. Bi masa aldiune berean irten dira A eta B puntuetatik, biek higidura zirkular uniformeak dutelarik. Lehenengo masa Oxy planoan higitzen ari da ω abiadura angeluarraz eta bigarrena Oyz planoan 2ω abiadura angeluarraz. Demagun m_2 masarekin joanik $Oxyz$ ardatzen paraleloa den S' sistema. Lor bitez m_1 partikularen posizioa, abiadura eta azelerazioa S' sistemarekiko. Emaitza horiek S' sistema inertziala izan ala ez izatearen menpekotasunik al dute? Zergatik?



Problema hau ebazteko, higidura erlatibo orokorreko adierazpenak erabiliko ditugu, ondokoak, alegia:

$$\mathbf{r} = \mathbf{R} + \mathbf{r}' \quad ,$$

$$\mathbf{v} = \mathbf{V} + \mathbf{v}' + \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{r}' \quad ,$$

$$\mathbf{a} = \mathbf{A} + \mathbf{a}' + \boldsymbol{\omega} \wedge (\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{r}') + \dot{\boldsymbol{\omega}} \wedge \mathbf{r}' + 2 \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{v}' \quad .$$

Baina S' sistemaren ardatzak etengabe S sistemarenekin paraleloak direla

kontutan hartuz, aurreko formuletan jarri behar den ω abiadura nulua da. Beraz, honako hau dugu:

$$\mathbf{r} = \mathbf{R} + \mathbf{r}' ,$$

$$\mathbf{v} = \mathbf{V} + \mathbf{v}' ,$$

$$\mathbf{a} = \mathbf{A} + \mathbf{a}' .$$

Beraz, atzetik aurrera hasita, inertziala izan ala ez izan $\mathbf{A}$ azelerazio horretan igarriko da noski. Gure kasuan argi dago S' sistema ez dela inertziala, zeren, biraketarik jasan ez arren ere, beraren jatorriak azelerazio ez-nulua bait du.

Aurreko adierazpenak, ondoko baliokidetzak erabiliz aplikatuko ditugu:

$$\mathbf{r} \equiv \mathbf{r}_1 , \quad \mathbf{r}' \equiv \mathbf{r}'_1 , \quad \mathbf{R} \equiv \mathbf{r}_2 \equiv \mathbf{r}_{O'} .$$

Hau da, gure kasuan era honetan geratuko dira higidura erlatiboari dagozkion formulak:

$$\mathbf{r}'_1 = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2 ,$$

$$\mathbf{v}'_1 = \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 ,$$

$$\mathbf{a}'_1 = \mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2 .$$

Bestetik, ordezkapenak egiteko, iruditik bertatik zuzenean balio hauek idatz ditzakegu:

$$\mathbf{r}_1 = R \cos \omega t \, \mathbf{i} + R \sin \omega t \, \mathbf{j} ,$$

$$\mathbf{v}_1 = -\omega R \sin \omega t \, \mathbf{i} + \omega R \cos \omega t \, \mathbf{j} ,$$

$$\mathbf{a}_1 = -\omega^2 R \cos \omega t \, \mathbf{i} - \omega^2 R \sin \omega t \, \mathbf{j} ,$$

$$\mathbf{r}_2 = R \cos 2\omega t \, \mathbf{j} + R \sin 2\omega t \, \mathbf{k} ,$$

$$\mathbf{v}_2 = -2\omega R \sin 2\omega t \, \mathbf{j} + 2\omega R \cos 2\omega t \, \mathbf{k} ,$$

$$\mathbf{a}_2 = -4\omega^2 R \cos 2\omega t \, \mathbf{j} - 4\omega^2 R \sin 2\omega t \, \mathbf{k} .$$

Azkenean emaitza hauek lortuko ditugu:

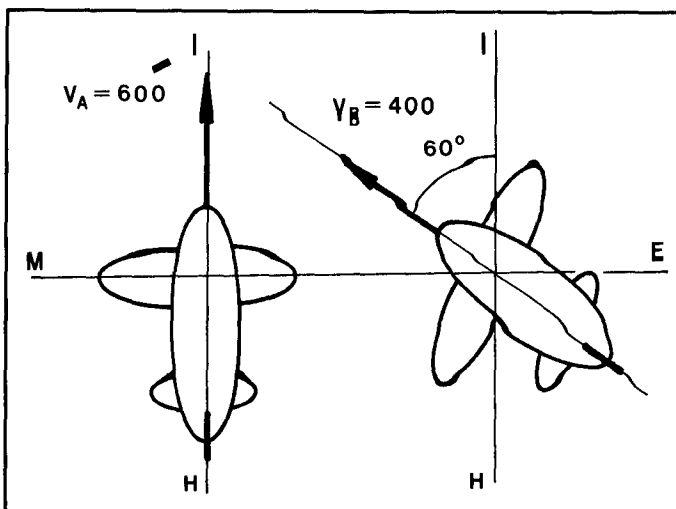
$$\mathbf{r}'_1 = R \cos \omega t \, \mathbf{i} + R (\sin \omega t \cdot \cos 2\omega t) \, \mathbf{j} - R \sin 2\omega t \, \mathbf{k} ,$$

$$\mathbf{v}'_1 = -\omega R \sin \omega t \, \mathbf{i} + \omega R (\cos \omega t + 2 \sin 2\omega t) \, \mathbf{j} - 2\omega R \cos 2\omega t \, \mathbf{k} ,$$

$$\mathbf{a}'_1 = -\omega^2 R \cos \omega t \, \mathbf{i} - \omega^2 R (\sin \omega t - 4 \cos 2\omega t) \, \mathbf{j} + 4\omega^2 R \sin 2\omega t \, \mathbf{k} .$$

ARIKETAK

- 1.- A hegazkina Iparralderantz higitzen ari da Lurrarekiko 600 km/h -tako abiaduraz. Une berean, beste hegazkin bat I- 60° -M norabideaz higitzen ari da 400 km/h -tako abiaduraz. Lor bedi A-k B-rekiko duen abiadura (ikus irudia).



Emaitza: $v_{AB} = 529,2 \text{ km/h}$, I- $40,7^\circ$ -E norabideaz.

- 2.- Airea geldi egonik, soinuaren abiadura 358 m/s -takoa da 25°C -tan eta airetan. Soinu-iturria ere geldi dagoela kontutan hartuz, lor bedi 90 km/h -tako abiaduraz higitzen ari den behatzaileak bere higiduraren norabidean neurturiko soinuaren abiadura:
- Iturriantz hurbiltzean.
 - Iturritik urruntzean.
 - Kontsidera dezagun soinu-iturria eta iturriantz doan behatzailea lotuko dituen lerroa. Zein da, behatzaileak lerro horren norabide perpendikularrean neurtuko duen soinuaren abiadura?

Emaitza: a) 383 m/s .
 b) 333 m/s .
 c) $357,1 \text{ m/s}$.

- 3.- Txalupa batek urarekiko duen norabidea I- 60° -M da, beti ere urarekiko abiadura 4 km/h -takoa delarik. Baina uretan korrontea dago; eta denetara txalupak Lurrarekiko duen abiadura, Mendebalderanzkoa eta 5 km/h -tako baliokoa da. Lor bedi korrontea Lurrarekiko duen abiadura eta beraren norabidea.

Emaitza: $2,52 \text{ km/h}$, M- $52,5^\circ$ -H norabidean .

- 4.- Ibai batetako ura Iparralderantz doa 3 km/h -tako abiaduraz. Txalupa bat Ekialderantz abiatu da, urarekiko 4 km/h -tako abiadura erlatiboa duelarik.

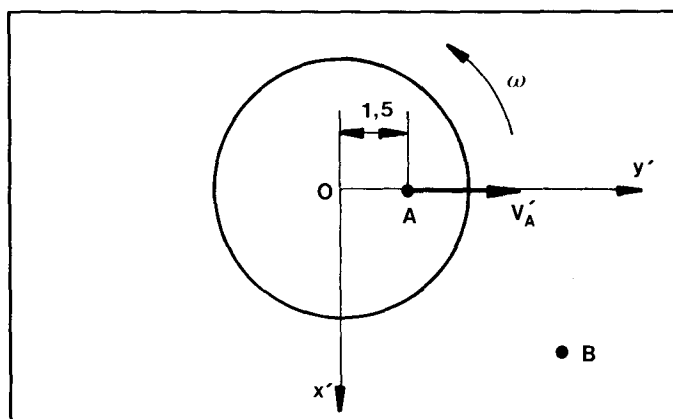
- Lor bedi txalupak Lurrarekiko duen abiadura.
- Ibaiaren zabalera 1 km -takoa bada, zenbat denbora behar du ibaia zeharkatzeko?
- Zein da Iparralderanzko desbideraketa, txalupa beste ibaiertzera heltzean?

Emaitza: a) 5 km/h , $E-37^\circ-I$ norabidean.
 b) 15 minutu.
 c) 750 m .

- 5.- 30° -tako Ipar latitudea duen Lurreko puntu batetan, hegazkin bat horizontalki hegaz egiten ari da Mendebalderantz eta 1000 km/h -tako abiaduraz. Lor bedi, Lurreko behatzaile batek susmatutako Coriolis-en azelerazioa, beronen modulua eta norabidea emanik eta grafikoki adierazirik.

Emaitza: $-0,02 \text{ i}' - 0,03 \text{ k}'$, non i' Hegoalderanzko norabidea eta norantza dituen bektore unitarioa den eta k' bertikalaren norabidea eta goranzko norantza dituen.

- 6.- Alboko irudiko plataforma zirkularra biraka ari da bere ardatzaren inguruan $\omega = 30 \text{ bira/mi}$ abiadura angeluarraz. Une batetan, beraren gainean A pertsona O zentrutik $1,5$ metrotara dago eta erradialki higitzen ari da 2 m/s -tako abiaduraz.



Zeintzu dira A -ren abiadura eta azelerazioa, plataformatik kanpo geldi dagoen B behatzaileak neurturik?

Emaitza: OA delakoa Oy' ardatza balitz bezala harturik,

$$\mathbf{v} = -1,5\pi \text{ i} + 2 \text{ j} ; \quad \mathbf{a} = -4\pi \text{ i} - 1,5\pi^2 \text{ j} .$$

Osagai erradiala (u_r) eta transbertsala (u_θ) erabilirik,

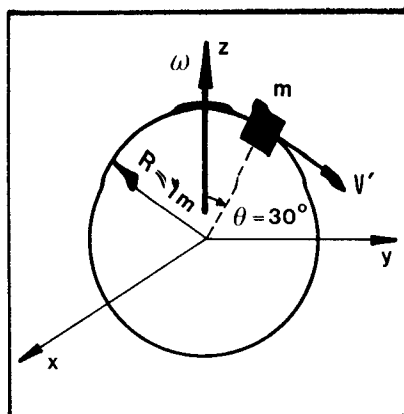
$$v = 2 u_r + 1,5\pi u_\theta ; \quad a = -1,5\pi^2 u_r + 4\pi u_\theta .$$

- 7.- Jasogailu batetan 2 ms^{-2} azelerazioaz igoten ari den behatzaile batek, gorputz bat erortzen dakusa jasogailu barruan 3 m -tako altueratik.

- Zer azelerazio neurtuko dio?
- Zein da behatzaile horrekiko gorputzak duen posizioa, $0,5 \text{ s}$ pasatu ondoren?

Emaitza: a) $11,8 \text{ m s}^{-2}$.
b) $1,525 \text{ m}$.

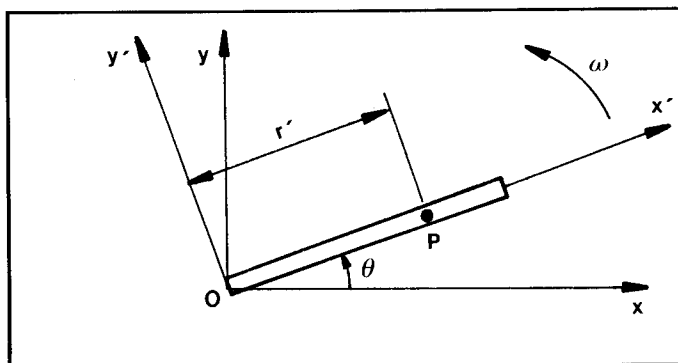
- 8.- Alboko irudiko burdinhari zirkularra $\omega = 2\pi \text{ rad s}^{-1}$ balio duen abiadura angeluarraz ari da biratzen Oz ardatzaren inguruan. Berarekin idunek baten eran loturik, m masa txikia $0,5 \text{ m/s}$ -tako abiadura uniformeaz higitzen ari da berarekiko. Lor bitez masa horrek kanpoko behatzaile batekiko dituen abiadura eta azelerazioa, irudian ageri den posizioan.



Emaitza: $v = -\pi i + 0,25\sqrt{3} j - 0,25 k$,

$$a = -\pi\sqrt{3} i - (0,125 + 2\pi^2) j - 0,125\sqrt{3} k .$$

- 9.- Irudian adierazi den hodia abiadura konstanteaz biratzen ari da Oxy

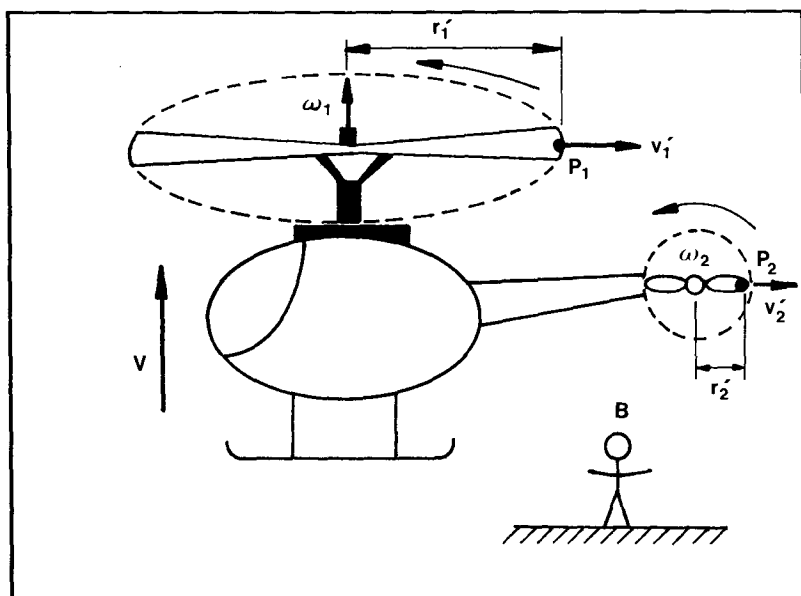


planoan eta O puntuaren inguruan. Beraren barnean bolatxo bat dago (P) eta bolak duen posizio erlatiboa, era honetan adieraz daiteke denboraren funtzioan: $r'(t) = t^2 i'$. Hemen r' metrotan

eta t segundotan daude emanik. Lor bitez $\mathbf{v}$ eta $\mathbf{a}$ denboraren funtzioan.

$$\begin{aligned}\text{Emaitza: } \mathbf{v} &= 2t \mathbf{u}_r + \omega t^2 \mathbf{u}_\theta = (2t \cos\theta - \omega t^2 \sin\theta) \mathbf{i} \\ &\quad + (2t \sin\theta + \omega t^2 \cos\theta) \mathbf{j}, \\ \mathbf{a} &= [(2 - \omega^2 t^2) \cos\theta - 4\omega t \sin\theta] \mathbf{i} + \\ &\quad + [(2 - \omega^2 t^2) \sin\theta + 4\omega t \cos\theta] \mathbf{j}.\end{aligned}$$

- 10.- Hurrengo irudian, gorantz eta abiadura konstanteaz (v) igoten ari den helikoptero bat adierazi da. Beronen helizeak ω_1 eta ω_2 abiadura angeluarraz higitzen ari dira. Helize bakoitzean eta irudian adierazi diren puntuetan (P_1 eta P_2) bi euli daude, norabide erradialetan $\mathbf{v}'_1$ eta $\mathbf{v}'_2$ abiadura konstanteaz higitzen ari dira. Helizea irudiko posizioan dagoenean, zeintzu dira, Lurrean geldi dagoen behatzaileak neurturiko euli horien abiaduren moduluak?



$$\text{Emaitza: } v_1 = \sqrt{v'^2_1 + v^2 + (\omega_1 r'_1)^2},$$

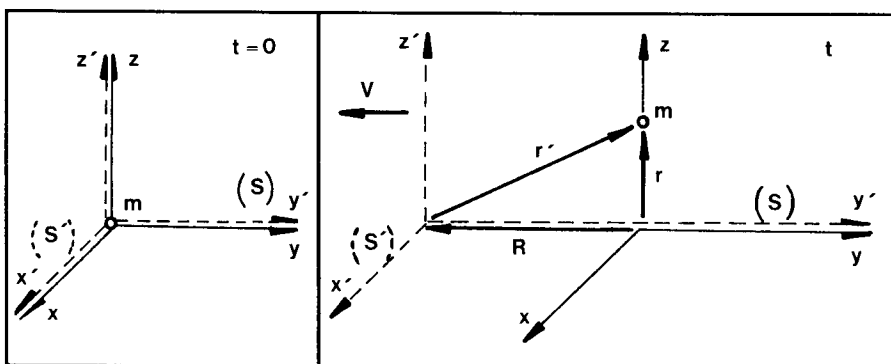
$$v_2 = \sqrt{v'^2_2 + (v + \omega_2 r'_2)^2}.$$

5. GAIA

PARTIKULAREN DINAMIKA

5.1. Kontsidera ditzagun bi erreferentzi sistema, S eta S' direlakoak. Denboraren jatorrian, hots, $t = 0$ aldiunean, bi sistemen ardatzak kointzidentek dira. Hemendik aurrera S' sistema $v = -10 \text{ j m s}^{-1}$ -tako abiaduraz hasi da higitzen, S sistemarekiko biraketarik egin gabe. S sisteman partikula baten posizio-bektorea hau da: $\mathbf{r} = 2 t^2 \mathbf{k}$, denboraren funtzioan, r metroan eta t segundotan egonik. Partikularen masak $m = 5 \text{ kg}$ balio du. Aurki bitez:

- S sisteman, partikularen abiadura, azelerazioa eta beraren gaineko indarra.
- S' sisteman, partikularen ibilbidea.
- S' sisteman, partikularen abiadura, azelerazioa eta beraren gaineko indarra.
- Konpara bitez sistema bakoitzeko azterketatik ateratako ondorioak.



a) (S) sisteman, partikularen abiadura hau da:

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = 4t \mathbf{k} .$$

Hemendik azelerazioa lor dezakegu zuzenki:

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = 4 \mathbf{k} \text{ m s}^{-2} .$$

Eta indarraren definizioa aplikatuz:

$$\mathbf{F} = m \mathbf{a} = 20 \mathbf{k} \text{ N} .$$

b) Hurrengo irudian ikus daitekeenez:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}' + \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{r}' = \mathbf{r} - \mathbf{R} ,$$

$$\text{Hemen } \mathbf{r} = 2 t^2 \mathbf{k} , \quad \mathbf{R} = \mathbf{V} t = -10 t \mathbf{j} ,$$

$$\mathbf{r}' = 10 t \mathbf{j} + 2 t^2 \mathbf{k} .$$

Ekuazio parametrikotatik emanik:

$$x' = 0 ,$$

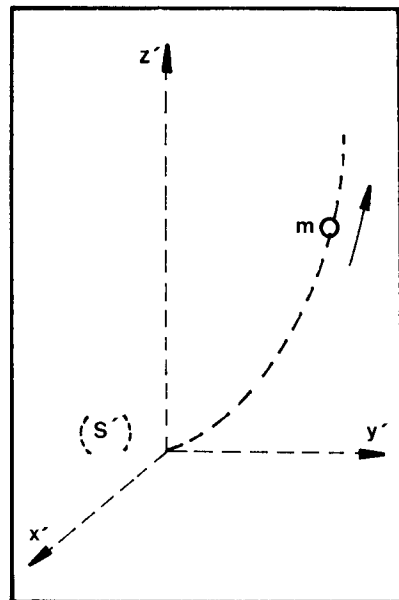
$$y' = 10 t ,$$

$$z' = 2 t^2 ,$$

Azken bi ekuazioetatik t denbora askatuz gero, ibilbidearen ekuazioa lor dezakegu (lehenengoarekin batera, noski).

$$x' = 0 ,$$

$$z' = \frac{1}{50} y'^2 .$$



Hau da, $O'y'z'$ planoan kokaturiko parabola.

c) S' sisteman partikulak duen abiadura, definizioz, hau da:

$$\mathbf{v}' = \frac{d \mathbf{r}'}{dt} = 10 \mathbf{j} + 4 t \mathbf{k} .$$

S' sisteman neurturiko azelerazioa:

$$\mathbf{a}' = \frac{d \mathbf{v}'}{dt} = 4 \mathbf{k} \text{ m s}^{-2}.$$

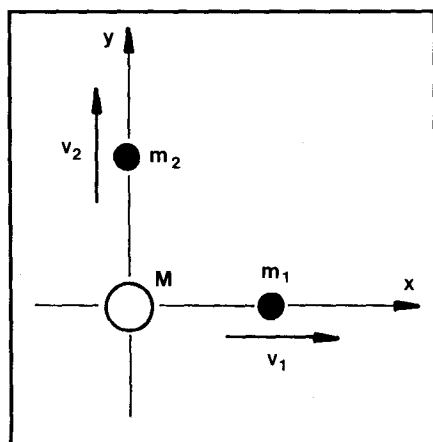
Eta S' sisteman eragiten ari den indar eraginkorra:

$$\mathbf{F}' = m \mathbf{a}' = 20 \mathbf{k} \text{ N}.$$

Hemen partikularen masa aldaezintzat hartu dugu. Hots, nahiz S sisteman nahiz S' -n, partikulak masa berbera duela onartu dugu. Hau postulatu bat besterik ez da, mekanika klasiko newtondarraren postulatuetariko bat hain zuzen.

d) Lortu ditugun emaitzak konparatuz, kontura gaitezen bi sistemekiko abiadurak ($\mathbf{v} = 4t \mathbf{k}$ eta $\mathbf{v}' = 10 \mathbf{j} + 40t \mathbf{k}$) eta ibilbideak (S sisteman zuzen bat, Oz ardatza prezeski, eta S' -n berriz, parabola bat) berdinak ez direla. Azelerazioak ($\mathbf{a} = \mathbf{a}' = 4 \mathbf{k}$) ordea, eta hortaz, indarrak ($\mathbf{F} = \mathbf{F}' = 20 \mathbf{k}$) ere, arras berdinak ditugu. Izatez, hau da Galileo-ren edozein transformazioren ondorioa.

5.2. Mahai baten gainean dagoen ontzi bat lehertu egin da, hiru zatitan banatuta geratu delarik. Horietako masa berdineko bi zatik, mahai gainetik eta norabide perpendikularretan alde egin dute, biek 30 ms^{-1} -etako abiaduraz. Bestalde, hirugarrenaren masa besteetariko bakoitzarena baino hiru bider handiagoa da. Aurki bitez hirugarren zati honen abiaduraren balioa eta norabidea.



Mahai gainean hartuko ditugu Ox eta Oy ardatz cartesianak, eta ebazpena sinplifikatzeko, lehenengo eta bigarren zatien abiadurarekiko paraleloak (irudian ez da hirugarren zatia erakutsi). Momentu linealaren kontserbazioaren printzipioa betetzen denez:

$$0 = m_1 v_1 + m_2 v_2 + m_3 v_3 ,$$

$$\text{non } v_1 = 30 \mathbf{i} , \quad v_2 = 30 \mathbf{j} , \quad 3 m_1 = 3 m_2 = m_3 \quad \text{diren.}$$

Beraz, kalkulu zuzenak eginez:

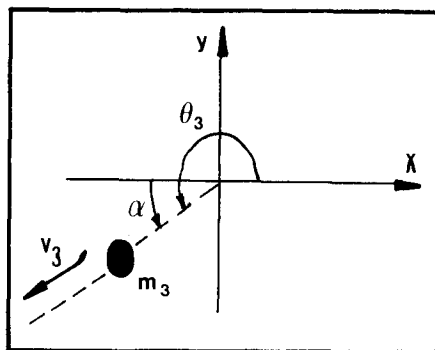
$$v_3 = -10 \mathbf{i} - 10 \mathbf{j} .$$

Hemendik:

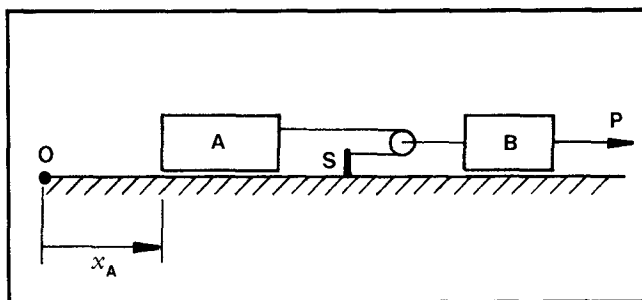
$$v_3 = 10 \sqrt{2} \quad m \, s^{-1} ,$$

$$\operatorname{tg} \theta_3 = \frac{-10}{-10} = 1 \quad \theta_3 = 225^\circ ,$$

$$\text{edo } \alpha = 45^\circ .$$



5.3. Irudian ageri den moduan, A blokean lotutako soka, masarik gabeko txirrika batetatik pasa eta gero, S topean tinkatua da. Bestaldetik, txirrikaren zentrua eta B blokea konektatuta daude beste soka baten bidez. A blokeak $16 \, kg$ -tako masa du, eta B delakoak $4 \, kg$ -takoa. Soka guztiak zoluarekiko paraleloak dira, eta zoluak ez du marruskadurarik sortzen. Bloke biak higitzen ari dira, B -ren gainean eragiten ari den P indarra dela medio. Honen ondorioz, A blokeak O puntuarekiko denboraren funtzioan duen desplazamendua, hauxe da: $x_1 = 2 t^3$ (t segundotan eta x metrotan neurturik).



- a) Zein da A blokearen azelerazioa $t = 5 \text{ s}$ aldiunean?
 b) Zeintzu dira soken tentsioak aipaturiko aldiunean?
 c) Eta zein P indarraren balioa?

a) Azelerazioaren definizioz (higidura zuzenean):

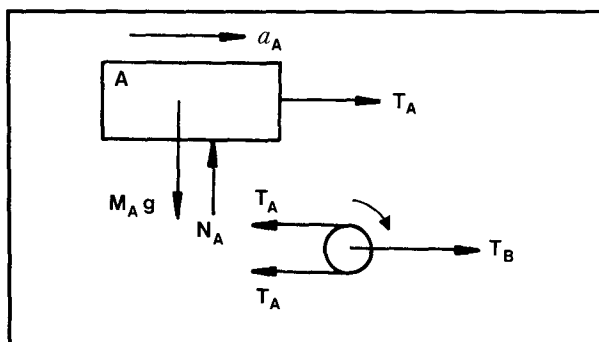
$$a_A = \frac{d^2 x_A}{dt^2} = 12 t \quad ,$$

$$t = 5 \text{ s} \quad \text{denean,} \quad a_A = 60 \text{ m s}^{-2} \quad .$$

b) A blokearen ekuazioak hauexek dira:

$$T_A = M_A a_A = 960 \text{ N} \quad ,$$

$$N_A - M_A g = 0 \quad .$$

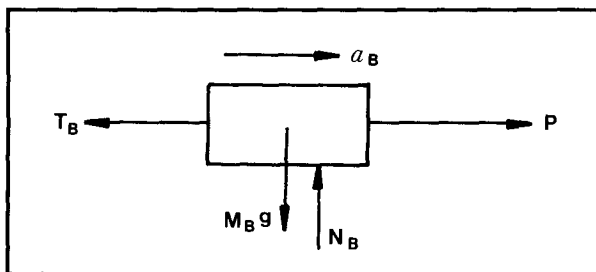


Txirrikaren ekuazioa:

$$T_B - 2 T_A = 0 \quad , \text{ masa gabekotzat hartu bait dugu} \quad ,$$

$$T_B = 1920 \text{ N} \quad .$$

c) Bestalde, B blokearen ekuazioak honelaxe eman ditzakegu:



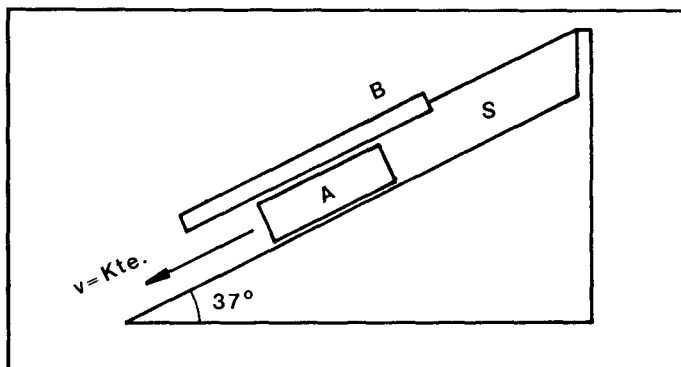
$$P - T_B = M_B a_B ,$$

$$a_B = \frac{1}{2} a_A , \text{ erraz ikus daitekeenez.}$$

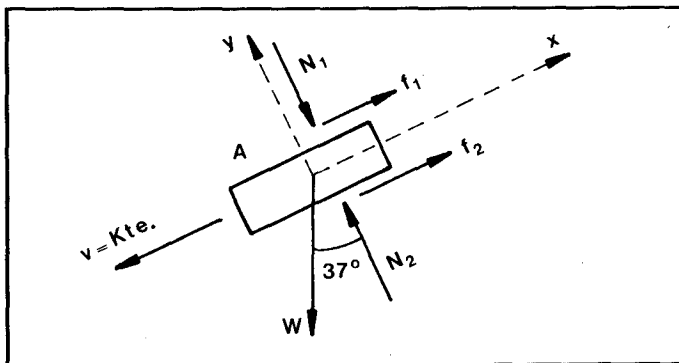
$$N_B - M_B g = 0 .$$

Eta lehenengo bietatik : $P = 2040 \text{ N}$.

- 5.4. W pisuko A blokea abiadura konstanteaz jaisten ari da irudiko S planotik, pisu bereko B xafla bere gainean kokatuta duelarik. A eta B -ren arteko eta A eta S -ren arteko marruskadura-koefiziente biak berdinak dira. Xafla hori geldidago, planoarekiko paralelo den soka batez loturik.



- Diagrama baten bidez, erakuts bitez blokearen gainean eragiten ari diren indar guztiak.
- Kalkula bedi aipaturiko marruskadura-koefizientea.
- Kalkula bedi sokaren tentsioa.



Aurreko irudian A blokearen gainean eragiten ari diren indarren diagrama adierazi da. Blokea abiadura konstanteaz jaisten ari denez, hots, oreka dinamikoazko egoeran dagoenez, ondoko ekuazioak beteko dira:

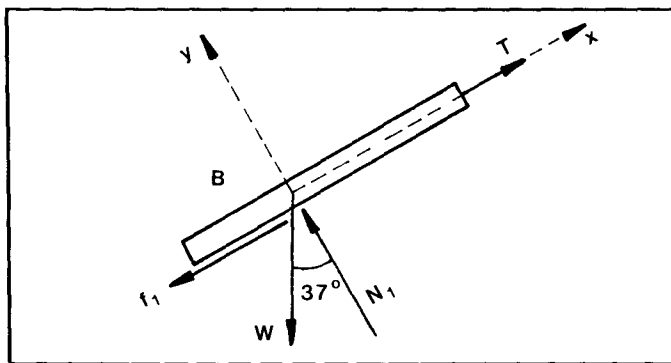
$$x : f_1 + f_2 - W \sin 37^\circ = 0 ,$$

$$y : N_2 - N_1 - W \cos 37^\circ = 0 .$$

b) Hurrengo irudian xaflari dagokion indar-diagrama adierazi da. Xafla ere oreka dinamikoan bait dago, ekuazio hauek beteko ditu:

$$x : f_1 + T - W \sin 37^\circ = 0 ,$$

$$y : N_1 - W \cos 37^\circ = 0 .$$



Horrez gainera, marruskadura-indarren balioak planteatu ditzakegu:

$$f_1 = \mu N_1 ,$$

$$f_2 = \mu N_2 .$$

c) Planteaturiko sei ekuazioetatik marruskadura-koefizientea eta sokaren tentsioa ere lor daitezke erraz. Lortuko diren balioak hauexek dira:

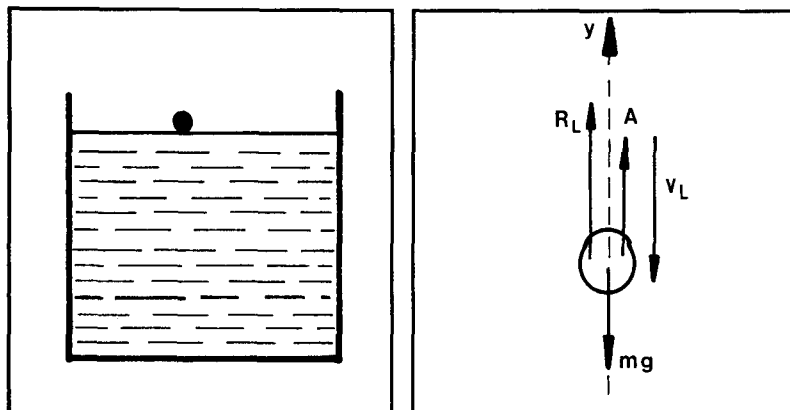
$$T = \mu N_1 + W \sin 37^\circ \quad \text{eta} \quad \mu = 0,25 .$$

5.5. Puxtarri bat erori egin da ontzi baten barruan. Puxtarriaren masa 2 g-takoa da, eta beraren gaineko Arkhimedes-en indarrak 460 din balio du. Urak eragindako marruskadura-indarra puxtarriaren abiaduraren arauera da, proportzionaltasun-koefizientea 50 din s cm^{-1} delarik. Kalkula bitez:

a) Puxtarriaren erorketaren muga-abiadura.

b) Erorketa luze samarraren ondoren, puxtarriak muga-abiadura lortua duela kontsidera daiteke

praktikan. Orduan, ontziaren zoluekin topo egingo du, muga-abiaduraren erdia balio duen abiaduraz errebotaturik. Zenbat denbora emango du puxtarriak igoten, berriro jaisten hasi arte?

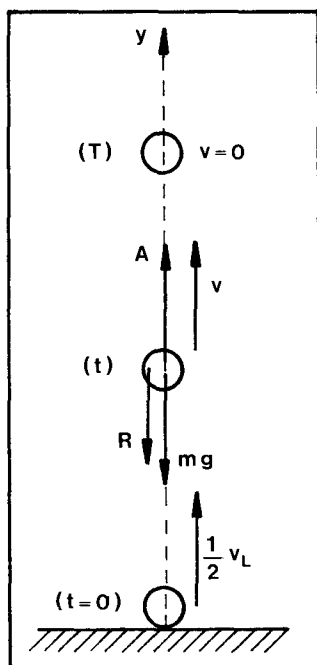


a) Definizioz, muga-abiadura lortutakoan, azelerazioa nulua da. Beraz,

$$m g + A + R_L = 0 ,$$

non A Arkhimedes-en indarra den eta R_L muga-abiadurari dagokion marruskadura-indarra. Muga-abiaduraren modulua V bada,

$$- 1960 \mathbf{j} + 460 \mathbf{j} + 50V \mathbf{j} = 0 \rightarrow V = 30 \text{ cm s}^{-1} .$$



b) Edozein t aldiunetan,

$$m g + A + R = m a .$$

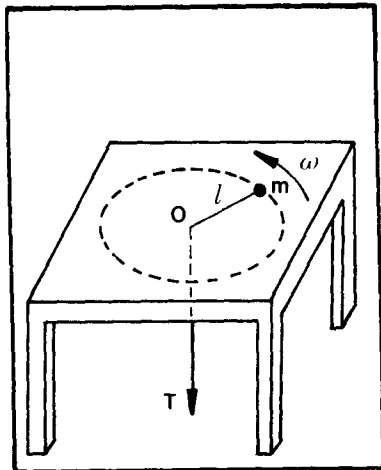
Oraingo R marruskadura, momentu horretan duen abiadurari dagokio, hots, $v = v \mathbf{j} \rightarrow R = - 50 v \mathbf{j}$. Hortaz:

$$- 1960 \mathbf{j} + 460 \mathbf{j} - 50v \mathbf{j} = 2 \frac{dv}{dt} \mathbf{j} ,$$

$$- 25 (30 + v) = \frac{dv}{dt} ,$$

$$\int_0^T dt = - \frac{1}{25} \int_{15}^0 \frac{dv}{30 + v} ,$$

$$T = \frac{9}{25} \ln \frac{3}{2} = 0,0162 \text{ s} .$$



5.6. Marruskadurarik gabeko mahai horizontal baten gainean, hari baten mutur batetara loturik, m masako partikula biraka ari da, ω abiadura angeluarraz. Mahai gaineko hariaren zatiak l luzera du. Haria mahaiko O zulotik pasaturik, eta beste muturra finkatuta mantendu da T tentsioaz. Mutur honetatik tiratuz, mahai gaineko zatiaren luzera lehenago izan duen balioaren erdiraino laburtu da. Aurki bitez:

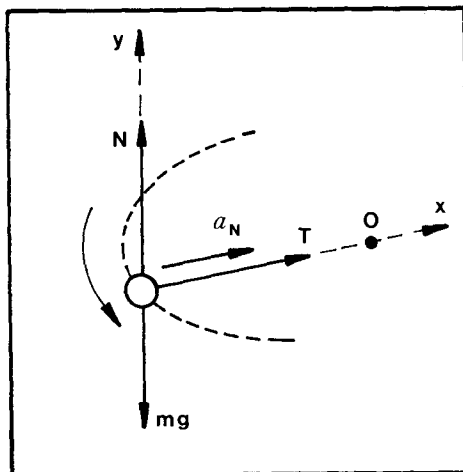
- T tentsioaren balioa.
- T' tentsioaren balio berria, mahai gaineko hariaren zatiaren luzera laburtu ondoren.

a) Hurrengo irudian ageri diren indarren adierazpenaren arauera, T indarrak, hots hariaren tentsioak, $a_N = \omega^2 l$ azelerazio zentripetua eragingo du; N eta mg indarrek, ordea, elkar anulatzten dute, norabide bertikalean partikula azeleraziorik ez bait du. Beraz,

$$x \text{ norabidean: } T = m \omega^2 l,$$

$$y \text{ norabidean: } N - mg = 0.$$

Lehenengo ekuazioak hariaren tentsioa emango digu zuzenki.

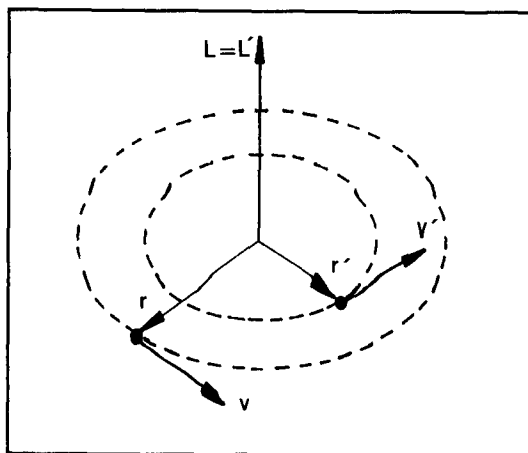


b) Irudia berrikusiz, N eta mg indarrek aplikazio-lerro berbera dute eta, horrez gainera, beraien erresultantea nulua da. Beraz, beraien edozein punturekiko indar-momentuak nulua izan behar du. Bestaldekik, hariaren tentsioaren aplikazio-lerroa O puntutik pasatzen da eta, ondorioz, puntu honekiko beraren indar-momentua beti izango da nulua (egia esan, indar zentrala da). Hau guztiau kontutan harturik, O puntuarekiko partikularen momentu angeluarren kontserbazioa aplikatu dezakegu, hau da:

$$L = L' \quad \longrightarrow \quad \mathbf{r} \wedge m \mathbf{v} = \mathbf{r}' \wedge m \mathbf{v}'.$$

Baina, nahiz lehenengo zirkunferentzian zein bigarrean, erradioa eta partikularen abiadura elkarren perpendikularrak dira, hurrengo irudian

ageri den moduan.



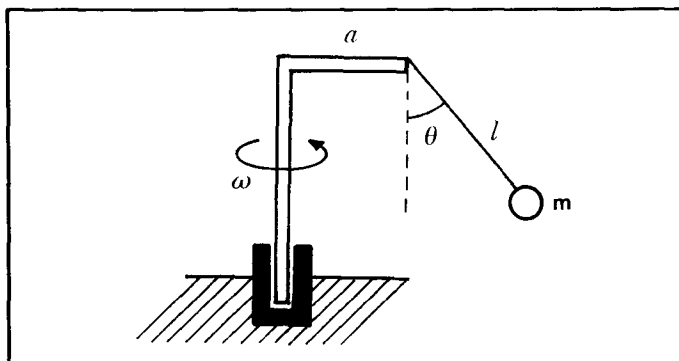
Hortaz,

$$l v = \frac{l}{2} v' \rightarrow l^2 \omega = \left[\frac{l}{2} \right]^2 \omega' \rightarrow \omega' = 4 \omega .$$

Eta hemendik, a) atalean ikusi dugun legez:

$$T' = m \omega'^2 l' = m \cdot 16 \omega^2 \cdot \frac{l}{2} = 8 m \omega^2 l = 8 T .$$

5.7. Zer abiadura angeluarraz biratu behar du irudiko tramankuluak, muturrean m masa lotuta daukalarik, l luzera duen hariak bertikalarekiko $\theta = 45^\circ$ -tako angelua iraukorki bete dezan?

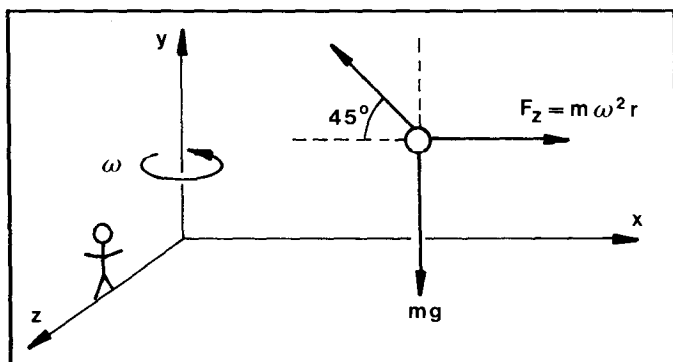


Hurrengo irudian adierazi dugun $Oxyz$ erreferentzi sistema ez-inertzialean (ω abiadura angeluarraz tramankuluaz batera higitzen ari den sisteman) partikula oreka erlatiboan dagoenez, indar guztien erresultantea (benetakoena eta inertziazkoena) anulatu egin behar da, hots,

$$x : m \omega^2 r - T \sin \theta = 0 ,$$

$$y : T \cos \theta - m g = 0 .$$

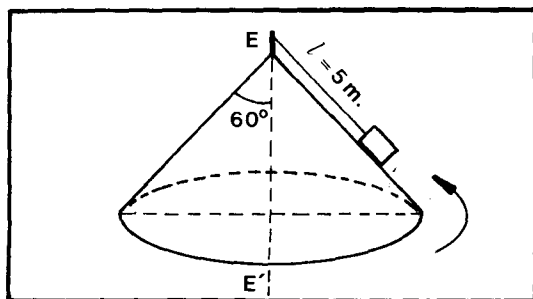
Hemen $r = a + l \sin \theta$



Idatzitako ekuazio-sistematik abiadura angeluarretako aterako den balioa ondokoa da:

$$\omega = \sqrt{\frac{g \operatorname{tg} \theta}{a + l \sin \theta}} .$$

5.8. 6 kg-tako gorputz bat kono baten gainaldean kokatuta dago irudian ikus daitekeen sokaz sostengaturik. Konoa biraka ari da EE' ardatzaren inguruan, 10 biral/min balio duen maiztasun angeluarraz.

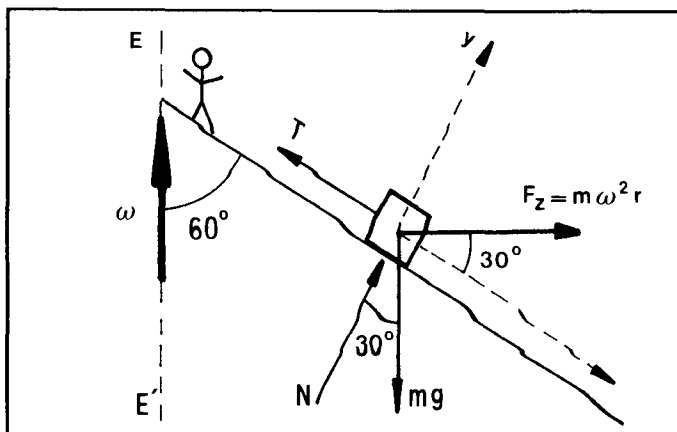


Kalkula bitez:

- Konoaren gainaldea gorputzean egiten ari den erreakzioa eta sokaren tentsioa.
- Gainaldearen erreakzioa nulua izateko behar den abiadura angeluarra.

a) Ezer baino lehenago, kalkula dezagun abiadura angeluarra:

$$\omega = 2\pi \nu = 2\pi \frac{10}{60} = \frac{\pi}{3} \text{ rad s}^{-1} .$$



Irudi honetan ageri den behatzaile ez-inertzialaren ikuspuntutik (sokarekin batera doana, hain zuzen), gorputza orekan dago. Plantea ditzagun, beraz, gorputzaren oreka-ekuazioak, era guztietako indarrak kontutan harturik, hau da, nahiz interakzioek sortuak ("benetakoak") zein inerti indarrak ("irudikoak", kasu honetan indar zentrifugoa). Hau da:

$$x \text{ norabidean: } m \omega^2 r \cos 30^\circ + m g \sin 30^\circ - T = 0 ,$$

$$y \text{ norabidean: } m \omega^2 r \sin 30^\circ + N - m g \cos 30^\circ = 0 .$$

Eta lehenengo ekuaziotik T bakanduz:

$$T = m \omega^2 l \cos^2 30^\circ + m g \sin 30^\circ \approx 54,4 \text{ (N)} .$$

Aurreko ataleko ekuazio-sistematik, eta bigarrenetik konkretuki, N indarraren balioa lor dezakegu. Hauxe da:

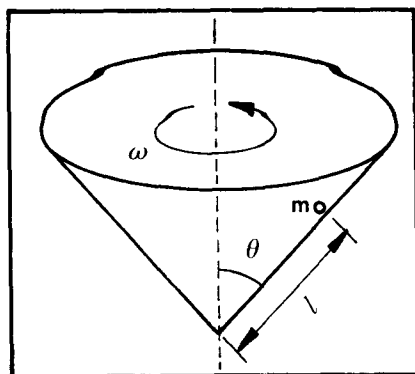
$$N = m g \cos 30^\circ - m \omega^2 l \sin 30^\circ \cos 30^\circ \approx 36,5 \text{ (N)} .$$

b) N zero izan dadin:

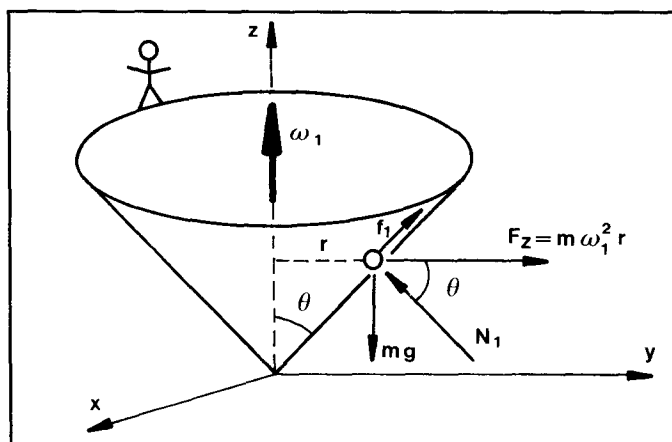
$$0 = m g \cos 30^\circ - m \omega_1^2 l \sin 30^\circ \cos 30^\circ ,$$

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{g}{l \sin 30^\circ}} = 1,98 \text{ rad s}^{-1} .$$

5.9. Irudiko konoaren barruan partikula bat dago kokatuta, erpinetik l distantziara. Konoa bere ardatzarekiko biraka ari da, partikularen eta konoaren arteko marruskadura-koefiziente estatikoa μ delarik. θ angelua eta l luzera datutzat harturik, zeintzu dira konoaren abiadura angeluarraren muga-balioak, partikulak konoarekiko oreka erlatiboan iraun dezan?



Bi muga desberdin aztertu behar ditugu, konoarekiko oreka beherantz edo gorantz apur bait daiteke.



Has gaitezen beherantz jaisten hasterako muga aztertzen. Horretarako konoarekin lotuta doan sistema ez-inertzial batetatik aztertuko dugu arazoa, hurrengo irudian adierazi den moduan. Konoarekin lotuta doan behatzaileak, geldirik dakusa partikula. Beraz, behatzaile horrek planteatutako indarrak (benetakoak eta inertiakoak) orekan daude:

$$f_1 \leq \mu N_1, \quad \text{eta mugan} \quad f_1 = \mu N_1.$$

$$y \text{ norabidean: } m \omega_1^2 r - N_1 \cos \theta + \mu N_1 \sin \theta = 0,$$

$$z \text{ norabidean: } -mg + N_1 \sin \theta + \mu N_1 \cos \theta = 0,$$

non $r = l \sin \theta$ den. Ekuazio-sistema honetatik ω_1 lor daiteke, emaitza haxe delarik:

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{g}{l} \cdot \frac{\cos\theta - \mu \sin\theta}{(\sin\theta + \mu \cos\theta) \sin\theta}} .$$

Gorantz abiatzerako mugan egin behar den planteamendua, aurrekoa bezalakoa da, marruskadura-indarraren norantzari dagokionez izan ezik, berau aldatu egingo bait da. Beraz, lehen jarritako ekuazioetan indar horren zeinua aldatu behar dugu, honelaxe idatziko ditugularik:

$$y : m \omega_1^2 r - N_2 \cos\theta - \mu N_2 \sin\theta = 0 ,$$

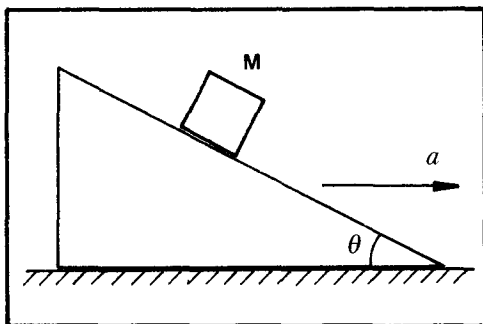
$$z : -mg + N_2 \sin\theta - \mu N_2 \cos\theta = 0 .$$

Hortik,

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{g}{l} \cdot \frac{\cos\theta + \mu \sin\theta}{(\sin\theta - \mu \cos\theta) \sin\theta}} .$$

Beraz, partikulak konoarekiko geldirik iraun dezan, konoaren abiadura angeluarrak ondoko baldintza bete behar du:

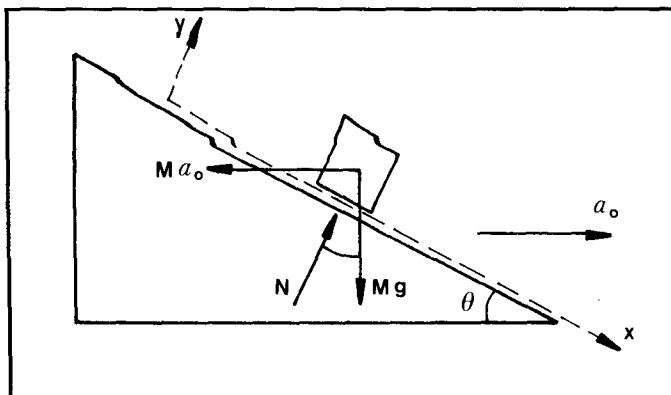
$$\omega_1 \leq \omega \leq \omega_2 .$$



5.10. a) Zein izan behar da θ angeluko plano inklinatu baten azelerazioa, beraren gaitetik eta marruskadurarik gabe irrist egin dezakeen M masadun bloke batek, planoarekiko geldirik iraun dezan?

- b) Zer gertatuko litzateke, planoaren azelerazioa kalkulatu baina handiagoa edo txikiagoa izango balitz?
- c) Konkreteki, angelu hori 30° -takoa izanik, azter bedi blokearen higidura, plano inklinatuaren azelerazioaren funtzioan.

a) Kasu honetan ere sistema ez-inertzial bat hartuko dugu erreferentziakotzat, plano inklinatuarekin lotuta doana hain zuzen.



Biz a_0 , blokeak geldirik iraun dezan planoak eduki behar duen azelerazioa. Orduan, aipaturiko sistema ez-inertzialean blokeak ondoko oreka-ekuazioak bete behar ditu:

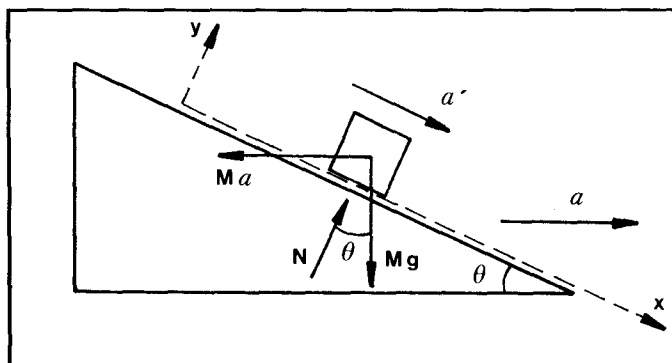
$$x \text{ norabidean: } Mg \sin\theta - Ma_0 \cos\theta = 0 ,$$

$$y \text{ norabidean: } N - Mg \cos\theta - Ma_0 \sin\theta = 0 .$$

N indarra ez dugu ezertarako behar eta, beraz, bigarren ekuazioa ukitu gabe utziko dugu. (Dena dela $N > 0$ izan behar da beti, eta horrela izango da planoaren azelerazioa ezkuinalderanzkoa den bitartean, noski. Bestela blokeak planotik alde egin lezake, eta problemak ez luke inolako zentzurik izango). Hau dela eta, lehenengo ekuaziotik zera atera dezakegu:

$$a_0 = g \operatorname{tg}\theta .$$

b) Bigarren kasu honetan planoak edozein a azelerazio du. Aurreko kasuaren antzeko erreferentzi sistema ez-inertziala harturik, blokea planoan behera a' azelerazio erlatiboaz erortzen ari dela kontsideratuz, indarren diagrama hurrengo irudian adierazitakoa da.



Blokearen planoarekiko higidura erlatiboaren ekuazioak hauexek dira:

$$x : M g \sin \theta - M a \cos \theta = M a' ,$$

$$y : N - M g \cos \theta - M a \sin \theta = 0 .$$

Aurreko atalean ikusi dugun legez, eta arrazoi berberaz, bigarren ekuazioa ez dugu ezertarako erabili behar. Eta sistema honen lehenengo ekuaziotik hauxe lortuko dugu:

$$a = g \operatorname{tg} \theta - \frac{a'}{\cos \theta} .$$

- Hemen, $a = a_0 = g \operatorname{tg} \theta$ baldin bada, $a' = 0$ (hau da aurreko atalean ikusi dugun kasua, alegia, blokeak planoarekiko geldirik dirau).
- $a > a_0 = g \operatorname{tg} \theta$ baldin bada, $a' = 0$ da eta, beraz, blokea planoan gora higituko da.
- $a < a_0 = g \operatorname{tg} \theta$ baldin bada, $a' = 0$ da eta, beraz, blokea planoan behera higituko da.

c) Partikulariki $\theta = 30^\circ$ baldin bada,

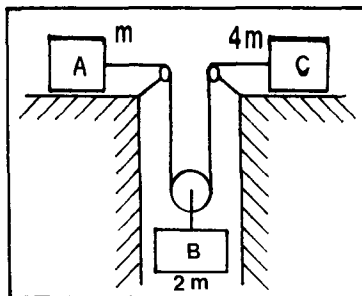
$$a_0 = g \operatorname{tg} 30^\circ = \frac{g}{\sqrt{3}} .$$

Orduan, bigarren atalean ikusi dugunez:

- $a = \frac{g}{\sqrt{3}}$ baldin bada, blokea ez da planoarekiko higituko.
- $a > \frac{g}{\sqrt{3}}$ baldin bada, blokea planoan gora higituko da.
- $a < \frac{g}{\sqrt{3}}$ baldin bada, blokea planoan behera higituko da.

ARIKETAK

- 1.- Irudiko sistema emanik, kalkula bedi gorputz bakoitzaren azelerazioa. Sokek eta txirrikek ez dute masarik, eta ez da inolako marruskadurarik kontsideratuko.

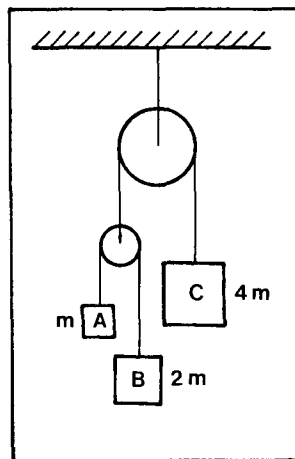


Emaitza: $a_A = \frac{8}{13} g$ (eskuinalderantz),

$$a_B = \frac{5}{13} g \text{ (beherantz),}$$

$$a_C = \frac{2}{13} g \text{ (ezkerralderantz).}$$

- 2.- Irudiko sistema emanik, eta txirrikek eta sokek masarik ez dutela kontsideraturik, kalkula bitez A, B eta C gorputzen azelerazioak.

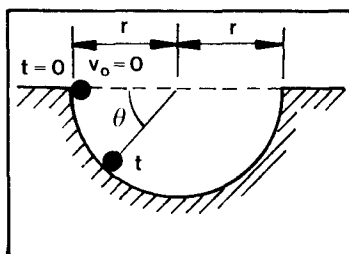


Emaitza: $a_A = \frac{3g}{5}$ (gorantz),

$$a_B = \frac{g}{5} \text{ (beherantz),}$$

$$a_C = \frac{g}{5} \text{ (beherantz).}$$

- 3.- m masako partikula bat geldi utzi da zulo erdizirkular baten ertz batetan. Zuloaren gainazala guztiz leuna da eta r erradioduna. Edozein posizio harturik, hots, angeluaren funtzioan, lor bitez partikularen higiduraren abiadura angeluarra eta gainazalak eragindako indarra:

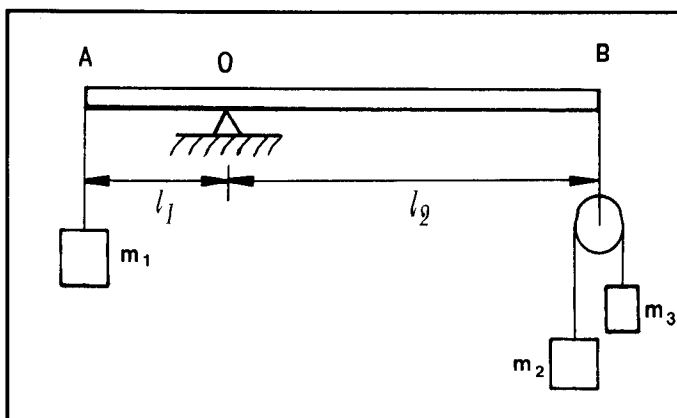


Emaitza: $\omega = \sqrt{\frac{2g}{r} \sin \theta}$, $N = 3 mg \sin \theta$.

- 4.- Demagun, tenis-pilota batek zelaiko sarearekin 30 m s^{-1} -etako abiaduraz egin duela topo, ondoren, norabide berean, aurkako norantzaz eta 20 m s^{-1} -etako abiaduraz itzuli delarik. Kalkula bedi pilotak pairatutako indarraren batezbesteko balioa, talkaren iraupena 10^{-2} segundotakoa dela eta pilotaren masak 50 g balio duela jakinik.

Emaitza: 250 N , aurkako norantzaz.

5.-



Froga bedi, irudiko AB habea orekan egon dadin, berdintza hau bete behar dela:

$$m_1 (m_2 + m_3) l_1 = 4 m_2 m_3 l_2 .$$

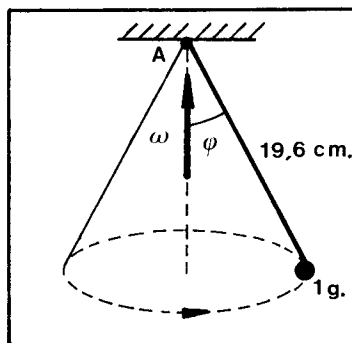
Aurki bitez, halaber, oreka-egoera horretan habeak pairaturiko indarrak, eta m_2 eta m_3 masen azelerazioak.

Emaitzak: $F_A = -m_1 g$; $F_B = -\frac{4 m_2 m_3}{m_2 + m_3} g$;

$$F_O = m_1 g \left(1 + \frac{l_1}{l_2}\right) ; \quad a = \frac{m_2 - m_3}{m_2 + m_3} g .$$

- 6.- Masa gabeko hari baten mutur bat A puntuan dago tinkaturik, eta beste muturrean harritxo bat du loturik. Hariaren luzera $19,6 \text{ cm}$ -takoa da eta hariaren masa 1 g -takoa. Multzoa pendulu koniko modura jokatzen ari da, 10 rad/s -tako abiadura angeluarraz bira eginez. Lor bitez:

- Hariaren tentsioa.
- Hariak bertikalarekin eraturiko φ angelua.



- c) Aipaturiko angelua, abiadura angeluarraren zein balioetarako izango litzateke 90° -takoa? Zenbat balioko luke hariaren tentsioak baldintza horietan?

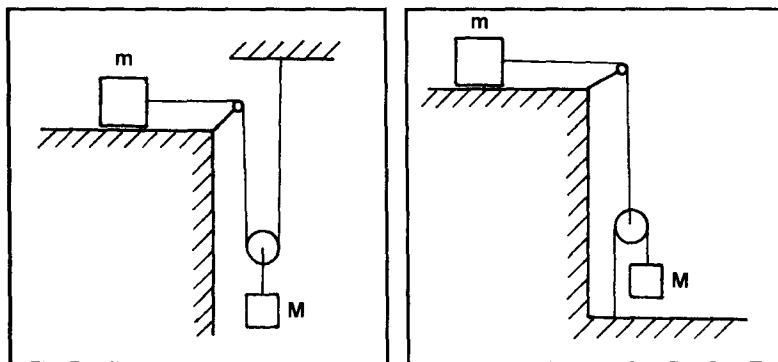
Eraitza: a) 1960 din . b) 60° .

c) $\omega \rightarrow \infty$, $T \rightarrow \infty$.

- 7.- Bloke bat abiadura konstantez jaisten ari da, 30° -tara dagoen plano inklinatu batetan behera. Zein azelerazioz jaitsiko litzateke, planoaren angeluaren balioa 60° -takoa izango balitz?

Eraitza: $g / \sqrt{3}$.

8.-



Kalkula bitez irudiko dispositiboaren masen azelerazioak eta soken tentsioak. Posible al da, masaren bat erorketa askean baino azelerazio handiagoz higitzea? Txirriken eta soken masak arbuia daitezkeela suposatuko da.

Eraitzak: a) $A = \frac{M}{4m+M} g$; $a = \frac{2M}{4m+M} g$.

b) $A = \frac{4M}{4M+m} g$; $a = \frac{2M}{4M+m} g$.

a) kasuan $a > g$ izan daiteke.

- 9.- Igogailu batetan bainugela-balantza bat daukagu. Balantzaren gainera pertsona bat igon da. Igogailuaren masak 420 kg balio du, balantzarenak 5 kg eta pertsonarenak, 75 kg .

I.- Igogailuari eusten dion kablearen tentsioak 5000 N balio du:

- I.a.- Zein da igogailuak balantzari eragindako indarraren balioa?
- I.b.- Eta zein, pertsonak balantzaren gainean eragindakoa? (Hauxe da, izatez, balantzak neurturiko indarra, edo beste era batetara esanda, pertsonaren pisu "irudikoa").
- II.- Orain igogailuaren tentsioa 4800 N -etakoa bada, erantzun iezaiezu aurreko galdera berberei.
- III.- Zenbatekoa izan beharko luke kablearen tentsioak, pertsonaren "irudiko" pisua nulua izateko?

Emaitza: I.a) 800 N , I.b) 750 N .

II.a) 720 N . II.b) 768 N .

III) $T = 0$

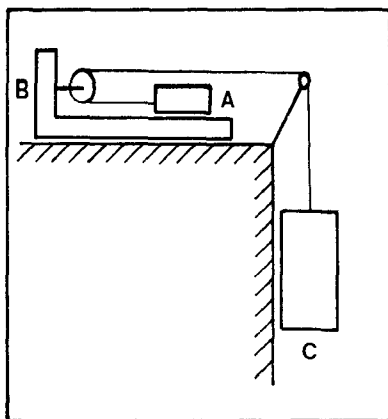
- 10.- Irudiko sisteman, kalkula bedi gorputz bakoitzaren azelerazioa. Gainazal guztiak arras leunak dira, eta arbuigarriak ditugu soka eta txirriken masak.

Datuak: $m_A = 1\text{ kg}$, $m_B = 2\text{ kg}$, $m_C = 3\text{ kg}$.

Emaitza: $a_A = 0,3\text{ g}$ (ezkerrerantz)

$a_B = 0,3\text{ g}$ (eskuinerantz)

$a_C = 0,9\text{ g}$ (beherantz)

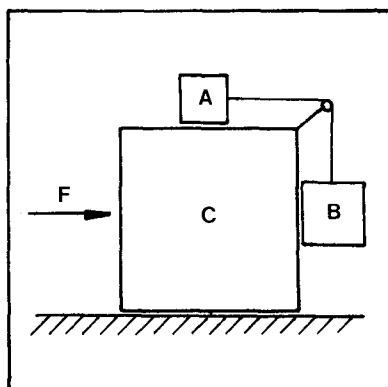


- 11.- F indarraren eraginez, C blokea $9,8\text{ m s}^{-2}$ -tako azelerazioaz higitzen ari da eskuin alderantz. Denbora berean A eta B blokeak ere higitzen ari dira, soka batez loturik, irudian adierazi den moduan. Ez dago inolako marruskadurarik, eta soka eta txirrikaren masak arbuigarriak dira. Kalkula bitez:

a) A eta B blokeen C blokearekiko azelerazio erlatiboak.

b) C blokea bultzatzen ari den F indar horizontalaren balioa.

Datuak: $m_A = 1\text{ kg}$, $m_B = 3\text{ kg}$, $m_C = 15,5\text{ kg}$.



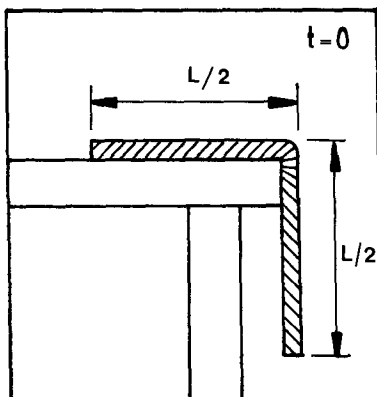
Emaitza: a) $a_{AC} = 4,9\text{ ms}^{-2}$ eskuinerantz.

$a_{BC} = 4,9\text{ ms}^{-2}$ beherantz.

b) $F = 196 \text{ N}$.

- 12.- L luzerako soka homogeneoa irudian ikus daitekeen moduan kokatu da. Hau da, soka erdia mahai leun eta horizontal baten gainean jarri da, beste erdia zintzilik dagoelarik. Pausagunetik hasirik, zer abiadura izango du sokak, bere ezkerreko muturra mahaiaren ertzera helduko deneko aldiunean?

Emaitza: $\frac{\sqrt{3gL}}{2}$.



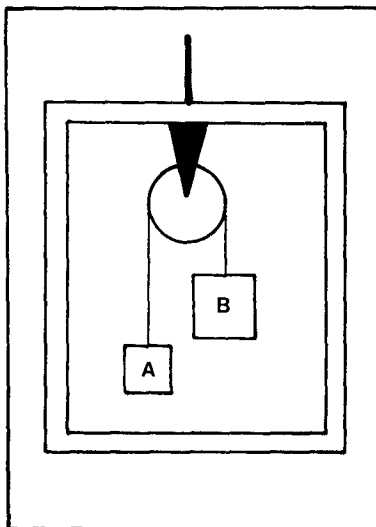
- 13.- Irudiko igogailua beherantz higitzen ari da, $6,8 \text{ ms}^{-2}$ -tako azelerazioaz. Kalkula bitez A eta B blokeen igogailuarekiko azelerazio erlatiboak eta igogailuaren kablearen tentsioa. Soka eta txirrikaren masak arbuia-garriak dira ($m_A = 20 \text{ kg}$; $m_B = 10 \text{ kg}$; igogailuaren masa = 200 kg).

Emaitza: Igogailuarekiko azelerazio erlatiboak:

$$a_A = 1 \text{ ms}^{-2} \text{ (zolurantz),}$$

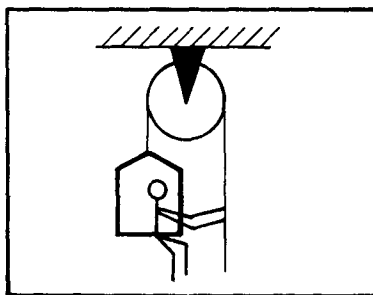
$$a_B = 1 \text{ ms}^{-2} \text{ (sabairantz),}$$

$$\text{Tentsioa } T = 680 \text{ N}.$$



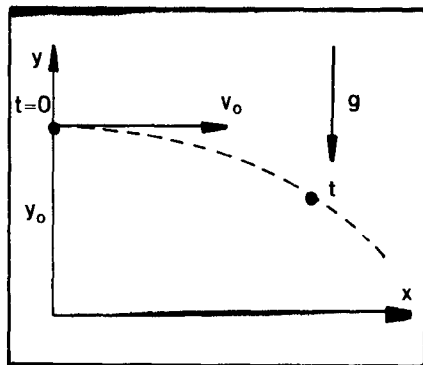
- 14.- Kalkula bedi m masako pertsonak bere eskuez egin behar duen indarra, a azelerazioz gorantz igon dadin. Arbuia bitez soka, tramankulu eta txirrikaren masak.

Emaitza: $F = m \frac{g + a}{2}$.



- 15.- Hasierako aldiunean ($t = 0$), m masako partikula $(0, y_0)$ puntuan dago eta v_0 abiadura horizontala du, grabitatearen eraginpean higitzen ari delarik. Lor bitez:

- a) Edozein aldiunetan (t) partikularen posizio-bektorea eta momentu lineala.
- b) Partikularen ardatzen jatorriarekiko momentu angeluarra edozein aldiunetan.
- c) t aldiunean partikularen gainean diharduen indarraren (hots, pisuaren) koordenatu-jatorriarekiko indar-momentua.
- d) Egiazta bedi, aipaturiko indar-momentuaren eta denborarekiko momentu angeluarren deribatuaren arteko kointzidentzia (berdintasuna; ez kasualitatea, noski).



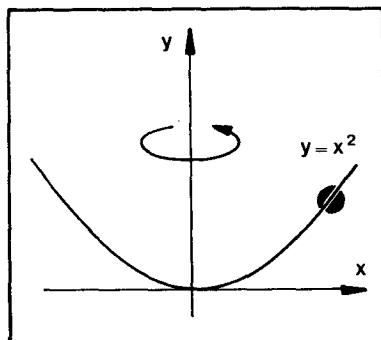
Emaitza: a) $\mathbf{r} = v_0 t \mathbf{i} + \left(y_0 - \frac{g t^2}{2} \right) \mathbf{j}$,

$$\mathbf{p} = m v_0 \mathbf{i} - m g t \mathbf{j} .$$

b) $\mathbf{L} = -m v_0 \left(y_0 + \frac{g t^2}{2} \right) \mathbf{k} .$

c) $\boldsymbol{\tau} = -m v_0 g t \mathbf{k} .$

- 16.- Burdin hari bat $y = x^2$ parabolaren itxura emanaz okertu da. Partikula batek burdin haritik irrist egin dezake marruskadurarik gabe. Burdin haria y ardatzarekiko biraka ari baldin bada, zein abiadura angeluarrez lortuko da partikularen oreka erlatiboa, parabolaren erpinetik kanpo egonik?



Emaitza: $\omega = \sqrt{2g}$.

- 17.- Partikula batek $y = a x^2$ parabolaren itxurako burdin haritik irrist egin dezake. Parabola geldi dago eta partikularen eta burdin hariaren arteko marruskadura-koefiziente estatikoak μ balio du. Zeintzu dira partikularen oreka-posizioak?

Emaitza: $-\frac{\mu}{2a} \leq x \leq +\frac{\mu}{2a}$ tartean.

- 18.- 2 kg-tako masa duen partikula baten posizio-bektorea, honelaxe adierazi da denboraren funtzioan:

$$\mathbf{r} = t^3 \mathbf{i} + 3t^2 \mathbf{j} + 2t \mathbf{k} ,$$

non luzerak metrotan adierazi diren eta denbora segundotan. Lor bitez:

- $t = 1\text{ s}$ aldiunean partikulak jatorriarekiko duen momentu angeluarra.
- Aldiune horretan partikularen gainean eragiten ari den indarra.

Emaitza: a) $\mathbf{L} = -12 \mathbf{i} + 8 \mathbf{j} - 6 \mathbf{k} ,$

b) $\mathbf{a} = 6t \mathbf{i} + 6 \mathbf{j} ,$

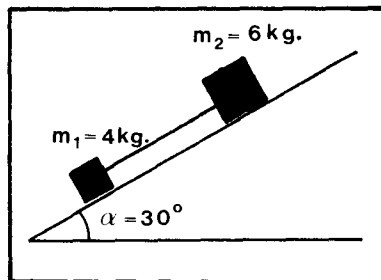
$\mathbf{F} = 12 \mathbf{i} + 12 \mathbf{j} .$

- 19.- Aireak partikula baten higidurari jarritako erresistentzia, partikularen abiaduraren karratuarekiko proportzionala dela kontsideraturik, zeintzu izango dira partikulak t aldiunean izango duen abiadura eta $\Delta t = t - t_0$ denbora-tartean eginiko ibilbidearen luzera, ibilbidea zuzena izanik eta t_0 aldiunean $v = v_0$ baldin bada? Grabitaterik ez dagoela suposatuko dugu.

Emaitza: $v = \frac{v_0}{1 + \frac{k}{m} v_0 \Delta t} , \quad l = \frac{m}{k} \ln \left(1 + \frac{k}{m} v_0 \Delta t \right) .$

- 20.- Irudian ageri diren bi masa, masarik gabeko barra zurrun batez loturik daude. Planoarekiko marruskadura-koefizienteek $\mu_1 = 0,25$ eta $\mu_2 = 0,5$ balio dute.

- Irudika ezazu bi masa hauen gainean eragiten ari diren indarren diagrama.
- Aurki ezazu sistemaren azelerazioa.
- Zer gertatuko litzateke $\mu_1 = \mu_2$ izango balitz?

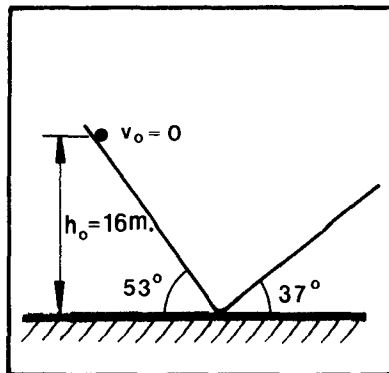


Emaitza: b) $a = 1,5 \text{ m s}^{-2} .$ c) $T = 5,09 \text{ N} .$

- d) Tentsioa anulatu egingo litzateke.

21.- Partikula bat geldirik utzi da, irudian ikus daitekeen posizioan. Berraren eta irudiko bi plano inklinatuen arteko marruskadura-koefiziente zinetikoak 0,5 balio du. Kalkula bitez:

- Punturik baxuenean partikulak izango duen abiadura.
- Bigarren planoan gora lortuko duen altuera.



Eraitza: a) 14 m s^{-1} .

b) 6 m .

22.- 10 g-tako harritxo batek, 10 m-tako erorketa librea eta gero, hareazko zoluarekin topo egin du, 7 cm-tako sakonerako zuloa egin duelarik. Kalkula bitez:

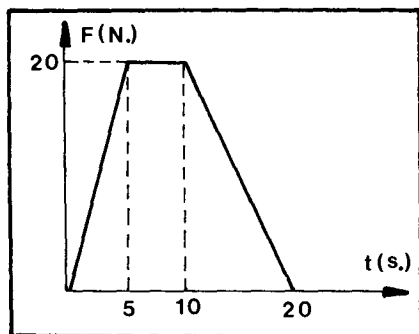
- Zoluarekin topo egiterako aldiunean harriak daraman abiadura.
- Zuloa egiten ari den bitartean harriak duen azelerazioa, berau konstantea dela suposatuz (hau da, azelerazioaren batezbesteko balioa).
- Hareak eragindako erresistentzi indarraren batezbesteko balioa.

Eraitza: a) 14 m s^{-1} . b) 14 m s^{-2} .

c) 14 N gorantz (harritxoaren pisua arbuiatuz).

6. GAIA

LANA ETA ENERGIA



6.1. Marruskadurarik gabeko zolu horizontal baten gainean 2 kg-tako gorputz bat kokatu da geldirik. Gorputzari denborarekiko aldakorra den indar horizontala aplikatu zaio. Indarraren aldakuntza irudiko grafikoan emanda dago, denboraren funtzioan. Kalkula bedi gorputzaren abiadura ondoko aldiuneetan: $t = 5 \text{ s}$, $t = 10 \text{ s}$ eta $t = 20 \text{ s}$.

Dakigun legez, edozein gorputzen gaineko indar erresultantearen bulkada eta gorputzaren momentu linealaren gehikuntza berdinak dira. Hots:

$$\int_{t_0}^t \mathbf{F} dt = m \mathbf{v} - m \mathbf{v}_0 \quad \text{edo} \quad \mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \frac{1}{m} \int_{t_0}^t \mathbf{F} dt .$$

Higidura zuzena delarik, bektoreen moduluak kontsideratuko ditugu. Beraz,

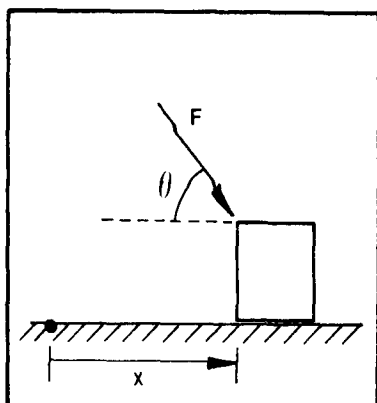
$$v = v_0 + \frac{1}{m} \int_{t_0}^t F dt .$$

Bestaldetik, aurreko integral mugatua, bulkada alegia, azalera batez dago neurtuta; eta gure kasuan oso irudi sinpleak ditugu, bi triangelu eta errektangelu bat, hain zuzen ere. Horretan finkatuz, ebazpen zuzena dugu hiru kasuetan:

$$\text{a) } v(5) = 0 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} 5 \cdot 20 \right) = 25 \text{ m s}^{-1} .$$

$$\text{b) } v(10) = 25 + \frac{1}{2} (5 \cdot 20) = 75 \text{ m s}^{-1} .$$

$$c) \quad v(20) = 75 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} 10 \cdot 20 \right) = 125 \text{ m s}^{-1} .$$



6.2. Irudiko blokearen gainean horizontalarekiko θ angelua osotzen duen F indarra aplikatu da. Nahiz indarraren balioa zein angeluarena, blokearen desplazamenduaren funtzioak dira, menpekotasuna ageri duten erlazioak ondokoak direlarik: $F = 6x$ eta $\cos\theta = 0,7 - 0,02x$, indarra newtonetan eta desplazamendua metrotan neurtuta daudelarik. Kalkula bedi indarraren lana, blokea $x = 10 \text{ m}$ puntutik $x = 20 \text{ m}$ puntura higitu den bitartean.

Lanaren definiziotik,

$$W = \int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} ,$$

eta gure kasuari dagokionez, ondoko magnitudeak ditugu:

$$\mathbf{F} = (F \cos\theta) \mathbf{i} + (-F \sin\theta) \mathbf{j} ,$$

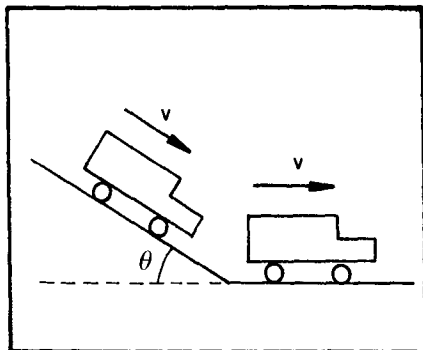
$$d\mathbf{r} = dx \mathbf{i} ,$$

$$\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = F \cos\theta \, dx = 6x (0,7 - 0,02x) \, dx .$$

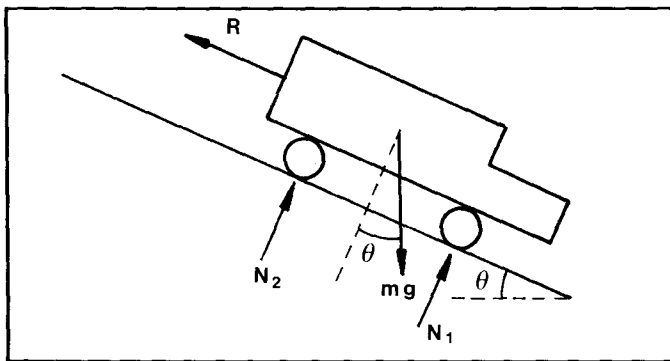
Beraz, eskatutako lana ondokoa izango da:

$$W = 6 \int_{10}^{20} x (0,7 - 0,02x) \, dx = 350 \text{ J} .$$

6.3. Horizontalarekiko $\theta = 37^\circ$ -tako angelua osotzen duen aldapa batetan behera, $m = 1000 \text{ kg}$ -tako masa duen furgoneta bat jaitsi da. Furgonetak itzalirik zerraman motoreak, eta airearen marruskadura zela kausa, $v = 60 \text{ km h}^{-1}$ -etako abiadura konstanteaz higitu da. Aldapa amaitu ondoren, furgoneta bide horizontalean baten gainean higitzen hasi da. Zenbateko potentzia erabili behar du motoreak, furgonetak aurreko abiaduraz iraun dezan?



Azter dezagun zein den, problemako abiaduraz aireak furgonetari egindion marruskadura-indarra. Aldapan behera furgoneta abiadura konstanteaz



jaitsi denez, beraren gainean eragin duten indar guztiek elkarrekiko orekan egon behar izan dute (ohar gaitezen, gurpiletan indar normalak agertzen direla soilik, furgonetak motoreak itzalirik bait darama). Hau da,

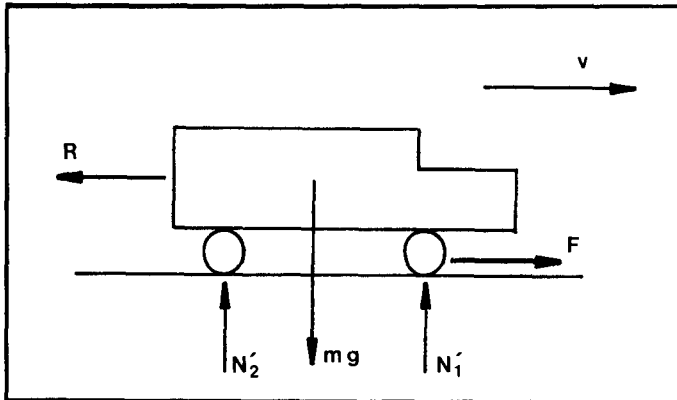
$$m g \sin \theta - R = 0 ,$$

$$N_1 + N_2 - m g \cos \theta = 0 .$$

Hemendik, interesatzen zaigun indarraren balioa hauxe da:

$$R = m g \sin \theta = 1000 \times 9,8 \times 0,6 = 5880 \text{ N} .$$

Ondoren, bide horizontalean, furgonetaren gaineko indarrak irudian daudenak dira (irudian furgonetak aurreko trakzioa darabilela suposatu da, berau nahiko arrunta bait da; baina problemaren planteamendua ez litzateke aldatuko, atzekoa izango balitz ere). Abiadura konstanteaz dirauenez gero, oreka-baldintzak bete behar dira, indarrak hurrengo irudikoak izanik



$$F - R = 0 ,$$

$$N'_1 + N'_2 - m g = 0 .$$

Hemen interesatzen zaigun indarra, F da:

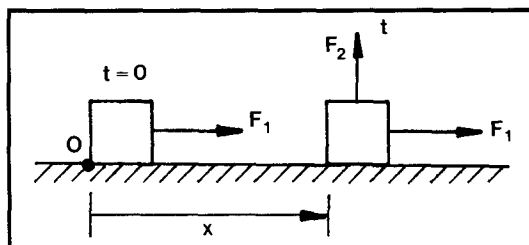
$$F = R = 5880 \text{ N} .$$

Azkenez, furgoneta mugitu duen indarra eta beraren abiadura ezagutuz, potentziaren kalkulua zuzena da:

$$P = F \cdot v = F \cdot v = 5880 \cdot 60 \frac{1000}{3600} = 98000 \text{ w} =$$

$$= 98 \text{ kw} = 13,3 \text{ zaldi-potentzia} .$$

6.4. m masadun partikula bat O puntuan geldirik dago denboraren jatorrian.



Partikula hori gainazal horizontal batetan hasi da higitzen, ondoko indar hauen eraginpean: F_1 , horizontal

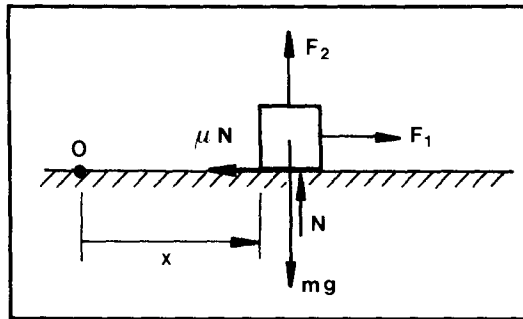
eta konstantea; $F_2 = k x$, bertikala, goranzkoa eta O puntuarekiko partikularen x desplazamenduaren proporzionala. Partikula eta gainazalaren arteko marruskadura-koefiziente dinamikoa μ da. Kalkula bitez:

a) Gainazalean partikulak ibilitako distantzia, hartatik alde egin arte.

b) Partikularen energia zinetikoa, gainazaletik alde egin duen aldiunean.

Datuak: $m = 1 \text{ kg}$, $F_1 = 10 \text{ N}$, $k = 2 \text{ N m}^{-1}$, $\mu = 0,1$.

a) Irudian, partikula lurra ukitzen ari den bitartean beraren gainean eragiten ari diren indarrak ageri dira.



Partikulak zolua ukitzen dirauen bitartean, indar bertikalen erresultanteak nulua izan behar du; hortaz:

$$F_2 + N - m g = 0 \rightarrow N = m g - k x .$$

Aurreko adierazpenak ukipena dagoen bitartean balio du soilik, ukipena desagertzean ez bait dago indar normalik. Hain zuzen, adierazpen horrek balioko digu, aldegitea zein puntutan gertatzen den zehazteko. Prezeski, x handitzean N gero eta txikiagoa da eta $N = 0$ balioa hartzean, ukipenik ez dagoela esan nahi du. Hortik aurrera, F_2 indarra gero eta handiagoa denez, lurretik alde egiten du partikulak. Beraz, gorantz alde egin arte zolu gainean ibilitako distantzia, ondokoa da:

$$N = 0 \rightarrow d = \frac{m g}{k} = \frac{1 \times 9,8}{2} = 4,9 \text{ m} .$$

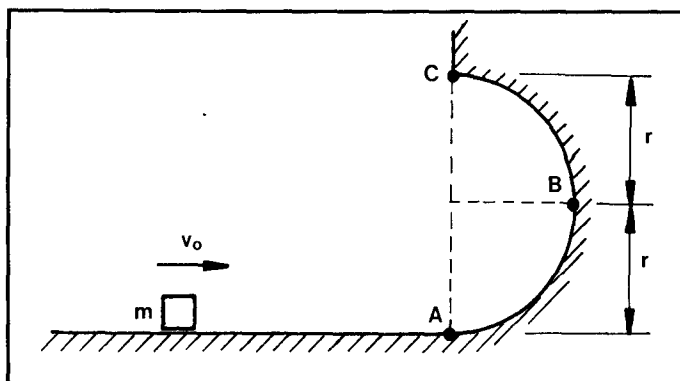
b) Dakigunez, partikularen energia zinetikoaren aldakuntza eta beraren gainean eragindako lana, guztiz berdinak dira. Indar bertikalek ez dute lanik egiten, desplazamendua horizontala bait da. Bestalde, indar horizontalek egindako lana aztertzean, F_2 indarrak egindako lanaz gain, marruskaduraz galdutakoa ere hartu behar da kontutan, hots, indar horizontal erresultantea ondokoa dela kontsideratu behar da:

$$F = F_1 - \mu N = F_1 - \mu (m g - k x) .$$

Masak lurra utzi arte indar honek eginiko lana, hau da, energia zinetikoaren gehikuntza, hauxe da:

$$\Delta T = \int_0^{4,9} [F_1 - \mu (m g - k x)] dx = 46,6 \text{ J} .$$

6.5. Irudiko m masadun partikula zolu horizontal baten gainean higitzen ari da, v_0 abiaduraz. A puntuan, zolua r erradiodun pista erdizilindrikoarekin elkartu da. Gai-nazal guztiak leunak dira. Kalkula bitez:



- v_0 abiaduraren baliorik txikiena, partikula C puntura hel dadin.
- Aurreko kasuan B puntuan pista erdizilindrikoak partikularen gainean egindako indarra .
- C puntutik aurrera, partikulak ibilbide paraboliko bat deskribatuko du, zolu horizontalarekin topo egin arte. Zein izango da partikularen abiaduraren balioa, zolura heltzean?

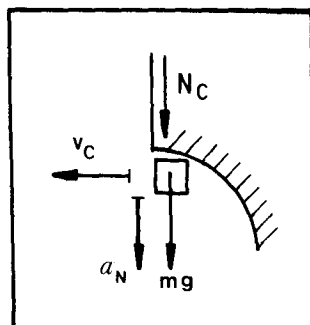
Datuak: $m = 0,1 \text{ g}$, $r = 25 \text{ cm}$.

a) Ezer baino lehen, kalkula dezagun C puntuan partikulak behar duen abiadura txikiena. Aipaturiko puntuan partikularen gainean eragiten ari diren indarren eskema dakusagu irudian. N_C eta $m g$ indarrek a_N azelerazio normala emango diote partikulari, ondoko ekuazioaren arauera:

$$N_C + m g = m a_N = m \frac{v_C^2}{r} ,$$

eta hortik indar normalaren balioa atera dezakegu:

$$N_C = m \left(\frac{v_C^2}{r} - g \right) .$$



Erraz ikus daitekeenez, v_C zenbat eta handiagoa izan, N_C hainbat eta handiagoa, eta alderantziz. Baina N_C indarraren balio minimoa zero da (N_C -ren balio negatiboek ez dute inolako esanahirik, indar honek ezin bait du bere norantza aldatu). Beraz, v_C -ren balio minimoa ondokoa izango da:

$$N = 0 \rightarrow v_C = \sqrt{r g} = 70 \sqrt{5} \text{ cm s}^{-1} .$$

v_C -ren balio minimoa lortu ondoren, v_0 -ren balio minimoa erdiesteko, ondoko arrazonamenduari helduko diogu. Ibilbide osoan, partikularen gaineko indar bakarrak hauexek dira: pisua eta pistaren erreakzio normala. Lehenengoa, oso ondo dakigunez, kontserbakorra da, eta bigarrenak ez du lanik egiten, ibilbidearen perpendikularra bait da. Beraz, partikularen energia mekanikoak konstante dirau, eta orduan,

$$\frac{1}{2} m v_0^2 + m g y_0 = \frac{1}{2} m v_C^2 + m g y_C ,$$

$$v_0 = \sqrt{v_C^2 + 2 g (y_C - y_0)} = 350 \text{ cm s}^{-1} .$$

b) Energia mekanikoaren kontserbazioa berriz aplikatuz,

$$\frac{1}{2} m v_0^2 + m g y_0 = \frac{1}{2} m v_B^2 + m g y_B ,$$

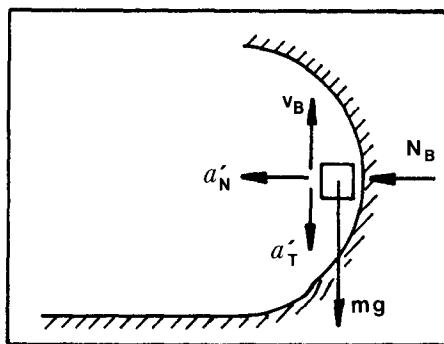
$$v_B = \sqrt{v_0^2 - 2 g (y_B - y_0)} = 70 \sqrt{15} \text{ cm s}^{-1} .$$

B puntutik pasatzean partikularen gainean eragiten ari diren indarren eskema, hurrengo orrialdeko irudian ikus daiteke. N_B indarra soilik aurkitu behar dugunez gero, norabide horizontalari dagokion ekuazioa

besterik ez dugu erabiliko, hau da,

$$N_B = m a'_N = m \frac{v_B^2}{r} ,$$

$$N_B = 294 \text{ din} .$$



c) Azken atala ebazteko, ez dugu inolako eragiketak egin behar, arrazonomendu sinple hau nahikoa izango zaigularik: $\mathcal{C}$ puntutik zolua jo arte partikularen gainean eragiten ari den indar bakarra, pisua da (aireak eragindako marruskadura arbuaturik). Eta pisua indar kontserbakorra denez, partikulak bere energia mekanikoa kontserbatzen dirau. Bestalde, zolura heltzean, hasieran zuen energia potentzial berbera edukiko du berriz, eta beraz, energia zinetiko berbera eta abiadura berbera ere bai, hau da, 350 cm s^{-1} .

6.6. m masa duen partikula baten energia potentziala, O puntu finko batekiko distantziaren funtzioan, hauxe da:

$$V = -\frac{k m}{a} , \quad |x| \leq a \quad \text{espazioaldean,}$$

$$V = -\frac{k m}{r} , \quad r = |x| > a \quad \text{espazioaldean,}$$

a delakoa distantzia ezaguna delarik. Lor bitez:

- Partikularen gainean eragiten ari den indar zentral eta kontserbakorra, aipaturiko bi espazioaldeetan.
- O puntutik $r = 9a$ distantziara partikula energia zinetikorik gabe utzirik, zer balio izango dute partikularen energia zinetikoak eta abiadurak, O puntutik $r = a$ distantziara dagoenean?
- Azal bedi partikularen higidura, kualitatiboki eta kuantitatiboki, grafiko baten bidez, energiari buruzko arrazonomenduez baliaturik.

a) Dakigunez, indar kontserbakor bakoitza eta berari elkartutako energia potentziala, honelaxe daude erlazionatuta:

$$\mathbf{F} = -\text{grad } V .$$

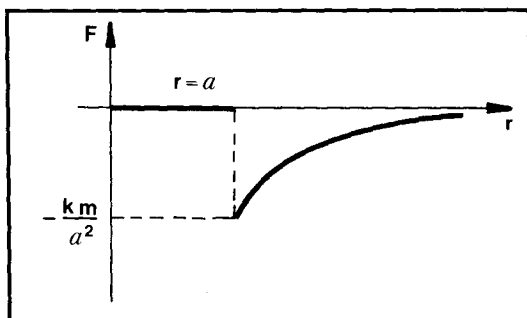
Beraz, $r \leq a$ espazioaldean:

$$F = -\text{grad} \left(-\frac{k m}{a} \right) = 0 .$$

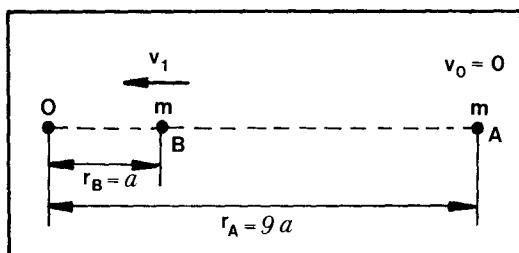
$r > a$ den espazioaldean, ordea:

$$F = -\text{grad} \left(-\frac{k m}{r} \right) = k m \left[\frac{d}{dr} \left(\frac{1}{r} \right) \right] \mathbf{u}_r = -\frac{k m}{r^2} \mathbf{u}_r ,$$

non $\mathbf{u}_r$ delakoa, O puntu finkotik m masa dagoeneko punturantz orientaturiko bektore unitarioa den. Alboko irudian F eta r -ren arteko erlazioa ageri da grafikoki.



b) Partikula indar kontserbakor baten menpean dagoenez gero, energia mekanikoaren kontserbazioa erabil dezakegu, hau da,



$$T_A + V_A = T_B + V_B ,$$

$$0 - \frac{k m}{9 a} = T_B - \frac{k m}{a} ,$$

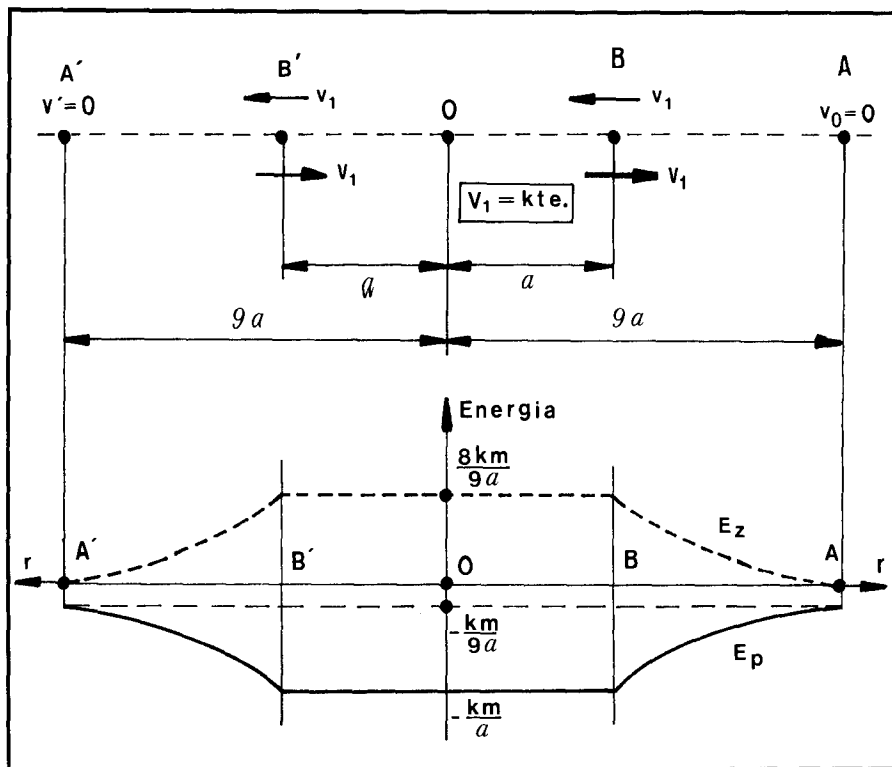
$$T_B = \frac{8 k m}{9 a} .$$

Honelatan, ba, abiadura ondokoa izango da:

$$\frac{1}{2} m v_B^2 = \frac{8 k m}{9 a} \longrightarrow v_B = \frac{4}{3} \sqrt{\frac{k}{a}} .$$

c) v_B abiadura lortu ondoren, aztertzen ari garen partikula, energia potentziala konstantea den espazioaldean sartuko da. Energia mekanikoak konstante iraun behar duenez gero, energia zinetikoak eta, beraz, abiadurak

ere, konstante iraungo dute. Baina O puntutik pasatu eta gero, a distantziaraino urruntzen den aldiunean, partikula energia potentziala aldakorra den espazioaldean sartuko da berriz, eta balaztatu egingo da, hasierako puntuaren simetrikoan gelditu arte. Modu honetan segituko du, higidura oszilakor periodikoan. Ondoko irudietan grafikoki azaldu da partikularen higidura.



6.7. Harri bat bertikalki jautiki da A puntutik $v_A = 16 \text{ m s}^{-1}$ -etako abiaduraz, $h = 10 \text{ m}$ -tako altueraraino heldu delarik (B puntua). Harriaren masak $m = 100 \text{ g}$ balio du. Kalkula bitez:

- Igoera osoan galdutako energia mekanikoa.
- Aireak eragindako marruskadura-indarraren batez-besteko balioa.
- Erorketan, igoeran galdu duen adinako energia galduko duela suposatuz (zeina guztiz zehatza ez bada ere, nahiko hurbilketa ona kontsidera daitekeen), kalkula bedi harriaren abiadura hasierako puntura helduko den aldiunean.

a) Energia mekanikoaren aldakuntza ondokoa dugu:

$$\Delta E = (T_B + V_B) - (T_A + V_A) .$$

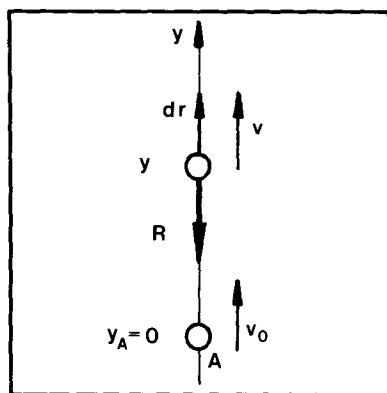
$$\Delta E = m g h - \frac{1}{2} m v_A^2 = -3 J \quad .$$

Emaitzan ageri den zeinu negatiboak, energia galdu egin dela esan nahi du, azkenean hasieran baino energia mekaniko gutxiago bait dago.

b) Hain zuzen ere, airearen R marruskadura-indarrak egindako lana, horixe berori da:

$$W_R = \Delta E = -3 J \quad .$$

Bestaldetik, definizioz, aipaturiko lanak ondokoa izan behar du:



$$W_R = \int_A^B \mathbf{R} \cdot d\mathbf{r} = \int_A^B -R \mathbf{j} \cdot dy \mathbf{j} = - \int_{y_A}^{y_B} R dy \quad ,$$

$$-3 = - \int_{y_A}^{y_B} R dy \quad .$$

Eta R indarraren batezbesteko balioa, definizioz, hauxe da:

$$R = \frac{1}{y_B - y_A} \int_{y_A}^{y_B} R dy = \frac{1}{10} \cdot 3 = 0,3 N \quad .$$

c) Aurreko atalean igoeraren kasuan aplikatu dugun erlazioa berriro erorketan erabiliz, hauxe dugu:

$$W'_R = (T'_A + V'_A) - (T_B + V_B) ,$$

non T'_A eta V'_A harriak hasierako puntura itzultzean dituen energia zinetikoa eta potentziala diren, ondoko balioak dituztelarik, hurrenez hurren:

$$T'_A = \frac{1}{2} m v'^2_A = \frac{0,1}{2} v'^2_A \quad \text{eta} \quad V'_A = 0 .$$

Beraz:

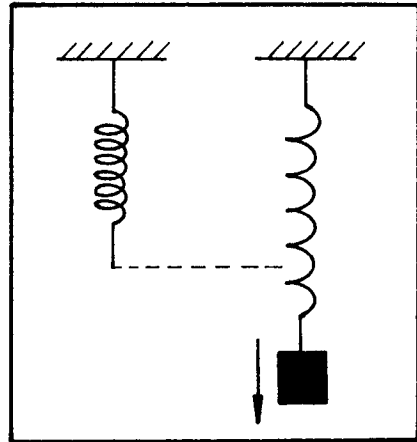
$$-3 = \frac{0,1}{2} v'^2_A - 9,8 \rightarrow v'_A = 11,67 \text{ m s}^{-1} .$$

3.- $k = 49 \text{ N m}^{-1}$ -etako konstantea duen eta sabaitik zintzilik dagoen malguki batetik, $m = 250 \text{ g}$ -tako gorputz bat eseki da bapatean. Malgukiaren masa arbuigarria da. Kalkula bitez:

- Gorputzak hartuko duen abiadurarik handiena.
- Malgukiaren deformaziorik handiena.

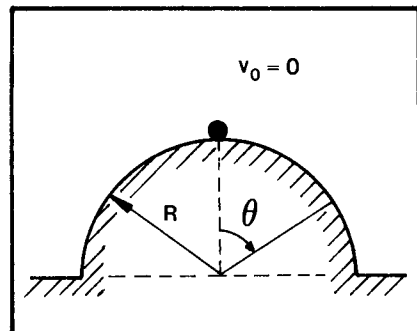
Emaitza: a) $0,7 \text{ m s}^{-1}$.

b) $0,1 \text{ m}$.



4.- Partikula bat R erradiodun tontor erdiesferiko eta leun baten punturik altuenean dago kokaturik. Hasierako abiadurarik gabe irrist egiten hasi baldin bada, lor bitez:

- Zein puntutan egingo du alde partikulak tontorretik?
- Zenbateko abiadura izango du partikulak une horretan?
- Zenbateko abiaduraz helduko da lurrera?

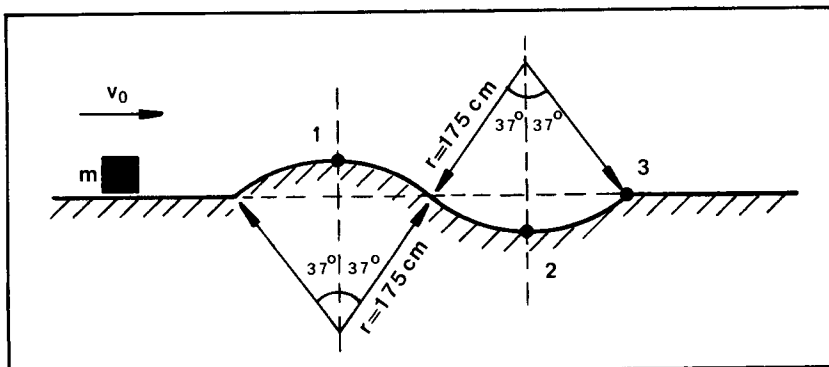


Emaitza: a) Aldentze-puntua: $\theta = \arccos \frac{2}{3}$.

b) $\sqrt{\frac{2}{3} gR}$.

c) $\sqrt{2gR}$.

5.-



$m = 10$ g-tako masa duen partikula bat, irudian adierazi den pistaren gainean higitzen ari da, marruskadurarik gabe. Kalkula bitez:

- v_0 abiaduraren baliorik handiena, partikula zolutik alden ez dadin (3 puntura iritsi baino lehen, noski).
- Abiadura horrekin hasiz, 2 puntutik iragatean pistak partikulari eginiko erreakzioa.
- Hasierako baldintza horiekin, 3 puntuan partikulak pista uztean, zer altuerataraino helduko da?

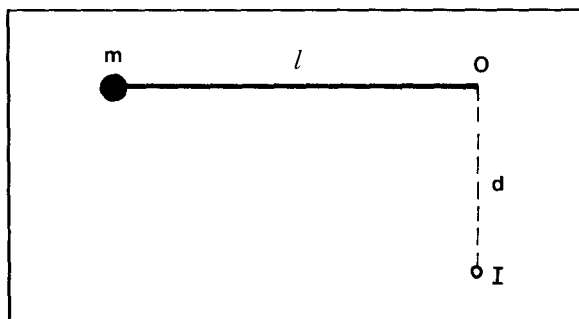
Emaitza:

a) $v_0 = 370 \text{ cm/s}$.

b) $N_2 = 2,16 \times 10^4 \text{ din}$.

c) $h = 25,3 \text{ cm}$.

- 6.- m masako partikula bat, masa gabekoa den eta l luzera duen hari baten mutur batetan lotuta dago, hariaren beste muturra O puntuan tinko dagoelarik. O puntuaren bertikal berean eta d distantzia beheago, I iltzea jarri da. Hasieran, haria horizontalki eutsi da (ikus irudia) eta partikula, geldirik. Sistema libreki utzirik, partikula jaitsi egingo da, arku zirkular baten laurdena egingo duelarik, hariak iltzearekin topo egin arte. Aurki bitez:

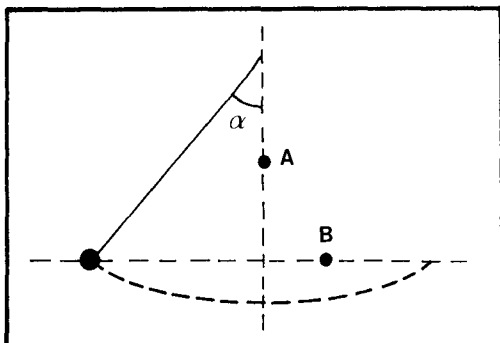


- d distantziaren balio minimoa, partikulak iltzearen inguruan zirkunferentzia osoa deskriba dezan.
- Hariaren tentsioa, iltzearekin topo egin aurretiko aldiunean eta ondoko aldiunean.

Emaitza: a) $d = \frac{3}{5} l$.

b) $3 m g$; $6 m g$.

- 7.- *Bi Zientzia Berri* izeneko lanean, Galileo-k pendulu baten azterketa berezia egin zuen. Berez higitzen uzten zen pendulua, hasieran α angelua osotuz eta hasierako abiadurarik gabe, baina A iltzeak oztopoa jartzen zion pendulari.

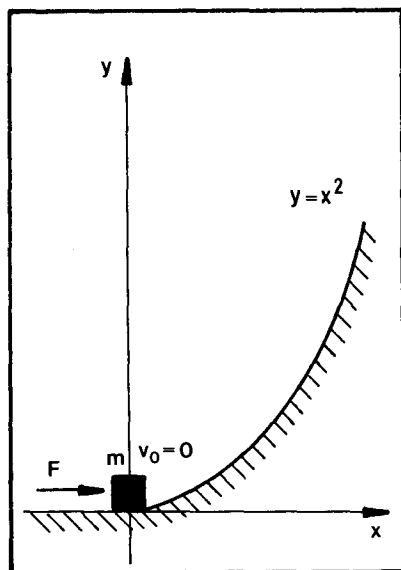


- Zer altuerataraino helduko da penduluaren bola?
- Eta A-n egon ordez, iltzea B puntuan jartzen bada, noraino iritsiko da?

Erantzunak diagramen bidez adieraz.

8.- m masako partikula bat irudiko pista parabolikoaren punturik baxuenean dago geldi. $t = 0$ aldi-
unetik aurrera F indar horizontal
eta konstantea aplikatu zaio eta
partikula pistan gora higitzen hasi
da. Pistak ez du marruskadurarik.

- Zein posiziotan lortuko du partikulak abiadurarik handiena?
- Kalkula bedi abiadura maximo horren balioa.
- Abiadura maximoa lortuko duen aldiunean, F indarra desagertuko balitz, noraino igongo litzateke partikula? Eta, zenbateko abiaduraz itzuliko litzateke gero hasierako puntura?



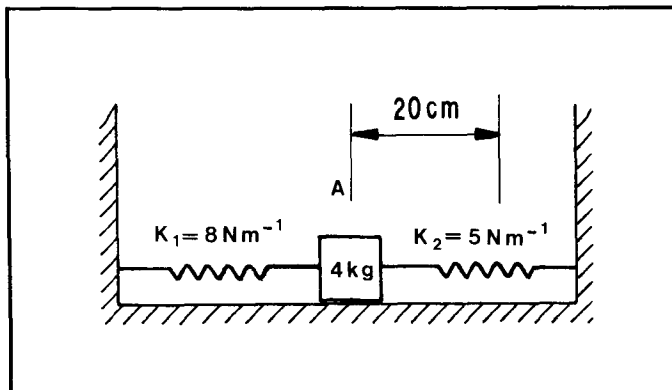
Emaitza: a) $x = \frac{F}{2mg}$; $y = \frac{F^2}{4m^2g^2}$.

b) $v_{max} = \frac{F}{m\sqrt{2g}}$.

c) $h = \frac{F^2}{2m^2g^2}$; $v = \frac{F}{m\sqrt{g}}$.

9.- Hurrengo orriko irudiko posizioan bi erresorteak ezer luzatu gabe daude. 4 kg -tako masa A-tik B-ra 20 cm eramán ondoren B puntuan geldi egonik askatzean, lor bitez:

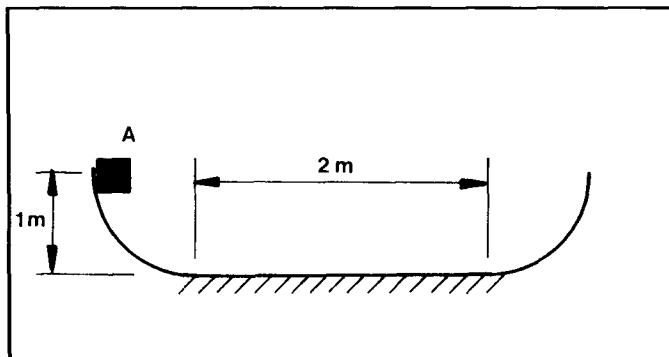
- A-tik pasatzean blokeak izango duen abiadura.
- Ezker alderantz egingo duen biderik handiena.



Emaitza: a) $0,36 \text{ m/s}$.

b) 20 cm .

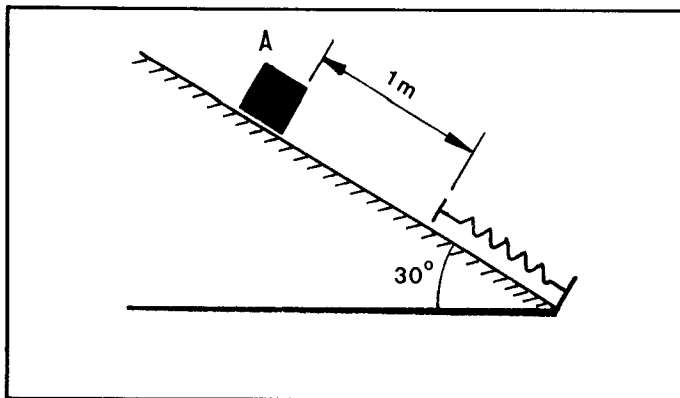
- 10.- Gorputz bat irudiko pistan higi daiteke. Mutur biak kurbatuak dira eta ez dute marruskadurarik. Parte laun eta zuzenak 2 m -tako luzera du



eta beraren eta gorputzaren arteko marruskadura-koefizienteak $\mu = 0,2$ balio du. Gorputza $h = 1 \text{ m}$ altueran dagoen A puntuan askatu da. Non geratuko da azkenean gorputza?

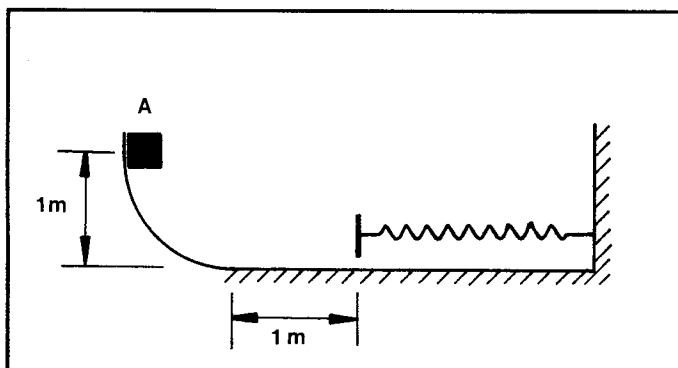
Emaitza: Pistaren erdian, gainazal launaren gainean 5 metro egin ondoren.

- 11.- 1 kg -tako A gorputza $\mu = 0,1$ marruskadura-koefizienteaz jaisten ari da 30° -tako malda duen plano batetan behera, hurrengo orrialdeko irudian adierazi den bezala. Hasierako abiadura $v_0 = 0$ da eta metro batetako bidea egin ondoren, $k = 200 \text{ N m}^{-1}$ konstantea duen malguki baten kontra doa. Zein izango da malgukiaren deformazio maximoa?



Emaitza: $0,22 \text{ m}$.

- 12.- Lor bedi irudiko malgukiak duen konpresio maximoa, 1kg -tako masa A puntutik erortzen uztean. Malgukiaren berreskurapen-konstanteak $k = 10^5 \text{ N m}^{-1}$ balio du.



Parte zirkularrak ez du marruskadurarik eta parte horizontalaren marruskadura-koefizienteak $\mu = 0,1$ balio du.

Emaitza: $0,013 \text{ m}$.

- 13.- Partikula bat lerro zuzen batetan higitzen ari da, beraren energia osoak $E = 6 \text{ J}$ eta energia potentzialak $V = 10 + 5x + x^2$ (x metroan eta V jouletan) balio dutelarik.

- Zeintzu punturen artean gertatuko da higidura?
- Zein puntutan du abiadurarik handiena?
- Zein puntutan ez du indarrik eragingo partikularen gainean?

Emaitzak: a) $-4 \leq x \leq -1$

b) $x = -\frac{5}{2}$. c) $x = -\frac{5}{2}$.

- 14.- Partikula bat marruskadurarik gabeko lerro zuzen batetan zehar higitzen ari da, indar kontserbakor baten eraginpean. Indar kontserbakorrari lotutako energia potentziala, hauxe da: $V = x^2 - 6x - 72 \text{ J}$. (x delakoa partikulatik jatorrirainoko distantzia da, metrotan neurturik).

- Zeintzu punturen artean higituko da partikula, beraren energia mekaniko osoa $E = 0$ baldin bada?
- Lor bedi partikulak eduki beharko lukeen energia mekanikoa, higiduraren mugak aurreko kasuan baino bi aldiz zabalagoak izateko. Kasu honetan, zenbat balioko luke partikularen energia zinetiko maximoak?

Emaitzak: a) $-6 \leq x \leq 12 \text{ m}$.

$$\text{b) } E = 243 \text{ J} , \quad T_{\max} = 324 \text{ J} .$$

- 15.- Hidrogenoaren atomoari buruzko oso hurbilketa trauskil batetan, partikula bat (elektroia) a erradiodun ibilbide zirkular uniformeak deskribatzen ari da beste partikula finko baten inguruan. Partikulen arteko interakzioari dagokion energia potentzialak $V = -k/r$ balio du, r delakoa partikulen arteko distantzia izanik. Partikula higikorren masa m dela jakinik, lor bitez:

- Partikula higikorren energia zinetikoa.
- Geldi dagoen partikularekiko, partikula higikorrek duen momentu angeluarra.
- Partikula higikorra bere orbitatik $2a$ erradiodun orbita zirkular batetara pasa erazteko behar den energia.
- Sistema desegiteko behar den energia, hots, bi partikulak elkarretatik infinituraino urruntzeko behar den energia.

$$\text{Emaitzak: a) } \frac{k}{2a} . \quad \text{b) } \sqrt{kma} .$$

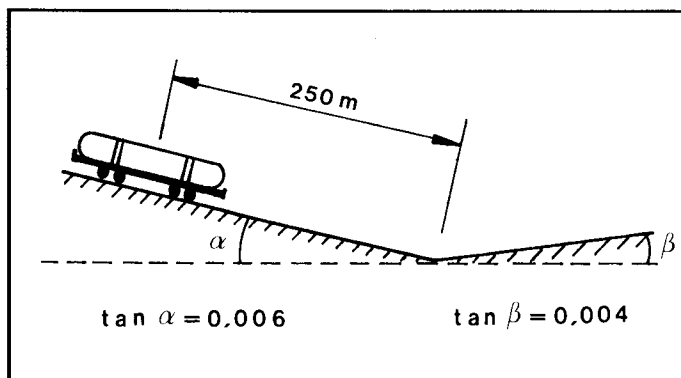
$$\text{c) } \frac{k}{4a} . \quad \text{d) } \frac{k}{2a} .$$

- 16.- Partikula bat $V = 3x^2 - x^3$ (x metrotan eta V jouletan neurturik) energia potentzialari lotutako indarraren eraginpean higitzen ari da marruskadurarik gabe, lerro zuzen batetan.

- Egin bedi energia potentzialaren adierazpide grafikoa.
- Aipaturiko irudiaren bidez, erakuts bedi indarraren norantza puntu desberdinetan, bide batez oreka-posizioak adierazirik.
- Aipaturiko irudian finkatuz, azal bedi kualitatiboki partikularen higidura, energia mekanikoaren ondoko balioetarako:

$$E < 0 , E = 0 , 0 < E < 4 , E = 4 , E > 4 .$$

- 17.- $m = 11$ tonatako bagoi bat pausagunetik hasi da higitzen $0,6\%$ -ko malda duen trenbide batetan, horrela 250 m jaitsi delarik. Jaitsieran irabazitako momentu lineala dela medio, ondoren $0,4\%$ -ko malda duen trenbidean gora 300 m egin ditu. Lor bitez:



- Ibilbide osoan zehar bagoiak galdutako energia.
- Bagoiaren higiduraren kontrako erresistentzi indarraren batezbesteko balioa.

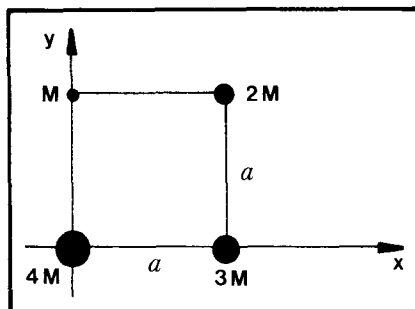
Eraitza: a) 32340 J .

b) $58,8\text{ N}$.

7. GAIA

**PARTIKULA-SISTEMEN
DINAMIKA**

7.1. Lor bedi, M , $2M$, $3M$ eta $4M$ masa duten lau puntu materialek a aldeko karratu baten erpinetan kokaturik egonik osotzen duten partikula-sistemaren masa-zentrua.



Dakigunez,

$$\mathbf{r}_{MZ} = \frac{\sum_i m_i \mathbf{r}_i}{\sum_i m_i} .$$

Osagaitan banatuz:

$$x_{MZ} = \frac{\sum_i m_i x_i}{\sum_i m_i} = \frac{M \cdot 0 + 2M a + 3M a + 4M \cdot 0}{M + 2M + 3M + 4M} ,$$

$$x_{MZ} = \frac{a}{2} ,$$

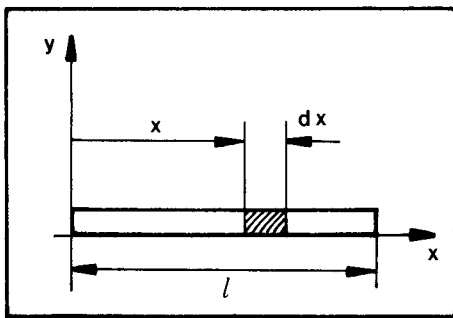
$$y_{MZ} = \frac{\sum_i m_i y_i}{\sum_i m_i} = \frac{M a + 2M a + 3M \cdot 0 + 4M \cdot 0}{M + 2M + 3M + 4M} ,$$

$$y_{MZ} = \frac{3}{10} a .$$

Bestalde, argi dagoenez:

$$z_{MZ} = 0 .$$

- 7.2. l luzeradun haga batek luzera unitateko μ balioko masa du. μ delako hau aldatuz doa punturen abszisarekin, ondoko adierazpenaren arauera: $\mu = \mu_0 (1 + \alpha x)$, α eta μ_0 konstanteak izanik. Lor bedi hagaren masa-zentruaren posizioa.



Masaren banaketa jarraia denez:

$$x_{MZ} = \frac{\int x \, dm}{\int dm} .$$

Irudiko masa-elementu diferentziala hartuz,

$$dm = \mu \, dx = \mu_0 (1 + \alpha x) \, dx .$$

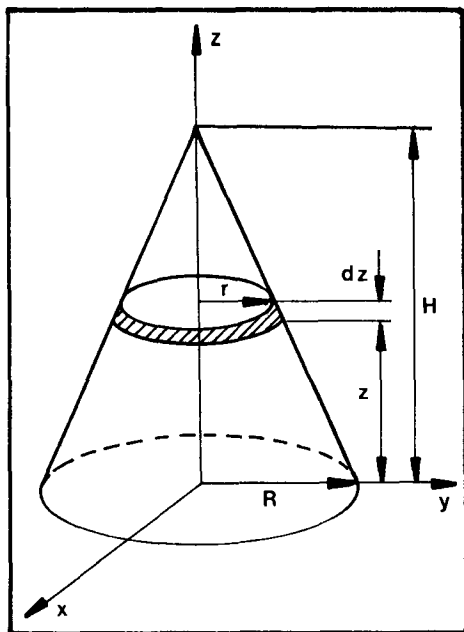
Beraz,

$$\begin{aligned} x_{MZ} &= \frac{\int_0^l x \, \mu_0 (1 + \alpha x) \, dx}{\int_0^l \mu_0 (1 + \alpha x) \, dx} = \frac{\left[\mu_0 \frac{x^2}{2} + \mu_0 \alpha \frac{x^3}{3} \right]_0^l}{\left[\mu_0 x + \mu_0 \alpha \frac{x^2}{2} \right]_0^l} , \\ x_{MZ} &= \frac{\mu_0 \frac{l^2}{2} + \mu_0 \alpha \frac{l^3}{3}}{\mu_0 l + \mu_0 \alpha \frac{l^2}{2}} = \frac{\frac{3 + 2\alpha l}{6}}{\frac{2 + \alpha l}{2}} l . \end{aligned}$$

Azkenean ondoko emaitza dugu:

$$x_{MZ} = \frac{l}{3} \frac{3 + 2\alpha l}{2 + \alpha l} .$$

- 7.3. Demagun H altuera eta R erradioko oinarria dituen kono homogenoa. Non dago beraren masa-zentrua?



Simetriad:

$$x_{MZ} = 0, y_{MZ} = 0 \quad .$$

Beraz, lortu behar dugun koordinate bakarria z_{MZ} da. Masa jarraia izanik:

$$z_{MZ} = \frac{\int z \, dm}{\int dm} \quad .$$

Har ditzagun irudian adierazi denaren moduko masa-elementu diferentzialak, hots,

$$dm = \rho \pi r^2 dz \quad .$$

Bestalde, triangeluen antzekotasunaz:

$$\frac{r}{R} = \frac{H - z}{H} \quad \rightarrow \quad r = \frac{R}{H} (H - z) \quad .$$

Beraz:

$$\begin{aligned} \int z \, dm &= \int_0^H \rho \frac{\pi R^2}{H^2} z (H - z)^2 dz \\ &= \frac{\rho \pi R^2}{H^2} \int_0^H (H^2 z + z^3 - 2H z^2) dz \quad , \end{aligned}$$

$$\int z \, dm = \frac{\rho \pi R^2}{H^2} \left[\frac{H^2 z^2}{2} + \frac{z^4}{4} - \frac{2H z^3}{3} \right]_0^H$$

$$= \frac{1}{12} \rho \pi R^2 H^2 \quad .$$

Modu berean:

$$\begin{aligned} \int dm &= \rho \pi \frac{R^2}{H^2} \int_0^H (H - z)^2 dz \\ &= -\rho \pi \frac{R^2}{H^2} \left[\frac{(H - z)^3}{3} \right]_0^H = \frac{1}{3} \rho \pi R^2 H . \end{aligned}$$

Azkenean hauxe dugu:

$$z_{MZ} = \frac{\frac{1}{12} \rho \pi R^2 H^2}{\frac{1}{3} \rho \pi R^2 H} = \frac{H}{4} .$$

7.4. Bi partikularen masak 1 kg-takoak dira eta inertzi sistema batekiko beren posizio-bektoreak ondokoak ditugu: $\mathbf{r}_1 = 2t^2 \mathbf{i}$, $\mathbf{r}_2 = 2(t + 1) \mathbf{j}$. Lor bitez partikula-sistemaren momentu lineala, koordenatu-jatorriarekiko momentu angeluarra eta energia zinetikoa:

- a) Hasieran emandako erreferentzi sisteman.
- b) Masa-zentruaren sisteman.

a) Lehenik, partikula bakoitzaren abiadura kalkulatu dugu:

$$\mathbf{v}_1 = \dot{\mathbf{r}}_1 = 4t \mathbf{i} ,$$

$$\mathbf{v}_2 = \dot{\mathbf{r}}_2 = 2 \mathbf{j} .$$

Beraz, erreferentzi sistema horretan:

- momentu lineala:

$$\mathbf{p} = m_1 \mathbf{v}_1 + m_2 \mathbf{v}_2 \rightarrow \mathbf{p} = 4t \mathbf{i} + 2 \mathbf{j}$$

- jatorriarekiko momentu angeluarra:

$$\mathbf{L} = \sum_i \mathbf{r}_i \wedge \mathbf{p}_i \rightarrow$$

$$L = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2t^2 & 0 & 0 \\ 4t & 0 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 2(t+1) & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

- energia zinetikoa:

$$T = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \frac{1}{2} 1 \cdot (4t)^2 + \frac{1}{2} 1 \cdot 2^2 = 8t^2 + 2.$$

b) Lor dezagun lehenik masa-zentruaren posizio-bektorea:

$$\mathbf{r}_{MZ} = \frac{\sum_i m_i \mathbf{r}_i}{\sum_i m_i} = \frac{1 \cdot 2t^2 \mathbf{i} + 1 \cdot 2(t+1) \mathbf{j}}{1+1} = t^2 \mathbf{i} + (t+1) \mathbf{j}.$$

Beraz, sistema berri honetan ondoko posizio-bektoreak eta abiadurak ditugu:

$$\mathbf{r}'_1 = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_{MZ} = 2t^2 \mathbf{i} - [t^2 \mathbf{i} + (t+1) \mathbf{j}] = t^2 \mathbf{i} - (t+1) \mathbf{j},$$

$$\mathbf{r}'_2 = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_{MZ} = 2(t+1) \mathbf{j} - [t^2 \mathbf{i} + (t+1) \mathbf{j}] = -t^2 \mathbf{i} + (t+1) \mathbf{j}.$$

$$\mathbf{v}'_1 = \frac{d \mathbf{r}'_1}{dt} = 2t \mathbf{i} - \mathbf{j},$$

$$\mathbf{v}'_2 = \frac{d \mathbf{r}'_2}{dt} = -2t \mathbf{i} + \mathbf{j}.$$

Eta hauek erabiliz:

- momentu lineala:

$$\mathbf{p}' = \sum_i m_i \mathbf{v}'_i = 1 \cdot (2t \mathbf{i} - \mathbf{j}) + 1 \cdot (-2t \mathbf{i} + \mathbf{j}) = \mathbf{0},$$

aldez aurretik espero genezakeen bezala.

- momentu angeluarra (masa-zentruarekikoa):

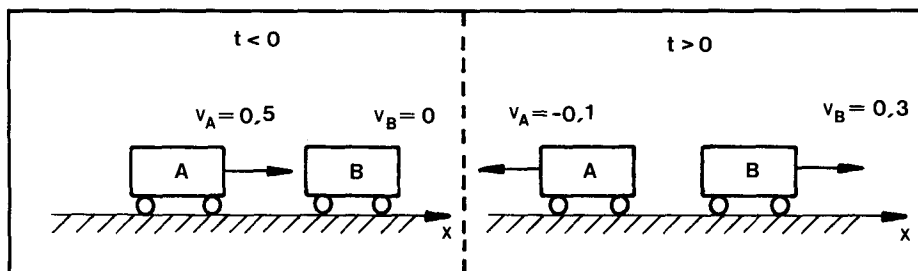
$$x_{MZ} = \frac{\sum_i m_i x_i}{\sum_i m_i} = 0,3 \text{ m} .$$

Hau da: $a = 0,6 \text{ m} .$

Azken batez, x norabidean sistema hau isolaturik dagoenez gero, masa-zentruaren x_{MZ} koordinatuak konstante irauten du prozesu osoan.

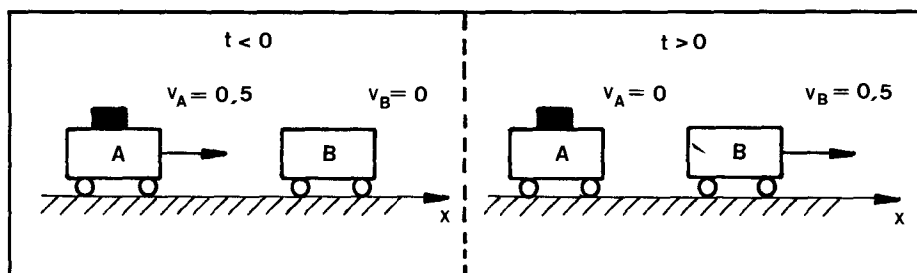
7.6. *A* eta *B* gurdiak elkarrekin talka egiteko moduan higitu dira. Hasieran *B* geldirik zegoen eta *A* eskuinerantz etorri da $0,5 \text{ m/s}$ -tako abiaduraz. Talkaren ondoren, *A* delakoa errebotatuta irten da aurreko higiduraren lerro berean $0,1 \text{ m/s}$ -tako abiaduraz eta *B* delakoa eskuinerantz higitu da $0,3 \text{ m/s}$ -tako abiaduraz.

Bigarren experimentu batetan, *A*-ren gainean 1 kg -tako masa bat jarri da, geldi dagoen *B*-ren kontra $0,5 \text{ m/s}$ -tako abiaduraz bidali delarik. Talkaren ondoren, *A* geldi geratu da eta *B* eskuinerantz joan da $0,5 \text{ m/s}$ -tako abiaduraz. Lor bedi gurdi bakoitzaren masa.



x norabidean sistema hau isolaturik dagoenez, momentu linealaren kontserbazioaren printzipioa aplika dezakegu. Lehenengo kasuan,

$$m_A \cdot 0,5 + m_B \cdot 0 = m_A (-0,1) + m_B \cdot 0,3 .$$



Bigarren experimentuaren kasuan gauza berbera eginez,

$$(m_A + 1) \cdot 0,5 + m_B \cdot 0 = (m_A + 1) \cdot 0 + m_B \cdot 0,5 .$$

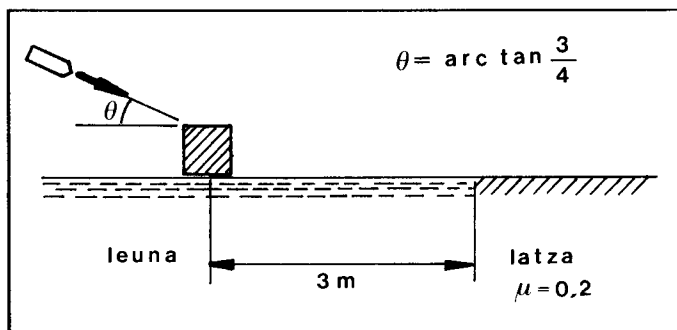
Bi ekuazio hauek erabiliz, ebatzi egingo dugu problema.

Bigarrenetik: $m_B = m_A + 1$.

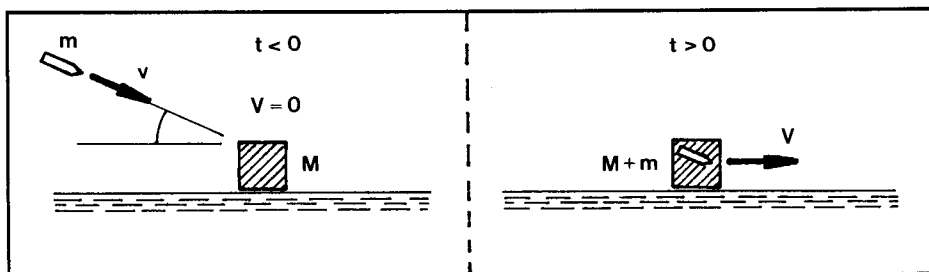
Lehenera eramanez: $m_A \cdot 5 = -m_A + (m_A + 1) \cdot 3$.

Azkenean: $m_A = 1 \text{ kg}$, $m_B = 2 \text{ kg}$.

- 7.7. 150 g-tako bala bat 600 m/s-tako abiaduraz higitu da irudian ageri den norabidean, ondoren barnean buztina duen 7,5 kg-tako kutxa batetan sartu delarik.



Talkaren aurretik kutxa hori geldi egon da plano leun eta horizontal batetan. Talkaren ondoren, sistemak 3 m-tako ibilbidea egin du planoaren gainean, $\mu = 0,2$ marruskadura-koefizientea duen zolu batetara pasatu aurretik. Lor bedi, talka gertatu denetik kutxa gelditu den unerarteko denbora-tartea.



Balaz eta kutxaz osaturiko sistemaren gainean ez da x ardatzaren

norabideko indarrrik eragiten ari. Beraz, norabide horri dagokionez, sistema isolaturik dagoela kontsidera daiteke, hau da, norabide horretako momentu lineala kontserbatu egiten dela jo daiteke:

$$m v \cos \theta + M \cdot 0 = (M + m) V' .$$

Hemendik:

$$V' = \frac{m v \cos \theta}{M + m} ,$$

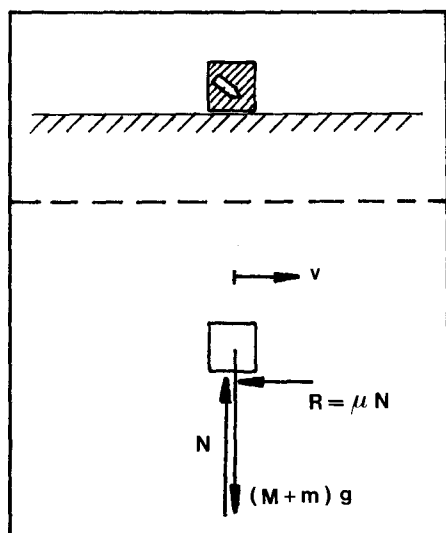
$$\theta = \arctan \frac{3}{4} \text{ izanik, } \cos \theta = \frac{4}{5} .$$

Beraz:

$$V' = \frac{0,15 \cdot 600 \cdot \frac{4}{5}}{7,65} = 9,4 \text{ m/s} .$$

Gainazal leunean ez dago marruskadurarik. Beraz, 3 metroak egiten eman duen denbora hauxe da:

$$t_1 = \frac{3}{9,4} = 0,32 \text{ s} .$$



Azter dezagun orain gainazalaren parte latzean gertatu dena. Irudian ikus daitekeenez,

$$N = (M + m) g .$$

Beraz,

$$R = \mu N = 0,2 (M + m) g .$$

Eta azelerazioa (negatiboa, noski) hauxe izango da:

$$a = \frac{R}{(M + m)} = 0,2 g .$$

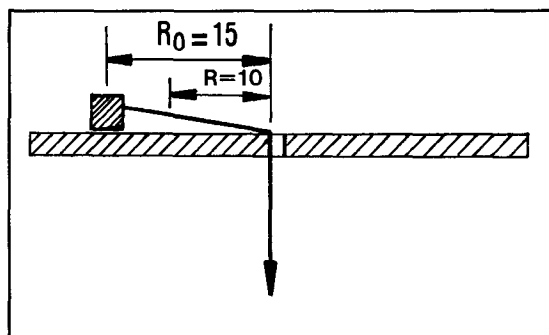
Honelatan, gelditu arte kutxak gainazal horretan eman duen denbora, ondokoa izango da:

$$t_2 = \frac{V'}{a} = \frac{9,4}{0,2 \cdot 9,8} = 4,79 \text{ s} .$$

Denetara, gelditu arte pasatu den denbora, ondokoa da:

$$t = t_1 + t_2 = 0,32 + 4,79 = 5,11 \text{ s} .$$

7.8. 50 g-tako masa bat, marruskadurarik gabeko zulo batetik pasatzen ari den soka bati loturik dago, irudian ageri den moduan.



Bloke hori biraka ari da mahaian, 3 rad s^{-1} -etako abiadura angeluarraz. Gero, sokatik beherantz tiratuz, laburtu egin da soka, biraketaren zirkunferentziaren erradioa 10 cm-takoa izan arte. Blokea puntu bat bailitzen har daiteke.

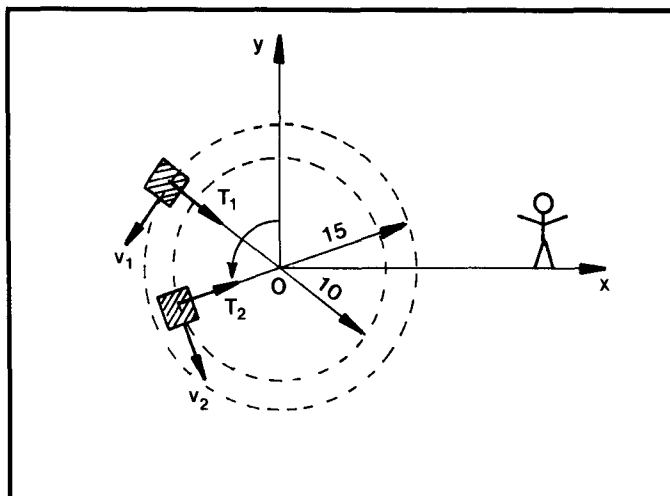
- Zenbatekoa da abiadura angeluar berria?
- Zein da energia zinetikoaren aldakuntza?

a) Hurrengo orriko irudian blokearen higidura adierazi da, goitik ikusita. Oxy sistema inertzialetik aztertuko dugu problema. Beronen jatorriarekiko indarrek duten momentua, nulua dela dakusagu. Beraz, jatorri horrekiko momentu angeluarra, kontserbatu egingo da prozesu osoan zehar.

$$\mathbf{r}_1 \wedge m \mathbf{v}_1 = \mathbf{r}_2 \wedge m \mathbf{v}_2 .$$

Moduluak kontsideratuz,

$$r_1 m \omega_1 r_1 = r_2 m \omega_2 r_2 ,$$



Hots,

$$\omega_2 = \omega_1 \frac{r_1^2}{r_2^2} = 3 \left(\frac{15}{10} \right)^2 = 6,75 \text{ rad s}^{-1} .$$

b) Energia zinetikoaren aldakuntza:

$$T_1 = \frac{1}{2} m v_1^2 = \frac{1}{2} m \omega_1^2 r_1^2 = \frac{1}{2} 0,05 \cdot 3^2 \cdot 0,15^2 ,$$

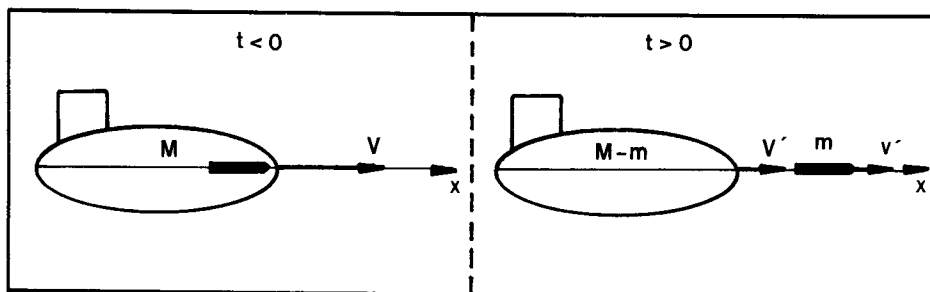
$$T_2 = \frac{1}{2} m v_2^2 = \frac{1}{2} m \omega_2^2 r_2^2 = \frac{1}{2} 0,05 \cdot 6,75^2 \cdot 0,10^2 .$$

$$\Delta T = T_2 - T_1 = 0,0114 - 0,0051 = 0,0063 \text{ J} .$$

7.9. M masako urpekuntzi bat horizontalki higitzen ari da itsas-hondoarekiko V abiaduraz, eta beraren helizea uraren erresistentzia gainditzeko erabiltzen ari da soilik. Bapatean m masako torpedo bat jaurtiki du aurrerantz, torpedo eta urpekuntziaren norabideak berberak direlarik. Torpedoa jaurtikitzean, E energia askatu da.

a) Lor bedi torpedoak itsas-hondoarekiko duen abiadura, M , m , V eta E -ren funtzioan.

b) Zenbateko energi zatia eman zaio torpedoari?



Irudietan, jaurtikiketaren aurretiko ($t < 0$) eta ondoko ($t > 0$) egoerak adierazi dira. Helizeak egindako indarra uraren erresistentzia gainditzekoa baino ez dela esatean, x ardatzaren norabidean sistema hori isolatuta bailegoen har daitekeela esan nahi da. Beraz, momentu linealaren kontserbazioaren printzipioa aplikatu daiteke, alegia,

$$M V = (M - m) V' + m v' .$$

Bestalde, jaurtikiketan E energia askatu denez:

$$E + \frac{1}{2} M V^2 = \frac{1}{2} (M - m) V'^2 + \frac{1}{2} m v'^2 .$$

Bi ekuazio hauetan bi ezezagun ditugu: V' eta v' . Sistema hori ebatzirik, balio hauek lortuko ditugu:

$$v' = V + \sqrt{2 \frac{M - m}{M m} E} ,$$

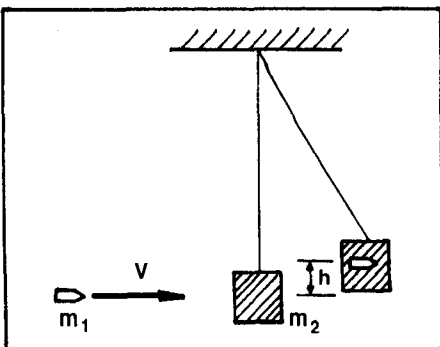
$$V' = V - \frac{m}{M - m} \sqrt{2 \frac{M - m}{M m} E} .$$

b) Bigarren galderari dagokionez, torpedoak hartutako energia askatutako energiarekin konparatu behar dugu, hots,

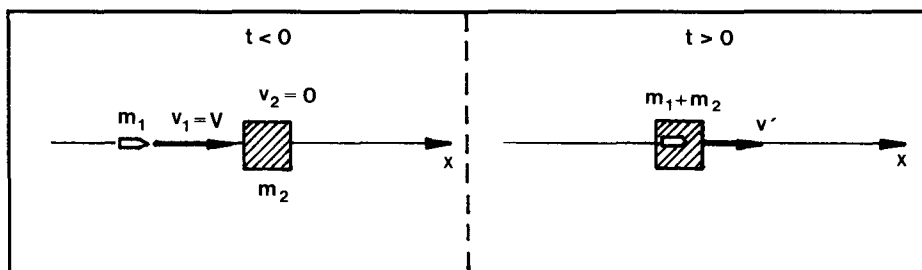
$$\frac{\frac{1}{2} m v'^2}{E} ,$$

non v' delakoa lehenago lorturiko abiadura den.

7.10. Alboko irudian pendulu balistiko bat adierazi da. Balen abiadura kalkulatzeko erabili ohi da, bala bere barnean hartu ondoren penduluaren blokeak igondako altuera neurturik. Lor bedi balaren abiadura, g , h , m_1 eta m_2 direlako funtzioan.

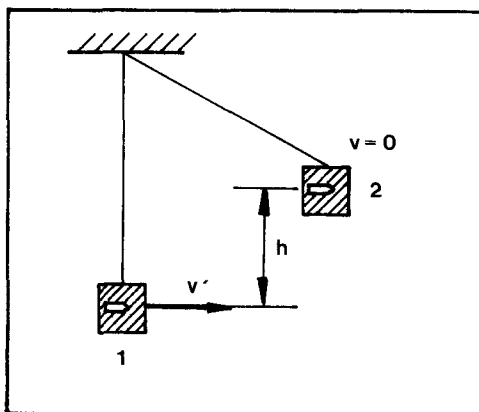


Talka-unean, x norabidean sistema hau isolaturik dago, zeren aldiune horretan eragiten ari diren indar bakarrak, elkar ezabatuko duten pisua eta sokaren tentsioa bait dira, alegia, x norabidean indarririk ez bait dago. Beraz, momentu linealaren kontserbazioaren printzipioa aplikatu dezakegu norabide horretan.



$$m_1 V + m_2 0 = (m_1 + m_2) v' ,$$

$$v' = \frac{m_1}{m_1 + m_2} V .$$



Gero, pendulu moduan jokatzen ari delarik, energiaren kontserbazioaren printzipioa aplikatuko dugu:

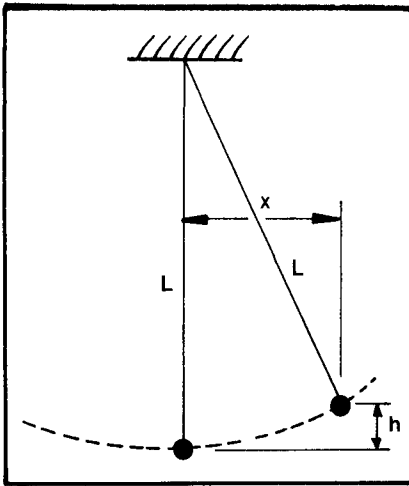
$$\frac{1}{2} (m_1 + m_2) v'^2 = (m_1 + m_2) g h ,$$

hots,

$$\frac{1}{2} \left[\frac{m_1}{m_1 + m_2} V \right]^2 = g h .$$

Eta hemendik:

$$V = \frac{\sqrt{2gh}}{m_1} (m_1 + m_2) .$$



Ikus dezakegunez, beraz, h altuera neurtuta, balaren hasierako abiadura kalkula daiteke. Baina, edozertara, ez da erraza izaten h hori neurtzea, txikia izaten bait da. Horregatik, h erabili beharrean, desplazamendu horizontalaz baliatzen gara askotan. Alboko irudian ikus daitekeenez,

$$x^2 = L^2 - (L - h)^2 ,$$

$$x^2 = h (2 L - h) .$$

Baina L -rekin konparatuz h txikia dela jorik,

$$x^2 \cong 2 L h \rightarrow h = \frac{x^2}{2 L} .$$

Era berean, normalean balaren masa penduluan esekita dagoena baino askoz txikiagoa ohi denez, beste hurbilketa hau egin dezakegu:

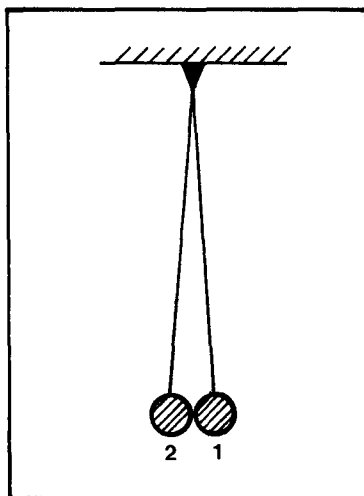
$$m_1 \ll m_2 \rightarrow m_1 + m_2 \approx m_2 .$$

Azkenean, modu honetara eman dezakegu balaren abiadura:

$$V = \frac{\sqrt{2gh}}{m_1} (m_1 + m_2) \approx \frac{m_2}{m_1} \sqrt{\frac{g}{L}} x .$$

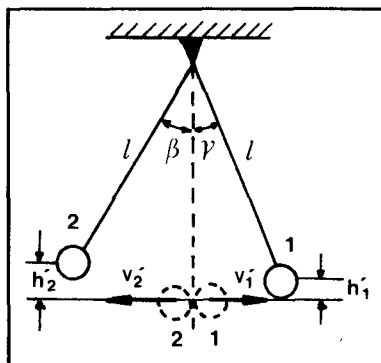
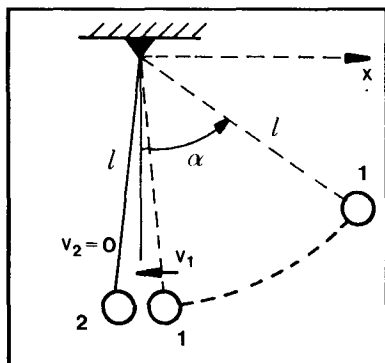
7.11. m_1 eta m_2 masadun esfera bi, irudian adierazi den bezala daude zintzilikaturik. 1 delako esfera α angeluaz banandu egin da bertikaletik eta bertatik utzi egin da erortzen, hasieran abiadura nulua duela. Talkaren ondoren 2 delako esfera β angeluaz banandu da bertikaletik. Lor bedi talkaren ondoren 1 esferak duen banantze-angelurik handiena (γ).

Zenbakizko aplikazioa: $m_1 = 0,5 \text{ kg}$; $m_2 = 2 \text{ kg}$; $\alpha = 90^\circ$; $\beta = 30^\circ$; $l = 0,5 \text{ m}$.



Ezer baino lehen, talkaren aurretik 1 delako esferak duen abiadura kalkulatu dugu. Bola honen erorketan, energia mekanikoaren kontserbazioa beteko da garbiro. Beraz, hasierako angeluak α balio duela jorik:

$$v_1 = \sqrt{2gl(1 - \cos\alpha)} .$$



Ondoren, momentu linealaren kontserbazioa aplikatu dugu talkan, x norabidean, hau da,

$$-m_1 v_1 = m_1 v'_1 - m_2 v'_2 ,$$

non v'_1 eta v'_2 direlakoak esferek talkaren ondoren dituzten abiadurak diren.

Talka gertatu eta gero (ikus aurreko orriko irudiak), esfera bakoitzaren igoeran energia mekanikoaren kontserbazioa beteko da berriz, honelaxe:

$$v'_2 = \sqrt{2gh'_2} = \sqrt{2gl (1 - \cos\beta)} ,$$

$$v'_1 = \sqrt{2gh'_1} = \sqrt{2gl (1 - \cos\gamma)} ,$$

Hemen β angelua datua denez, aurreko ekuazioan beharrezko ordezkapenak eginez, zuzenean lor dezakegu v'_1 abiadura, eta honen bidez γ angelua. Hain zuzen,

$$\begin{aligned} v'_1 &= \frac{m_2}{m_1} v'_2 - v_1 \\ &= \frac{m_2}{m_1} \sqrt{2gl (1 - \cos\beta)} - \sqrt{2gl (1 - \cos\alpha)} . \end{aligned}$$

Eta emaitza hau aurreko ekuaziora eraman beharko dugu,

$$\cos\gamma = 1 - \frac{v'^2_1}{2gl} .$$

Zenbakizko aplikazioa egitean, ondoko emaitzak lortuko ditugu:

$$v_1 = 3,13 \text{ m s}^{-1} ,$$

$$v'_1 = 1,45 \text{ m s}^{-1} ,$$

$$v'_2 = 1,14 \text{ m s}^{-1} ,$$

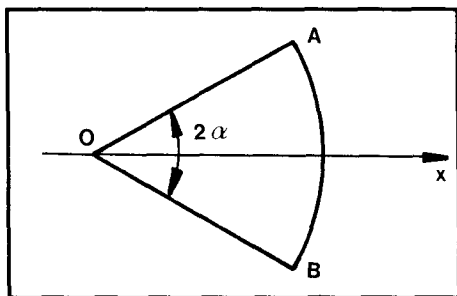
$$\cos\gamma = 0,7854 \quad \rightarrow \quad \gamma = 38,2^\circ .$$

ARIKETAK

- 1.- Lor bedi R erradioa eta M masa dituen eraztunerdi zirkular baten masa-zentruaren posizioa.

Emaitza: Zentrutik $\frac{2R}{\pi}$ distantziara .

- 2.- Lor bedi irudiko OAB sektore zirkularren masa-zentruaren posizioa, gainazal hori homogenoa dela kontsideraturik.



Emaitza: $\frac{2}{3} \frac{R \sin \alpha}{\alpha}$.

- 3.- ρ dentsitatea eta R erradioa dituen esfera homogeno batek, r erradiodun esfera baten forma duen hurgune bat du bere barnean, barrunbearen zentrua esfera handiaren zentrutik a distantziara dago-
elarik.

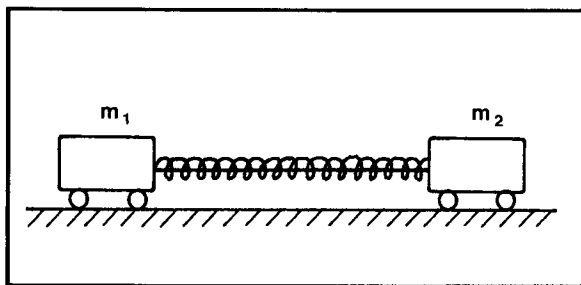
- Lor bedi masa-zentruaren posizioa.
- Esandako hurgune edo barrunbea ρ' dentsitatedun substantzia homogeno batez betetzean, $\rho' > \rho$ izanik, non egongo da orain sistema berriaren masa-zentrua?

Emaitzak: a) $\frac{a r^3}{R^3 - r^3}$ distantziara ,

b) $\frac{(\rho' - \rho) r^3 a}{\rho (R^3 - r^3) + \rho' r^3}$.

- 4.- Demagun, sistema inertzial batetiko azelerazio konstanteko translazio hutsa duen sistema ez-inertzial batetatik, partikula-sistema baten higidura azertu nahi dela. Partikulen gaineko inertzi indarrak indar bakar batez ordezkatu al daitezke?

- 5.- XIX. mendean, Ernst Mach izeneko zientzilari austriarrak ondoko experimentu ideala proposatu zuen: m_1 eta m_2 masadun bi ibilgailu gelditu daude marruskadurarik gabeko plano horizontal batetan. Bien artetan malguki konprimatu bat dago, eta konpresioari eusten dion soka batez daude loturik.



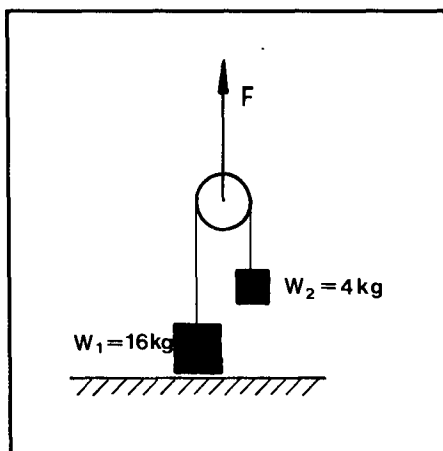
Bapatean soka ebakitzean, zein erlazioetan egongo dira ondoren ibilgailu biek hartuko dituzten abiadurak? Zein erlazioetan egongo dira energia zinetikoak? Nola azal dezakezue momentu linealak berdinki banatzea eta ez, ordea, energia zinetikoak?

Eraitzak: $\frac{v_1}{v_2} = \frac{m_2}{m_1} \quad ; \quad \frac{E_1}{E_2} = \frac{m_2}{m_1} \quad .$

- 6.- 1609. urtean, Kepler-ek ondokoa idatzi zuen "Astronomia Nova" izeneko liburuan: *"Bi harri Unibertsoa puntu batetan jarririk, beste inolako gorputz baten indar-eremutik aparte, orduan bi harriok elkarri hurbilduz joango dira, une batetan elkar ukituko duten arte, ukipen hori hasierako posizioen artean dagoen puntu batetan dagoelarik eta bakoitzak egindako bidea bestearen masaren proportzionala delarik"*. Ados al zaude eritzi horrekin? Zein da hor aipatu den tarteko ukipen-puntu hori? Arrazona itzazu erantzunak.

Eraitzak: Bai ; masa-zentrua .

- 7.- Zer deritzozu ondoko esaldiari: *"Partikula-sistema baten momentu lineala kontserbatzen bada, halaber beraren energia zinetikoa eta momentu angeluarra ere kontserbatu egingo dira"*. Zuzena ote da? Zergatik. Jar itzazu adibideak.
- 8.- m_1 eta m_2 pisuak marruskadurarik gabeko txirrika batetatik pasatzen den soka batez daude loturik, hurrengo orriko irudian adierazi den bezala. Bai soka eta bai txirrika pisu gabekoak direla joko dugu.
- a) Zenbatekoa da, m_1 masa lurretik jaso gabe gorantz egin litekeen indarririk handiena?



- b) Zenbat balio du m_2 masaren azelerazioak, aurreko indarrik handien hori egitean?
- c) Zenbatekoa izango da sistemaren masa-zentruaren azelerazioa, 40 kg-tako indarra egitean?

Emaitzak: 313,6 N ; 29,4 m s⁻² ; 9,8 m s⁻².

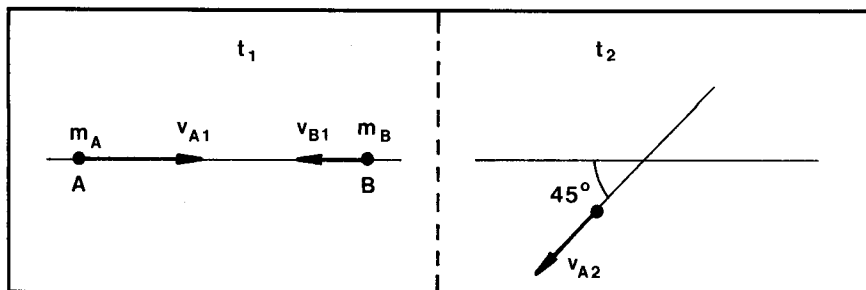
9.- Izotz-eremu horizontal batetan zutik eta patinekin dagoen 80 kg-tako pertsona batek, 1,5 kg-tako pilota bat jaurtiki du horizontalki eta 25 m/s-tako abiaduraz.

- a) Zenbateko abiaduraz eta zein norabidez hasiko da higitzen pertsona hori?
- b) Pertsona horrek 3 segundoko 4 pilota berdin jaurtikiz gero, zein batezbesteko indarrak eragingo du beraren gainean? (Pilotak hartzerakoan, bera doaneko abiaduraz hartzen dituela kontsideratuko da).
- c) Zein batezbesteko azelerazioa izango du b kasuan, marruskadurarik ez badago eta pilotak jaurtikitzearen kausaz dagoen masa-galera kontsideratu gabe?

Emaitzak: a) 0,47 m/s eta atzerantz .

b) 50,13 N . c) 0,63 m s⁻² .

10.- A partikularen masak 5 kg balio du eta B-renak, 10 kg . Biek talka egin dute elkarren kontra marruskadurarik gabeko plano horizontal batetan, hurrengo orriko irudian adierazi den bezala, talkaren aurreko abiadurak ondokoak izanik: $v_{A1} = 6 \text{ m/s}$ eta $v_{B1} = 2 \text{ m/s}$. Talkaren ondoren A partikulak $v_{A2} = 2\sqrt{2} \text{ m/s}$ abiadura du, irudian adierazi den norabideaz. Lor bedi B partikulak talkaren ondoren duen abiadura. Talka hori elastikoa al da? Zergatik?



Emaitza: $\sqrt{5} \text{ m/s}$.

Ez da elastikoa .

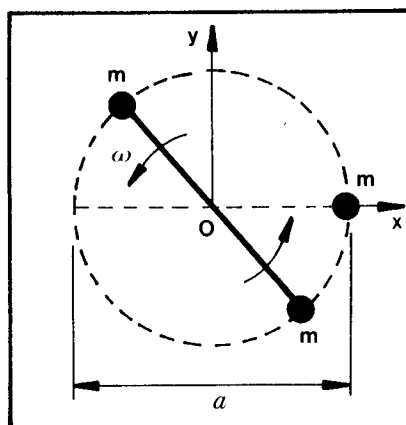
11.- 4 kg -tako pisua duen bonba bat horizontalki eta $2,40 \text{ m/s}$ -tako abiaduraz jaurtiki da, 120 m -tako etxe baten goi-hegaletik. Etxe horren inguruko lurreremua horizontala da.

- Etxearen oinetik zer distantziatara joko du bonbak lurra?
- Beste bonba berdin bat baldintza berberetan jaurtiki da, baina lurrera heldu aurretik bi zatitan apurtu da, bi zatia erreferentzial propioarekiko horizontalki jaurtikiak izanik. Bi zatietako batek $1,5 \text{ kg}$ -tako pisua du eta justuki etxearen oinera erori da, hau da, jaurtikitze-puntuaren bertikaleko puntura. Zein distantziatara eroriko da, $2,5 \text{ kg}$ -tako pisua duen beste zatia?

Emaitzak: 12 m ; 19 m .

12.- Froga bedi ezen, m masa eta v abiadura duen partikula baten eta masa berberarekin geldidagoen beste partikula baten arteko talka elastikoan, bi partikulen amaierako abiadurek angelu zuzena osotuko dutela, arazoa hiru dimentsiotan aztertutik.

13.- Marruskadurarik gabeko mahai baten gainean, masa arbuigarria eta a luzera dituen ziri batez, m masadun bi partikula berdin lotu dira eta multzo hori bere masa-zentruaren inguruan biratzen ari da ω abiadura angeluar konstanteaz, irudian adierazi den moduan. Halako batetan, m masadun partikuletariko batek, geldidagoen masa bereko partikula batekin egin du topo, partikula biak atxekirik geratu direlarik.



- a) Zein da masa bereko hiru partikula hauek osoturiko sistemaren masa-zentruak talka gertatu aurretik duen posizioa? Eta zein da beraren abiadura?
- b) Kalkula bitez sistemaren momentu angeluarra, talka gertatzen hasiko deneko eta bukatuko deneko aldiuneetan.
- c) Zein izango da sistemaren abiadura angeluarra talka gertatu ondoren?

Emaitzak: a) $\left(\frac{a}{6}, 0\right)$. Geldi dago .

b) Bietan berdina , $\frac{1}{2} m \omega a^2 \mathbf{k}$.

c) $\frac{9}{10} \omega$.

- 14.- E energia mekanikoa duen gorputz bat horizontalarekiko 60° -tako angelua osotuz jaurtiki da. Gorputz hau bere ibilbidearen punturik altuenean lehertu egin da, masa bereko bi zatitan apurturik eta sistemaren energia mekanikoaren $3E/4$ neurriko gehikuntza gertaturik. Leherketaren ondoren bi zatiotariko bat bertikalki eta gorantz higitu baldin bada, zein izango da zati bakoitzaren abiadura?

Emaitzak: $\mathbf{v}_1 = \sqrt{\frac{E}{m}} \mathbf{j}$;

$\mathbf{v}_2 = \sqrt{\frac{2E}{m}} \mathbf{i} - \sqrt{\frac{E}{m}} \mathbf{j}$.

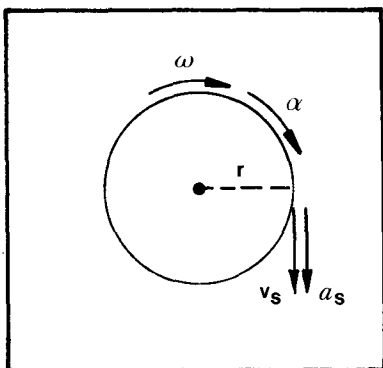
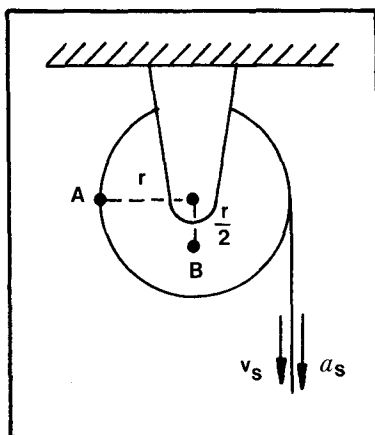
8. GAIA

**SOLIDO ZURRUNAREN
ZINEMATIKA**

8.1. Irudiko txirrikaren biraketa-ardatza tinko dago. Beraren gainazalean biribilkatutako sokatik atezatuz, txirrika biraka ari da. Sokaren abiadura eta azelerazioa v_S eta a_S dira, hurrenez hurren. Kalcula bitez:

- Txirrikaren abiadura eta azelerazio angeluarrak.
- A eta B puntuen abiadura eta azelerazio linealak.

Datuak: $r = 10 \text{ cm}$; $v_S = 10 \text{ cm s}^{-1}$; $a_S = 10 \text{ cm s}^{-2}$.



- Higidura zirkularraren azterketatik dakigunez, abiadura eta azelerazio tangenziala hauexek dira, hurrenez hurren:

$$v = \omega r \quad ; \quad a_T = \alpha r \quad .$$

Gure kasuan aplikatuz, ondokoa daukagu:

$$10 = \omega \cdot 10 \rightarrow \omega = 1 \text{ rad s}^{-1},$$

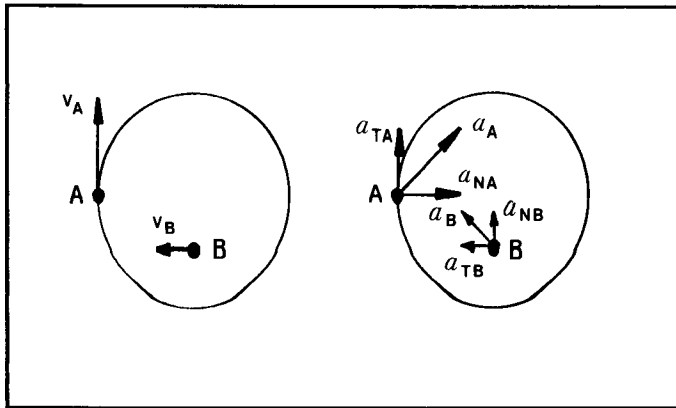
$$10 = \alpha \cdot 10 \rightarrow \alpha = 1 \text{ rad s}^{-2}.$$

- A eta B puntuen abiadurak honako hauek izango dira:

$$v_A = \omega r = 10 \text{ cm s}^{-1} \quad ,$$

$$v_B = \omega \frac{r}{2} = 5 \text{ cm s}^{-1} \quad .$$

Eta beraien azelerazioak, hauexek:



$$a_{AT} = \alpha r = 10 \text{ cm s}^{-2}, \quad a_{AN} = \omega^2 r = 10 \text{ cm s}^{-2},$$

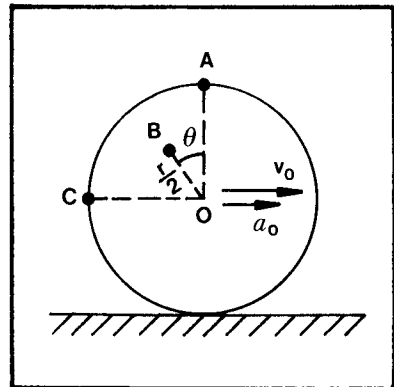
$$a_A = \sqrt{a_{AT}^2 + a_{AN}^2} = 10\sqrt{2} \text{ cm s}^{-2},$$

$$a_{BT} = \alpha \frac{r}{2} = 5 \text{ cm s}^{-2}, \quad a_{BN} = \omega^2 \frac{r}{2} = 5 \text{ cm s}^{-2},$$

$$a_B = \sqrt{a_{BT}^2 + a_{BN}^2} = 5\sqrt{2} \text{ cm s}^{-2}.$$

8.2. r erradiodun disko bat zolu gainean errotatzen ari da, bere zentruak v_O abiadura eta a_O azelerazioa dituelarik, irudian ageri den norantzan. Kalkula bitez:

- Diskoaren abiadura eta azelerazio angeluarra.
- A, B eta C puntuen abiadura eta azelerazio linealak.



Datuak: $r = 1 \text{ cm}$, $\theta = 37^\circ$,
 $v_O = 1 \text{ cm s}^{-1}$, $a_O = 2 \text{ cm s}^{-2}$.

a) Solido zurrunaren higidurari dagokion formularik orokorra, hauxe da:

$$\mathbf{v}_i = \mathbf{v}_j + \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{r}_{ij}, \quad (\mathbf{r}_{ij} = \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j).$$

i, j : solidoaren edozein bi puntu eta

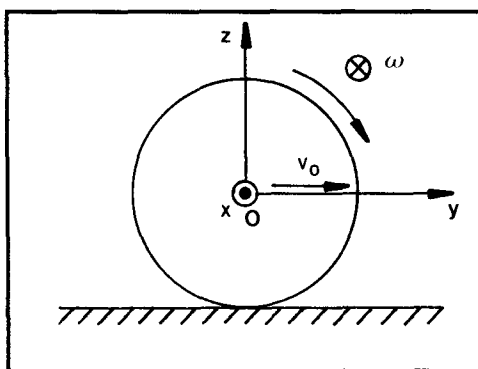
ω : solidoaren abiadura angeluarra izanik (dakigun legez, aldaezina delarik).

Gure kasuan i puntutzat P puntua hautatuko dugu, eta j puntutzat, O puntua, hau da, diskoaren zentrua bera. Honelatan:

$$\mathbf{v}_P = \mathbf{v}_O + \omega \wedge \mathbf{r}_{PO} .$$

Baina diskoa zolu gainean irristatu gabe errotatzen ari denez gero, P puntuaren abiadurak zero balio du. Beraz,

$$0 = \mathbf{j} + \omega \mathbf{i} \wedge (-\mathbf{k}) = (1 + \omega) \mathbf{j} \rightarrow \omega = -\mathbf{i} \text{ rad s}^{-1} .$$



Lehenengo formulatik, denborarekiko deribatuz, beste hau atera dezakegu:

$$\mathbf{a}_i = \mathbf{a}_j + \alpha \wedge \mathbf{r}_{ij} + \omega \wedge (\omega \wedge \mathbf{r}_{ij}) .$$

Aipaturiko puntuei berriro aplikatuz, honela geratzen zaigu:

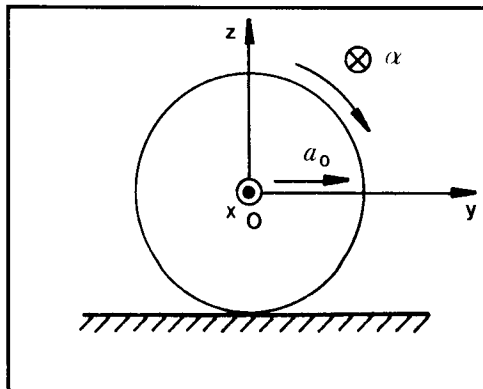
$$\mathbf{a}_P = \mathbf{a}_O + \alpha \wedge \mathbf{r}_{PO} + \omega \wedge (\omega \wedge \mathbf{r}_{PO}) .$$

$$\mathbf{a}_P = 2 \mathbf{j} + \alpha \mathbf{i} \wedge (-\mathbf{k}) + (-\mathbf{i}) \wedge [(-\mathbf{i}) \wedge (-\mathbf{k})] = (2 + \alpha) \mathbf{j} + \mathbf{k} .$$

Diskoa errotatzen ari dela kontutan harturik, berriz, OY ardatzaren norabidean P puntuaren azelerazioaren osagaiak nulua izan beharko du.

Beraz:

$$2 + \alpha = 0 \rightarrow \alpha = -2 \text{ i rad s}^{-2} .$$

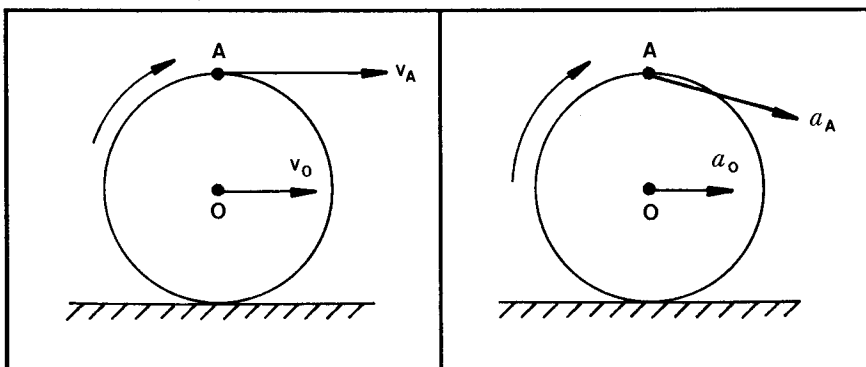


b) Atal honetan, aurrekoan erabilitako abiadurari eta azelerazioari dagozkien formulak aplikatuko ditugu berriro . Lehendabizikoz, goazen A puntua aztertzeraz:

$$\mathbf{v}_A = \mathbf{v}_O + \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{r}_{AO} = \mathbf{j} + (-\mathbf{i}) \wedge \mathbf{k} = 2 \mathbf{j} \text{ cm s}^{-1} ,$$

$$\mathbf{a}_A = \mathbf{a}_O + \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{r}_{AO} + \boldsymbol{\omega} \wedge (\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{r}_{AO}) ,$$

$$\mathbf{a}_A = 2 \mathbf{j} + (-2\mathbf{i}) \wedge \mathbf{k} + (-\mathbf{i}) \wedge [(-\mathbf{i}) \wedge \mathbf{k}] = 4 \mathbf{j} - \mathbf{k} \text{ cm s}^{-2} .$$



B puntuari formula berberak aplikatuz, hauxe dugu:

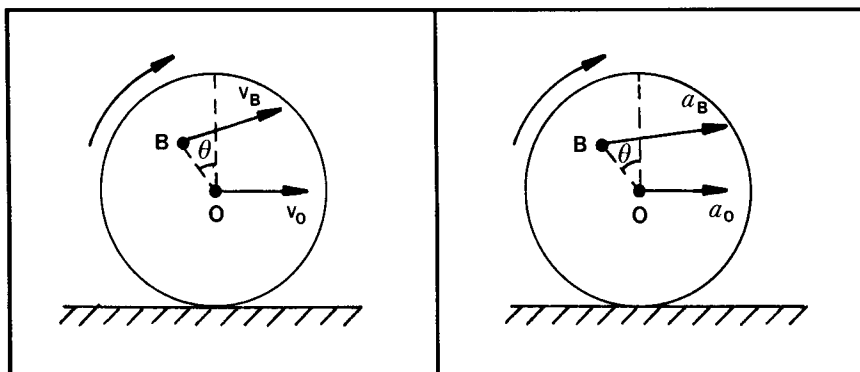
$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_O + \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{r}_{BO} = \mathbf{j} + (-\mathbf{i}) \wedge (-0,6 \mathbf{j} + 0,8 \mathbf{k}) ,$$

$$\mathbf{v}_B = 1,8 \mathbf{j} + 0,6 \mathbf{k} \text{ cm s}^{-1} ,$$

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_O + \alpha \wedge \mathbf{r}_{BO} + \boldsymbol{\omega} \wedge (\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{r}_{BO}) ,$$

$$\mathbf{a}_B = 2\mathbf{j} + (-2\mathbf{i}) \wedge [0,6\mathbf{j} + 0,8\mathbf{k}] + (-\mathbf{i}) \wedge [(-\mathbf{i}) \wedge (-0,6\mathbf{j} + 0,8\mathbf{k})],$$

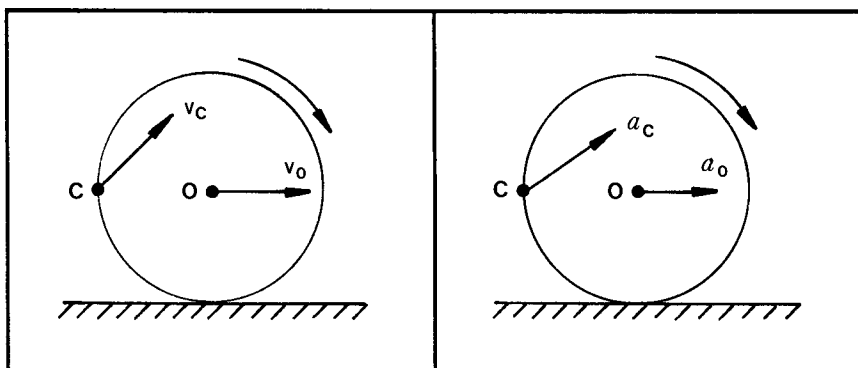
$$\mathbf{a}_B = 4,2\mathbf{j} + 0,4\mathbf{k} \text{ cm s}^{-2}.$$



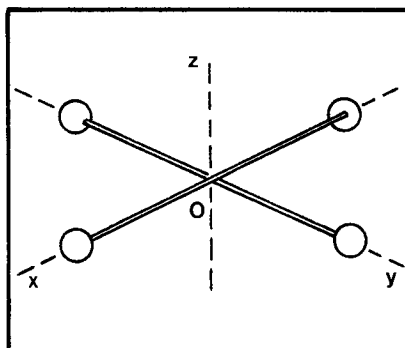
C puntuaren kasuan, era berean eginez, ondoko emaitzak lortuko ditugu:

$$\mathbf{v}_C = \mathbf{j} + \mathbf{k} \text{ cm s}^{-1},$$

$$\mathbf{a}_C = 3\mathbf{j} + 2\mathbf{k} \text{ cm s}^{-2}.$$



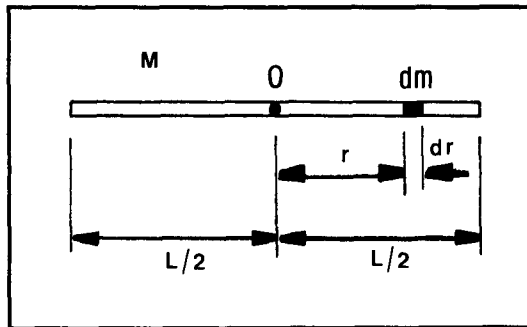
8.3. Irudiko makiltxoak elkarren perpendikularrak dira eta gurutze osoki simetrikoa osotzen dute, luzera eta masa berberak dituztelarik. Beraien muturretan kokatutako puxtarrien masak ere berdinak dira, makiltxoaren luzerekin konparatuta erradioak arbuiaagarriak izanik



- a) Kalkula bitez sistemak dituen I_{PO} , I_{xx} , I_{yy} eta I_{zz} inertzi momentuak.
- b) Konproba bedi inertzi momentu polarra eta ardatzekiko inertzi momentuak erlazionatzen dituen formula.

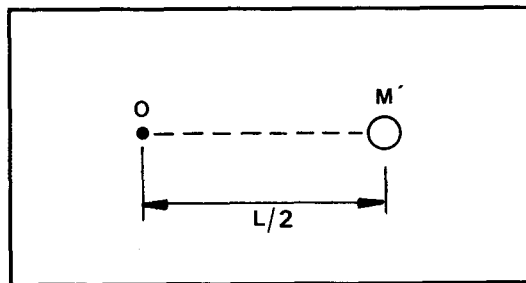
Datuak: Makiltxo bakoitzaren luzera : $L = 10 \text{ cm}$;
makiltxo bakoitzaren masa : $M = 12 \text{ g}$; puxtarri
bakoitzaren masa : $M' = 5 \text{ g}$.

- a) Makiltxo bakoitzak O puntuarekiko duen inertzi momentu polarra:



$$I_{PO_M} = \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} r^2 dm = \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} r^2 \frac{M}{L} dr = \frac{1}{12} ML^2 = 100 \text{ g cm}^2 .$$

- Puxtarri bakoitzak O puntuarekiko duen inertzi momentu polarra:



$$I_{PO_{M'}} = \left[\frac{L}{2} \right]^2 M' = 125 \text{ g cm}^2 .$$

- Sistema osoak O puntuarekiko duen inertzi momentu polarra:

$$I_{PO} = 2I_{PO_M} + 4I_{PO_{M'}} = 700 \text{ g cm}^2 .$$

OX ardatzarekin batera datorren makiltxoak eta beraren muturretan kokatutako bi puxtarriek aipaturiko ardatzarekiko duten inertzia momentuak, zero izan behar du, elementu hauetatik OX ardatzerainoko distantzia nulua bait da. Beste makiltxotik eta berari dagozkion puxtarrietatik OX ardatzerainoko distantziak, aipaturiko elementuetatik O punturainoko berberak direnez, azkenean hauxe lortuko dugu:

$$I_{xx} = I_{PO_M} + 2I_{PO_{M'}} = 350 \text{ g cm}^2 .$$

OX eta OY ardatzen arteko desberdintasuna guztiz konbentzionala denez, aurreko balioa errepikatuko dugu:

$$I_{yy} = 350 \text{ g cm}^2 .$$

Sistema osotzen duten elementuetatik OZ ardatzerainoko distantziak, eta O punturainokoak berberak direnez gero, aipaturiko ardatzarekiko inertzia momentua eta O puntuarekiko inertzia momentu polarra berdinak dira, hau da,

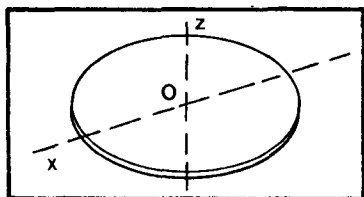
$$I_{zz} = 700 \text{ g cm}^2 .$$

b) Frogapena zuzenean egin daiteke:

$$\frac{1}{2} (I_{xx} + I_{yy} + I_{zz}) = 700 \text{ g cm}^2 .$$

$$I_{PO} = 700 \text{ g cm}^2 .$$

Alegia, bi emaitzak elkarren berdinak dira.



8.4. Demagun M masa eta R erradiora dituen irudiko disko homogenoa. Aurki bitez:

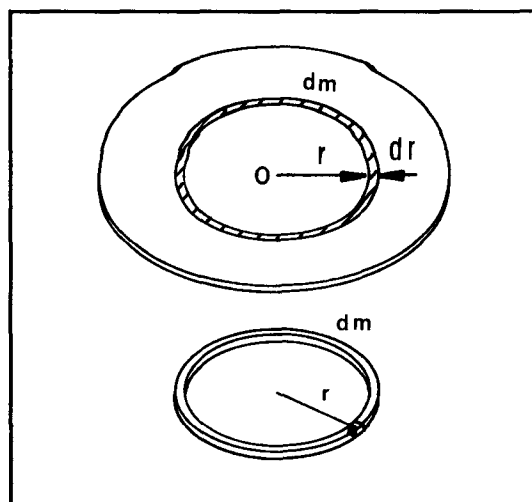
a) Bere zentruarekiko diskoak duen inertzia momentu polarra.

b) Biraketa-ardatzarekiko diskoak duen inertzia momentua.

c) Edozein ardatz diametralekiko, OX ardatzarekiko esate baterako, diskoak duen inertzia momentua.

a) Zati dezagun diskoa irudian ageri den moduan, hau da, r barruko erradioa, $r + dr$ kanpokoia, eta dm masa duten eraztun mehetan. Argi ikus daitekeenez, eraztun bakoitza osotzen duten masa-elementuek, diskoaren zentrurainoko distantzia berbera dute. Honelatan eraztunaren zentruarekiko inertzia momentu polarra, hauke izango da:

$$dI_{PO} = r^2 dm$$



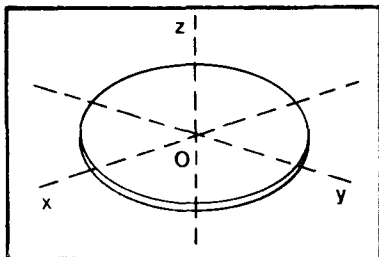
Bestalde, $\sigma = M/\pi R^2$ diskoaren gainazaleko dentsitatea eta $dS = 2\pi r dr$ eraztunaren azalera izanik, dm masak ondoko balioa du:

$$dm = \sigma dS = \frac{M}{\pi R^2} 2\pi r dr = \frac{2M}{R^2} r dr .$$

Beraz, disko osoak bere zentruarekiko duen inertzia momentu polarraren adierazpena hauke da:

$$\begin{aligned} I_{PO} &= \int_M r^2 dm = \int_0^R r^2 \frac{2M}{R^2} r dr = \frac{2M}{R^2} \int_0^R r^3 dr \\ &= \frac{1}{2} M R^2 . \end{aligned}$$

b) Garbiro uler daitekeenez, diskoa osotzen duten elementuen zentruarekiko distantziak, eta diskoaren biraketa-ardatzarekikoenak berberak dira. Hori dela eta, diskoak aipatutako ardatzarekiko duen inertzia momentuak, ondokoa izan behar du:



$$I_{zz} = I_O = \frac{1}{2} M R^2 .$$

c) Atal honetan, inertzia momentu polarra eta ardatzekiko inertzia momentuak erlazionatzen dituen formula erabiliko dugu, hau da,

$$I_{PO} = \frac{1}{2} (I_{xx} + I_{yy} + I_{zz}) .$$

Bestaldek, OX eta OY ardatzen arteko desberdintasuna guztiz konbentzionala dela kontutan harturik, ondokoa planteatu dezakegu:

$$I_{xx} = I_{yy} \rightarrow I_{PO} = \frac{1}{2} (2 I_{xx} + I_{zz}) ,$$

$$\frac{1}{2} M R^2 = \frac{1}{2} (2 I_{xx} + \frac{1}{2} M R^2) \rightarrow I_{xx} = \frac{1}{4} M R^2 .$$

8.5. I. Kontsidera bedi m masa eta r erradioa dituen esfera huts eta homogeneoa (ping-pong-eko pilota bat izango litzateke hurbilketa egoki xamarra). Lor bitez:

- a) Bere zentruarekiko duen inertzia momentu polarra.
- b) Beraren zentrutik pasatzen den edozein ardatzekiko inertzia momentua.

II. Ondoren, kontsidera bedi M masa, R_1 barruko erradioa eta R_2 kanpoko dituen esfera homogeneo bat. Erantzun aurreko ataleko bi galderei.

III. Azkenek, kontsidera bedi M masadun eta R erradiodun esfera trinko eta homogeneoa, eta errepika bitez goiko ataletako kalkuluak.

I. a) Esfera osotzen duten masa-elementu guztiak zentruarekiko distantzia berberera kokatuta daudenez gero, inertzi momentu polarra honako hau izango da:

$$I_{PO} = mr^2 .$$

b) Orain, inertzi momentu polarra eta ardatzekiko inertzi momentuak erlazionatzen dituen formula aplikatuko dugu, hau da,

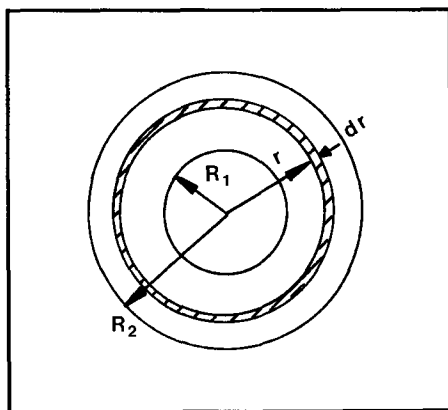
$$I_{PO} = \frac{1}{2} (I_{xx} + I_{yy} + I_{zz}) .$$

Hiru ardatzen arteko desberdintasun bakarra, beraien izenetan baino ez dagoenez, hauex ean dezakegu:

$$I_{xx} = I_{yy} = I_{zz} \rightarrow I_{PO} = \frac{3}{2} I_{xx} .$$

$$mr^2 = \frac{3}{2} I_{xx} \rightarrow I_{xx} = I_{yy} = I_{zz} = \frac{2}{3} mr^2 .$$

II. a)



Oraingoa, goiko irudian erakutsi den antzeko geruza esferiko elementaletan zatituko dugu esfera. Hauetariko geruza bakoitzaren inertzi momentu polarra, I.a. atalean ikusi dugunaren arauera, hauex izango da:

$$dI_{PO} = r^2 dm , \text{ non}$$

$$dm = \frac{M}{\frac{4}{3} \pi (R_2^3 - R_1^3)} 4 \pi r^2 dr = \frac{3M}{R_2^3 - R_1^3} r^2 dr \text{ den.}$$

Beraz:

$$dI_{PO} = \frac{3M}{R_2^3 - R_1^3} r^4 dr ,$$

$$I_{PO} = \frac{3M}{R_2^3 - R_1^3} \int_{R_1}^{R_2} r^4 dr = \frac{3M}{5} \frac{R_2^5 - R_1^5}{R_2^3 - R_1^3} .$$

II.b) I.b. atalean erabilitako formula eta bertan egindako kontsiderazioa errepikatuz, hauxe dugu:

$$\frac{3M}{5} \frac{R_2^5 - R_1^5}{R_2^3 - R_1^3} = \frac{3}{2} I_{xx} ,$$

$$I_{yy} = I_{zz} = \frac{2M}{5} \frac{R_2^5 - R_1^5}{R_2^3 - R_1^3} = I_{xx} .$$

III.a) Esfera trinkoa, aurreko esfera bezalakoa da, $R_1 = 0$ eta $R_2 = R$ izanik. Honelatan, II.a. atalaren emaitzaz baliatuz, inerti momentu polarra erraz kalkula dezakegu:

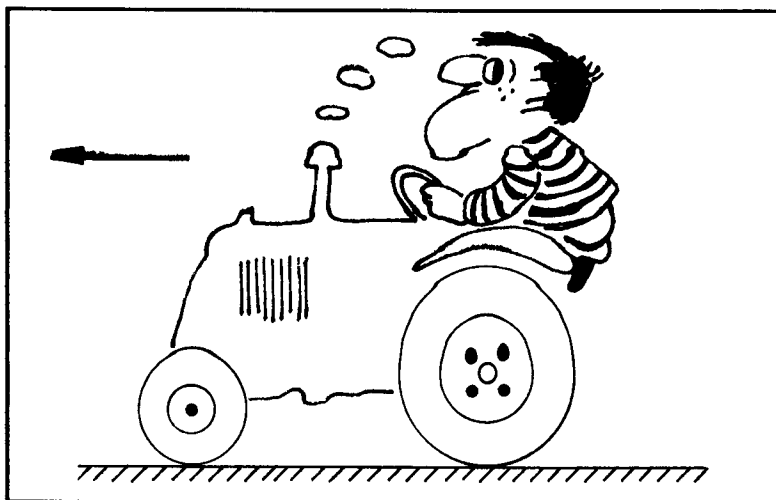
$$I_{PO} = \frac{3}{5} MR^2 .$$

b) Arrazonamendu berbera aplikaturik, baina oraingoan II.b. ataleko emaitza erabiliz, hauxe dugu:

$$I_{xx} = I_{yy} = I_{zz} = \frac{2}{5} MR^2 .$$

ARIKETAK

- 1.- Irudiko traktorearen gupilen erradioek, 30 cm eta 50 cm balio dute. Traktorea 45 km/h -tako abiaduraz higitzen ari baldin bada, zein abiadura angeluarraz ari dira gupilak biraka? (Gurpilek zolu gainean irrist egingo ez dutela suposatuko da).

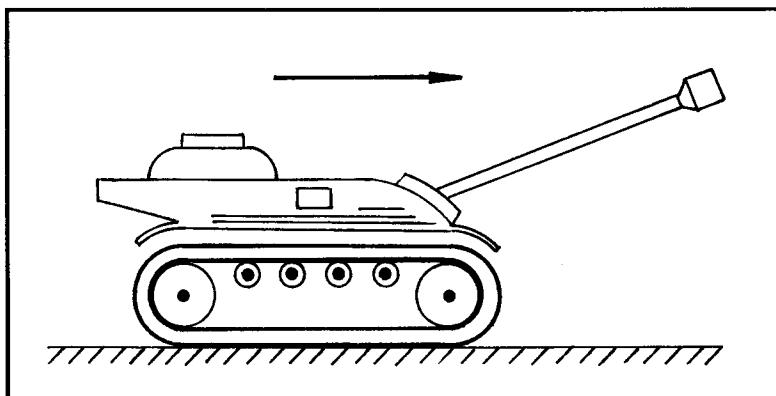


Emaitzak: aurrekoak $41,67\text{ rad s}^{-1}$,

atzekoak 25 rad s^{-1} .

Guztiak erlojorratzen aurkako norantzaz.

- 2.- Irudiko tankea 54 km/h -tako abiaduraz higitzen ari da. Gurpil nagusien erradioa 60 cm -takoa da, eta txikienarena, 25 cm -takoa.



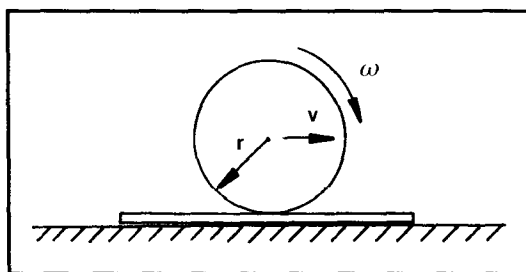
Kalkula bitez gupil nagusien eta gupil txikien abiadura angeluarrak.

Emaitzak: nagusiak 25 rad s^{-1} ,

txikiak 60 rad s^{-1} .

Guztiak erlojorratzen norantzaz.

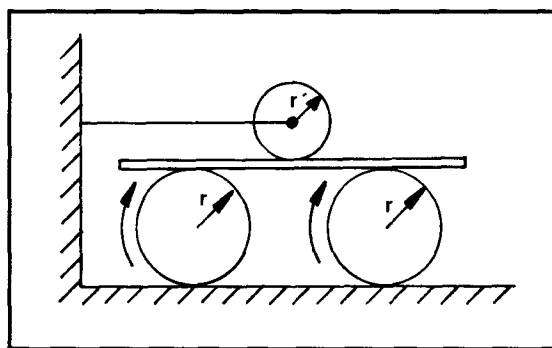
- 3.- Irudiko zilindroa ω abiadura angeluarraz ari da biraka, beraren zentruak v abiadura lineala duelarik, erakutsi diren norantzetan. Kalkula bedi beheko xaflak eduki behar duen abiadura, beraren gainean zilindroak laban egin ez dezan.



Datuak: $\omega = 2 \text{ rad s}^{-1}$, $v = 0,5 \text{ m s}^{-1}$, $r = 0,1 \text{ m}$.

Emaitza: $0,7 \text{ m s}^{-1}$ eskuinalderantz.

- 4.- Irudiko sisteman, beheko zilindroak zolu gainean errotatzen ari dira $\omega = 2 \text{ rad s}^{-1}$ -tako abiadura angeluarraz, bertan adierazi den norantzaz, beraiek sostengatutako xafla irristadurarik gabe daramatelarik. Zilindro hauen erradioak $r = 0,15 \text{ m}$ balio du.



Xaflak, bere aldetik, bere gaineko zilindroa higi eraziko du, bien artean ere irristadurarik gabe. Zilindro honen zentrua tinko dago, hormarekin loturiko soka bat dela medio, eta beraren erradioak $r' = 0,12 \text{ m}$ balio du.

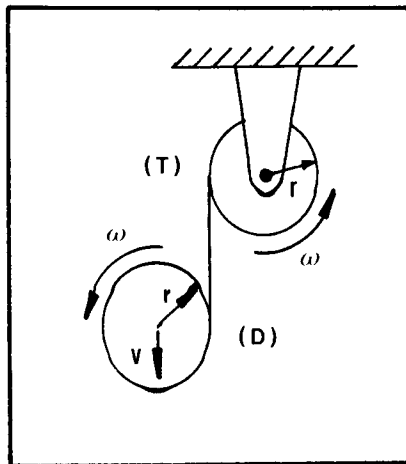
Kalkula bedi goiko zilindroaren abiadura angeluarra.

Emaitza: 3 rad s^{-1} erlojorratzen aurkako norantzaz.

- 5.- T txirrika eta D diskoa biraka ari dira, ω abiadura angeluar berberaz, irudian ikus daitekeen norantzaz. Gainera, D diskoa jaisten ari da, bere zentruaren abiadura lineala v delarik. Bataren nahiz bestearen erradioek r balio dute. Kalkula bedi aipaturiko abiadura angeluarra.

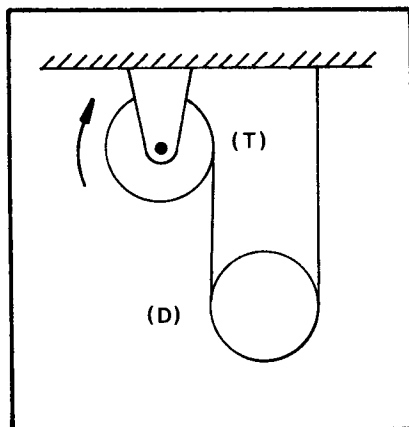
Datuak: $v = 0,2 \text{ m s}^{-1}$, $r = 0,1 \text{ m}$.

Emaitza: 1 rad s^{-1} .



- 6.- T txirrika 4 rad s^{-1} -etako abiadura angeluarraz ari da biraka alboko irudian ageri den norantzaz, beraren gainazaleko soka desbiribiltzen ari delarik. T txirrikaren nahiz D diskoaren erradioek 10 cm balio dute. Kalkula bitez:

- a) D diskoaren abiadura angeluarra eta beraren zentruaren abiadura lineala.
b) D diskoaren punturik baxuenaren eta altuenaren abiadura linealak.



Emaitzak: a) 2 rad s^{-1} eta $0,2 \text{ m s}^{-1}$.

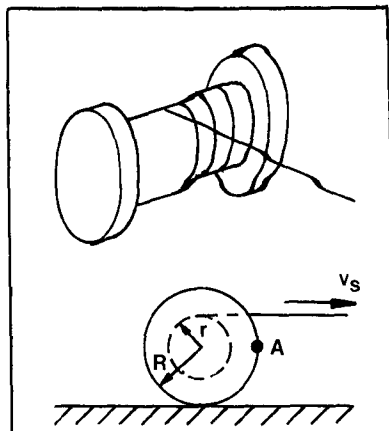
- b) puntu baxuena: $0,2\sqrt{2} \text{ m s}^{-1}$,
horizontalarekin 315° -tako angelua osoturi k,
puntu garaiena: $0,2\sqrt{2} \text{ m s}^{-1}$,
horizontalarekin 225° -tako angelua osoturi k.

- 7.- Irudiko txirrika zolu gainean errotatzen ari da, beraren barruko zilindroaren gainazalean biribilkatutako sokatik atezatuz. Soka horizontalki higitzen ari da, v_s abiaduraz eta azeleraziorik gabe. Kalkula bitez:

a) Txirrikaren biraketa-ardatzaren translazio-abiadura eta beraren abiadura angeluarra.

b) A puntuaren abiadura eta azelerazio linealak.

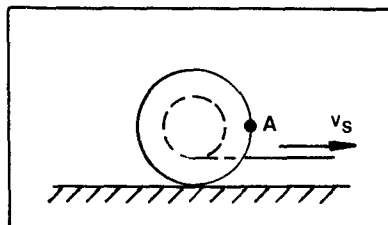
Datuak: $v_s = 15 \text{ cm s}^{-1}$, $r = 1 \text{ cm}$, $R = 2 \text{ cm}$.



Emaitzak: a) 10 cm s^{-1} , 5 rad s^{-1} .

b) $10\sqrt{2} \text{ cm s}^{-1}$ horizontalarekiko 315° -tako angelua osoturik.
 50 cm s^{-2} horizontala eta ezkerralderantz.

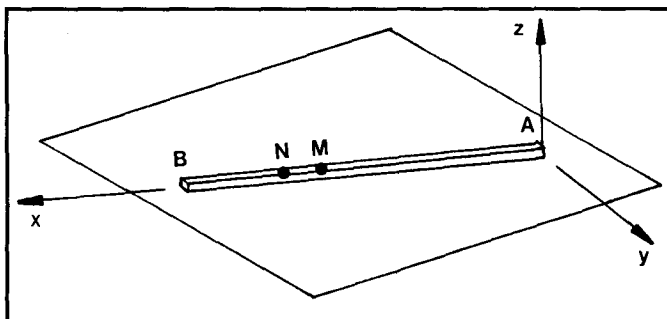
8.- Ebatz bedi aurreko ariketa, baina oraingoan soka barruko zilindroaren beheko aldetik desbiribilkatzen ari dela suposatuz. Erabil bitez aurreko ariketan emandako datu berberak.



Emaitzak: a) 30 cm s^{-1} , horizontala eta eskuinalderantz.
 15 rad s^{-1} , erlojorratzen norantzaz.

b) $30\sqrt{2} \text{ cm s}^{-1}$, horizontalarekiko 315° -tako angelua osotuz.
 450 cm s^{-2} , horizontala eta ezkerralderantz.

9.- Irudiko barra, bertan ageri den planoaren gainean higitzen ari da. Aldiune batetan M eta N puntuen abiadurak, honela adierazi dira:



$$\mathbf{v}_M = 0,2 \mathbf{i} + 0,5 \mathbf{j} \text{ m s}^{-1} \text{ eta } \mathbf{v}_N = 0,2 \mathbf{i} + 0,7 \mathbf{j} \text{ m s}^{-1}.$$

Aipaturiko aldiunean, kalkula bitez:

- Barraren abiadura angeluarra.
- A eta B puntuen eta barraren zentruaren abiadurak.

$$\text{Datuak: } AB = 1 \text{ m}, \quad AM = 0,6 \text{ m}, \quad AN = 0,7 \text{ m}.$$

$$\text{Emaitzak: a) } \omega = 2 \mathbf{k} \text{ rad s}^{-1}$$

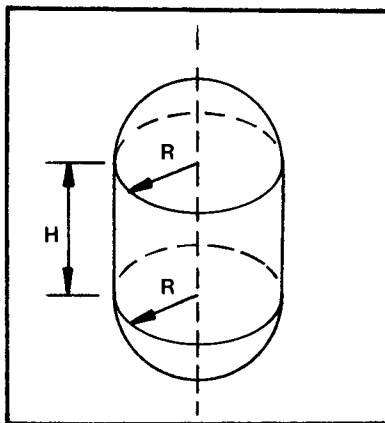
$$\text{b) } \mathbf{v}_A = 0,2 \mathbf{i} - 0,7 \mathbf{j} \text{ m s}^{-1},$$

$$\mathbf{v}_B = 0,2 \mathbf{i} + 1,3 \mathbf{j} \text{ m s}^{-1},$$

$$\mathbf{v}_O = 0,2 \mathbf{i} + 0,3 \mathbf{j} \text{ m s}^{-1}.$$

- 10.- Irudian erakutsitako solidoa zilindro batez eta bi esferaerdiz osotuta dago. Zilindroaren altuera H da, eta beraren erradioa eta esferaerdiena, R . Aurki bedi, biraketa-ardatzarekiko solidoak duen inerti momentua:

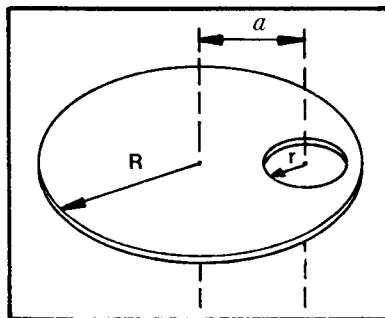
- Barrutik hutsa izanik, σ gainazal-dentsitatearekin.
- Trinko edo betea izanik, ρ bolumen-dentsitatearekin.



$$\text{Emaitzak: a) } 2\pi R^3 \sigma \left(H + \frac{4}{3} R \right).$$

$$\text{b) } \pi R^4 \rho \left(\frac{H}{2} + \frac{8}{15} R \right).$$

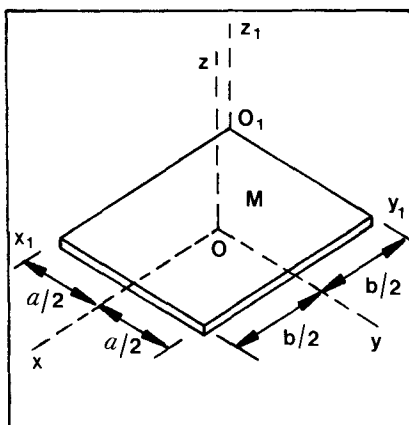
- 11.- Irudiko R erradiodun diskoak r erradiodun zulo zirkular bat du. Diskoaren gainazal-dentsitateak σ balio du. Beraren eta zuloaren zentruen arteko distantzia a da. Lor bedi, O zentrutik pasatzen den eta beraren planoaren perpendikularra den Oz ardatzarekiko diskoak duen inerti momentua.



$$\text{Emaitza: } \pi \sigma \left[\frac{R^4}{2} - r^2 \left(a^2 + \frac{r^2}{2} \right) \right] .$$

12.- Demagun irudiko xafla errektangeluar eta homogenoa. Lor bitez:

- Bere hiru simetri ardatzekiko xaflak dituen inertzi momentuak.
- Steiner-en teoremaz baliatuz, beraren edozein erpinetatik pasatzen diren eta beraren simetri ardatzen paraleloak diren ardatzekiko xaflak dituen inertzi momentuak.



$$\text{Emaitzak: a) } I_{xx} = \frac{1}{12} M a^2 ,$$

$$I_{yy} = \frac{1}{12} M b^2 ,$$

$$I_{zz} = \frac{1}{12} M (a^2 + b^2) .$$

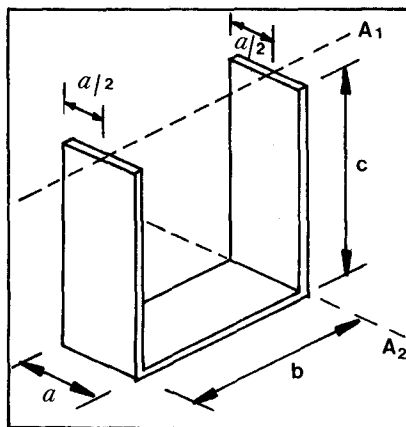
$$\text{b) } I_{x_1 x_1} = \frac{1}{3} M a^2 , \quad I_{y_1 y_1} = \frac{1}{3} M b^2 ,$$

$$I_{z_1 z_1} = \frac{1}{3} M (a^2 + b^2) .$$

13.- Irudiko xafla-multzoan, aldeetako xaflak behekoaren perpendikularrak dira. Kalkula bitez multzoak dituen inertzi momentuak:

- A_1 eta A_2 ardatzekikoak.
- Multzoaren simetri ardatzarekikoa.

Datuak: $a = 5 \text{ cm}$, $b = 4 \text{ cm}$, $c = 6 \text{ cm}$; xafla guztien gainazal-dentsitatea: $1,2 \text{ g cm}^{-2}$.



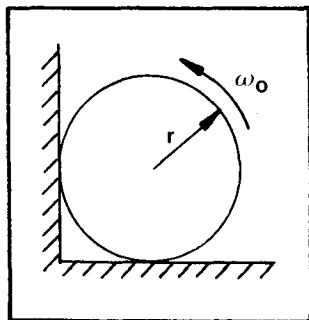
Eraitzak: a) $I_1 = 1542 \text{ g cm}^2$,

$$I_2 = 1514 \text{ g cm}^2 \text{ ,}$$

b) 520 g cm^2 .

9. GAIA

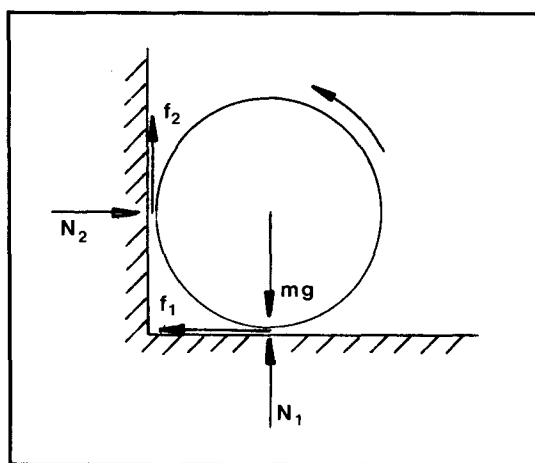
**SOLIDO ZURRUNAREN
DINAMIKA**



9.1. 0,3 m-tako erradioa duen disko bat, zolu gainean kokatuta dago alboko pareta ikuturik. Bai diskoaren eta zoluaren arteko, zein diskoaren eta paretaren arteko marruskadura-koefiziente zinetikoa $\mu = 0,5$ da. $t = 0$ s aldiunean diskoari $\omega_0 = 980 \text{ rad s}^{-1}$ -etako abiadura angeluarra eman zaio, irudian adierazi den norantzan. Kalkula bedi, diskoa geldi dadin behar den denbora-tartea.

Hurrengo irudian diskoaren gaineko indar-sistema adierazi da. Masa-zentruaren azelerazioa nulua denez, ondokoa beteko da:

$$\sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i = 0 \quad \begin{array}{l} N_2 - f_1 = 0 , \\ N_1 + f_2 - m g = 0 \rightarrow N_1 + f_2 - 9,8 m = 0 . \end{array}$$



Bestaldetik, marruskadura-baldintzak ditugu:

$$f_1 = \mu N_1 \rightarrow f_1 = 0,5 N_1 ,$$

$$f_2 = \mu N_2 \rightarrow f_2 = 0,5 N_2 .$$

Ekuazio-sistema ebatzirik, ondokoa dugu:

$$f_1 = 3,92 \text{ m} \quad \text{eta} \quad f_2 = 1,96 \text{ m} .$$

Orain diskoaren biraren norantza positibotzat kontsideraturik, eta masa-zentruarekiko indar-momentuak hartuz, honelaxe planteatuko dugu:

$$\tau_e = I_e \alpha \rightarrow -f_1 r - f_2 r = \frac{1}{2} m r^2 \alpha \rightarrow \alpha = -39,2 \text{ rad s}^{-2} .$$

Azkenez, azelerazio konstanteko higidura zirkularrei dagokien ekuazio ezaguna erabiliko dugu, hau da:

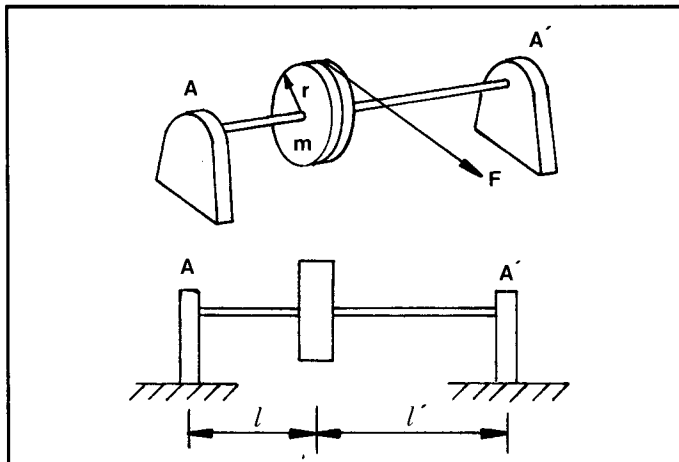
$$\begin{aligned} \omega &= 0 \\ \omega &= \omega_0 + \alpha t \rightarrow \omega = 980 - 39,2 t \rightarrow \\ t &= \frac{980}{39,2} = 25 \text{ s} . \end{aligned}$$

9.2. Irudiko diskoak soka bat du bere azalaldean biribilkaturik. Sokaren bidez atezatu egin da F moduludun indar horizontal batez, eta diskoa biraka hasi da. Diskoaren ardatzaren masa arbuiagarria da, beraren eta eustarren artean inolako marruskadurarik ez dagoelarik. Kalkula bitez:

a) Diskoaren azelerazio angeluarra.

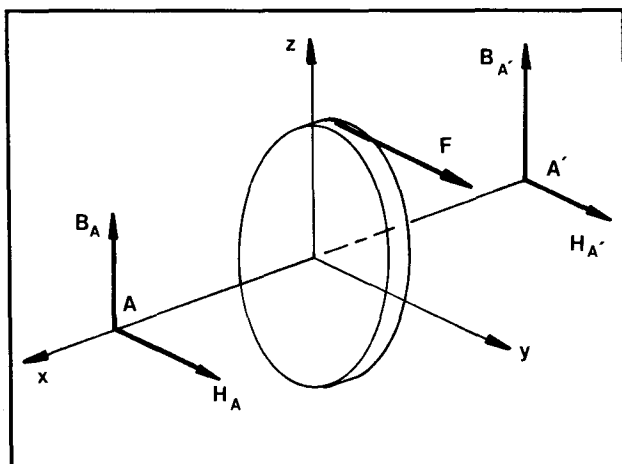
b) A eta A' puntuetan eustarrietako erreakzioak.

Datuak: $m = 20 \text{ kg}$, $r = 0,5 \text{ m}$, $F = 50 \text{ N}$, $l = 0,4 \text{ m}$, $l' = 0,6 \text{ m}$.



a) Diskoak bere inertzi ardatz nagusietariko batekiko, biraketa-ardatzarekiko hain zuzen ere, bira egiten ari denez gero, ondoko ekuazioa aplika dezakegu:

$$\tau_e = I_e \alpha \rightarrow r F = \frac{1}{2} m r^2 \alpha \rightarrow \alpha = \frac{2F}{m r} = 10 \text{ rad s}^{-2}.$$



b) Har dezagun, irudian adierazitako erreferentzi-sistema cartesiarra. Ardatzen iturburua diskoaren masa-zentruan kokaturik dago, eta OX ardatza diskoarenarekin batera dator. Alde batetik, $a_{MZ} = 0$ denez gero, hurrengo ekuazioak planteatu ditzakegu:

$$\sum_{i=1}^n F_i = 0 \quad \begin{aligned} F + H_A + H_{A'} &= 0 \\ B_A + B_{A'} - mg &= 0 \end{aligned}$$

Hots,

$$50 + H_A + H_{A'} = 0$$

$$B_A + B_{A'} - 196 = 0$$

Bestaldetik, momentu angeluarrak OY eta OZ ardatzen norabideetako osagaiak nuluak direnez gero, ($L_y = L_z = 0$, eta ondorioz, $dL_y/dt = \tau_y = 0$ eta $dL_z/dt = \tau_z = 0$) hau ere planteatu dezakegu:

$$\tau_y = 0 \rightarrow B_{A'} l' - B_A l = 0 \rightarrow 0,6 B_{A'} - 0,4 B_A = 0$$

$$\tau_z = 0 \rightarrow H_A l - H_{A'} l' = 0 \rightarrow 0,4 H_A - 0,6 H_{A'} = 0$$

Ekuazio-sistema ebatzirik, ondokoa dugu:

$$B_A = 117,6 \text{ N} \quad , \quad H_A = -30 \text{ N} \quad ,$$

$$B_{A'} = 78,4 \text{ N} \quad , \quad H_{A'} = -20 \text{ N} \quad .$$

Azkenez, eskaturiko erreakzioak honako hauek izango dira:

$$R_A = \sqrt{B_A^2 + H_A^2} = 121,5 \text{ N} \quad ,$$

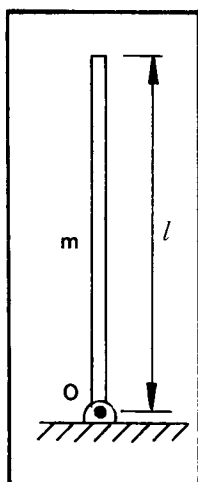
$$R_{A'} = \sqrt{B_{A'}^2 + H_{A'}^2} = 81,5 \text{ N} \quad .$$

9.3. Irudiko barrak bere O mutur finkoaren inguruan bira egin dezake. $t = 0$ aldi-unean, barra jarrera bertikalean egon da, eta pausagunetik hasi da biraka. Erorketan biraturiko angeluaren funtzioan, lor bitez:

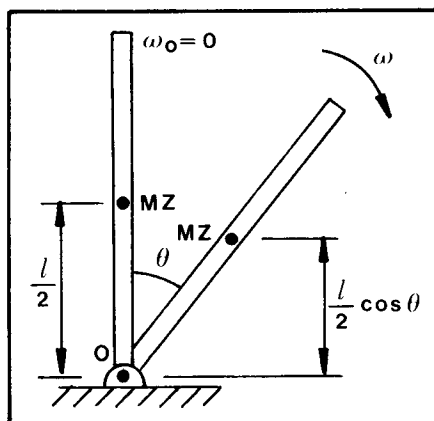
- Abiadura angeluarra eta azelerazio angeluarra.
- Masa-zentruaren abiadura eta azelerazio normala eta tangenziala.
- O puntu finkoan barrak jasango duen erreakzioa.

Zoluan errebotatu ondoren, barrak bere abiadura angeluarraren erdia galtzen baldin badu,

- zer posiziotaraino igongo da berriro?



a) Barraren gainean bi indar daude aplikatuta: Pisua eta O puntuko erreakzioa. Pisua indar kontserbakorra da, eta erreakzioak ez du lanik egingo, O puntua finkoa bait da. Honelatan, energia mekanikoaren kontserbazioaren printzipioa aplikatu dezakegu, hau da,



$$m g \frac{l}{2} = m g \frac{l}{2} \cos \theta + \frac{1}{2} I \omega^2 ,$$

non $I = 1/3 m l^2$, barraren perpendikularra eta O muturretik pasatzen den ardatzarekiko inertzia momentua den.

$$m g l = m g l \cos \theta + \frac{1}{3} m l^2 \omega^2 .$$

$$\omega = \sqrt{\frac{3g}{l} (1 - \cos \theta)} .$$

Hemendik, azelerazio angeluarraren definizioa erabiliz eta urrats matematiko sinple batez, honako hau dugu:

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d\omega}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = \omega \frac{d\omega}{d\theta} ,$$

$$\alpha = \sqrt{\frac{3g}{l} (1 - \cos \theta)} \sqrt{\frac{3g}{l}} \frac{\sin \theta}{\sqrt{1 - \cos \theta}} = \frac{3g}{2l} \sin \theta .$$

b) Masa-zentruaren abiadura hau da:

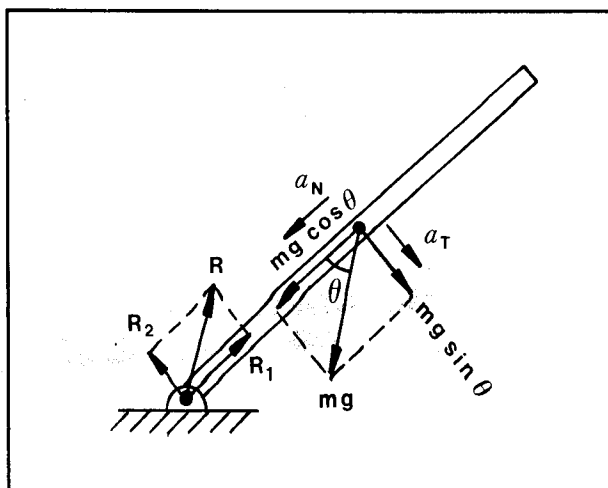
$$v = \omega \frac{l}{2} = \frac{1}{2} \sqrt{3g l (1 - \cos \theta)} .$$

Eta beraren azelerazio normala eta tangenziala, hauexek izango dira:

$$a_N = \omega^2 \frac{l}{2} = \frac{3g}{2} (1 - \cos \theta) .$$

$$a_T = \alpha \frac{l}{2} = \frac{3g}{4} \sin \theta .$$

c) Hurrengo orrialdeko irudian, indarrak barraren norabidean eta beraren norabide perpendikularrean dituzten osagaietan banatuta daude. Honelatan, bada, ondoko ekuazioak idatz ditzakegu:



$$m g \cos \theta - R_1 = m a_N = \frac{3m g}{2} (1 - \cos \theta) ,$$

$$m g \sin \theta - R_2 = m a_T = \frac{3m g}{4} \sin \theta ,$$

$$R_1 = \frac{m g}{2} (-3 + 5 \cos \theta) ,$$

$$R_2 = \frac{m g}{4} \sin \theta .$$

$$R = \sqrt{R_1^2 + R_2^2} = \sqrt{\frac{9}{2} m g + 25 \cos^2 \theta + \frac{1}{4} \sin^2 \theta - 30 \cos \theta} .$$

d) Zolura heltzean, barraren abiadura angeluarra hauxe da:

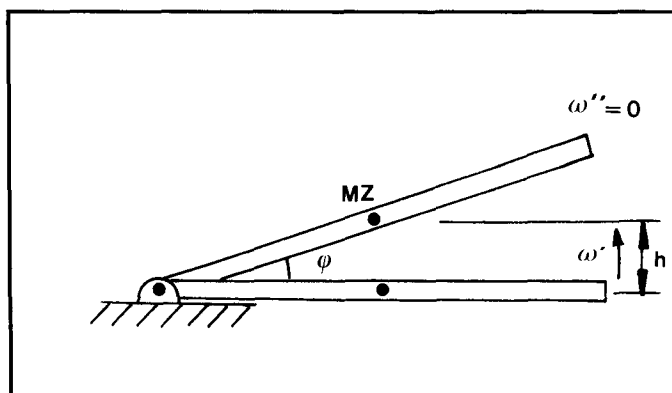
$$\omega = \sqrt{\frac{3g}{l} (1 - \cos \theta)}$$

$$\theta = \frac{\pi}{2}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{3g}{l}} .$$

Beraz, errebotatu ondoren ondokoa izango da:

$$\omega' = \frac{1}{2} \omega = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3g}{l}} .$$



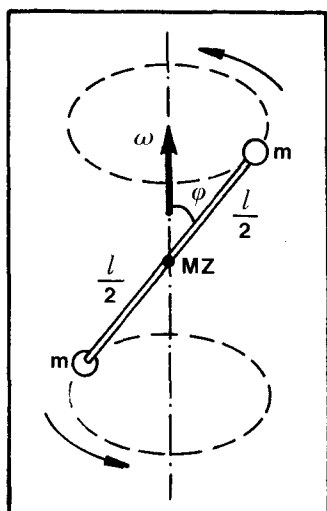
Orain energia mekanikoaren kontserbazioaren printzipioa erabiliko dugu berriro, lehenengo atalean adierazitako arrazoi berberagatik. Hau da:

$$\frac{1}{2} I \omega'^2 = m g h \quad ,$$

$$\frac{1}{2} \frac{1}{3} m l^2 \frac{1}{4} \frac{3g}{l} = m g h \rightarrow h = \frac{l}{8} \quad .$$

Edo φ angelua kalkulatu nahi baldin badugu:

$$\sin \varphi = \frac{h}{l/2} = \frac{1}{4} \rightarrow \varphi = 14^\circ 28' 39'' \quad .$$

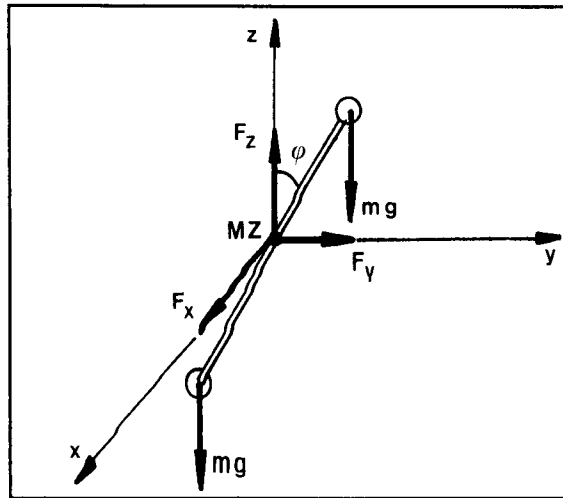


9.4. Irudian adierazi den sistema, bere masa-zentrutik pasatzen den ardatz bertikalaren inguruan biraka ari da, ω abiadura angeluar konstanteaz, masa-zentrua finko dagoelarik. Bolen erradioak guztiz arbuigarriak dira barraren luzerarekin konparaturik eta, bestalde, barraren masa arbuigarria da bolenekin alderaturik.

Aurki bitez:

- MZ -an jasango den erreakzioa.
- Sistemaren higidura mantentzeko behar den indar-momentua.

a)

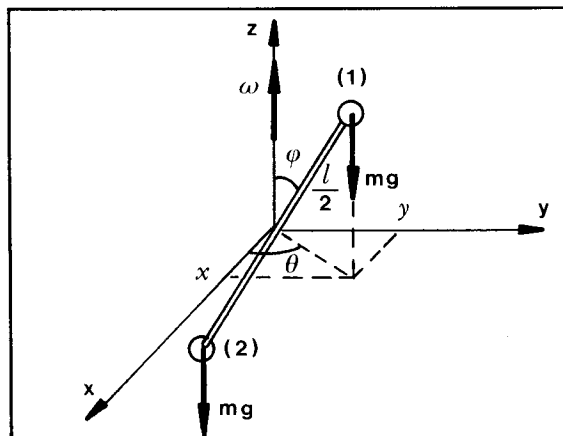


Sistemaren masa-zentruaren azelerazioa nulua denez gero, ondokoa aplika dezakegu:

$$\sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i = 0 \quad \begin{aligned} F_x &= 0 \\ F_y &= 0 \\ F_z - 2mg &= 0 \rightarrow F_z = 2mg \end{aligned}$$

Hau da, eskaturiko erreakzioa, bertikala besterik ez da, eta bola baten pisuaren bikoitza balio du.

b)



Lehenik eta behin, kalkula dezagun, sistemak bere masa-zentruarekiko duen momentu angeluarra. Has gaitezen, 1 bolarena kalkulatzeko. Hona hemen aipaturiko bolaren posizio-bektorea edozein aldiunetan:

$$\mathbf{r}_1 = \frac{l}{2} \sin\varphi \cos\theta \mathbf{i} + \frac{l}{2} \sin\varphi \sin\theta \mathbf{j} + \frac{l}{2} \cos\varphi \mathbf{k} .$$

Hemendik, bola honen abiadura honelaxe lor dezakegu:

$$\mathbf{v}_1 = \frac{d\mathbf{r}_1}{dt} = \frac{l\omega}{2} \sin\varphi (-\sin\theta \mathbf{i} + \cos\theta \mathbf{j}) .$$

Eta beraz, bola honen momentu angeluarra hauxe izango da:

$$\mathbf{L}_1 = \mathbf{r}_1 \wedge m \mathbf{v}_1 ,$$

$$\mathbf{L}_1 = \frac{m\omega l^2}{4} \sin\varphi (-\cos\varphi \cos\theta \mathbf{i} - \cos\varphi \sin\theta \mathbf{j} + \sin\varphi \mathbf{k}) .$$

Goazen orain 2 bolaren momentu angeluarra kalkulatzera. 2 bolaren jarrera, 1 bolarekin konparaturik, jatorriarekiko simetrikoa dela ikus daiteke garbiro. Honelatan,

$$\mathbf{r}_2 = -\mathbf{r}_1 \rightarrow \mathbf{v}_2 = -\mathbf{v}_1 ,$$

$$\mathbf{L}_2 = \mathbf{r}_2 \wedge m \mathbf{v}_2 = -\mathbf{r}_1 \wedge m (-\mathbf{v}_1) = \mathbf{L}_1 .$$

Hau da, bi bolekin momentu angeluar berdina dute. Beraz, sistemaren momentu angeluarra ondokoa izango da:

$$\mathbf{L} = \mathbf{L}_1 + \mathbf{L}_2 = 2 \mathbf{L}_1 ,$$

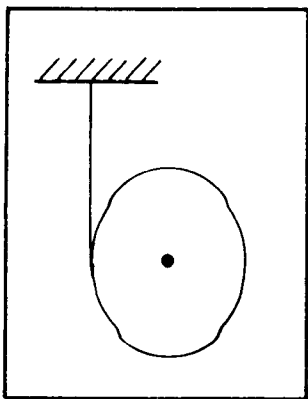
$$\mathbf{L} = \frac{m l^2 \omega}{2} \sin\varphi (-\cos\varphi \cos\theta \mathbf{i} - \cos\varphi \sin\theta \mathbf{j} + \sin\varphi \mathbf{k}) .$$

Azkenez, hasieran eskatutako indar-momentua errazki lor dezakegu, denborarekiko deribatu sinple batez:

$$\tau = \frac{d\mathbf{L}}{dt} .$$

Eta beraren moduluaren balioa hauxe da:

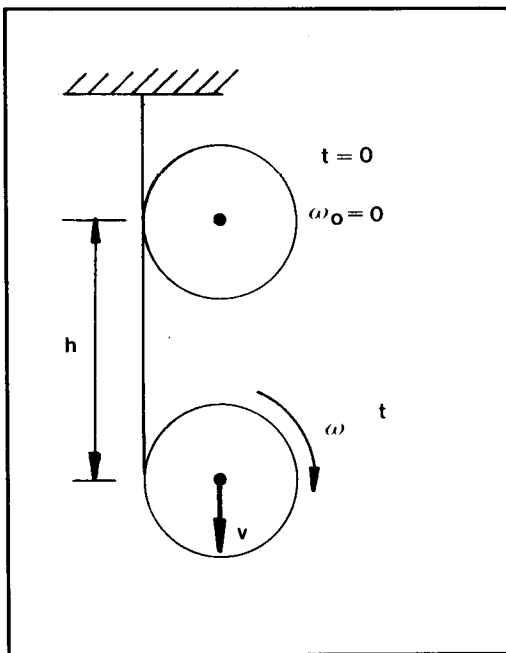
$$\tau = \frac{m \omega^2 l^2}{2} \sin \varphi \cos \varphi .$$



9.5. Irudiko diskoa pausagunetik hasi da higitzen, bere gainazalean biribilkatutako soka desbiribilkatuz. Aurki bitez:

- Masa-zentruaren abiadura, diskoa jaitsiriko distantziaren funtzioan.
- Masa-zentruaren azelerazioa, aurreko atalean aurkitutako abiaduraren bidez.
- Sokaren tentsioaren eta diskoaren pisuaren arteko erlazioa.

a) Diskoaren gainean bi indar daude aplikatuta, pisua eta sokaren tentsioa, hain zuzen ere. Lehenengoa kontserbakorra da, eta bigarrenak



ez du lanik egingo, sokak geldirik dirau eta. Beraz, energia mekanikoaren kontserbazioaren printzipioa erabiliko dugu:

$$m g h = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} I \omega^2 = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} \frac{1}{2} m r^2 \omega^2 .$$

Bestaldetik, diskoa errotatzen ari da sokak sostengaturik; hortaz, ondoko erlazioa aplika dezakegu:

$$v = \omega r .$$

Eta idatzitako ekuazioetatik, hauxe aterako dugu:

$$m g h = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{4} m v^2 = \frac{3}{4} m v^2 ,$$

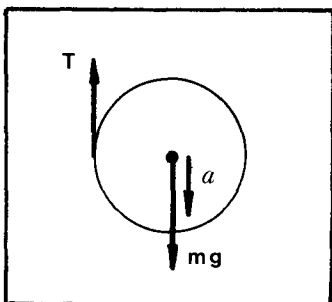
$$v = 2 \sqrt{\frac{gh}{3}} .$$

b) Azelerazioaren definizioa harturik, eta urrats matematiko sinple batez, honako hau dugu:

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dh} \frac{dh}{dt} = v \frac{dv}{dh} ,$$

$$a = 2 \sqrt{\frac{gh}{3}} \cdot 2 \sqrt{\frac{g}{3}} \frac{1}{2\sqrt{h}} = \frac{2g}{3} .$$

c) Diskoaren gaineko indarrak ikusirik, eta masa-zentruaren azelerazioa ezaguna dugunez gero, errazki planteatu dezakegu hau:



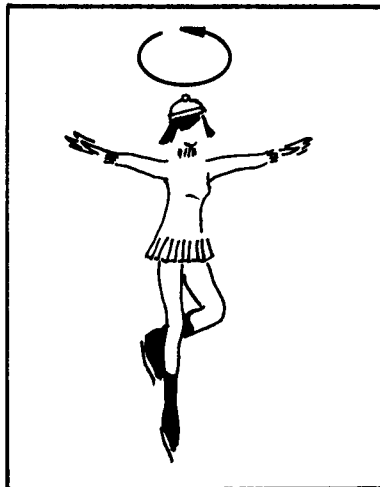
$$-T + m g = m a = m \frac{2g}{3} .$$

Eta hemendik:

$$\frac{T}{m g} = \frac{1}{3} .$$

ARIKETAK.

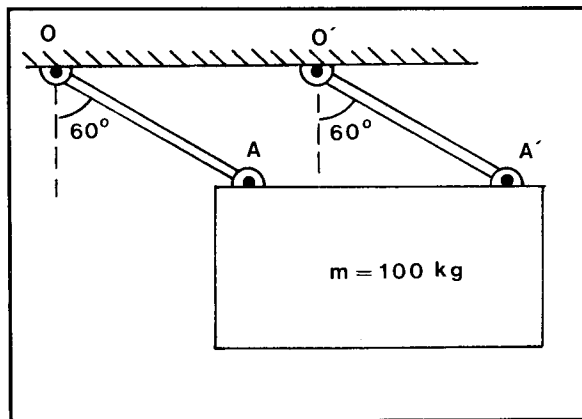
- 1.- Irristari bat oinpuntaka besoak hedaturik, biraka hasi da $\omega_0 = 12 \text{ rad s}^{-1}$ -etako abiadura angelua-rraz. Jarrera honetan irristariaren inerti-momentua $I_0 = 1,6 \text{ m}^2\text{kg}$ -takoa da. Ondoren, besoak gorputzera hurbildu ditu, inerti-momentua $I = 1,2 \text{ m}^2\text{kg}$ -tara aldaturik. Edozein marruskadura mota arbuiaturik, zenbat balioko du irristariaren abiadura angeluar berriak? Zenbateko lana egin du irristariak besoak gorputzera hurbiltzeko?



Emaitzak:

$$16 \text{ rad s}^{-1} \quad ; \quad 38,4 \text{ J} .$$

- 2.- Irudiko xafla errektangeluar eta homogeneoa, luzera bereko bi barra-
ren bidez dago eutsita. O , O' , A eta A' puntuak giltzatuta daude



inolako marruskadurarik gabe, barren pisuak arbuiagarriak direlarik. Sistema pausagunetik higitzen hasi da, irudian ageri den jarreran. Kalkula bedi barra bakoitzaren tentsioa, posizio bertikaletik pasatuko diren aldiunean.

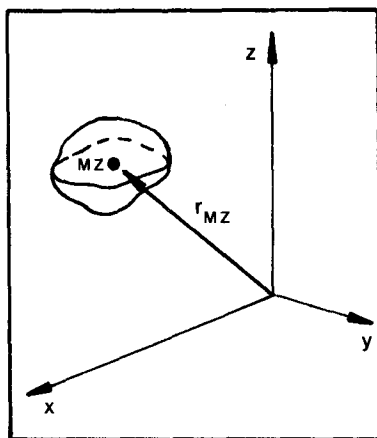
Emaitza: 980 N .

- 3.- Irudian erakutsitako gorputzak $m = 2 \text{ kg}$ -tako masa du, eta eremu grabitatorioan erortzen ari da. Aldiune batetan gorputzaren masazentruaren posizio-bektorea eta abiadura $\mathbf{r}_{MZ} = 4\mathbf{i} + 5\mathbf{j} \text{ m}$ eta

$\mathbf{v}_{MZ} = -\mathbf{j} \text{ m s}^{-1}$, dira hurrenez hurren, eta beraren momentu angular propioa $\mathbf{L}' = 8 \mathbf{k} \text{ Kg m}^2 \text{ s}^{-1}$.

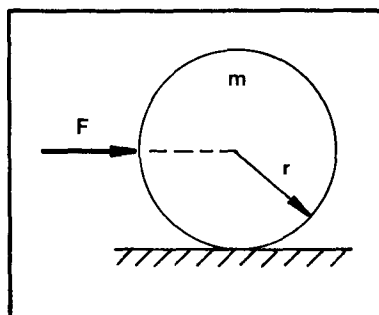
Kalkula bitez:

- Aipaturiko aldiunean gorputza-
ren O puntuarekiko momentu
angularra.
- Galdera berbera, aurreko aldi-
unea baino 1 s geroago.
- Nola aldatuko litzateke biga-
rrren ataleko erantzuna, gor-
putzaren masa-zentruarekiko
 $\tau_{MZ} = 12\text{ k Nm}$ indar-momen-
tuak eragingo balu?

**Emaizak:**

- a) 0 ,
b) $-86,6 \mathbf{i} + 78,4 \mathbf{j} \text{ kg m}^2\text{s}^{-1}$,
c) $-86,6 \mathbf{i} + 78,4 \mathbf{j} + 12 \mathbf{k} \text{ kg m}^2\text{s}^{-1}$.

- 4.- Zolu gainean kokatuta dagoen $m = 4 \text{ kg}$ -tako eta $r = 0,1 \text{ m}$ -tako esfera bati, F indar horizontal bat aplikatu zaio, indarraren aplikazio-lerroa esferaren zentrutik pasatzen delarik. Esfera eta zoluaren arteko marruskadura-koefiziente estatikoak eta zinetikoak $\mu_e = 0,5$ eta $\mu_z = 0,2$ balio dute hurrenez hurren.

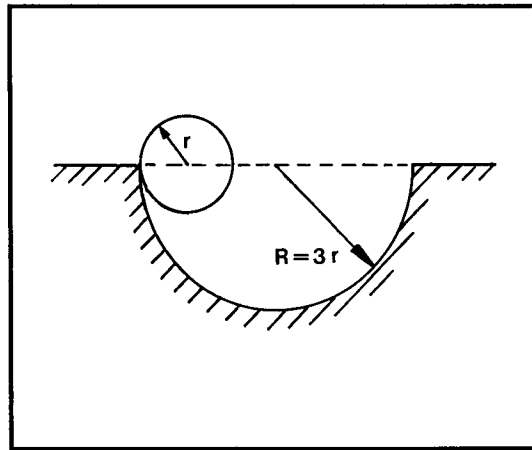


- Kalkula bedi F indarrak har dezakeen baliorik handiena, esferak irrist egin ez dezan.
- F indarrari balio kalkulatuaren bikoitza ematen baldin bazaio, kalkula bitez, esferaren azelerazio angeluarra eta beraren masazentruaren azelerazio lineala.

Emaizak:

- a) $68,6 \text{ N}$,
b) 49 rad s^{-2} ; $32,34 \text{ m s}^{-2}$.

- 5.- Hurrengo irudiko diskoa geldirik dago, zentrua zulo erdizilindrikoaren altuera berean duelarik. Jarrera honetan aske utzi eta errotatzen hasi da zulotik.



Aurki bitez:

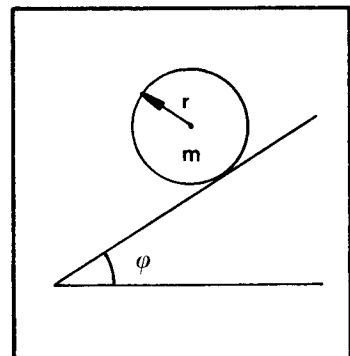
- a) Edozein posiziotan diskoaren masa-zentruak duen abiadura.
- b) Diskoaren pisuaren eta zoluaren erreakzioaren arteko erlazioa, diskoa zuloko punturik baxuenera helduko den aldiunean.

Emaitzak: a) $v = \sqrt{\frac{8}{3} g r \sin \theta}$.

b) $\frac{N}{m g} = \frac{7}{3}$.

- 6.- m masa eta r erradioa dituen zilindro bat, irudiko φ angeluko plano inklinatuan kokatuta dago. Aurki bitez:

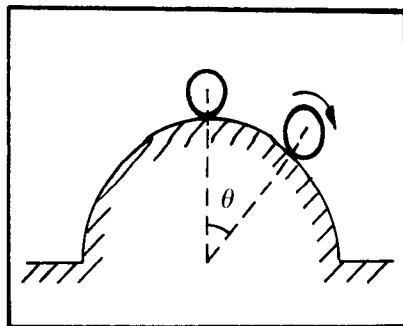
- a) Aplikatu behar zaion indar-momentua eta lurrarekiko marruskadura koefiziente estati-koaren baliorik txikiena, zilindroak geldirik iraun dezan.
- b) Magnitude berberak, zilindroak planoan gorantz errota dezan, beraren masa-zentruak a azele-razioa edukirik.



Emaitzak: a) $\tau = r m g \sin \varphi$, $\mu = \tan \varphi$.

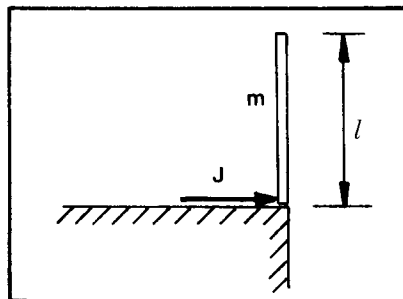
b) $\tau = r m \left(\frac{3a}{2} + g \sin \varphi \right)$, $\mu = \frac{a + g \sin \varphi}{g \cos \varphi}$.

- 7.- Tontor erdizilindriko baten punturik altuenean eraztun bat kokatu da, geldirik dagoelarik. Tontor gainean errotatzen hasi baldin bada, zein posiziotan egingo du alde tontorretik?



Emaitza: $\theta = 60^\circ$

- 8.- m masa eta l luzera dituen makila, mahai baten hegalean dago kokatuta, jarrera bertikalean, irudiak ageri duen moduan. Bapatean, beraren beheko muturrean J bulkada horizontala eman zaio. Aurki bitez:



- Bulkadaren ondorioz makilaren masa-zentruak lortuko duen abiadura, eta masa-zentruarekiko makilaren abiadura angeluarra.
- Masa-zentruaren posizioa, makilak bira oso bat bete duen aldiunean.
- Nola aldatuko lirатеke aurreko bi ataletako erantzunak, bulkada goiko muturrean emango balitzaio?

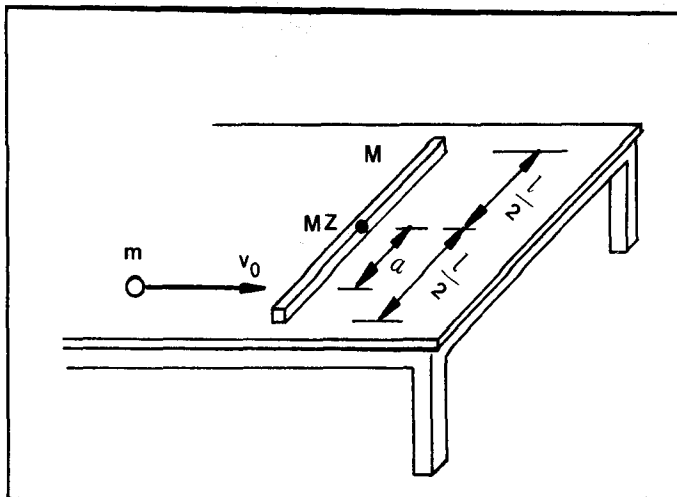
Emaitzak: a) $v_{MZ} = \frac{J}{m}$ norabide horizontalean,

$\omega = \frac{6J}{ml}$ erlojuaren orratzen aurkako norantzan.

$$b) x_{MZ} = \frac{\pi l}{3} \quad , \quad y_{MZ} = \frac{\pi^2 g m^2 l^2}{18 J^2}$$

- c) abiadura angeluarraren norantza, besterik ez da aldatuko.

- 9.- Mahai horizontal eta leun baten gainean M masako eta l luzerako makila dago geldirik. Mahai gainean v_0 abiaduraz makilarekiko perpendikulariki higitzen ari den puxtarri batek, makilarekin topo egin du, talka ondoren v_1 abiaduraz, norabide berean eta alderantzizko norantzan, errebotatu duelarik. Puxtarriaren masa m da, eta makilaren masa-zentrutik a distantziara jo du. Kalkula bitez:

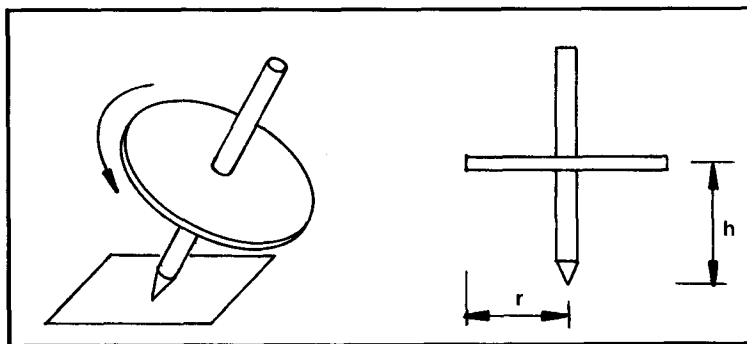


- Talka ondoren, makilaren masa-zentruak duen abiadura.
- Talka ondoren, masa-zentruak duen abiadura angeluarra.
- Talkan galdutako energia zinetikoa.

Datuak: $M = 660 \text{ g}$, $l = 100 \text{ cm}$, $a = 25 \text{ cm}$,
 $m = 10 \text{ g}$, $v_0 = 100 \text{ cm s}^{-1}$, $v_1 = 10 \text{ cm s}^{-1}$.

- Emaitzak:**
- 2 cm s^{-1} .
 - $0,06 \text{ rad s}^{-1}$.
 - 47400 erg .

- 10.- Irudiko ziba txikia bere ardatzaren inguruan biraka ari da ω abiadura angeluarraz, bere beheko muturra zolu gainean finko dagoelarik. Ardatzaren masa arbuigarria da diskoarenarekin konparaturik. Kalkula bedi prezesio-abiadura angeluarra.

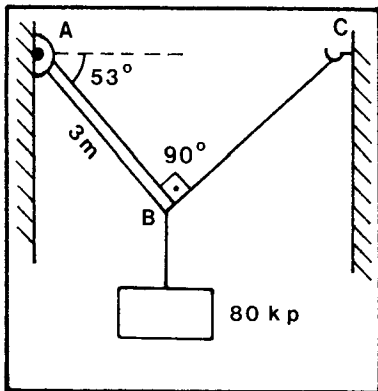


Datuak: $r = 2 \text{ cm}$, $h = 2 \text{ cm}$, $\omega = 100 \text{ rad s}^{-1}$.

Emaitza: $9,8 \text{ rad s}^{-1}$.

10. GAIA

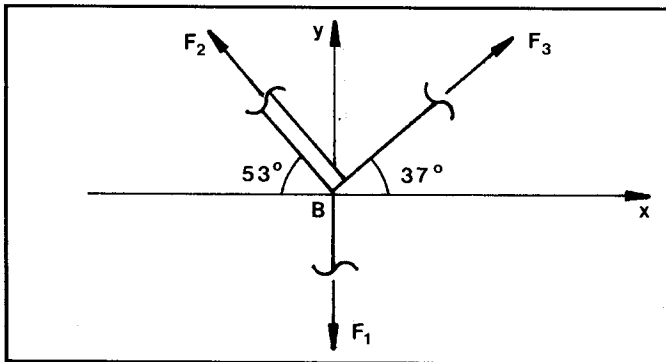
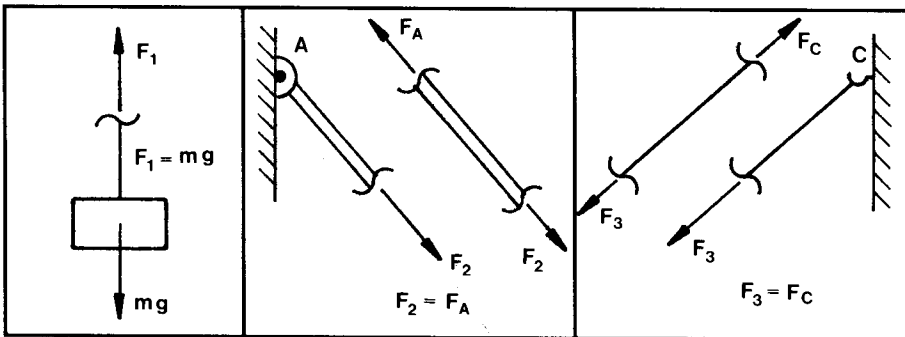
ESTATIKA



10.1. Irudiko sistemako AB, A puntuan giltzaturik dagoen barra bat da eta BC, soka bat. Barraren luzera 3 m-takoa da. B puntutik zintzilikaturik beste soka bat dago, 80 kg-tako pisu bati eusten. A eta C puntuak altuera berean daude.

a) Lor bitez A puntuko erreakzioa eta BC soka-ren tentsioa.

b) Indarren eskema egin.



Aurreko irudietan sistemako elementu bakoitzaren gainean eragiten ari diren indar guztiak jarri ditugu. Erraz ikus daitekeenez, kasu guztietan akzio-erreakzioaren printzipioa beteko da.

Lehenengo iruditik: $F_1 = m g = 80 \times 9,8 = 784 \text{ N}$.

Azken irudia aztertuz:

$$\sum F_x = 0 \rightarrow -F_2 \cos 53 + F_3 \cos 37 = 0 \quad ,$$

$$\sum F_y = 0 \rightarrow -F_2 \sin 53 + F_3 \sin 37 - F_1 = 0 \quad .$$

Ez dugu momentuen ekuazioa jarri, hiru indarrak konkurrenteak bait dira. Beraz,

$$-0,6 F_2 + 0,8 F_3 = 0 \quad ,$$

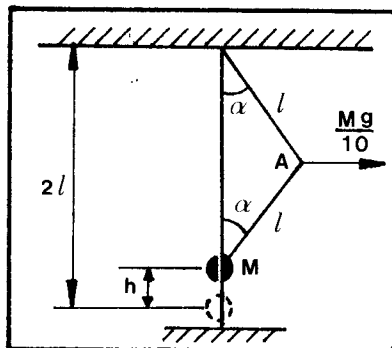
$$0,8 F_2 + 0,6 F_3 = 784 \quad .$$

Sistema hau ebatziz, ondoko emaitzak lortuko ditugu:

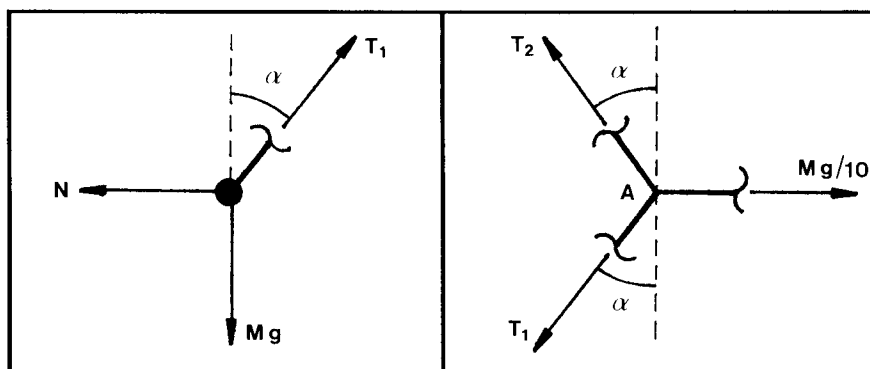
$$F_3 = 474,4 \text{ N} \quad (BC \text{ sokaren tentsioa}) \quad ,$$

$$F_2 = 627,2 \text{ N} \quad (A \text{ puntuko erreakzioa}) \quad .$$

10.2. M masadun partikula bertikal batetan higitu ahal da. Hasieran soka batetik zintzilikaturik dago. Bigarren soka bat, lehenaren erdian lotu da eta $M g / 10$ indar horizontal batez tiraka jarri delarik. Zenbat jasoko da M masa, indar horren kausaz?



Lehenik, sistemaren gainean diharduten indarren eskema egingo dugu.



Idatz ditzagun oreka-baldintzak,

$$1: -Mg + T_1 \cos \alpha = 0 \quad 2: -T_1 \cos \alpha + T_2 \cos \alpha = 0$$

$$-N + T_1 \sin \alpha = 0 \quad -T_1 \sin \alpha - T_2 \sin \alpha = Mg / 10 = 0$$

Hemengo ezezagunak T_1, T_2, N eta α dira. Erraz ikus daitekeenez, $T_1 = T_2$. Ondorioz,

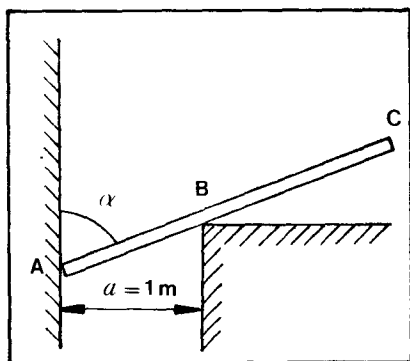
$$2T_1 \sin \alpha = \frac{Mg}{10},$$

$$T_1 \cos \alpha = Mg,$$

$$\tan \alpha = \frac{1}{20} \rightarrow \alpha = 2^\circ 51' 45''.$$

Behin α kalkulatu ondoren, oso erraza da h kalkulatzeko:

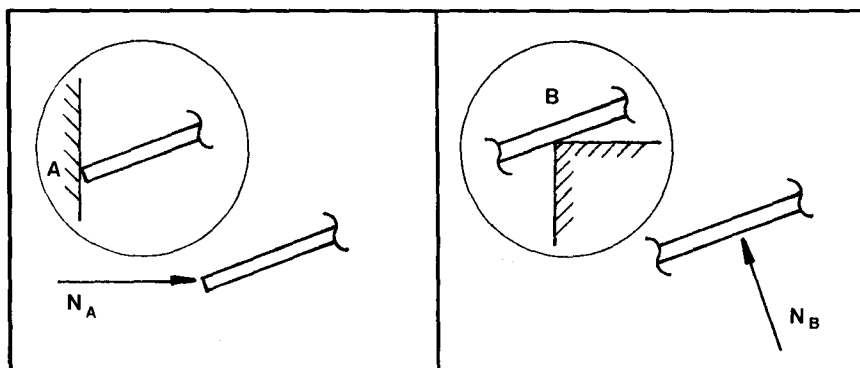
$$h = 2l - 2l \cos \alpha = 2l (1 - \cos \alpha) = 0,0025 l.$$



10.3. Hiru metro luze den eta bederatzi kilografo dituen makila bat A eta B puntuetan eutsita dago marruskadurarik gabe, irudian ageri den moduan. Lor bitez:

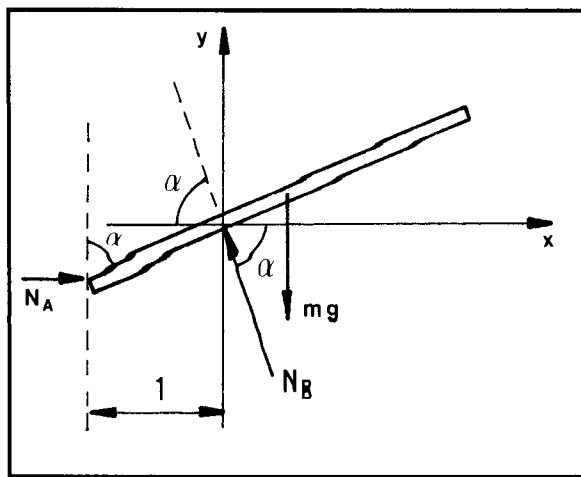
- Orekarako α angelua.
- A eta B puntuetan makilaren gainean eragiten ari diren indarrak.

A eta B puntuetan dauden ukipen-indarrak hauexek dira:



Hots, ikus daitekeenez, marruskadurarik ez egotean, kasu bietan erreakzio normala ageri da soilik.

Oreka-posizioan:



$$\sum F_x = 0 \rightarrow N_A - N_B \cos \alpha = 0 ,$$

$$\sum F_y = 0 \rightarrow N_B \sin \alpha - m g = 0 ,$$

$$\sum \tau_{Az} = 0 \rightarrow N_B \frac{1}{\sin \alpha} - m g \, 1,5 \sin \alpha = 0 .$$

Sistema hau ebatziko dugu. Azken bi ekuazioetatik,

$$N_B = \frac{m g}{\sin \alpha} \quad \rightarrow \quad \frac{m g}{\sin \alpha} = m g \, 1,5 \sin^2 \alpha .$$

$$N_B = m g \, 1,5 \sin^2 \alpha$$

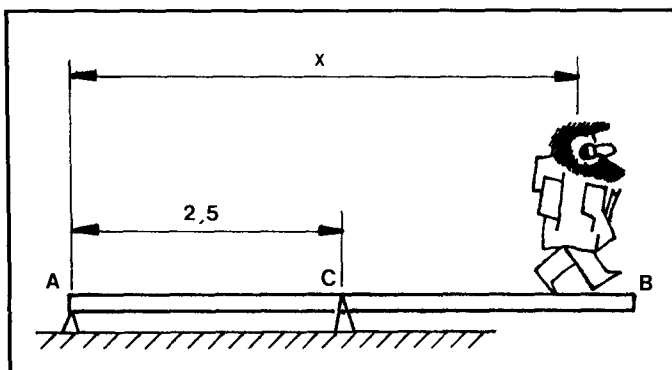
$$\sin^3 \alpha = \frac{1}{1,5} \rightarrow \alpha = \arcsin \frac{1}{\sqrt[3]{1,5}} = 60^\circ 52' 39'' .$$

Angelua lortu eta gero, erraz lortuko ditugu indarrak:

$$N_B = \frac{m g}{\sin \alpha} = 100,9 \, N ,$$

$$N_A = N_B \cos \alpha = \frac{m g}{\tan \alpha} = 49 \, N .$$

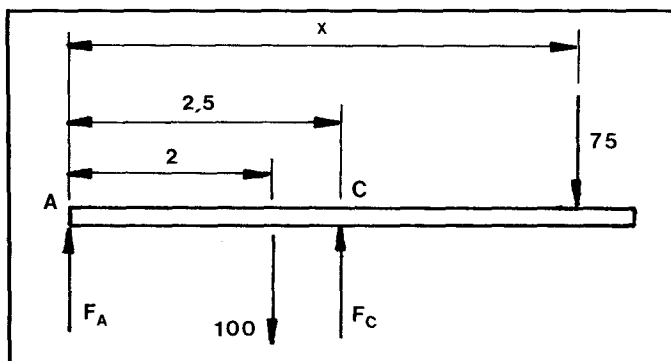
10.4. Irudian ageri den AB habe uniformeak, 4 m -tako luzera eta 100 kg -tako masa ditu. Habe horrek puntu finko bat du (C) eta puntu horren inguruan bira egin dezake; ostera, A puntuan apuiaturik dago, soil-soilik.



Baldintza horietan, 75 kg -tako gizon bat, A puntutik hasita B punturantz abiatu da poliki-poliki.

- Lor bedi, oreka apurtu gabe egin dezakeen bidea.
- Idatz bedi, A puntuko erreakzioa x distantziaren funtzioan (oreka apurtu aurretik, noski).

Azter ditzagun oreka apurtu aurreko indarrak:



Ohar gisa, diogun ezen, C puntuan eragiten ari den erreakzioa, bertikala dela jotzen dugula, horizontalaren norabideko beste inolako indarrik ez bait dago. Beraz, ekuazio hauek ditugu:

$$\sum F_y = 0 \rightarrow F_A + F_C - 100 - 75 = 0 ,$$

$$\sum \tau_{Cz} = 0 \rightarrow -F_A \cdot 2,5 + 100 \times 0,5 - 75(x - 2,5) = 0 .$$

Oreka apurtzen hasten den unean, $F_A = 0$ da, zeren eta biratzen hastean A puntuko ukipena apurtu egingo bait da. Une horretan:

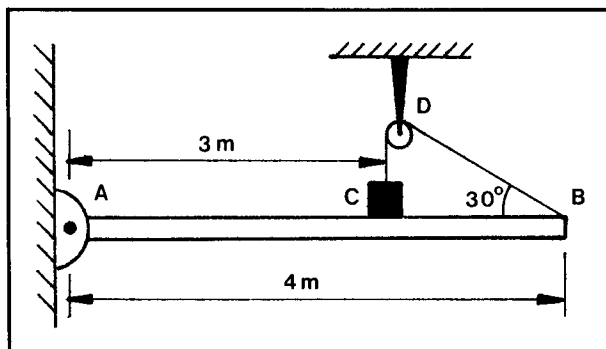
$$0 + 100 \cdot 0,5 - 75 (x - 2,5) = 0 ,$$

$$x = 3,16 \text{ m} .$$

Bestalde, oreka apurtu aurretik F_A erreakzioak x distantziaren funtzioan duen balioa eskatu digute. Bigarren ekuaziotik,

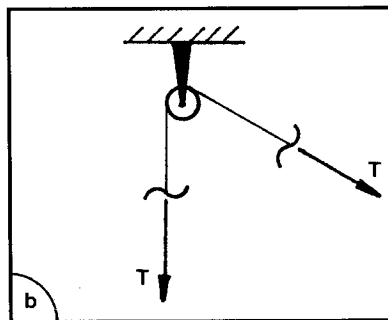
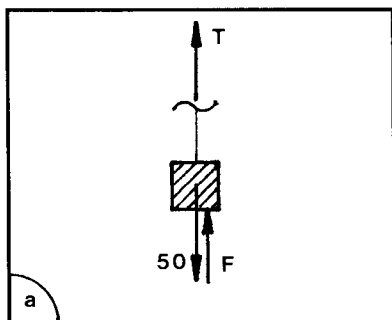
$$F_A = \frac{50 \cdot 75 (x - 2,5)}{2,5} = 95 - 30 x .$$

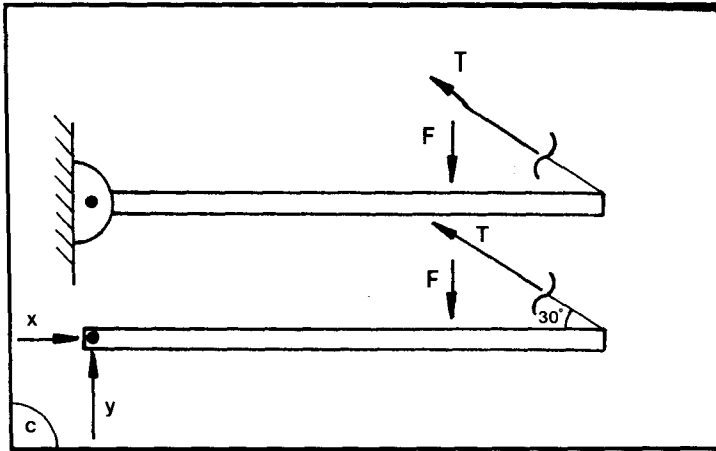
10.5. Irudiko sisteman, 50 kp-tako pisua duen C gorputza, A puntuan giltzaturik dagoen eta pisugabekoa kontsideratzen den AB habean apuiaturik dago, denbora berean CDB soka, D txirrikatik pasatuz atezaturik dagoelarik. Sistema osoa orekan dago.



- Eskema egokien bidez azal bitez, habean eta C gorputzean eragiten ari diren indarrak.
- Kalkula bitez, habean eragiten ari diren indarren moduluak.

Eragiten ari diren indarren eskemak onðoko irudietan adierazi dira.





Ekuazio hauek ditugu:

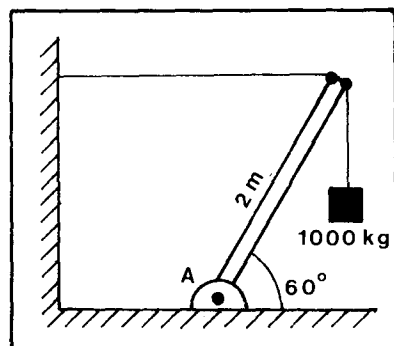
$$\begin{aligned} \text{a) } T + F - 50 &= 0 , \\ \text{c) } T \sin 30 - F + Y &= 0 , \\ -T \cos 30 + X &= 0 , \\ \tau_{B_z} = F - 4Y &= 0 . \end{aligned}$$

Beraz, lau ekuazio eta lau ezezagun (F, T, X, Y) ditugu. Lorturiko emaitza, hauex da:

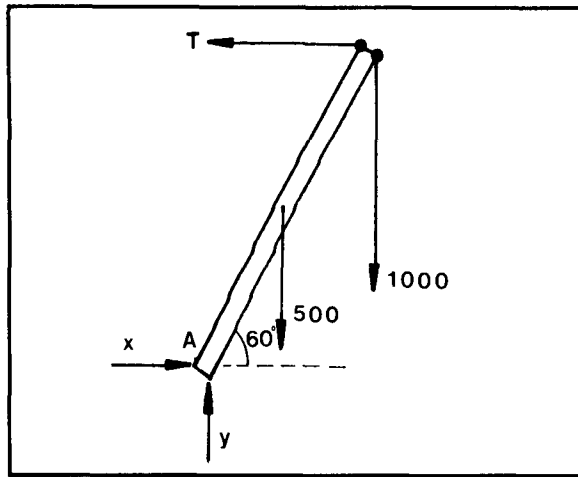
$$\begin{aligned} F &= 20 \text{ kp} , & T &= 30 \text{ kp} , \\ X &= 15\sqrt{3} \text{ kp} , & Y &= 5 \text{ kp} . \end{aligned}$$

10.6. Irudian ageri den habea, homogenoa da eta beraren masa, 550 kg-takoa. Lor bitez:

- Soka horizontalaren tentsioa.
 - Behekaldean habearen gainean eragiten ari den indarraren osagaiak.
- (Oharra: Bi soka desberdin direla kontsideratuko da).



Ondorengo irudian barraren gainean eragiten ari diren indarrak adierazi dira. Hiru ezezagun (T, X, Y) eta hiru ekuazio ditugu:



$$\sum F_x = 0 \rightarrow X - T = 0 ,$$

$$\sum F_y = 0 \rightarrow Y - 500 - 1000 = 0 ,$$

$$\begin{aligned} \sum \tau_A = 0 \rightarrow & -500 \cdot 1 \cos 60 - 1000 \cdot 2 \cos 60 \\ & + T \cdot 2 \sin 60 = 0 . \end{aligned}$$

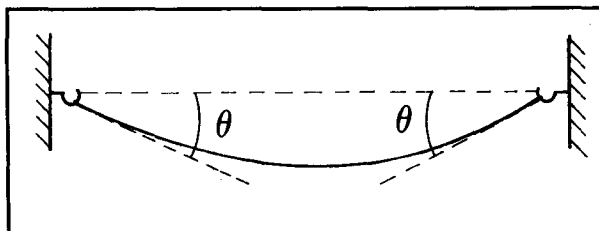
Azken ekuaziotik,

$$T = \frac{1250\sqrt{3}}{3} \text{ kp} .$$

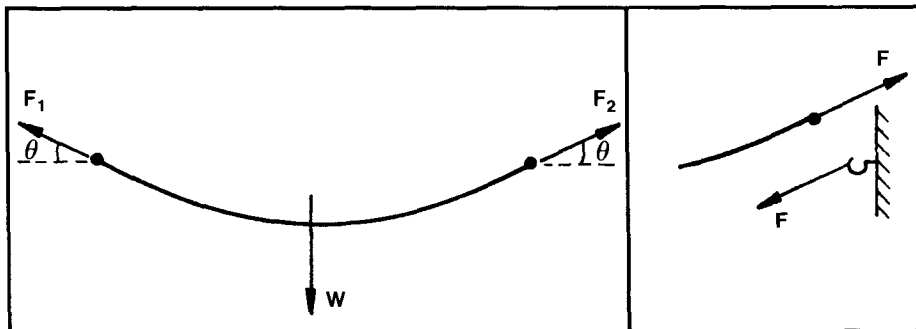
Beste ekuazioetatik,

$$X = \frac{1250\sqrt{3}}{3} \text{ kp} , \quad Y = 1500 \text{ kp} .$$

10.7. *W* pisuko kate malgu bat, altuera berean dauden iltze bitatik zintzilikatuta dago. Muturretan, horizontalarekiko θ angelua osotzen ari da.



- a) Zeintzu dira katea gako edo iltzeetan egiten ari den indarren magnitudea eta norabidea?
 b) Zein da katearen punturik baxueneko tentsioa?

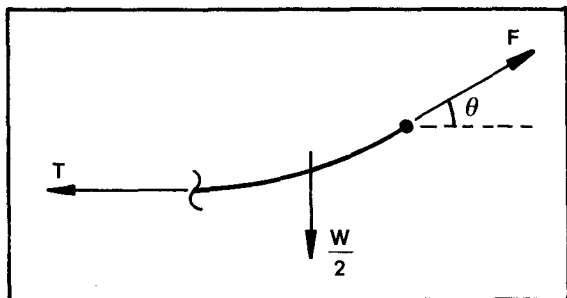


Simetriaren kausaz: $F_1 = F_2 = F$. Bestalde, F indarrak horizontalarekiko θ angelua osotzen ari dira. Lehenengo eskeman ikus daitekeenez:

$$2 F \sin \theta = W ,$$

$$F = \frac{W}{2 \sin \theta} .$$

Bestalde, punturik baxueneko tentsioa lortzeko, sokaren erdi bat kontsideratuko dugu. Hona hemen dagozkion indarren eskema eta oreka-baldintzetatik atera daitezkeen erlazioak:



$$F \cos \theta - T = 0 ,$$

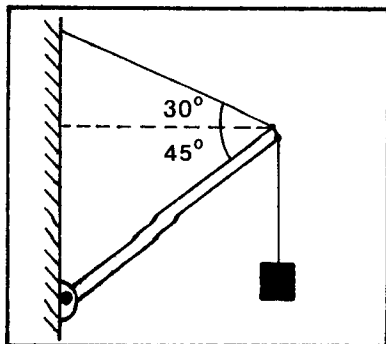
$$T = \frac{W}{2 \sin \theta} \cos \theta ,$$

$$T = \frac{W}{2} \cot \theta .$$

Kasu honetan, argi dagoenez, $T \neq F$ da kasu orokorrean, sokaren pisuaren eraginez.

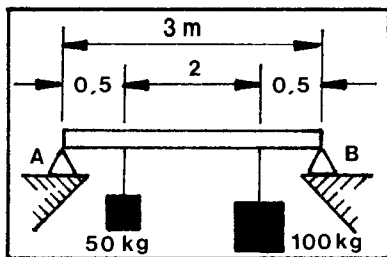
ARIKETAK

- 1.- Lor bedi irudiko egiturak jasan dezakeen pisurik handiena, goiko sokak jasan dezakeen tentsio maximoa 1000 kp -takoa baldin bada, eta habeak jasan dezakeen konpresiorik handiena 2000 kp -takoa bada. Soka bertikalak edozein karga jasan dezake.



Emaitza: $P = 500 (1 + \sqrt{3}) = 1366 \text{ kp}$.

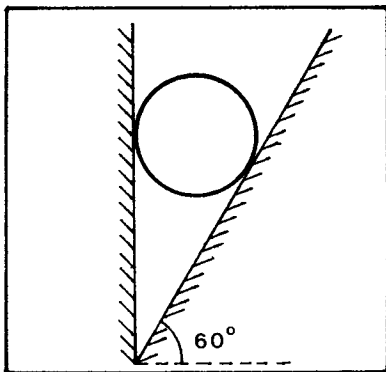
- 2.- AB habea homogenoa da eta 100 kp -tako pisua du. A eta B muturretan apuiaturik dago eta irudian adierazi diren pisuak jasaten ari da. Lor bitez A eta B puntuetako erreakzioak:



Emaitza: $F_A = 108,3 \text{ kp}$,

$F_B = 141,7 \text{ kp}$.

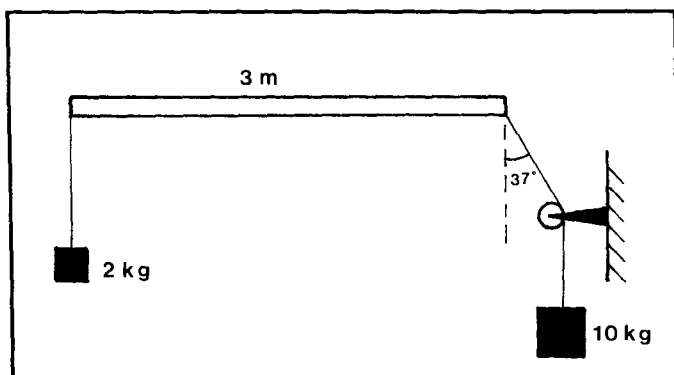
- 3.- 50 kg -tako esfera bat horma bertikal eta leun baten kontra dago eta denbora berean, horizontalekiko 60° -tako angelua osotzen ari den plano baten gainean. Ez dago inolako marruskadurarik. Zeintzu dira planoak eta hormak esferari egiten dizkieten erreakzioak?



Emaitza: Planoaren erreakzioa $= 100 \text{ kp}$.

Hormaren erreakzioa $= 50\sqrt{3} \text{ kp}$.

- 4.- Irudiko habeari indar bakarra aplikatu behar zaio, dagoen posizioan orekan egon dadin. Habea masarik gabekotzat hartuko da.



- Zeintzu dira indar horren x eta y osagaiak?
- Zein norabide du?
- Non aplikatu behar da?

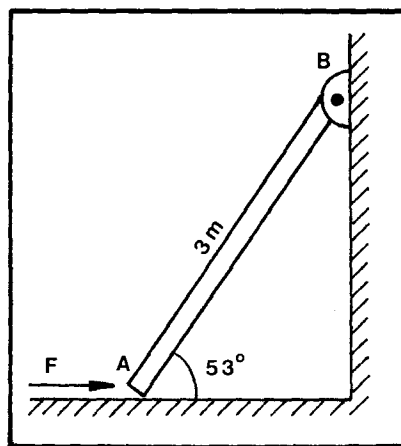
Emaitza: a) $X = 6 \text{ kp}$ (ezkerrerantz), $Y = 10 \text{ kp}$ (gorantz).

b) $\text{tg} \alpha = -\frac{5}{3}$ (ardatzen ohizko norantzaren arauera) .

c) ezkerreko muturretik $2,4 \text{ m}$ -tara .

- 5.- Irudiko habearen A muturra marruskadurarik gabeko plano horizontal baten gainean dago, beste muturra B puntuan giltzaturik dagoelarik. A muturrean $F = 12 \text{ kp}$ -tako indarra eragiten ari da. Arbuia bedi habearen pisua.

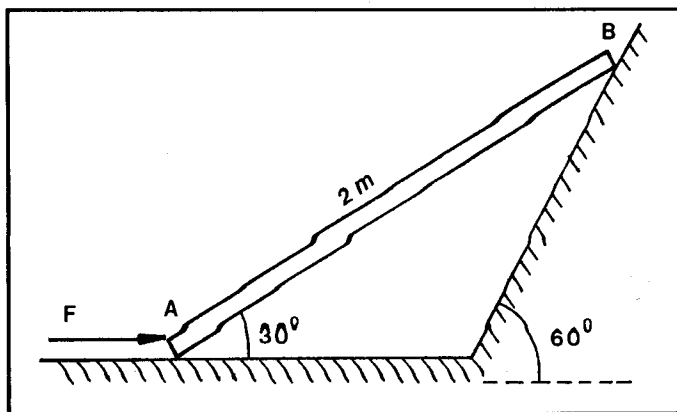
- Zeintzu dira, B muturrean eragiten ari den erreakzioaren osagaiak?
- Egizu habearen gainean eragiten ari diren indarren eskema.



Emaitza: $X_B = 12 \text{ kp}$ (ezkerrerantz) .

$Y_B = 15,92 \text{ kp}$ (beherantz) .

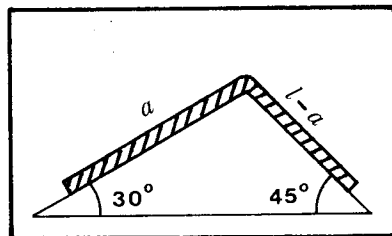
- 6.- Irudiko habea A eta B puntuetan apuiaturik dago, inolako marruskadurarik gabe. Habearen pisua 200 kp -takoa da.



- a) Zenbat balio behar du F indar horizontalak, habea orekan egon dadin?
b) Egizu indarren eskema.

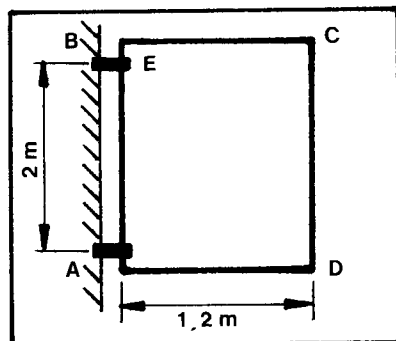
Emaitza: $F = 50\sqrt{3} \text{ kp}$.

- 7.- Lor bedi irudiko katea malguaren oreka-posizioa. Ez dago marruskadurarik.



Emaitza: $\frac{a}{l-a} = \sqrt{2}$.

- 8.- Irudian adierazi den ate errekangeluarrak ($ABCD$) 60 kg -tako masa du eta AB ardatzaren inguruan bira egin dezake. Ardatza finkatzeko, A puntuan euskarri puntuala dago eta E delakoan gida zilindriko bat lurretik 2 m -tara (E puntuan ez da indar bertikalik eragiten ari). Lor bitez A eta E puntuetako erreakzioak.



Emaitza: A puntuan: $X_A = 18 \text{ kp}$,

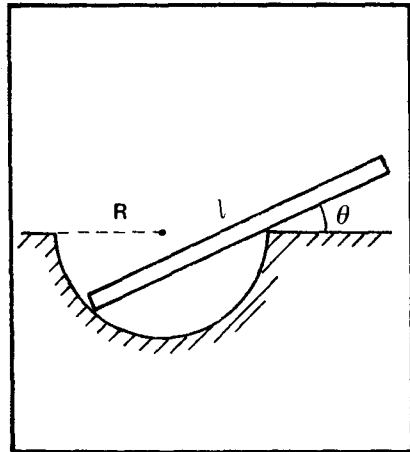
$Y_A = 60 \text{ kp}$.

E puntuan: $X_E = -18 \text{ kp}$.

- 9.- l luzerako eta W pisuko barra leun eta uniforme bat orekan dago R erradioko esferaerdi leun batetan, irudian adierazi den bezala, $R < l/2 < 2R$ izanik. θ delakoa oreka-angelua bada eta P delakoa esferaerdiaren ertzak barrari egiten dion indarra, froga bedi:

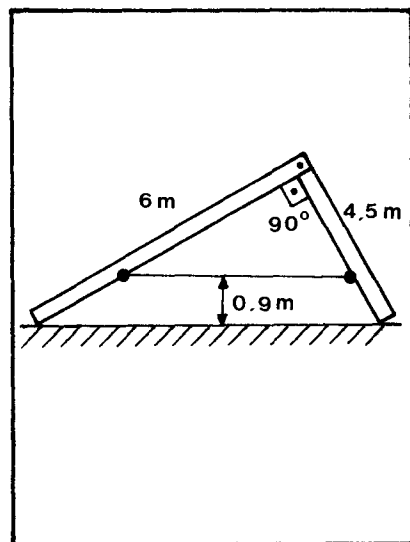
a) $P = \frac{l}{4R} W$ dela.

b) $\frac{\cos 2\theta}{\cos \theta} = \frac{l}{4R}$ dela.



- 10.- 6 m eta $4,5 \text{ m}$ -tako luzera duten bi eskilara, angelu zuzena osotarik A puntuan giltzaturik daude, lurretik $0,9 \text{ m}$ -tara dagoen soka horizontal batez loturik daudelarik, irudian adierazi den bezala. Bi eskilara horien pisuak 40 eta 30 kp -takoak dira hurrenez hurren eta masa uniformeki hedatuta daukate. Lurra leuna bada, lor bitez:

- Eskilara bakoitzari lurra egiten dion indarra.
- Sokaren tentsioa.
- A puntuan eskilarek elkarri egiten dioten indarra.
- A puntutik 100 kp -tako karga bat eskegiko balitz, zein izango litzateke sokaren tentsioa?



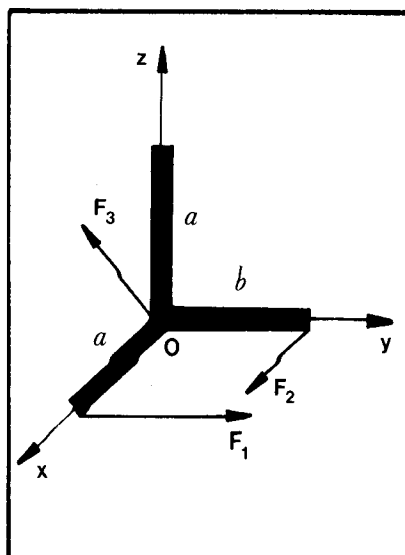
Emaitzak: a) $32,6 \text{ kp}$; $37,4 \text{ kp}$. b) $22,4 \text{ kp}$.

c) $23,5 \text{ kp}$.

d) $86,4 \text{ kp}$.

11.- Irudiko hiru habeak zurrunki loturik daude, sistemaren gainean hiru indar hauek eragiten ari direlarik: $F_1 = 4 \mathbf{j}$, $F_2 = 2 \mathbf{i}$, $F_3 = \mathbf{i} + \mathbf{k}$.

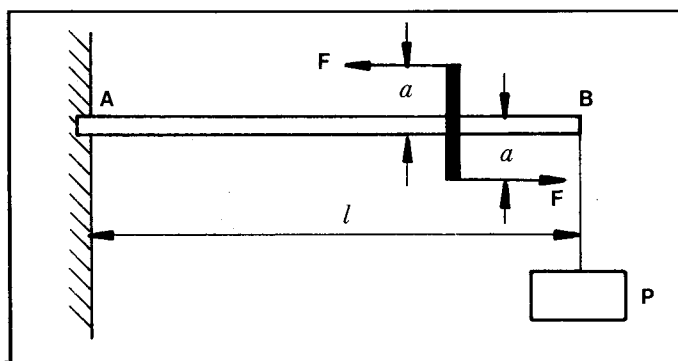
- Zein erlaziok egon behar du a eta b luzeren artean, indarren sistema indar bakar batez ordezkatu ahal izateko?
- Zein puntutan ipini beharko litzateke beste indar bat, sistemaren oreka lortzeko? Zenbat balio beharko luke indar horrek?



Emaitzak: a) $a = \frac{b}{2}$.

b) (0,0,0) puntuan; $F_A = -3 \mathbf{i} - 4 \mathbf{j} - \mathbf{k}$.

12.- AB delako habe horizontala horman tinko sarturik dago A muturrean. C puntuan beste habe txiki bat dago, AB delakoari zurrunki lotuta, beraren gainean irudian adierazi diren indarrek eragiten. Zeintzu dira A puntuan eragiten ari diren indarra eta momentua?



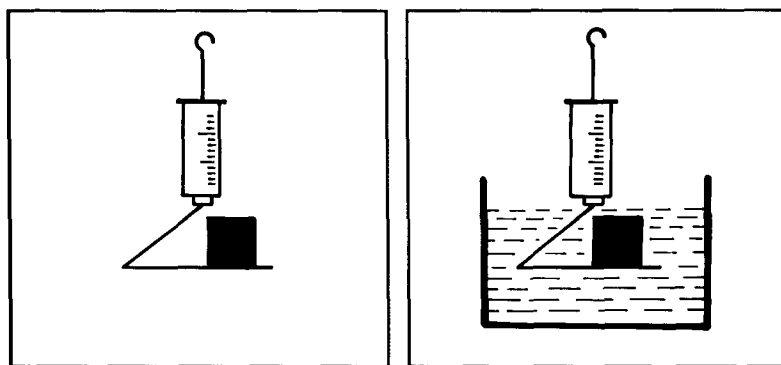
Emaitzak: $y_A = P$; $\tau_A = 2Fa - Pl$.

11. GAIA

FLUIDOEN MEKANIKA

11.1. Irudiko lehenengo esperientzian dinamometroak $5,4 \text{ kp}$ neurtu du; eta bigarrenetan, harria uretan sarturik dagoelarik, $2,4 \text{ kp}$.

Kalkula bitez harriaren bolumena eta beraren dentsitate erlatiboa.



Lehenengo kasuan, aireak eginiko Arkhimeses-en bultzada arbuiauz, dinamometroak harriaren pisua neurtu du. Beraz:

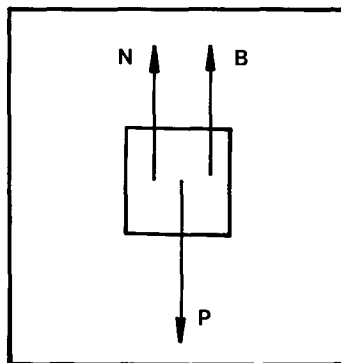
$$P = 5,4 \text{ kp} = 52,92 \text{ N} .$$

Bigarren kasuan, harriaren gainean aplikaturiko indarrak hauexek dira (ikus irudia):

$$P : \text{harriaren pisua} = 52,92 \text{ N} .$$

$$B : \text{urak eginiko Arkhimeses-en bultzada} .$$

$$N : \text{dinamometroak eginikoa (hau aparatuak neurtu duena, hain zuzen)} = 2,4 \text{ kp} .$$



Harria orekan dagoenez, ondokoa idatz dezakegu:

$$N + B - P = 0 \quad B = P - N = 3 \text{ kp} = 29,4 \text{ N} .$$

Bestaldetik, Arkhimeses-en bultzadaren balioa hauxe da:

$$B = \rho_u g V , \quad (\rho_u = \text{uraren dentsitatea}) .$$

$$V = \frac{B}{\rho_u g} = \frac{3 \cdot 9,8}{1.000 \cdot 9,8} = 0,003 \text{ m}^3 .$$

Harriaren bolumena ezagutuz, dentsitate absolutua honela kalkulatuko dugu:

$$\rho_h = \frac{m}{V} = \frac{5,4}{0,003} = 1.800 \text{ kg m}^{-3} .$$

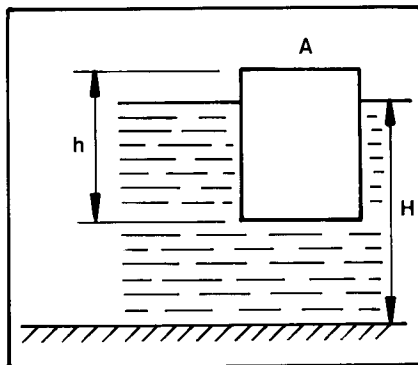
Eta azkenez, urarekiko dentsitate erlatiboa ondokoa izango da:

$$\rho_e = \frac{\rho_h}{\rho_u} = 1,8 .$$

11.2. Irudiko zurezko zilindroak uretan flotatzen ari da orekan. Zilindroa urperatu nahi da, bertikalki eta geldiro, beheko oinarriak ontziaren hondoa ikutu arte. Kalkula bedi egin behar den lana.

Datuak:

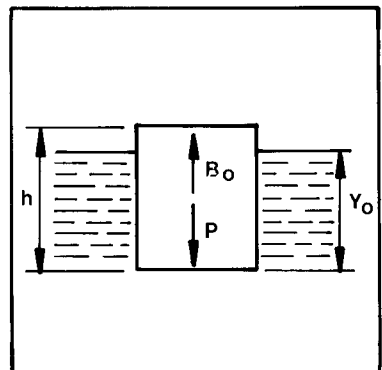
zilindroaren altuera $h = 10 \text{ cm}$
oinarriaren azalera $A = 20 \text{ cm}^2$
zuraren dentsitatea $\rho = 0,8 \text{ g cm}^{-3}$
ontziaren sakonera $H = 25 \text{ cm}$



Ezer baino lehenago, uretan sarturik dagoen zilindroaren altueraren Y_0 zatia kalkulatu behar da, gero zein distantzia ibil ezaiko zaion jakiteko. Irudian ikus daitezke zilindroaren gainean eragiten ari diren indarrak:

P : zilindroaren pisua $= \rho_z A h g$,

B_0 : Arkhimedes-en bultzada $= \rho_u A Y_0 g$

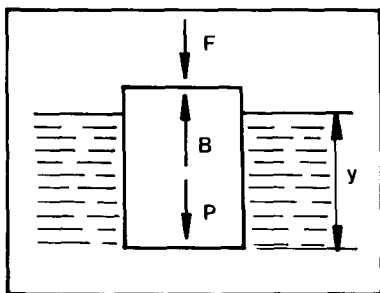


Oreka-baldintza erabiliz,

$$B_0 - P = 0 \rightarrow \rho_u A Y_0 g - \rho_z A h g = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow Y_0 = h \frac{\rho_z}{\rho_u} = 8 \text{ cm} .$$

Honelatan, 2 cm falta dira zilindroa erabat urpean gera dadin. Zilindroa 2 cm horietan jaitsiko den bitartean, gero eta ur gehiago desplazatuko du eta, beraz, Arkhimedes-en bultzada handituz joango da. 2 cm horiek iragan ondoren, zilindroak ur-bolumen konstantea desplazatuko du, beraren bolumen osoa hain zuzen ere, Arkhimedes-en bultzadak konstante diraelarik. Hau dela eta, bi zatitan banatuko eta aztertuko dugu prozesua:



1. Hondorapenaren lehenengo 2 cm-ak. Ondoko indarrak eragiten ari dira:

P : zilindroaren pisua $= \rho_z A h g$,
 B : Arkhimedes-en bultzada $= \rho_u A y g$,
 F : Zilindroaren hondoratzeko indarra.

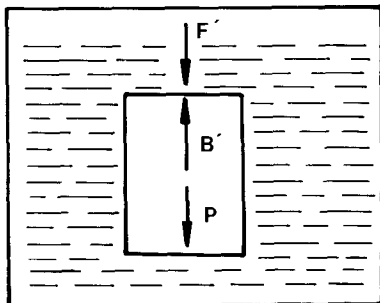
Zilindroa geldigeldi hondora erazten denez, hiru indarrok orekan diraute praktikoki, beraz:

$$B - F - P = 0 \rightarrow F = B - P = A g (\rho_u y - \rho_z h) .$$

Hondorapenaren lehenengo partean egin behar den lana, hauxe izango da:

$$W = \int_{Y_0}^h F dy = Ag \int_{Y_0}^h (\rho_u y - \rho_z h) dy =$$

$$= 20 \cdot 980 \int_8^{10} (y - 8) dy = 39200 \text{ erg} .$$



2. Hondorapenaren azkenengo 15 cm-ak. Lehen esan den moduan, parte honetan zilindroak desplazaturiko bolumena, bere bolumen osoa da, beraren gaineko indarrak honelaxe adieraziko direlarik:

P : zilindroaren pisua $= \rho_z A h g$,
 B' : Arkhimedes-en bultzada $= \rho_u A h g$,
 F' : zilindroa hondoratzeko egin behar den indar konstantea.

Aurreko atalean adieraziriko arrazonamendua berriz erabiliz,

$$\begin{aligned}
 B' - F' - P &= 0 \rightarrow F' = B' - P = A h g (\rho_u - \rho_z) \\
 &= 20 \times 10 \times 980 \times 0,2 = 39200 \text{ dyn} .
 \end{aligned}$$

Beraz, parte honetan egin behar den lana, hauxe izango da:

$$W' = F' (H - h) = 39200 \times 15 = 588000 \text{ erg} .$$

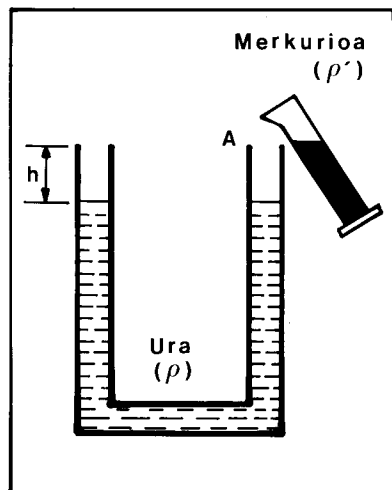
Azkenez, lan osoa, kalkulaturiko bien batura izango da:

$$W_{\text{osoa}} = W + W' = 627200 \text{ erg} .$$

11.3. U tankerako hodi baten adar batetik merkurioa isuri da. Zein merkurio-kantitate isur daiteke, beste adarretik hodiak daukan ura jario ez dadin?

Datuak: merkurioaren dentsitatea $\rho' = 13,6 \text{ g cm}^{-3}$, hodiaren sekzioaren azalera $A = 1 \text{ cm}^2$, adarrean hutsik dagoen altuera $h = 6,8 \text{ cm}$.

Oharra: Mintz fin bat dago bien artean eta merkurioa eta ura ez dira elkarrekin nahasten.

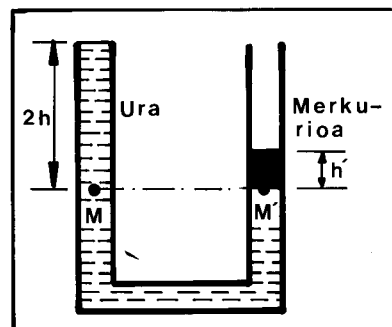


Hurrengo irudian ura jariatzeko zorian dago ezker-adarretik. M puntuan presioak ondoko balioa du:

$$p_M = p_{at} + \rho g 2h .$$

Eta M' puntuan:

$$p_{M'} = p_{at} + \rho' g h' .$$



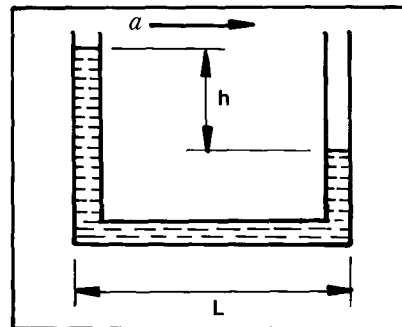
Bestaldetik, dakigunez, orekan dagoen fluido baten barneko puntuen presioa beraien altueraren funtzioa baino ez da, beraz:

$$p_M = p_{M'} \rightarrow p_{at} + \rho g 2h = p_{at} + \rho' g h' \rightarrow h' = \frac{\rho}{\rho'} 2h = 1 \text{ cm}$$

Altuera ezagutuz, isuritako merkurio-kantitatea hauxe izango da:

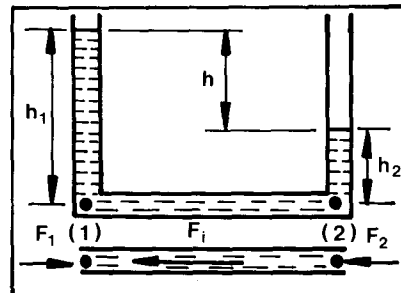
$$V = h' A = 1 \text{ cm}^3 .$$

11.4. Kalkula bedi irudiko hodiaren azelerazioa bertako datuen funtzioan (hodiaren erradioa oso txikia da L luzerarekin konparaturik). Aparatu sinple honi "azele-rometro" deritzo, kotxeen, trenen eta abarren azelerazioak neurtzeko erabilgarri bait da.



Isola eta azter dezagun hodiaren zati horizontalaren barneko likidoa, hodiarekin batera higitzen ari den erreferentzi sistema batetan.

Alboko irudian likidoaren gainean eragiten ari diren indar horizontalak ageri dira (bertikalek, hots, pisua eta hodiaren erreakzio normalak, ez gaituzte kezkatuko, bion artean elkar orekatu egiten bait dute, problemari inolako jaramonik ez dutelarik).



$$F_1 : \text{ezkerreko likido - zutabeak sorturikoa} = p_1 A = (p_{at} + \rho g h_1) A$$

$$F_2 : \text{eskuineko likido - zutabeak sorturikoa} = p_2 A = (p_{at} + \rho g h_2) A$$

$$F_i : \text{inertzi indarra (ez bedi ahantz, erreferentzi sistema ez-inertzial batetan ari garenik)} = m a = \rho A L a$$

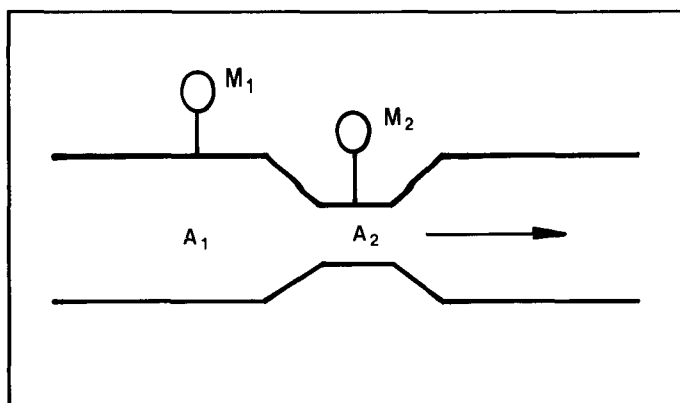
Aurreko adierazpenetan A delakoa hodiaren sekzioaren azalera da, eta ρ delakoa, likidoaren dentsitatea). Erabiltzen ari garen erreferentzi sisteman, likidoa orekan dago eta, beraz,

$$F_1 - F_2 - F_i = 0 \rightarrow \rho g (h_1 - h_2) A - \rho A L a = 0 ,$$

hau da,

$$a = g \frac{h}{L} .$$

11.5. Irudiko muntaia, hodi horizontal baten barrutik doan likidoaren kaudala neurtzeko erabili ohi da, eta *Venturi-ren neurgailua* edo *venturimetroa* deritzo. Hitz laburrez, beraren funtzionamendua honetan datza: A_1 sekzio-azalera duen hodian, A_2 zabaleradun estugune bat jarri da, bai hodian eta bai estugunean manometro bana kokatu direlarik.

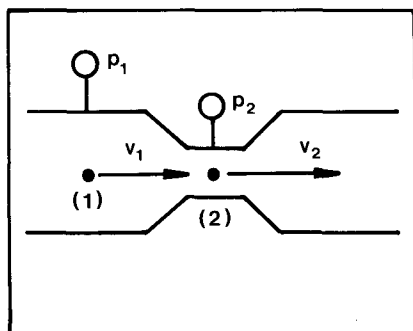


Aipaturiko sekzio-zabalerak eta manometroek emandako p_1 eta p_2 presioak ezaguturik, lor bedi kaudal bolumetrikoa, γ pisu espezifikoa duen likido baten kasuan.

Oharra: Suposa bedi, sekzio bakoitzean abiadura-banaketa uniforme (fluxu ideala) dagoela eta fluido konprimaezina dela.

Bernouilli-ren teorema alboko irudiko 1 eta 2 puntuei dagokienez aplikatuz, ondokoa geratuko zaigu:

$$\frac{p_1}{\gamma} + \frac{v_1^2}{2g} = \frac{p_2}{\gamma} + \frac{v_2^2}{2g} .$$



Bestaldek kontinuitatearen ekuazioak haxe dio kasu honetan:

$$v_1 A_1 = v_2 A_2 .$$

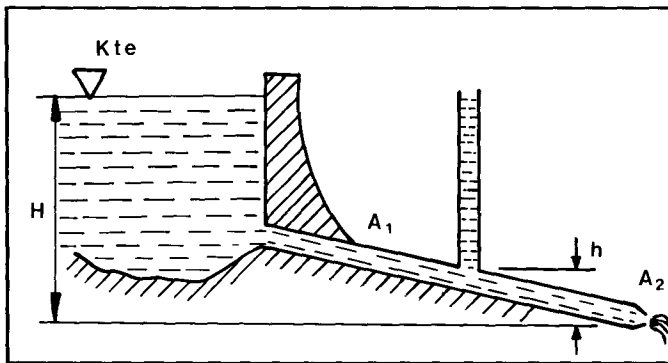
Aurreko bi ekuazioetatik erraz atera dezakegu abiadura bat, adibidez:

$$v_1 = \sqrt{\frac{2g(p_1 - p_2)}{\gamma \left[\left(\frac{A_1}{A_2} \right)^2 - 1 \right]}}$$

Hemendik, eskaturiko kaudala hauxe izango da:

$$K = A_1 v_1 = A_1 \sqrt{\frac{2g(p_1 - p_2)}{\gamma \left[\left(\frac{A_1}{A_2} \right)^2 - 1 \right]}}$$

11.6. Irudiko urtegiaren isurbide-hodiaren sekzioak A_1 azalera du. Beheko muturrean hodia estutu egiten da, bertako sekzioaren azalera A_2 delarik.



a) Kalkula bedi urtegiari darion ur-kaudala $l s^{-1}$ -etan eta $m^3 h^{-1}$ -etan.

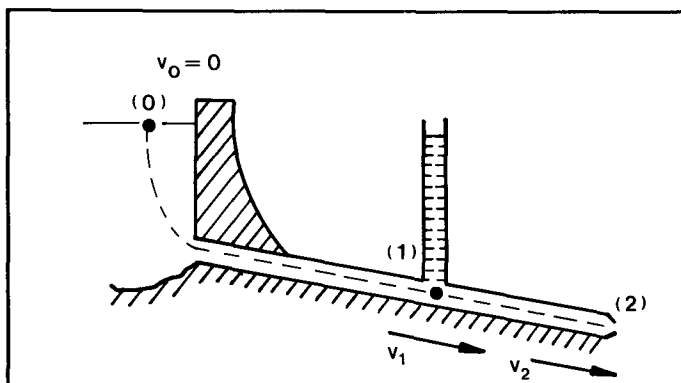
b) Zein altuerara joango da ura, jarritako hodi manometriko bertikalean?

Datuak: $A_1 = 200 \text{ cm}^2$, $A_2 = 100 \text{ cm}^2$, $H = 40 \text{ m}$, $h = 10 \text{ m}$.

Oharra: Jo bedi fluxu idealaz ari garela eta urtegiaren goiko mailaren altuerak konstante dirauela.

a) Aplika dezagun Bernouilli-ren teorema, hurrengo orriko irudian erakutsiriko korrante-lerroko 0 eta 2 puntuen artean:

$$\frac{p_0}{\gamma} + \frac{v_0^2}{2g} + z_0 = \frac{p_2}{\gamma} + \frac{v_2^2}{2g} + z_2$$



Adierazpena errazteko, ondoko hau kontutan hartuko dugu:

$$v_0 = 0, \quad p_0 = p_2 = p_{at}, \quad z_2 = 0, \quad z_0 = H.$$

Beraz, v_2 irteerako abiadura hauxe da:

$$v_2 = \sqrt{2gH} = \sqrt{2 \cdot 9,8 \cdot 40} = 28 \text{ m s}^{-1}.$$

Eta kaudal bolumetrikoa,

$$K = v_2 A_2 = 0,28 \text{ m}^3 \text{ s}^{-1},$$

edo, eskaturiko unitateetan:

$$K = 0,28 (\text{m}^3 \text{ s}^{-1}) \times 10^3 (\text{l m}^{-3}) = 280 \text{ l s}^{-1},$$

$$K = 0,28 (\text{m}^3 \text{ s}^{-1}) \times 3.600 (\text{s h}^{-1}) = 1.008 \text{ m}^3 \text{ h}^{-1}.$$

b) Hodi manometrikotan urak hartu duen altuera, oinarrian presioak duen balioaren funtzioa da, argiro. Presio hau lortzeko, Bernoulli-ren teorema erabiliko dugu berriro, orain 1 eta 2 puntuen artean aplikaturik:

$$\frac{p_1}{\gamma} + \frac{v_1^2}{2g} + z_1 = \frac{p_2}{\gamma} + \frac{v_2^2}{2g} + z_2,$$

$$p_1 = p_{at} + \gamma \frac{v_2^2 - v_1^2}{2g} - \gamma h.$$

v_1 abiadura ez da ezaguna, baina berehala atera dezakegu kontinuitatearen ekuazioa dela bide, hau da,

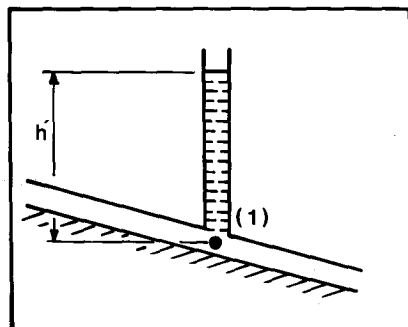
$$v_1 A_1 = v_2 A_2 \rightarrow v_1 = v_2 \frac{A_2}{A_1} .$$

Eta balio hau aurreko adierazpena eramanez, ondokoa dugu:

$$p_1 = p_{at} + \gamma \frac{v_2^2}{2g} \left[1 - \left(A_2 / A_1 \right)^2 \right] - \gamma h .$$

Ondoren, hodi manometrikoaren barneko ur-zutabea geldirik dagoenez, hidrostatikaren funtsezko ekuazioaz baliatuko gara, hau da,

$$p_1 = p_{at} + \gamma h' .$$



Azken bi ekuazioak konbinatuz, beste hau atera dezakegu:

$$p_{at} + \gamma \frac{v_2^2}{2g} \left[1 - \left(A_2 / A_1 \right)^2 \right] - \gamma h = p_{at} + \gamma h' .$$

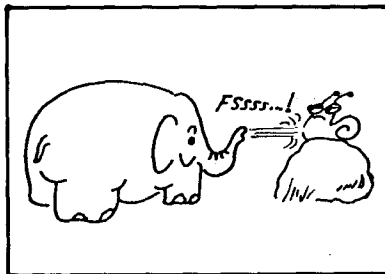
Hemendik, eskaturiko ur-altuera hauxe izango da:

$$h' = \frac{v_2^2}{2g} \left[1 - \left(A_2 / A_1 \right)^2 \right] - h = 20 \text{ m} .$$

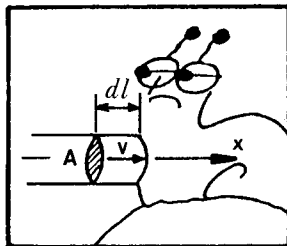
11.7. Jolasean ari direlarik, elefanteak ur-zorrotada jaurti-ki dio barraskiloari. Kalkula bedi, zorrotadak moluskuari egin dion indarra.

Datuak: zorrotadaren kaudal bolumetrikoa $K = 0,05 \text{ l s}^{-1}$, zorrotadaren sekzioaren azalera $A = 10 \text{ cm}^2$.

Oharra: Suposa bedi, zorrotada barraskiloari perpendikularki heldu zaiola, eta jo ondoren, ura bertikalki erori dela, hau da, errebotatu gabe.



Azter dezagun, t aldiunean barraskiloa ikutzen hasi deneko zorrotada-zati elementala.



Une honetan elementuaren momentu lineala hauxe da:

$$\mathbf{p}(t) = \rho A dl v \mathbf{i} .$$

$dt = dl / v$ denbora-tarte txikia pasa ondoren, aipaturiko elementuak galdu egin du bere momentu lineala, barraskiloarekin duen talkaren ondorioz. Beraz:

$$\mathbf{p}(t + dt) = 0 .$$

Ur-elementuaren momentu linealaren aldaketa ondokoa izango da:

$$d\mathbf{p} = \mathbf{p}(t + dt) - \mathbf{p}(t) = -\rho A dl v \mathbf{i} .$$

Eta moluskuak zorrotadari egin dion indarra, ondokoa:

$$\mathbf{F}_{tb} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{-\rho A dl v}{\frac{dl}{v}} \mathbf{i} = -\rho A v^2 \mathbf{i} .$$

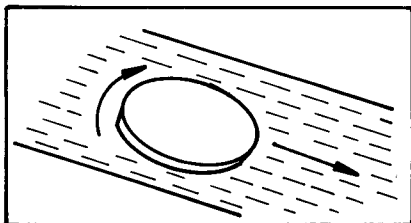
Akzio-erreakzioaren printzipioa erabiliz, zorrotadak muluskuari egin dion indarra, honelaxe lortuko dugu:

$$\mathbf{F}_{bt} = -\mathbf{F}_{tb} = \rho A v^2 \mathbf{i} .$$

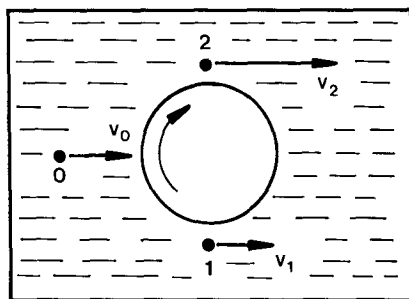
Eta indarraren balioa hauxe izango da:

$$F_{bt} = \rho A v^2 = \rho \frac{A^2 v^2}{A} = \rho \frac{K^2}{A} = 250 \text{ dyn} .$$

11.8. Ur-korrante txiki batetan doan kortxoazko disko bat, biraka ipini da kolpetxo tangential baten bidez, irudian ageri den legez. Korrontearen zein aldetara desbideratuko da diskoa?



Diskoaren biraketa-higiduraren ondorioz, alde batean kortxoak ura balaztatu egiten du ($v_1 < v_0$) eta bestean, berriz, azeleratu ($v_2 > v_0$). Uraren gainazaleko puntuak praktikoki altuera berekoak direla kontutan harturik, eta Bernouilli-ren teorema erabiliz, honako ondorio hauek atera ditzakegu:



$$\frac{p_0}{\gamma} + \frac{v_0^2}{2g} = \frac{p_1}{\gamma} + \frac{v_1^2}{2g}$$

$v_1 < v_0$ izanik ,

$p_1 > p_0$ izan behar (I).

$$\frac{p_0}{\gamma} + \frac{v_0^2}{2g} = \frac{p_2}{\gamma} + \frac{v_2^2}{2g}$$

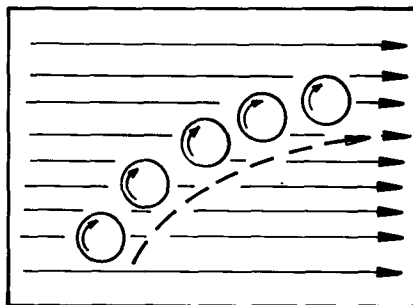
$v_2 > v_0$ izanik ,

$p_2 < p_0$ izan behar (II).

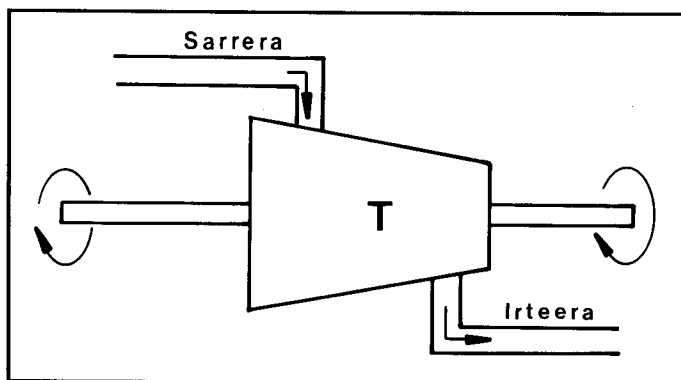
(I) eta (II) desberdintzetatik, ondokoa dugu:

$$p_1 > p_2 .$$

Beraz, ezker aldean urak bortizkiago bultzatuko du diskoa, eskuin aldean baino. Honelatan, bada, irudian ager den moduan desbideratuko da diskoa.



11.9. Irudiko ur-korrontea T turbina higierazteko erabilia da. Sarrera eta irteerako hodiak sekzio berekoak dira, eta puntu bi horien arteko altueraren diferentzia, erabat arbuia garria.



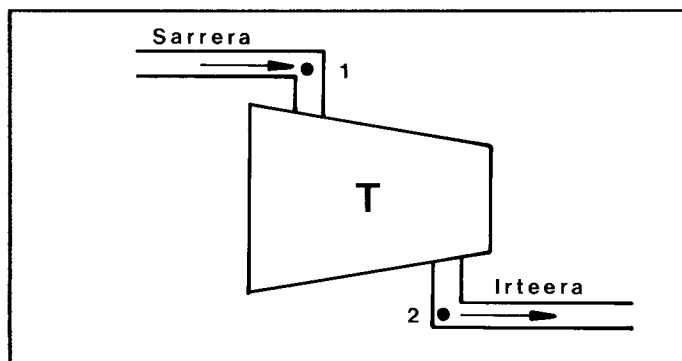
P turbinaren potentzia eta K korrontearen kaudal bolu-metrikoa ezaguturik, lor bedi lehen aipaturiko puntuen arteko presio-aldaketa.

Oharra: Suposa bedi, fluxua ideala dela.

Dakigunez, Bernouilli-ren teoremak, bere erarik sinpleenean, korrontearen energiaren kontserbazioa baino ez du adierazten. Hala ere, behar diren zuzenketak eginez gero (ikus Fisika Orokorra(II) 13.9. atala), korrontearen energia kontserbatu egiten ez den kasuetan, aipaturiko teorematik ateratako erlazio bat erabil daiteke, "energiaren ekuazio orokorra" deiturikoa, hain zuzen ere. Honelaxe idatziko dugu:

$$g z_1 + \frac{p_1}{\rho} + \alpha_1 \frac{v_1^2}{2} + I_{12} = g z_2 + \frac{p_2}{\rho} + \alpha_2 \frac{v_2^2}{2} + G_{12} \quad (I) .$$

Hemen z_1, p_1, v_1, z_2, p_2 eta v_2 ikurrek beren ohiturazko esangura dute (v_1 eta v_2 direlakoak batezbesteko abiadurak dira, baina hauek ez gaituzte kezkatuko, ondoren ikusiko dugunez).



α_1 eta α_2 koefizienteak energia zinetikoari dagozkion zuzenketa-faktoreak dira, hau da, sekzio bakoitzeko abiaduren banaketa kontutan hartzeko sartzen diren faktoreak. Gure kasuan, ordea, fluxu ideala kontsideratzen ari garenez:

$$\alpha_1 = \alpha_2 = 1 \quad .$$

Bestaldetik, sarrera eta irteera sekzio berekoak direla gogora ekarriz ($A_1 = A_2$) eta kontinuitatearen ekuazioa aplikatuz:

$$v_1 A_1 = v_2 A_2 \quad , \quad v_1 = v_2 \quad .$$

Beraz, (I) ekuazioan ageri diren abiadurarekin erlazionaturiko gaiak, sinplifikatu egin daitezke. Gauza bera esan dezakegu, altuerarekin erlazionaturiko gaiak dagokienez, enuntziatuaren arauera $z_1 = z_2$ bait da. Dagoeneko, ba, (I) ekuazioak ondoko itxura hartuko du:

$$\frac{p_1}{\rho} + I_{12} = \frac{p_2}{\rho} + G_{12} \quad (\text{II}) \quad .$$

Goazen orain, I_{12} eta G_{12} gaiak aztertzeraz:

I_{12} : 1 eta 2 puntuen artean korronteak irabaziriko energia, fluidoaren masa-unitatekoa. Gure kasuan, argi eta garbi, $I_{12} = 0$.

G_{12} : 1 eta 2 puntuen artean korronteak galduriko energia, fluidoaren masa-unitatekoa. Praktikan, gai honek, besteak beste, marruskaduraren ondorioz bero bihurturiko energia mekanikoaren kantitatea hartzen du kontutan; baina gure kasuan ez da horrela gertatuko, fluxua ideala dela kontsideratu da eta. Gure kasuan, ba, gai honek turbinak korrontetik erauzten duen energiaren kantitatea baino ez du neurtzen.

Ikus dezagun G_{12} delakoaren, P turbinaren potentziaren eta K kaudalaren artean dagoen erlazioa. Demagun dt denbora-tartean, turbinaren barrutik pasatzen den uraren masa-kantitatea dm dela. Izan bedi dW , aipaturiko dm masak turbinari ematen dion energi kantitatea. Definizioz,

$$G_{12} = \frac{dW}{dm} \quad \text{eta} \quad P = \frac{dW}{dt} \quad .$$

Beraz,

$$G_{12} = \frac{P dt}{dm} = \frac{P}{dm/dt} = \frac{P}{\rho K} \quad . \quad \left(\frac{dm}{dt} = \frac{dm}{dV} \frac{dV}{dt} = \rho K \right) \quad .$$

Azkenez, erlazio hau (II) ekuaziora eramanez, eskaturiko presio-aldaketa ondokoa da:

$$\frac{p_1}{\rho} = \frac{p_2}{\rho} + \frac{P}{\rho K} \rightarrow p_1 - p_2 = \frac{P}{K}.$$

11.10. 20 cm-tako diametroa duen hodi baten barrutik, ura isurtzen ari da, 4 m s^{-1} -etako batezbesteko abiaduraz. Uraren temperatura 15°C -takoa da. Zein batezbesteko abiaduraz isuri behar du fuelolio-mota batek, 10 cm-tako diametroa duen beste hodi batetatik, fluxuok dinamikoki antzekoak izan daitezen? Erabilitako fuelolioaren temperatura 32°C -takoa da.

Uraren biskositate-koefiziente zinematikoa (15°C -tan) $\nu_1 = 1,14 \times 10^{-6} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$. Fuelolioaren biskositate-koefiziente zinematikoa (32°C -tan) $\nu_2 = 2,97 \times 10^{-6} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$.

Experientziak dioenez, bi fluxu dinamikoki antzekoak izan daitezen, Reynolds-en zenbaki berbera izan behar dute. Beraz,

$$\frac{\rho_1 D_1 \nu_1}{\eta_1} = \frac{\rho_2 D_2 \nu_2}{\eta_2},$$

non 1 azpindizea uraren kasuari dagokion eta 2 azpindizea fuelolioaren kasuari. Aurreko adierazpenetik,

$$\frac{D_1 \nu_1}{\eta_1 / \rho_1} = \frac{D_2 \nu_2}{\eta_2 / \rho_2}, \quad \frac{D_1 \nu_1}{\nu_1} = \frac{D_2 \nu_2}{\nu_2}.$$

non ν_1 eta ν_2 direlakoak biskositate-koefiziente zinematikoak diren. Hemendik, eskaturiko abiadura ondokoa izango da:

$$\nu_2 = \nu_2 \frac{D_1}{D_2} \frac{\nu_2}{\nu_1} = 4 \frac{20}{10} \frac{2,97 \times 10^{-6}}{1,14 \times 10^{-6}} = 20,8 \text{ m s}^{-1}.$$

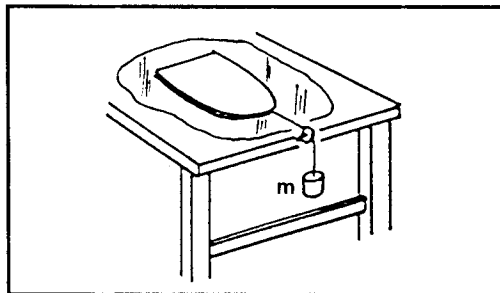
11.11. Koipe baten biskositatea neurtzeko, ondoko experientzia antolatu da: Lehenengo, mahai horizontalaren

gainean koipe-xafla estu-estua hedatu da, pintzel baten bidez. Gero, koipe-xaflaren gainean xafla solido bat jarri da, eta irudian erakutsitako mekanismo sinplea dela medio higierazi egin da. (Xafla solidoak oso arina izan behar du, koipe-xaflaren lodiera alda ez dezan; halaber, zintzilikaturiko masa kontu handiz hautatu behar da, sistema azelera ez dadin).

a) Kalkula bedi erabiliriko koipearen biskositate-koefiziente zinematikoa.

b) Zintzilikaturiko masa erdira txikitzen baldin bada, zer abiaduraz higituko da xafla?

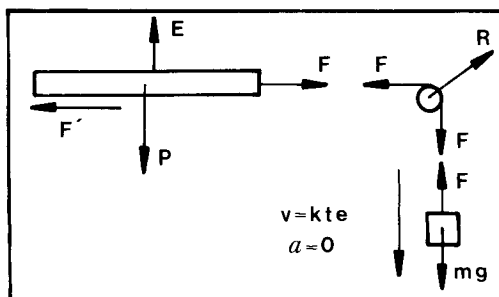
Datuak: koipe-xaflaren lodiera $h = 0,1 \text{ mm}$, koipearen dentsitatea $\rho = 910 \text{ kg m}^{-3}$, xafla solidoaren azalera $A = 0,25 \text{ m}^2$, zintzilikaturiko masa $m = 20 \text{ g}$, sistemaren abiadura $v = 1,4 \text{ cm s}^{-1}$.



a) Experimentu hau, Fisika Orokorra (II) liburuko 13.1. atalean adierazitakoari buruzko aplikazioa baino ez da. Xafla higitzeko behar den indarra, hauxe da:

$$F = \eta \frac{v}{h} A, \quad \eta = \frac{F h}{v A}.$$

Beraz, koipearen biskositate-koefizientea kalkulatzeko, xaflatik tiratzen ari den indarraren balioa behar dugu. Balio hau erraz atera dezakegu:



$$F - m g = 0 \quad , \quad F = m g \quad .$$

$$\eta = \frac{m g h}{v A} = \frac{20 \times 10^{-3} \times 9,8 \times 0,1 \times 10^{-3}}{1,4 \times 10^{-2} \times 0,25} = 5,6 \times 10^{-3} \text{ kg m}^{-1} \text{ s}^{-1} .$$

Eta biskositate-koefiziente zinematikoa hauxe izango da:

$$\nu = \frac{\eta}{\rho} = \frac{5,6 \times 10^{-3}}{910} = 6,15 \times 10^{-6} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1} .$$

b) Probleman erabili dugun lehenengo formulari ikus daitekeenez, beste faktore guztiek konstante iraunez gero, indarra eta abiadura elkarren araueraoak dira. Honelatan, bada,

$$F' = \frac{F}{2} \quad , \quad \nu' = \frac{\nu}{2} = 0,7 \text{ cm s}^{-1} .$$

ARIKETAK.

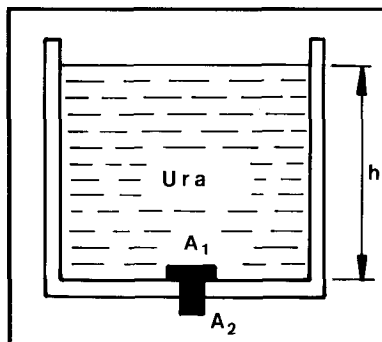
- 1.- $R = 6\text{ m}$ -tako erradioa duen puxika bat, $\rho = 0,18\text{ kg m}^{-3}$ -tako dentsitatea duen gas batez beterik dago. Kalkula bedi puxikak jaso dezakeen masarik handiena. Airearen dentsitatea $1,3\text{ kg m}^{-3}$ -takoa da.

Eraitza: $1013,35\text{ kg}$.

- 2.- Kalkula bedi Torricelli-k behar izango zukeen luzera minimoko hodia, egurats-presioa neurtzeko egin zuen esperientzia famatuan, merkurioaren ordean ura erabili izan balu.

Eraitza: $10,34\text{ m}$.

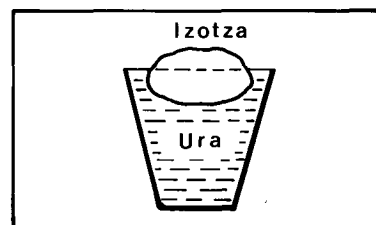
- 3.- Irudiko ontzia daukagularik, kalkula bedi, tapoia atera erazten hasteko egin beharko den indar minimoa:
- Tapoia ontziaren hondoa oso-osorik ukitzen baldin badu.
 - Tapoia eta ontziaren hondoren artean oso ur-xafla estu bat baldin badago.
- Arbuia bitez tapoiaaren pisua eta altuera.



Datuak: $A_1 = 50\text{ cm}^2$, $A_2 = 40\text{ cm}^2$, $h = 10\text{ m}$, $p_{\text{at}} = 10^5\text{ N m}^2$.

Eraitzak: a) 590 N . b) 392 N .

- 4.- Uraz guztiz beterik dagoen edalontzi batetan, izotz zati bat ari da flotatzen. Izotzaren urketa gertatzean, zer ur-kantitate eroriko da edalontzitik?

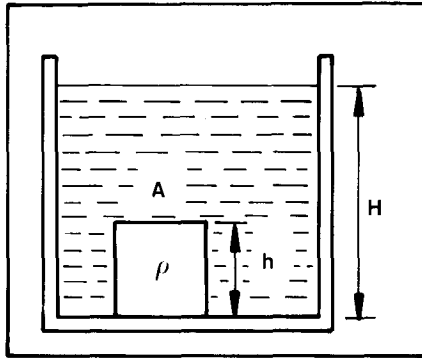


Eraitza: Tantarik ez.

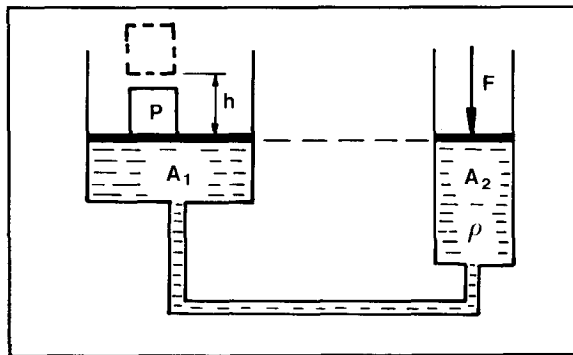
- 5.- Kalkula bedi, ontziaren hondoan dagoen zilindroa uretatik ateratzeko egin behar den lana (zilindroa geldiro-geldiro aterako da).

Datuak: $\rho = 5.000 \text{ kg m}^{-3}$,
 $A = 80 \text{ cm}^2$,
 $h = 5 \text{ cm}$,
 $H = 12,5 \text{ cm}$.

Emaitza: $2,058 \text{ J}$.



- 6.- Irudian eskematikoki ageri den tramankuluari, jasogailu hidraulikoa deritzo. Erlatiboki txikia den indar baten bidez, oso pisu handiak jasotzeko erabili ohi da. Kalkula bitez:



- a) P pisua orekan mantentzeko behar den F indarraren balioa.
 b) P pisua geldiro-geldiro h altuerara jasotzeko egin behar den lana.

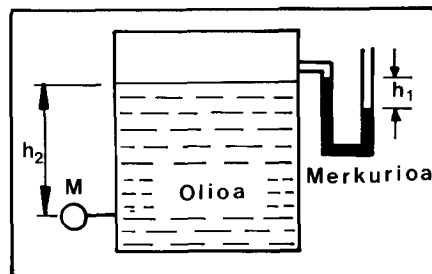
Datuak: $p = 5 \times 10^4 \text{ N}$, $A_1 = 1 \text{ m}^2$, $A_2 = 20 \text{ cm}^2$, $\rho = 5000 \text{ kg m}^{-3}$, $H = 20 \text{ cm}$.

Emaitza: a) $F = 100 \text{ N}$. b) $W = 6 \times 10^4 \text{ J}$.

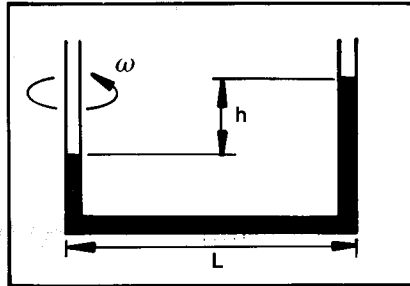
- 7.- Kalkula bedi, alboko irudiko M manometroak neurtuko duen presioa, kp cm^{-2} -tan.

Datuak: ρ_{r1} : merkurioaren dentsitate erlatiboa = 13,6; ρ_{r2} : olioaren dentsitate erlatiboa = 0,75; $h_1 = 23 \text{ cm}$; $h_2 = 3 \text{ m}$.

Emaitza: $-0,087 \text{ kp cm}^{-2}$.

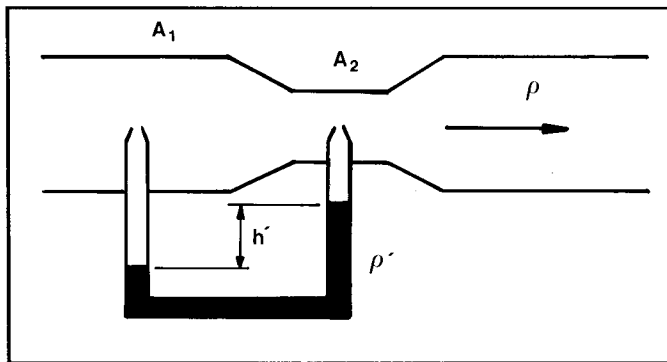


- 8.- Irudiko U tankerako hodia bira-ka ari da bere ezker-adarraren inguruan. Lor bedi ω abiadura angeluarra, adar bietan likidoak hartu dituen altueren arteko kendurak h balio badu. Oharra: Hodiaren sekzioaren erradioa oso txikia da L dimentsioarekin konparaturik.



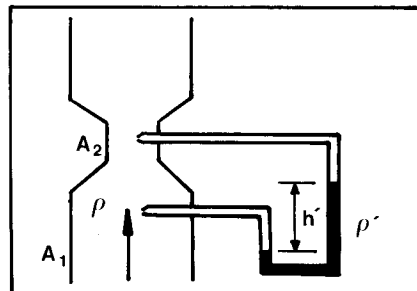
Eraitza: $\omega = \frac{\sqrt{2 g h}}{L}$.

- 9.- Irudiko hodi horizontalaren barrutik ρ dentsitatea duen fluido pasatzen ari da. Bi sekzioen azalerak A_1 eta A_2 dira. Lor bedi korrantearen kaudal masikoa, fluxua ideala dela suposatuz.



Eraitza: $\rho A_1 \sqrt{\frac{2 (\rho' / \rho - 1) g h'}{(A_1 / A_2)^2 - 1}}$.

- 10.- Irudiko hodi bertikaletatik ρ dentsitateko fluido gorantz isurtzen ari da. Bi sekzioen azalerak A_1 eta A_2 dira eta korrantearen kaudal bolumetrikoa K . Lor bedi hodi manometrikoko agertuko den h' altuera-diferentzia. Fluxua idealtzat joko da.

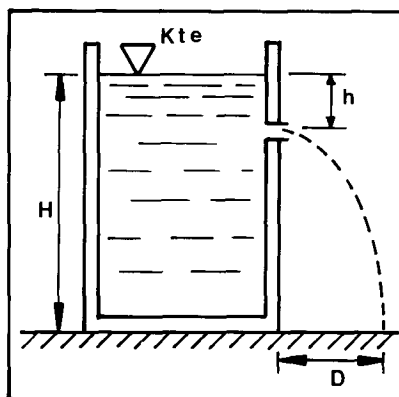


Emaitza:
$$h' = \frac{\rho K^2}{2g(\rho' - \rho)} \left(\frac{1}{A_2^2} - \frac{1}{A_1^2} \right) .$$

- 11.- a) Lor bedi, hormako zuloan zehar ontziari darion txorro estuak eginiko D distantzia horizontala, lurrera iritsi arte.

b) Ontziaren hondotik zein altuerara egin beharko litzateke beste zulo bat, bertan zehar isuritako likidoak aurreko txorroak jotzen duen lurreko puntu berberera jo zezan?

Oharra: Ontziko likidoaren goiko mailak geldirik dirauela suposatuko da.



Emaitza: a) $D = 2\sqrt{h(H-h)} .$

b) $h .$

- 12.- Gaurko hegazkinek 100 kp -tako euste-indarra behar dute, hegoaren m^2 bakoitzeko. Hegoaren beheko aldetik igaro den airearen abiadura erlatiboa $90 m s^{-1}$ -etako izanez gero, kalkula bedi goikaldeko airearen abiadura, behar den indarra lortzeko. Airearen dentsitatea: $1,3 kg m^{-3}$ Oharra: Kontsidera bedi airea fluido konprimaezina dela, eta arbuia bedi hegoaren lodiera.

Emaitza: $98 m s^{-1} .$

- 13.- 11.7. probleman, kalkula bedi barraskiloak jasango lukeen indarra:

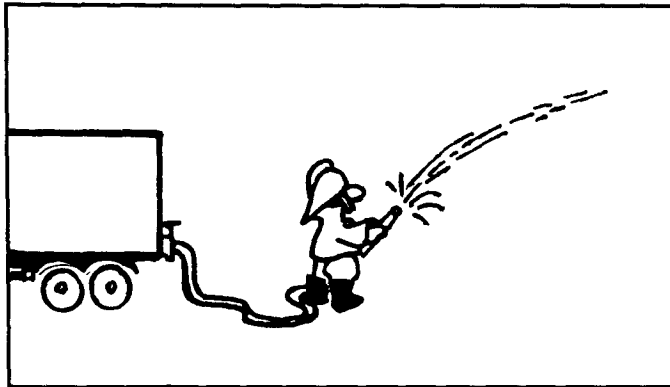
- a) elefanteari $3 cm s^{-1}$ -etako abiaduraz hurbilduko balitzaio.
b) elefantearengandik $3 cm s^{-1}$ -etako abiaduraz urrunduko balitz.

Emaitza: a) $640 dyn .$

b) $40 dyn .$

- 14.- I. Irudiko suhiltzaileak erabilitako mahukak 10 m -tako altuerara jaurtikitzen du ur-zorrotada. Zorrotadak horizontalarekiko 53° -tako angelua osatu du irteeran, eta puntu honetan mahukak duen sekzioa $25,6 cm^2$ -tako da. Kalkula bitez:

- a) Kamioiko ontziaren barneko uraren presioa.
b) Zorrotadaren kaudal bolumetrikoa.



II. Ontziko uraren presioa egurats-presio bera izango balitz, suhiltzaileak uhaga bat erabili beharko luke. Kalkula bedi uhagaren potentzia, aurreko ataleko baldintzak mantenduz. Egurats-presioa: 10^5 N m^{-2} .

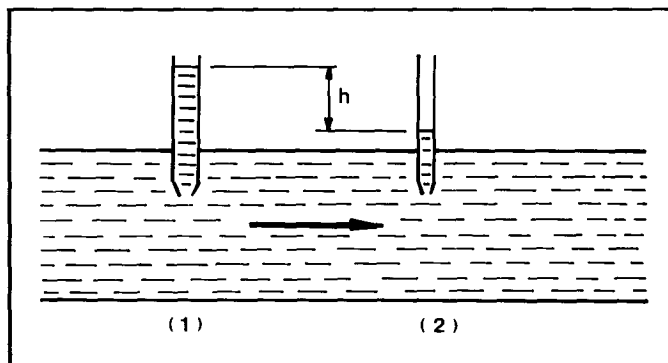
Oharra: Arbuia bedi urontzi eta mahukaren arteko altuera-diferentzia. Halaber, kontsidera bedi urontziaren barneko ura geldirik dagoela.

Emaitzak: I.a) $2,53 \times 10^5 \text{ N m}^{-2}$.

I.b) $4,48 \times 10^{-2} \text{ m}^3 \text{ s}^{-1}$.

II. $6895,2 \text{ w}$.

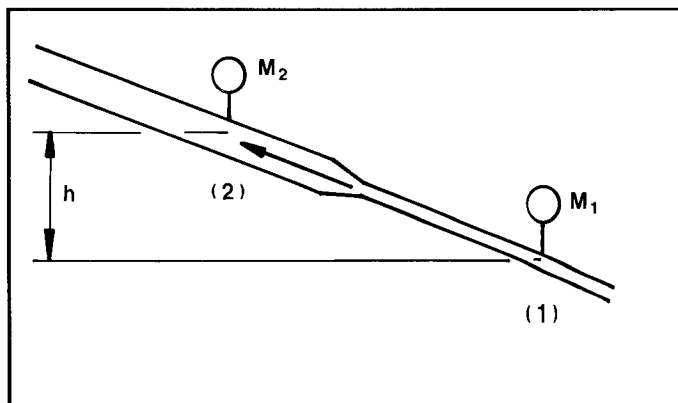
- 15.- Irudiko hodi horizontalaren barrutik pasatzen ari den likidoaren dentsitatea ρ da, eta kaudal bolumetrikoa K . Hodia sekzio berekoa da puntu guztietan. Hala ere, 1 eta 2 sekzioetan kokaturik dauden hodi bertikaletan, likidoak ez du altuera berbera lortu, korrontearen energia mekanikoak konstante ez dirauela adierazirik.



Kalkula bedi, aipaturiko sekzioen artean likidoak galduko duen denbora-unitateko energia, hots, potentzi galera.

Eraitza: $K \rho g h$.

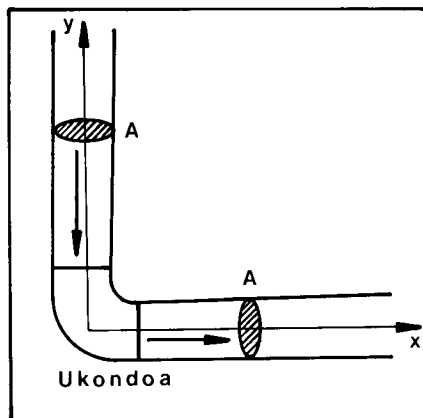
- 16.- Irudiko hodiaren barnetik $\rho_e = 0,877$ -tako dentsitate erlatiboa duen olioia doa. Kalkula bedi 1 eta 2 sekzioen arteko potentzi galera.



Datuak: $h = 3,6 \text{ m}$; kaudal bolumetrikoa $K = 1461 \text{ l s}^{-1}$; M_1 manometroaren neurketa $p_1 = 0,930 \text{ kp cm}^{-2}$; M_2 manometroaren neurketa $p_2 = 0,615 \text{ kp cm}^{-2}$; bi sekzioen azalerak $A_1 = 0,165 \text{ m}^2$, $A_2 = 0,33 \text{ m}^2$,

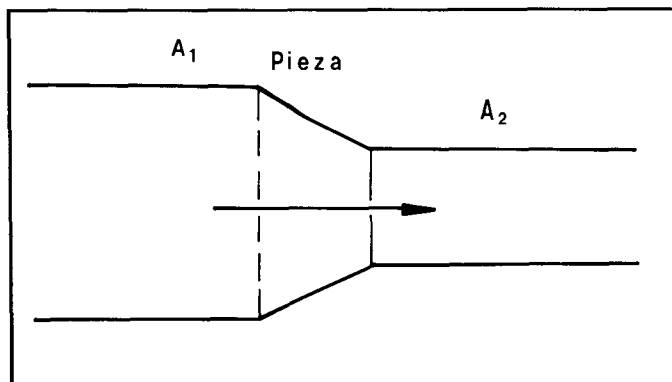
Eraitza: $37\,640 \text{ w}$.

- 17.- Alboko irudiko hodia plano horizontalean datza, ertza biribilduta eta angelu zuzenean duen ukondo baten tankera duelarik. Hodiaren barrutik ρ dentsitatea duen likido bat isurtzen ari da, p presioz. Korrontearen kaudal bolumetrikoa K da. Lor bedi, likidoak hodiaren ukondoari egingo dion indarra. Oharra: Fluxua ideala dela kontsideratu behar da.



Eraitza: $-\frac{1}{A} \left[(p A^2 + \rho K^2) \mathbf{i} + (p A^2 + \rho K^2) \mathbf{j} \right]$.

- 18.- Hurrengo irudiko hodi horizontalaren barrutik isurtzen ari den korrontea, eguratsera irteten ari da. Kalkula bedi, bi sekzio desberdinetako zilindroak elkartzen dituen piezari urak egingo dion indarra. Fluxua ideala dela kontsidera daiteke.



Datuak: $A_1 = 40 \text{ cm}^2$; $A_2 = 20 \text{ cm}^2$; kaudal bolumetrikoa $K = 80 \text{ l s}^{-1}$; egurats-presioa $p_e = 10^5 \text{ N m s}^{-2}$.

Emitza: 1000 N , korrontearen norantzan.

12. GAIA

HIGIDURA OSZILAKORRA

12.1. Osziladore harmoniko simple baten adierazpen matematikoa ondokoa da: $x = 4 \sin (0,1t + 0,5)$, bertako unitate guztiak *MKS* sisteman emanik daudelarik. Lor bitez:

- a) Higiduraren anplitudea, periodoa, maiztasuna eta hasierako fasea.
- b) Hasierako baldintzak (hots, posizioa eta abiadura $t = 0$ denean).
- c) Posizioa, abiadura eta azelerazioa, $t = 5 \text{ s}$ aldiunean.
- d) Egin bitez posizioaren, abiaduraren eta azelerazioaren grafikoak denboraren funtzioan.

a) $x = A \sin (\omega t + \alpha) = 4 \sin (0,1t + 0,5) \text{ .}$

Beraz, anplitudea $A = 4 \text{ m}$ da.

Bestalde, maiztasun angeluarra hauxe da:

$$\omega = 2 \pi \nu = 0,1 \text{ rad s}^{-1} \text{ ,}$$

maiztasuna:

$$\nu = \frac{1}{20 \pi} \text{ s}^{-1} \text{ ,}$$

eta periodoa:

$$T = \frac{1}{\nu} = 20 \pi \text{ s} \text{ .}$$

Hasierako fasea: $\alpha = 0,5 \text{ rad}$.

b) Kalkula ditzagun abiadura eta azelerazioa edozein aldiunetan:

$$v = \frac{dx}{dt} = 0,4 \cos (0,1 t + 0,5) \text{ ,}$$

$$a = \frac{dv}{dt} = - 0,04 \sin (0,1 t + 0,5) \text{ .}$$

$t = 0$ eginez,

$$x_0 = 4 \sin 0,5 = 1,92 \text{ m} ,$$

$$v_0 = 0,4 \cos 0,5 = 0,35 \text{ m s}^{-1} ,$$

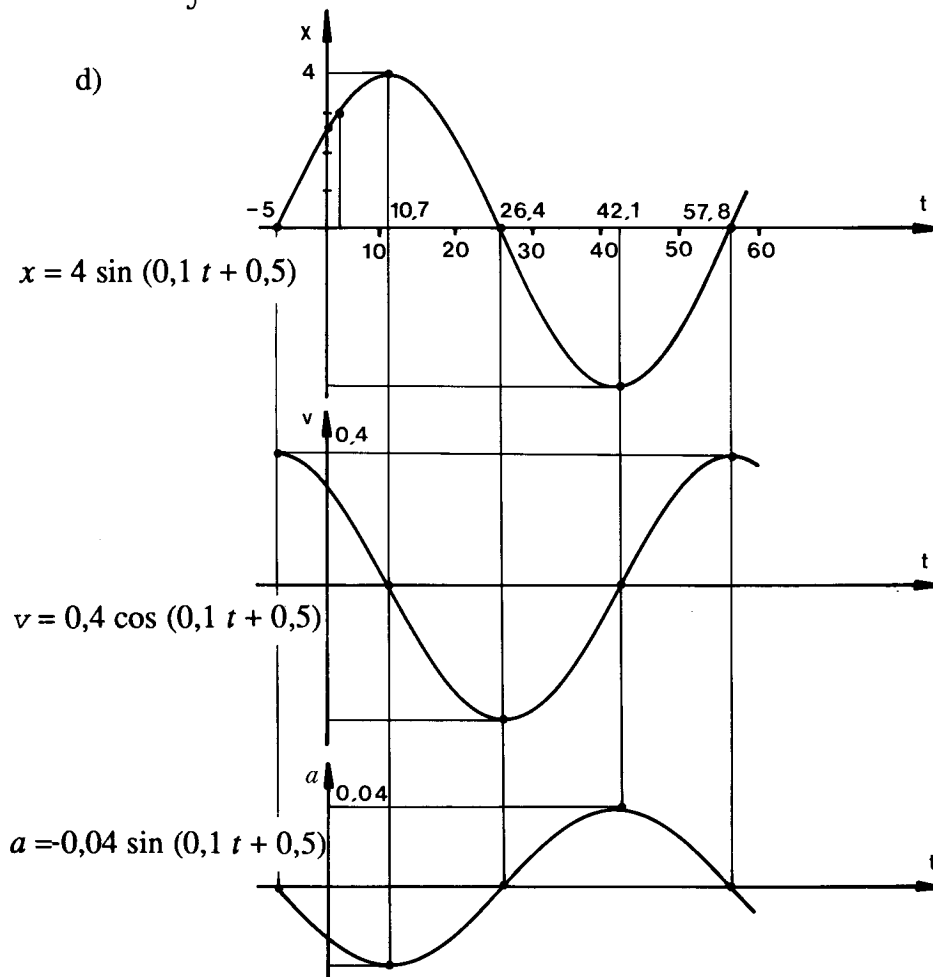
$$a_0 = -0,04 \sin 0,5 = -0,019 \text{ m s}^{-2} .$$

c) $t = 5 \text{ s}$ eginez,

$$x_5 = 4 \sin (0,1 \times 5 + 0,5) = 3,37 \text{ m} ,$$

$$v_5 = 0,4 \cos (0,1 \times 5 + 0,5) = 0,22 \text{ m s}^{-1} ,$$

$$a_5 = -0,04 \sin (0,1 \times 5 + 0,5) = -0,034 \text{ m s}^{-2} .$$



12.2. a) Malguki bati loturik dagoen bloke bat higidura harmoniko sinplez bibratzen ari da marruskadurarik gabeko plano horizontal batetan. Blokearen elongazioa anplitudearen erdia den aldiunean, energia osoaren zein frakzio da zinetikoa eta zein potentziala? (Malgukia masarik gabekoa dela ematen da).

b) Demagun, orain, masa malgukitik bertikalki zintzilikatu dugula. Blokea orekan dagoenean, beraren luzera masarik jarri gabe duena baino s kantitatean luzeagoa baldin bada, froga bedi, periodoa honelaxe adieraziko dela:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{s}{g}} .$$

a) Teoriaren arauera, higidura harmoniko sinplearen energia zinetikoa eta potentziala era honetara adierazten dira:

$$E_k = \frac{1}{2} m \omega^2 (A^2 - x^2)$$

$$E = \frac{1}{2} m \omega^2 A^2 .$$

$$E_p = \frac{1}{2} m \omega^2 x^2$$

Beraz, $x = A/2$ denean:

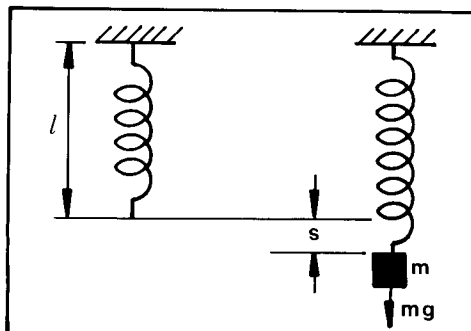
$$E_k = \frac{1}{2} m \omega^2 \left(A^2 - \frac{A^2}{4} \right) = \frac{3}{4} \left(\frac{1}{2} m \omega^2 A^2 \right) = \frac{3}{4} E .$$

$$E_p = \frac{1}{2} m \omega^2 \frac{A^2}{4} = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2} m \omega^2 A^2 \right) = \frac{1}{4} E .$$

b) Pisua ren kausaz s luzapena gertatzen denez (orekan):

$$mg = ks ,$$

$$k = \frac{mg}{s} .$$



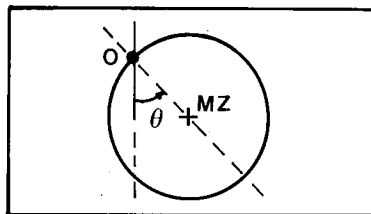
Bestalde, honelaxe adierazten da periodoa, malgukiaren k konstantearen funtzioan:

$$P = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} .$$

Aurreko balioa jarritz,

$$P = 2\pi \sqrt{\frac{\frac{m}{mg}}{\frac{s}{s}}} = 2\pi \sqrt{\frac{s}{g}} .$$

12.3. R erradioa eta m masa dituen irudiko eraztuna, O puntutik zintzilikatu da plano bertikalean oszilazio txikiak eginez. Zein da oszilazioen periodoa?



Teorian frogaturik dugunez (*Fisika Orokorra II*, 15.2.),

$$P = 2\pi \sqrt{\frac{I}{m g b}} .$$

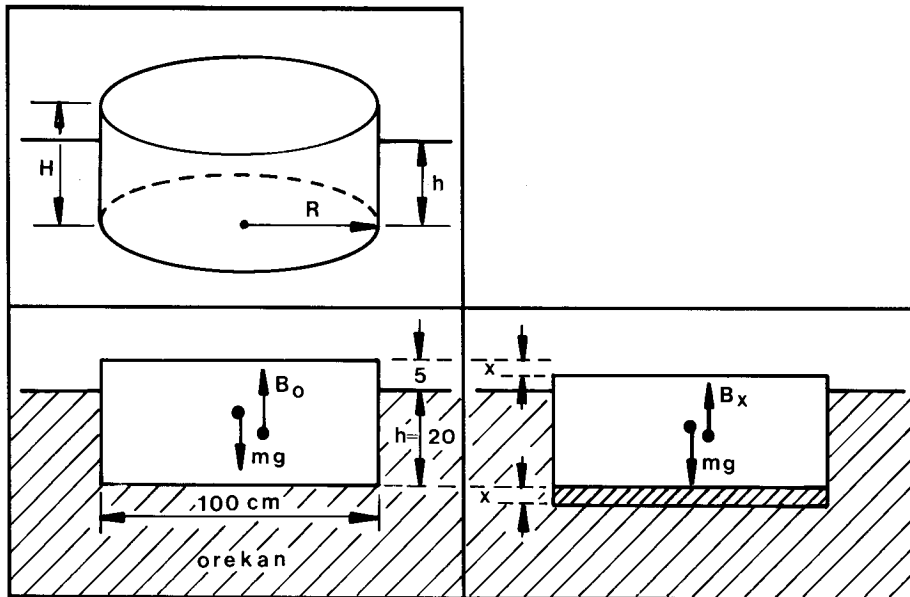
Hemen I delakoa, O puntutik pasatzen den ardatzarekiko inertzia momentua da eta b delakoa, O puntuaren eta masa-zentruaren arteko distantzia. Beraz,

$$I = I_{MZ} + m b^2 = m R^2 + m R^2 = 2 m R^2 , \quad (b = R) ,$$

$$P = 2\pi \sqrt{\frac{2 m R^2}{m g R}} \rightarrow P = 2\pi \sqrt{\frac{2R}{g}} .$$

12.4. Zurezko zilindro baten dentsitatea $0,8 \text{ gr/cm}^3$ -takoa da, beraren erradioak 50 cm eta altuerak 25 cm balio dutelarik. Zilindroa uretan dagoela, bere ardatz bertikalean norabidean ari da oszilatzen. Zein da higidura horren periodoa? ($\rho_{ura} = 1 \text{ g cm}^3$).

Orekan dagoela, pisua (mg) eta uraren bultzada (B_0) berdina dira.



Uraren dentsitatea : $\rho_{H_2O} = 1$

Zuraren dentsitatea : $\rho = 0,8$

- Orekan daudela,

$$\text{Pisua} = mg = g \times 0,8 \times \pi R^2 H$$

$$h = 0,8 H = 20 \text{ cm} .$$

$$\text{Bultzada} = B_0 = g \times 1 \times \pi R^2 h$$

- x luzera barruratzean, pisua berbera da, baina bultzada aldatu egingo da:

$$B_x = g \times 1 \times \pi R^2 (h + x) = B_0 + g \times 1 \times \pi R^2 x .$$

Beraz, goranzko indar netoa haxe izango da, moduluz:

$$F = |B_x - mg| = g \pi R^2 |x| = k |x| .$$

Eta norantzaz, indarra x delakoaren kontrakoa da. Hots, higidura harmoniko sinplearen ekuazio matematikoa dugu:

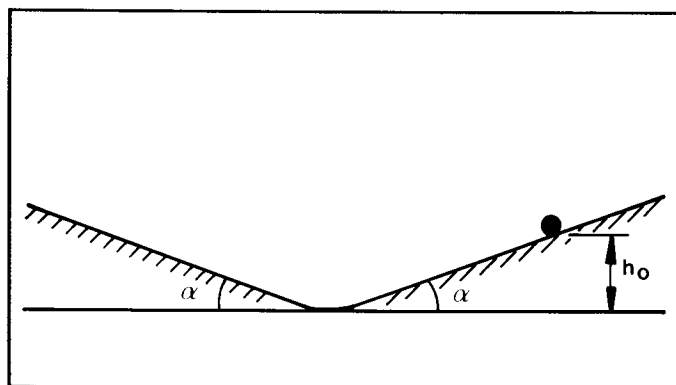
$$F_x = -kx \quad (k = g \pi R^2) .$$

Higidura oszilakor horren periodoa honako hau izango da:

$$P = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi \sqrt{\frac{\pi R^2 H \cdot 0,8}{g \pi R^2}} ,$$

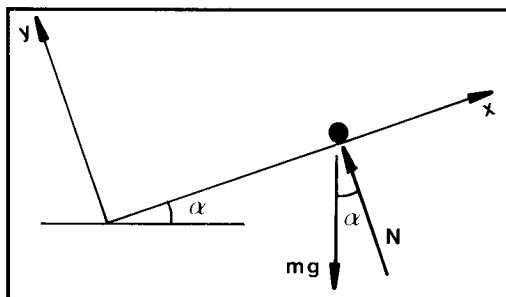
$$P = 2\pi \sqrt{\frac{0,20}{9,8}} = 0,9 \text{ s} .$$

12.5. Partikula bat aurrerantz eta atzerantz labaintzen ari da irudiko bi planoen artean, marruskadurarik gabe.



- Lor bedi higiduraren periodoa, hasierako altuera h_0 baldin bada.
- Higidura hau oszilakorra al da? Harmoniko sinplea al da?

Azter dezagun, higidura nolakoa den, plano bakoitzean:



$$x \text{ norabidean: } -m g \sin \alpha = m a_x .$$

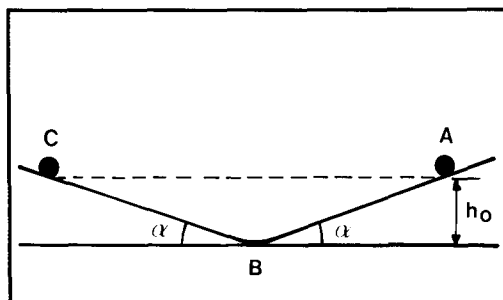
$$y \text{ norabidean: } -m g \cos \alpha + N = 0 .$$

Azelerazioa aztertuko dugu soilik, hots,

$$a_x = -g \sin \alpha ,$$

hau da, partikula hori azelerazio konstanteaz jaisten da planoan behera.

Simetriad, beste planoan ere gauza berbera jazoko da. Alegia, plano bietan dagoen bitartean, etengabe izango du planoan beheranzko azelerazioa. Bestalde energia kontserbatu egin behar da. Labur esanik, honelakoxea izango da higidura:



1. Hasieran A puntuan askatu da, abiadurarik gabe.
2. AB tartean higidura uniformeki azeleratua izango du, azelerazioak $a = g \sin \alpha$ balioa duelarik.
3. BC tartean higidura uniformeki dezeleratua izango du, dezelazio berberaz ($g \sin \alpha$).
4. CB tartean, AB tartearen antzera.
5. BA tartean, BC tartearen antzera.
6. Eta berriro, A puntuan geldituz, errepikatu egingo da prozesua.

Beraz, higidura oszilakorra da. Baina ez da harmoniko sinplea, zeren $x = A \sin(\omega t + \alpha)$ delako adierazpen matematikoaren arauera gertatu ez bait da.

Higidura oszilakorraren periodoa kalkulatzeko, AB tartean eman duen denbora kalkulatuko dugu.

$$AB = \frac{h_0}{\sin \alpha} ,$$

$$\overline{AB} = \frac{1}{2} a t^2 \rightarrow t = \sqrt{\frac{2 AB}{a}} = \sqrt{\frac{2 h_0}{g \sin^2 \alpha}} .$$

Simetrias, periodoa ondokoa izango da:

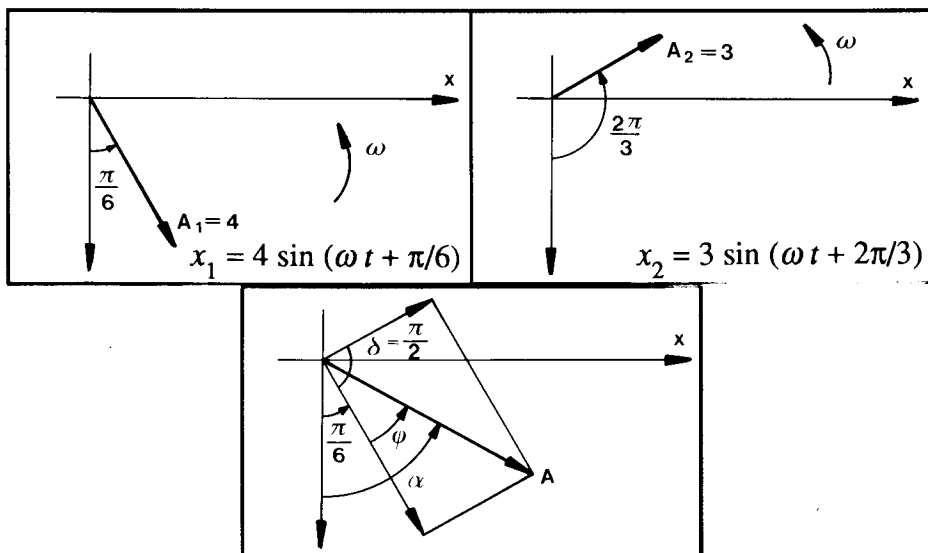
$$P = 4t \rightarrow P = \frac{4}{\sin \alpha} \sqrt{\frac{2h_0}{g}} .$$

**12.6. Demagun, norabide bereko ondoko bi higidura harmo-
niko sinpleak ditugula:**

$$x_1 = 4 \sin \left(\omega t + \frac{\pi}{6} \right) ; \quad x_2 = 3 \sin \left(\omega t + \frac{2\pi}{3} \right) .$$

- Lor bedi bi higidura horien gainezarmenez lortuko den higiduraren ekuazioa.
- Bektore biratzaileen bidez, adieraz bitez hiru higidura horien grafikoak.

Lehenengo unetik erabiliko dugu bektore biratzaileen bidezko adierazpide grafikoa. Konkretuki, irudia errazteko, $t = 0$ aldiunea aukeratuko dugu (higidura oszilakor biak maiztasun berekoak direla eduki behar da kontutan).



Kasu honetan, bien arteko desfasea hauxe da:

$$\delta = \alpha_2 - \alpha_1 = \frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} \text{ rad} .$$

Honelatan, bada,

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2} = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5 \quad .$$

$$\alpha = \alpha_1 + \varphi = \frac{\pi}{6} + \arctan \frac{3}{4} \quad .$$

Azkenean, ba, honela adieraziko dugu, gainezarmenaz lorturiko higidura:

$$x = 5 \sin \left(\omega t + \frac{\pi}{6} + \arctan \frac{3}{4} \right) \quad .$$

12.7. Bi norabide perpendikularretan gertatzen ari diren bi bibrazioen adierazpen matematikoak ondokoak dira:

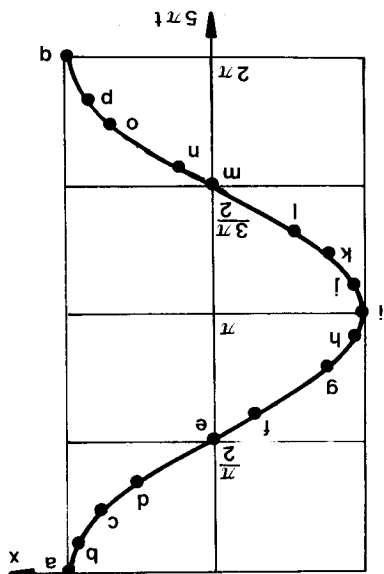
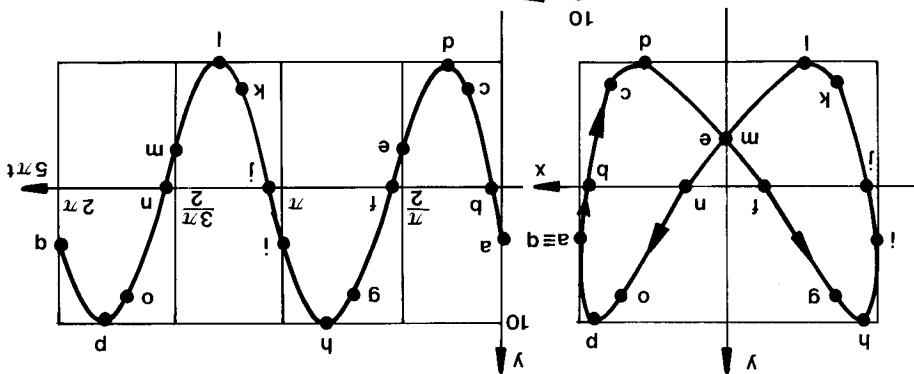
$$x = 10 \cos 5\pi t \quad ; \quad y = 10 \cos \left(10\pi t + \frac{\pi}{3} \right) \quad .$$

Irudika bedi bien konposaketaz lorturiko higiduraren Lissajous-en irudia.

Ebazpen grafikoa egingo dugu, irudia puntuz puntu lorturik. Funtzio sinusoidalen adierazpidea errazteko, abszisatan $5\pi t$ delako aldagaia hartuko dugu erreferentziakotzat. Ondoko taulak eta irudiek adieraziko dute prozesu osoa.

	$5\pi t$	$10\pi t + \pi/3$	$\cos (10\pi t + \pi/3)$	y
a	0	$\pi/3$	$1/2$	5
b		$\pi/2$	0	0
c	$\pi/4$	$\pi/2 + \pi/3$	$-\sqrt{3}/2$	$-5\sqrt{3}$
d		π	-1	-10
e	$\pi/2$	$\pi + \pi/3$	$-1/2$	-5
f		$3\pi/2$	0	0
g	$3\pi/4$	$3\pi/2 + \pi/3$	$\sqrt{3}/2$	$5\sqrt{3}$
h		2π	1	10

$5\pi t$	$10\pi t + \pi/3$	$\cos(10\pi t + \pi/3)$	y
i	π	$2\pi + \pi/3$	5
j	$5\pi/2$	0	0
k	$5\pi/4$	$5\pi/2 + \pi/3$	$-5\sqrt{3}$
l	3π	-1	-10
m	$3\pi/2$	$3\pi + \pi/3$	-5
n	$7\pi/2$	0	0
o	$7\pi/4$	$7\pi/2 + \pi/3$	$5\sqrt{3}$
p	4π	1	10
q	$4\pi + \pi/3$	$1/2$	5



12.8. Pendulu simple baten periodoak $2,5 \text{ s}$ balio du, oszilazio txikiak egitean. Une batetan oszilazioaren anplitudeak 2° balio izan du. Marruskaduraren kausaz, beraren anplitudea txikiagotuz joan da, hamar oszilazio oso burutu ondoren $1,5^\circ$ -tako balioa harturik. Lor bedi γ indargetze-konstantearen balioa.

Enuntziatuak dioenez, oszilazio indargetu hauetan γ konstantearen balioa txikia da. Orduan, teoriaren arauera (ikus *Fisika Orokorra II*, 15.5.), 1. kasuan gaude, hau da, $\gamma < \omega_0$ deneko kasuan. Beraz, higiduraren azalpen matematikoa era honetakoa izango da:

$$x = A e^{-\gamma t} \sin(\omega t + \alpha) \quad .$$

Azter dezagun higidura oszilakor honen anplitudearen bilakaera.

$$\begin{aligned} A e^{-\gamma t} \quad t = 0 &\rightarrow A e^{-\gamma t} = A = 2^\circ \\ t = 10 \times 2,5 = 25 \text{ s} &\rightarrow A e^{-25\gamma} = 1,5^\circ, \end{aligned}$$

hau da,

$$e^{-25\gamma} = \frac{1,5}{2} \rightarrow 25 \gamma = \ln \frac{2}{1,5} \quad ,$$

$$\gamma = 0,0115 \text{ s}^{-1} \quad .$$

12.9. Higidura oszilakor indargetu baten ekuazioa

$$y = A e^{-\gamma t} \cos \omega t$$

da, non y delakoa magnitude oszilatzailea den. 20 segundo pasa ondoren, 5 oszilazio gertatu dira eta hasieran $2,78 \text{ cm}$ balio zuen anplitudeak, orain 1 cm balio du.

- Lor bedi higiduraren sasiperiodoa (T).
- Lor bedi indargetze-konstantea (γ).
- Adieraz bedi higidura honen ekuazio diferentziala. Ekuazio honen parametroak zehaztu egin ote daitezke?

- Hogei segundotan 5 oszilazio egin dituenaz,

$$T = \frac{20}{5} = 4 \text{ s} .$$

Honen bidez maiztasun angeluarra lor dezakegu,

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \rightarrow \omega = \frac{\pi}{2} \text{ rad s}^{-1} .$$

b) Indargetze-konstantea lortzeko, aurreko probleman bezala egingo dugu.

$$A e^{-\gamma t} \quad t = 0 \rightarrow A e^{-\gamma t} = A = 2,78 \text{ cm} ,$$

$$t = 20 \rightarrow A e^{-\gamma 20} = 1 \text{ cm} ,$$

$$e^{-\gamma 20} = \frac{1}{2,78} ,$$

$$20 \gamma = \ln 2,78 \rightarrow \gamma = \frac{\ln 2,78}{20} = 0,051 \text{ s}^{-1} .$$

c) Dakigunez, higadura honen ekuazio diferentziala ondokoa da:

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + 2\gamma \frac{dy}{dt} + \omega_0^2 y = 0 .$$

Hemen baliokideak diren adierazpen hauek dauzkagu:

$$2 \gamma = \frac{\lambda}{m} , \text{ non } \lambda \text{ indargetze-koefizientea den eta}$$

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m} , k \text{ osziladorearen konstante errekuperatzailea izanik.}$$

Bestalde,

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$$

dela kontutan harturik, eta ω eta γ ezagunak direnez, errazki lor

dezakegu ω_0 :

$$\omega_0 = \sqrt{\omega^2 + \gamma^2} = 1,5716 \text{ rad s}^{-1}.$$

Horrela eginez, ekuazio diferentzialaren parametroak lorturik daude. λ eta k parametroak lortzea, beste kontu bat da, horretarako oszilatzen ari den partikularen masa ezagutu behar bait da.

12.10. Bi osziladorek masa berbera dute. Hasieran anplitude berberaz oszilatzen ari dira eta indargetze-parametro (λ) berbera dute. Hala ere, bataren maiztasuna bestearena baino bi aldiz handiagoa da. Bietariko zein indargetuko da lehenago hasierako anplitudearen erdiraino?

Teoriaren arauera (ikus *Fisika Orokorra II*, 15.5.), indargetzea txikia denean ($\gamma < \omega_0$), era honetan adierazten da higiduraren ekuazioa:

$$x = A e^{-\gamma t} \sin(\omega t + \alpha), \quad \gamma = \frac{\lambda}{2m} \text{ izanik.}$$

Beraz, bi higiduren kasuan A eta γ parametroek balio berbera dute. Eta anplitudeari dagokionez, biak indargetuko dira modu berean. Desberdintasun bakarra, maiztasunari dagokiona izango da, $\omega_2 = 2\omega_1$, baina honek ez du zerikusirik anplitudearen bilakaerarekin.

12.11. Froga bedi ezen, oszilazio bortxatu-indargetuen kasuan, anplitude-erresonantzia

$$\omega_f = \sqrt{\omega_0^2 - 2\gamma^2}$$

maiztasunean gertatzen dela.

Teoriaren arauera (15.6.), erregimen iraunkorrean anplitudearen adierazpena ondokoa da:

$$A = \frac{F_0 / m}{\sqrt{(\omega_f^2 - \omega_0^2)^2 + 4\gamma^2 \omega_f^2}}.$$

Hemen F_0 , m , ω_0 eta γ konstanteak dira.

Beraz, $A = A(\omega_f)$ dela konturatuko gara. Bestalde, anplitude-erresonantziak A delakoa maximoa dela esan nahi du. Horretarako,

$$\frac{dA}{d\omega_f} = 0$$

egingo dugu (izatez, bigarren deribatua negatiboa dela ere ikusi behar da), alegia,

$$\frac{dA}{d\omega_f} = \frac{-\frac{F_0}{m} \frac{2(\omega_f^2 - \omega_0^2)2\omega_f + 8\gamma^2\omega_f}{2\sqrt{(\omega_f^2 - \omega_0^2)^2 + 4\gamma^2\omega_f^2}}}{(\omega_f^2 - \omega_0^2)^2 + 4\gamma^2\omega_f^2} = 0 \quad .$$

Hemendik:

$$2(\omega_f^2 - \omega_0^2)2\omega_f + 8\gamma^2\omega_f = 0 \quad ,$$

$$4\omega_f(\omega_f^2 - \omega_0^2 + 2\gamma^2) = 0 \quad .$$

Azkenean:

$$\omega_f = \sqrt{\omega_0^2 - 2\gamma^2} \quad .$$

Horixe da anplitude-erresonantziari dagokion maiztasuna.

ARIKETAK

- 1.- Puntu bat zirkunferentzia batetan zehar higitzen ari da, beraren abiadura 50 cm/s -takoa delarik. Bira osoa emateko 6 s behar ditu. $t = 0$ aldiunean zirkunferentziaren zentrutik aipaturiko puntura doan zuzenak x ardatzarekiko 30° -tako angelua osotu du. Lor bedi puntu horren x koordinatuaren ekuazioa, denboraren funtzioan eta gainera $x = A \cos(\omega t + \alpha)$ eran, A , ω eta α parametroen balioa emanik.

Emaitza: $x = \frac{150}{\pi} \cos\left(\frac{\pi}{3}t + \frac{\pi}{6}\right)$.

$$A = \frac{150}{\pi} \text{ cm} , \quad \omega = \frac{\pi}{3} \text{ s}^{-1} , \quad \alpha = \frac{\pi}{6} \text{ rad} .$$

- 2.- Auto batetan lau persona sartzera doaz. Denetara 300 kg -tako pisua dute eta autoan sartzean, beronen malgukiak 5 cm konprimatu dira. Malgukiak jasaten ari diren zama osoa 900 kg -takoa bada, lor bedi auto zamatuaren oszilazioaren periodoa.

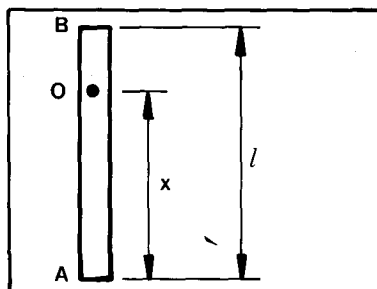
Emaitza: $P = 0,78 \text{ s}$.

- 3.- a) Higidura harmoniko sinplez plano horizontal batetan eta segundoko bi oszilazioz bibratzen ari den plataforma baten gainean, kutxa bat dago. Kutxaren eta plataformaren arteko marruskadura-koefiziente estatikoak $0,5$ balio du. Zein da oszilazioak eduki dezakeen anplituderik handiena, kutxak labain egin gabe?
b) Plataformaren bibrazioa bertikala balitz, eta beraren anplitudea 25 mm -takoa, zein litzateke maiztasunik handiena, kutxa plataformatik alde egin gabe higi ledin?

Emaitzak: a) $0,031 \text{ m}$.

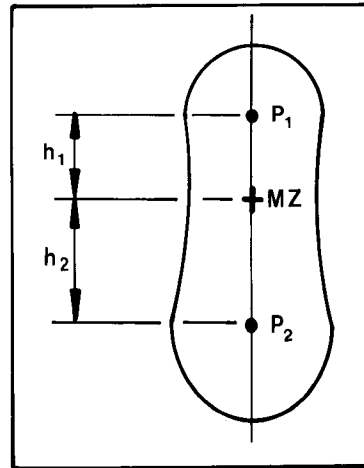
b) $3,15 \text{ s}$.

- 4.- Makila astun bat, O puntutik zintzilikaturik dago eta bertikalaren inguruan oszilatzen ari da, O -tik pasatzen den ardatz horizontal baten inguruan oszilazio txikiak egingez. Beraren luzerak l balio du. Zenbatekoa izan beharko du x distantziak, oszilazioen periodoa minimoa izan dadin?



$$\text{Emaitza: } x = \frac{\sqrt{3} + 3}{6} l .$$

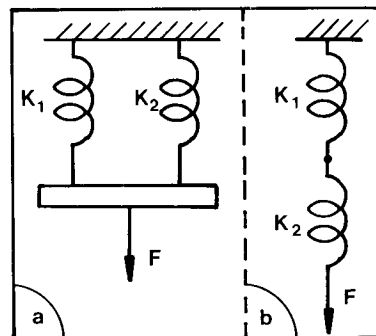
- 5.- Objektu laun batek I inertzia momentua du bere masa-zentru-arekiko (planoaren perpendikularra den ardatz batekiko). P_1 puntuaren inguruan biratzean (ikus irudia), T periodoarekin oszilatzen ari da. Masa-zentruaren beste aldean beti dago beste puntu bat, P_2 , zeinaren inguruan oszilatzean ere T periodo berbera duen. Froga bedi ezen ondoko baldintza betetzen dela:



$$h_1 + h_2 = \frac{g T^2}{4 \pi^2} .$$

- 6.- Lor bedi multzoaren konstante errekupeztzaile baliokidea (K_e), K_1 eta K_2 konstantedun bi malguki elkarrekin lan egiten jartzean.

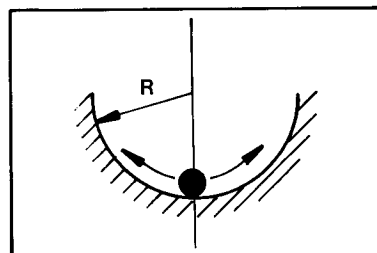
- Paralelo-elkarketan.
- Serie-elkarketan.



$$\text{Emaitzak: a) } K_e = K_1 + K_2 .$$

$$\text{b) } K_e = \frac{K_1 K_2}{K_1 + K_2} .$$

- 7.- Laborategiko experimentu batean, grabitatearen azelerazioaren zeharkako neurketa egin da. Horretarako bola batek gainazal esferiko baten barne-aldean erratatzean eginiko oszilazio txikien periodoa neurtu da. Bolaren erradioa a da eta pistarena, R .



Froga bedi, magnitude horien arteko erlazioa ondokoa dela:

$$g = \frac{28 \pi^2 (R - a)}{5 T^2} .$$

8.- Masa gabekoa den eta $3 l$ luzera duen soka bat finkatu egin da, bere bi muturretatik atezaturik dagoelarik. Sokaren tentsioa T da.

- m masako partikula puntual bat mutur batetatik l distantziara lotu da. Lor bedi, m partikularene zeharkako oszilazioen periodoa.
- Orain, m masako beste partikula bat ere lotu da, soka hiru segmentu berdinetan banatuz (l luzerakoak), bakoitzean dagoen tentsioa T izanik. Idatz bitez partikula bien higidura-ekuazioak.

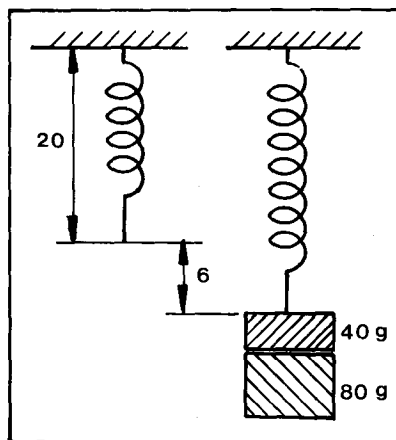
Emaitzak: a) $P = 2\pi \sqrt{\frac{2 m l}{3 T}}$.

$$\begin{aligned} \text{b) } \ddot{y}_1 + 2\omega_0^2 y_1 - \omega_0^2 y_2 &= 0 , \\ \ddot{y}_2 + 2\omega_0^2 y_2 - \omega_0^2 y_1 &= 0 . \end{aligned}$$

Hemen: $\omega_0^2 = \frac{T}{m l}$.

9.- Masa gabekoa den eta 20 cm -tako luzera duen malguki baten goiko muturra finko mantendu da eta beste muturretik 40 eta 80 g -tako bi masa zintzilikatu dira, horrela malgukiak 26 cm -tako luzera hartuko duelarik. Modu horretan dagoela, kendu egin da 80 g -tako masa.

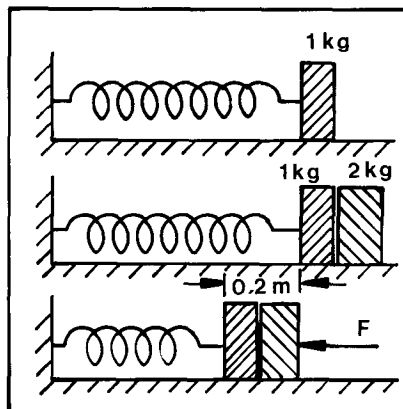
- Zein maiztasunekin higituko da ondoren 40 g -tako masa?
- Zein izango da beraren energia zinetiko maximoa?



Emaitzak: a) $\nu = 3,52 \text{ s}^{-1}$.

b) $E_{km} = 0,015 \text{ J}$.

- 10.- Malguki horizontal bat marrus-kadurarik gabeko gainazal baten gainean dago 1 kg -tako masa bati loturik, orekan. Malgukiaren konstanteak 200 N/m balio du. Masaren alboan lotu gabe, 2 kg -tako masa bat jarri da eta F indarra eginez, $0,2\text{ m}$ konprimatu da malgukia. Gero, bapatean desagertu egin da indarra eta erresorteak bultzatu egiten ditu bi masak.



- Zenbat balio du F indarrak?
- Non bananduko dira bi masak, malgukiak bultzatzean?
- Zein izango da 2 kg -tako masak banandu eta gero izango duen higidura?
- Eta 1 kg -tako masak? Lor bitez anplitudea eta maiztasuna.

Emaitzak: a) $F = 40\text{ N}$.

- $0,2$ metro ibili ondoren, hots, oreka puntuan.
- Higidura uniforme $1,63\text{ m/s}$ abiaduraz.
- Higidura oszilakor harmoniko sinplea:
amplitudea $= 0,115\text{ m}$; maiztasuna $= 2,25\text{ s}^{-1}$.

- 11.- Lor bedi ondoko bi higidura harmoniko sinple eta paraleloen gainezarmenaz lortuko den higiduraren ekuazioa:

$$x_1 = 2 \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{3}\right), \quad x_2 = 3 \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right).$$

Egin bedi higidura bakoitzaren grafikoa eta bai higidura erresultantearena ere. Adieraz bitez bektore biratzaileak.

Emaitza: $x = 4,83 \sin(\omega t + \alpha)$.

$$\alpha = 78,32^\circ = 1,37\text{ rad}.$$

- Azal bedi eskematikoki, zergatik pentsatu behar den, indargetzea gertatzean, higidura oszilakorraren maiztasuna beheratu egingo dela.
- 2 kg -tako masa bat $k = 400\text{ N/m}$ balio duen konstantea daukan malguki batekin oszilatzen ari da, hasierako anplitudea 3 cm -takoa izanik.

- a) Lor bitez higiduraren periodoa eta hasierako energia osoa.
- b) Periodo bakoitzean energiaren galera 1%-takoa bada, lor bedi indargetzearen λ parametroa.

Emaitzak: a) $P = 0,44 \text{ s}$ ($\omega \approx \omega_0$ eginik); $E = 0,18 \text{ J}$.

b) $\lambda = 0,045 \text{ kg s}^{-1}$.

- 14.- Osziladore indargetu baten masak 50 g balio du eta periodoak, 2s. Beraren anplitudea 5%-a txikiagotzen ari da ziklo bakoitzean.

- a) Zein da indargetzearen λ parametroa?
- b) Energiaren zein parte iraungiko da ziklo bakoitzean?

Emaitzak: a) $\lambda = 0,00255 \text{ kg s}^{-1}$.

b) 9,7 %-a .

- 15.- Osziladore indargetu baten anplitudea 50%-a txikiagotzen ari da ziklo bakoitzean.

- a) Energiaren zein frakzio galduko da ziklo bakoitzean?
- b) Froga bedi ezen

$$\frac{\lambda T}{2m} = \ln 2$$

dela, T delakoa periodoa izanik.

Emaitzak: a) 75%-a .

b) Zuzenki froga daiteke.

- 16.- Malguki baten konstanteak $k = 400 \text{ N/m}$ balio du. Beraren eraginez, 2 kg-tako masa bat oszilatzen ari da, $\lambda = 2 \text{ kg/s}$ balioko indargetze-parametro batez. Bestalde, kanpoko indar batek bortxatzen ditu oszilazioak. Indar hau sinusoidala da beraren balio maximoa 10 N-etakoa eta maiztasun angeluarra 10 rad/s-takoa izanik.

- a) Zein da erregimen iraunkorreko oszilazioen anplitudea?
- b) Lor bedi anplitude-erresonantziari dagozkion oszilazioen anplitudea.

Emaitzak: a) $A = 0,047 \text{ m}$.

b) $A_r = 0,354 \text{ m}$.

- 17.- 0,5 kg -tako masa bat oszilatzen ari da, $k = 300 \text{ N/m}$ konstantedun malguki baten eraginez. Lehenengo 10 segundoetan 0,5 J galdu ditu marruskadura dela eta. Hasierako anplitudeak 15 cm balio bazuen,

- a) Zenbat denbora pasatuko da, energiak $0,1 \text{ J}$ -tako balioa izango duen arte?
- b) Zein da oszilazioaren maiztasuna?

Emaitzak: a) 219 s .

b) $\omega \approx \omega_0 = 24,5 \text{ s}^{-1}$.

13. GAIA

UHIN-HIGIDURA

13.1. Pultsu baten profilak ondoko adierazpen matematikoa du:

$$\xi(x, 0) = \frac{3}{2x^2 + 1}.$$

- a) Lor bedi, eite horrekin x norabidearen alde positiborantz $v = 2 \text{ m s}^{-1}$ -etako abiaduraz hedatzen ari den uhinaren adierazpena.
- b) Irudika bedi profila $t = 0$ eta $t = 1$ aldiuneetan.
- c) Froga bedi, a) atalean lorturiko adierazpenak uhin-ekuazioa betetzen duela.

a) Teoriaren arauera dakigunez, $f(x)$ perturbazio baten profila bada, $f(x - vt)$ profil horrekin eskuinetarantz (x positiborantz) hedatzen ari den uhinaren adierazpena da. Beraz,

Profila	Uhina
$f(x)$	$\rightarrow f(x - vt)$
$v = 2 \text{ m s}^{-1}$	$\frac{3}{2x^2 + 1} \rightarrow \frac{3}{2(x - 2t)^2 + 1}$

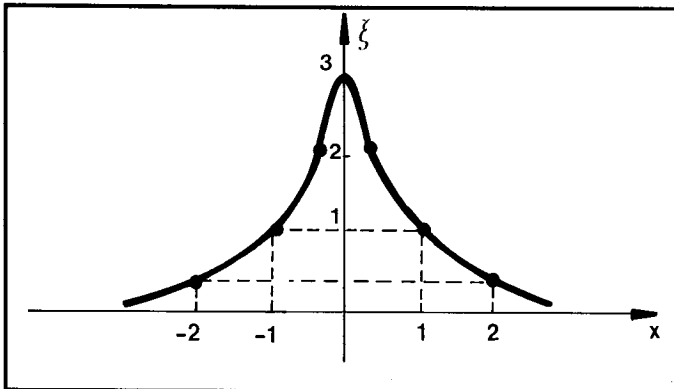
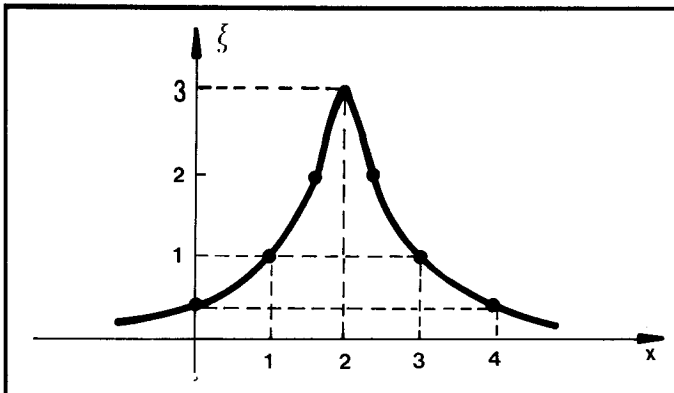
Beraz, hauxe da uhinaren adierazpena:

$$\xi(x, t) = \frac{3}{2(x - 2t)^2 + 1}.$$

b) Bi profil hauek irudikatu behar ditugu:

$$\xi_{t=0} = \frac{3}{2x^2 + 1}, \quad \xi_{t=1} = \frac{3}{2(x - 2)^2 + 1}.$$

Hurrengo bi irudietan adierazi ditugu profilak. Kasu bietan x ardatza asintota da. Bestalde, profil simetrikoak dira maximoa dagoen bertikalarekiko eta alde bakoitzean inflexio-puntu bat dago.


 $\xi_{t=0}$ profila

 $\xi_{t=1}$ profila

Argi ikus daitekeenez, eite berbera dute, baina bigarrena desplazaturik dago eskuinetarantz, $vt = 2 \times 1 = 2 \text{ m}$ -tako distantziaz.

c) Uhinaren ekuazio diferentziala hau da:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} .$$

Berez, ez litzateke frogatzen ibili behar, frogapen orokorra teori liburuan eginik bait dago (ikus *Fisika Orokorra II*, 16.1. atala). Baina ariketa bezala, garatu egingo dugu prozesu osoa.

$$\xi = \frac{3}{2(x - 2t)^2 + 1} .$$

Kalkuluak errazteko, $u = x - 2t$ egingo dugu. Orduan

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 1, \quad \frac{\partial u}{\partial t} = -2.$$

Hots,

$$\xi = \frac{3}{2u^2 + 1}.$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = \frac{-3 \cdot 4u \frac{\partial u}{\partial t}}{(2u^2 + 1)^2} = \frac{-3 \cdot 4u \cdot (-2)}{(2u^2 + 1)^2} = \frac{24u}{(2u^2 + 1)^2}.$$

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \frac{(2u^2 + 1)^2 \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{24u}{(2u^2 + 1)^2} \right) - 24u \cdot 2(2u^2 + 1) \cdot 4u \frac{\partial u}{\partial t}}{(2u^2 + 1)^4}$$

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = 48 \frac{6u^2 - 1}{(2u^2 + 1)^3}.$$

Bestalde:

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{-3 \cdot 4u \frac{\partial u}{\partial x}}{(2u^2 + 1)^2} = \frac{-12u}{(2u^2 + 1)^2}.$$

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \frac{(2u^2 + 1)^2 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{-12u}{(2u^2 + 1)^2} \right) + 12u \cdot 2(2u^2 + 1) \cdot 4u}{(2u^2 + 1)^4}$$

Hau da:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = 12 \frac{6u^2 - 1}{(2u^2 + 1)^3}.$$

Emaitza biak konparatuz,

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = 2^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}$$

dela ikus daiteke, frogatu nahi genuenez.

13.2. Konpara bitez ondoko bi uhinen uhin-luzerak:

- a) Diapasoi batek sortutako soinuarena, beraren maiztasuna 440 Hertz -etakoa dela jakinik eta soinuaren abiadura 340 m/s -takoa izanik.
- b) Espektrro ikuskorrean dagoen argi gorriarena, beraren maiztasuna $5 \cdot 10^{14} \text{ Hz}$ -etakoa dela jakinik, argiaren abiadura $3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$ -takoa izanik.

a) Soinuaren kasuan,

$$\lambda = \frac{v}{\nu} = \frac{340 \text{ m/s}}{440 \text{ s}^{-1}} = 0,772 \text{ m} .$$

b) Argi gorriaren kasuan,

$$\lambda = \frac{v}{\nu} = \frac{3 \cdot 10^8 \text{ m/s}}{5 \cdot 10^{14} \text{ s}^{-1}} = 6 \cdot 10^{-7} \text{ m} .$$

Argiro dakusagu bi uhin-mota hauen arteko neurri-desberdintasuna. Maiztasunari dagokionez, giza-entzumenaren ahalmena $16 \div 20000 \text{ Hz}$ tartean hedatzen da. Ostera, argi ikuskorrearen mugak, gutxi gorabehera, $3,8 \cdot 10^{14} \div 7,7 \cdot 10^{14} \text{ Hz}$ tartekoak dira.

13.3. Zeharkako uhin sinusoidal baten anplitudeak 10 cm balio du eta beraren uhin-luzerak, $\lambda = 200 \text{ cm}$. Uhin hori ezkerretik eskuinerantz hedatzen ari da $v = 100 \text{ cm/s}$ -tako abiaduraz, soka tinko horizontal batetan zehar. Ardatzen jatorria ezkerreko mutur ez-perturbatuan har bedi. $t = 0$ aldiunean ezkerreko muturra jatorrian dago, beherantz higiturik.

- a) Zenbat balio dute v eta ω parametroek?
- b) Zenbat balio du uhin-zenbakiak (k konstanteak)?
- c) Zein da uhinaren ekuazioa?
- d) Zein da sokaren ezkerreko muturreko puntuaren higiduraren ekuazioa?
- e) Zein da ezkerreko muturretik 150 cm -tara dagoen puntu baten higiduraren ekuazioa?
- f) Zein da sokako puntu baten abiadura maximoa?

a) Dakigunez, $v = \lambda \nu$.

$$\nu = \frac{v}{\lambda} = \frac{100 \text{ cm s}^{-1}}{200 \text{ cm}} = 0,5 \text{ s}^{-1}.$$

$$\omega = 2\pi\nu = 2\pi \cdot 0,5 = \pi \text{ rad s}^{-1}.$$

b)

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{200 \text{ cm}} = \frac{\pi}{100} \text{ cm}^{-1}.$$

c) Ekuazio orokorra hauxe da:

$$\xi = \xi_0 \sin [k(x - vt) + \alpha].$$

Enuntziatuaren arauera, $\xi_0 = 10 \text{ cm}$. Bestalde, baldintza hauek ezarri dira,

$$x = 0, t = 0, \quad \xi_0 = 0,$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} < 0.$$

Beraz, horren arauera, $\alpha = 0$. Eta parametro guztien balioak jarritz, hauxe dugu:

$$\xi = 10 \sin \frac{\pi}{100} (x - 100t) \rightarrow \xi = 10 \sin \left[\frac{\pi}{100} x - \pi t \right].$$

d) Ezkerreko muturrean, $x = 0$. Hots,

$$\xi_{x=0} = 10 \sin (-\pi t) = -10 \sin \pi t.$$

e) Bigarren puntu horretan, $x = 150 \text{ cm}$ denean alegia,

$$\xi_{x=150} = 10 \sin \left[\frac{\pi}{100} 150 - \pi t \right] = 10 \sin \left(\frac{3\pi}{2} - \pi t \right).$$

f) Edozein punturen abiadura honelakoa da denboraren funtzioan:

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = 10(-\pi) \cos \left[\frac{\pi}{100} x - \pi t \right] .$$

Abiaduraren baliorik handiena, kosinuak ± 1 balio duenean gertatuko da:

$$v_m = 10 \pi \text{ cm s}^{-1} .$$

13.4. Barra elastiko batetan zehar hedatzen ari diren luzetarako uhinen ekuazioa ondoko hau da:

$$\xi = \xi_0 \sin 2\pi \left(\frac{x}{\lambda} - \frac{t}{P} \right) .$$

- a) Lor bedi, zeharkako sekzio batetan egiten ari den indarraren adierazpen matematikoa.
- b) Froga bedi, ezen ξ eta F uhinen arteko fase-desberdintasuna uhin-luzeraren laurdenari dago-kiona dela.

a) Teoriaren arauera (ikus *Fisika Orokorra II*, 16.4. atala) honelaxe adieraz daiteke indarra:

$$F = Y A \frac{\partial \xi}{\partial x} ,$$

Y delakoa materialaren Young-en modulua eta A delakoa sekzioaren azalera izanik. Perturbazioaren x -ekiko deribatua kalkulatu,

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{2\pi}{\lambda} \xi_0 \cos 2\pi \left[\frac{x}{\lambda} - \frac{t}{P} \right] .$$

Beraz,

$$F = \frac{2\pi Y A}{\lambda} \xi_0 \cos 2\pi \left[\frac{x}{\lambda} - \frac{t}{P} \right] .$$

b) Konpara ditzagun aldiune berean ($t = k\text{tea}$) bi uhin horien faseak, bien arteko fase-desberdintasuna ikusteko:

$$\xi \rightarrow \sin 2\pi \left[\frac{x}{\lambda} - \frac{t}{P} \right] ,$$

$$F \rightarrow \cos 2\pi \left[\frac{x}{\lambda} - \frac{t}{P} \right] .$$

Baina, dakigunez,

$$\cos \alpha = \sin \left[\alpha + \frac{\pi}{2} \right] ,$$

alegia, sinu eta kosinu funtzioen arteko desfasea $\pi/2$ da.

F eta ξ uhinen arteko fase-desberdintasunari a baderitzogu, F uhinak x_1 puntuan duen fase berbera, ξ uhinaren kasuan $(x_1 + a)$ puntuan gertatuko da. Beraz,

$$\frac{2\pi x_1}{\lambda} + \frac{\pi}{2} = \frac{2\pi (x_1 + a)}{\lambda} ,$$

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2\pi a}{\lambda} \rightarrow a = \frac{\lambda}{4} .$$

13.5. Altzairuzko barra batetan zehar luzetarako uhinak hedatu egin dira, barraren mutur batetan loturik dagoen oszilagailu batek sortuak. Barraren diametroak 4 mm balio du. Oszilazioen anplitudea 0,1 mm-takoa da eta maiztasuna 10Hz-etakoa. Altzairuaren dentsitateak $7,8 \times 10^3 \text{ kg m}^{-3}$ balio du eta Young-en moduluak $2 \times 10^{11} \text{ N m}^{-2}$ Lor bitez:

- a) Barran zehar hedatzen ari diren uhinen ekuazioa.
- b) Bolumen-unitateko energia.
- c) Denbora-unitateko edozein sekziotan zehar pasatzen ari den energi fluxuaren batezbesteko balioa.

a) Uhinaren ekuazioa haxe izango da:

$$\xi = \xi_0 \sin k (x - vt) .$$

Kalkula ditzagun bertako parametroak:

$$\xi_0 = 0,1 \text{ mm} = 10^{-4} \text{ m} .$$

$$v = \sqrt{\frac{Y}{\rho}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 10^{11} \text{ N m}^{-2}}{7,8 \cdot 10^3 \text{ kg m}^{-3}}} = 5 \times 10^3 \text{ m s}^{-1} ,$$

$$k = \frac{2 \pi v}{\lambda} = 4\pi \times 10^{-3} .$$

Datu hauek goiko adierazpenera eramanez:

$$\xi = 10^{-4} \sin 2 \pi \left[\frac{v}{\lambda} x - v t \right] ,$$

$$\xi = 10^{-4} \sin 2 \pi (2 \times 10^{-3} x - 10 t) .$$

b) Barra batetan zehar hedatzen ari den uhin elastiko sinusoidalaren kasuan (ikus *Fisika Orokorra II*, 16.5. atala), honela adieraziko dugu bolumen-unitateko energia:

$$E = \frac{1}{2} \rho \omega^2 \xi_0^2 ,$$

$$E = \frac{1}{2} 7,8 \cdot 10^3 (2\pi 10)^2 \cdot (10^{-4})^2 = 0,154 \pi^2 10^{-2} \text{ J m}^{-3} .$$

c) Modu berean, batezbesteko energi fluxua honelaxe adieraziko da:

$$\frac{\partial W}{\partial t} = v A E = 5 \cdot 10^3 \pi 0,002^2 \cdot 0,154 \pi^2 10^{-2}$$

$$\frac{\partial W}{\partial t} = 0,01 \text{ W} .$$

13.6. Altzairuzko hari baten diametroak 0,2 mm balio du. Hari hori 200 N-etako indar batez teinkatu da. Lor bedi harian zehar gertatzen ari diren zeharkako uhinaren hedapen-abiadura. Altzairuaren dentsitateak $7,8 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$ balio du.

Teorian ikusi dugunez (16.5), zeharkako uhinen hedapen-abiadura honela adierazten da.

$$v = \sqrt{\frac{T}{\rho}}, \text{ non } \begin{array}{l} T : \text{ hariaren tentsioa.} \\ \rho : \text{ hariaren luzera-unitateko masa.} \end{array}$$

$$\rho : \text{ metro baten masa} = (\pi r^2 l) \rho_{\text{altz}}, \quad (l = 1)$$

$$\rho = \pi (1 \cdot 10^{-4})^2 \cdot 1 \cdot 7,8 \cdot 10^3 = 7,8 \pi 10^{-5} \text{ kg m}^{-1}.$$

$$v = \sqrt{\frac{200}{7,8 \pi 10^{-5}}} = 9,3 \cdot 10^2 \text{ m s}^{-1}.$$

13.7. Barra batetan barrena gertatzen ari diren luzetarako uhin elastikoen kasuan, uhinen fase-abiadurak uhin-luzera-rekiko ondoko erlazioa du:

$$v = \frac{a}{\lambda},$$

non a parametroa konstantea den kasu konkretu bakoitzean. Lor bedi uhin-multzoaren talde-abiadura.

Maiztasun oso antzekoa duten bi uhinen konposaketaren talde-abiadura aztertzean, ondorio honetara helduko gara:

$$v_g = \frac{d\omega}{dk},$$

non v_g delakoa talde-abiadura den.

$\omega = k v$ dela kontutan harturik (v fase-abiadura),

$$v_g = v + k \frac{dv}{dk}.$$

Orokorpen batez, onartu egingo dugu formula hau bestelako kasuetarako ere. Izatez, $\omega - \Delta\omega$ eta $\omega + \Delta\omega$ tarteko maiztasunen kasurako balio du, baina arazoa nahiko korapilatsua denez, lehenengo hurbilketa batetan ontzat hartuko dugu goiko formula hori.

Bestalde, dakigunez,

$$v = \frac{\omega}{k} \quad \text{eta} \quad \lambda = \frac{2\pi}{k} .$$

Beraz,

$$v = \frac{a}{\lambda} \quad \text{denez} \rightarrow v = \frac{a k}{2\pi} ,$$

$$\frac{dv}{dk} = \frac{a}{2\pi} .$$

Hau da,

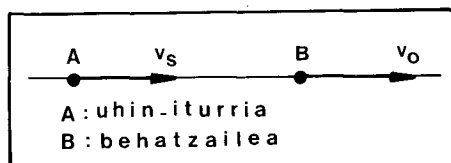
$$v_g = v + k \frac{dv}{dk} = v + \frac{a}{2\pi} k = v + v = 2v .$$

13.8. Soinu-iturri baten maiztasunak 10^3 Hz balio du eta 30 m/s -tako abiaduraz higitzen ari da airearekiko. Demagun soinuak geldi dagoen airearekiko duen abiadura, 340 m/s -takoa dela. Lor bitez, airearekiko geldi dagoen behatzaile batek neurtuko dituen maiztasuna eta uhin-luzera, ondoko bi kasuetan:

- a) Soinu-iturria berarengana hurbiltzen ari denean.
- b) Soinu-iturria berarengandik urruntzen ari denean.

Fisika Orokorra II, 17.7. ataletik dakigunez, ondoko erlazioa dago iturriak (v) bidaltzen eta behatzaileak (v') neurtuko dituzten maiztasunen artean:

$$v' = \frac{v - v_o}{v - v_s} v ,$$



non v delakoa uhinak ingurunearekiko duen hedapen-abiadura den, v_s uhin-iturriarena eta v_o behatzailearena.

a) Kasu honetan,

$$v = 340 \text{ m/s}$$

$$v_s = 30 \text{ m/s}$$

$$v_o = 0$$

$$\rightarrow v' = \frac{340 - 0}{340 - 30} 10^3 = 1097 \text{ Hz} .$$

Bestalde, $v = \lambda'v'$ denez, honelaxe kalkulatuko dugu uhin-luzera eraginkorra:

$$\lambda' = \frac{v}{v'} = \frac{340}{1\,097} = 0,31\,m \quad .$$

b) Oraingoan iturria urrunduz doa behatzailearengandik. Beraz,

$$v_s = -30\,m\,s^{-1} \quad .$$

Hots,

$$v'' = \frac{340 - 0}{340 - (-30)} \cdot 10^3 = 919\,Hz \quad .$$

Eta uhin-luzera eraginkorra ondokoa da:

$$\lambda'' = \frac{v}{v''} = \frac{340}{918} = 0,37\,m \quad .$$

ARIKETAK

- 1.- Laku bare batetan dagoen txalupa bat, uhinak sorterazen ari da uraren gainazalean. Txalupak gora-beheranzko 12 oszilazio egiten ditu 20 segundotan, oszilazio bakoitzak uhin-gailur bana sortuko duelarik. Uhin-gailurrak 6 s behar ditu 12 metrotara dagoen ertzera heltzeko. Kalkula bedi gainazaleko uhinen uhin-luzera.

Emitza: $\lambda = 3,33 \text{ m}.$

- 2.- Uhin baten ekuazioa $\xi = 10 \sin 2\pi (2x - 100 t)$ da, x metrotan eta t segundotan neurturik. Lor bitez:

- a) anplitudea,
- b) uhin-luzera,
- c) maiztasuna,
- d) uhinaren hedapen-abiadura.

Halaber, irudika bedi uhina, beraren anplitudea eta uhin-luzera adierazirik.

Emitzak: a) 10 m .
b) 0,5 m .
c) 100 Hz .
d) 50 m/s .

- 3.- a) Bozgorailu baten diametroak 30 cm balio du. Zein maiztasunetakoak izan behar dute soinu-uhinek, airetan duten uhin-luzera diametroa baino hamar aldiz handiagoa izan dadin?
b) Diametroa bezalakoa izan dadin?
c) Diametroaren hamarrena izan dadin?

Emitzak: a) 116 Hz .
b) 1166 Hz .
c) 11666 Hz .

- 4.- Ekuazio hau uhin baten adierazpena da: $\xi = 2 \sin 2\pi (0,1x - 5t)$, x luzera metrotan eta t denbora segundotan egonik. Lor bitez:

- a) Uhin-luzera.
- b) Maiztasuna.
- c) Periodoa.
- d) Hedapen-abiadura.
- e) Hedapen-norantza. Idatz bedi, halaber, kontrako norantzan hedatzen ari den eite bereko uhinaren ekuazioa.

Emitzak: a) 10 m .
b) 5 m .
c) 0,2 s .

d) 50 m/s .

e) x ardatzaren alde positiborantz,

$$x = 2 \sin 2\pi (0,1x + 5t).$$

5.- Soka batetan zehar hedatzen ari den uhinaren ekuazioa, ondokoa da:
 $\xi = 0,003 \sin (3x - 2t)$, non ξ eta x metrotan dauden eta t segundotan.

- $t = 0$ aldiunean, zein da desplazamenduaren balioa, $x = 0,1 \text{ m}$, $0,2 \text{ m}$ eta $0,3 \text{ m}$ puntuetan?
- $x = 0,1 \text{ m}$ puntuan, zein da desplazamenduaren balioa, $t = 0 \text{ s}$, $0,1 \text{ s}$ eta $0,2 \text{ s}$ aldiunetan?
- Zein da sokaren partikulen abiadura adieraziko duen ekuazioa? Zein da abiadura maximoa?
- Zein da uhinaren hedapen-abiadura?

Emaitzak:

- $8,86 \times 10^{-3} \text{ m}$, $1,69 \times 10^{-2} \text{ m}$, $2,35 \times 10^{-2} \text{ m}$.
- $8,86 \times 10^{-3} \text{ m}$, $2,99 \times 10^{-3} \text{ m}$, $- 2,99 \times 10^{-3} \text{ m}$.
- $- 0,06 \cos (3x - 2t)$; $6 \times 10^{-2} \text{ m/s}$.
- $0,667 \text{ m/s}$.

6.- x ardatzaren norabidean hedatzen ari den zeharkako uhin baten ξ desplazamenduaren bi osagaiak, hauek dira:

$$\xi_y = \xi_0 \sin (kx - \omega t) \text{ eta } \xi_z = \xi_0 \cos (kx - \omega t).$$

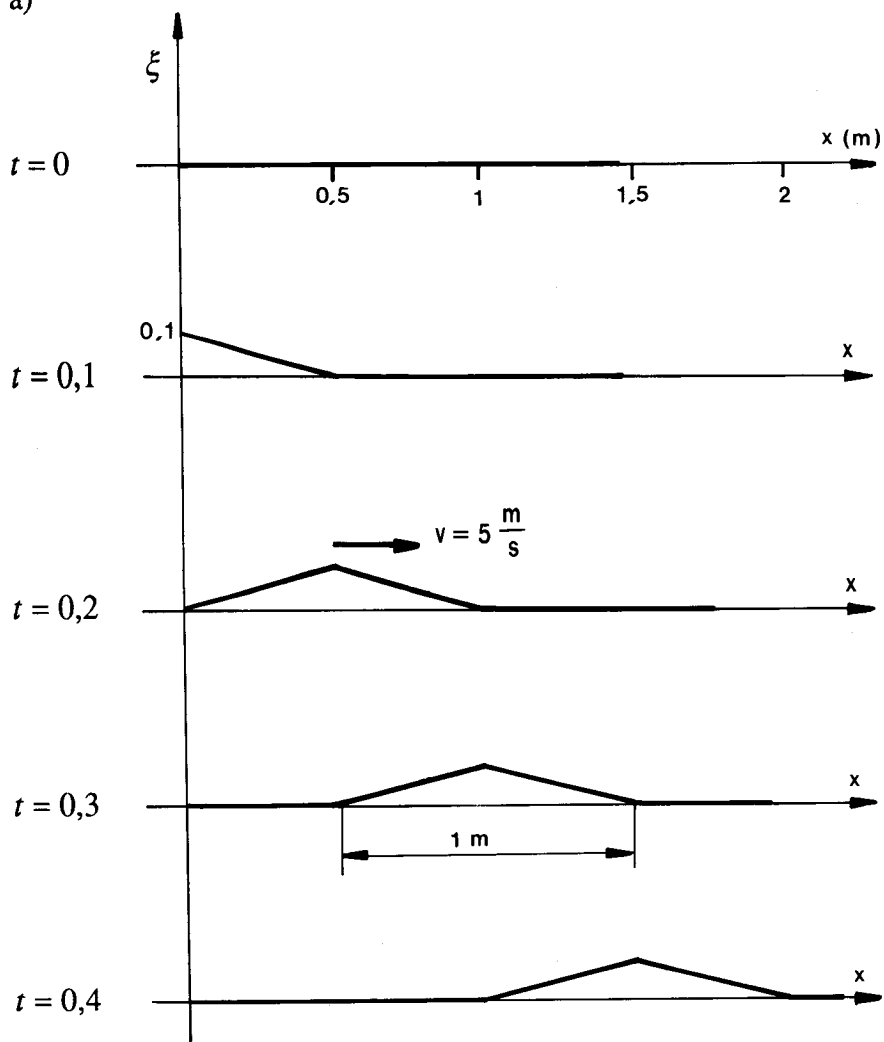
Froga bedi, ezen uhin hori zirkularki polarizaturik dagoela. Adieraz bedi ξ parametroaren biraketa-norantza, x ardatzean dagoen behatzaile baten ikuspuntutik.

7.- Teinkaturik dagoen soka baten ezkerreko muturra 1 m/s -tako abiadura uniformeaz higerazi da zeharka, beraren desplazamendua $0,1 \text{ m}$ -takoa izan arte; ondoren hasierako posizioa eraman da abiadura uniforme berberaz. Sorturiko uhin-pultsua 5 m/s -tako abiaduraz hedatu da soka zehar.

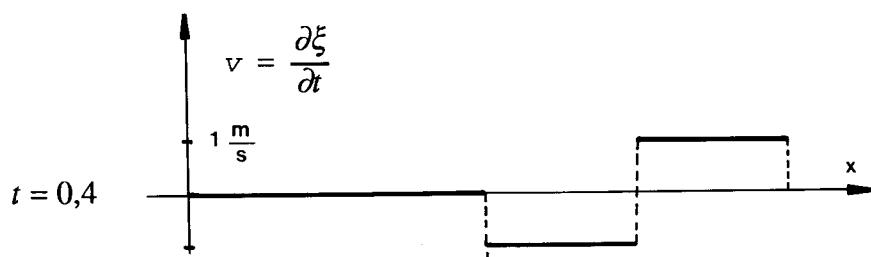
- Adieraz bedi sokaren forma $t = 0 \text{ s}$, $0,1 \text{ s}$, $0,2 \text{ s}$, $0,3 \text{ s}$ eta $0,4 \text{ s}$ aldiuneetan.
- Zein da soka uhin-pultsuak duen luzera?
- Lor bedi sokaren edozein punturen zeharkako abiadura $t = 0,4 \text{ s}$ aldiunean.

Emaizak:

a)

b) Uhin-pultsuaren luzera = 1 m .

c)



- 8.- Altzairuzko hariz eginiko pendulu baten luzerak 2 m balio du eta muturrean duen gorputzaren masak, 20 kg , hariaren diametroak 2 mm balio duelarik. Pendulu hori askatzean, beraren eta bertikalaren arteko angeluak 60° balio du. Kalkula bedi, hariaren luzerak hasierako unetik bertikaletik pasatu deneko unera duen desberdintasuna. Altzairuaren Young-en moduluak $2 \times 10^{11}\text{ N m}^{-2}$ balio du.

Eraitza: $0,31\text{ mm}$.

- 9.- Indarrrik jasan gabe, malguki baten luzerak 1 m balio du, eta beraren masak $0,2\text{ kg}$. 10 N -etako indarraren eraginpean 4 zentimetroz luzatu da. Lor bedi, malgukian zehar gertatzen ari diren luzetarako uhinen hedapen-abiadura.

Eraitza: $35,6\text{ m s}^{-1}$.

- 10.- Altzairuzko malguki baten luzera arruntak 4 m balio du eta beraren masak 200 g . Malguki hori bertikalki zintzilikatu da, 100 g -tako gorputz bat jarritz, eta modu honetan duen luzapenak 5 cm balio du. Lor bedi, malgukian zehar gertatzen ari diren luzetarako uhinen hedapen-abiadura.

Eraitza: $39,6\text{ m s}^{-1}$.

- 11.- Froga bedi, ezen *Fisika Orokorra II* liburuko 16.5. atalean aztertutako energi uhinak ondoko moduan adieraz daitezkeela:

$$\frac{\partial W}{\partial t} = v S \rho \omega^2 \xi_0^2 \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2(kx - \omega t) \right].$$

Ekuazio honetatik zuzenki atera daiteke batezbesteko balioa.

Modu berean, froga bedi, ezen energi uhinaren maiztasuna desplazamenduen uhinarena baino bi aldiz handiagoa dela eta, oster, beraren uhin-luzera desplazamenduaren uhinarena baino bi aldiz txikiagoa. Grafiko baten bidez adieraz bedi $\partial W / \partial t$ aldiune batetan.

Eraitza: Zuzenki lortuko da, ondoko baliokidetasuna erabiliz: $\cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1$.

- 12.- Nola aldatuko da zeharkako uhin baten hedapen-abiadura soka batetan zehar,
- sokaren tentsioa bikoiztean?
 - tentsioa erdira beheratzean?

- c) Nola aldatu behar da sokaren tentsioa, hedapen-abiadura bi aldiz handiagoa izan dadin?
 d) Eta bi aldiz txikiagoa izan dadin?

Emaitzak: a) $\sqrt{2}$ aldiz handiagoa.

b) $\sqrt{2}$ aldiz txikiagoa.

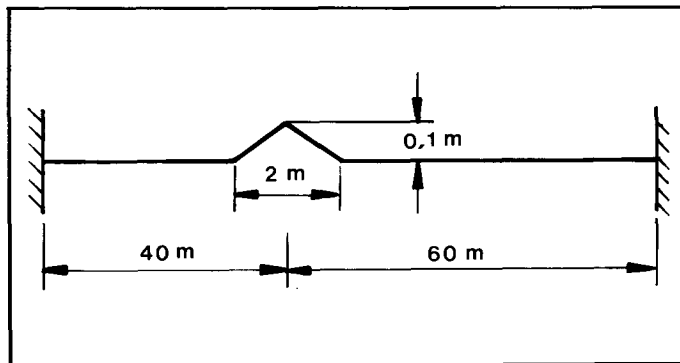
c) 4 aldiz handiagotu behar da.

d) 4 aldiz txikiagotu behar da.

- 13.- 2 metrotako luzera eta 4 g-tako masa dituen soka bat, horizontalki mantendu da, mutur bat finko edukirik eta bestetik 2 kg-tako masa bati eutsirik. Lor bedi zeharkako uhinen hedapen-abiadura.

Emaitza: 99 m s^{-1} .

- 14.- Alboko irudian, $t = 0$ aldiunean 100 m luze den soka baten ξ deformazioa adierazi da. Sokaren masa 2 kg-takoa da. Uhina eskuinetarantz eta 40 m/s-tako abiaduraz hedatzen ari dela neurtu da.



- a) Adieraz bedi beraren zeharkako abiadura, u , $t = 0$ aldiunean, eta lor bedi abiadura horren balio maximoa.
 b) Lor bedi sokaren tentsioa.
 c) Idatz bedi, 5 m -tako uhin-luzeraz eta 0,2 m-tako anplitudeaz ezkerretarantz hedatzen ari diren uhin sinusoidalen ekuazioa, $\xi(x, t)$, aurreko sokaren ezaugarri berberak edukirik, mugagabea den soka batetan zehar gertatzean.

Emaitzak: a) 4 m/s .

b) 32 N .

$$c) \xi = 0,2 \sin \left[\frac{2\pi}{5} x + 16\pi t + \varphi \right] .$$

15.- Gomazko hodi baten mutur bat finko dago eta bestea, mutur finko horretatik 5 metrotara dagoen txirrika batetik pasa ondoren, 2 kg-tako karga bati eusten ari zaio. Txirrikaren eta mutur finkoaren arteko hodiaren masa 0,6 kg-takoa da.

- a) Lor bedi hodian gertatzen ari diren zeharkako uhinen hedapen-abiadura.
- b) Hodian zehar 0,1 cm-tako anplitudea eta 0,3 m-tako uhin-luzera dituen uhin harmoniko bat hedatzean lor bedi, hodiaren edozein puntutan dagoen zeharkako abiadura maximoa.
- c) Idatz bedi uhin horren ekuazioa.

Emaitzak: a) $12,8 \text{ m/s}$.

b) $0,268 \text{ m/s}$.

$$c) \xi = 10^{-3} \sin 2 \pi (0,3 x - 43 t) .$$

16.- Altzairuzko hari baten luzerak 2 m balio du eta beraren erradioak 0,5 mm . Hari hau sabaitik zintzilikatu da.

- a) 100 kg-tako gorputz bat eskegitzen bada, zein izango da hariaren luzapena?
- b) Lor bitez harian barrena gertatzen ari diren luzetarako uhinen eta zeharkako uhinen abiadurak, aipaturiko karga eskegita dagoenean.

Young-en modulua: $2 \cdot 10^{11} \text{ N m}^{-2}$; dentsitatea: $7,8 \cdot 10^3 \text{ kg m}^{-3}$.

Emaitzak: a) $1,25 \cdot 10^{-2} \text{ m}$.

b) $5,06 \cdot 10^3 \text{ m/s}$.

$$1,28 \cdot 10^5 \text{ m/s} .$$

17.- L luzera eta m masa dituen soka bat, muturretatik teinkaturik dago T tentsioaz. Bere zentruan h distantziaz bultzatu da albora, gero aske utzi da.

- a) Zein da hurrengo oszilazioen energia?
- b) Zein maiztasunez berragertuko da forma?

Emaitzak: a) $\frac{2 T h^2}{L}$.
 b) $\left[\frac{2 m L}{T} \right]^{1/2}$.

- 18.- Lor bedi, soka batetan barrena gertatzen ari den zeharkako uhin baten energi fluxua eta froga bedi ezen batezbesteko potentzia

$$v \left(\frac{1}{2} m \omega^2 \xi_o^2 \right)$$

dela, m delakoa luzera-unitateko masa izanik. Parentesi arteko kantitatea luzera-unitateko energiaren adierazpena da.

Oharra: Kontutan eduki, zeharkako indarra ondoko hau dela:

$$T \sin \alpha \approx T \frac{\partial \xi}{\partial x} .$$

Honela denbora-unitatean eginiko lana azter daiteke.

- 19.- 20 m -tako luzera eta 0,06 kg -tako masa dituen soka bat, 50 N -etako tentsiopean dago. Soka barrena, ezkerretik eskuinera, 200 Hz -etako maiztasuna eta 1 cm -tako anplitudea duten uhinak higitzen dira.

- a) Zein da sokako uhinen energia osoa?
 b) Zein da sokaren puntu batetatik transmititzen ari den batezbesteko potentzia?

Emaitzak: a) 4,74 J .

b) 29,8 W .

- 20.- Lor bedi hurrengo uhinen talde-abiadura (v_g), fase-abiadurak uhin-luzerarekiko ondoko erlazioa badu:

- a) Ur sakonetako olatua,

$$v = A \lambda^{1/2} , \quad \text{non } A = \text{ktea den.}$$

- b) Likido batetako gainazal-uhinak,

$$v = A \lambda^{-1/2} .$$

Emaitzak: a) $\frac{1}{2} v$.

b) $\frac{3}{2} v$.

- 21.- Soinu-uhinak airean hedatzean, ondoko erlazioa dago ω eta k parametroen artean:

$$\omega = \sqrt{\frac{\gamma R T}{M}} k \quad (\gamma, R, T, M, \text{ konstanteak}).$$

Lor bitez fase-abiadura eta talde-abiadura.
Uhin dispertsiboak ote dira?

Emaitza: $v_g = v = \sqrt{\frac{\gamma R T}{M}}$.

Ez da dispertsiorik agertzen.

- 22.- Soinu-iturri baten maiztasunak 10^3 Hz balio du. Soinu-iturri hori geldi dago, airea ere geldi dagoelarik. Soinuaren abiadura 340 m/s -takoa dela kontsideratu da. Behatzaile bat 30 m/s -tako abiaduraz higitzen ari da. Zenbat balio dute, behatzaile honek neurtuko dituen uhinen maiztasunak eta uhin-luzera eraginkorrek?

a) Iturrira hurbiltzen ari denean.

b) Iturritik urruntzen ari denean.

Oharra: Konpara itzazue emaitzak, 13.8. probleman lortutakoekin.

Emaitzak: a) 1.088 Hz .

b) 911 Hz .

- 23.- Tren baten txilibituaren tonua 500 Hz -etakoa da. Lor bedi, geltokian dagoen pertsona batek entzungo duen soinuaren maiztasuna, tren hori 72 km/h -tako abiaduraz higitzen ari bada,

a) hurbilduz.

b) urrunduz.

Oharra: Soinuaren abiadurak 340 m/s balio du.

Emaitzak: a) 531 Hz .

b) 472 Hz .

24.- Tren bat, airea bare dagoela, 30 m/s-tako abiaduraz higitzen ari da. Makinak jotako txilibituaren soinuaren maiztasunak 500 Hz balio du. Zein izango litzateke geltokian geldi dagoen behatzaileak neurtuko lukeen soinuaren maiztasuna?

a) Makinaren aurrean egonda.

b) Makinaren atzean egonda.

Zein maiztasun neurtuko luke, 15 m/s -tako abiaduraz higitzen ari den beste tren batetan doan bidaiariak,

c) lehenengo trenera hurbiltzen baletor?

d) lehenengo trenetik urrunduz balihoa?

e) Nola aldatuko lirateke aurreko erantzunak, lehenengo trenak higitzen ari deneko norantza berean 9 m/s-tako haizea balebil?

Soinuaren abiaduraren balioztat 330 m/s hartuko dugu.

Emaitzak: a) 550 Hz .

b) 458 Hz .

c) 575 Hz .

d) 437,5 Hz .

e) 548; 457; 573; 436 .

14. GAIA

INTERAKZIO GRABITORIOA

14.1. Azter bedi, edozein partikularen pisua nola aldatuko litzatekeen baldin eta:

- a) Lurraren erradioa bikoiztuko balitz, masa konstante mantendurik.
- b) Lurraren masa bikoiztuko balitz, erradioa konstante mantendurik.
- c) Denbora berean Lurraren masa eta erradioa bikoiztuko balira.

Lehenik, ikus dezagun edozein partikularen pisuaren eta Lurraren masa eta erradioaren arteko erlazioa:

$$P = m g = m \gamma \frac{M}{R^2} = K \frac{M}{R^2} ,$$

non M , R eta γ gure planetaren masa eta erradioa eta grabitazioaren konstante unibertsala diren. Hau ikusita, zuzenki ebatz dezakegu problema:

a) $M = ktea$ eta $R \rightarrow 2R$,

$$\frac{P'}{P} = \frac{K \frac{M}{(2R)^2}}{K \frac{M}{R^2}} = \frac{1}{4} \quad P' = \frac{P}{4} .$$

b) $R = ktea$ eta $M \rightarrow 2M$,

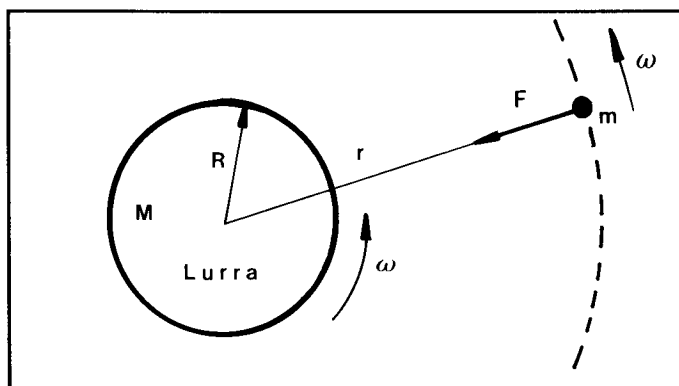
$$\frac{P'}{P} = \frac{K \frac{2M}{R^2}}{K \frac{M}{R^2}} = 2 \quad P' = 2P .$$

c) $M \rightarrow 2M$, eta $R \rightarrow 2R$ eginez,

$$\frac{P'}{P} = \frac{K \frac{2M}{(2R)^2}}{K \frac{M}{R^2}} = \frac{1}{2} \quad P' = \frac{P}{2} .$$

14.2. Telekomunikabideetako satellite artifizial bat Lurraren inguruko orbita zirkularrean ekuatore gainean jarri nahi da. Zein izan beharko du orbitaren erradioak?

Era honetako satelliteak bere zeregina bete dezan, Lurrarekiko duen jarrera erlatiboak finkoa izan behar du, argiro. Beste hitzez esanik, satelliteak Lurraren abiadura angeluar berberaz bira egin beharko du.



Honelatan:

$$a = \omega^2 r$$

$$F = m a \rightarrow \gamma \frac{mM}{r^2} = m\omega^2 r .$$

$$F = \gamma \frac{mM}{r^2}$$

$$r = \sqrt[3]{\gamma \frac{M}{\omega^2}} =$$

$$= \sqrt[3]{6,67 \cdot 10^{-11} \frac{5,98 \cdot 10^{24}}{(7,27 \cdot 10^{-5})^2}} = 42,25 \cdot 10^6 \text{ m} .$$

14.3. Irudiko partikulak pausagunetik askatu dira, beren arteko distantzia r_0 izanik, eta interakzio grabitatorioaren ondorioz elkarren artean hurbilduz doazelarik.

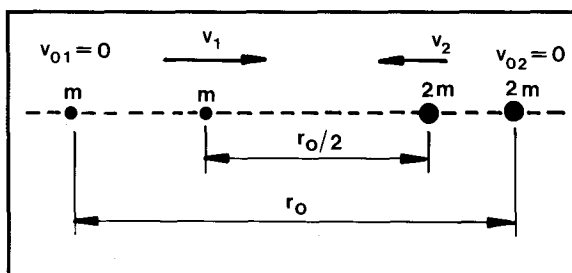
Kalkula bitez:

a) Bakoitzaren abiadura, beraien arteko distantziak $r_0/2$ balio duen unean.

b) Hasierako puntutik aipaturiko unerarte bakoitzak egindako bidea.

a) Partikulek sistema isolatu bat osotzen ari direnez gero, momentu linealaren kontserbazioaren printzipioa aplikatu dezakegu, hau da,

$$0 = m v_1 + 2m v_2 , \quad v_1 = -2 v_2 .$$



Bestaldetik, higiduraren kausa beraien arteko interakzio grabitatorioa denez, interakzio hori kontserbakorra delarik, energia mekanikoaren kontserbazioa ere aplikatu dezakegu, hots:

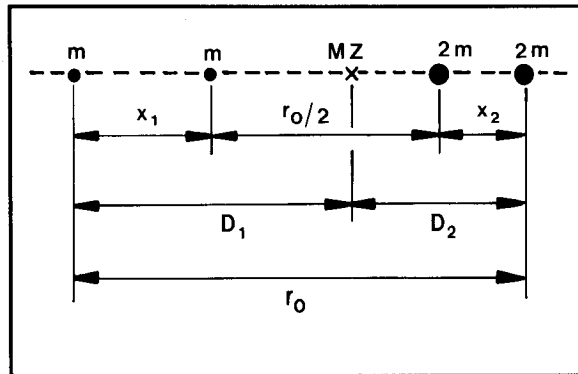
$$E_{p_{12}}(r_0) = E_{k_1} + E_{k_2} + E_{p_{12}}\left(\frac{r_0}{2}\right) ,$$

$$-\gamma \frac{m \cdot 2m}{r_0} = \frac{1}{2} m v_1^2 + \frac{1}{2} 2m v_2^2 - \gamma \frac{m \cdot 2m}{\frac{r_0}{2}} .$$

Ekuazio-sistema ebatziz, ondoko emaitzak ditugu:

$$v_1 = 2 \sqrt{\frac{2 \gamma m}{3 r_0}} , \quad v_2 = \sqrt{\frac{2 \gamma m}{3 r_0}} .$$

- b) Bi partikulek osoturiko sistema isolatuaren momentu lineala nulua denez, masa-zentruaren jarrerak finko iraun behar du. Beraz:



$$m D_1 = 2m D_2$$

Lehenengo unean.

$$D_1 + D_2 = r_0$$

$$m (D_1 - x_1) = 2m (D_2 - x_2)$$

Bigarren unean.

$$x_1 + x_2 = \frac{r_0}{2}$$

Planteaturiko lau ekuaziotako sistematik haxe atera dezakegu zuzenki:

$$x_1 = \frac{r_0}{3} ,$$

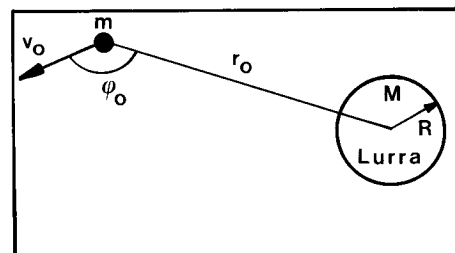
$$x_2 = \frac{r_0}{6} .$$

12.4. Satellite artifizial batek Lurraren inguruko orbita eliptikoa deskribatzen ari da. Une batetan, beraren higidurari buruzko datu hauek ezagunak ditugu:

$$r_0 = 2,4 R ,$$

$$v_0 = \sqrt{\frac{g R}{2,4}} ,$$

$$\varphi_0 = 120^\circ .$$



Lor bitez:

a) Satelitearen abiadura handiena eta abiadura txikiena.

b) Orbitaren exzentrikotasuna.

a) Lurrak sorturiko indar grabitatorioa zentral eta kontserbakorra denez, sateliteen higiduran nahiz momentu angeluarrak nahiz energia mekanikoak konstante diraute, hau da:

$$\mathbf{L}_0 = \mathbf{L} \rightarrow \mathbf{r}_0 \wedge m \mathbf{v}_0 = \mathbf{r} \wedge m \mathbf{v} \rightarrow \mathbf{r}_0 \wedge \mathbf{v}_0 = \mathbf{r} \wedge \mathbf{v} , \text{ (I)}$$

$$\begin{aligned} E_{k0} + E_p(r_0) &= E_k + E_p(r) \rightarrow \frac{1}{2} m v_0^2 - \gamma \frac{mM}{r_0} = \\ &= \frac{1}{2} m v^2 - \gamma \frac{mM}{r} , \text{ (II)} \end{aligned}$$

non $\mathbf{r}$, Lurraren zentruarekiko satelitearen posizio-bektorea, eta $\mathbf{v}$, satelitearen abiadura diren, edozein unetan.

Bestaldetik, satelitearen abiadura handiena eta txikiena, Lurraren zentruarekiko hurbilen eta urrunen dauden puntuei dagokie, hurrenez hurren, orbita eliptikoaren erpinei alegia; eta erpinetan, hain zuzen ere, abiadura eta posizio-bektorea elkarren perpendikularrak direnez, beren arteko biderkadura bektorialaren modulua, beraien moduluen arteko biderkadura besterik ez da. Hau guztiau kontutan harturik, (I) ekuazioak ondoko adierazpena izango du:

$$r_0 v_0 \sin \varphi_0 = r v . \quad \text{ (I)}$$

Ondoren, bai (I) ekuazioan eta bai (II)-an ere sartuko ditugu enuntziatuan emandako datuak:

$$2,4 R \sqrt{\frac{gR}{2,4}} \frac{\sqrt{3}}{2} = r v , \quad \text{ (I)}$$

$$\frac{1}{2} m \frac{gR}{2,4} - \gamma \frac{mM}{2,4R} = \frac{1}{2} m v^2 - \gamma \frac{mM}{r} , \quad \text{ (II)}$$

$$\text{ (I)} \quad r = \frac{R}{v} \sqrt{1,8 g R} ,$$

$$(II) \quad -\frac{gR}{4,8} = \frac{v^2}{2} - \frac{gR^2}{r} \quad . \quad (\gamma M = gR^2 \text{ bait da})$$

Bi ekuazio horietatik,

$$v^2 - \sqrt{\frac{2gR}{0,9}} v + \frac{gR}{2,4} = 0 \quad .$$

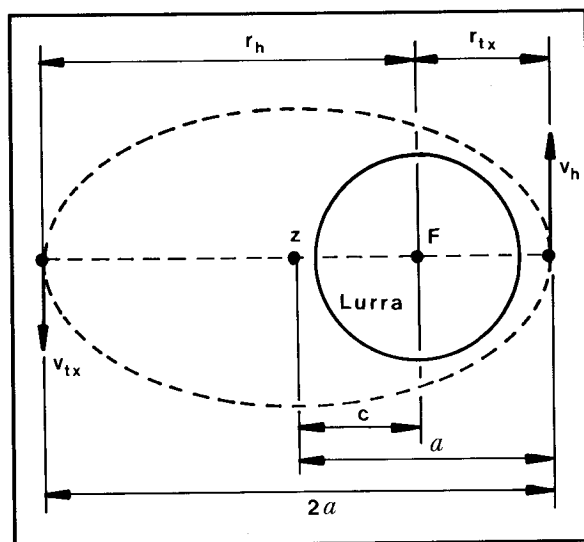
Hortik, abiadura handiena eta txikiena lor ditzakegu:

$$v_h = \sqrt{\frac{gR}{0,8}} \quad , \quad v_{tx} = \sqrt{\frac{gR}{7,2}} \quad .$$

b) Ekuazio-sistema berberetik, Lurraren zentruarekiko distantzia txikiena eta handiena hauek izango dira:

$$r_{tx} = \frac{R}{v_h} \sqrt{1,8 gR} = 1,2 R \quad ,$$

$$r_h = \frac{R}{v_{tx}} \sqrt{1,8 gR} = 3,6 R \quad .$$



Hemendik erraz lor dezakegu orbitaren exzentrikotasuna (ikus irudia):

$$e = \frac{c}{a} = \frac{a - r_{tx}}{\frac{r_{tx} + r_h}{2}} = 2 \frac{\frac{r_{tx} + r_h}{2} - r_{tx}}{r_{tx} + r_h} =$$

$$= \frac{r_h - r_{tx}}{r_h + r_{tx}} = 0,5$$

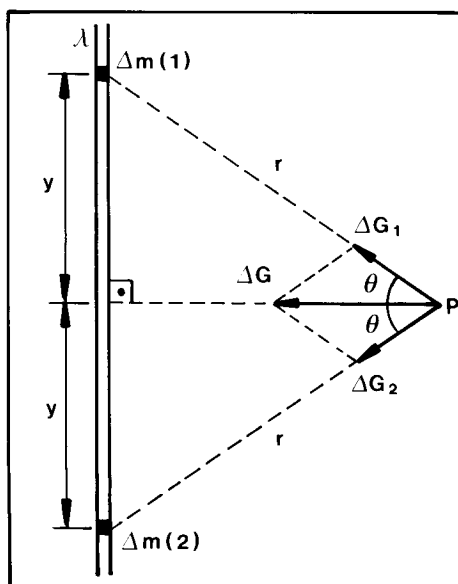
14.5. I. Demagun λ dentsitate lineala duen etengabeko hari zuzena:

- a) Gauss-en teoremaz baliatuz, aurki bedi espazioko edozein puntutan hariak sorturiko eremu grabitatorioa.
- b) Aurkitutako eremuaren bidez, lor bedi berari dagokion potentzial grabitatorioa.

II. Aipaturiko hariaren inguruan, m masa duen partikula bat ibilbide zirkularra deskribatzen ari da. Zirkunferentziaren planoari hariaren perpendikularra da, beraren zentrua hariaren puntu bat delarik.

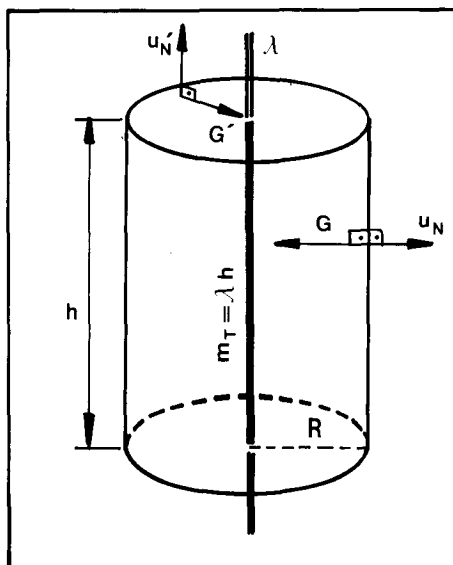
- c) Erdiets bedi partikularen abiadura.
- d) Zenbateko lana egin behar da zirkunferentziaren erradioa bikoizteko?

I.a) Ezer baino lehen, arrazonamendu sinple batez eremuak duen norabidea ikertuko dugu. Honetarako, irudiari begiratu, har dezagun hariaren $\Delta m(1)$ eta $\Delta m(2)$ bezalako zati elementalen bikote bat. Elementu hauek P punturainoko distantziak berdinak direnez, $\Delta G_1 = \Delta G_2$ izango dugu, eta, beraz, bektore hauen hariaren paraleloak diren osagaiek anulatu egingo dute elkar, bektoreon erresultantea hariaren perpendikularra geratzen zaigularik. Hariaren elementuak bikoteka harturik eta aurreko kontsiderazioak errepikatuz, eremuaren norabidea hariaren perpendikularra dela baieztatu dezakegu argiro.



Bestaldetik, haria etengabekoa izanik, edozein puntutako eremuaren balioa, puntutik harirako distantziaren funtzioa izango da, irudiaren distantzia adierazgarri hau baino ez bait dago.

Hau ikusita, goazen Gauss-en teorema aplikatzera. Kotsidera dezagun irudiko zilindroa eta kalkula dezagun bera zeharkatuko duen fluxua. Ez gara zilindroaren oinarriez kezkatuko, berauetan eremua eta gainazalaren bektore unitario normala elkarren perpendikularrak bait dira. Zilindroaren alde-azalean, berriz, aipaturiko bektoreek osotutako angelua 180° -takoa denez gero, hauxe dugu:



$$\int \mathbf{G} \cdot \mathbf{u}_N dS = \int |\mathbf{G}| \cos 180^\circ dS = -|\mathbf{G}| \cdot 2\pi R h.$$

Gauss-en teoremaren arauera:

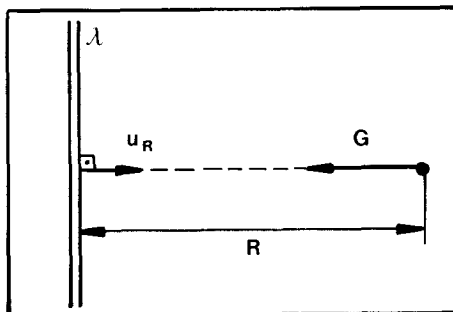
$$\Phi = -4\pi\gamma m_T \rightarrow -|\mathbf{G}| 2\pi R h = -4\pi\gamma \lambda h,$$

$$|\mathbf{G}| = -2\gamma \frac{\lambda}{R}.$$

Eta bektorialki adierazita:

$$\mathbf{G} = -2\gamma \frac{\lambda}{R} \mathbf{u}_R,$$

$\mathbf{u}_R$, haritik eta beronen perpendikularra den espazioko edozein puntutarantz orientaturiko bektore unitarioa delarik (ikus irudia).



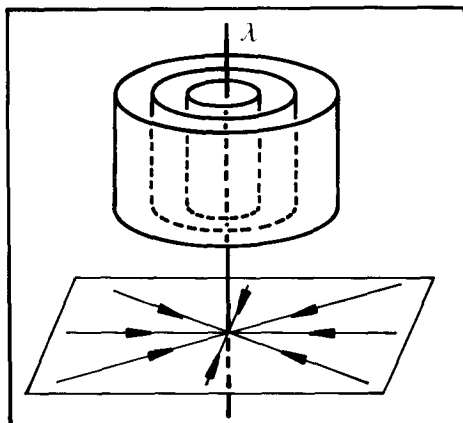
b) Eremuaren eta potentzialaren arteko erlazioa erabiliz:

$$\mathbf{G} = -\text{grad } V \rightarrow -2\gamma \frac{\lambda}{R} \mathbf{u}_R = -\frac{dV}{dR} \mathbf{u}_R.$$

$$\int dV = 2\gamma\lambda \int \frac{dR}{R} \rightarrow V = 2\gamma\lambda \ln R + k .$$

($R = 0$ denean, potentzialari zero balioa emanik, $k = 0$ da)

Alboko irudian eremuaren zenbait lerro eta bai gainazal ekipotentzial batzu ere marraztu dira. Lehenengoak haria perpendikularki ebakitzen duten zuzenak dira eta bigarrenak, haria beren ardatz gisa duten zilindroak.

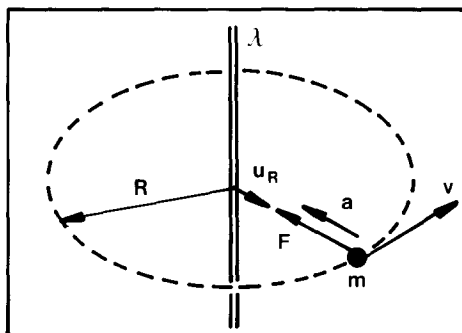


II.c) Partikularen gaineko indar grabitatorioa ondokoa izango da:

$$\mathbf{F} = m \mathbf{G} = -2\gamma \frac{\gamma m}{R} \mathbf{u}_R .$$

Indarra ibilbidearen perpendikularra denez, azelerazio zentripetua besterik ez du sortuko, hau da,

$$\mathbf{a} = -\frac{v^2}{R} \mathbf{u}_R .$$



Beraz:

$$\mathbf{F} = m \mathbf{a} \rightarrow -2\gamma \frac{\lambda m}{R} \mathbf{u}_R = -m \frac{v^2}{R} \mathbf{u}_R ,$$

$$v = \sqrt{2\gamma\lambda m} .$$

II. d) Aurreko atalean ikusi dugunez, partikularen abiaduraren eta zirkunferentziaren erradioaren artean ez dago inolako harremanik; hau dela eta, lehenengo orbitatik bigarrenera pasatzeko, ez dugu partikularen energia zinetikoa aldatu behar. Ikus dezagun, bada, orbita bakoitzean sistemak duen energia potentziala:

Lehenengo orbitan : $E_p = m V(R) = m [2\gamma\lambda (\ln R) + k]$,

Bigarren orbitan : $E'_p = m V(2R) = m [2\gamma\lambda (\ln 2R) + k]$.

Beraz, egin beharko den lana, hauxe izango da:

$$W = E'_p - E_p = 2\gamma\lambda m \ln 2.$$

14.6. I. Kontsidera bedi oso estua den eta σ gainazal-dentsitatea duen xafla bat, hots, geometrian plano deiturikoa, baina masaduna. Gauss-en teorema erabiliz, aurki bitez xaflak sorturiko eremu eta potentzial grabitatorioa.

II. Aipaturiko xaflatik a distantziara partikula bat askatu da pausagunetik.

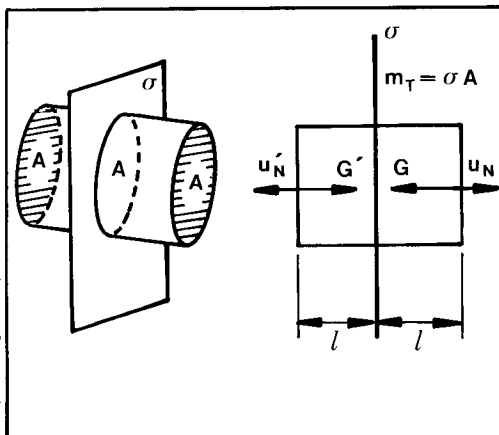
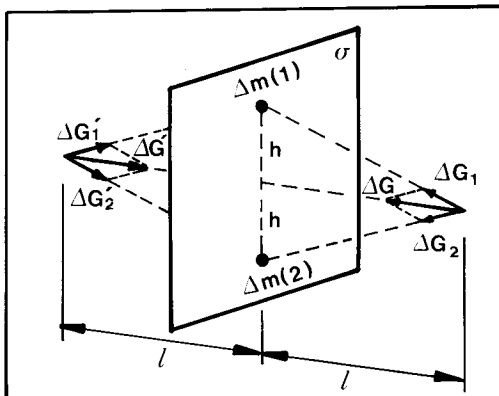
a) Lor bedi partikularen abiadura, xaflarekin talka egingo duen unean.

b) Xaflarekiko talkaren ondorioz, heltzean zuen abiaduraren erdiaz errebotatu du partikulak. Xaflatik zein distantziataraino urrunduko da?

Aurreko probleman agerturiko arrazonamendu berberari jarraituz, eremuaren norabidea xaflaren perpendikularra dela dakusagu erraz. Horrez gainera, xaflaren alde bietan eta berauetatik distantzia berberera, eremuak balio edo modulu berbera eta alderantzizko norantza izan behar dituela uler daiteke argiro (ikus irudia).

Aldez aurreko kontsiderazio hauek eginik, goazen orain Gauss-en teorema aplikatzera. Honetarako imajina dezagun bigarren irudiko zilindroa. Zilindroaren sortzaileak xaflaren perpendikularrak dira, eta oinarriak xaflatik distantzia berberera kokatuta daude.

Zilindroan zeharkako fluxua kalkulatzean, ez gara aldeetako azalaz arduratuko, zeren bertako eremua eta azalaren bektore unitario normala elkarren perpendikularrak bait dira.



Beraz, oinarriak zeharkatzen ari den fluxua baino ez dugu kalkulatu behar, hau da:

$$\begin{aligned}\Phi &= \int_A \mathbf{G} \cdot \mathbf{u}_N dS + \int_A \mathbf{G}' \cdot \mathbf{u}_{N'} dS = \int_A |\mathbf{G}| \cos 180^\circ dS \\ &+ \int_A |\mathbf{G}'| \cos 180^\circ dS = -|\mathbf{G}| A - |\mathbf{G}'| A = \\ &= -A (|\mathbf{G}| + |\mathbf{G}'|) .\end{aligned}$$

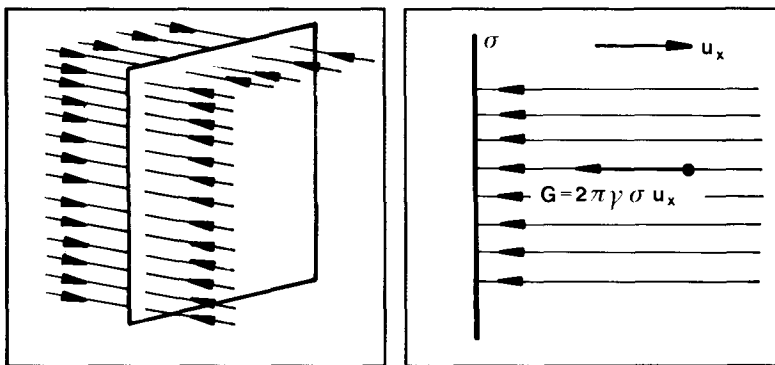
Bestaldetik, $|\mathbf{G}| = |\mathbf{G}'|$ dela kontutan harturik (gogora bedi oinarriak xaflarekiko distantzia berberera daudela kokatuta), ondokoa dugu:

$$\Phi = -2A |\mathbf{G}| .$$

Gauss-en teorema honako hau dio:

$$\Phi = -4\pi\gamma m_T \rightarrow -2A |\mathbf{G}| = -4\pi\gamma\sigma A \rightarrow |\mathbf{G}| = 2\pi\gamma\sigma .$$

Harrigarria badirudi ere, eremuaren balioak ez du xaflarako distantziarekiko menpekotasunik. Hala ere, ezin dugu esan, espazio osoan eremua uniformea denik, xaflaren alde batean eta bestean beraren norantza aldatzen bait da, irudian dauden eremu-lerroek ageri duten bezala.



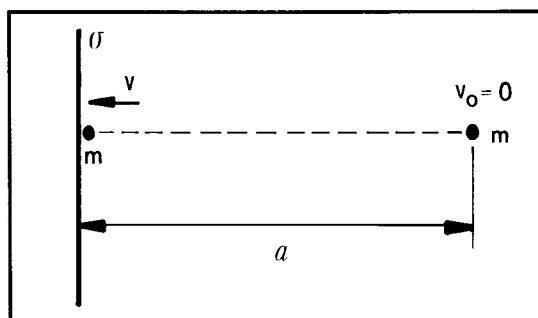
Xaflarekiko eremuak duen simetria ikusirik, alde batean soilik, eskuinekoan esate baterako, kalkulatu dugu potentziala, beste aldean simetrikoa izango da eta.

Eremu eta potentzialaren arteko erlazioaren bidez:

$$\mathbf{G} = -\mathbf{grad} V ; -2\pi\gamma\sigma \mathbf{u}_x = -\frac{dV}{dx} \mathbf{u}_x ,$$

$$\int dV = 2\pi\gamma\sigma \int dx ; V = 2\pi\gamma\sigma x + k .$$

II.a) Partikularen gainean xaflak eraginiko indarra, indar grabitatorioa alegia, kontserbakorra denez, energia mekanikoaren kontserbazioa erabil dezakegu. Honelatan:



$$E_{K0} + E_p(x=a) = E_K + E_p(x=0) ,$$

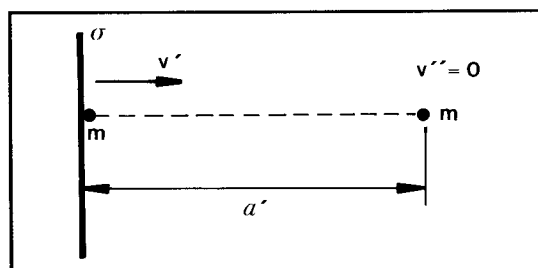
$$m(2\pi\gamma\sigma a + k) = \frac{1}{2}mv^2 + mk ,$$

$$v = 2\sqrt{\pi\gamma\sigma a} .$$

II.b) Talka ondoko abiadura, enuntziatuaren arauera, hauxe izango da:

$$v' = \frac{v}{2} = \sqrt{\pi\gamma\sigma a} .$$

Energia mekanikoaren kontserbazioa berrerabiliz:

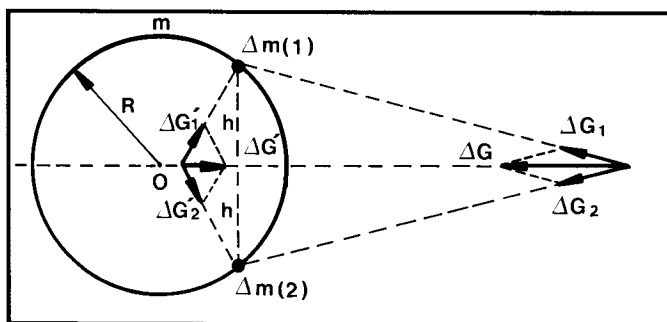


$$E'_K + E_p(x=0) = E''_K + E_p(x=a') ,$$

$$\frac{1}{2} m \pi \gamma \sigma a + mk = m (2\pi \gamma \sigma a' + k) \rightarrow a' = \frac{a}{4} .$$

14.7. Gauss-en teorema dela medio, aurki bitez esfera homogeno huts batek (oso geruza esferiko estu batek, ping-pong-eko pilotaren batek, adibidez) sorturiko eremu eta potentzial grabitatorioa, nahiz esferaren kanpoko nahiz barneko puntuetan.

Bira m eta R esferaren masa eta erradioa. Alboko irudiari begirada bat emanez, eta aurreko bi problemetan egindako simetriazko kontsiderazioak gogoratuz, bai kanpo-eremuak eta bai barne-eremuak norabide erradiala dutela uler dezakegu erraz. Edozein puntutako eremuaren balioari dagokionez, esferaren zentzurako distantziaren funtzioa besterik ez dela onartuko dugu, hau baino beste distantzia adierazgarririk ez bait da:

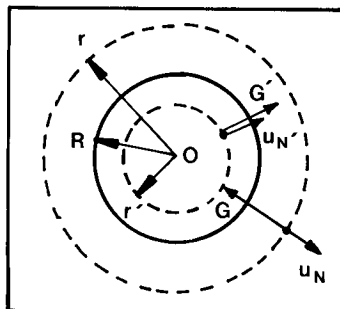


Ondoren imajina ditzagun esfera masadunarekiko zentrukideak diren bi esfera, bata $r > R$ erradioduna eta bestea $r' < R$ erradioduna. Kalkula dezagun berauetariko bakoitzea zeharkatuko duen fluxua.

Lehenengoan zehar:

$$\Phi = \int \mathbf{G} \cdot \mathbf{u}_N dS = - \int |\mathbf{G}| dS .$$

Bestaldetik, esfera honen puntu guztiak O puntuarekiko distantzia berberera daudenez, $|\mathbf{G}|$ delakoak balio berbera izan beharko du gainazal osoan. Beraz,



$$\Phi = -|\mathbf{G}| \int dS = -4\pi r^2 |\mathbf{G}| .$$

Era berean eginez, hauxe izango da bigarren esferan zeharreko fluxua:

$$\Phi' = 4\pi r'^2 |\mathbf{G}'| .$$

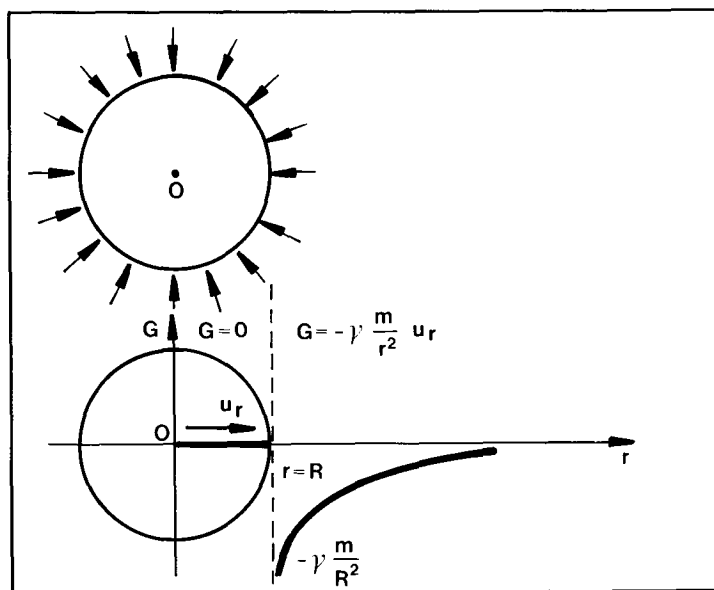
Kasu honetan $\mathbf{u}_N$ eta $\mathbf{G}'$ bektoreek osoturiko angelua ez da 180° -takoa, 0° -takoa baizik; hortik dator zeinuaren aldaketa.

Orain, Gauss-en teorema aplikatuko dugu:

$$-4\pi r^2 |\mathbf{G}| = -4\pi\gamma m \rightarrow |\mathbf{G}| = \gamma \frac{m}{r^2} .$$

$$4\pi r'^2 |\mathbf{G}'| = 0 \rightarrow |\mathbf{G}'| = 0 .$$

r erradiodun esferak R erradiodunaren masa osoa dauka bere barnean; r' erradiodunak, osteraz, bere barnean ez dauka masarik.



Hitz laburrez,

$$\left. \begin{array}{l} r < R \\ \text{edo esferaren barnean} \end{array} \right\} G = 0 .$$

$$\left. \begin{array}{l} r > R \\ \text{edo esferaren kanpoan} \end{array} \right\} \mathbf{G} = -\gamma \frac{m}{r^2} \mathbf{u}_r .$$

$\mathbf{u}_r$ delakoa, O puntutik espazioko edozein puntutarantz orientaturiko bektore unitarioa izanik (bektore unitario erradiala). Aurreko irudian eremuaren lerroak erakusten dira, eta bai eremuaren aldakuntzaren lege grafikoa ere.

Bigarren urratsa, hots, potentzialaren lorpena, aurreko bi problemetan ere erabili dugun erlazioaren bidez ebartziko dugu, hau da:

$$\mathbf{G} = -\text{grad } V$$

$$r < R : 0 = -\text{grad } V \rightarrow V = \text{cte} .$$

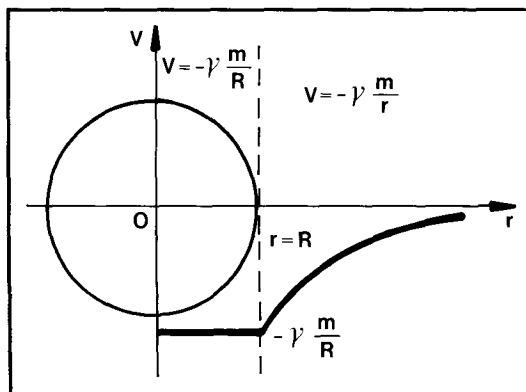
$$r > R : -\gamma \frac{m}{r^2} \mathbf{u}_r = -\frac{dV}{dr} \mathbf{u}_r \longrightarrow$$

$$V = -\gamma \frac{m}{r} + k .$$

Inolako beharrianik ez bada ere, egin ohi den suposizioa egingo dugu, hau da, esferatik distantzia infinitura, potentziala nulua dela suposatuko dugu. Honelatan, ba:

$$r \rightarrow \infty : 0 = -\frac{m}{\infty} + k \rightarrow k = 0 .$$

Azkenean, esferaren barneko eta kanpoko puntuei dagokien potentzialaren adierazpena, hauxe da:



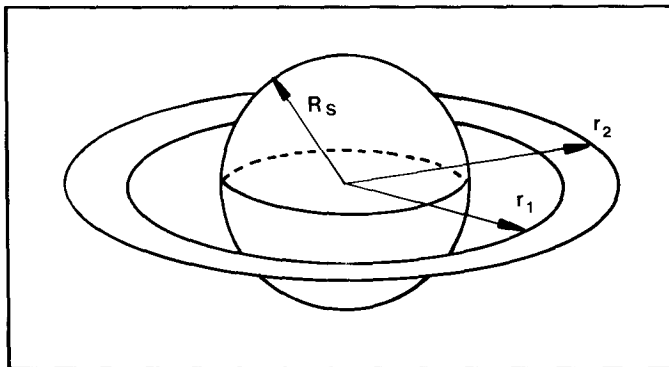
$$\left. \begin{array}{l} r < R \\ \text{edo barneko puntuetan} \end{array} \right\} V = -\gamma \frac{m}{R} (= \text{ktea})$$

$$\left. \begin{array}{l} r > R \\ \text{edo kanpoko puntuetan} \end{array} \right\} V = -\gamma \frac{m}{r}$$

Aurreko orriko irudian, aipaturiko potentziala ageri da grafikoki.

ARIKETAK

- 1.- Saturnoren eraztun baten barne-hegalak r_1 erradioa du, eta kanpokoak r_2 . Kalkula bedi hegal bioi dagozkien bira-periodoen arteko diferentzia.



Emaitza:
$$T_2 - T_1 = \frac{2\pi}{R_s \sqrt{g_s}} (\sqrt{r_2^3} - \sqrt{r_1^3}),$$

non R_s eta g_s Saturnoren erradioa eta beraren azalean azelerazio grabitatorioak duen balioa diren, hurrenez hurren.

- 2.- Lurretik, satellite bat duen planeta bat behatzen ari dira. Planetaren erradioa R da, eta beraren inguruan satellitea r erradiodun orbita zirkularra deskribatzen ari da, periodoa T delarik. Lor bitez:
- Planetaren masa.
 - Planetaren azalean azelerazio grabitatorioak duen balioa.
 - Lurraren masa kalkulatzeko balio ote du metodo honek?

Emaitzak: a)
$$\frac{4\pi^2 r^3}{\gamma T^2}.$$

b)
$$\frac{4\pi^2 r^3}{R^2 T^2}.$$

- 3.- Satellite artifizial bat Lurraren inguruan higitzen ari da, Ilargiaren orbitak duen erradioaren laurdeneko ibilbide zirkularrean. Kalkula bitez:
- Satellite artifizialak eta Ilargiak Lurrarekiko dituzten abiaduren arteko erlazioa.
 - Lurraren inguruan satellite artifizialak deskribatzen ari den

higiduraren periodoa.

Oharra: Kontsidera bedi, Ilargiak Lurrarekiko duen higidura, zirkularra dela, beraren periodoa 28 egunetakoa delarik.

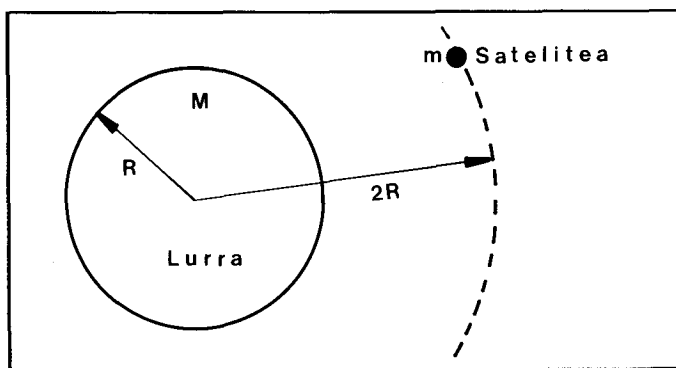
Emaitzak:

- a) Satellite artifizialaren abiadura Ilargiarenaren bikoitza da.
- b) 3,5 egun .

- 4.- γ konstantearen balioa lortzeko, G. Von Jolly-k aurreko mendean erabilitako metodoan, 5 kg-tako masadun esfera, orekaturik zegoen eta besoak neurri berekoak zituen balantzaren ontzietariko batetan jarri zuen, eta gero esfera horren azpian $5,8 \cdot 10^3$ -tako esfera bat jarri zuen, bien zentruen arteko distantzia 0,5 m-takoa zelarik. Esfera honek beste besoan zegoen masari egindako eragina arbuigarria zela jorik, zein masa jarri behar izan zuen balantzaren beste ontzian oreka berrezartzeko?

Emaitza: $0,79 \cdot 10^{-3} \text{ g}$.

- 5.- m masa duen satellite artifizial bat, Lurraren inguruko $2R$ erradiodun orbita zirkular batetan higitzen ari da. Kalkula bedi, infinituraino aldegin dezan eman behar zaion energia minimoa.



Emaitza: $\frac{mgR}{4}$.

- 6.- Kalkula bedi, m masa duen suziri bat Lurraren inguruko $2R$ erradiodun orbita zirkularrean jartzeko behar den energia. Kalkula bedi, halaber, suziria aipaturiko orbitatik $3R$ erradiodunekora aldatzeko behar den energia (R Lurraren erradioa da).
Oharra: Kontsidera bedi Lurra erreferentzi sistema inertzialtzat (hots, ez bedi kontutan har Lurrak bere ardatzaren inguruan duen biraketazko higidura, eta ez Eguzkiaren inguruan duen azelerazioa

ere) eta arbuia bedi airearen marruskadura.

Emaizak: $\frac{3mgR}{4}$; $\frac{mgR}{12}$.

- 7.- Kontsidera bedi planeta esferiko eta homogeno baten ekuatorea inguratzen duen satellite baten orbita zirkularra. Satellitearen eta planetaren gainazalaren arteko distantzia arbuia garria baldin bada, froga bedi, orbitaren periodoak planetaren dentsitatearenaz bestelako dependentziarik ez duela.

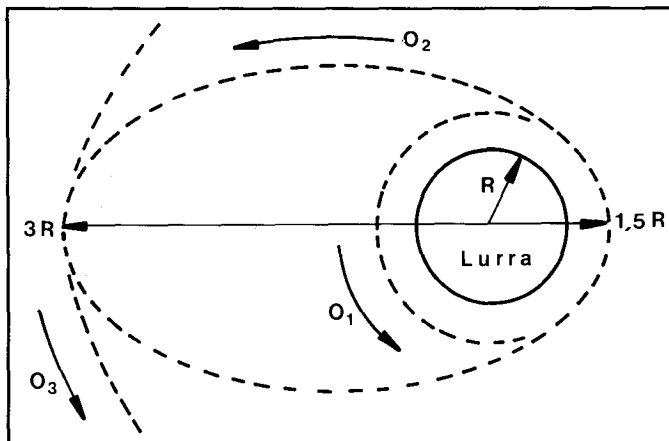
Emaizta: $T = \sqrt{\frac{3\pi}{\gamma\rho}}$.

- 8.- Jupiter planetak $7 \cdot 10^4 \text{ km}$ -tako erradioa eta $2 \cdot 10^{27} \text{ kg}$ -tako masa ditu. Kalkula bedi grabitazio-eremuaren intentsitateak planeta honen gainazaleko puntuetan duen balioa, eta higikari bati eman behar zaion abiadura minimoa planetatik ihes egin ahal dezan.

Emaizta; $g_J = 27 \text{ m s}^{-2}$; $v_i = 6,17 \cdot 10^4 \text{ m s}^{-1}$.

- 9.- m masa duen satellite artifizial bat Lurraren inguruko O_1 orbita zirkularrean higitzen ari da. Kalkula bitez:

- O_1 orbita zirkularretik O_2 orbita eliptikora satellitea pasarazteko, beronek behar duen energia.
- O_2 orbita eliptikotik O_3 orbita zirkularrera pasarazteko behar duena.



Emitzak: a) $\frac{mgR}{9}$.

b) $\frac{mgR}{18}$.

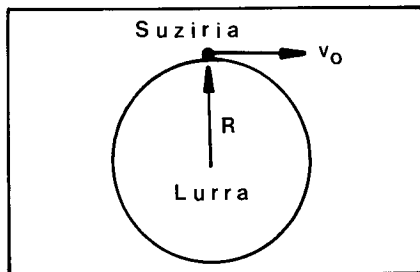
- 10.- *Geminis V* satelite artifizialaren orbitaren apogeo eta perigeo-altuerak 352 eta 107 km-takoak izan ziren, hurrenez hurren. Aurki bitez orbitaren exzentrikotasuna, kapsularen abiadura maximoa eta minimoa, eta grabitazio-eremuaren intentsitatearen aldaketa perigeoaren eta apogeoaren artean.

Emitza: $\varepsilon = 0,02$,

$$v_{\max} = 7908 \text{ m s}^{-1}, \quad v_{\min} = 7620 \text{ m s}^{-1},$$

$$\Delta g = 0,68 \text{ m s}^{-2}.$$

- 11.- Irudiko suziria, Lurraren norabide tangentzialaz eta $v_0 = \sqrt{1,2 g R}$ abiaduraz jaurtiki da. Airearen marruskadura arbuiaurik, kalkula bedi deskribatuko duen orbita eliptikoaren exzentrikotasuna. ($g = \gamma M_L / R^2$).



Emitza: 0,2 .

- 12.- Urte lurtarraren iraupena, Lurraren eta Eguzkiaren arteko distantzia eta Eguzkiaren diametroak Lurrarekiko osoturiko angelua, T (365,25 egun), R (8,3 argi-minutu) eta α (32') dira, hurrenez hurren. Aurki bedi grabitatearen azelerazioak Eguzkiaren gainazalean duen balioa.

Emitza: $g_E = 274 \text{ m s}^{-2}$.

- 13.- *Telstar* satelitearen orbitaren perigeo eta apogeo-altuerak 950 km eta 5650 km-takoak dira. Zein izango da beraren periodoa?

Emitza: $T = 158$ minutu.

- 14.- *Halley* kometaren orbitaren perihelioaren eta Eguzkiaren arteko distantzia 0,59 u.a.-tekoa da eta periodoa (gutxi gorabeherako hurbilketan) 76 urtetakoa. Zein izango da afelioaren eta Eguzkiaren arteko distantzia?

Oharra: 1 *u.a.* (unitate astronomikoa) = $149,6 \cdot 10^9$ m, Lurraren eta Eguzkiaren arteko batezbesteko distantzia da.

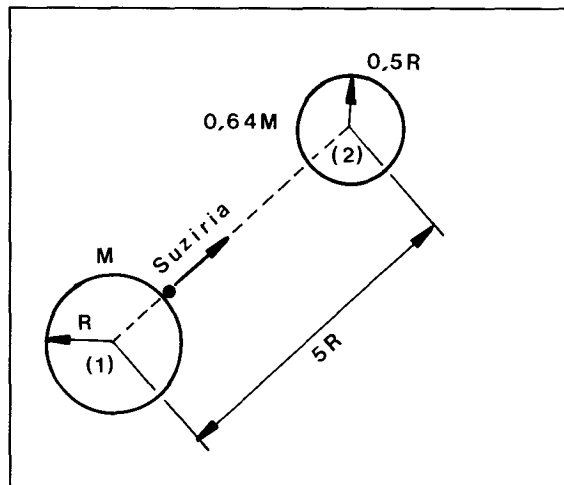
Emaitza: 35,29 *u.a.*

- 15.- (1) planetatik (2) planetara bidali nahi da suziri bat. Ibilbideak hurrengo irudian ageri dena izan behar du, eta nahiz planeten higidurak nahiz beraien eguratsekiko marruskadurak arbuia egingo dira. Kalkula bedi:

a) Suziriaren hasierako abiadura minimoa.

b) Bigarren planetara iritsiko denean izango duen abiadura.

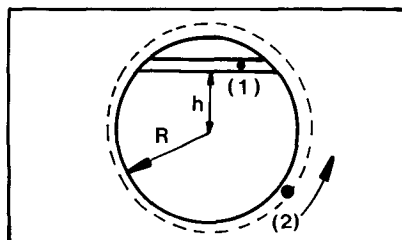
Oharra: Ibilaldian barrena suziriaren motoreak itzalirik dirau, hau da, hasierako bulkadari esker mantenduko da higidura.



Emaitzak: a) $\sqrt{\frac{1,024 \gamma M}{R}}$

b) $\sqrt{\frac{1,708 \gamma M}{R}}$

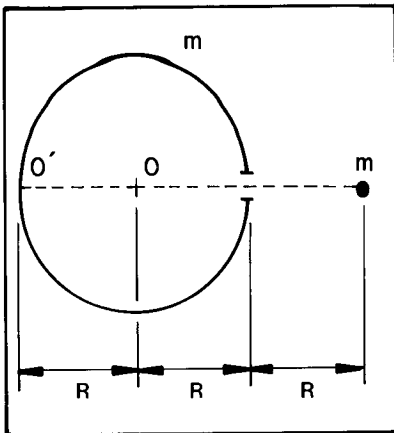
- 16.- Suposa bedi Lurraren barnean zulaturiko tunel zuzen eta leun bat, bertan (1) partikula higitzen ari delarik. Froga bedi:



- a) Aipaturiko partikularen higidura oszilakor harmonikoa dela, tuneletik Lurraren zentrurako h distantziak inolako garrantzirik ez duelarik.
- b) Higidura honen periodoa eta Lurraren azaletiko distantzia arbuiagarriara orbita zirkularra deskribatzen ari den (2) partikularen higidurari dagokion periodoa baliokideak direla.
- Oharra: Kontsidera bedi, Lurra esfera homegenoa dela.

Emaitza: b) Izan ere, bi periodoek $2\pi\sqrt{\frac{R}{g}}$ balio dute.

17.-



I. Irudiko esfera hutsa tinko dago, bere masa uniformeki banaturik duelarik (zulo txikiaren ondorioa erabat arbuiagarria da). Eskuineko partikulak esferak adina masa du, eta pausagunetik askatu da.

- a) Lor bedi partikularen abiadura O' puntura heltzean.
- b) Talkaren ondoren, aipaturiko partikula, heltzean zuen abiaduraren erdiaz higitzen ari baldin bada, zulotik zein distantziatara geldituko da?

II. Kontsidera bedi berriro sistema berbera irudiko jarreran. Orain, nahiz partikula nahiz esfera libreki higi daitezke, pausagunetik biak une berean askatuak direlarik.

- c) Zer distantzia egingo du bakoitzak, pestearekin talka egin arte?
- d) Zenbateko abiaduraz higituko da bakoitza talka unean?
- e) Errepika bedi I.b ataleko galderako ariketa, bertako baldintza mantendurik.

Emaitzak: I.a) $\sqrt{\gamma \frac{m}{R}}$.

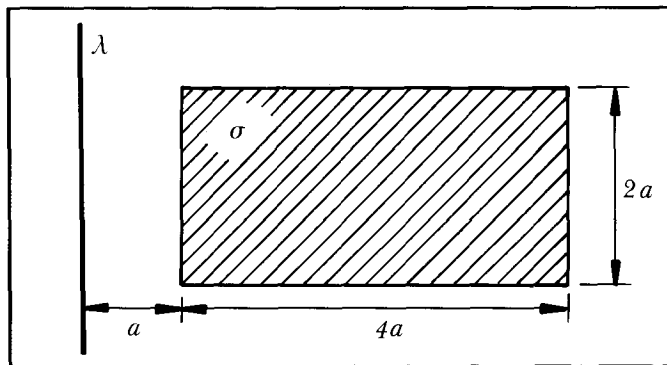
I.b) $\frac{8R}{7}$ -ra, esferaren zentrutik neurturik.

II.c) $\frac{3R}{2}$ ibili da bakoitza, baina aurkako norantzan.

II.d) Biak $\sqrt{\gamma \frac{m}{2R}}$ abiaduraz, baina aurkako norantzan.

II.e) $\frac{8R}{7}$ -ra, esferaren zentrutik neurturik.

18.- Irudiko etengabeko hari zuzena eta errektangelua planokideak dira, azken honen bi alde hariaren perpendikularrak eta beste biak paraleloak izanik.



- Kalkula bedi errektangeluak hariari egiten dion indar grabitatorioa.
- Kalkula bedi, planotik aldatu gabe eta bere zentrua tinko iraunik, errektangelua 90° -tako angelua birarazteko egin behar den lana.

Emaitzak: a) $4\gamma\lambda \sigma a \ln 5$.

b) $4\gamma\lambda \sigma a^2 \ln (2^{17} \cdot 10^{-5})$.

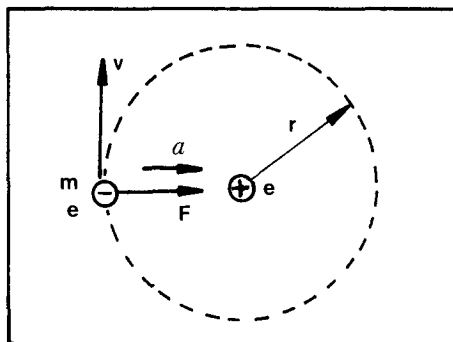
15. GAIA

INTERAKZIO ELEKTRIKOA

15.1. Hidrogenoaren atomoaren irudirik sinpleena ondoko honetan datza: partikula higikor bat (elektroia) orbita zirkularrean biraka ari da beste partikula (protoia) finko baten inguruan, orbitaren erradioa $0,5 \times 10^{-10} \text{ m}$ -takoa izanik. Kalkula bitez elektroiairen abiadura eta beraren higidura zirkularraren maiztasuna. Elektroiairen masa eta karga $9,1 \times 10^{-31} \text{ kg}$ eta $1,6 \times 10^{-19} \text{ C}$ dira, hurrenez hurren.

Protoiak elektroiairi egiten dion indarra, Coulomb-en legearen arauera, ondoko hau izango da:

$$F = \frac{1}{4 \pi \epsilon_0} \frac{e^2}{r^2} .$$



Irudian ikus daitekeenez, indar honen norabidea erradiala denez, elektroiairen azelerazioa azelerazio zentripetua baino ez da izango, hau da:

$$a = \frac{v^2}{r} .$$

Indarra, masa eta azelerazioarekin erlazionatuz, ondokoa dugu:

$$F = ma \rightarrow \frac{1}{4 \pi \epsilon_0} \frac{e^2}{r^2} = m \frac{v^2}{r} .$$

$$v = \sqrt{\frac{e^2}{4 \pi \epsilon_0 m r}} = 2,25 \times 10^6 \text{ m s}^{-1} .$$

Bestaldetik, higidura zirkular uniformeari dagokion abiadura linealaren eta maiztasunaren arteko erlazioa hauxe da:

$$v = \omega r = 2 \pi \nu r ; \nu = \frac{v}{2 \pi r} = 7,16 \times 10^{15} \text{ Hz} .$$

15.2. Aurreko problemaren datuak eta emaitzak kontutan harturik, lor bedi, hidrogenoaren atomoa zatitzeko behar den energiarik txikiena, hau da, bi partikulak infinituki urruntzeko behar den energiarik txikiena.

Sistema isolatu bezala kontsideraturik, hidrogenoaren atomoari dago-kion energia, ondokoa da: Osotzen duten partikulen arteko interakzio elektrikoaren energia potentziala gehi elektroaren higiduraren energia zinetikoa. Hau da:

$$\begin{aligned} E &= E_p + E_k = -\frac{1}{4 \pi \epsilon_0} \frac{e^2}{r} + \frac{1}{2} m v^2 = \\ &= -\frac{1}{4 \pi \epsilon_0} \frac{e^2}{r} + \frac{1}{2} \frac{m e^2}{4 \pi \epsilon_0 m r} = -\frac{1}{8 \pi \epsilon_0} \frac{e^2}{r} . \end{aligned}$$

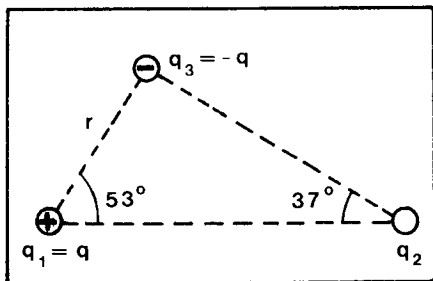
Partikulak elkarretik infinituki banatuak direnean, beraien arteko interakzio elektrikoaren energia potentziala zero izango da, distantziaren alderantzizkoaren funtzioa bait da. Bestaldek, partikulak aldentzeko energiarik txikiena erabili nahi baldin badugu, energia zinetiko minimoarekin utzi behar ditugu, hots, energia zinetiko nuluarekin. Beraz, sistemaren azkenengo energia hauxe izango da:

$$E' = 0 .$$

Atomoa desagiteko behar den energiarik txikiena ondokoa izango da:

$$E' - E = 0 - \left[-\frac{1}{8 \pi \epsilon_0} \frac{e^2}{r} \right] = 2,3 \times 10^{-18} \text{ J} .$$

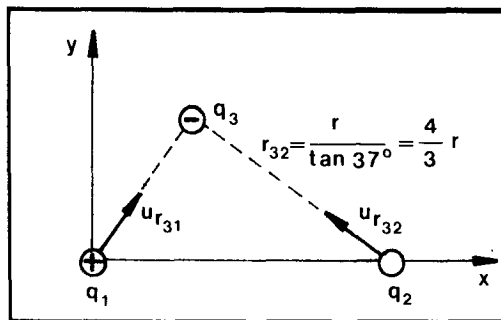
15.3. Demagun alboko irudiko karga-sistema.



a) Lor bedi irudiko q_2 kargaren balioa, q_3 kargaren gaineko indar erresultantea horizontala izan dadin.

b) Non jarri beharko da $q_4 = 5/3 q$ balioko beste karga bat, q_3 kargaren gaineko indar erresultante berria nulua izan dadin?

a) Irudiko ardatz cartesianak erabiliz, q_1 eta q_2 kargek q_3 kargari eginiko indarrak, hauexek izango dira:



$$\mathbf{F}_{31} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_3 q_1}{r_{31}^2} \mathbf{u}_{r_{31}} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{r^2} (0,6 \mathbf{u}_x + 0,8 \mathbf{u}_y),$$

$$\mathbf{F}_{32} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_3 q_2}{r_{32}^2} \mathbf{u}_{r_{32}} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{9 q q_2}{16 r^2} (-0,8 \mathbf{u}_x + 0,6 \mathbf{u}_y).$$

Eta q_3 kargaren gaineko indar erresultantea horizontala izan dadin, ondoko baldintza bete beharko da:

$$-\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{r^2} 0,8 \mathbf{u}_y - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{9 q q_2}{16 r^2} 0,6 \mathbf{u}_y = 0,$$

$$q_2 = -\frac{64}{27} q.$$

b) Laugarren karga jarri baino lehen, lor dezagun, q_1 eta q_2 kargen artean q_3 kargaren gainean egindako indarra.

$$\mathbf{F}_3 = \mathbf{F}_{31} + \mathbf{F}_{32} = -\frac{5}{3} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{r^2} \mathbf{u}_x.$$

Bestaldetik, q_4 kargak q_3 kargaren gainean egingo duen indarra, haxe izango da:

$$\mathbf{F}_{34} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_3 q_4}{r_{34}^2} \mathbf{u}_{r_{34}} = -\frac{5}{3} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{r_{34}^2} \mathbf{u}_{r_{34}}.$$

Beraz, q_3 kargaren gaineko indar erresultante berria hauxe izango da:

$$\begin{aligned}\mathbf{F}'_3 &= \mathbf{F}_3 + \mathbf{F}_{34} \\ &= -\frac{5}{3} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{r^2} \mathbf{u}_x - \frac{5}{3} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{r_{34}^2} \mathbf{u}_{r_{34}}.\end{aligned}$$

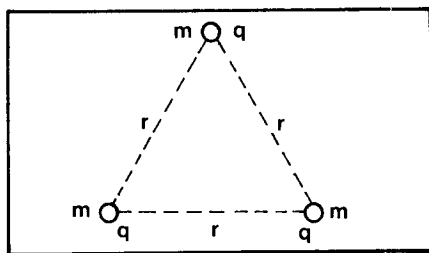
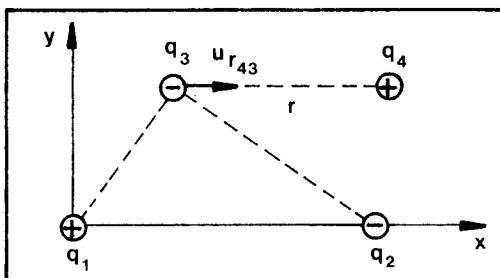
Baina, enuntziatuak dioenez, indar erresultante berri honek nulua izan behar du. Honelatan,

$$\frac{1}{r_{34}^2} \mathbf{u}_{r_{34}} = -\frac{1}{r^2} \mathbf{u}_x,$$

eta hortik ondoko emaitzak atera ditzakegu:

$$\mathbf{u}_{r_{34}} = -\mathbf{u}_x \quad \text{eta} \quad r_{34} = r.$$

Alboko irudi honetan ageri da q_4 kargaren jarrera.



15.4. Irudiko karga eta masa bereko partikulak, pausagunetik askatu dira irudian adierazitako egoeran eta, beraien arteko interakzio aldaratzaileen ondorioz, elkarretik urruntzen hasi dira. Lor bitez partikulen abiadurak, elkarren arteko distantzia bikoiztuko den unean.

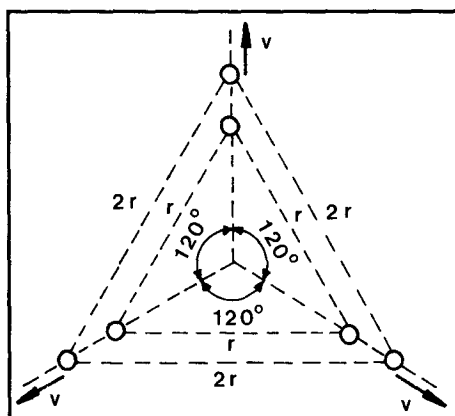
Kalkula dezagun, hasierako aldiunean sistemak daukan energia. Energia hau potentziala besterik ez da izango, hiru partikulak geldi bait daude. Beraz:

$$E = 3 q V$$

$$V = \frac{1}{4 \pi \epsilon_0} \frac{q}{r}$$

$$E = 3 \frac{1}{4 \pi \epsilon_0} \frac{q^2}{r}$$

Bestaldetik, sistemak duen simetrian eta momentu linealaren kontserbazioan oinarriturik (kontura gaitezen sistema isolatu batetan ari garela), partikulen higidura irudian ageri den bezalakoa izango dela uler dezakegu erraz, bakoitzaren abiadura beste edozeinen abiaduraren berdina delarik.



Bigarren egoeran, sistemaren energia, energia potentzialaz eta zinetikoaz konposaturik egongo da, hots,

$$E' = 3 q V' + 3 \frac{1}{2} m v^2$$

$$V' = \frac{1}{4 \pi \epsilon_0} \frac{q}{2r}$$

$$E' = 3 \frac{1}{4 \pi \epsilon_0} \frac{q^2}{2r} + 3 \frac{1}{2} m v^2$$

Azkenez, partikulen arteko interakzioak kontserbakorrak direnez gero, energiaren kontserbazioa erabiliko dugu, hau da:

$$E = E' \rightarrow 3 \frac{1}{4 \pi \epsilon_0} \frac{q^2}{r} = 3 \frac{1}{4 \pi \epsilon_0} \frac{q^2}{2r} + 3 \frac{1}{2} m v^2 ,$$

$$v = \frac{q}{\sqrt{4 \pi \epsilon_0 m r}} .$$

15.5.I. Aldaketa egokiak eginez, adieraz bedi nola geratuko litzatekeen Gauss-en teorema, elektrizitateari aplikaturik.

II. *Interakzio grabitatorioa* delako gaiaren 14.5. problemaren I. atalari dagozkion emaitzak erabiliz, ebatz bedi problema berbera elektrizitatearen arloan. Konpara bitez emaitzak *Fisika Orokorra II* liburuan daudenekin (206. orrialdeko adibidea).

III. Ondoren, har bedi, *Interakzio grabitatorioa* delako gaiaren 14.6. problemaren I. atala eta aplika bedi uniformeki kargaturiko xafla batek sorturiko eremu elektrikoa lortzeko.

IV. Azkenez, kontsidera ditzagun aurrean aipaturiko bezalako bi xafla, bata $+\sigma$ gainazaleko kargadentsitatea eta besteak $-\sigma$ daukatelarik. Elkarren paraleloki jarri dira, bitarteko distantzia l delarik. Ondoriozta bitez bien artean sorturiko eremu elektrikoa eta beraien arteko potentzial-diferentzia.

I. Ondo ohartuz gero, grabitazioari eta elektrizitateari dagozkien oinarritzko legeak, Newton-ek eta Coulomb-ek hurrenez hurren proposatu zituztenak alegia, oso desberdinak ez direla konturatuko gara. Egia esan, masa-kontzeptua karga-kontzeptuaz aldatuz, edo alderantziz, eta konstanteak beste itxura emanez, bietariko edozein lege, bestea bihurtzen da. Hau da, adibidez:

$$F = \gamma \frac{m m'}{r^2} \quad \left| \begin{array}{l} m \rightarrow q \\ m' \rightarrow q' \\ \gamma \rightarrow \frac{1}{4 \pi \epsilon_0} \end{array} \right| \quad F = \frac{1}{4 \pi \epsilon_0} \frac{q q'}{r^2}$$

Newton-en legea Coulomb-en legea

Bestaldetik, $\mathbf{G}$ bektorearen eta $\mathbf{E}$ bektorearen definizioak konparatuz, benetan definizio berbera dela ikus dezakegu argiro, masa-kontzeptua karga-kontzeptura igaroz, noski.

Aurreko kontsiderazioak eginik, goazen orain, Gauss-en teorema, grabitazioaren arlotik elektrizitatearen arlora berraldatzera:

$$\text{Grabitazioa:} \quad \int \mathbf{G} \cdot \mathbf{u}_N dS = -4\pi\gamma m_T .$$

$$\text{Elektrostatika:} \quad \int \mathbf{E} \cdot \mathbf{u}_N dS = \frac{q_T}{\epsilon_0} .$$

Edo hitzez adierazita: Gainazal itxi bat zeharkatzen duen eremu elektrikoaren fluxua, gainazal horrek bere barnean daukan karga osoaren (q_T -ren) proportzionala da, q_T / ϵ_0 balio bait du.

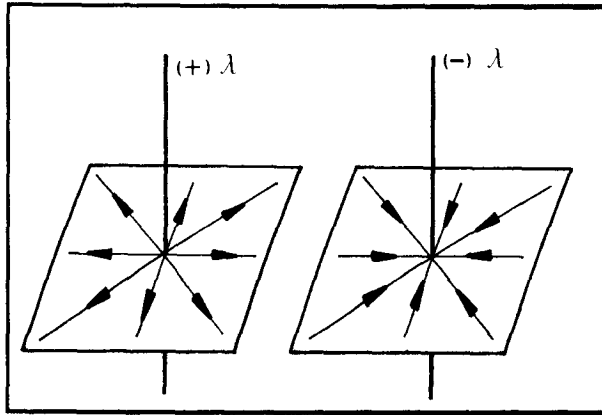
Oharrak:

- a. Elektrizitatearen arloan, nahiz karga positiboak nahiz negatiboak izanez gero (grabitazioaren arloan, oster, ez dago desberdintasun hau), q_T delakoa gainazalaren barneko kargen batura algebraikoa izaten da, hots, batuketa egitean, karga bakoitza bere zeinu eta guzti kontsideratu beharko da.
- b. Grabitazioaren arloan, Gauss-en formularen bigarren atalean agertzen den zeinu negatiboa ez da elektrizitateari aplikatzerakoan idazten. Zergatik? Honegatik: Edozein masak beste edozein masari indar erakarle baidio ezin dio egin; karga positibo bati oster (gogora ekar dezagun, eremu elektriko definitzeko karga positiboaren unitatea erabiltzen dela) beste karga batek indar erakarle zein aldaratzailea egin diezaioke, bigarren kargaren zeinuaren arauera. Beraz, ez dugu inolako zeinu berezirik idatzi behar Gauss-en teorema elektrizitatearen arloan aplikatzerakoan. Baldin eta q_T delakoa negatiboa bada, beraren zeinua agertuko da erlazioaren bigarren atalean, grabitazioaren arloari dagokion eraren antzekoa geraturik; eta q_T delakoa positiboa bada, grabitazioaren alderantzizkoa izango da, bigarren atalaren zeinuaren aldetik, horrela izan behar bait du.

II.- 14.5. probleman haxe lortu genuen:

$$\mathbf{G} = -2\gamma \frac{\lambda}{R} \mathbf{u}_R ; \quad V = 2\gamma\lambda \ln R ,$$

distantzia unitatera dugun potentziala nulua dela onartuz.



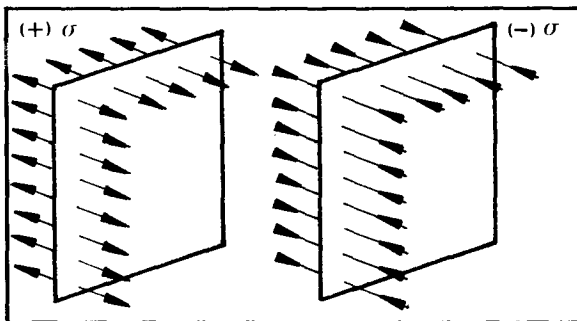
Orain, aurreko atalean ikusitakoa berriro erabiliz, honako hau dugu:

$$\mathbf{E} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 R} \mathbf{u}_R ; V = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln R .$$

III.- Bide berberari jarraituz, kasu honetan haxe lortuko dugu:

$$|\mathbf{E}| = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} .$$

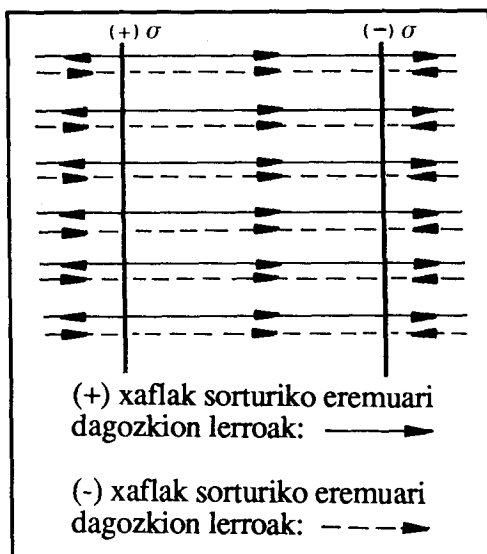
Grabitazioan ikusi genuen bezala, hemen ere xaflaren alde batetik bestera pasatzean, norantzari dagokionez, desjarraitasuna jasaten du eremuak.



IV. Atal honetan gainezarmenaren printzipioaz baliatuko gara, hots, xafla bakoitzak sorturiko eremua ikusi eta gero, eremuen konposaketa egingo dugu, eremu erresultantea lortzeko.

Irudian ageri denez, nahiz ezkerreko espazioaldean nahiz eskuinekoan, xaflek sorturiko eremuak, elkarren aurkakoak dira; eta balio berbera dutenaz gero, erresultantea nulua izango da.

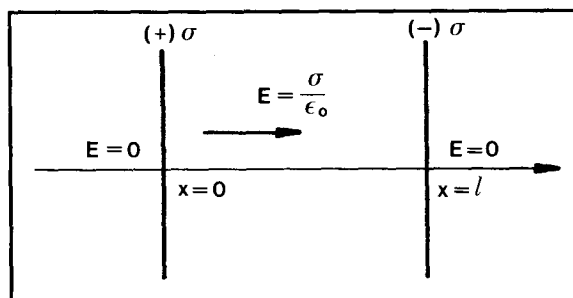
Xaflen bitarteko espazioaldean, berriz, bi eremuok norabide eta norantza berbera dituzte, eta horrez gainera, balio aldetik ere kointzidentek direnez, erresultantea haietariko baten bikoitza izango da.



Bukatzeko, hona hemen xafla bien arteko potentzial-diferentzia:

$$\mathbf{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \mathbf{i} \quad (\text{xaflen artean}) .$$

$$\mathbf{E} = - \text{grad } V ; \frac{\sigma}{\epsilon_0} \mathbf{i} = - \frac{dV}{dx} \mathbf{i} ; \int_{V_1}^{V_2} dV = - \frac{\sigma}{\epsilon_0} \int_0^l dx .$$



$$V_1 - V_2 = \frac{\sigma l}{\epsilon_0} .$$

Edo, $|E| = \sigma / \epsilon_0$ dela kontutan harturik,

$$|E| = \frac{V_1 - V_2}{l} .$$

15.6. Millikan-en aparatu batetan olio tantatxo bat 1 mm jaisten ari da $27,4\text{ s}$ -tan, eremu elektrikorik ez dagoenean. Ondoren, $2,37 \times 10^4\text{ N C}^{-1}$ -tako eremu elektrikoa aplikatuz, tantatxoa gelditu egin da. Zenbat elektroi hartu du tantatxoak soberan?

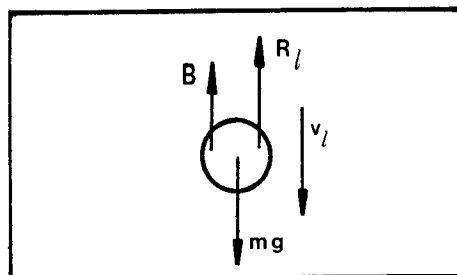
Datuak:

η , airearen biskositate-koefizientea, $1,8 \times 10^{-5}\text{ N s m}^{-2}$

ρ_a , airearen dentsitatea, $1,3\text{ kg m}^{-3}$

ρ_o , olioaren dentsitatea, 800 kg m^{-3} .

Tantatxoak v_l muga-abiadura lortu duela suposatuko dugu, denbora laburrean lortzen bait du. Hona hemen tantatxoaren gainean eragiten ari diren indarrak, eremu elektrikorik ez dagoenean (ikus alboko irudia):



$$\text{Tantaren pisua : } mg = \rho_o \frac{4}{3} \pi r^3 g .$$

$$B : \text{Arkhimedes-en bultzada} = \rho_a \frac{4}{3} \pi r^3 g .$$

$$R_l : \text{airearen marruskaduraren muga-indarra} = 6 \pi r \eta v_l .$$

(Formula guztietan r delakoa tantaren erradioa da).

Tantatxoa muga-abiaduraz jaisten ari denez gero, hiru indarrak orekan daude. Beraz:

$$R_l + B - mg = 0$$

$$6 \pi r \eta v_l + (\rho_a - \rho_o) \frac{4}{3} \pi r^3 g = 0 .$$

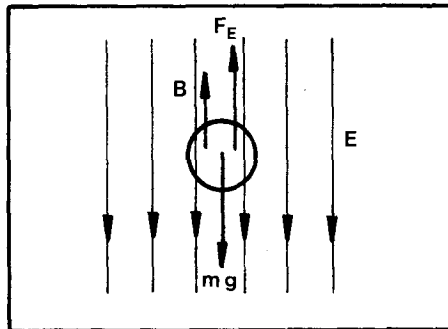
Hemendik ikus daitekeenez, erradioa ondokoa izango da:

$$r = \sqrt{\frac{9 \eta v_l}{2 g (\rho_o - \rho_a)}} .$$

Bestaldetik, muga-abiadura hauxe da:

$$v_l = \frac{1}{27,4} \text{ mm s}^{-1} = 3,65 \cdot 10^{-5} \text{ m s}^{-1} .$$

Eremu elektrikoa aplikatzean, tantatxoa gelditu egin da. Hau dela eta, aireak egindako erresistentzi indarra desagertu egin da, beraren ordez indar elektrikoa agertu delarik. (Irudian ageri da tantatxoaren gaineko indar-egoera berria). Indar elektriko honen balioa honako hau da:



$$F_E = q E = n e E$$

n , tantak soberan hartu dituen elektroien kopurua delarik.

Tantatxoa berriro orekan dagoenez, desagertu den indarrak eta agertu denak balio berberekoak izan behar dute. Honelatan, bada,

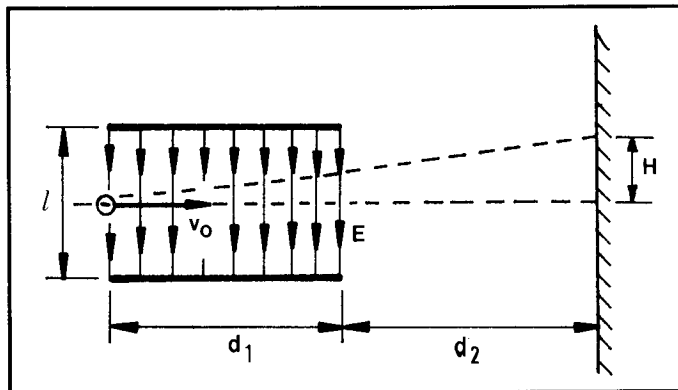
$$F_E = R_l , \quad n e E = 6 \pi r \eta v_l ,$$

$$n = \frac{6 \pi \eta v_l}{e E} \sqrt{\frac{9 \eta v_l}{2 g (\rho_o - \rho_a)}} .$$

Azkenez, balio egokiak aplikatuz, tantatxoak soberan harturiko elektroien kantitatea hauxe dela ikus daiteke:

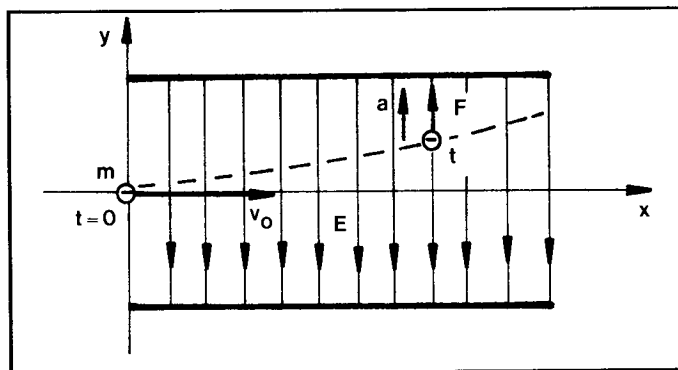
$$n = 2 \text{ elektroi} .$$

15.7. Irudiko bi xaflen artean elektroiti bat jaurtiki da, beraren hasierako abiadura (v_0) eremu elektrikoaren lerroen perpendikularra delarik. Eremuan zehar pasatu eta gero, elektroitiak pantaila batekin topo egin du. Indar elektrikoarena izan ezik beste edozein indarren eragina arbuaturik, kalkula bedi elektroitiaren desbideraketa pantailara iristean, H alegia.



Datuak: $v_0 = 10^7 \text{ m s}^{-1}$, $d_1 = 2 \text{ cm}$,
 $l = 1 \text{ cm}$, $d_2 = 2 \text{ cm}$,
 xaflen arteko potentzial-diferentzia, $V = 100 \text{ V}$.

Lehendabizi, plaka bien arteko elektroien higiduraz arituko gara. Irudiko ardatz cartesianak erabiliz, partikularen gaineko indarra eta beraren azelerazioa hauexek izango dira:



$$\mathbf{F} = -e \mathbf{E} = -e \left[-\frac{V}{l} \right] \mathbf{j} = \frac{eV}{l} \mathbf{j} = m \mathbf{a} ;$$

$$\mathbf{a} = \frac{eV}{ml} \mathbf{j} .$$

Elektroien azelerazioa konstantea denez gero, hona hemen higidurari dagokion ekuazioa:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}_0 t + \frac{1}{2} \mathbf{a} t^2 = v_0 t \mathbf{i} + \frac{eV}{2ml} t^2 \mathbf{j} .$$

$$h = \frac{e V}{m l} \frac{d_1 d_2}{v_0^2} .$$

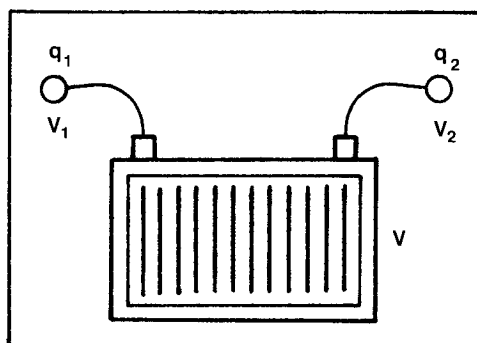
Eta azkenez, H desbideraketa osoa ondokoa izango da:

$$\begin{aligned} H = y + h &= \frac{e V}{2 m l} \frac{d_1^2}{v_0^2} + \frac{e V}{m l} \frac{d_1 d_2}{v_0^2} = \\ &= \frac{e V d_1}{m l v_0^2} \left[\frac{d_1}{2} + d_2 \right] = 0,0105 \text{ m} . \end{aligned}$$

15.8. $r = 1 \text{ cm}$ -tako erradioa duten bi esfera eroale $V = 10 \text{ V}$ -tako bateria batetara konektatu dira. Kalkula bedi esfera bakoitzak bateriatik harturiko karga.
Oharra: Esferen arteko distantzia oso handia da beraien erradioekin konparaturik.

Esferek eta bateriak osotutako sistema elektrikoa isolaturik dagoenez gero, sistemaren karga osoak konstante iraun behar du. Baina karga hau nulua zen hasierako aldiunean. Beraz,

$$q_1 + q_2 = 0 .$$



Bestaldetik, esferak bateriatik karga hartzen amaitutakoan, beraien arteko potentzial-diferentziak bateriari dagokiona izan behar du, hau da,

$$V_1 - V_2 = \frac{1}{4 \pi \epsilon_0} \frac{q_1}{r} - \frac{1}{4 \pi \epsilon_0} \frac{q_2}{r} = V .$$

Ikus daitekeenez, esferen arteko potentzial-diferentzia idaztean, ez dugu kontutan hartu bakoitzak bestean duen eragina, esferak banatzen dituen distantzia oso handia baita erradioekin konparaturik.

Aurreko bi ekuazioetatik, beste hau atera dezakegu:

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2q_1}{r} = V ,$$

$$q_1 = 4\pi\epsilon_0 \frac{r}{2} V = \frac{10^{-10}}{18} C .$$

Eta beraz:

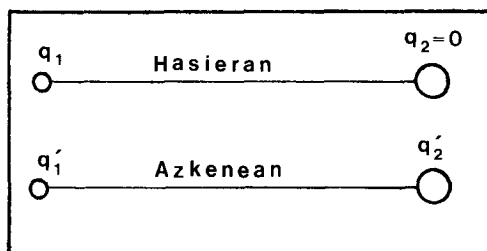
$$q_2 = -\frac{10^{-10}}{18} C .$$

15.9. $r_1 = 1\text{ cm}$ -tako erradioa duen esfera eroale batek, $q_1 = 3 \times 10^{-9}\text{ C}$ balio duen karga du. Esfera hau, $r_2 = 2\text{ cm}$ -tako erradioko esfera eroale batekin konektatu da hari eroale baten bidez, bigarren esfera hau deskargaturik dagoelarik. Kalkula bedi bigarren esferak harturiko karga.

Oharrak: Esferen arteko distantzia oso handia da beraien erradioekin konparaturik eta hariak ez du kargarik gorde sistema orekan geratzean.

Esferek eta hariak osotutako sistema isolatua denez, karga-kopuru berbera eduki behar du hasieran eta azkenean, hau da,

$$q_1 = q'_1 + q'_2 .$$



Ondoren honako hau galdegingo diogu geure buruari: Noiz amaituko du bigarren esferak karga hartzen? Harian zehar karga ez pasatzean, argiro. Eta, zer baldintza inposatu behar dugu harian zehar karga pasa ez dadin? Beraren muturren arteko potentzial-diferentzia nulua izatea, edo, beste era batetara esanik, esferen gainazaletako potentzialak berdinak izatea. Hots:

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q'_1}{r_1} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q'_2}{r_2} .$$

Aurreko probleman egin dugun modu berean, honetan ere ez dugu kontutan hartu, esfera bakoitzak bestearen gainean duen eragina, beraien arteko distantzia erradioarekin konparaturik oso handia dela gogoan edukiz.

Planteaturiko ekuazio-sistema ebatzirik, emaitza hauek atera daitezke:

$$q'_1 = 10^{-9} \text{ C} , \quad q'_2 = 2 \times 10^{-9} \text{ C} .$$

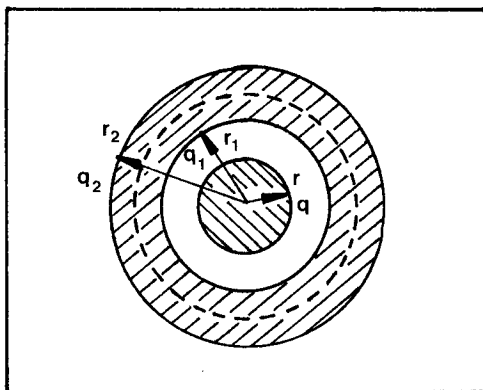
15.10.I. r erradiodun esfera eroale batek q karga du. r_1 barne-erradiodun eta r_2 kanpo-erradiodun esfera eroale batez inguratu dugu lehenengoa, bi esferak zentru-kide geratu direlarik. Lor bitez, bigarren esferaren barneko eta kanpoko gainazaletan agertuko diren karga-kantitateak.

II. Ondoren, lehenengo esfera lurrera konektatu dugu hari eroale baten bidez. Lor bedi gainazal guztien azkenengo karga-egoera.

Oharra: Lurraren potentzial elektrikoa nulua dela kontsideratzen da hitzarmenez.

Bigarren esferaren barneko eta kanpoko gainazaletan agerturiko karga-kantitateei q_1 eta q_2 deituko diegu. Baina bigarren esfera hau isolaturik dagoenez, beraren karga-kantitate osoak konstante iraun behar du. Beraz,

$$q_1 + q_2 = 0 .$$



Bestaldek, q_1 eta q_2 karga-kantitateek balore finkoa hartzean, bigarren esferaren barnean zehar ez da karga-zirkulaziorik izango. Beraz, masa honetako puntu guztietan eremu elektrikoak nulua izan behar du. Hau dela eta, r_1 eta r_2 erradioen bitarteko edozein gainazal hertsiki kontsideraturik (irudian puntuz marrazturikoa, esate baterako), bertan zehar fluxu elektrikoa zero izango da, eta Gauss-en teoremaren arauera, ondokoa planteatu dezakegu:

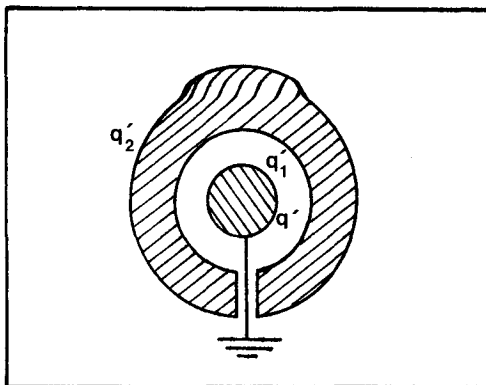
$$0 = \int \mathbf{E} \cdot \mathbf{u}_N dS = \frac{q + q_1}{\epsilon_0} .$$

Hemendik: $q_1 = -q$.

Eta lehenengo ekuaziotik: $q_2 = -q_1 = q$.

II. Ezer baino lehen, barruko esfera lurrera konektatzeko, hariak bigarren esferan zehar pasatu beharko du, jakina. Horretarako, esfera honek oso zulo estu bat duela suposatuko dugu, eta zuloaren ondorioa arbuaiatuko.

Bigarren esfera isolaturik dagoenez, beraren karga-kantitatea kontserbatu egingo da, hots:



$$q'_1 + q'_2 = q_1 + q_2 = -q + q = 0 \longrightarrow q'_2 = -q'_1.$$

Ondoren, aurreko atalean egindako Gauss-en teoremari buruzko kontsiderazioak errepikatuz, ondokoa planteatuko dugu berriro:

$$0 = \int \mathbf{E} \cdot \mathbf{u}_N dS = \frac{q' + q'_1}{\epsilon_0}, \quad q' + q'_1 = 0 \rightarrow q'_1 = -q'.$$

Azkenez, lehenengo esferaren potentziala nulua deneko baldintza erabiliko dugu. Potentzial hau hiru gaik osaturik dago: Esferaren gainazal berean dagoen kargak sorturiko potentziala, r_1 erradiodun gainazaleko kargak sorturikoa eta r_2 erradioduneko kargak sorturikoa. Azkenengo bi gaiak idazteko, esfera baten barneko puntuetako potentziala esferaren gainazalari dagokion potentzial berbera dela gogoratu behar da (ikus 14.7 problema). Honelatan, barruko esferaren potentziala hauxe izango da:

$$0 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q'}{r} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q'_1}{r_1} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q'_2}{r_2}.$$

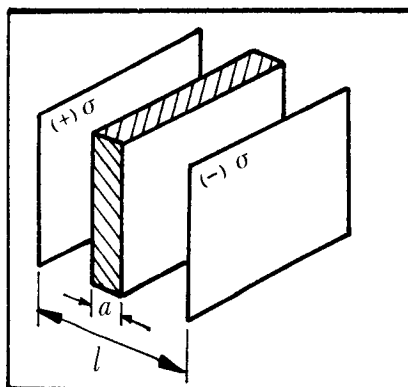
Hiru ekuazioen sistema ebatzirik, emaitza hauek lortuko ditugu:

$$q' = q'_1 = q'_2 = 0.$$

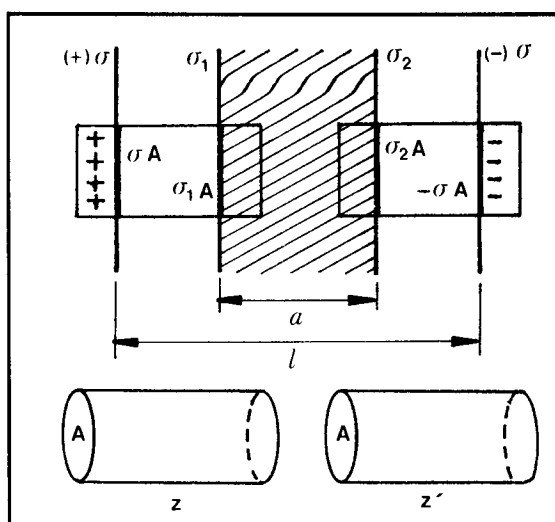
15.11. Demagun azalera infinitukoak eta elkarren paraleloak diren bi xafla laun. Haietariko batek $+\sigma$ gainazaleko karga-dentsitatea du, eta besteak $-\sigma$, xaflen arteko distantzia l delarik.

Beraien artean, eta paraleloki kokaturik, xafla eroale bat sartu da, xafla honen lodiera a delarik. Lor bitez:

- Sarturiko xaflaren gainazalean agertuko diren gainazaleko karga-dentsitateak.
- Xafla hau sartu eta gero, lehenengo bi xaflen arteko potentzial-diferentzia.



a) Suposa dezagun barruko xaflaren gainazalean agerturiko karga-dentsitateak σ_1 eta σ_2 direla. Demagun hurrengo irudiko Z zilindroa eta aplikatu diezaiogun Gauss-en teorema.



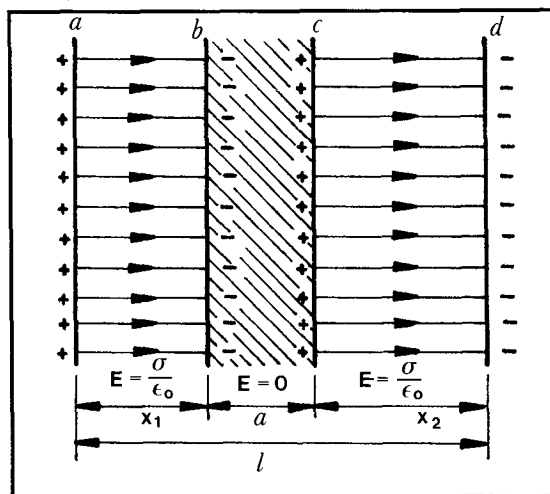
Gainazal guztiak laun eta paraleloak direnez gero, eremuaren norabidea haien perpendikularra izango da, eta, beraz, zilindroaren aldetako gainazalean zeharreko fluxua zero izango da. Oinarriak, bestalde, eremua nulua deneko bi espazioaldeetan kokaturik daude, beraiek zeharkatzen dituen fluxua ere nulua izanik, argiro. Honelatan,

$$0 = \int \mathbf{E} \cdot \mathbf{u}_N dS = \frac{\sigma A + \sigma_1 A}{\epsilon_0} \rightarrow \sigma_1 = -\sigma.$$

Ondoren, Z' zilindroari arrazonamendu berbera aplikatuz, hauxe ateratu dezakegu erraz:

$$\sigma_2 = \sigma \quad .$$

b)



15.5. problemaren IV. atalean ikusi denez, karga-dentsitate berbera eta kontrako zeinua duten bi gainazal laun eta paraleloen arteko eremu elektrikoa, beraien arteko potentzial-diferentzia xaflak banatzen dituen distantziaz zatituz lortzen da. Beraz,

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} = \frac{V_a - V_b}{x_1} \quad \rightarrow \quad V_a - V_b = \frac{\sigma}{\epsilon_0} x_1 \quad ,$$

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} = \frac{V_c - V_d}{x_2} \quad \rightarrow \quad V_c - V_d = \frac{\sigma}{\epsilon_0} x_2 \quad .$$

Eta hortik,

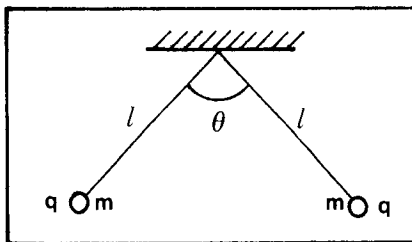
$$V_a - V_d = \frac{\sigma}{\epsilon_0} (x_1 + x_2) = \frac{\sigma}{\epsilon_0} (l - a) \quad .$$

ARIKETAK

- 1.- 15 cm-tako aldeak dituen karratu baten hiru erpinetan $3 \times 10^9 \text{ C}$ -etako karga puntualak jarri dira. Aurki bedi, hiru karga hauek kargarik ez duen erpinean sorteraizako eremu elektrikoa.

Emaitza: $E = 300 (4 + \sqrt{2}) (\mathbf{i} + \mathbf{j}) \text{ N C}^{-1} .$

- 2.- Irudian erakutsiriko m masa bereko bi bola txikiek, karga-kantitate berbera dute, eta l luzerako harietatik zintzilik daude orekan. Hariak osoturiko angelua θ da. Kalkula bedi bolen karga, m , l eta θ -ren funtzioan.

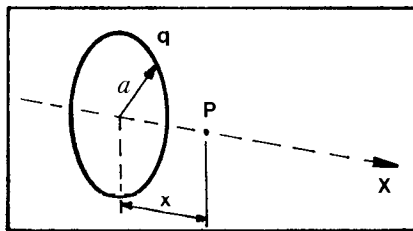


Emaitza: $q = (4l \sin \frac{\theta}{2}) \sqrt{\pi \epsilon_0 m g \tan \frac{\theta}{2}} .$

- 3.- Kontsidera bedi helio ioia, hots, elektroi bat galdu duen helio atomo bat. Kalkula bedi daukan elektroiaren biraketa-maiztasuna. Elektroiaren higidura zirkularra dela suposatuko da, orbitaren erradioak $0,5 \times 10^{-10} \text{ m}$ -tako balioa duelarik.

Emaitza: $9,9 \times 10^{15} \text{ Hz} .$

- 4.- Irudiko a erradiodun eraztun meheak q karga du. Kalkula bedi eremu elektrikoa beraren ardatze-ko edozein puntutan (P puntuan adibidez).

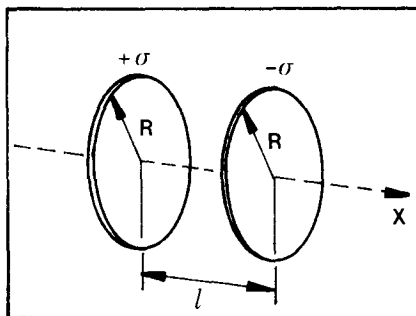


Emaitza: $E = \frac{q}{4 \pi \epsilon_0} \frac{x}{(a^2 + x^2)^{3/2}} \mathbf{i} \text{ N C}^{-1} .$

- 5.- O zentruko eta a eta R erradiodun ($a < R$) zirkunferentzia zentrukideez mugaturiko koroa zirkularrak gainazaleko σ karga-dentsitatea du. Kalkula bedi koroa zirkular honek bere biraketa-ardatzeko M puntuan sorteraiziko duen potentzial elektrikoa, M eta O puntuen arteko distantzia h dela emanik.

$$V = \frac{\sigma}{2 \epsilon_0} \left[(R^2 + h^2)^{1/2} - (a^2 + h^2)^{1/2} \right] .$$

- 6.- Kontsidera ditzagun irudiko bi diskoak. Biak R erradio berekoak eta ardazkideak dira, karga-dentsitate bera dute baina aurkako zeinukoak dira eta elkarren paraleloki kokatuta daude, l distantziaz aldendurik.



- Kalkula bedi eremu elektrikoa, diskoen arteko ardatzaren edozein puntutan.
- Azter bedi nola geratuko den aipaturiko eremu elektrikoa, diskoen erradioa beren arteko distantziarekin konparatuz oso handia denean.

Emaitzak:

$$a) \quad E = \frac{\sigma}{2 \epsilon_0} \left[2 - \frac{x}{(x^2 + R^2)^{1/2}} - \frac{l - x}{[(l - x)^2 + R^2]^{1/2}} \right] \mathbf{i} ,$$

x delakoa, puntutik $+\sigma$ diskoaren zentzurainoko distantzia delarik.

$$b) \quad E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \mathbf{i} .$$

- 7.- Geruza semiesferiko batek gainazaleko σ karga-dentsitatea dauka. Kalkula bedi eremu elektrikoa esferaerdiaren oinarriaren zentruan.

$$\text{Emaitza: } \frac{\sigma}{4 \epsilon_0} .$$

- 8.- R erradiodun esferaerdi batek bolumeneko ρ karga-dentsitatea dauka. Kalkula bedi eremu elektrikoa oinarriaren zentruan.

$$\text{Emaitza: } \frac{\rho R}{4 \epsilon_0} .$$

- 9.- l distantziaz aldendurik eta elkarren paraleloak diren bi xaflen arteko potentzial-diferentzia V da. Une berean xafla positiboan protoi bat askatu da eta negatiboan elektroio bat. Kalkula bitez:

- Xafla positibotik zer distantziatara elkarrekin gurutzatuko diren bi partikulak.
- Beste xaflara heltzeko partikula bakoitzak behar duen denbora-tartea.
- Beste xaflara iritsiko den unean, partikula bakoitzaren abiadura.
- Beste xaflara iritsiko den unean, partikula bakoitzaren energia zinetikoa.

Eraitzak:

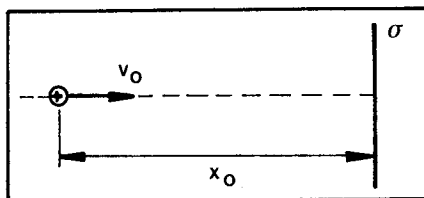
a) $5,7 \times 10^{-4} \text{ l}$.

b) protoiak: $(2/V)^{1/2} 10^{-4} \text{ l}$; elektroiak: $(11,4/V)^{1/2} 10^{-6} \text{ l}$.

c) protoiarena: $\sqrt{2V} 10^4$; elektroarena: $\sqrt{0,35V} 10^6$.

d) protoiarena: $1,6 \times 10^{-19} \text{ V}$; elektroarena: $1,6 \times 10^{-19} \text{ V}$.

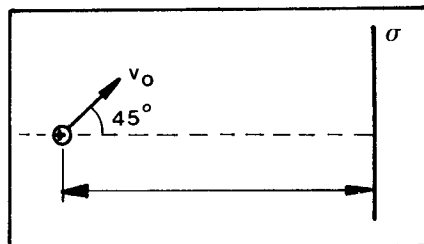
- 10.- Irudian ageri den moduan, protoi bat perpendikularki jaurtiki da xafla kargatu baten kontra. Kalkula bedi protoiak behar duen hasierako abiadurarik txikiena, xaflara hel dadin.



Datuak: $x_0 = 1 \text{ cm}$, $\sigma = 8,85 \times 10^{-8} \text{ C m}^{-2}$

Eraitza: 10^5 m s^{-1} .

- 11.- Errepika bedi aurreko ariketa hasierako abiaduraren norabidea aldatuz, irudian adierazi den moduan. Halaber, kalkula bedi protoiaren abiadura xaflara iritsiko den unean. Har bitez aurreko ariketari dagozkion datuak.



Eraitza: $v_0 = 10^5 \sqrt{2} \text{ m s}^{-1}$.

Xaflara iritsi den uneko abiadura: 10^5 m s^{-1} (xaflaren paraleloa).

- 12.- a) Kubo baten zentruan q karga duen partikula bat kokatu da. Lor

bedi kuboaren edozein aurpegitan zeharreko fluxu elektrikoa (ikus bedi 15.5. problema).

b) Orain aipaturiko karga, kuboaren erpin batetan jarri da. Lor bedi, karga horrekin kontakturik ez duten hiru aurpegiatariko edozeinetan zehar dagoen fluxu elektrikoa.

Emaitzak: a) $\frac{q}{6 \epsilon_0}$.

b) $\frac{q}{24 \epsilon_0}$.

13.- Kotsidera bedi a erradiodun eta altuera infinituko zilindro bat. Zilindroaren gainazaleko karga-dentsitatea σ da.

a) Lor bedi, karga-banaketa honek sorturiko eremu elektrikoa.

b) Lor bedi, zilindroaren ardatzean jarri behar den luzera infinitudun hariaren karga-dentsitate lineala, zilindroak sorturiko eremua nulua izan dadin.

Emaitzak: a) $R < a$, $E = 0$

$R > a$, $\mathbf{E} = \frac{\sigma a}{\epsilon_0} \frac{1}{R} \mathbf{u}_R$.

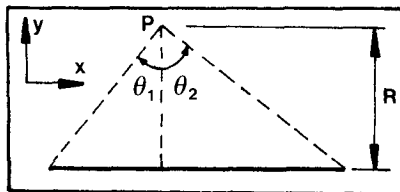
Hemen R delakoa zilindroaren ardatzetik espazioko edozein puntutarako distantzia da, $\mathbf{u}_R$ zilindroaren perpendikularra den eta espazioko edozein puntutarantz orientaturik dagoen bektore unitario delarik.

b) $\lambda = -2 \pi a \sigma$.

14.- Kotsidera bitez elkarren paraleloak diren bi xafla. Xaflen arteko potentzial-diferentzia V da eta distantzia, l , zeina xaflen dimentsioekin konparaturik oso txikia den. Kalkula bedi xaflek elkarri eginiko indarra, azalera-unitateko.

Emaitza: $\frac{\epsilon_0}{2} \left[\frac{V}{l} \right]^2$.

15.- Biz alboko irudian adierazi den λ karga-dentsitate linealeko eta L luzerako burdinharria. Froga bedi burdinhari kargatu horrek sortera-zitako eremu elektrikoak burdinhariaren norabidearekiko dituen osagai



perpendikularra eta paraleloa ondokoak direla:

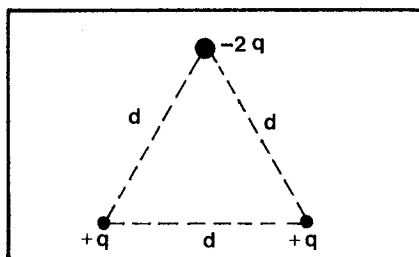
$$E_{\perp} = \frac{\lambda}{4 \pi \epsilon_0 R} (\sin |\theta_1| + \sin |\theta_2|) ,$$

$$E_{\parallel} = \frac{\lambda}{4 \pi \epsilon_0 R} (\cos |\theta_2| - \cos |\theta_1|) .$$

- 16.- Luzera infinitudun bi hari zuzen l distantziaz aldendurik daude. Batak $+\lambda$ karga-dentsitatea du eta besteak $-\lambda$. Kalkula bedi hariek elkarri eginiko indarra, luzera-unitatekoa.

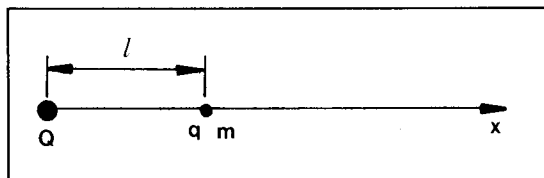
Emaitza: $\frac{\lambda^2}{2 \pi \epsilon_0 l}$.

- 17.- Kalkula bedi irudian adierazitako karga-banaketaren momentu dipolarra. Momentu dipolarra kalkulatzean erreferentziakotzat hartzen deneko puntuaren aukeraketaren menpekoea al da lorturiko emaitza?



Emaitza: $\mathbf{p} = -q d \sqrt{3} \mathbf{j}$.

- 18.- Geldirik dagoen Q kargatik l distantziara m masadun q karga kokatu da, abiadurarik gabe, irudian adierazi den bezala. Hasierako abiadurarik ez duen q karga honek infinituan v abiadura lortuko lukeela jakinik, aurki bedi Q karga finkoaren balioa, q, m, l eta v direlako funtzioan.



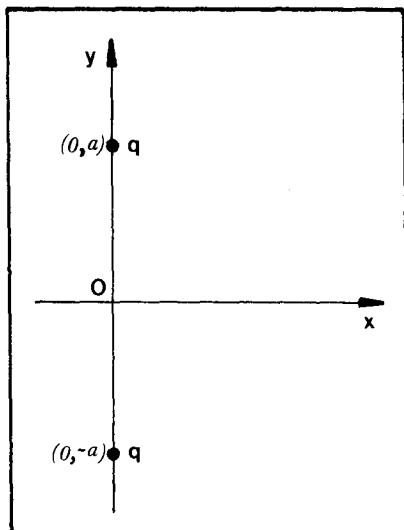
Emaitza: $Q = \frac{2 \pi \epsilon_0 m v^2 l}{q}$.

- 19.- q magnitude bereko bi karga puntual eta positibo $(0,a)$ eta $(0,-a)$ puntuetan finko daude (ikus irudia).

a) Kalkula bedi potentzial elektrikoa OX ardatzaren edozein puntutan, hots, $V = V(x)$ delako funtzioa, eta egin bedi funtzio honen adierazpide grafikoa.

b) Kalkula bedi sorterezitako eremu elektrikoak OX ardatzean hartutako balioa.

c) Demagun q kargadun eta m masadun partikula koordenatu-jatorrian dagoelarik, OX ardatzerdi positiboaren norabide eta norantza berean pixka bat higri erazi ondoren askatu egin dela. Zein izango da partikularen abiadura, infinituki urrundutakoan?



$$\text{Emaitzak: a) } V(x) = \frac{q}{2\pi\epsilon_0(x^2 + a^2)^{1/2}} .$$

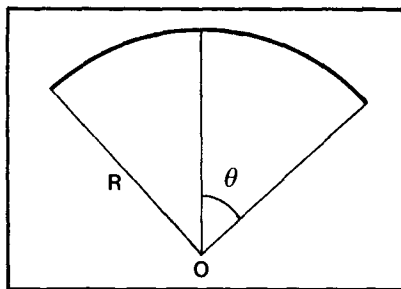
$$\text{b) } E(x) = \frac{qx}{2\pi\epsilon_0(x^2 + a^2)^{3/2}} \mathbf{i} .$$

$$\text{c) } v = \frac{q}{(\pi\epsilon_0 m a)^{1/2}} .$$

20. — λ karga-dentsitate linealako hari meheak arku zirkularraren itxura du, irudian ageri den bezala. Kalkula bitez:

a) Eremu elektrikoa arkuaren kurbadura-zentruan, hots, O puntuan.

b) Potentzial elektrikoa puntu berean.



$$\text{Emaitzak: a) } E_O = \frac{\lambda \sin \theta}{2\pi\epsilon_0 R} \mathbf{i} .$$

$$\text{b) } V_O = \frac{\lambda \theta}{2\pi\epsilon_0} .$$

- 21.- Froga bedi, Gauss-en teoremaz baliaturik, irudian adierazi den kargabanaketa jarraia sorteraizako eremu elektrikoak kanpoko edozein puntutan duen intentsitatea ondokoa dela:

$$\mathbf{E} = E_z \mathbf{k}, \text{ non}$$

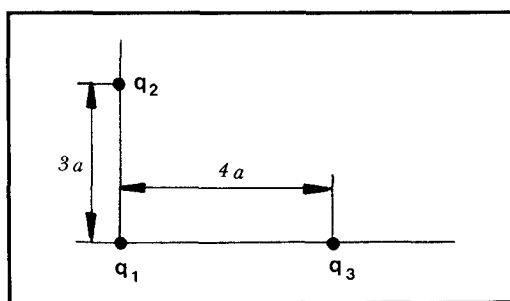
$$E_z = \frac{\rho a}{2 \epsilon_0} \quad \left(z > \frac{a}{2} \right),$$

$$E_z = -\frac{\rho a}{2 \epsilon_0} \quad \left(z < -\frac{a}{2} \right).$$

Zein da irudiko $P_1(x, y, z)$ eta $P_2(x, y, z + d)$ direlako puntuen arteko potentzial-diferentzia?

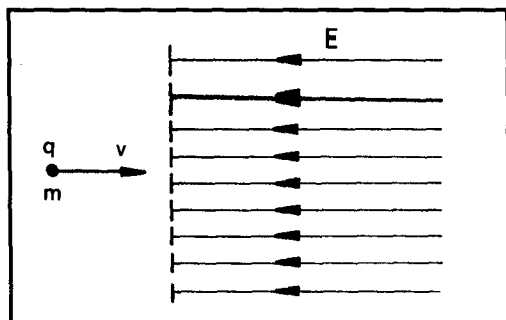
$$\text{Emaitza: } V_1 - V_2 = \frac{\rho a}{2 \epsilon_0} d.$$

22. Lor bedi q_1, q_2 eta q_3 direlako kargak irudian adierazitako posizioetan jartzeko burutu behar izan den lana.



$$\text{Emaitza: } W = \frac{1}{4 \pi \epsilon_0 a} \left(\frac{q_1 q_2}{3} + \frac{q_1 q_3}{4} + \frac{q_2 q_3}{5} \right).$$

- 23.- Kontsidera dezagun eremu elektrikoak E delako balio konstantea hartzen duen espazioalderantz v abiaduraz jaurtiki den q kargadun eta m masadun partikula, irudian adierazi den bezala. Kalkula bitez,
- grabitaterik gabe ($g = 0$) eta
 - grabitatearen indarra kontsideratuz ($g \neq 0$),
- partikula iritsiko deneko punturik urrunenaren koordinatuak eta eremu elektrikoa ez-nulua deneko espazioaldean emango duen denbora.



Emaitza: a) $x = \frac{m v^2}{2 q E}$; $t = \frac{2 m v}{q E}$.

b) $x = \frac{m v^2}{2 q E}$; $y = -\frac{m^2 v^2}{2 q^2 E^2} g$; $t = \frac{2 m v}{q E}$.

- 24.- Kontsidera dezagun bi karga berdin eta positibo lotzen dituen $2a$ luzeradun zuzenkiaren erdiko puntutik pasaturik zuzenkiarekiko perpendikularra den plano. Ereku elektrikoa maximoa deneko plano honetako puntuen leku geometrikoa, simetria, zirkunferentzia bat da. Lor bedi zirkunferentzia honen erradioa.

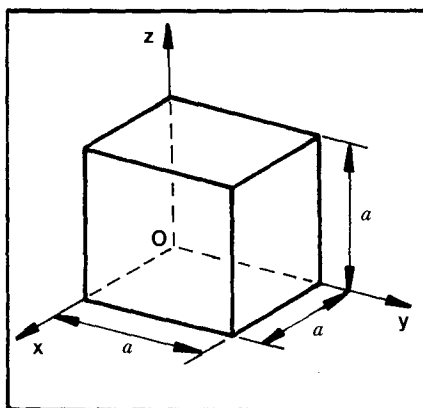
Emaitza: $r = \frac{a}{\sqrt{2}}$.

- 25.- a aldeko gainazal kubiko itxia OX ardatzarekiko paraleloa den eremu elektriko baten eraginpean kokaturik dago, irudian ageri den bezala. Kalkula bitez gainazal itxi honetan zeharreko fluxu elektrikoa eta gainazalaren barneko karga osoa, eremu elektrikoa ondoko denean:

a) $\mathbf{E} = C \mathbf{i}$,

b) $\mathbf{E} = C x \mathbf{i}$,

c) $\mathbf{E} = C (y \mathbf{i} + x \mathbf{j})$, C delakoa konstante bat izanik.



Emaitza: a) $Q_E = 0$; $q_b = 0$.

b) $Q_E = C a^3$; $q_b = \epsilon_0 C a^3$.

c) $Q_E = 0$; $q_b = 0$.

26. Bi esfera eroale eta kargatu kontaktuan jarri dira, eta ondoren berriro banatu. Kalkula bedi esfera bakoitzak banatu ondoren izango duen karga, hasierako kargak $Q_1 = 10^{-7}$ eta $Q_2 = 2 \cdot 10^{-7} \text{ C}$ -etakoak, eta erradioak $R_1 = 0,10$ eta $R_2 = 0,15 \text{ cm}$ -takoak direla jakinik.

Emaitzak: $Q'_1 = 1,2 \cdot 10^{-7} \text{ C}$, $Q'_2 = 1,8 \cdot 10^{-7} \text{ C}$.

27. Bi xafla laun eta paraleloz osoturiko kondentsadore batek 10^3 pF -tako kapazitatea du. Xafla bakoitzak duen karga 10^{-6} C -etako baldin bada,

- zein izango da xaflen arteko potentzial-diferentzia?
- Karga konstante mantentzen dela suposatuz, zein izango da xaflen arteko potentzial-diferentzia, bien arteko distantzia bikoiztean?
- Zein da xaflen arteko distantzia bikoizteko burutu behar den lana?

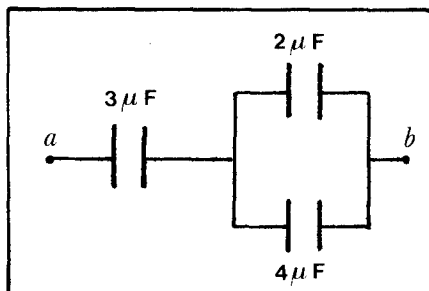
Emaitzak: a) $\Delta V = 10^3 \text{ V}$.

b) $\Delta V' = 2 \cdot 10^3 \text{ V}$.

c) $W = -5 \cdot 10^{-4} \text{ J}$.

- 28.- Irudiko kondentsadore-elkarketa emanik, kalkula bitez

- kondentsadore bakoitzaren karga eta potentzial-diferentzia,
- eta sistemaren energia, a eta b puntuen arteko potentzial-diferentzia 300 V -tako dela jakinik.



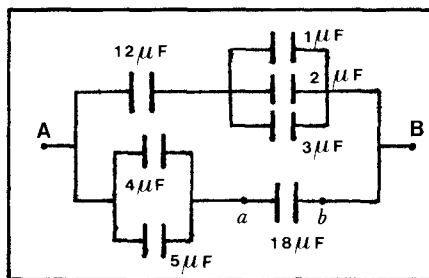
Emaitzak: a) $Q_1 = 200 \mu\text{C}$, $Q_2 = 600 \mu\text{C}$, $Q_3 = 400 \mu\text{C}$.

$\Delta V_1 = \Delta V_3 = 100 \text{ V}$, $\Delta V_2 = 200 \text{ V}$.

b) $U = 9 \cdot 10^{-2} \text{ J}$.

- 29.- a) Kalkula bedi irudian adierazitako kondentsadore-elkarketaren baliokidea den kondentsadorearen kapazitatea.

- A eta B puntuen arteko potentzial-diferentzia 120 V -tako bada, aurki bitez 18 F -tako kapazitatea duen kondentsadorearen karga eta potentzial-diferentzia.

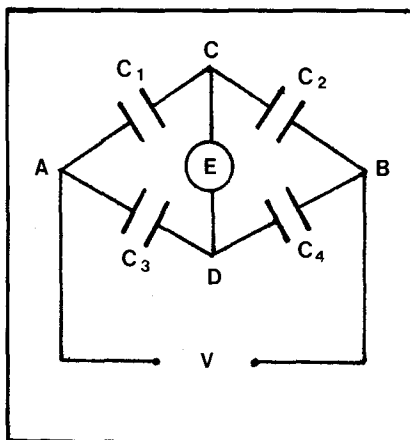


Emaitzak: a) $C = 10 \mu F$.

b) $\Delta V_{ab} = 40 V$, $Q = 7,2 \cdot 10^{-4} C$.

- 30.- Biz alboko irudian adierazitako kondentsadore-elkarketa. A eta B puntuen arteko potentzial-diferentzia V dela jakinik, froga bedi E elektrometroak C eta D puntuen arteko $0 V$ -tako potentzial-diferentzia neurtuko duela, $C_1/C_2 = C_3/C_4$ denean.

Oharra: Dispositibo honen bidez, beraz, edozein kondentsadorearen kapazitatea kalkula daiteke, emandako kapazitate baten eta beste bi kapazitatereen arteko erlazioaren funtzioan.



16. GAIA

KORRONTE ELEKTRIKOA

16.1. 1,2 mm-tako diametroa duen kobrezko hari bat, 5 A-tako korranteak zeharkaturik dago.

a) Kalkula bedi korrante-dentsitatea, uniformea dela suposatuz.

b) Kalkula bedi elektroien abiadura.

Datua: Kobrearen elektroien dentsitatea $N = 2,3 \times 10^{29}$ elektroien $/m^3$ balio du.

a) Korrante-banaketa uniformea dela kontutan hartuz, korrante-dentsitatea hauex izango da, definizioz:

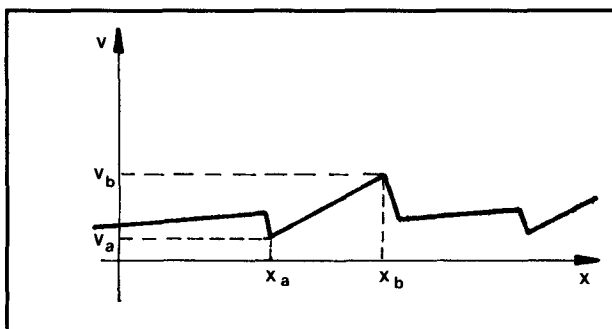
$$j = \frac{I}{S} = \frac{5}{\pi (0,6 \times 10^{-3})^2} = 4,42 \times 10^6 \text{ A m}^{-2}.$$

b) Orain korrante-dentsitatea eta oinarritzko kargen abiadura erlazionatzen dituen formula aplikatuko dugu, hau da,

$$j = \frac{I}{S} = N e v,$$

$$v = \frac{j}{N e} = 1,2 \times 10^{-4} \text{ m s}^{-1}.$$

Abiadura hau elektroien aske guztiei ez dagokiela gogor erazi behar da, aipaturiko elektroien daramatzaten abiaduren batezbesteko balioa baino ez delarik. Izan ere, harian zehar higitzen ari den elektroien askeren baten abiadura grafikoki adieraztean, gutxi gorabehera beheko irudian ageri denaren modukoa izango dela ikus dezakegu.



x_a puntuan, atomo batetiko talkaren ondorioz, elektroiak galdu egingo du energia zinetiko zerbait, beraren abiadura txikiagotuko delarik. x_a puntutik x_b puntura, elektroia atomo biren arteko espazioaldean higitzen ari da, eta eremu elektrikoak azeleratu egiten du, beraren abiadura handiagotuz doalarik. Hemendik pixka bat aurrerago, elektroiak beste atomo batekin topo egingo du, energia zinetikoaren parte bat galduz, abiadura txikiagotuz eta prozesu osoa errepikatuz.

Elektroi honi gertatuko zaiona, ez zehazki, noski, baina bai antzera, beste guztiei ere gertatzen zaie. Honelatan, elektroik bakoitzaren abiadurak bere batezbesteko balio propioa du. Bada, batezbesteko balio hauen guztion batezbesteko balioa da, hain zuzen, kalkulatu dugun abiadura.

16.2. E eremu elektrikoaren eraginpean, elektroik bat solido baten barruan higitzen ari da. Elektroien gainean, indar elektrikoaz aparte,

$$f = -\frac{m}{\tau} v$$

balio duen marruskadura-indar bat eragiten ari da. (Egia esan, indar hau lan-eredu gisa erabiliko dugu, elektroik eta solidoen atomoen arteko talken ondorioak nolabait kontutan hartzeko, alegia, eta fluido baten barnean gorputz baten higidurarekiko analogiaz planteatuko dugu. Ikus *Fisika Orokorra (I)* liburuko 5.6 atala). Adierazpen honetan, m delakoa elektroien masa da, v beraren abiadura eta τ , zeinari lasaikuntz denbora deritzon, solidoaren ezaugarriekin erlazionaturik dagoen koefiziente bat.

a) Erakuts bedi ezen elektroien abiadura, v_l , muga-balio batetarantz doala. Kalkula bedi aipaturiko muga-balioa. Halaber, froga bedi, $v_l = \mu E$ delako eran idatz daitekeela. Zeintzu dira τ eta μ koefizienteek dagozkien dimentsioak?

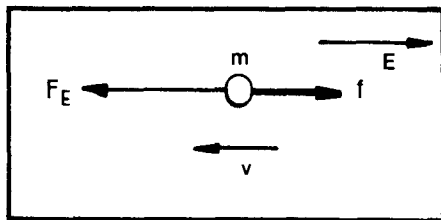
b) Erakuts bedi, korrante-dentsitatea delako bektorea $j = \sigma E$ eran jar daitekeela. Halaber, lor bedi σ delako honen eta solidoen ezaugarrien arteko erlazioa. Zeintzu dira beraren dimentsioak?

a) Elektroien higidurari dagokion ekuaziorik orokorrena hau da:

$$F_E + f = m a ,$$

hau da,

$$-e E - \frac{m}{\tau} v = m a .$$



Dakigunez, elektroiak muga-abiadura lortzeko baldintza, beraren azelerazioa nulua izatea besterik ez da. Beraz,

$$a = 0 \quad v_l = -\frac{e\tau}{m} E = \mu E$$

$$\mu = -\frac{e\tau}{m} \text{ delarik .}$$

Azter ditzagun orain τ eta μ koefizienteen dimentsioak:

$$f = -\frac{m}{\tau} v \rightarrow [f] = [m] [\tau^{-1}] [v] ,$$

$$[\tau] = [m] [v] [f^{-1}] = M L T^{-1} M^{-1} L^{-1} T^2 = T .$$

$$\mu = -\frac{e\tau}{m} \rightarrow [\mu] = [e] [\tau] [m^{-1}] ,$$

$$[\mu] = I T T M^{-1} = M^{-1} T^2 I \text{ edo } [\mu] = M^{-1} T Q .$$

b) Elektroiek muga-abiadura hartzean, honelakoa izango da j bektorea:

$$j = N (-e) v_l = -N e \mu E = \frac{N e^2 \tau}{m} E = \sigma E ,$$

$$\sigma = -N e \mu = \frac{N e^2 \tau}{m} \text{ delarik .}$$

Alde batetik, bistakoa denez, j eta E bektoreak norantza berekoak dira, nahiz eta korrontea, kasu honetan, karga negatiboek (elektroiek hain zu- zen) sorturikoa den.

Bestalde, σ koefizienteak, eroalearen eroankortasun elektrikoa deritzonak, ba du gaiaren beraren egitura atomikoari dagozkion ezaugarriekin zerikusirik, hots, N (elektroi askeen dentsitatea) eta τ (lasaikuntz denbora) direlakoekin erlazionaturik dago (m eta e , elektroien

masa eta karga, oinarritzko konstanteak dira).

Azkenez, azter ditzagun eroankortasunaren dimentsioak:

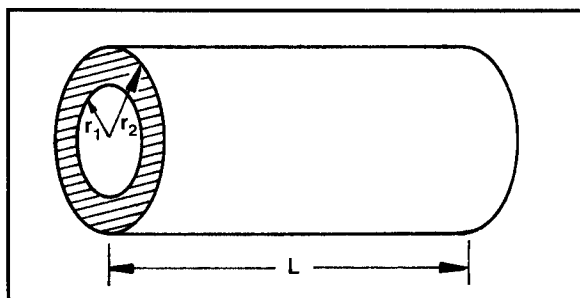
$$[\sigma] = [N] [e] [\mu] = M^{-1} L^{-3} T^3 I^2, \quad (\text{edo } M^{-1} L^{-3} T Q^2)$$

σ eroankortasun elektrikoaren alderantzizkoari, ρ , erresistibitate elektrikoa deritzo; hau da, definizioz,

$$\rho = \frac{1}{\sigma},$$

eta erresistibitateari dagozkion dimentsioak, jakina, eroankortasunak dituen dimentsioen alderantzizkoak dira.

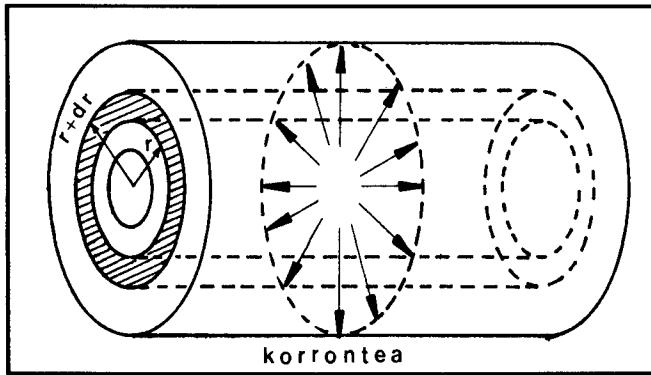
16.3. Kontsidera bedi irudiko zilindro eroalea (barrualdean hutsik dago). Materialaren erresistibitate elektrikoa ρ da.



a) Zilindroaren bi oinarrien artean potentzial-diferentzia ezartzean, karga askeak beraren ardatzaren paraleloki higituko dira. Kalkula bedi, kasu honetan zilindroak agertuko duen erresistentzia elektrikoa (ardatz-korronteari dagokion erresistentzia, alegia).

b) Zilindroaren barne eta kanpo-azalen artean potentzial-diferentzia ezartzean, karga askeak azal batetik bestera higituko dira erradialki. Kalkula bedi, kasu honetan zilindroak agertuko duen erresistentzia elektrikoa (korronte erradialari dagokion erresistentzia, alegia).

Kasu bietan erresistentzia elektrikoaren definizioaz baliatuko gara, hau da:



$$dR = \rho \frac{dr}{L 2 \pi r} ,$$

$$R = \int dR = \frac{\rho}{2 \pi L} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r} = \frac{\rho}{2 \pi L} \ln \left(\frac{r_2}{r_1} \right) .$$

Emaitza biak konparatuz, erresistentzia elektrikoan eragin duten puntuak, ondoko hauexek direla esan dezakegu:

- gaiaren egitura (ρ erresistibitatearekiko menpekotasuna).
- eroalearen dimentsioak (r_1 , r_2 eta L -kiko menpekotasuna).
- karga askeek daramaten higiduraren norabidea.

16.4. Eroale batetan zehar, $I = 10 \sin 100 \pi t$ denboraren funtzioa den korronea doa (I intentsitatea A-tan eta t denbora s-tan neurtu dira).

a) Kalkula bedi, eroalearen edozein sekzio normal zeharkatzen duen karga-kantitatea, ondoko denbora-tarteetan:

$$\begin{array}{ll} t = 0 \text{ s-tik} & t = 0,005 \text{ s-tara,} \\ t = 0 \text{ s-tik} & t = 0,01 \text{ s-tara,} \\ t = 0,01 \text{ s-tatik} & t = 0,015 \text{ s-tara,} \\ t = 0 \text{ s-tik} & t = 0,02 \text{ s-tara.} \end{array}$$

b) Aipaturiko denbora-tarte bakoitzean, zein izango litzateke, karga-kantitate berbera eramango lukeen korrante konstanteko intentsitatearen balioa? Balio honi, intentsitatearen batezbesteko balioa deritzo.

a) Denbora-tarte batetan eroalearen edozein sekziotan zehar pasatzen den karga-kantitatea kalkulatzeko, intentsitatearen definizioaz baliatuko gara, hau da:

$$I = \frac{dq}{dt} \rightarrow Q = \int_{t_0}^t I dt .$$

Emandako denbora-tarteetan, hauexek izango dira eskaturiko kargakantitateak:

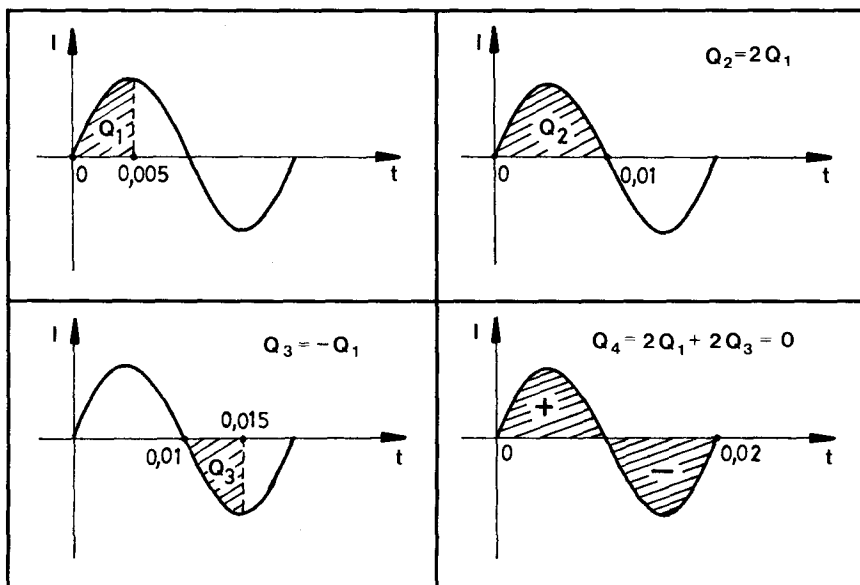
$$Q_1 = \int_0^{0,005} 10 \sin 100 \pi t dt = \frac{1}{10\pi} C ,$$

$$Q_2 = \int_0^{0,01} 10 \sin 100 \pi t dt = \frac{1}{5\pi} C ,$$

$$Q_3 = \int_{0,01}^{0,015} 10 \sin 100 \pi t dt = -\frac{1}{10\pi} C ,$$

$$Q_4 = \int_0^{0,02} 10 \sin 100 \pi t dt = 0 .$$

Emaizta hauek, integralaren ulerkuntza geometrikoaren arauera, grafikoki adieraz ditzakegu, ondoko irudietan erakusten den moduan.



Zeinuei dagokienez, lehenengo periodoerdian ($t = 0 \text{ s}$ -tik, $t = 0,01 \text{ s}$ -tara), korrontea norantza batetan doa, eta norantza hori, hain zuzen, positibotzat jo izan da komentzionalki. Hori dela eta dago jarrita, Q_1 eta Q_2 karga-kantitateek daramaten zeinu positiboa.

Bigarren periodoerdian, oster, korronteak aldatu egiten du bere norantza eta, beraz, erizpide konbentzionala mantenduz, negatibotzat jotzen da. Hortik sortu da, Q_3 karga-kantitateak daukan zeinu negatiboa. Hots, aurkitu ditugun zeinuek, ez dute inolako harremanik korrontea sortu duten karga-motekin (izan ere, karga hauek elektroiak dira kasu gehienetan), kargek sekzioa zeharkatzean duten norantzarekin baizik.

Azkenez, $Q_4 = 0$ emaitzak ondokoa esan nahi du, alegia, periodoerdi batetan eta norantza batetan sekzioa zeharkatu duen karga-kantitate berberak, hurrengo periodoerdian berriz zeharkatuko duela, baina aurkako norantzan. Honelatan, periodo oso batetan sekzioa zeharkatu duen karga-balantze netoa nulua da.

b) Intentsitatearen batezbesteko balioaren definizioa erabiliz, hauxe dugu:

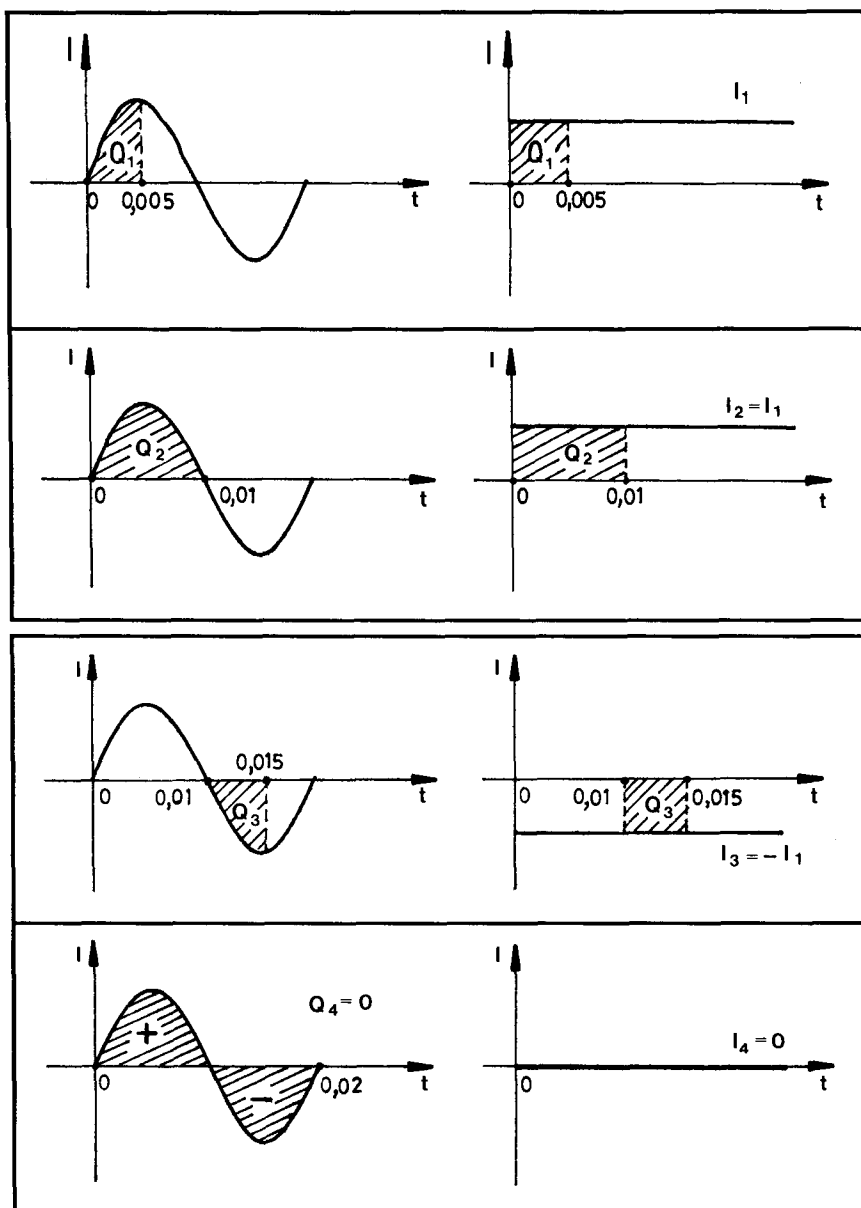
$$I_1 = \frac{Q_1}{\Delta t_1} = \frac{\frac{1}{10 \pi}}{0,005 - 0} = \frac{20}{\pi} \text{ A} ,$$

$$I_2 = \frac{Q_2}{\Delta t_2} = \frac{\frac{1}{5 \pi}}{0,01 - 0} = \frac{20}{\pi} \text{ A} ,$$

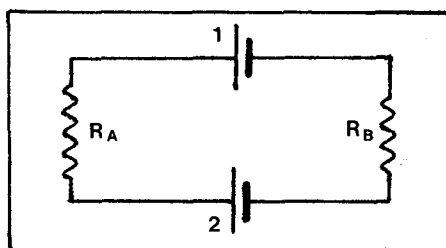
$$I_3 = \frac{Q_3}{\Delta t_3} = \frac{-\frac{1}{10 \pi}}{0,015 - 0,01} = -\frac{20}{\pi} \text{ A} ,$$

$$I_4 = \frac{Q_4}{\Delta t_4} = \frac{0}{0,02 - 0} = 0 .$$

Edo, grafikoki adierazita:



16.5. Irudiko zirkuituan, kalkulatu bedi korrante elektrikoaren intentsitatea. Halaber, egin bedi energi balantzea.



Datuak:

$$R_A = 15 \, \Omega$$

$$R_B = 15 \, \Omega$$

$$E_1 = 1 \text{ elementuaren indar elektroeragilea} = 100 \, V$$

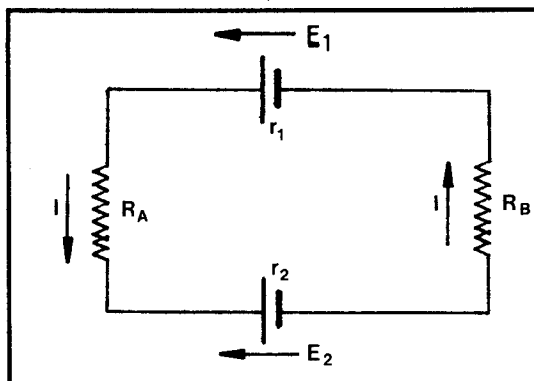
$$r_1 = 1 \text{ elementuaren barne-erresistentzia} = 20 \, \Omega$$

$$E_2 = 2 \text{ elementuaren indar elektroeragilea} = 40 \, V$$

$$r_2 = 2 \text{ elementuaren barne-erresistentzia} = 10 \, \Omega$$

Suposa dezagun, korronteak irudian adierazi den norantza duela. Zirkuitu bakarra delarik,

$$I = \frac{\sum_j E_j}{\sum_i r_i} = \frac{100 - 40}{15 + 15 + 20 + 10} = 1 \, A$$



Intentsitatearen zeinu positiboak, korronteari irudian jarri diogun norantza zuzena dela adierazten digu. Korronteari lehendabizikoan aurkako norantza eman izan bagenio, honela egin beharko genukeen:

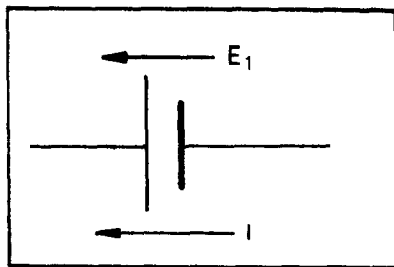
$$I = \frac{-100 + 40}{15 + 15 + 20 + 10} = -1 \, A$$

Zeinu negatibo honek, korrontearen norantzaz oker geundeekeela ohartaraziko liguke berehalaxe, eta beraz, aurreko kasuan egongo ginateke berriro.

Energi balantzea egiteko, ezer baino lehenago ondokoa aztertu behar dugu:

- zein edo zeintzu diren, zirkuitua (edo, zehazkiago, zirkuituko karga askeak) energiaz hornitu duten elementuak.
- zein elementuri zirkuituak (edo, zehazkiago, zirkuituko karga askeek) eman dion energia.

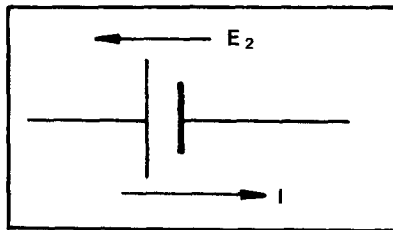
Gure kasuan, zirkuituari energia eman dion elementu bat baino ez dago, eta 1 sorgailu elektrikoa da (kontutan har, elementu honetan indar elektroeragilea eta intentsitatea norantza berekoak direla). Hona hemen sorgailuak sorturiko denbora-unitateko energia, edo potentzia:



$$P_1 = E_1 I = 100 \times 1 = 100w .$$

Zirkuitutik energia ateratzen ari diren elementuak, bi motatakoak dira:

- 2 hargailu elektrikoa (ohar bedi, nola elementu honetan indar elektroeragilea eta intentsitatea elkarren kontrako norantzakoak diren). Hona hemen hargailuak zirkuitutik denbora-unitateko harturiko energia erabilgarria (igogailu bat higierazteko, esate baterako), hau da, potentzia:



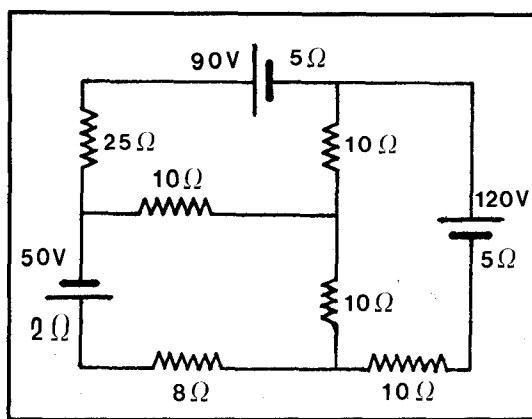
$$P_2 = E_2 I = 40 \times 1 = 40 w .$$

- Azkenez, zirkuitutik energia erauzi duten beste elementu batzu ere ba ditugu, erresistentzia guztiak alegia. Dakigunez, erresistentziek zirkuitutik hurrupatutako energia guztia, bero eran kanporatzen da. Gure kasuan, hauxe da erresistentziek kanpora bidali duten denbora-unitateko energi kantitatea edo potentzia:

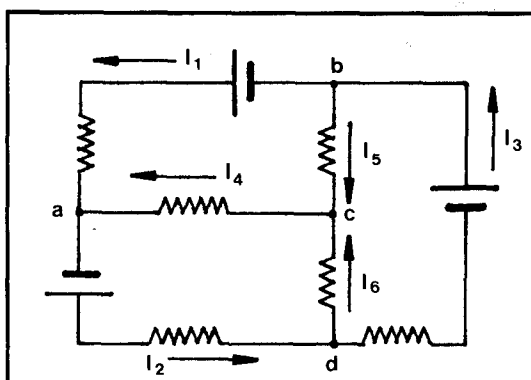
$$P_R = (r_1 + r_2 + R_A + R_B) I^2 = 60 \times 1 = 60 w .$$

Bistakoa denez, alde batetik, sorgailuaren bidez, zirkuituak 100 w hartu ditu, eta bestaldetik, hargailu eta erresistentzien bidez, beste horrenbeste ($40w + 60w = 100w$) itzuli ditu, energiaren kontserbazioaren printzipioaren arauera.

16.6. Irudiko zirkuituan, kalkula bedi adar bakoitzeko intentsitatea. Halaber, egin bedi energiaren balantzea. (Irudian bertan adierazi dira elementu bakoitzaren indar elektroeragilea eta erresistentzia).



Zirkuitu hau ez da aurrekoa bezain sinplea, argiro. Izan ere, aurrekoa serie-zirkuitua zen, eta problema honetakoa, berriz, sare elektrikoa. Beraz, Kirchhoff-en legeak erabili behar ditugu. Horretarako, lehendabiziko puntua ondokoa da, alegia, adar bakoitzean korronteari norantza bat esleitzea. Adibidez, suposa ditzagun irudian adierazitako norantzak.



- Korapiloen legea: zirkuituan dauden lau korapiloetariko bat ez dugu erabiliko (esate baterako d korapiloa):

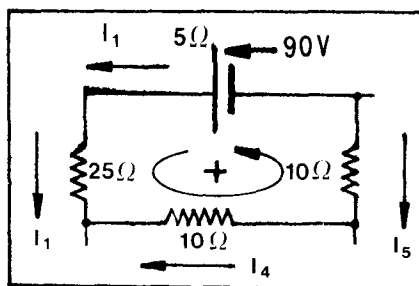
$$a \text{ korapiloa} : I_2 = I_1 + I_4 .$$

$$b \text{ korapiloa} : I_3 = I_1 + I_5 .$$

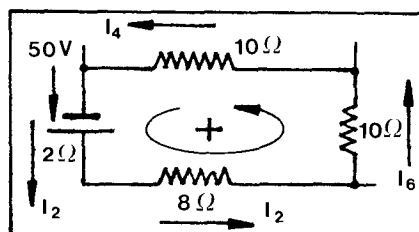
$$c \text{ korapiloa} : I_4 = I_5 + I_6 .$$

- Sareen legea: I_1 -tik I_6 -ra sei ezezagun ditugunez, beste hiru ekuazio behar ditugu; beraz, hiru sare hautatuko ditugu eta berauei legea aplikatuko. Kasu bakoitzean, sarearen ekuazioa idazterakoan erabiliko den norantza, bigizta gezidun baten bidez adieraziko da.

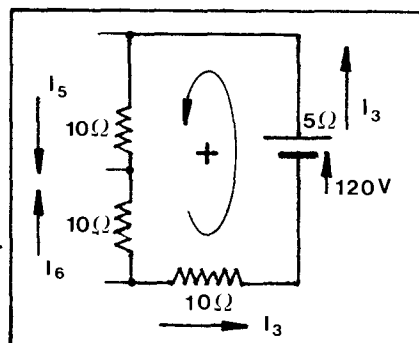
$$90 = (5 + 25) I_1 - 10 I_4 - 10 I_5 ,$$



$$50 = (2 + 8) I_2 + 10 I_6 + 10 I_4 ,$$



$$120 = (10 + 5) I_3 + 10 I_5 - 10 I_6 .$$



Zer esanik ez, nahiz sare-hautaketa nahiz erabilitako norantzak guztiz arbitrarioki egin dira. Ikasleak beste hiru sare eta bakoitzean nahi duen norantza planteatu ditzake.

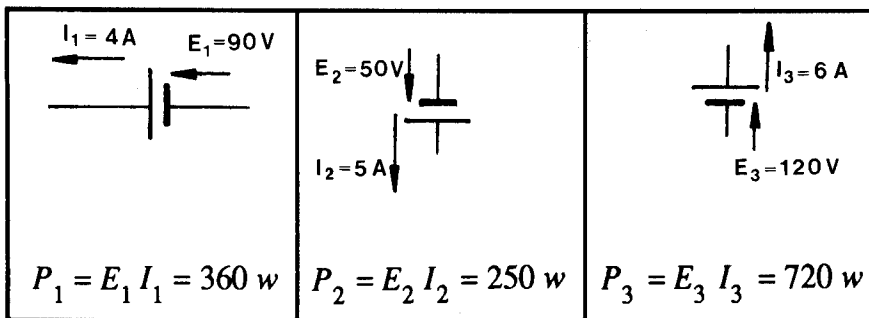
Aurreko sei ekuaziotako sistema ebatziz, ondoko emaitzak lortuko ditugu:

$$I_1 = 4 \text{ A} , \quad I_2 = 5 \text{ A} , \quad I_3 = 6 \text{ A} ,$$

$$I_4 = 1 \text{ A} , \quad I_5 = 2 \text{ A} , \quad I_6 = -1 \text{ A} .$$

Hau da, lehenengo bost korronteen norantzak zuzen planteaturik daude; seigarrenari, ordea, planteamenduaren aurkakoa dagokio.

Energi balantzea egiteko, zirkuituan dauden sorgailu eta hargailuak aztertu behar ditugu (ikus, adibidez, aurreko problematan adierazitako kontsiderazioak). Kasu honetan, sorgailuei dagokienez, hona hemen bakoitzak sorturiko energia (denbora-unitatekoa):



Eta hirurek batera sorturikoa:

$$P_G = P_1 + P_2 + P_3 = 1330 \text{ w} .$$

Bestalde, erresistentzien kausaz bero bihurtzen den denbora-unitateko energia elektrikoa, ondokoa da:

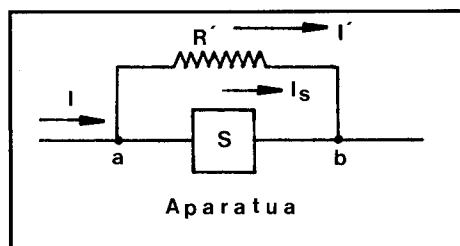
$$P_R = I_1^2 (r_1 + R_1) + I_2^2 (r_2 + R_2) + I_3^2 (r_3 + R_3) \\ + I_4^2 R_4 + I_5^2 R_5 + I_6^2 R_6 = 1330 \text{ w} .$$

Aurreko probleman ikusi dugun era berebean, hemengo honetan ere bete egin da energiaren kontserbazioaren printzipioa.

16.7. Aparatu elektriko batek jasan dezakeen korronteirik handiena 2,5 A-takoa da, eta beraren barne-erresistentziak 20Ω balio du. Adieraz bedi zer egin behar dugun,

- a) Aparatua 15 A-tako korrontea doaneko lerro elektriko batetan konektatzeko.
- b) Aparatua 150 V-tako potentzial-diferentzia dagoneko bi punturen artean konektatzeko.

a) R' erresistentzia paraleloan jarriko diogu aparatuari, hurrengo irudian adierazi den moduan, I korrontearen I' zatia bertatik desbidera dadin.



Lor dezagun R' -ren balioa:

a korapiloan:

$$I = I' + I_s$$

eta bestetik,

$$V_a - V_b = \begin{cases} = I' R' \\ = I_s R_s \end{cases} \rightarrow I' R' = I_s R_s .$$

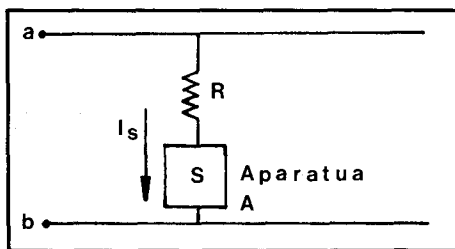
Bi ekuazio horietatik,

$$I_s = \frac{R'}{R_s + R'} I = \frac{R'}{20 + R'} 15 .$$

Baina, enuntziatuaren arauera, I_s korronteak ezin dezake 2,5 A baino gehiago balio. Beraz,

$$\frac{R'}{20 + R'} 15 \leq 2,5 \rightarrow R' \leq 4 \Omega .$$

b) Bigarren kasuan R erresistentzia seriean jarriko dugu aparatuarekin, honek a eta b puntuen arteko potentzial-diferentzia osoa jasan ez dezan, zeren jasango balu, bertan zehar pasatuko litzatekeen korronteak, onarturiko balio maximoa gaingituko bait luke.



Lor dezagun R -ren balioa:

$$V_a - V_b = I_s (R + R_s) \rightarrow I_s = \frac{V_a - V_b}{R_s + R} = \frac{150}{20 + R} .$$

Azkenez, I_s -ren balioa mugatu behar dugu, enuntziatuaren arauera, hau da:

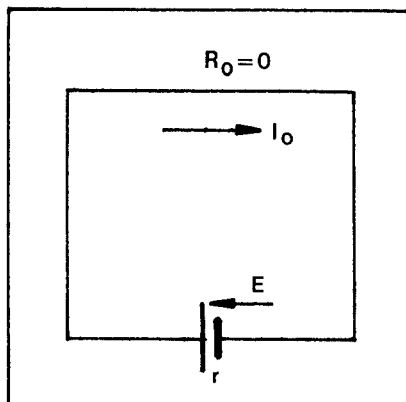
$$\frac{150}{20 + R} \leq 2,5 \rightarrow R \geq 40 \, \Omega .$$

16.8. E indar elektroeragilea eta r barne-erresistentzia dituen sorgailu bat, R erresistentzia duen zirkuitu batetara konektatu da.

- a) Froga bedi, ezen R erresistentziak potentzia maximoa kontsumituko duela, korrontearen balioa zirkuitulaburreko korrontearen erdia denean.
- b) Lor bedi aipaturiko potentzia maximoa.

Ezer baino lehenago, zirkuitulaburreko korrontea zer den ikusiko dugu. Demagun gure sorgailua $R_0 = 0$ duen zirkuitu ideal batekin konektatu dugula. Sortuko lukeen intentsitatearen balioa, ondokoa izango litzateke:

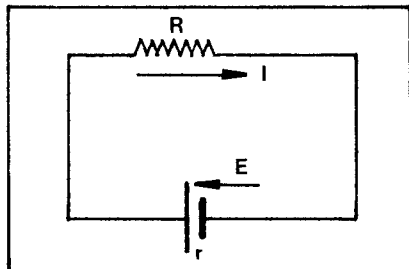
$$I_0 = \frac{E}{r} .$$



Definizioz, hau da zirkuitulaburreko korrontearen balioa. Ez da esan beharrik, definizio hutsa baino ez denik, erakutsitako experimentua ezin bait dugu praktikan egin, erresistentzia nuluko eroalerik ez dago eta.

Orain, sorgailua R erresistentziarekin konektatuko dugu. Hona hemen, R erresistentziak bero bihurtuko duen energia (denbora-unitatekoa):

$$P = I^2 R = EI - I^2 r .$$



Adierazpen honetan, nahiz E nahiz r balio finkoak dira; I , ordea, aldakorra da, R erresistentziak har ditzakeen balio desberdinen arauera. Beraz, ikuspuntu matematikotik, maximo eta minimoen problema bat dugu, P funtzioa eta I aldagaia izanik. Ondo ezaguna den bidea segituko dugu, hau da:

$$\frac{dP}{dI} = E - 2Ir = 0 \rightarrow I = \frac{E}{2r} = \frac{I_0}{2} .$$

Intentsitaterako lorturiko balioa P -ren balio maximoari dagokiola, erraz konproba daiteke, bigarren deribatua eginez.

b) Kasu honetan R erresistentziaren bero-potentzia, hauxe izango da:

$$P_{max} = E \frac{I_0}{2} - \left[\frac{I_0}{2} \right]^2 r = \frac{E^2}{2r} - \frac{E^2}{4r} = \frac{E^2}{4r} .$$

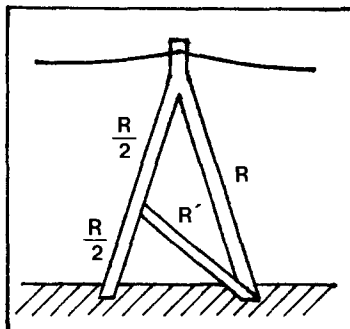
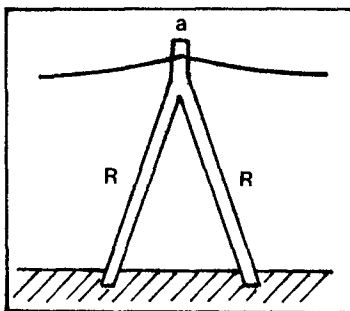
16.9. Bi hankatako tanta batek lerro elektriko baten kableari eusten dio.

a) Kalkula bedi tantaiaren hanketatik lurrera doan intentsitatea. Halaber, kalkula bedi tantaiaren balio-kidea den erresistentzia.

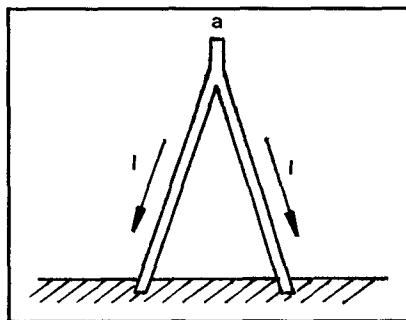
Datuak: Hanka bakoitzaren erresistentzia, $R = 200\text{k}\Omega$.
 a puntuaren eta lurraren arteko potentzial-diferentzia $V = 12\text{ kV}$.

b) Tantaia indartzeko, langet bat jarri zaio, irudian erakutsi den moduan. Errepika bedi aurreko azterketa.

Datua: Langetaren erresistentzia $= 250\text{ k}\Omega$.



a)

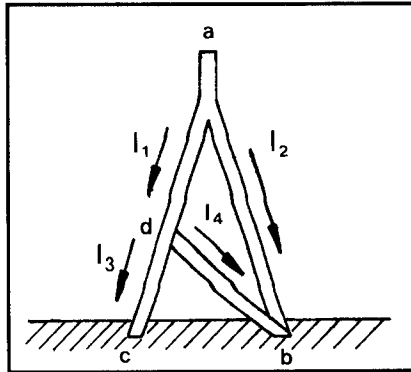


$$I = \frac{V_a - V_b}{R} = \frac{V_a - V_c}{R} = \frac{V}{R} = \frac{12 \times 10^3}{2 \times 10^5} = 0,06\text{ A} .$$

Horixe da, hanka bakoitzetik lurrera doan korrontea. Beraz, tantai osotik $I_0 = 2 I = 0,12 \text{ A}$ joango da. Tantaiaren baliokide den erresistentzia, hauxe izango da, definizioz:

$$R_T = \frac{V}{I_0} = \frac{12 \times 10^3}{0,12} = 10^5 \Omega .$$

b)



d korapiloari Kirchhoff-en lehenengo legea aplikatuz:

$$I_1 = I_3 + I_4 .$$

Bestaldetik:

$$V_a - V_b = V = I_2 R ,$$

$$V_a - V_c = V = I_1 \frac{R}{2} + I_3 \frac{R}{2} ,$$

$$V_a - V_b = V = I_1 \frac{R}{2} + I_4 R' .$$

Lau ekuazio horiek osoturiko sistema ebatziz, ondoko emaitzak lortuko ditugu:

$$I_1 = 0,07 \text{ A} , \quad I_2 = 0,06 \text{ A} ,$$

$$I_3 = 0,05 \text{ A} , \quad I_4 = 0,02 \text{ A} .$$

Beraz, tantai osotik lurrera doan korrontea ondoko hau izango da:

$$I'_0 = I_1 + I_2 = I_2 + I_3 + I_4 = 0,13 \text{ A} .$$

Eta tantaiaren baliokidea den erresistentzia, hauke:

$$R'_T = \frac{V}{I'_0} = \frac{12 \times 10^3}{0,13} = 9,23 \times 10^4 \, \Omega .$$

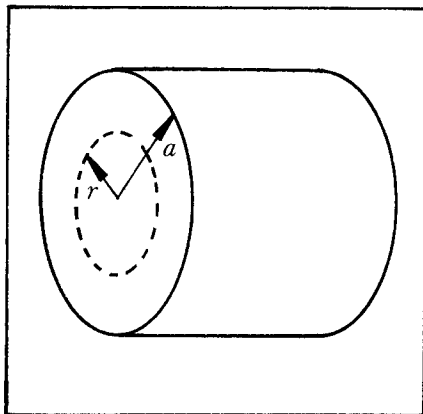
ARIKETAK

- 1.- Sekzio zirkularra duen eroale batetan, korrante-dentsitateak

$$j = j_a \frac{r}{a}$$

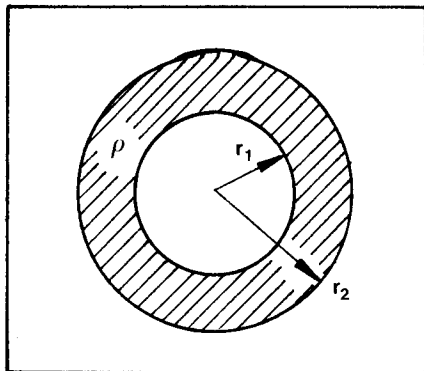
balio du, eroalearen ardatzerako distantziaren funtzioan. Lor bedi, sekzioan zehar pasatzen ari den intentsitate osoa.

Emitza:
$$\frac{2 \pi j_a a^2}{3} .$$



- 2.- ρ erresistibitatea duen gai eroalez egindako esfera huts batek, r_1 eta r_2 barne eta kanpo-erradioak ditu, hurrenez hurren. Lor bedi korrante erradialaren intentsitatea barne eta kanpo-azalen arteko potentzial-diferentzia V denean.

Emitza:
$$\frac{4 \pi r_1 r_2}{\rho (r_2 - r_1)} V .$$



- 3.- Eroale batetatik $I = 4 / 100 t^2$ balio duen intentsitatea doa (aurreko erlazioan, I ampèretan eta t segundotan neurtu dira).

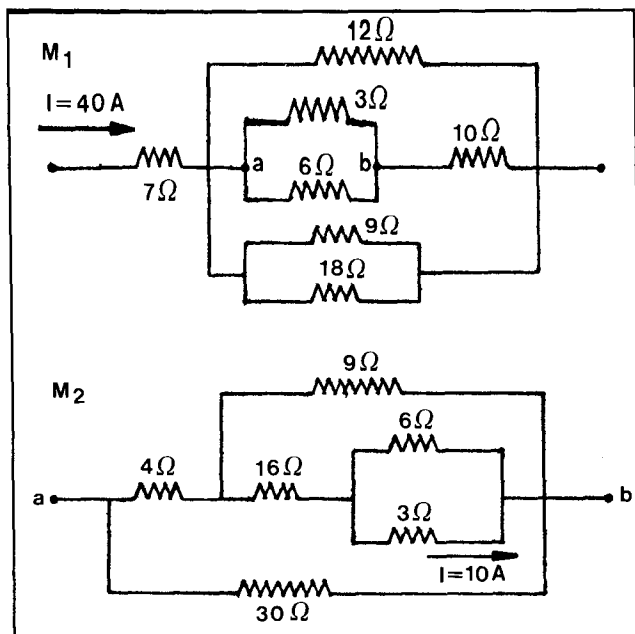
- Kalkula bedi, $t = 1 s$ -tik $t = 2 s$ -tarako denbora-tartean eroalearen sekzioan zehar pasatuko den karga-kantitatea.
- Kalkula bedi intentsitatearen batezbesteko balioa, aipaturiko denbora-tartean.

Emitza: a) $0,02 C$.

b) $0,02 A$.

- 4.- Hurrengo orriko irudiko M_1 eta M_2 erresistentzi multzoetan, kalkula bitez:

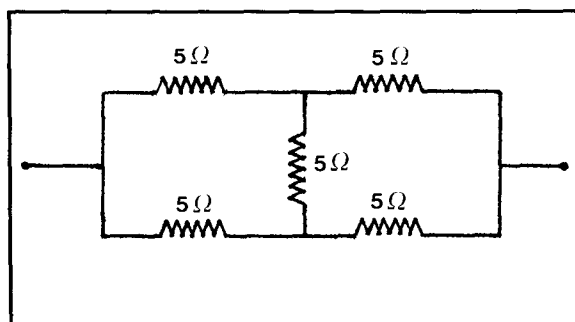
- Multzo bakoitzaren erresistentzia baliokidea.
- Kasu bakoitzean a eta b puntuen artean dagoen potentzial-diferentzia.



Emaitzak: a) $M_1 : 10 \Omega$, $M_2 : 7,5 \Omega$.

b) $M_1 : 20 V$, $M_2 : 450 V$.

5.- Kalkula bedi irudiko zirkuituaren erresistentzia baliokidea.

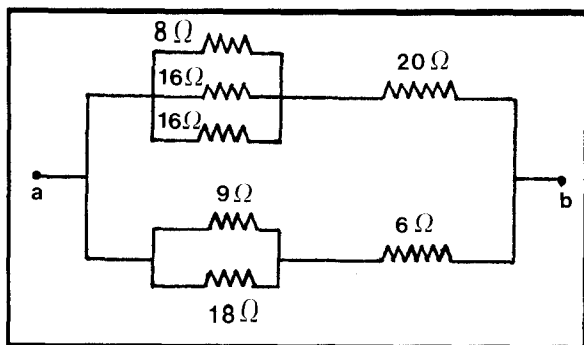


Emaitza: $R = 5 \Omega$.

6.- Hurrengo orrialdeko irudiko erresistentzi multzoan, kalkula bitez:

a) Erresistentzia baliokidea.

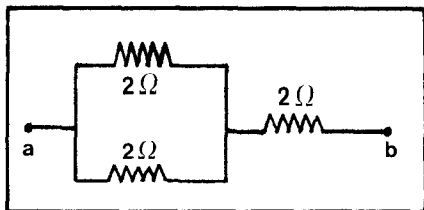
b) $V_a - V_b = 18 V$ egitean, 18Ω -tako erresistentzia zeharkatuko duen korrontea.



Emaitzak: a) 8Ω .

b) $5 A$.

- 7.- Irudiko erresistentzia bakoitzak barreia dezakeen potentziarik handienak $18 w$ balio du (potentzia handiagoa denean, erresistentzia urtu egingo da).



- Kalkula bedi, a eta b puntuen artean dagoen potentzial-diferentziaren baliorik handiena, ezein erresistentzia urtua izan ez dadin.
- Zenbateko potentzia barreiatuko dute hiru erresistentziek kasu honetan?

Emaitza: a) $9 V$.

b) $27 w$.

- 8.- Erresistentzia bereko hiru eroale seriean jarri dira elkarrekin. Multzoari potentzial-diferentzia zerbait aplikatu zaionean, barreiatu duen potentzia $10w$ -takoa izan da. Ondoren, eroaleak paraleloan jarri dira elkarrekin, potentzial-diferentziaren balio berbera mantendurik. Zenbateko potentzia barreiatuko du multzoak?

Emaitza: $90 w$.

- 9.- Autoetarako bateria baten bi borneen arteko potentzial-diferentzia $8,5 V$ -takoa da, eta sorturiko korrontea, $3A$ -takoa, magnitude biak deskargatzen ari denean neurturik. Kargatzen ari denean, berriz, aipaturiko magnitudeen balioak $11 V$ eta $2 A$ -takoa dira.

- Kalkula bitez, bateriaren indar elektroeragilea eta barne-erresistentzia.
- Zer potentzia barreiatuko du (bero bihurturik) bateriak kasu

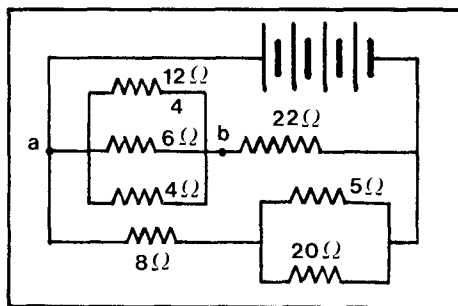
bakoitzean?

Emaitzak: a) 10 V ; $0,5\ \Omega$.

b) Deskargatzen ari denean, $4,5\text{ w}$;
kargatzen ari denean, 2 w .

10.- Irudian erakusten den zirkuituko bateria bakoitzak, $E = 36\text{ V}$ eta $r = 2\ \Omega$ ditu. Kalkula bitez:

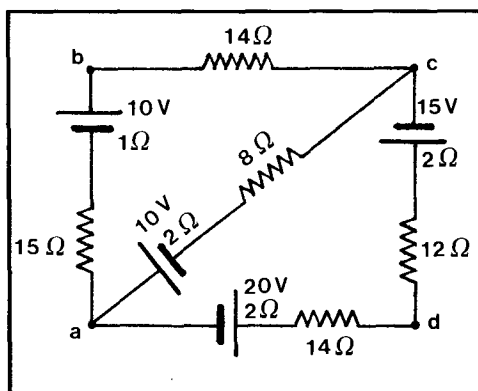
- Bateriak zeharkatuko dituen korrontea.
- a eta b puntuen arteko potentzial-diferentzia eta c eta d puntuen artekoa.



Emaitzak: a) 9 A .

b) $V_a - V_b = 4\text{ V}$; $V_c - V_d = 24\text{ V}$.

11.- Kalkula bitez ondoko zirkuituko intentsitate guztiak.



Emaitzak: $a\ b\ c$ norantzan, $\frac{13}{30}\text{ A}$.

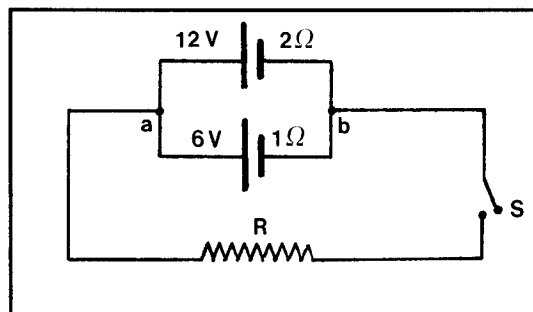
$a\ d\ c$ norantzan, $\frac{8}{30}\text{ A}$.

$c\ a$ norantzan, $\frac{21}{30}\text{ A}$.

12.- Hurrengo orrialdeko irudiko zirkuitua emanik,

- Kalkula bedi $V_a - V_b$, S etengailua irekita dagoenean.

- b) Etengailua itxita dagoenean, R erresistentzia zehar pasatzen ari den intentsitatea 3 A -takoa da, a -tik b -rako norantzan. Kalkula bitez, zirkuituko beste adarrak zeharkatuko dituzten intentsitateak.



- c) Kalkula bedi R erresistentzia.
 d) Lor bitez, zirkuituko bi bateriez osaturiko multzoaren baliokidea den bateria bakar baten indar elektroeragilea eta barne-erresistentzia.

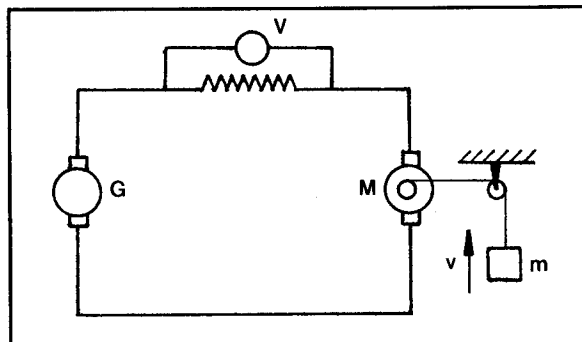
Emaitzak: a) 8 V .

b) Goiko baterian zehar, 3 A (b -tik a -ra) .
 Beheko baterian zehar, ez da korronteirik pasatuko .

c) $2\ \Omega$.

d) 12 V ; $2\ \Omega$.

- 13.- G sorgailuak sorturiko korrontea, M motorean zehar pasatzen ari da. Azken hau, tramankulu mekaniko baten bidez, m masa jasotzen ari da abiadura konstantez.



Kalkula bitez, zirkuituan zehar doan korrontea, eta motorearen indar

elektroeragilea eta barne-erresistentzia. Halaber, egin bedi potentziaren balantze osoa.

Datuak: Sorgailuaren indar elektroeragilea, $E_G = 550 \text{ V}$.

Sorgailuaren barne-erresistentzia, $r_G = 15 \Omega$.

Zirkuitu osoaren erresistentzia, $R = 20 \Omega$.

Voltmetroak emaniko neurketa, $V = 200 \text{ V}$.

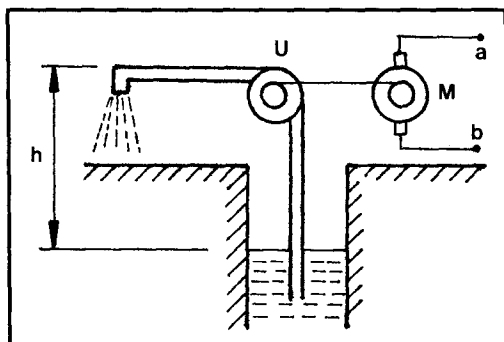
Tramankulu mekanikoaren etekina, $\eta = 98 \%$.

Jasotzen ari den gorputzaren masa, $m = 15 \text{ Tn}$.

Jasotzen ari den gorputzaren abiadura, $v = 0,1 \text{ m s}^{-1}$.

Emaitzak: 10 A ; 150 V ; 5Ω .

- 14.- M motore elektrikoak U uhaga higieraziko du, putzu batetatik ura ateratzeko. Kalkula bedi, putzutik atera daitekeen kaudal bolumetrikorik handiena.



Datuak: $E_m = 200 \text{ V}$, $r_m = 10 \Omega$,
 $V_{ab} = 220 \text{ V}$, $h = 12 \text{ m}$,
 η : uhagaren etekina = $73,5 \%$.

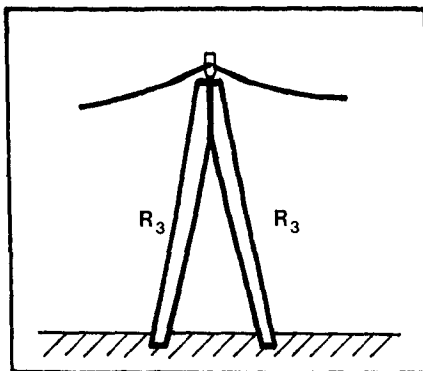
Emaitza: $2,5 \times 10^{-3} \text{ m}^3 \text{ s}^{-1}$.

- 15.- T turbinak G sorgailua funtziona erazi du, eta honek sorturiko korrontea, B bezalako zortzi bonbila (irudian hiru baino ez dira ageri) pizteko erabili da. Ur-korrontea, turbinan zehar pasatu ondoren, erreka joan da.

Kalkula bitez:

- Bonbila bakoitza zeharkatu duen intentsitatea.
- Sorgailuak sorturiko intentsitatea.
- Sorgailuaren indar elektroeragilea.
- Turbinan sartzen den uraren presio manometrikoa.

b) Aurreko tantaiari R_3 erresistentzia bereko bi hanka berri gehituz gero (ikus irudia), errepika bitez kalkulu berberak.
 Datua: $R_3 = 400 \text{ k}\Omega$.



Emaitzak: a) $0,06 \text{ A}$; $200 \text{ k}\Omega$.

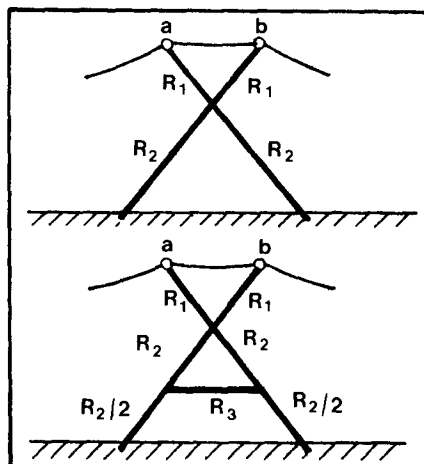
b) $0,12 \text{ A}$; $100 \text{ k}\Omega$.

18.- Errepika bitez aurreko ariketaren bi atalak, alboko irudietan adierazi diren tantaiak kontutan harturik.
 Datuak: $R_1 = 100 \text{ k}\Omega$, $R_2 = 200 \text{ k}\Omega$.
 a edo b puntuen eta lurraren arteko potentzial-diferentzia: 12 kV .

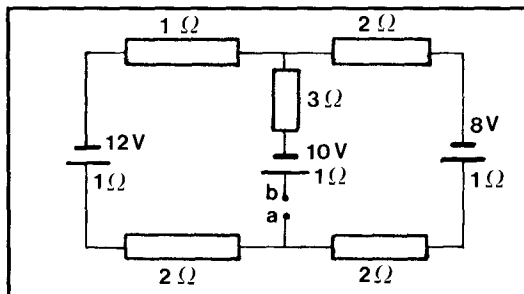
Emaitzak:

a) $0,08 \text{ A}$; $150 \text{ k}\Omega$.

b) $0,08 \text{ A}$; $150 \text{ k}\Omega$.

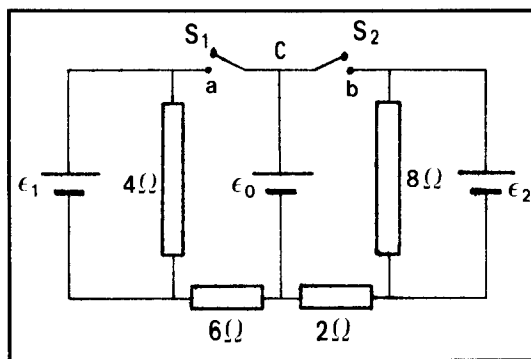


19.- Aurki bedi irudiko a eta b puntuen arteko potentzial-diferentzia. Zein izango litzateke 12 volta-tako pila zeharreko korronte elektrikoaren intentsitatea, a eta b puntuak konektatuz gero?



Emaitzak: $V_b - V_a = \frac{2}{9} \text{ V}$; $I = \frac{13}{28} \text{ A}$.

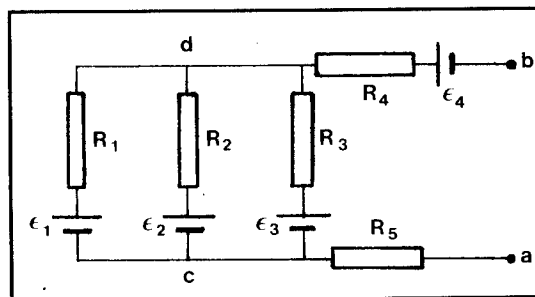
- 20.- Irudian adierazitako hiru sorgailu elektrikoaren barne-erresistentziak arbuiaagarriak dira, eta $\varepsilon_1 = 1\text{ V}$. S_2 zabalik dagoela S_1 itxiz gero, ε_1 indar elektroeragilea duen sorgailuan zeharreko korrante elektrikoaren intentsitatea, nulua da. S_1 zabalik dagoela S_2 itxiz gero, ε_2 indar elektroeragilea duen sorgailuan zeharreko korrante elektrikoaren intentsitatea, nulua da. Kalkula bitez ε_0 eta ε_2 , eta V_{ab} , V_{ac} eta V_{bc} , S_1 eta S_2 zabalik daudenean.



Emaitzak: $\varepsilon_0 = 2,5\text{ V}$, $\varepsilon_2 = 2\text{ V}$.

$V_{ab} = 1\text{ V}$, $V_{ac} = 1,5\text{ V}$, $V_{bc} = 0,5\text{ V}$.

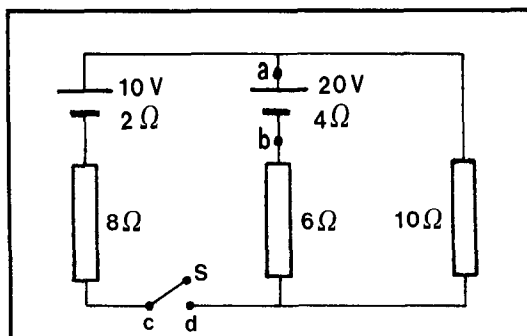
- 21.- Irudian adierazitako zirkuituan $\varepsilon_1 = 4\text{ V}$, $\varepsilon_2 = 3\text{ V}$, $\varepsilon_3 = 1\text{ V}$, $\varepsilon_4 = 2\text{ V}$, $R_1 = R_2 = 1\ \Omega$, $R_3 = R_4 = 3\ \Omega$ direla jakinik, aurki bitez V_{ab} , V_{ac} , V_{bd} eta V_{cd} .



Emaitzak: $V_{ab} = 1\text{ V}$, $V_{ac} = 0\text{ V}$,

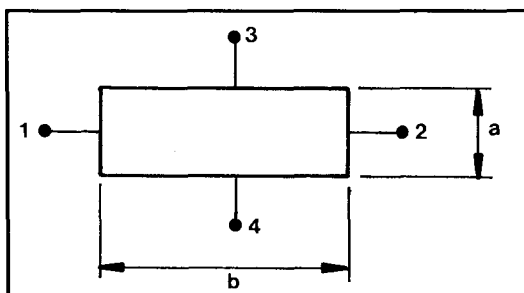
$V_{bd} = 2\text{ V}$, $V_{cd} = 3\text{ V}$.

- 22.- Kalkula bitez hurrengo orrialdeko irudiko a eta b puntuen zein c eta d puntuen arteko potentzial-diferentziak, S etengailua itxirik dagoenean nahiz zabalik dagoenean.



Emaitzak: $V_a - V_b = 16 \text{ V}$, $V_c - V_d = 0 \text{ V}$.

- 23.- Biz a aldeko oinarri karratuko prisma baten itxura duen erresistibitate konstantedun eroalea, beraren altuera b izanik, irudian adierazi den bezala. Eramango al du eroale honek korrante elektrikoa berbera 1 eta 2 zein 3 eta 4 puntuen arteko potentzial-diferentzia berberaren eraginpean?

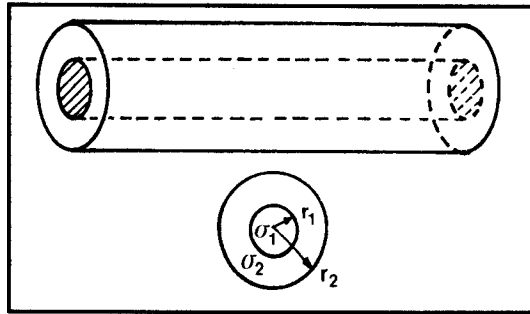


Emaitzak: a) 1 eta 2 puntuen artean: $I = \frac{a^2}{b \rho} \Delta V$.

b) 3 eta 4 puntuen artean: $I = \frac{b}{\rho} \Delta V$.

- 24.- Irudian adierazitako eroale zilindrikoa r_1 erradioa eta σ_1 eroankortasuna dituen kableaz eta berau inguratzen duen hodi zentrukideaz osaturik dago. Hodiaren barne eta kanpo-erradioak, r_1 eta r_2 dira, eta eroankortasuna, σ_2 .

- Aurki bedi eroalearen luzera-unitateko erresistentzia.
- Aurki bitez kablean eta hodian zeharreko I_1 eta I_2 intentsitateak, eroale osoan zeharreko intentsitatea I dela emanik.
- Froga bedi eroalearen bi sekzioetan barreiaturiko potentzia elektrikoaren arteko erlazioa ondokoa dela $P_2/P_1 = I_2/I_1$.

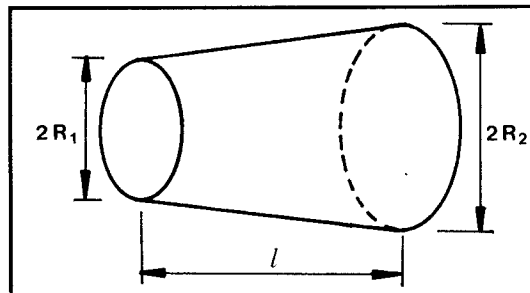


Emaitzak: a) $R_l = \frac{1}{\pi [\sigma_1 r_1^2 + \sigma_2 (r_2^2 - r_1^2)]}$.

b) $I_1 = \frac{\sigma_1 r_1^2}{\sigma_1 r_1^2 + \sigma_2 (r_2^2 - r_1^2)} I$.

$I_2 = \frac{\sigma_2 (r_2^2 - r_1^2)}{\sigma_1 r_1^2 + \sigma_2 (r_2^2 - r_1^2)} I$.

25.- Aurki bedi, irudian adierazitako ρ erresistibitatearen eta enbor konikoaren formadun eroalearen erresistentzia, berau bi oinarrien artean kalkulaturik.



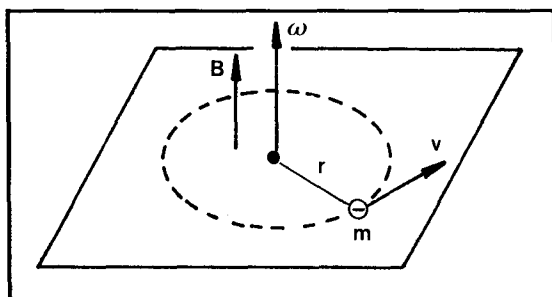
Emaitza: $R = \frac{\rho l}{\pi r_1 r_2}$.

17. GAIA

INTERAKZIO MAGNETIKOA

17.1. 10^6 m s^{-1} -tako abiaduraz higitzen ari den elektroia bat, eremu magnetiko batetan sartu da, ordutik aurrera $0,1 \text{ m}$ -tako ibilbide zirkularra deskribatu duelarik. Kalkulatu bitez:

- Elektroiaren abiadura angeluarra.
- Eremu magnetikoaren balioa.



a) Abiadura angeluarraren balioa ondokoa izango da:

$$\omega = \frac{v}{r} = \frac{10^6}{0,1} = 10^7 \text{ rad s}^{-1}.$$

b) Hona hemen abiadura angeluarraren eta eremu magnetikoaren arteko erlazioa:

$$\omega = -\frac{q}{m} B ; B = -\frac{m}{q} \omega = -\frac{m}{-e} \omega = \frac{m}{e} \omega.$$

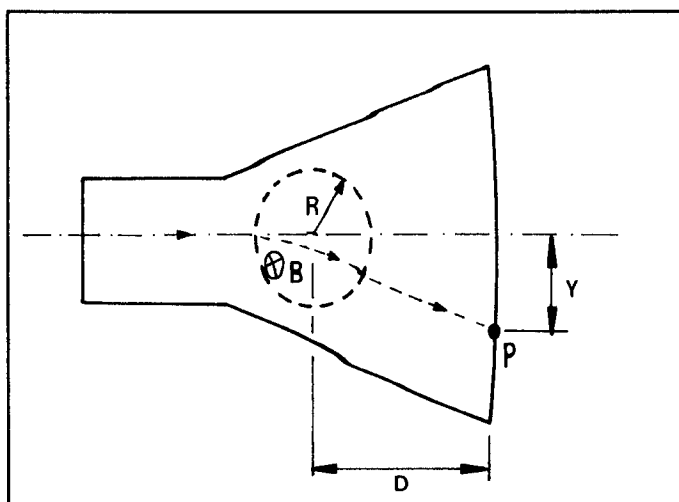
Beraz, eremuaren modulua hauxe izango da:

$$B = \frac{9,1 \times 10^{-31}}{1,6 \times 10^{-19}} \times 10^7 = 5,7 \times 10^{-5} \text{ T}.$$

Norantzari dagokionez, B -ren norantza ω -k duen berbera da, gorago jarritako erlazio bektorialak adierazi duenez (Ikus irudia).

17.2. Telebistako hodi baten barneko elektroia-sorta azeleratu egin da V_a potentzial-diferentziaren bidez. Ondoren,

elektroi horiek R erradioa duen espazioalde batetara jaurtiki dira, non B eremu magnetikoa dagoen. Ereduak elektroien sorta desbideratu du (ikus irudian puntuz adierazitako ibilbidea), eta honek pantailako P puntuan jo du. Espazioalde zilindrikoaren ardatzetik pantailarainoko distantzia D da. Kalkula bedi sortaren deflexioa (Y), pantailara heltzean.

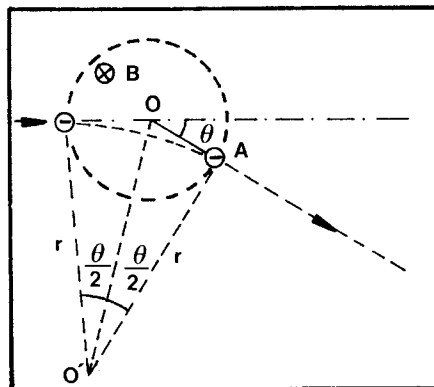


Lehendabizi, elektroien abiadura kalkulatu dugu, hauen hasierako abiadura arbuigarria dela kontsideraturik. Horretarako, energiaren kontserbazioaren printzipioaz baliatuko gara, hau da:

$$e V_a = \frac{1}{2} m v^2 \quad v = \sqrt{\frac{2 e}{m} V_a} .$$

Ondoren, eremu magnetikoan zehar elektroiek duten higidura aztertuko dugu. Dakigunez, B modulua duen eta abiaduraren perpendikularra den eremu magnetikoaren eraginpean elektroiek deskribaturiko ibilbide zirkularraren erradioa, hau da:

$$r = \frac{m v}{e B} .$$



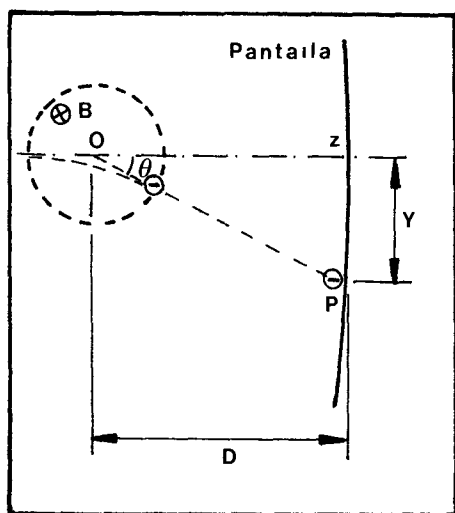
Eta irudiko $O'OA$ triangelua erabiliz, honako hau atera dezakegu:

$$\operatorname{tg} \frac{\theta}{2} = \frac{R}{r} .$$

Bestaldetik, $\operatorname{tg} \theta$ eta $\operatorname{tg} \theta / 2$ honelaxe daude erlazionaturik:

$$\operatorname{tg} \theta = 2 \frac{\operatorname{tg} \frac{\theta}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\theta}{2}} = 2 \frac{\frac{R}{r}}{1 - \left(\frac{R}{r}\right)^2} = 2 \frac{R r}{r^2 - R^2} .$$

Ikus dezagun orain, eremu magnetikoaren espazioaldetik pantailaraino elektroiek duten higidura. Hurrengo irudian ageri den *OZP* triangeluan:



$$Y = D \operatorname{tg} \theta = 2D \frac{R r}{r^2 - R^2} .$$

Azkenez, r erradioaren eta v abiaduraren kasuan lortutako balioak adierazpen honetara ekarri, eskaturiko deflexioa hauxe da:

$$Y = \frac{2DR}{B} \frac{\sqrt{\frac{2mV_a}{e}}}{\frac{2mV_a}{eB^2} - R^2} .$$

17.3. Protoiak azeleratzen dituen ziklotroi baten eremu magnetikoak 1,31 T balio du. Kalkula bitez:

- D erako pieza bien arteko eremu elektriko alfernoaren maiztasuna.
- Protoien abiadurarik handiena, beraien ibilbidearen erradio maximoa 0,2 m-takoa izanik.
- Zenbatekoa izan beharko litzateke protoiak azeleratuko lituzkeen potentzial-diferentziaren balioa, aurreko ataleko abiadura berbera lortzeko?

a) Teoriaren arauera dakigun legez, partikulen higiduraren maiztasuna eta eremu elektriko alfernoarena balio berekoak dira. Beraz:

$$\nu = \frac{eB}{2\pi m} = \frac{1,6 \times 10^{-19} \times 1,31}{2 \times 3,14 \times 1,67 \times 10^{-27}} = 2 \times 10^7 \text{ Hz} .$$

b) Partikulek beren ingurubidean konstante mantentzen duten abiadura angeluarra, hauex da:

$$\omega = 2 \pi \nu = 2 \times 3,14 \times 2 \times 10^7 = 12,56 \times 10^7 \text{ rad s}^{-1}.$$

Beraz, abiadurarik handiena honako hau izango da:

$$v_m = \omega r_m = 12,56 \times 10^7 \times 0,2 = 2,51 \times 10^7 \text{ m s}^{-1}.$$

c) Suposa dezagun, pausagunetik hasi den protoi bati aurreko puntuan lortutako abiadura eman nahi diogula, eremu elektriko bat dela medio. Energiaren kontserbazioaren printzipioa erabiliz, ondokoa izango litzateke aplikatu beharko genukeen potentzial-diferentzia:

$$e V = \frac{1}{2} m v_m^2,$$

$$V = \frac{m v_m^2}{2 e} = \frac{1,67 \times 10^{-27} \times (2,51 \times 10^7)^2}{2 \times 1,6 \times 10^{-19}} = 3,3 \times 10^6 \text{ V}.$$

Uler daitekeenez, halako potentzial-diferentziak ezin daitezke erraz lor. Eta lortzekotan, beraien erabilpenak batera lerratatzakeen arrisku izugarriek erabilgaitz egiten lukete. Hona hemen ziklotroia erabiltzeko zergatikoa.

17.4. Espazioalde batetan $2,6 \times 10^7 \text{ V m}^{-1}$ -etako eremu elektrikoa eta honen perpendikularra den $1,3 \text{ T}$ -tako eremu magnetikoa daude. Eremu bien norabide perpendikularrean elektroik-sorta bat jaurtiki da.

- a) Kalkula bedi sortaren abiadura, aipaturiko espazioaldean zehar pasatzean, elektroikak desbidera ez daitezen.
- b) Egizu v , E eta B bektoreen arteko jarrera erlatiboa erakutsiko duen diagrama.
- c) Zein izango litzateke partikulen orbitaren erradiao, eremu elektrikoa anulatu egingo balitz?

a) Bi eremuak daudeneko espazioaldean zehar doazenean, elektroiek bi indarren eragina jasango dute, indar elektrikoarena eta magnetikoarena. Beraz, elektroik bakoitzaren gaineko indar erresultantea hauex izango da:

$$\mathbf{F} = -e \mathbf{E} - e \mathbf{v} \wedge \mathbf{B} = -e (\mathbf{E} + \mathbf{v} \wedge \mathbf{B}) .$$

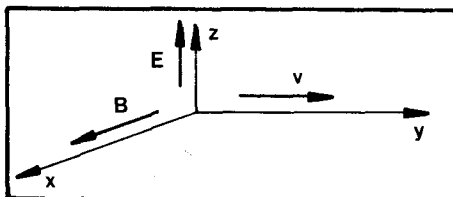
Partikula desbidera ez dadin, indar honek nulua izan behar du, hots,

$$\mathbf{F} = 0 \rightarrow \mathbf{E} + \mathbf{v} \wedge \mathbf{B} = 0 \rightarrow \mathbf{E} = \mathbf{B} \wedge \mathbf{v} \quad (\text{I}) ,$$

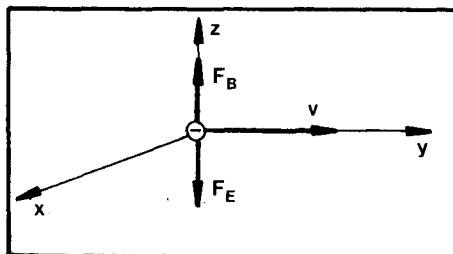
Hiru bektoreak elkarren perpendikularrak direla kontutan hartuz, honako hau da beraien moduluen arteko erlazioa:

$$|\mathbf{E}| = |\mathbf{v}| |\mathbf{B}| \rightarrow v = \frac{E}{B} = \frac{2,6 \times 10^7}{1,3} = 2 \times 10^7 \text{ m s}^{-1} .$$

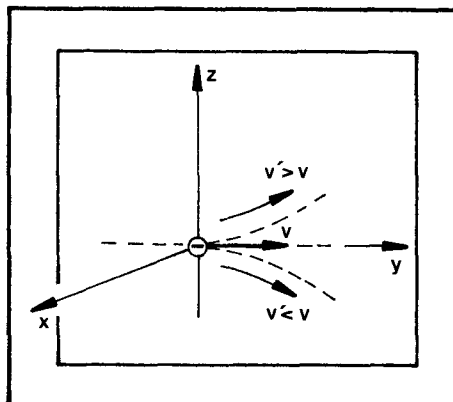
b) Irudian ageri da bektoreen arteko jarrera erlatiboa. Irakurleak konprobatu behar du, (I) erlazioa beteko dela.



Alboko irudian, elektroiaren gainean eragiten duten indarrak, hots, indar elektrikoa ($\mathbf{F}_E = -e \mathbf{E}$) eta magnetikoa ($\mathbf{F}_B = -e \mathbf{v} \wedge \mathbf{B}$) adierazi dira. Ikus daitekeenez, beraien norantzak elkarren kontrakoak dira, eta elektroiaren abiadura aurreko atalean lortutakoa baldin bada, balio berekoak dira indarrok, ondorioz partikula desbideratuko ez delarik.

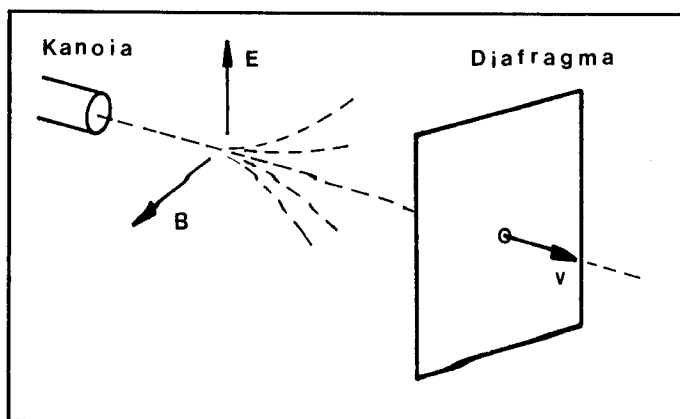


Zer gertatuko litzateke, ordea, sortaren abiadura lortutakoa baino handiagoa (edo txikiagoa) izango balitz? Indar elektrikoak ez luke inolako aldaketarik izango, abiadurarekiko menpekotasunik ez bait du; indar magnetikoaren balioa, oster, abiadurarekiko proportzionalki aldatuko litzateke, sortaren ibilbidea desbideratuko litzateke-elarik. (Ikus alboko irudia).



Honek guztionek duen aplikazioa hauxe da: laborategiko experimentu batzutarako, abiaduraren oso balio zehatzeko elektroi-sortak behar dira (edo beste edozein partikularen sortak); baina elektroiak sortzen dituzten tramankuluek ("elektroi-kanoi" direlakoek) balio desberdin askotako

abiadurekin sortzen dituzte. Nola aukeratu, bada, behar den abiadura daramaten elektroiak?

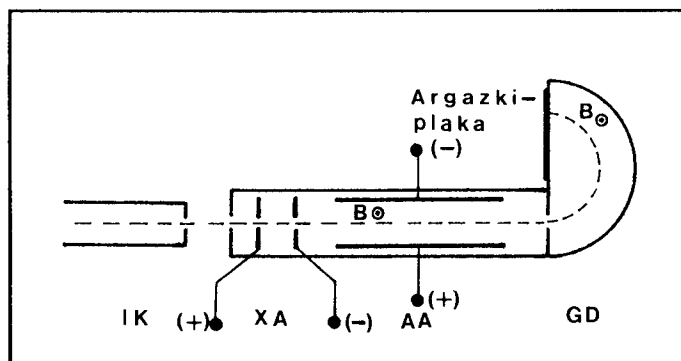


Horretarako, kanoi aurrean zulo txiki bat duen xafla bat ("*diafragma*") jarri da, elementu bien arteko espazioaldean elkarren perpendikularrak eta, halaber, sortaren normalak diren E eta B eremuak daudelarik. Honelatan, zuloan zehar oso abiadura zehatza daramaten partikulak soilik pasa eraztea lortzen da, beste guztiek xaflarekin topo egiten dutelarik. Hortik datorkio muntaia honi bere izena, "*abiadura-aukeragailua*" hain zuzen ere.

c) Eremu elektrikoa anulatu egiten bada, elektroien ibilbide zirkularren erradioa hauxe izango da:

$$r = \frac{m v}{e B} = \frac{9,1 \times 10^{-31} \times 2 \times 10^7}{1,6 \times 10^{-19} \times 1,3} = 9,1 \times 10^{-5} \text{ m} .$$

17.5. Irudiko espektrometroak ondoko elementuak dauzka:



- IK (ioi-kanoia): Aztertu nahi diren partikulak sortzen

ditu.

- **XA** (xafla azeleratzaileak): xafla hauen artean dagoen eremu elektrikoak azeleratzen ditu partikulak.
- **AA** (abiadura-aukeragailua): 17.4. problemaman adierazirik dago aparatu honen funtsa.
- **GD** (ganbara desbideratzailea): hersgune honetan dagoen eremu-magnetikoak zirkunferentziaz bat deskriba erazten die partikulei, argazki-plakara heldu arte.

Experimentu konkretu batetan, $+e$ karga duten neon-ioiek $7,4 \text{ cm}$ -tako diametroko zirkunferentziaz deskribatzen dute ganbara desbideratzailearen barruan. Abiadura-aukeragailuaren eremu elektrikoak $1,2 \times 10^5 \text{ V m}^{-1}$ balio du, eta bi eremu magnetikoek (aukeragailuarenak eta desbideratzailearenak) $0,6 \text{ T}$. Kalkula bedi aztertzen ari diren ioien masa.

Lehen urrats modura, ganbara desbideratzaileara ateratzen diren partikulen abiadura kalkulatu dugu. Horretarako aurreko problemaman aurkitu dugun erlazioa erabiliko dugu, hau da:

$$v = \frac{E}{B} = \frac{1,2 \times 10^5}{0,6} = 2 \times 10^5 \text{ m s}^{-1}.$$

Ganbara desbideratzailearen barnean abiadura honi dagokion orbitaren erradioa, ondokoa da:

$$r = \frac{m v}{e B} = \frac{D}{2},$$

$$m = \frac{D e B}{2 v} = \frac{7,4 \times 10^{-2} \times 1,6 \times 10^{-19} \times 0,6}{2 \times 2 \times 10^5} = 1,77 \times 10^{-26} \text{ kg}.$$

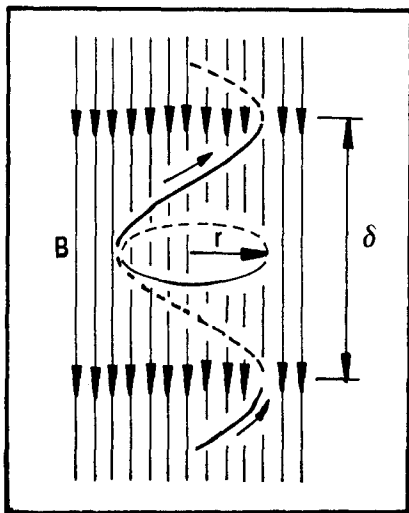
17.6. Eremu magnetiko batetan zehar protoi bat higitzen ari da, beraren abiadurak eremuarekiko 30° -tako angelua osotzen duelarik. Abiaduraren balioa 106 m s^{-1} -takoa da eta eremuaren intentsitatea $1,2 \text{ T}$. Kalkula bitez:

a) Partikulak inguratzen duen helizearen erradioa eta pausoa.

b) Higiduraren maiztasuna.

a) Teoriazko liburuan adierazten denez, helizearen erradioa eta pausoa

hauexek dira:



$$r = \frac{m v \sin \theta}{e B} = 4,35 \times 10^{-3} \text{ m} .$$

$$\delta = \frac{2\pi m v \cos \theta}{e B} = 4,73 \times 10^{-2} \text{ m} .$$

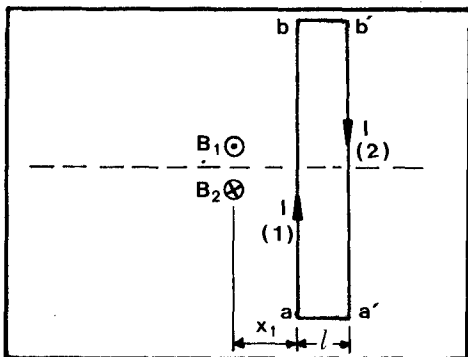
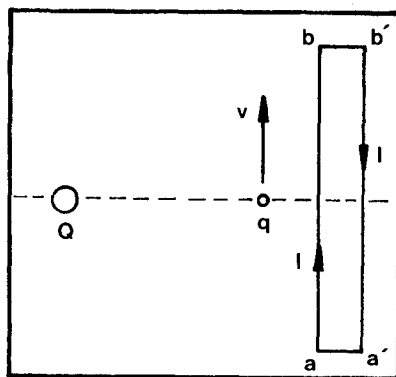
b) Higiduraren maiztasuna ondokoa izango da:

$$\nu = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{e B}{2\pi m} = 1,83 \times 10^7 \text{ Hz} .$$

17.7. Kalkula bedi Q kargaren balioa, q kargaren gaineko indar erresultantea nulua izan dadin, irudian adierazitako posiziotik pasatuko den unean.

Datuak: $v = 1 \text{ m s}^{-1}$, $I = 10 \text{ A}$.

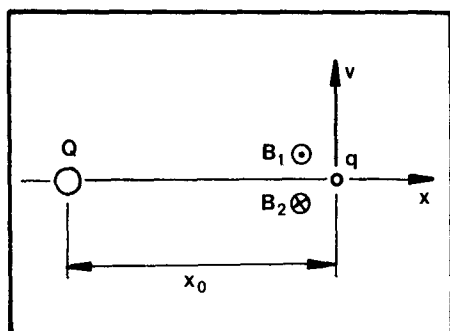
Oharra: ab eta $a'b'$ eroaleen luzera oso handia da, beste luzera eta distantziekin konparaturik.



ab eroalean zehar doan korronteak, q karga dagoeneko puntuan sorturiko B_1 eremu magnetikoaren balioa, eta $a'b'$ eroalean zehar doan korronteak puntu berean sorturiko B_2 eremu magnetikoaren balioa lortuz hasiko gara (aipaturiko eremuen norabideak irudian erakutsi dira):

$$B_1 = \frac{\mu_0 I}{4\pi x_1} = 10^{-7} \frac{10}{10^{-2}} = 10^{-4} T .$$

$$B_2 = \frac{\mu_0 I}{4\pi (x_1 + l)} = 10^{-7} \frac{10}{4 \cdot 10^{-2}} = 0,25 \cdot 10^{-4} T .$$



Ondoren, kalkulaturiko eremu bakoitzak q kargari eginiko indarra lortuko dugu:

$$\mathbf{F}_1 = q \mathbf{v} \wedge \mathbf{B}_1 = 10^{-4} q \mathbf{i} .$$

$$\mathbf{F}_2 = q \mathbf{v} \wedge \mathbf{B}_2 = -0,25 \times 10^{-4} q \mathbf{i} .$$

Bestaldetik, Q kargak q kargari eginiko indarra hauxe da:

$$\mathbf{F}_Q = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qQ}{x_0^2} \mathbf{i} = 9 \times 10^9 qQ \mathbf{i} .$$

Azkenez, idatzitako hiru indarren erresultanteak nulua izan behar du. Beraz,

$$\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_Q = 0 ,$$

$$q (10^{-4} - 0,25 \times 10^{-4} + 9 \times 10^9 Q) \mathbf{i} = 0 ,$$

$$Q = -8,33 \times 10^{-15} C .$$

17.8. Irudian adierazi den kobrezko xafla estuak $3,15 \text{ cm}$ -tako zabalera du, eta 1 mm -tako lodiera, $I = 133,5 \text{ A}$ -tako korrante batek zeharkatua delarik, ageri den norabidean. Irudiko planoaren perpendikularra den eta $1,6 \text{ T}$ -tako intentsitatea duen eremu magnetiko batetan sarturik dago xafla.

b) Ikus dezagun orain, xaflaren barruan v abiaduraz higitzen den elektroi aske baten gaineko eremu magnetikoaren eragina.

Lehenengo irudian, elektroiak jasaniko indarra adierazi da. Hau bezalako indar bana agertuko da elektroi aske bakoitzean, eta indar hauen ondorioz, elektroiak xaflaren eskuinalderantz desbideratuko dira (Hona hemen gure hasierako hipotesia, hots, elektroi askeen banaketa uniformeari buruzko arrazoia). Bestaldetik, elektroi askeen eskuinalderantzko desbideraketa honek, karga positiboan pilaketa sorteraziko du ezker aldean, xaflaren barnea alboko bigarren irudian erakutsi den moduan geratuko delarik.

Xaflaren alde batean eta bestean era desberdinetako kargak pilatzeak, E zeharkako eremu elektrikoa sortuko du, zeinak elektroi aske bakoitzari F' indarra egingo dion. Indar hau eremu magnetikoak egingakoaren aurkakoa da (ikus hirugarren irudia), eta beraien balioak berdintzean, alde bietako karga-pilatzearen gehikuntza gelditu egingo da.

Hau gerta dadin, ondoko baldintza bete behar da:

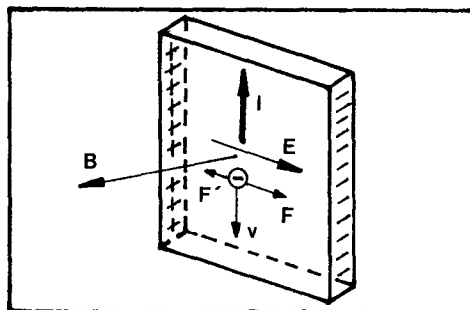
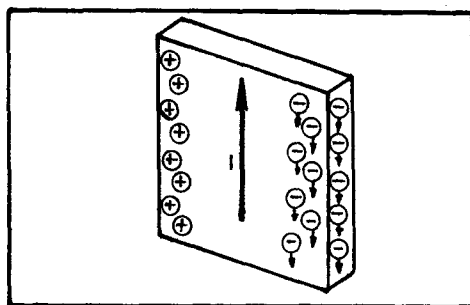
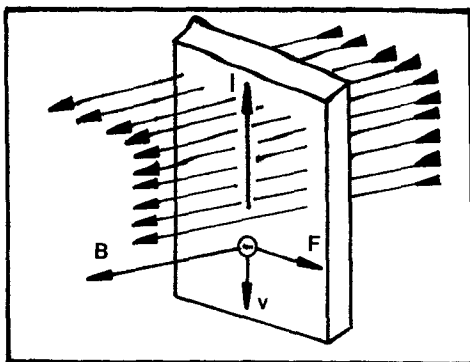
$$\mathbf{F} + \mathbf{F}' = 0 \rightarrow -e \mathbf{v} \wedge \mathbf{B} - e \mathbf{E} = 0 \rightarrow \mathbf{E} = \mathbf{B} \wedge \mathbf{v} .$$

Beraz, eskaturiko eremu elektrikoaren modulua ondoko hau izango da:

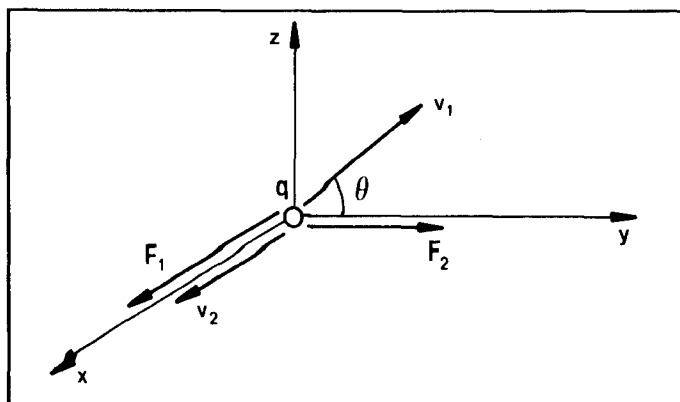
$$E = B v = 1,6 \times 3,14 \times 10^{-4} = 5,02 \times 10^{-4} \text{ V m}^{-1} .$$

Aztertu dugun fenomenoari, *Hall efektua* deritzo, beraren aurkitzailearen oroimenez: E.C. Hall (1855-1929).

17.9. q karga duen partikula bat eremu magnetiko baten barruan higitzen ari da. Partikularen abiadura v_1 denean,



eremuak eginiko indarra F_1 da; berriz, abiadura v_2 denean, indarra F_2 da.



Lor bitez eremu magnetikoaren eta F_1 indarraren balioak.

Datuak: $q = 4 \times 10^{-9} \text{ C}$, $v_1 = 3 \times 10^4 \text{ m s}^{-1}$, $\theta = 45^\circ$, $v_2 = 2 \times 10^4 \text{ m s}^{-1}$, $F_2 = 4 \times 10^{-5} \text{ N}$.

Bi kasuetan, higitzen ari den karga baten gaineko indar magnetikoari dagokion formulaz baliatuko gara, hau da,

$$\mathbf{F} = q \mathbf{v} \wedge \mathbf{B}$$

delakoaz. Lehenengo kasuan,

$$F_1 \mathbf{i} = 4 \cdot 10^{-9} \cdot 3 \cdot 10^4 \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \mathbf{j} + \frac{\sqrt{2}}{2} \mathbf{k} \right) \wedge (B_x \mathbf{i} + B_y \mathbf{j} + B_z \mathbf{k}),$$

edo, alde bakoitzeko osagaiak banatuz eta berdinduz:

$$F_1 = 6\sqrt{2} \cdot 10^{-5} (B_z - B_y),$$

$$0 = 6\sqrt{2} \cdot 10^{-5} B_x,$$

$$0 = -6\sqrt{2} \cdot 10^{-5} B_x.$$

Bigarren kasuan:

$$4 \cdot 10^{-5} \mathbf{j} = 4 \cdot 10^{-9} \cdot 2 \cdot 10^4 \mathbf{i} \wedge (B_x \mathbf{i} + B_y \mathbf{j} + B_z \mathbf{k}),$$

hau da:

$$4 \cdot 10^{-5} = -8 \cdot 10^{-5} B_z ,$$

$$0 = 8 \cdot 10^{-5} B_y .$$

Planteaturiko ekuazioetatik erraz atera ditzakegu parametro ezezagunen balioak. Hauexek dira:

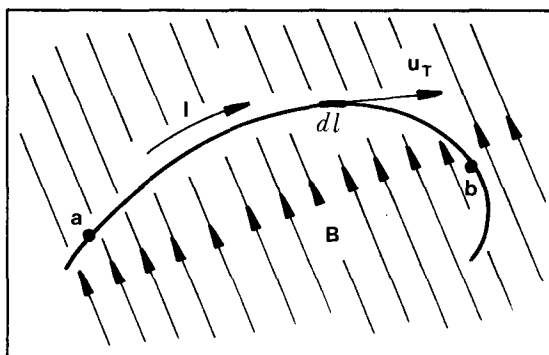
$$B_x = B_y = 0 , \quad B_z = -0,5 T , \quad F_1 = -3\sqrt{2} \cdot 10^{-5} N ,$$

edo bektorialki adierazita,

$$\mathbf{B} = -0,5 \mathbf{k} T , \quad \mathbf{F}_1 = -3\sqrt{2} \cdot 10^{-5} \mathbf{i} N .$$

17.10. Froga bedi ezen, edonolako tankera duen hari eroale bati eremu magnetiko uniforme batek eginiko indarra, hariaren tankeraren independentea dela, eta zuzena izango bailitzen lor daitekeela. Zein izango litzateke indarraren balioa, zirkuitu itxi baten gainean?

Demagun hurrengo irudiko kasua. Haria edonolakoa da, eta $\mathbf{B}$ eremua, uniforme. Lor dezagun, a eta b puntuen arteko eroalearen zatiari dagokion indarra. Dakigunez, hauxe da:



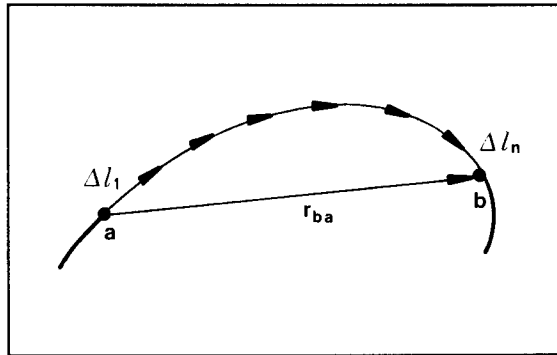
$$\mathbf{F} = I \int_a^b (\mathbf{u}_T \wedge \mathbf{B}) d\mathbf{l} .$$

Baina eremua uniformea denez gero, integraletik atera dezakegu. Beraz,

$$\mathbf{F} = I \left[\int_a^b \mathbf{u}_T dl \right] \wedge \mathbf{B} .$$

Ondoren, integralaren esangura aztertu behar dugu. Hona hemen:

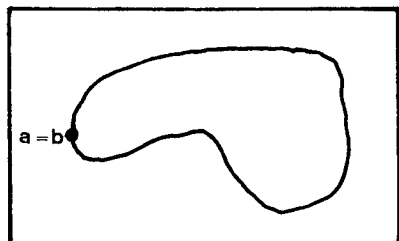
$$\begin{aligned} \int_a^b \mathbf{u}_T dl &= \lim_{\Delta l_i \rightarrow 0} \left[\sum_{i=1}^n \mathbf{u}_{Ti} \Delta l_i \right] = \\ &= \lim_{\Delta l_i \rightarrow 0} \left[\sum_{i=1}^n \Delta l_i \right] = \mathbf{r}_{ba} . \end{aligned}$$



Azkenez, indarraren adierazpena hauxe izango da:

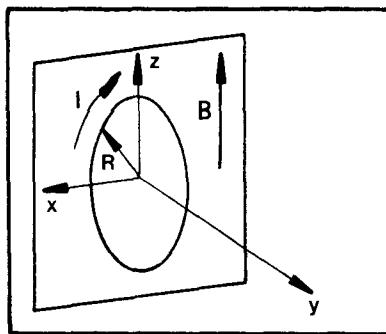
$$\mathbf{F} = I \mathbf{r}_{ba} \wedge \mathbf{B} .$$

Hain zuzen ere, a eta b puntuen artean haria zuzena izango balitz bezalaxe gertatuko da. Aurrekoa ikusirik, erraz atera dezakegu, zirkuitu itxiaren kasuan gertatuko dena:

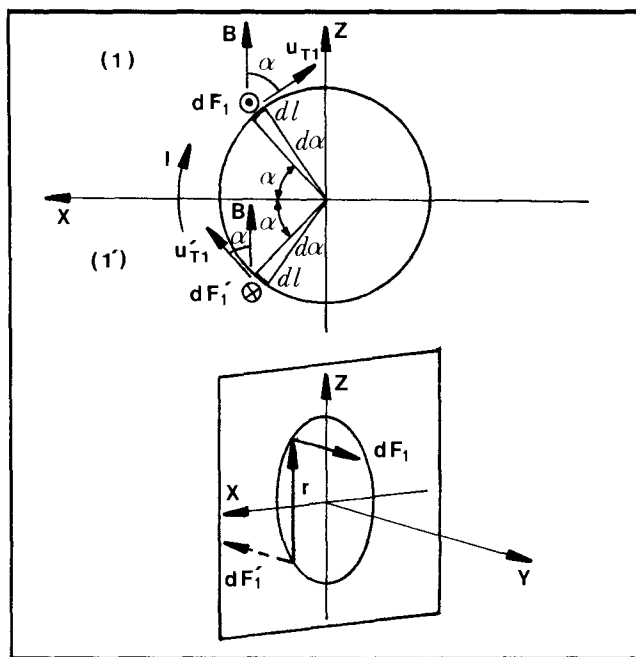


$$\mathbf{r}_{ba} = 0 \Rightarrow \mathbf{F} = 0 .$$

17.11. Irudiko R erradiodun espira zirkularra XZ planoan dago kokaturik eta bere zentrua ardatzen jatorrian du, I korronteak inguraturik dagoelarik. Kalkula be-di, Z ardatzaren paraleloa den B eremu magnetiko uniformeak espiran sortuko duen indar-momentua.



Har ditzagun X ardatzarekiko simetrikoak diren 1 eta 1' hariaren zati diferentzialak. Zati hauetan ageri diren indar magnetikoak, hauexek dira:



$$d\mathbf{F}_1 = I \mathbf{u}_{T1} \wedge \mathbf{B} dl ,$$

$$d\mathbf{F}'_1 = I \mathbf{u}'_{T1} \wedge \mathbf{B} dl ,$$

$$d\mathbf{F}_1 = I (-\sin\alpha \mathbf{i} + \cos\alpha \mathbf{k}) \wedge B \mathbf{k} R d\alpha ,$$

$$d\mathbf{F}'_1 = I (\sin\alpha \mathbf{i} + \cos\alpha \mathbf{k}) \wedge B \mathbf{k} R d\alpha ,$$

$$d\mathbf{F}_1 = B I R \sin\alpha \, d\alpha \, \mathbf{j} ,$$

$$d\mathbf{F}'_1 = - B I R \sin\alpha \, d\alpha \, \mathbf{j} .$$

Indar hauek indar-bikote bat osotzen dute. Indar-bikotearen momentua jarraian datorrena da:

$$\begin{aligned} d\boldsymbol{\tau} &= \mathbf{r} \wedge d\mathbf{F}_1 = 2 R \sin\alpha \, \mathbf{k} \wedge B I R \sin\alpha \, d\alpha \, \mathbf{j} = \\ &= - 2 B I R^2 \sin^2\alpha \, d\alpha \, \mathbf{i} . \end{aligned}$$

Beraz, espirak jasango duen indar-momentua, hauxe izango da:

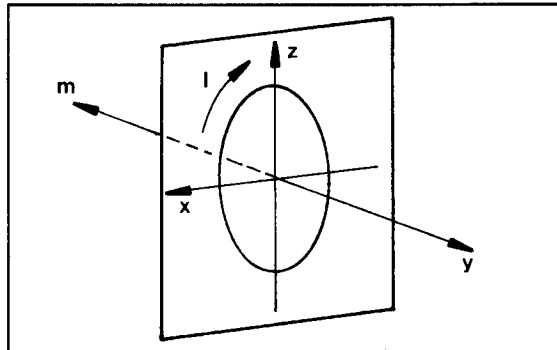
$$\boldsymbol{\tau} = - 2 B I R^2 \int_0^\pi \sin^2\alpha \, d\alpha \, \mathbf{i} = - \pi B I R^2 \, \mathbf{i} .$$

Aurreko kalkulua nabariki labur daiteke, teoriatzko liburuan adierazten denaz baliaturik (ikus *Fisika Orokorra II* liburuen 20.4. atala), hau da,

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{m} \wedge \mathbf{B} ,$$

$\mathbf{m} = I S \, \mathbf{u}_N$, espiraren momentu magnetikoa delarik. Hona hemen gure espiraren momentu magnetikoa:

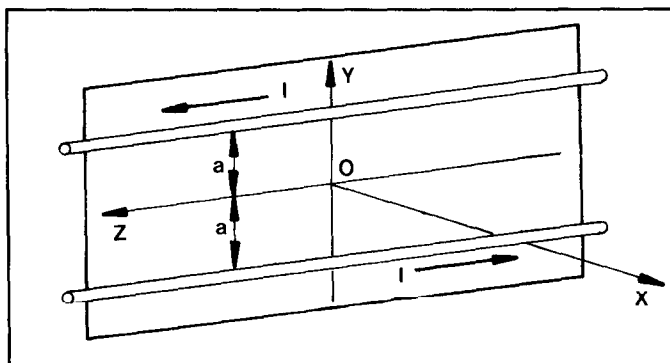
$$\mathbf{m} = I \pi R^2 (-\mathbf{j}) = - \pi I R^2 \mathbf{j} .$$



Honelatan,

$$\tau = -\pi I R^2 \mathbf{j} \wedge B \mathbf{k} = -\pi B I R^2 \mathbf{i} ,$$

17.12. Irudiko eroale zuzen eta paraleloetan zehar korrrente-intentsitate berbera doa, baina aurkako norantzetan. Eroaleak oso luzeak dira a distantziarekin konparaturik.

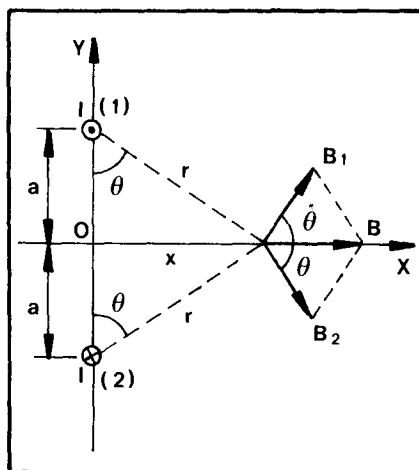


- Lor bedi, X ardatzeko puntuetan eroaleek sortutako eremu magnetiko erresultantea.
- Errepika bedi kalkulua Y ardatzeko puntuetan.

a) x abszisa duen X ardatzeko edozein puntutan, 1 eta 2 eroaleek sortutako eremu magnetikoaren balioa, hauxe da:

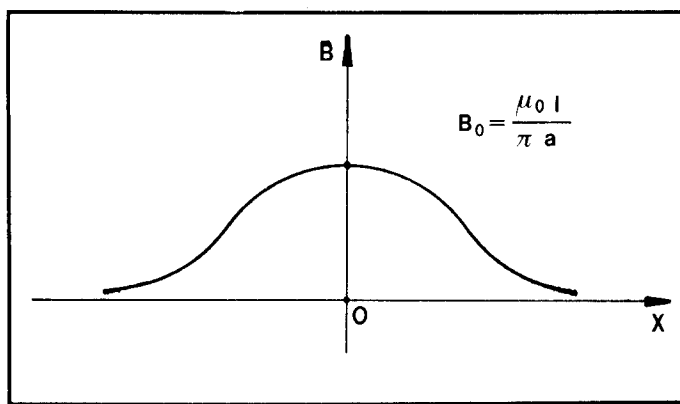
$$B_1 = B_2 = \frac{\mu_0 I}{2 \pi r} .$$

eta eremu bien erresultantea, hauxe dugu:



$$\mathbf{B} = 2 B_1 \cos \theta \mathbf{i} = \frac{\mu_0 I}{\pi} \frac{a}{a^2 + x^2} \mathbf{i} .$$

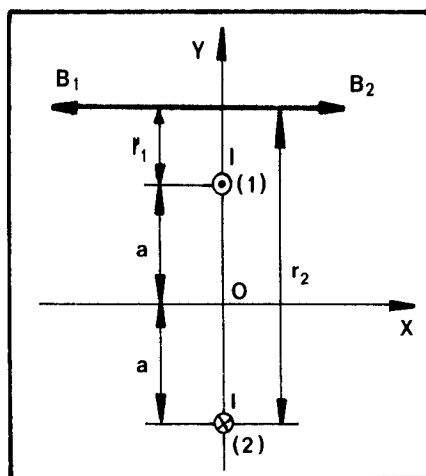
Ondoko irudian, X ardatzeko puntuetan eremuaren moduluen aldakuntza adierazi da grafikoki.



b) y ordenatua duen Y ardatzeko edozein puntutan, 1 eta 2 eroaleek sortutako eremu magnetikoen moduluak, hauexek dira;

$$B_1 = \frac{\mu_0 I}{2 \pi r_1} = \frac{\mu_0 I}{2 \pi (y - a)},$$

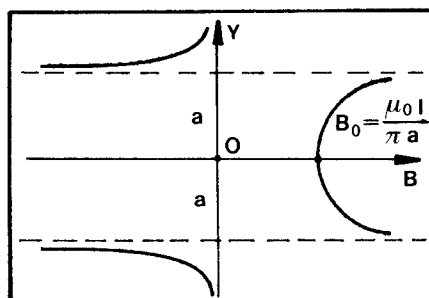
$$B_2 = \frac{\mu_0 I}{2 \pi r_2} = \frac{\mu_0 I}{2 \pi (y + a)},$$



Beraz, eremu bien erresultantea ondokoa izango da, bektorialki idatzita:

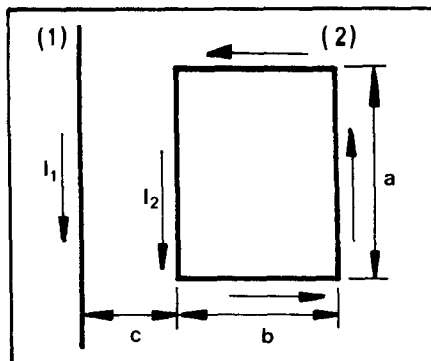
$$\mathbf{B} = \left[\frac{\mu_0 I}{2 \pi (y + a)} - \frac{\mu_0 I}{2 \pi (y - a)} \right] \mathbf{i} = -\frac{\mu_0 I}{\pi} \frac{a}{y^2 - a^2} \mathbf{i}.$$

Alboko irudian, Y ardatzeko puntuei dagokien eremuaren moduluaren aldakuntza ageri da grafikoki.



17.13. Lor bedi, 2 espira errektangeluarrak 1 eroale zuzenari eginiko indarra.

Oharra: Eroale zuzenaren luzera oso handia dela kontsideratuko da, problemaren emandako beste edozein distantziarekin konparaturik.

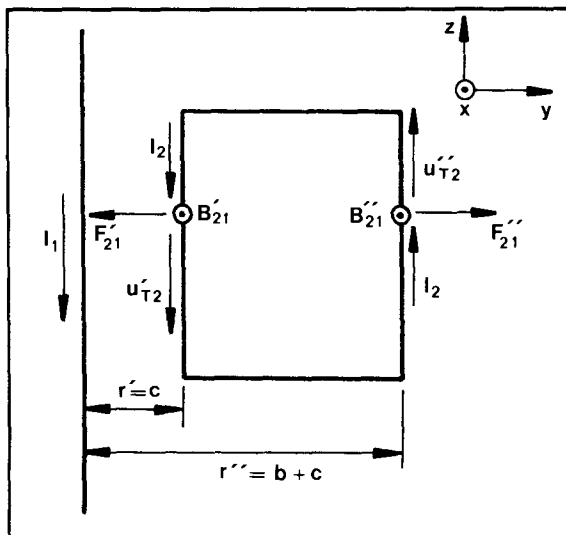


Enuntziatuari zuzen-zuzenki jarraituz, hauxe egin beharko dugu:

- 1 eroalearen edozein puntutan 2 espirak sortutako eremu magnetikoa lortu.
- Eremu honek eroalearen elementu diferentzial bati eginiko indarraren adierazpena idatzi.
- Eta azkenez, aurreko adierazpena eroale osorako integratu.

Hiru pauso hauetako pausorik zailena (ezina ez esateko) lehenengoa da. Beraz, beste era batetara egingo dugu.

Akzio-erreakzioaren printzipioaz baliatuz, 2 espirak 1 eroaleari eginiko indarraren ordean, 1 eroaleak 2 espirari eginikoa kalkulatu dugu, eta indar hau kalkulaturik, norantza aldatuko diogu, enuntziatuan eskatutakoa lorturik. Are gehiago, ez gara arduratuko b luzera duten espiraren aldeetat, haietatik 1 eroalerako distantziak berberak bait dira eta beraietan zehar 1 2 korrantea aurkako norantzetan bait doa.



Beraz, eroale zuzenaren paraleloak diren espiraren aldeak baino ez ditugu aztertuko. Hona hemen, aipaturiko aldeetan eroale zuzenak sorturiko eremu magnetikoak:

$$\mathbf{B}'_{21} = \frac{\mu_0 I_1}{2 \pi r'} \mathbf{i} = \frac{\mu_0 I_1}{2 \pi c} \mathbf{i} ,$$

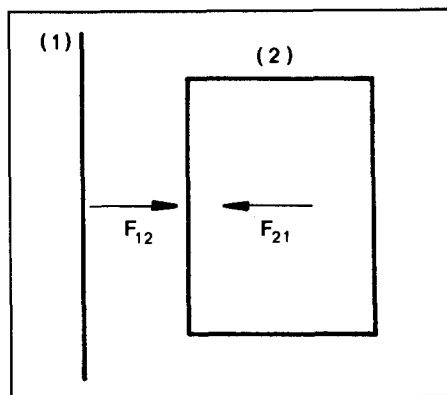
$$\mathbf{B}''_{21} = \frac{\mu_0 I_1}{2 \pi r''} \mathbf{i} = \frac{\mu_0 I_1}{2 \pi (b + c)} \mathbf{i} .$$

Honelatan, alde hauetan agertuko diren indarrak, hauexek izango dira:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}'_{21} &= I_2 (\mathbf{u}'_{T_2} \wedge \mathbf{B}'_{21}) a = I_2 (-\mathbf{k}) \wedge \left(\frac{\mu_0 I_1}{2 \pi c} \mathbf{i} \right) a \\ &= -\frac{\mu_0 I_1 I_2 a}{2 \pi c} \mathbf{j} , \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{F}''_{21} &= I_2 (\mathbf{u}''_{T_2} \wedge \mathbf{B}''_{21}) a = I_2 \mathbf{k} \wedge \left(\frac{\mu_0 I_1}{2 \pi (b + c)} \mathbf{i} \right) a \\ &= \frac{\mu_0 I_1 I_2 a}{2 \pi (b + c)} \mathbf{j} . \end{aligned}$$

Hemendik, 2 espirari 1 eroaleak egindako indar erresultantea lor dezakegu:



$$\mathbf{F}_{21} = \mathbf{F}'_{21} + \mathbf{F}''_{21} = - \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2 \pi} \frac{a b}{(b + c) c} \mathbf{j} .$$

Eta 1 eroaleari 2 espirak egindakoa, ondokoa izango da:

$$\mathbf{F}_{12} = - \mathbf{F}_{21} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2 \pi} \frac{a b}{(b + c) c} \mathbf{j} .$$

ARIKETAK

- 1.- Pausagunetik higitzen hasten diren protoiak azeleratu egin dira 10^6 V-tako potentzial-diferentziaren bidez. Ondoren, 2 T -tako intentsitatea duen eremu magnetiko uniforme batetan sartu dira, partikulen abiadura eremuaren perpendikularra izanik. Kalkula bitez, protoien ibilbidearen erradioa eta abiadura angeluarra.

Emaitzak: $0,071\text{ m}$; $1,99 \times 10^8\text{ s}^{-1}$.

- 2.- Biz $4 \cdot 10^{-9}\text{ C}$ -etako karga duen partikula. Partikula hau OYZ planoan barrena $3 \cdot 10^4\text{ ms}^{-1}$ -etako abiaduraz higitzean, OY ardatzarekin 45° -tako angelua osotuz, eremu magnetiko uniforme batek beraren gainean OX ardatzerdi negatiboaren norabide eta norantza dituen indarra eragiten du. Partikula OX ardatzean barrena $2 \cdot 10^4\text{ ms}^{-1}$ -etako abiaduraz higitzean, eremu magnetiko berberak beraren gainean OY ardatzerdi positiboaren norabide eta norantza dituen indarra eragiten du ($F_2 = 4 \cdot 10^{-5}\text{ j N}$). Zeintzu dira eremu magnetiko honen intentsitatearen modulu, norabide eta norantza?

Emaitza: $B = -0,5\text{ u T}$.

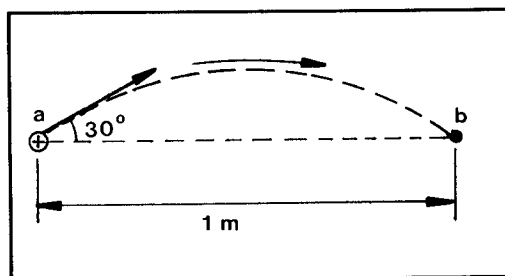
- 3.- $1,5\text{ T}$ -tako eremu uniforme baten barruan, deuterioiak 20 cm -tako ibilbide zirkular bat deskribatzen ari dira.
- Kalkula bedi deuterioien abiadura.
 - Kalkula bedi biraerdi bat egiteko emaniko denbora.
 - Zein izan da deuterioiak azeleratu dituen potentzial-diferentziaren balioa?

Emaitzak: a) $1,49 \times 10^7\text{ m s}^{-1}$.

b) $4,2 \times 10^{-8}\text{ s}$.

c) $2,25 \times 10^6\text{ V}$.

4.-



Lor bedi, 90 MeV-tako energia duen protoi bati a puntutik b puntura pasa eraziko dion eremu magnetikoa.

Emaitza: $1,37 \text{ T}$.

Oharra: Emandako energia handia dela kausa, izatez, fisika erlatibistaren bidez egin beharko lirateke kalkuluak. Dena den, erabil bedi fisika ez-erlatibista.

- 5.- Ziklotroi batetan deuteroiek deskribatutako zirkunferentziarik handienaren erradioa $0,25 \text{ m}$ -takoa da, eta D direlako piezei aplikaturiko tentsio alernoaren maiztasuna, 10^7 Hz -etakoa. Kalkula bitez:
- Ziklotroiak erabilitako eremu magnetikoaren balioa.
 - Deuteroien abiadura maximoa.
 - Deuteroien energia maximoa.
 - D pieza batetik bestera deuteroiek eman behar duten jauzien kopuru minimoa, baldin eta piezen arteko potentzial-diferentziaren baliorik handiena $12,5 \text{ kV}$ -takoa bada.
 - Ziklotroi barruan deuteroi bakoitzak dirauen denbora-epea.

Emaitzak: a) $3,1 \text{ T}$.

b) $1,57 \times 10^7 \text{ m s}^{-1}$.

c) $4,2 \times 10^{-13} \text{ J}$.

d) 205 .

e) $5,25 \times 10^{-6} \text{ s}$.

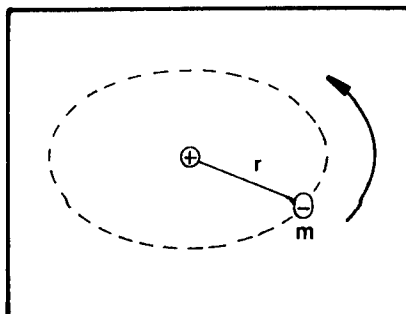
- 6.- 17.5. probleman adierazia den masa-espektrometroan, elementu kimiko baten isotopo ionizatu batzu (hau da, q karga bereko eta $m_1, m_2, \dots$, masa desberdinetako ioiak) aztertu dira. Isotopo-mota bakoitza, $D_1, D_2, \dots$, diametro desberdineko zirkunferentzierdi bana deskribatzen ari da ganbara desbideratzailean, isotopoaren masaren arauera. Lor bedi dD/dm erlazioa, hots, espektrometroaren "*ahalmen banatzailea*" izenaz ezagututakoa.

Emaitza: $\frac{2E}{qB^2}$.

- 7.- Froga bedi ezen, eremu magnetiko baten eraginpean partikula kargatu batek deskribaturiko helizean, bira oso bakoitzean ibilitako distantzia, eremuaren eta abiaduraren arteko angeluaren independentea dela. Halaber, lor bedi aipaturiko distantzia.

Eraitza:
$$\frac{2 \pi m v}{q B} .$$

- 8.- Kontsidera bedi hidrogenoaren atomoaren eredurik sinpleena, hots, alboko irudian adierazi dena, eta kalkula bedi elektroien abiadura angeluarra bikoizteko behar den eremu magnetikoa. Oharra: Elektroien orbitaren erradioak konstante dira suposatuko da.



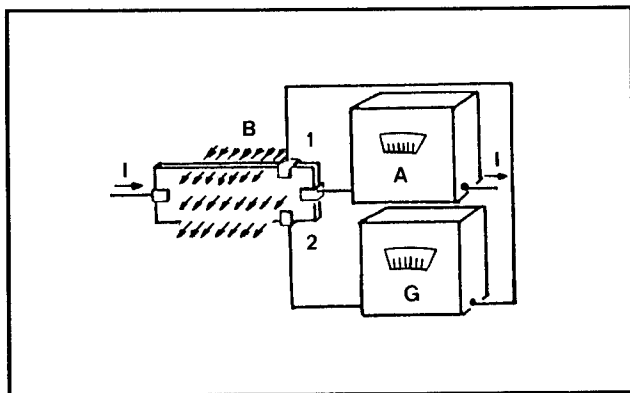
Eraitza:
$$B = \frac{3}{2} \sqrt{\frac{m}{4 \pi \epsilon_0 r^3}} ,$$

elektroien hasierako biraketaren norantzan.

- 9.- $2,8 \times 10^{-6} \text{ kg}$ -tako masa eta $-2,45 \times 10^{-10} \text{ C}$ -tako karga dituen partikula, Y ardatzaren norantza positiboaz higitzen ari da 10^5 m s^{-1} -etako abiaduraz. Kalkula bedi, eremu magnetikoaren baliorik txikiena, grabitatearen eraginpean partikula desbidera ez dadin.

Eraitza: $B = 1,12 \text{ i } T .$

- 10.- Hall efektuari buruzko saiakuntza batetan erabili den B eremu magnetikoaren intentsitatea $2,5 \text{ T}$ -takoa da. A amperemetroak $645,2 \text{ A}$ neurtu ditu eta G milivoltmetroak $V_1 - V_2 = 1,5 \text{ mV}$. Erabilitako xaflaren zabalera 6 cm -takoa da eta lodiera $0,08 \text{ mm}$ -takoa.



- a) Kalkula bedi, xaflan zehar doazen kargen abiadura.
- b) Kalkula bedi, xaflaren barneko karga askeen dentsitatea.
- c) Adieraz bedi, xaflaren karga-eramaileak elektropositiboak ala elektronegatiboak diren.

Emaitzak: a) 10^{-2} m s^{-1} .

b) $8,4 \times 10^{27} \text{ m}^{-3}$.

c) Elektronegatiboak .

11.- Zuzen eta elkarren paraleloak diren bi hari eroaleren arteko distantzia $2a$ da, balio bereko korrontea daramatzen. Harien luzera oso handia da a distantziarekin konparaturik.

- a) Lor bedi, harien planoan dagoen eta beraietatik distantzikidea den puntu batetako eremu magnetikoaren balioa.
- b) Lor bedi, hari batetik a distantziara eta bestetik $3a$ distantziara dagoen puntu batetako eremu magnetikoaren balioa.

Oharra: Ebatz bedi posible diren bi kasuetan, korrontek norantza berekoak direnean, eta aurkako norantzakoak direnean, alegia.

Emaitzak:

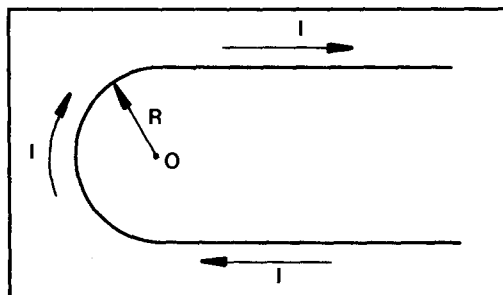
- a) $B = 0$, korrontek norantza berekoak izanik.

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi a} , \text{ korrontek aurkako norantzakoak izanik.}$$

$$\text{b) } B = \frac{2}{3} \frac{\mu_0 I}{\pi a} , \text{ korrontek norantza berekoak izanik.}$$

$$B = \frac{1}{3} \frac{\mu_0 I}{\pi a} , \text{ korrontek aurkako norantzakoak izanik.}$$

12.-



Hari erdizirkularraren zentrua den O puntuan eremu magnetikoaren

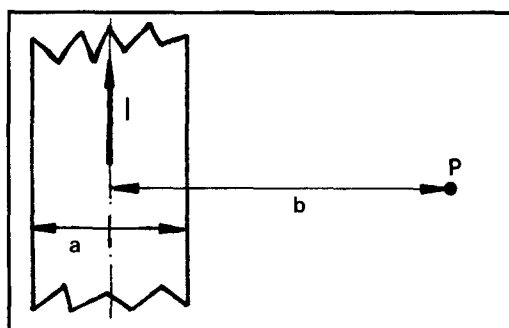
moduluaren balioa $2 \times 10^{-3} \text{ T}$ -takoa da, eta R erradioarena $4,14 \text{ cm}$ -takoa. Hari zuzen eta elkarren paraleloen luzera oso handia da R erradioarekin konparaturik.

Kalkula bedi I intentsitatearen balioa.

Emaitza: 100 A .

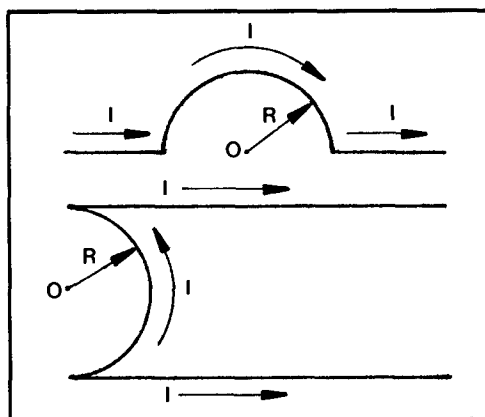
- 13.- Irudiko xaflaren luzera oso handia da, beraren lodiera, aldiz, guztiz arbuigarria delarik, kasu bietan a zabalerarekin konparaturik. Xaflak I korrante osoa daroa, beraren zabaleran barrena uniformeki banaturik.

Kalkula bedi eremu magnetikoaren balioa P puntuan.



Emaitza:
$$\frac{\mu_0 I}{2\pi a} L \left[\frac{2b + a}{2b - a} \right] .$$

- 14.- Hamabigarren problemako eroaleak ondoko irudietan erakusten den moduan jarri dira. Aipaturiko problemaren aurkituriko korrantearen balioaz, kalkula bedi eremu magnetikoa O puntuan.



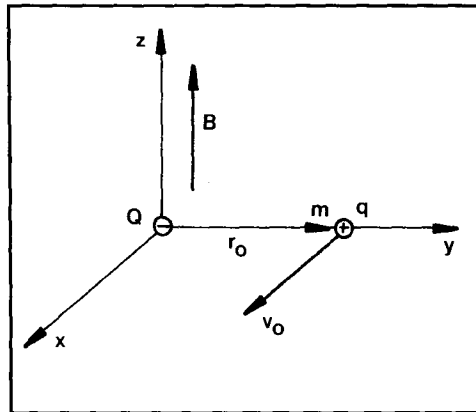
Emaitzak:

Lehenengo kasuan : $3 \times 10^{-3} T$, barruranzkoa.

Bigarren kasuan : $10^{-3} T$, kanporanzkoa.

- 15.- q karga eta m masa dituen partikula, hurrengo irudian ageri den modura higitzen ari da, ardatzen jatorrian tinkaturik dagoen $-Q$ partikularen eta $\mathbf{B}$ eremu magnetikoaren eraginpean. q partikulak hasierako aldiunean duen abiaduraren balioa $\mathbf{v}_0 = v_0 \mathbf{i}$ da, eta beraren hasierako posizio-bektorea, $\mathbf{r}_0 = a \mathbf{j}$.

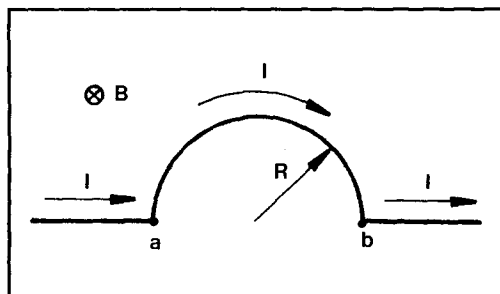
- a) Lor bedi eremu magnetikoaren balioa, q partikulak jatorriaren inguruan zirkunferentzia bat deskriba dezan.



- b) Eremu magnetikoaren balioa aurrekoa izango ez balitz, froga bedi ezen, q partikularen abiadura beraren jatorrirainoko distantziaren funtzioa baino ez litzatekeela izango.

Emaitza:
$$\mathbf{B} = \left[\frac{m v_0}{q a} - \frac{Q}{4 \pi \epsilon_0 v_0 a^2} \right] \mathbf{k} .$$

16.-



Aurreko orrialdeko irudiko baldintzak ditugularik, lor bedi, $\mathbf{B}$ eremu magnetikoak hariaren zati erdizirkularri eginiko indarra.

Ebatz bedi ariketa hau bi era desberdinetan, alegia,

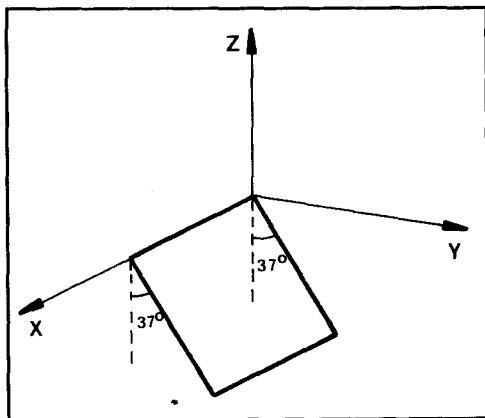
- Lehenengo batetan, zati elemental bat jasaten ari den indarra kalkulatu, eta gero zirkunferentzierdi osoan barrena integratu.
- a eta b puntuen artean haria zuzena bailitzen hartuz.

Emaitza: $2 B I R$, goranzkoa.

- 17.- Kalkula bedi, ekuatorean dagoen hari eroale batek airetan flota dezan behar den korrante-dentsitatea. Suposa bedi, hari hori sortalde-mendebaldeko norabidean kokaturik dagoela. Eroalearen dentsitatea $6 \times 10^3 \text{ kg m}^{-3}$ -takoa da, eta ekuatore aldean Lurra sortutako eremu magnetikoak $7 \times 10^{-5} \text{ T}$ balio du.

Emaitza: $8,4 \times 10^8 \text{ A m}^{-2}$, mendebaldetik sortalderanzkoa.

- 18.- Hurrengo irudiko espira errektangeluarra 20 g-tako masa dauka, X ardatzaren inguruan libreki bira egin dezakeelarik. Alde horizontalen luzera 10 cm-takoa da eta espira orekan dago, Y ardatzaren paraleloa den eta 0,1 T-tako balioa duen eremu magnetiko bat dela medio.



Kalkula bitez:

- a) Espirak daroan korrontea.
- b) Eremu magnetikoa Z ardatzaren paraleloa izango balitz, zein izango litzateke beraren balioa espirak jarrera berberean orekan iraun zezan?

Emaitzak: a) 9,8 A, erlojuaren ardatzen norantzan.

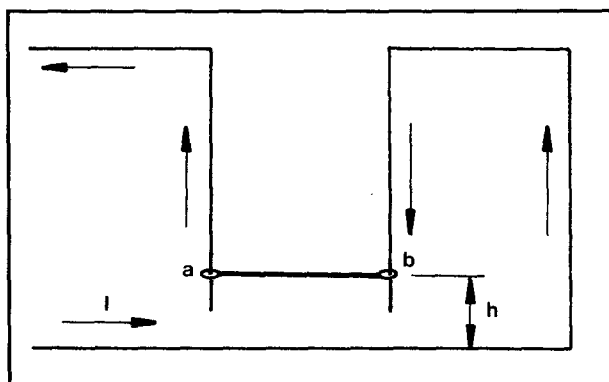
b) 0,075 T, beheeranzkoa.

- 19.- Errepika bedi 17.12. problema, korronteak norantza berekoak diren kasurako (esate baterako, suposa bedi biak iruditik irteten ari direla).

Emaitzak: a) $\frac{\mu_0 I}{\pi} \cdot \frac{x}{a^2 + x^2} \mathbf{j}$.

b) $\frac{\mu_0 I}{\pi} \cdot \frac{y}{a^2 - y^2} \mathbf{i}$.

- 20.- ab barra eroalea gora eta beheara higi daiteke, bere muturretan dauzkan kontaktu higikorrei esker, eta gida modura jokaten ari diren eroale bertikalekiko inolako marruskadurarik gabe.



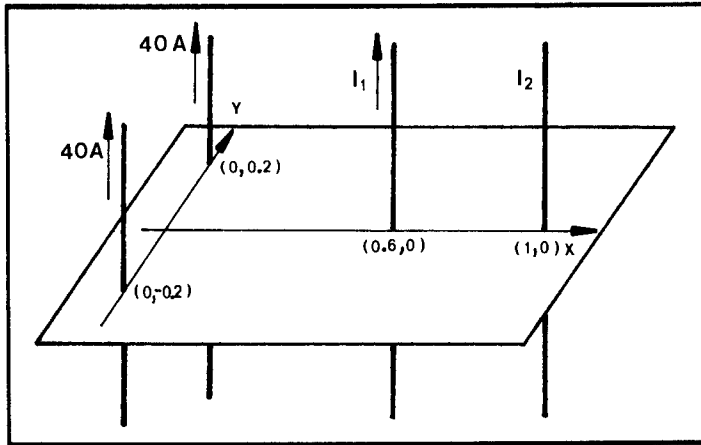
Barrak duen luzera unitateko masa $2,5 \text{ g cm}^{-1}$ -takoa da, eta beheko harirainoko distantziak $h = 1 \text{ cm}$ balio du. Kalkula bedi korrontearen balioa, barra orekan egon dadin. Zer gertatuko litzateke korrontearen norantza aldatuko balitz?

Oharra: Barraren gaineko beste edozein indar magnetiko arbuiatu egingo da, beheko hariak sortutakoa izan ezik.

Emaitza: 350 A . Ez litzateke ezer berezirik gertatuko.

- 21.- Hurrengo orrialdeko lehenengo irudiko lau hari eroaleak elkarren paraleloak dira, eta oso luzeak beraien arteko distantziekin konparaturik.

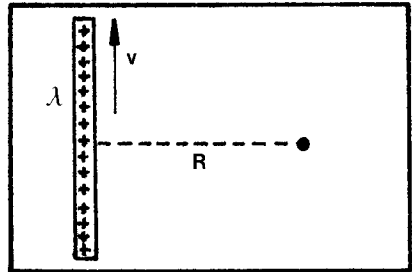
- Kalkula bitez, I_2 korrontearen balioa eta norantza, I_1 korrontearen gaineko indar erresultantea nulua izan dadin.
- I_2 korrontearen norantza aldatzen baldin bada, kalkula bedi I_1 korrontearen gaineko indar erresultantea, luzera-unitatekoa eta intentsitate-unitatekoa.



Emaitzak: a) 48 A , goranzkoa.

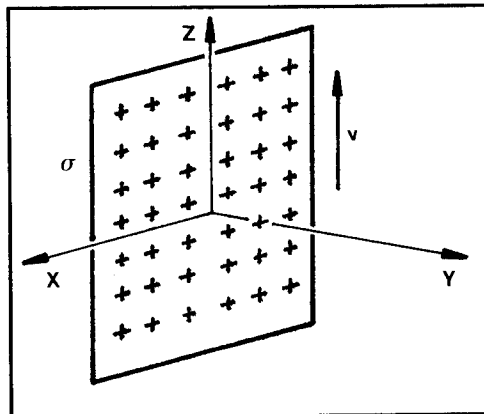
b) $4,8 \times 10^{-5} \text{ N m}^{-1} \text{ A}^{-1}$.

- 22.- Irudiko hari zuzenak luzera-unitateko λ karga du, eta gorantz higitzen ari da v abiaduraz. Lor bedi hariak sortutako eremu magnetikoa, bertatik R distantziara dagoen edozein puntutan.
Oharra: Kontsidera bedi, haria luzera infinitukoa dela.



Emaitza: $B = \frac{\mu_0 \lambda v}{2 \pi R}$, barruranzkoa.

23.-



Irudiko xafra launak σ azalera-unitateko karga du, eta XZ planoan

higitzen ari da $\mathbf{v} = v \mathbf{k}$ abiaduraz. Lor bedi xaflak sortutako eremu magnetikoaren adierazpena espazioko edozein puntutan.

Oharra: Kontsidera bedi, xafla dimentsio infinitukoa dela.

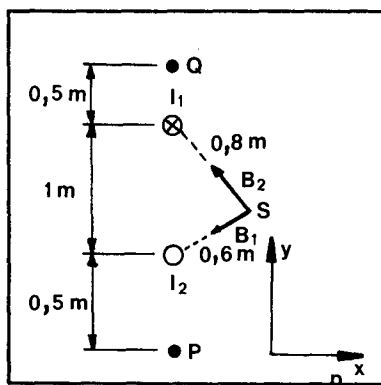
$$\text{Emaitza: } y > 0, \quad \mathbf{B} = -\frac{\mu_0 v \sigma}{2} \mathbf{i}.$$

$$y < 0, \quad \mathbf{B} = \frac{\mu_0 v \sigma}{2} \mathbf{i}.$$

- 24.- Irudiko burdinhari zuzen eta luzeen arteko distantzia 1 m-takoa dela eta $I_1 = 6 \text{ A}$ -takoa dela emanik,

a) zein izango da I_2 korrante-intentsitatearen balioa eta norantza, bi burdinhariek sorteraizitako eremu magnetiko erresultanteak P puntuan duen intentsitatea nulua denean?

b) Zein izango da baldintza haue-tan burdinhari bakoitzak sorteraizita-ko eremu magnetikoaren intentsitatea Q eta S puntuetan?



$$\text{Emaitzak: a) } I_2 = 2 \text{ A}.$$

$$\text{b) } \mathbf{B}(Q) = 2,13 \cdot 10^{-6} \mathbf{i} \text{ T},$$

$$\mathbf{B}(S) = (16 \mathbf{i} - 3 \mathbf{j}) \cdot 10^{-6} \text{ T}.$$

- 25.- OZ ardatzaren norabidean kokaturik dagoen sekzio arbuigarriko eroale zuzen eta mugagabe batek daraman korrante elektrikoak $\mathbf{F}_1 = -\mu_0/\pi \mathbf{k}$ N balioko indarra eragiten du $\mathbf{v}_1 = 4 \mathbf{i} \text{ m s}^{-1}$ -etako abiaduraz higitzen ari den $q_1 = 0,5 \text{ C}$ -etako kargaren gainean, berau $(2,0,0)$ delako puntuan dagoenean. Kalkula bedi korrante elektriko honek $\mathbf{v}_2 = 2 \mathbf{j} + 2 \mathbf{k} \text{ m s}^{-1}$ -etako abiaduraz higitzen ari den $q_2 = -2 \text{ C}$ -etako kargaren gainean eragingo duen indarra, karga $(0,2,1)$ delako puntuan dagoenean.

Zein abiaduraz higitu beharko luke bigarren partikula honek $(0,2,1)$ delako puntutik pasatzean, beraren gaineko indarra nulua izan ledin?

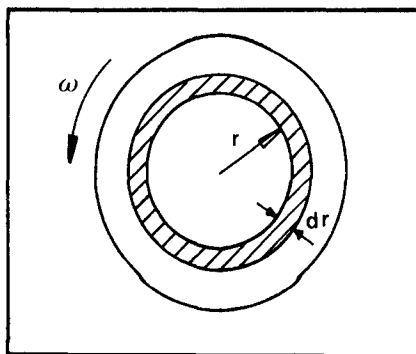
$$\text{Emaitzak: } \mathbf{F}_2 = \frac{\mu_0}{2\pi} (-\mathbf{j} + \mathbf{k}).$$

- 26.- R erradiodun disko ez-eroaleak σ gainazaleko karga-dentsitate uniformea du, eta abiadura angeluar konstantez biratzen ari da, bere

ardatzaren inguruan .

a) r erradioko eta dr lodierako eraztun zirkularra kontsideratuz, froga bedi eraztun honek daraman korrante elektrikoaren intentsitatea ondokoa dela:

$$di = \frac{\omega}{2\pi} dq = \omega \sigma r dr .$$

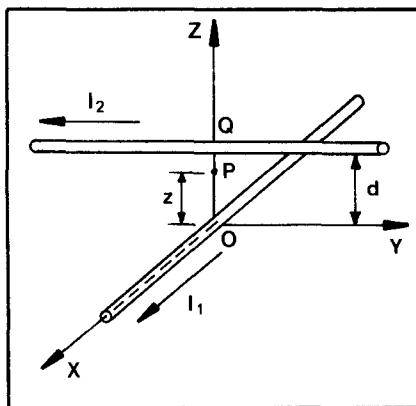


b) Aurreko emaitza erabiliz, froga bedi diskoaren zentruan eremu magnetikoaren moduluak ondoko balioa hartzen duela:

$$B = \frac{\mu_0}{2} \omega \sigma R .$$

Oharra: Eraztun bakoitza di intentsitateko korrontea daraman espira zirkular bat dela kontsidera daiteke.

- 27.- Irudian adierazi diren eroaleak luzera infinitukoak dira. I_1 korrante-intentsitatea daraman eroalea OX ardatzean dago kokaturik, eta I_2 korrante-intentsitatea daramana, OY ardatzarekiko paraleloa da, OZ ardatza koordenatujatorritik d distantziara ebakiz. Aurki bedi bi eroale hauek sorteraiztako eremu magnetikoak OQ zuzenkiaren edozein P puntutan duen intentsitatea, z koordenatuaren funtzioan.



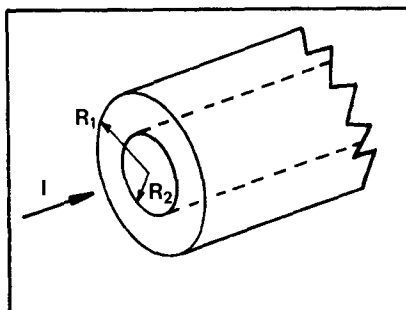
Emaitza:
$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{2\pi} \left[\frac{I_2}{d-z} \mathbf{i} - \frac{I_1}{z} \mathbf{j} \right] .$$

- 28.- Ampère-ren legea erabiliz, azter bedi a erradioko eta altuera infinituko zilindro batetan barrena pasatzen den dentsitate uniformeko korrontea sorteraiztako eremu magnetikoa.

Emaitzak: $r \leq a$, $B = \frac{\mu_0 I r}{2 \pi a^2} \mathbf{u}_\varphi$.

$r \geq a$, $B = \frac{\mu_0 I}{2 \pi r} \mathbf{u}_\varphi$.

- 29.- R_1 eta R_2 erradioko zilindro huts eta eroale baten zeharkako sekzioan barrena, uniformeki banaturiko I intentsitateko korronea doa. Ampère-ren legea erabiliz, froga bedi eremu magnetikoaren moduluak ondoko balioak hartuko dituela:



$B = \frac{\mu_0 I}{2 \pi r}$, $r \geq R_2$ denean,

$B = \frac{\mu_0 I (r^2 - R_1^2)}{2 \pi r (R_2^2 - R_1^2)}$, $R_1 \leq r \leq R_2$ denean,

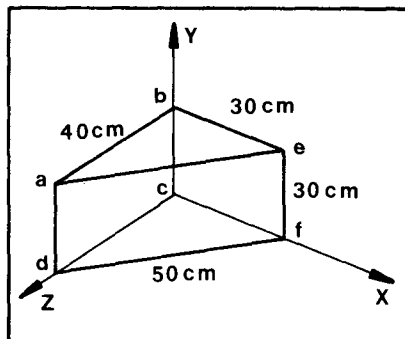
$B = 0$, $r \leq R_1$ denean.

- 30.- Emandako espazioalde batetako eremu magnetikoaren modulu 2 teslatakoa da, eta norabidea eta norantza, OX ardatzerdi positiboa.

a) Zein da irudiko $abcd$ gainazalean zeharreko fluxu magnetikoa?

b) Zein da $befc$ gainazalean zeharreko fluxu magnetikoa?

c) Eta $aefd$ gainazalean zeharrekoa?

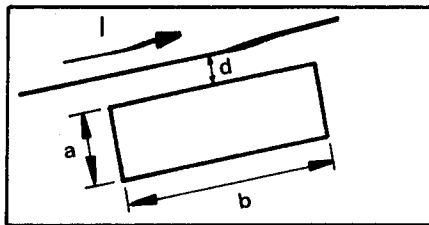


Emaitzak: a) $\Phi_1 = - 0,24 \text{ Wb}$.

b) $\Phi_2 = 0 \text{ Wb}$.

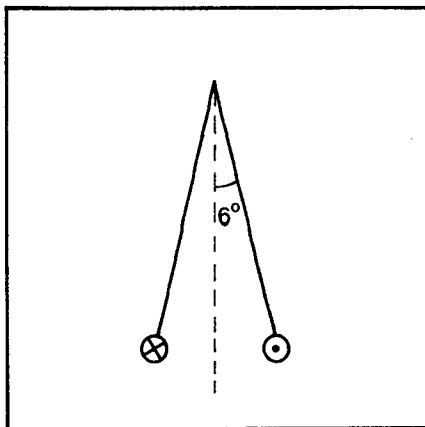
c) $\Phi_3 = 0,24 \text{ Wb}$.

- 31.- Aurki bedi alboko irudiko zirkuitu errektangeluarrean zeharreko fluxu magnetikoa, burdinhari zuzenean barrenako korronea I intentsitatekoa dela jakinik.



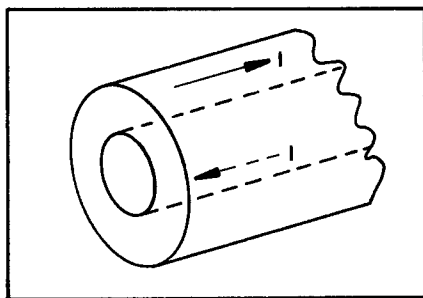
Emaitza: $\Phi_B = \frac{\mu_0 I}{2\pi} b \ln \frac{a+d}{d}$.

- 32.- Bira 4 cm-tako luzeradun harien bidez irudian adierazitako modura eskegita dauden bi burdinhari luze, zuzen eta paralelo. Burdinharien luzera-unitateko masa $5 \times 10^{-2} \text{ kg m}^{-1}$ -etakoa da, eta biek korrante elektriko berbera daroate, aurkako norantzetan baina. Zein da korrante elektriko honen intentsitatea, burdinhariak bertikalarekin 6° -tako angelua osotzen ari direla jakinik?



Emaitza: $I = 46,4 \text{ A}$.

- 33.- Bira irudian adierazi diren R_1 eta R_2 erradiodun zilindro luze eta zentrukideak, $R_1 < R_2$ izanik. Zilindro hauek I intentsitatedun korrante elektrikoa daroate, irudian adierazitako norantzaz. Kalkula bedi korrante elektriko honek sortaraziko duen eremu magnetikoa.



Emaitza: $r \leq R_1:$ $\mathbf{B} = - \frac{\mu_0 I r}{2\pi R_1^2} \mathbf{u}_\varphi$.

$R_1 \leq r \leq R_2:$ $\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I (r^2 - R_2^2)}{2\pi (R_2^2 - R_1^2)} \mathbf{u}_\varphi$.

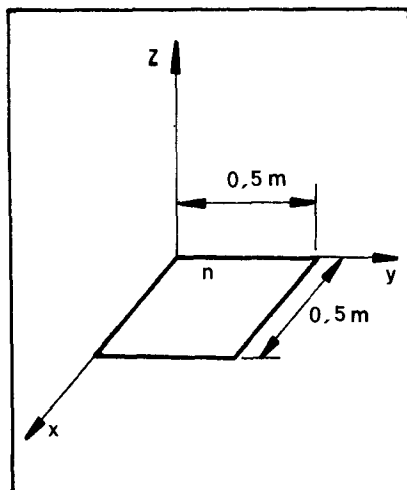
$R_2 \leq r:$ $\mathbf{B} = 0$.

- 34.- Irudian ageri den espira eroa-
learen luzera-unitateko erresisten-
zia elektrikoa $2 \Omega/m$ -takoa da,
eta espazioko puntu guztietan
 $\mathbf{B} = B_0 \sin \omega t \mathbf{j} + B_0 \cos \omega t \mathbf{k}$
($B_0 = 4 \text{ T}$, $\omega = 5 \text{ rad s}^{-1}$) balio
duen eremu magnetiko aldako-
rraren eraginpean dago.

a) Zergatik sorteraziko da
korrante elektrikoa espiran zehar?

b) Kalkula bedi sorterazitako
korrante elektrikoaren intentsi-
tatea.

c) Zein izango da korrante
elektrikoaren norantza?

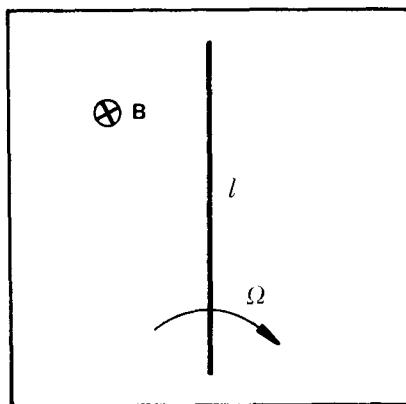


Emaitza: $I = \frac{5}{4} \sin 5t \text{ A}.$

- 35.- $\mathbf{B}$ eremu magnetiko uniformearen
eraginpean dagoen l luzeradun
ziria Ω delako abiadura angeluar
konstanteaz biratzen ari da, $\mathbf{B}$ -ren
norabidearekiko plano perpendi-
kularrean, irudian adierazi den
bezala. Kalkula bedi ziriaren
muturren arteko potentzial- dife-
rentzia.

a) Ziria bere muturretariko
batekiko biratzen ari denean.

b) Ziria bere erdiko puntuare-
kiko biratzen ari denean.



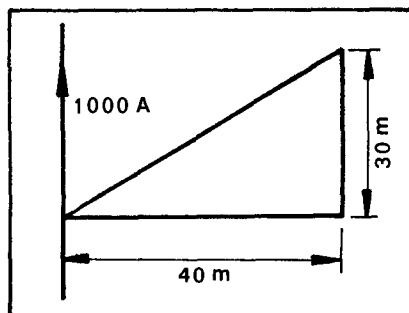
Emaitzak: a) $V_{AB} = \frac{1}{2} B \Omega l^2 .$

b) $V_{AB} = 0 .$

- 36.- Irudian ageri den eroale zuzenak
 10^3 A -tako korrante elektrikoa
daroa.

a) Lor bedi korrante elektriko
honek sorterazitako eremu mag-
netikoak zirkuitu triangeluarrean
zehar duen fluxua.

b) Eroale zuzenean barrenako
korrante elektrikoaren intentsita-
tea uniformeki gutxiagotzen baldin



bada, 5 segundotan anulatzeko, lor bedi denbora-tarte honetan zirkuitu triangeluarrean sorteraizitako korrante elektrikoaren intentsitatea, zirkuitu honek $0.001 \Omega m^{-1}$ -etako luzera-unitateko erresistentzia duela jakinik. ($\mu_0 = 4 \pi \times 10^{-7} m kg C$).

Emaitzak: a) $\Phi_B = 6 \times 10^{-3} Wb$.

b) $I' = - 0,01 A$.

37.- S azaleradun N espira dituen zirkuitu launa, $B = B_0 \sin \omega t$ ekuazioko eremu magnetiko aldakor eta uniformearekiko plano perpendikularrean kokatu da. Kalkula bedi zirkuituan sorteraizitako indar elektroeragilea.

Emaitza: $\varepsilon = - N S B_0 \omega \cos \omega t$.

38.- $0,10 m$ -tako erradiodun 200 espira dituen harila $0,2 T$ -tako eremu magnetiko uniformearekiko plano perpendikularrean kokatu da. Aurki bedi harilean sorteraizitako indar elektroeragilea, $0,1 s$ -tako denbora-tartean,

- a) eremu magnetikoa bikoiztu ondoren,
- b) eremu magnetikoa ezabatu ondoren,
- c) eremu magnetikoaren norantza aldatu ondoren,
- d) harila 90° -z biratu ondoren,
- e) harila 180° -z biratu ondoren.

Kasu bakoitzean, adieraz bedi indar elektroeragileak duen norantza.

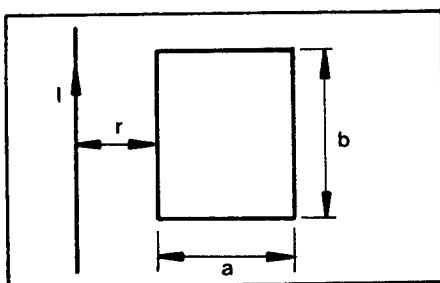
Emaitzak: a) $\varepsilon = - 4 \pi V$. b) $\varepsilon = 4 \pi V$.

c) $8 \pi V$. d) $4 \pi V$. e) $8 \pi V$.

39.- Alboko irudian adierazi den eroale zuzenak $I = I_0 \sin \omega t$ intentsitateko korrante elektrikoa daroa. Kalkula bitez:

a) Zirkuitu errektangeluar estatikoan sorteraizitako indar elektroeragilea.

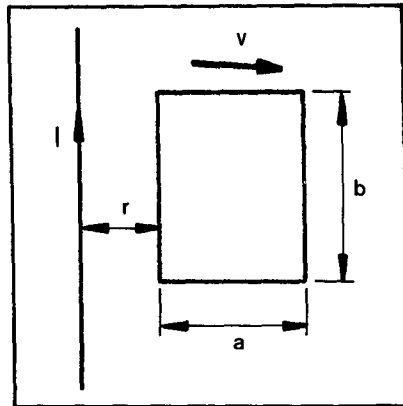
b) Bi zirkuituen arteko elkar-induktantzia.



Emaitzak: a) $\varepsilon = - \frac{\mu_0 b I_0 \omega}{2 \pi} \ln \frac{a+r}{r} \cos \omega t$.

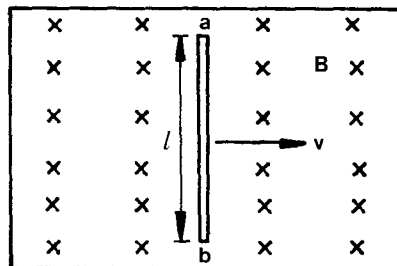
b) $M = \frac{\mu_0 b}{2 \pi} \ln \frac{a+r}{r}$.

- 40.- Oraingo ariketan aurkeztutako muntaia, aurreko ariketako berbera da, baina zirkuitu errektangeluarra geldu egon beharrean, higitzen ari da. Lor bitez v abiaduraz higitzen ari den zirkuitu errektangeluarrean sorteraizitako indar elektroeragilea eta irudiko bi zirkuituen arteko elkar-induktantzia, eroale zuzenak daraman korrante elektrikoaren intentsitatea konstantea denean.



Emaitzak: $\varepsilon = \frac{\mu_0 I a b v}{2 \pi r (r + a)}$, $M = \frac{\mu_0 b}{2 \pi} \ln \frac{r + a}{r}$.

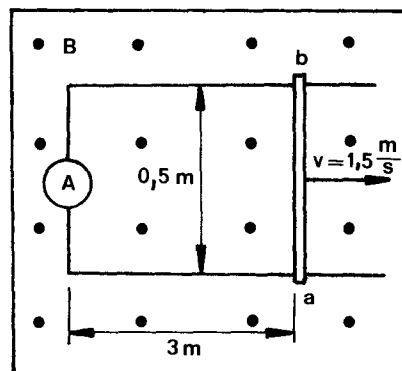
- 41.- Zein da irudiko ab eroalearen muturren arteko potentzial-diferentzia, $l = 1,5 \text{ m}$, $B = 0,5 \text{ T}$ eta $v = 4 \text{ m s}^{-1}$ direla jakinik?



Emaitza: $V_{AB} = 3 \text{ V}$.

- 42.- Irudian adierazitako hari eroale higikorak zein hari eroale finkoak $1,7 \Omega/\text{m}$ -tako erresistentzia dute, eta B eremu magnetiko uniformearen modulua $1,8 \text{ T}$ -takoa da.

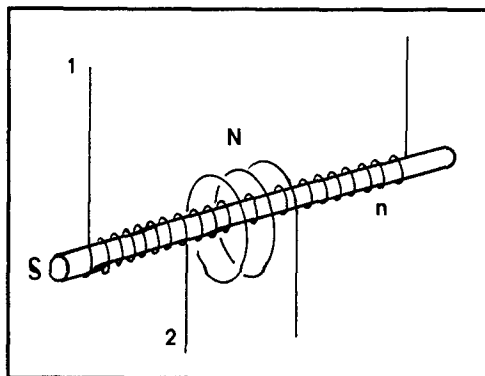
- Zein da zirkuituan induzituriko indar elektroeragilea?
- Zein da A amperemetrotik pasatuko den korrante-intentsitatea, eroale higikorraren posizioa irudian adierazitakoa denean?



Emaitzak: a) $\varepsilon = -1,35 \text{ V}$. b) $I = 0,12 \text{ V}$.

- 43.- N espiradun harila, luzera-unitateko n espira dituen S sekzioko solenoide luzearen inguruan biribilkaturik dago, irudian adierazi den

modura. Kalkula bedi sistemaren elkar-induktantzia.



Emaitza: $M = \mu_0 n N S$.

- 44.- Kalkula bedi bi autoinduktantziaz osaturiko sistemaren autoinduktantzia baliokidea, induktantziak seriez zein paraleloz konektaturik daudenean.

Oharra: Suposa bedi autoinduktantziak elkar-induktantzia arbuiaitzeko beste distantziaturik daudela.

Emaitza: $\frac{1}{L} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2}$.

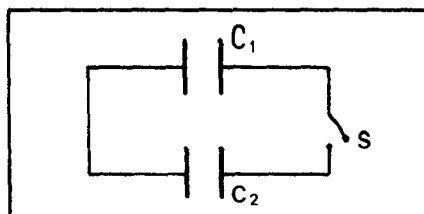
- 45.- Demagun R erresistentziadun zirkuitu batetan zeharreko fluxu magnetikoa Φ_B dela. Froga bedi fluxu magnetikoaren aldakuntzaren arintasunaren independentziaz, zirkuituaren edozein sekzio zehar-katuko duen karga-kopurua $Q = \Delta\Phi_B/R$ izango dela, $\Delta\Phi_B$ fluxu magnetikoaren aldakuntza izanik.

- 46.- 2 A-tako intentsitateko korrontea daroan zirkuituaren fluxu magnetikoa, 0,8 Wb-etakoa da. Aurki bedi zirkuituaren autoinduktantzia, eta kalkula bedi zirkuituan sorteraiztako indar elektroeragilea, 0,2 s-tako denbora-tartean,
- korrontea bikoiztu ondoren,
 - korrontea ezabatu ondoren,
 - korrontearen norantza aldatu ondoren.

Emaitzak: $L = 0,4 \text{ H}$.

a) $\varepsilon = -4 \text{ V}$, b) $\varepsilon = 4 \text{ V}$, c) $\varepsilon = 8 \text{ V}$.

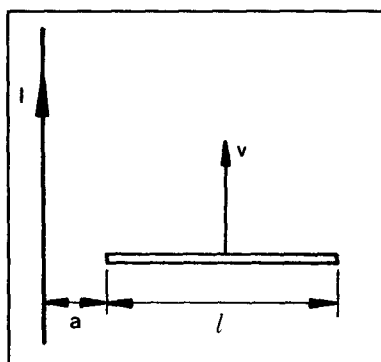
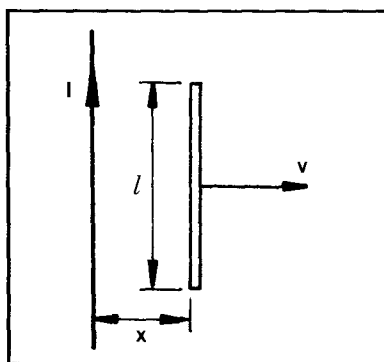
- 47.- Demagun irudian ageri den C_1 kapazitatedun kondentsadoreak Q karga duela. S etengailua itxi ondoren, nola aldatuko da sistemaren energia? Handiagotuko al da? Txikiagotuko al da? Zergatik?



Emaitza: Txikiagotu egingo da.

- 48.- Biz I intentsitatedun korrante elektriko konstantea daraman eroale zuzen eta mugagabea. Kalkula bedi aldamenean adierazi den eroale mugatuaren muturren artean sorteraizitako potentzial-diferentzia.

- Eroale mugatua, eroale mugagabearekiko paraleloki kokaturik egonik, eskuinalderantz higitzen ari denean.
- Eroale mugatua, eroale mugagabearekiko perpendikularki kokaturik egonik, gorantz higitzen ari denean.



Emaitzak: a) $V_{AB} = \frac{\mu_0 I v l}{2 \pi x}$.

b) $V_{AB} = - \frac{\mu_0 I v}{2 \pi} \ln \frac{a+l}{a}$.

18. GAIA

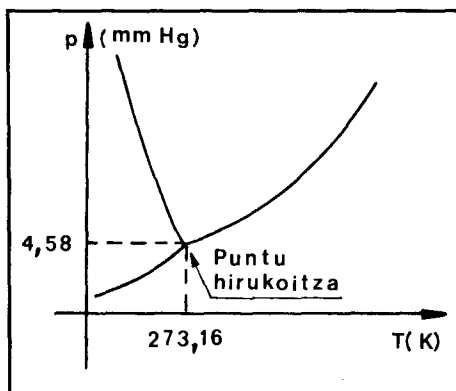
**TERMODINAMIKAREN
LEHENENGO PRINTZPIOA**

18.1. Uraren puntu hirukoitzean, bolumen konstanteko gasezko termometro batek 50 mm Hg-tako presioa adierazi du.

a) Zein izango da presioa, termometroak 300 K-etako tenperatura adieraztean?

b) Zein izango da gas idealaren tenperatura, presioa 68 mm Hg-takoa denean?

a) Dakigunez, bolumen konstanteko gasezko termometroetan ondoko erlazioa betetzen da:



$$T = 273,16 \lim_{p_3 \rightarrow 0} \left(\frac{p}{p_3} \right), \quad V \text{ konstantea izanik,}$$

eta, gure kasuan, uraren puntu hirukoitzeko egoera-aldagaien balioak $p_3 = 50 \text{ mm Hg}$ eta $T_3 = 273,16 \text{ K}$ direlarik.

Hurbilketa on batez, hauxe idatz dezakegu:

$$T = 273,16 \frac{p}{p_3} .$$

Hemendik,

$$p = \frac{T}{273,16} p_3 .$$

Gure datuak ordezkatzuz:

$$p = \frac{300}{273,16} \times 50 = 54,9 \text{ mm Hg} .$$

b) Lehen ipinitako tenperaturaren hurbilketaz, gure kasuan,

$$T = 273,16 \times \frac{68}{50} = 371,5 \text{ K} .$$

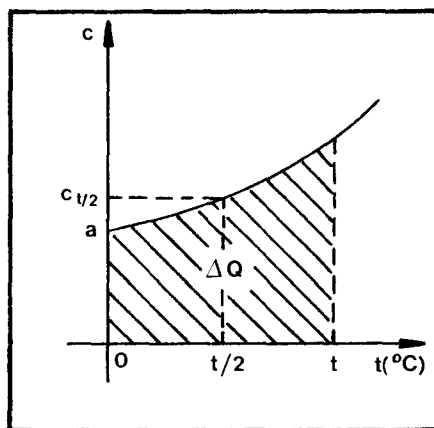
18.2. Gorputz baten bero-ahalmen espezifikoa, c , ondoko ekuazioaren bidez dator emanda: $c = a + bt^2$, a eta b konstanteak izanik eta t tenperatura zentigradua.

- Lor bedi, m masako gorputz horren tenperatura 0° -tatik t° -tara jasotzeko behar den bero-kantitatea.
- Zein izango da batezbesteko bero-ahalmen espezifikoa 0° eta t° tenperaturen artean?
- Konpara ezazue, aurreko atalean lortu duzuen balioa, $t/2$ tenperaturean duen bero-ahalmen espezifikoarekin.

a) Teoriatik dakigunez,

$$c = \frac{1}{m} \frac{dQ}{dt} ,$$

$$dQ = m c dt .$$



Bigarren adierazpen hau tenperaturarekiko integratuz, prozesuan esku hartzen duen beroa lortuko dugu (ikus irudia):

$$\Delta Q = \int dQ = \int_0^t m (a + bt^2) dt =$$

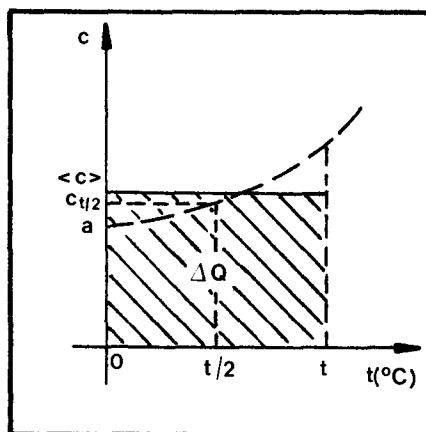
$$= m \left[at + \frac{1}{3} bt^3 \right]_0^t = m \left[at + \frac{bt^3}{3} \right] .$$

b) Batezbesteko bero-ahalmen espezifikoren bidez, lehen lortutako ΔQ beroa ondoko eran idatz daiteke:

$$\Delta Q = m \langle c \rangle \Delta t .$$

Adierazpen honek hauxe esan nahi du: Prozesu honetan bero-ahalmen espezifikoa konstantea izango balitz (batezbestekoa), esku hartzen duen beroak lehen lortutakoaren berbera izan beharko luke (irudian dakusagunez).

Beraz:



$$\Delta Q = m \langle c \rangle (t - 0) = m \langle c \rangle t = m \left[at + \frac{bt^3}{3} \right] .$$

Eta hemendik:

$$\langle c \rangle = a + \frac{bt^3}{3} .$$

c) Azkeneaz, bero-ahalmen espezifikoa $t/2$ tenperaturaren zenbat balio duen ikusiko dugu, c -ren adierazpenean $t/2$ balioa ordezkatuz:

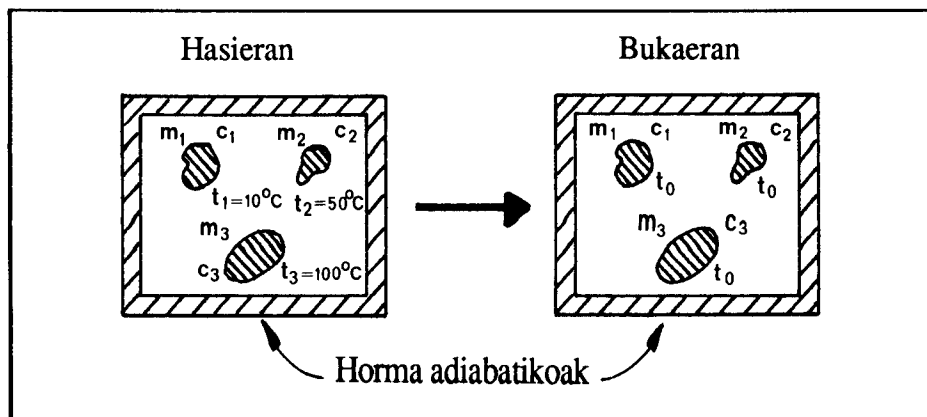
$$c_{t/2} = a + b \left(\frac{t}{2} \right)^2 = a + \frac{bt^2}{4} .$$

Orokorki, $\langle c \rangle$ eta $c_{t/2}$ desberdinak izango dira, gure kasu bereziko irudietan ikus daitekeenez.

18.3. Adiabatikoki isolaturik dagoen ontzi baten barruan, hiru gorputz daude, beraien masak eta bero-ahalmen espezifikoa m_1, m_2, m_3 eta c_1, c_2, c_3 izanik, hurrenez hurren. Hasierako tenperaturak: $t_1 = 10^\circ\text{C}$, $t_2 = 50^\circ\text{C}$ eta $t_3 = 100^\circ\text{C}$ badira, eta ondoko erlazioak ere betetzen badira,

$$\frac{m_1}{1} = \frac{m_2}{2} = \frac{m_3}{3} , \quad \frac{c_1}{5} = \frac{c_2}{4} = \frac{c_3}{6} ,$$

lor bedi oreka termikoaren tenperatura.



Adiabatikoki isolaturik dagoen sistema bat izanik, kalorimetriaren legeen arauera, hauxe betetzen da:

$$m_1 c_1 (t_0 - t_1) + m_2 c_2 (t_0 - t_2) + m_3 c_3 (t_0 - t_3) = 0 .$$

Honek, beroaren aldaketa osoak zero izan behar duela esan nahi du, goiko ekuazioaren bigarren zatian ikus dezakegunez.

Hemendik t_0 aterako dugu:

$$t_0 = \frac{m_1 c_1 t_1 + m_2 c_2 t_2 + m_3 c_3 t_3}{m_1 c_1 + m_2 c_2 + m_3 c_3} .$$

Ipin ditzagun m_3 eta m_2 , m_1 delakoaren funtzioan, eta c_3 eta c_2 , c_1 -ren funtzioan:

$$m_2 = 2 m_1 , \quad m_3 = 3 m_1 , \quad c_2 = 0,8 c_1 , \quad c_3 = 1,2 c_1 .$$

Erlazio hauek aurreko adierazpenera eramanez, azkenean emaitza hau lortuko dugu:

$$t_0 = 72,58^\circ\text{C} .$$

18.4. Labe baten barrutik 50 kilogramotako metal-zati bat ateratu dugu, tenperatura 480°C -takoa izanik. Segidan, metal hau 400 kg olio betetako ontzi batetan sartu dugu, hasierako tenperatura 26°C -takoa izanik. Oreka termikora heltzean, 38°C -tan finkatu da termometroa. Olioaren bero-ahalmen espezifikoa $0,5 \text{ cal/g}^{\circ}\text{C}$ -takoa bada, zein izango da metalarena?

Oharra: Ontziaren bero-ahalmena arbuia egin da.

Kalorimetriaren oinarritzko legeak dioenez, olioak zurgaturiko beroa, metalak utzirik beroaren berdina da. Matematikoki, oreka termikoaren tenperatura t_0 bada,

$$m_{ol} c_{ol} (t_0 - t_{ol}) = m_m c_m (t_m - t_0) ,$$

non m_{ol} , c_{ol} , t_{ol} direlakoak olioaren datuak diren, eta m_m , c_m , t_m , metalarenak. Hemendik,

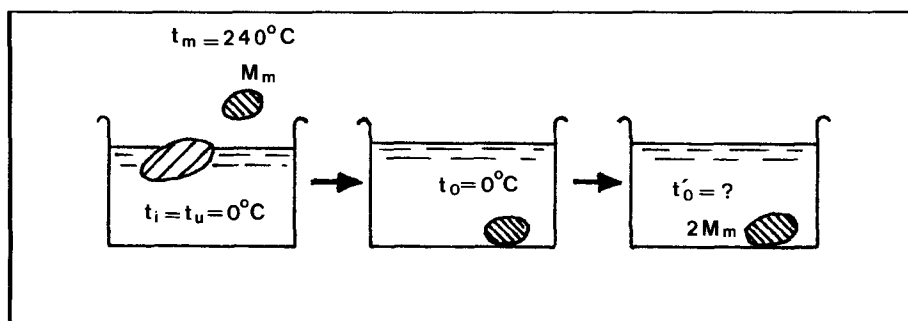
$$c_m = \frac{m_{ol} c_{ol} (t_0 - t_{ol})}{m_m (t_m - t_0)} = \frac{400 \cdot 10^3 \cdot 0,5 (38 - 26)}{50 \cdot 10^3 \cdot (480 - 38)} ,$$

$$c_m = 0,11 \text{ cal/g} \cdot ^{\circ}\text{C} .$$

18.5. Kalorimetro batetan 500 g ur eta 300 g izotz daude, oreka termikoaren tenperatura 0°C -takoa izanik. Labe batetatik, 1000 g-tako metal-zati bat hartu dugu eta kalorimetroan sartu. Azkenean, izotz guztia urtu egin da, eta oreka termikoaren tenperatura 0°C -takoa da berriro. Zein izango litzateke oreka termikoaren tenperatura, metal-zatiaren masa bikoiztuko balitz?

Oharra: Arbuia bedi kalorimetroaren bero-ahalmena.

Datuak: Izotzaren fusio-bero sorra, $l_f = 80 \text{ cal/g}$; Metalaren hasierako tenperatura, $t_m = 240^{\circ}\text{C}$.



Aplika dezagun kalorimetriaren oinarritzko legea lehenengo prozesuan. Honen bidez, metalaren bero-ahalmen espezifikoa lortuko dugu.

Dei ditzagun:

- (m_i, t_i) = izotzaren masa eta hasierako temperatura.
- (m_u, t_u) = uraren masa eta hasierako temperatura.
- (m_m, t_m) = metalaren masa eta hasierako temperatura.
- c_m = metalaren bero-ahalmen espezifikoa.
- t_0 = bukaerako oreka termikoaren temperatura.

Horrela eginez,

$$m_i l_f + m_i (t_0 - 0) + m_u (t_0 - t_u) = m_m c_m (t_m - t_0) ,$$

$$c_m = \frac{300 \cdot 80 + 300 \cdot (0 - 0) + 500 \cdot (0 - 0)}{1000 \cdot (240 - 0)} = 0,1 \text{ cal/g } ^\circ\text{C} .$$

Bigarren prozesuan, oreka termikoaren temperatura ez da 0°C izango, handiagoa baizik. Lehenengo legea berridatziz, oreka termikoaren temperatura berria t'_0 izanik (metalaren masa ere aldatuko da: $m'_m = 2m_m$), ondokoa daukagu:

$$m_i l_f + m_i (t'_0 - 0^\circ) + m_u (t'_0 - t_u) = m'_m c_m (t_m - t'_0) ,$$

$$300 \cdot 80 + 300 t'_0 + 500 t'_0 = 2000 \cdot 0,1 (240 - t'_0) ,$$

$$t'_0 = 24^\circ\text{C} .$$

18.6. Lor bedi, expantsio batetan gas batek V_1 bolumenetik V_2 bolumenera pasatzean eginiko lana, beraren egoera-ekuazioa

$$\left(p - \frac{a}{V^2}\right) (V - b) = k$$

bada, a , b eta k konstanteak izanik. (Ekuazio hau gas errealeko egoera-ekuazioa da).

Dakigunez, lana ondokoa da:

$$W = \int_{V_1}^{V_2} p dV .$$

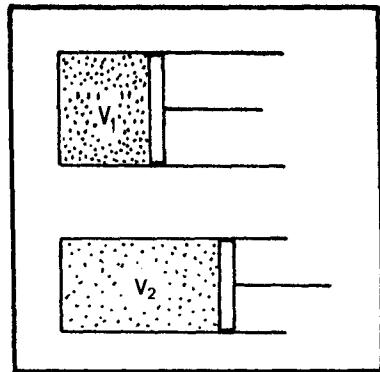
Egoera-ekuazioa erabiliz,

$$p = \frac{k}{V - b} + \frac{a}{V^2}$$

dugu, eta hemendik:

$$W = \int_{V_1}^{V_2} dV \left[\frac{k}{V - b} + \frac{a}{V^2} \right] =$$

$$= k \ln \left[\frac{V_2 - b}{V_1 - b} \right] + \frac{a(V_2 - V_1)}{V_1 V_2} .$$

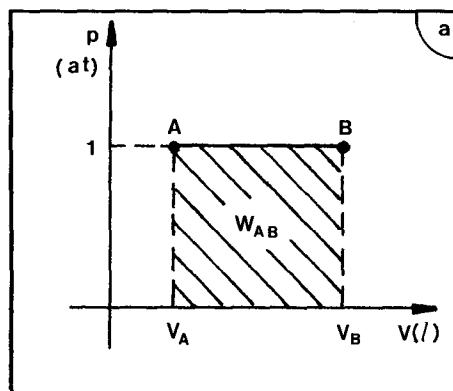


18.7. Gas ideal baten mol bat ontzi itxian sartu da enbolo baten bidez. Enbolo honen bidez presio atmosferikoa mantendu egin da etengabe barruko gasean. Hasierako tenperatura 27°C -takoa izanik, ontzi hau 127°C -taraino berotu da.

- Marraz bedi prozesu honen p - V diagrama.
- Zenbateko lana egin da beroketa-prozesuaren bitartean?
- Zeren gainean egin da lan hori?
- Zein da gasaren barne-energiaren aldaketa?
- Zenbateko bero-kantitatea zurgatu du gasak?
- Zenbateko lana egingo luke gasak, kanpoko presioa $0,5$ atmosferatakoa izango balitz?

Datuak: $R = 8,31 \text{ J/mol K}$ $K = 0,08207 \text{ atm l/mol K}$

a)



b) Lehenik eta behin lana kalkulatu dugu azaleraren bidez. Horretarako, lehenik V_A eta V_B lortu beharko ditugu. Egoera-ekuazioa erabiliz (eta presioa konstantea izanik):

$$\frac{V_0}{T_0} = \frac{V_A}{T_A} \rightarrow V_A = \frac{T_A}{T_0} V_0 = \frac{300}{273} \cdot 22,4 = 24,62 \text{ l} .$$

$$\frac{V_0}{T_0} = \frac{V_B}{T_B} \rightarrow V_B = \frac{T_B}{T_0} V_0 = \frac{400}{273} \cdot 22,4 = 32,82 \text{ l} .$$

(aurrekoetan V_0 eta T_0 bolumen molarra eta temperatura baldintza normaletan : $V_0 = 22,4 \text{ l}$, $p_0 = 1 \text{ atm}$, $T_0 = 273 \text{ K}$).

Hemendik, lanaren adierazpena kontutan edukiz:

$$W_{AB} = \int_{V_A}^{V_B} p dV = p \int_{V_A}^{V_B} dV = p (V_B - V_A) ,$$

$$W_{AB} = 1 \cdot (32,82 - 24,62) \text{ atm} \cdot \text{l} = 831 \text{ J} .$$

c) Lan hau kanpoko airearen presioaren kontra, alegia, atmosferaren kontra egin da.

d) Dakigunez, barne-energia tenperaturaren funtzioa baino ez da, eta beraren aldaketa era honetan idatz daiteke:

$$\Delta U = n C_V \Delta T .$$

Gure kasuan, $n = 1$ eta $\Delta T = 100 \text{ K}$ eta ondorioz,

$$\Delta U = 100 C_V .$$

Demagun gas ideala oxigenoa dela. Tauletan begiratu, balio hau dugu:

$$C_V = 21,07 \text{ J / mol K} , \text{ eta honela ,}$$

$$\Delta U_{AB} = 100 \cdot 21,07 = 2107 \text{ J} .$$

e) Lehenengo printzipioaren arauera: $Q = \Delta U + W$.

Hemendik: $Q_{AB} = 831 + 100 C_V$.

Oxigenoa izanik: $Q_{AB} = 831 + 2107 = 2938 J$.

f) Presio atmosferikoa $0,5 \text{ atm}$ -takoa izango balitz, hasierako eta bukaerako bolumenak honelaxe lortuko lirateke, egoera-ekuazioaren bidez:

$$p V = n R T .$$

$n = 1$ izanik, emaitza hauek ditugu:

$$V'_A = \frac{R T_A}{p'_A} = \frac{0,08207 \cdot 300}{0,5} = 49,24 \text{ l} .$$

$$V'_B = \frac{R T_B}{p'_B} = \frac{0,08207 \cdot 400}{0,5} = 65,64 \text{ l} .$$

Eta azkenez:

$$W'_{AB} = p' \Delta V' = 0,5 (65,64 - 49,24) = 8,2 \text{ atm} \cdot \text{l} = 831 J .$$

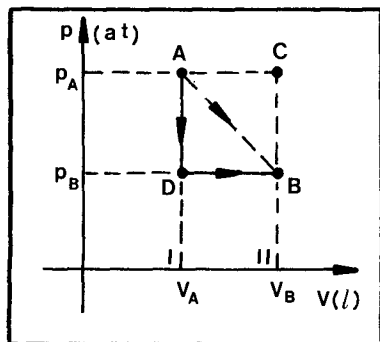
Ikus daitekeenez, lana aurreko kasuan lortutakoaren berdina izango da.

18.8. Gas ideal batek hurrengo orrialdeko irudian ageri den transformazioa jasan du, A egoetatik B egoerara pasaturik. Irudiko puntuen baldintzak ondoko taulakoak dira:

$$p_A = 2 \text{ atm} , \quad V_A = 1 \text{ l} , \quad T_A = 200 \text{ K} ,$$

$$p_C = p_A , \quad V_C = V_B , \quad T_C = 400 \text{ K} ,$$

$$p_D = p_B , \quad V_D = V_A , \quad T_D = 100 \text{ K} ,$$



a) Kalkula bitez transformazio honetan esku hartzen duten lan eta bero-kantitateak.

b) Gasaren expansioa ACD edo ADB prozesuaren bidez egingo balitz, zeintzu izango lirateke lan eta bero-kantitatea transformazio bakoitzean?

Datuak: $U_B = 10 J$, $U_C = 20 J$, $U_D = 5 J$.

a) Kalkula ditzagun B , C eta D egoeretako aldagaiak, $p V / T = \text{kte}$ erlazioaren bidez:

$$A \rightarrow C : p = \text{kte} ; \frac{V_A}{T_A} = \frac{V_C}{T_C} ; V_C = \frac{400}{200} \cdot 1 = 2 \text{ l} .$$

$$A \rightarrow D : V = \text{kte} ; \frac{p_A}{T_A} = \frac{p_D}{T_D} ; p_D = \frac{100}{200} \cdot 1 = 1 \text{ atm} .$$

$$C \rightarrow B : V = \text{kte} ; \frac{p_C}{T_C} = \frac{p_B}{T_B} ; T_B = \frac{1}{2} \cdot 400 = 200^\circ K .$$

Datu hauen bidez, osatu egin dezakegu aurreko taula:

Egoera	$p \text{ (atm)}$	$V \text{ (l)}$	$T \text{ (K)}$
A	2	1	200
B	1	2	200
C	2	2	400
D	1	1	100

$A \rightarrow B$ transformazioan egindako lana, AB III azaleraz dator emanda:

$$W_{AB} = \frac{2 + 1}{2} (2 - 1) = 1,5 \text{ atm} \cdot \text{l} = 152 \text{ J} .$$

Barne-energiaren aldaketa zero izango da, $T_A = T_B$ bait da. Orduan:

$$Q_{AB} - W_{AB} = 0 \rightarrow Q_{AB} = W_{AB} = 152 \text{ J} .$$

b) Kalkula ditzagun lanak azalaren bidez:

$$W_{AB} = 2 (2 - 1) = 2 \text{ atm} \cdot \text{l} = 202,6 \text{ J} .$$

$$W_{CB} = 0 \text{ (bolumena konstantea izanik).}$$

$$W_{AD} = 0 \text{ (hemen ere bolumena konstantea da).}$$

$$W_{DB} = 1 (2 - 1) = 1 \text{ atm} \cdot l = 101,3 \text{ J}.$$

Bero-kantitateak lehenengo printzipioa aplikatuz kalkula ditzakegu:

$$Q - W = \Delta U \quad \rightarrow \quad Q = W + \Delta U.$$

Hemendik:

$$Q_{AB} = 202,6 + 10 = 212,6 \text{ J}.$$

$$Q_{CB} = 0 + (10 - 20) = -10 \text{ J}.$$

$$Q_{AD} = 0 + (5 - 10) = -5 \text{ J}.$$

$$Q_{DB} = 101,3 + (10 - 5) = 106,3 \text{ J}.$$

18.9. Kalkula bedi 3 m³-tako hidrogenozko bolumena bikoizteko behar den bero-kantitatea, presioa konstantea izanik. Hasierako tenperatura 21°C-takoa balitz, zein izango litzateke bukaerakoa?

Datuak: $p = 2 \text{ atm}$, $C_p = 7 \text{ cal / mol K}$, $M_H = 2,016$.

Presioa konstantea izanik, egoera-ekuazioaren bidez erraz lortuko dugu bukaerako tenperatura:

$$\frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_2} = \frac{2 V_1}{T_2} \rightarrow T_2 = 2 T_1 = 2 \cdot 294 = 588 \text{ K}$$

($V_2 = 2V_1$ bait da).

Bero-kantitatea lortzeko, prozesuan presioak konstante iraungo duela kontutan hartuz, hauxe idatz dezakegu:

$$Q = n C_p (T_2 - T_1).$$

Adierazpen honetako ezezagun bakarra n da. Egoera-ekuazioaren bidez,

$$\frac{p_0 V_0}{T_0} = \frac{p_1 V_1}{T_1}, \quad p_0, V_0, T_0 \text{ baldintza normalak izanik.}$$

Hemendik:

$$V_0 = \frac{T_0}{T_1} \cdot \frac{p_1}{p_0} V_1 = \frac{276 \cdot 2 \cdot 3}{294} = 5,57 \text{ m}^3 = 5570 \text{ l} .$$

Azkenez:

$$n = \frac{V_0}{V_{0M}} = \frac{5570}{22,4} = 248,7 \text{ mol} ,$$

non V_{0M} bolumen molarra den, baldintza normaletan.

Eta bero-kantitatearen adierazpena hauxe izango da:

$$Q = 248,7 \cdot 7 (588 - 294) = 511\,870 \text{ cal} .$$

ARIKETAK

- 1.- Termometro batetan merkurio-zutabearen luzera 4 *cm*-takoa da izotzaren fusio-puntuan, eta uraren irakite-puntuan, 24 *cm*-takoa.
 - a) Zein izango da zutabearen luzera, gela batetan 22°C-tako temperatura dagoenean?
 - b) Zein izango litzateke disoluzio kimiko baten temperatura, merkurio-zutabearen luzera 25,4 *cm*-takoa balitz?

Emaizak: a) 8,4 *cm* .

b) 107°C .

- 2.- 550 g urez beteta dagoen kalorimetro batetan, hasierako temperatura 14,2 °C-takoa izanik, 70 g burdin sartu dira, beronen temperatura 98°C-takoa izanik. Azkenean oreka termikoaren temperatura 15,3 °C-takoa bada, zein izango da kalorimetroaren ur-baliokidea?
 Datua: Burdinaren bero-ahalmen espezifikoa : $C = 0,109 \text{ cal / g } ^\circ\text{C}$.

Emaiza: 23,6 *gr* .

- 3.- Izotz-zati bat H altueratik erori da. Lor bedi izotz dena urtzeko H -ren baliorik txikiena, lurraekin talka inelastikoa duela eta energia osoa bero bihurtu dela kontsideraturik.

Emaiza: $H = 34 \text{ km}$.

- 4.- Niagara-ko urjauzian ura 50 *m*-tako altueratik erortzen da. Energia potentzialaren aldaketa uraren barne-energia bihurtzen bada, zein izango da tenperaturaren gehikuntza?

Emaiza: $t = 0,12^\circ\text{C}$.

- 5.- Gas baten transformazioa $p V^2 = 2000$ legearen bidez emanda dator (MKS sisteman). Lor bedi $V_1 = 1 \text{ m}^3$ -tatik $V_2 = 2 \text{ m}^3$ -tara doan gas honen expantsio batetan egindako lana.

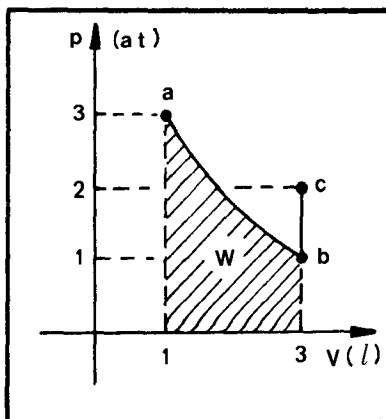
Emaiza: $W = 1000 \text{ J}$.

- 6.- Gas biatomiko ideal baten 100 litro baldintza normaletan daudela, berotu egin dira, bolumena konstante mantendurik. Lau kilokaloria zurgatu badituzte, zein izango da presioaren aldaketa?
 Datuak: $R = 2 \text{ cal / mol } K$, $C_V = 5 \text{ cal / mol } K$.

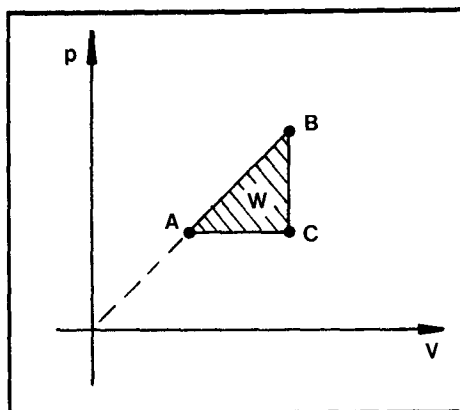
Emaitza: $p_s = 0,65 \text{ atm}$.

- 7.- Gas ideal baten mol batek alboko irudian ageri diren prozesu itzulgarriak segitu ditu, $a \rightarrow b$ prozesua isotermikoa izanik. Zenbateko lan eta bero-kantitateak esku hartu dute prozesu osoan?
 Datuak: $U_a = 456 \text{ J}$, $U_c = 912 \text{ J}$.

Emaitza: $W_{ac} = 334 \text{ J}$,
 $Q_{ac} = 122 \text{ J}$.



8.-



Gas ideal baten mol batek goiko irudian ikus daitekeen ziklo itzulgarria egin du, egoera-aldagaiak ondoko taulako balioak harturik:

Egoera	$p \text{ (} 10^5 \text{ N m}^{-2} \text{)}$	$V \text{ (m}^3 \text{)}$	$T \text{ (K)}$
A	2	3	100
B	4		
C	2		

- a) Osa bedi egoera-aldagaien taula.
 b) Lor bidez Q , W eta ΔU , $A \rightarrow B$ eta $C \rightarrow A$ prozesuen kasuan.

Datuak: $C_V = 5/2 R$, $R = 2 \text{ cal / mol } ^\circ\text{K} = 8,32 \text{ J / mol } ^\circ\text{K}$.

Eraitzak:

$$\text{a) } V_B = 6 \text{ m}^3, \quad T_B = 400 \text{ K},$$

$$V_C = 6 \text{ m}^3, \quad T_C = 200 \text{ K}.$$

$$\text{b) } W_{AB} = 9 \cdot 10^5 \text{ J}, \quad Q_{AB} = 54 \cdot 10^5 \text{ J},$$

$$\Delta U_{AB} = 45 \cdot 10^5 \text{ J}.$$

$$W_{CA} = -6 \cdot 10^5 \text{ J}, \quad A_{CA} = -21 \cdot 10^5 \text{ J},$$

$$\Delta U_{CA} = -15 \cdot 10^5 \text{ J}.$$

19. GAIA

GAS IDEALAK

19.1. Bi litrotako ontzi bat airez beteta pisatu da, hasierako baldintzak $15\text{ }^{\circ}\text{C}$ eta 718 mm Hg izanik. Presioa 6 mm Hg -taraino beheratu arte, temperatura aldatu gabe airea atera ondoren, pisua $2,3\text{ g}$ txikiagokoa dela aurkitu dugu. Datu hauen bidez, lor bedi aireak baldintza normaletan duen dentsitatea.

Demagun, V eta T direlako ontziaren bolumena eta temperatura absolutuak direla.

Hasierako baldintzak : p_1, V, T, m_1 .

Bukaerako baldintzak : p_2, V, T, m_2 .

Egoera bietan gas idealen egoera-ekuazioa aplikatuz,

$$p_1 V = n_1 R T = \frac{m_1}{M} R T ,$$

$$p_2 V = n_2 R T = \frac{m_2}{M} R T ,$$

non M airearen batezbesteko pisu molekularra den. Ekuazio hauen bidez:

$$(p_1 - p_2) V = \frac{m_1 - m_2}{M} R T .$$

Demagun $p_0 = 760\text{ mm Hg}$ eta $T_0 = 273\text{ K}$ baldintza normalak ditugula. Gas idealen egoera-ekuazioaren bidez, baldintza normaletako dentsitatearen adierazpena helduko gara:

$$\rho_0 = \frac{m_0}{V_0} = \frac{m_0}{n_0 \frac{R T_0}{p_0}} = \frac{m_0}{\frac{m_0}{M} \frac{R T_0}{p_0}} = \frac{p_0}{T_0} \cdot \frac{M}{R} .$$

M eta R direlakoan balioak ordezkatzuz, hauxe lortuko dugu:

$$\rho_0 = \frac{p_0}{T_0} \cdot \frac{m_1 - m_2}{p_1 - p_2} \cdot \frac{T}{V} = \frac{p_0}{T_0} \cdot \frac{T}{V} \cdot \frac{\Delta m}{\Delta p} ,$$

Δm eta Δp masaren eta presioaren aldaketak izanik. Datuak hartuz:

$$\rho_0 = \frac{760 \text{ mm Hg}}{273 \text{ K}} \cdot \frac{288 \text{ K}}{2,00 \text{ l}} \cdot \frac{2,3 \text{ g}}{712 \text{ mmHg}} = 1,29 \text{ g / l} .$$

19.2. Gas ideal baten barne-energia ondoko ekuazioaren bidez dator emanda:

$$U = R \left[(a - T) - a \ln (a - T) \right] ,$$

R gas idealen konstantea izanik eta a beste konstante bat. Kalkula bitez C_p , C_V eta indize adiabatikoa, γ .

Bolumena konstantea denez, hots, $dV = 0$ denez, lehenengo printzipioaren arauera:

$$dU = dQ - p dV = dQ .$$

Gainera, mol bat harturik, definizioz:

$$dQ = C_V dT .$$

Hemendik:

$$C_V = \frac{dQ}{dT} = \frac{dU}{dT} .$$

Barne-energiaren adierazpena tenperaturarekiko deribatuz,

$$C_V = \frac{dU}{dT} = R \left(\frac{a}{a - T} - 1 \right) = \frac{R T}{a - T} ,$$

eta Mayer-en ekuazioaren bidez:

$$C_p = C_V + R = \frac{RT}{a - T} + R = \frac{Ra}{a - T} .$$

Bestalde, indize adiabatikoa $\gamma = C_p / C_V$ dela kontutan hartuz:

$$\gamma = \frac{C_p}{C_V} = \frac{a}{T} .$$

19.3. Kilogramo bat airez (gas idealtzat kontsideraturik) prozesu itzulgarri adiabatikoa burutu da, baldintza hauetan:

Hasierakoak: $T_1 = 300 \text{ K}$.

Bukaerakoak: $T_2 = 220 \text{ K}$, $p_2 = 1 \text{ atm}$.

Prozesu adiabatiko honen indizea $\gamma = 1,4$ bada, eta airearen batezbesteko pisu molekularra, $M = 28,8 \text{ g/mol}$, lor bitez:

a) **Hasierako presioa.**

b) **Aireak egindako lana.**

c) **Barne-energiaren aldaketa.** ($R = 8,31 \text{ J/mol K}$).

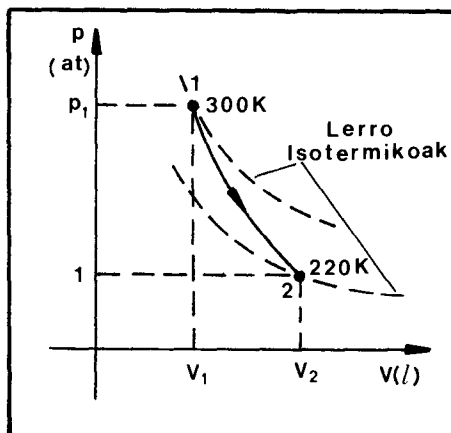
a) Prozesua adiabatikoa izanik, p eta T lotzen dituen erlazioaren bidez, hauxe idatz dezakegu:

$$p T^{\frac{\gamma}{1-\gamma}} = \text{ktea} .$$

Berau erabiliz,

$$p_1 \cdot 300^{-\frac{7}{2}} = 1 \cdot 220^{-\frac{7}{2}}$$

$$p_1 = 2,961 \text{ atm} .$$



b) Prozesua adiabatikoa izanik, beste erlazio hau ere beteko da:

$$p V^\gamma = k' \rightarrow p = \frac{k'}{V^\gamma} .$$

Lanaren balioa kalkulatzeko, bide hau erabil dezakegu:

$$W = \int_{V_1}^{V_2} p \, dV .$$

p -ren balioa ordezkatzuz:

$$\begin{aligned} W &= k' \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V^\gamma} = -\frac{k'}{\gamma - 1} \left[\frac{1}{V_2^{\gamma-1}} - \frac{1}{V_1^{\gamma-1}} \right] = \\ &= \frac{1}{\gamma - 1} \left[\frac{k'}{V_1^\gamma} V_1 - \frac{k'}{V_2^\gamma} V_2 \right] \end{aligned}$$

$$W = \frac{1}{\gamma - 1} [p_1 V_1 - p_2 V_2] .$$

Gas idealen egoera-ekuazioa erabiliz, W delakoa era honetan idatz daiteke:

$$p_1 V_1 = n R T_1 , \quad p_2 V_2 = n R T_2 ,$$

$$W = \frac{n R}{\gamma - 1} (T_1 - T_2) .$$

Honelatan, bada, ondoko emaitza lortuko dugu:

$$W = \frac{\frac{1000}{28,8} \cdot 8,31}{1,4 - 1} (300 - 220) = 57\,708 \, J .$$

Lana positiboa izateak, aireak atmosferaren kontra expantsio bat daukala esan nahi du (gure ohizko hitzarmenari jarraituz).

c) Idatz dezagun Termodinamikaren lehenengo printzipioa:

$$\Delta U = Q - W .$$

Baina prozesua adiabatikoa izanik, $Q = 0$ da eta azkenean, barne-energiaren aldaketarako haxe aurkituko dugu:

$$\Delta U = -W = -57\,708 \text{ J} .$$

Honek, prozesu adiabatiko baten lana barne-energiatik sortzen dela esan nahi du.

19.4. Demagun, aire lehorrezko masa batek hasierako egoeran baldintza hauek bete dituela: $V_1 = 0,2 \text{ l}$, $p_1 = 10 \text{ atm}$, $T_1 = 283 \text{ K}$.

Une horretan expantsio bat pairatu du eta presioa atmosfera batetaraino beheratu da. Expantsio hau bi erataraz egin da: isotermikoki eta adiabatikoki.

Transformazio bakoitzerako, lor bitez:

a) Bukaerako bolumena eta tenperatura.

b) Lana, bero-kantitatea eta barne-energiaren aldaketa.

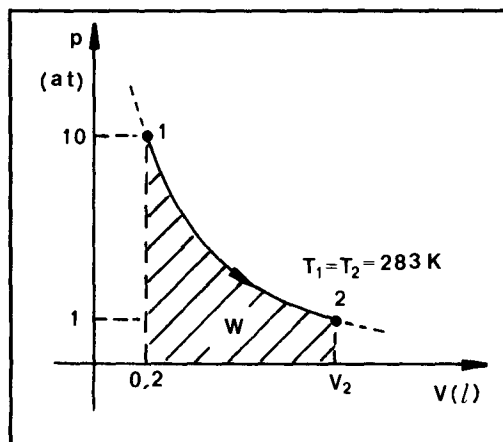
Datua: Indize adiabatikoa: $\gamma = 1,4$.

A. Transformazio isotermikoa:

a) Egoera-ekuaziotik,

$$p_1 V_1 = p_2 V_2 ,$$

$$V_2 = \frac{p_1 V_1}{p_2} = \frac{10 \cdot 0,2}{1} = 2 \text{ l} ,$$



$$T_2 = 283 \text{ K} .$$

b) Lanaren definiziotik:

$$W = \int_{V_1}^{V_2} p dV = k \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V} = k \ln V \Big|_{V_1}^{V_2} = p_1 V_1 \ln \frac{V_2}{V_1} .$$

Emaniko datuak erabiliz:

$$W = 10 \cdot 0,2 \ln \frac{2}{0,2} = 2 \ln 10 = 4,61 \text{ atm l} = 466 \text{ J} .$$

Transformazioa isotermikoa izanik ($T = \text{ktea}$), barne-energia ez da aldatuko ($\Delta U = 0$), temperaturaren funtzioa bait da. Halaber,

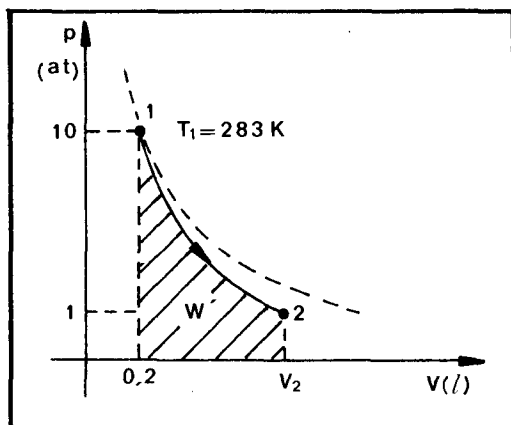
$$\Delta U = 0 = Q - W ,$$

eta hemendik:

$$Q = W = 466 \text{ J} .$$

B. Transformazio adiabatikoa:

a) Dakigunez, kasu honetako prozesua alboko irudian ageri den erakoa da; puntukako kurba aurreko prozesu isotermikoari dagokiolarik, adierazpen hauek bete beharko dira:



$$p_1 V_1^\gamma = p_2 V_2^\gamma ,$$

$$10 \cdot 0,2^{7/5} = 1 \cdot V_2^{7/5} ,$$

$$V_2 = 1,04 \text{ l} .$$

Halaber, ondokoak ditugu:

$$T_1 V_1^{\gamma-1} = T_2 V_2^{\gamma-1} \quad ,$$

$$T_2 = \left[\frac{V_1}{V_2} \right]^{\gamma-1} T_1 = \left[\frac{0,2}{1,04} \right]^{2/5} \cdot 283 = 146,6 \text{ K} \quad .$$

b) Aurreko probleman ikusi dugunez, prozesu adiabatikoetan eginiko lana honelaxe adieraz daiteke:

$$W' = \frac{p_1 V_1 - p_2 V_2}{\gamma - 1} \quad .$$

Gure kasuan:

$$W' = \frac{10 \cdot 0,2 - 1 \cdot 1,04}{1,4 - 1} = 2,41 \text{ atm} \cdot l = 244 \text{ J} \quad .$$

Transformazioa adiabatikoa izanik, $Q = 0$ da, eta hemendik:

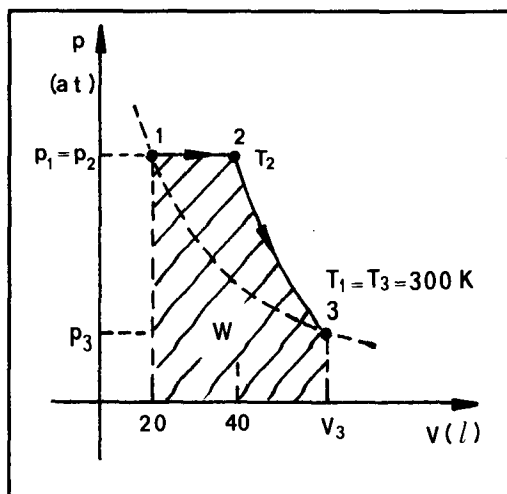
$$\Delta U = Q - W' = -244 \text{ J} \quad .$$

19.5. Demagun 2 mol helio dugula, hasierako baldintzak $T_1 = 300 \text{ K}$ eta $V_1 = 20 \text{ l}$ izanik. Lehenengo, expantsio-prozesu baten bidez, eta presioa konstante mantendurik, bikoiztu egin da beraren bolumena. Segidan, eta adiabatikoki, tenperatura hasierako balioraino berriro heldu arte egin da expantsioa.

- Marraz bedi prozesu osoa.
- Zenbateko bero-kantitatea hartuko du helioak bertan?
- Zein da helioaren barne-energiaren aldaketa osoa?
- Lor bedi bukaerako bolumena.

Datuak: $\gamma = 5/3$, $C_p = 5 \text{ cal/mol K}$, $C_v = 3 \text{ cal/mol K}$.

a)



b) Lehendabizi, kalkula dezagun $1 \rightarrow 2$ prozesuaren bukaerako tenperatura. Egoera-ekuazioaren bidez, eta presioa konstantea izanik,

$$\frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_2} ,$$

$$T_2 = \frac{V_2}{V_1} T_1 = \frac{40}{20} \cdot 300 = 600 \text{ K} .$$

Beroa $1 \rightarrow 2$ prozesuan zurgatu egin da, $2 \rightarrow 3$ prozesua adiabatikoa izan bait da. Orduan, hauxe idatz dezakegu:

$$Q = n C_p (T_2 - T_1) = 2 \cdot 5 (600 - 300) = 3000 \text{ cal} = 12540 \text{ J} .$$

c) Barne-energiaren aldaketa zero izango da, $\Delta U_{1 \rightarrow 3} = 0$, hasierako eta bukaerako tenperaturak berdinak bait dira.

d) Egindako lanaren balioa lortzeko, aplika diezaigun lehenengo printzipioa prozesu osoari:

$$\Delta U_{13} = Q_{13} - W_{13} ,$$

$$W_{13} = Q_{13} = 3000 \text{ cal} = 12540 \text{ J} .$$

e) Azkenez, eta bukaerako bolumena, V_3 , lortzeko, gogora dezagun $2 \rightarrow 3$ prozesua adiabatikoa dela, eta hortaz:

$$T_2 V_2^{\gamma-1} = T_3 V_3^{\gamma-1} \rightarrow V_3 = \left[\frac{T_2}{T_3} \right]^{1/(\gamma-1)} V_2 ,$$

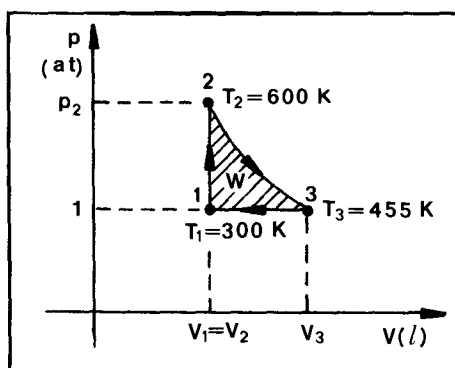
$$V_3 = \left[\frac{600}{300} \right]^{3/2} \cdot 40 = 80 \sqrt{2} = 113 \text{ l} .$$

19.6. Hurrengo irudiak motore termiko batek bete duen zikloa ageri du. Zikloa 0,1 mol gas ideal baten bidez burutu da.

2 → 3 prozesua adiabatikoki egin bada, lor bitez:

a) Presioa eta bolumena 1, 2 eta 3 puntuetan.

b) Zikloan egindako lan osoa.



Datuak: $\gamma = 5/3$, $R = 0,08207 \text{ atm l / K mol}$.

a) Lehenik, egoera-ekuazioaren bidez 1, 2 eta 3 puntuetako egoera-aldagaien balioak kalkulatuko ditugu:

$$1 \text{ puntuan : } p_1 V_1 = n R T_1 ,$$

$$V_1 = \frac{n R T_1}{p_1} = \frac{0,1 \cdot 0,08207 \cdot 300}{1} = 2,46 \text{ l} .$$

$$1 \rightarrow 2 \text{ prozesuan } V = \text{ktea denez, } \frac{p_1}{T_1} = \frac{p_2}{T_2} ,$$

$$p_2 = \frac{T_2}{T_1} p_1 = \frac{600}{300} \cdot 1 = 2 \text{ atm} .$$

$$3 \rightarrow 1 \text{ prozesuan } p = \text{ktea denez, } \frac{V_3}{T_3} = \frac{V_1}{T_1} ,$$

$$V_3 = \frac{T_3}{T_1} V_1 = \frac{455}{300} \cdot 2,46 = 3,73 \text{ l} .$$

Kalkulaturiko datu guzti hauekin, ondoko taula bete dezakegu:

Egoera	$p \text{ (atm)}$	$V \text{ (l)}$	$T \text{ (K)}$
1	1	2,46	300
2	2	2,46	600
3	1	3,73	455

b) Ziklo osoan egin den lana honelaxe adieraz dezakegu:

$$W = W_{12} + W_{23} + W_{31} .$$

Baina $W_{12} = 0$ da, prozesuan zehar bolumena konstantea bait da. Bestalde, $2 \rightarrow 3$ prozesua adiabatikoa izanik, hauxe betetzen da:

$$W_{23} = \frac{p_2 V_2 - p_3 V_3}{\gamma - 1} = \frac{2 \cdot 2,46 - 1 \cdot 3,73}{1,66 - 1} = 1,79 \text{ atm l} = 181,5 \text{ J} .$$

Azkenez, $3 \rightarrow 1$ prozesuan, presioa konstantea izanik, hauxe dugu:

$$W_{31} = p_3 (V_1 - V_3) = - 1,27 \text{ atm l} = - 128,7 \text{ J} .$$

Hemendik:

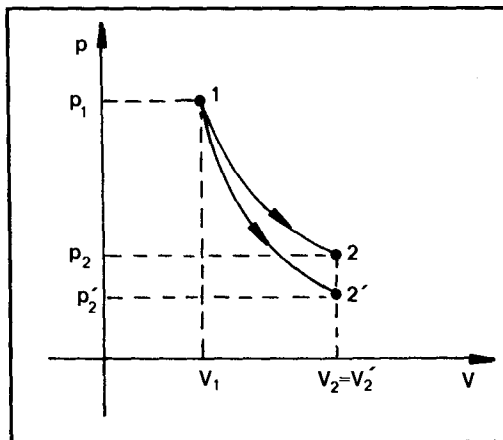
$$W = W_{23} + W_{31} = 52,8 \text{ J} .$$

19.7. Gas ideal batek V_1 bolumeneko ontzi bat bete du, presioa p_1 izanik. Transformazio isoterma baten bidez, gasa V_2 eta p_2 bukaerako baldintzetaraino heldu da; transformazioa adiabatikoa izango balitz, bukaerako presioa p'_2 izango litzateke (bolumena

berbera izanik). Ondoko erlazioa dago:

$$\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^2 = \left(\frac{p'_2}{p_2}\right)^5.$$

Lor bitez C_V eta C_p bero-ahalmen espezifikoak.



Transformazio bakoitzerako erlazio hauek beteko dira:

- Transformazio isotermikoan:

$$p_1 V_1 = p_2 V_2 \rightarrow \frac{V_1}{V_2} = \frac{p_2}{p_1}.$$

- Adibatikoan:

$$p_1 V_1^\gamma = p'_2 V_2^\gamma \rightarrow \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^\gamma = \frac{p'_2}{p_1}.$$

Atalez-atal biderka ditzakegu azken bi erlazioak eta problemaren enuntziatuan agertzen dena, ondokoa lortuko dugularik:

$$\frac{V_1^{2/5} \cdot V_1 \cdot V_1^\gamma}{V_2^{2/5} \cdot V_2 \cdot V_2^\gamma} = \frac{p'_2 \cdot p_2 \cdot p'_2}{p_2 \cdot p_1 \cdot p_1},$$

$$\left[\frac{V_1}{V_2} \right]^{\frac{7+5\gamma}{5}} = \left[\frac{p'_2}{p_1} \right]^2 .$$

Baina, bestalde,

$$\left[\frac{p'_2}{p_1} \right]^2 = \left[\frac{V_1}{V_2} \right]^{2\gamma}$$

dugu. Berau aurreko adierazpenean ordezkatzuz:

$$\left[\frac{V_1}{V_2} \right]^{2\gamma} = \left[\frac{V_1}{V_2} \right]^{\frac{7+5\gamma}{5}} .$$

Hemendik:

$$2\gamma = \frac{7+5\gamma}{5} \rightarrow \gamma = \frac{7}{5} = \frac{C_p}{C_V} \rightarrow 7C_V = 5C_p .$$

Bestetik, Mayer-en ekuazioaren bidez,

$$C_p - C_V = 2 .$$

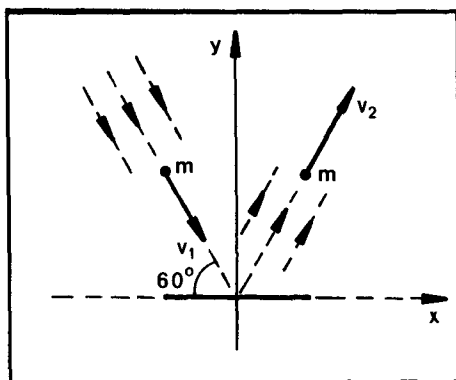
Sistema hau ebatziz, ondoko emaitza aurkituko dugu:

$$C_p = 7 \text{ cal/mol K} , \quad C_V = 5 \text{ cal/mol K} .$$

19.8. Gainazal laun baten gainera oxigenozko fluxu molekular bat heltzen ari da, horizontalarekiko 60°-tako angelua osoturik. Fluxuak 5×10^{22} molekula/cm²s balio badu, eta molekula bakoitzaren abiadura 600 m/s-takoa bada, zein izango da gainazalaren gainean egiten ari den presioa?

Lehenengo eta behin, gasen teoria zinetikoari jarraituz, molekulen

momentu linealaren aldaketa kalkulatuko dugu (segundo batetan heltzen direnei dagokiena, kalkulua errazteko).



Irudian argi ikus daitekeenez, x ardatzaren norabidean ez dago momentu linealaren aldaketarik. Orduan, y ardatzaren norabidean egingo ditugu kalkuluak, soilik.

Molekula baten momentu lineala:

- talka aurrekoa: $\mathbf{p}_1 = m (-6 \cdot 10^4 \sin 60^\circ) \mathbf{j} \text{ g cm s}^{-1}$.

- talka ondokoa: $\mathbf{p}_2 = m (6 \cdot 10^4 \sin 60^\circ) \mathbf{j} \text{ g cm s}^{-1}$.

Molekula baten momentu linealaren aldaketa:

$$\Delta \mathbf{p} = \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1 = 6 \cdot 10^4 \sqrt{3} m \mathbf{j} \text{ g cm s}^{-1}.$$

Segundo batetan eta 1 cm^2 -tako azaleraren gainean:

$$(\Delta \mathbf{p})_T = 5 \cdot 10^{22} \cdot 6 \cdot 10^4 \sqrt{3} m \mathbf{j} = 3 \sqrt{3} \cdot 10^{27} m \mathbf{j} \text{ g cm s}^{-1}.$$

Indarraren definizioaz:

$$\mathbf{F} = \frac{\Delta \mathbf{p}}{\Delta t} = \frac{(\Delta \mathbf{p})_T}{1} = 3 \sqrt{3} \cdot 10^{27} m \mathbf{j} \text{ dyn}.$$

eta presioaren definizioaz:

$$p = \frac{F}{S} = \frac{3 \cdot 10^{27} \cdot \sqrt{3} \text{ m}}{1} = 3\sqrt{3} \cdot 10^{27} \text{ m dyn cm}^{-2}.$$

Bukatzeko, m -ren balioa ordezkatzuz:

$$p = 3\sqrt{3} \cdot 10^{27} \frac{32}{6,02 \cdot 10^{23}} = 27,62 \cdot 10^4 \text{ dyn cm}^{-2}.$$

19.9. Baldintza normaletan, iodo-lurrinaren dentsitate absolutuak $\rho = 1,14 \cdot 10^{-2} \text{ g cm}^{-3}$ balio du. Lor bedi, baldintza normaletan, lurrin-molekula batezbesteko abiadura koadratikoa.

Gasen teoria zinetikotik dakigunez,

$$p = \frac{1}{3} n m V_m^2 = \frac{1}{3} \rho V_m^2,$$

non m delakoa molekula baten masa den eta n delakoa, dentsitate molekularra (bolumen-unitateko molekula-kopurua).

Gure datuak ondokoak dira:

$$p = 1 \text{ atm} = 1,01 \cdot 10^5 \text{ N m}^{-2}, \quad \rho = 11,4 \text{ kg m}^{-3}.$$

Beraz, ondorio hau atera dezakegu:

$$V_m = \sqrt{\frac{3p}{\rho}} = \sqrt{\frac{3 \cdot 1,01 \cdot 10^5}{11,4}} = 163 \text{ m s}^{-1}.$$

ARIKETAK

- 1.- Zein izango litzateke gas baten temperaturaren aldaketa, beraren bolumena ehuneko hamabian txikiagotuko balitz, presioa konstante mantendurik?

Datuak: Hasierako temperatura : $t_1 = 20^\circ\text{C}$.

Emaitza: $T = - 35 \text{ K}$.

- 2.- Konpresio isotermiko baten bidez, temperatura 27°C -takoa izanik, gas ideal baten mol baten presioa hirukoiztu egin da. Prozesu honetan emandako beroaz, beste gas biatomiko ideal baten bost mol berotu dira isobarikoki, hasierako temperatura 27°C -takoa izanik. Lor bedi azkeneko prozesuaren bukaerako temperatura.

Datuak: $C_p = 7 \text{ cal / mol K}$; $R = 2 \text{ cal / mol K}$.

Emaitza: $T = 318,8 \text{ K}$.

- 3.- Biltegi batek $2,73 \text{ m}^3$ aire dauka, $24,6 \text{ kp/cm}^2$ -tako presioaz. Airearen bere presioa 14 kp/cm^2 -takoa izan arte hoztean, zein izango da barne-energiaren beherapena?

Datuak: Indize adiabatikoa, $\gamma = 1,4$; $C_V = 5 \text{ cal / mol K}$.

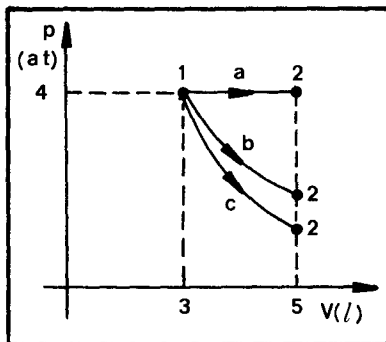
Emaitza: $\Delta U = 1,42 \cdot 10^6 \text{ cal}$.

- 4.- Gas monoatomiko ideal batek irudian ikus daitezkeen expantsio-prozesu itzulgarriak burutu ditu,

- isobarikoki,
- isotermikoki,
- adiabatikoki.

Zenbateko lan eta bero-kantitateak esku hartu dute prozesu bakoitzean?

Datuak: $C_p = 5 \text{ cal / mol K}$,
 $\gamma = 5/3$.



Emaitzak: a) $W = 1200 \text{ J}$ $Q = 750 \text{ cal}$.

b) $W = 790 \text{ J}$ $Q = 189 \text{ cal}$.

c) $W = 920 \text{ J}$ $Q = 0 \text{ cal}$.

- 5.- Gas biatomiko ideal batek expantsio adiabatikoa jasan du, hasierako baldintzak p_1 , V_1 eta T_1 izanik. Bukaerako egoeran $T = 1/4 T_1$

bada, lor bitez bukaerako presioaren eta bolumenaren balioak, hasierako balioen funtzioan.

Datua: Indize adiabatikoa, $\gamma = 1,4$.

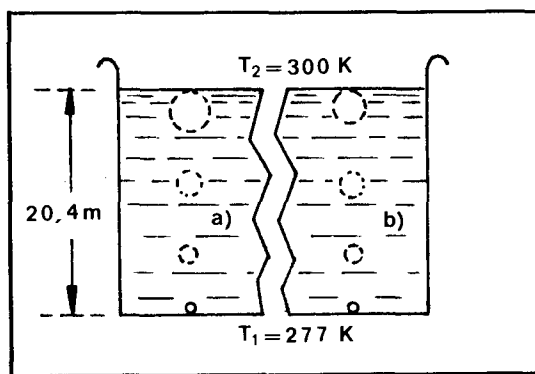
$$\text{Emaitza: } V_2 = 32 V_1 ; \quad p_2 = \frac{p_1}{128} .$$

- 6.- Kalkula bedi argon *mol* baten barne-energiaren aldaketa, beraren bolumena adiabatikoki ehuneko berrogeitamarrean gehitu bada, hasierako tenperatura $T_1 = 293 \text{ K}$ izanik.

Datua: $C_V = 3 \text{ cal/mol K}$.

$$\text{Emaitza: } \Delta U = -208,2 \text{ cal} .$$

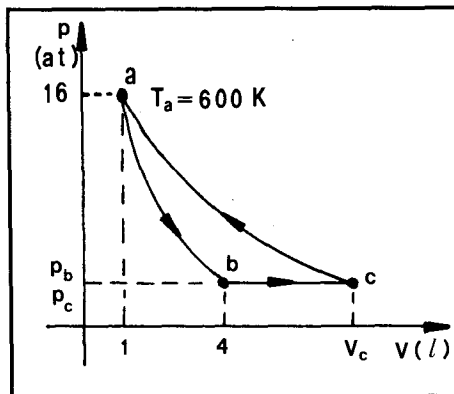
- 7.- Urpean, $20,4 \text{ m}$ -tako sakoneran, 1 cm -tako erradioa duen aire-burbuila bat sortu da, eta handik urazaleraingo da. Sortze-lekuan uraren tenperatura 277 K -etakoa izan bada, eta urazaleko tenperatura 300 K , lor bedi burbuilaren erradioa urazalera heltzean, ondoko bi kasuak aztertutik:



- a) Aldiune guztietan beraren tenperatura ingurunekoa bada.
b) Igoera adiabatikoki egiten bada.
Oharra: Arbuia bedi gainazal-tentsioa.
Datua: Airearen indize adiabatikoa, $\gamma = 1,4$.

$$\text{Emaitza: } a) r = 1,48 \text{ cm} ; \quad b) r = 1,30 \text{ cm} .$$

- 8.- Gas ideal batek irudian ageri den zikloa osatu du, *a* puntuan baldintza hauek beterik: $p_a = 16 \text{ atm}$, $V_a = 1 \text{ l}$, $T_a = 600 \text{ K}$.



$a \rightarrow b$ prozesua adiabatikoki egin da eta $c \rightarrow a$ prozesua isotermikoki. Lor bitez b eta c puntuetako egoera-aldagaien balioak. Gasaren indize adiabatikoa, $\gamma = 1,5$ da.

Eraitza: $p_b = 2 \text{ atm}$, $V_b = 4 \text{ l}$, $T_b = 300 \text{ K}$,

$p_c = 2 \text{ atm}$, $V_c = 8 \text{ l}$, $T_c = 600 \text{ K}$.

- 9.- Lor bedi argon atomoen batezbesteko abiadura koadratikoa, beraren mol bat litroko ontzian edukirik, presioa 10 atm -takoa izanik. Datua: $M_{Ar} = 40 \cdot 10^{-3} \text{ kg/mol}$.

Eraitza: $V_m = 275 \text{ m s}^{-1}$.

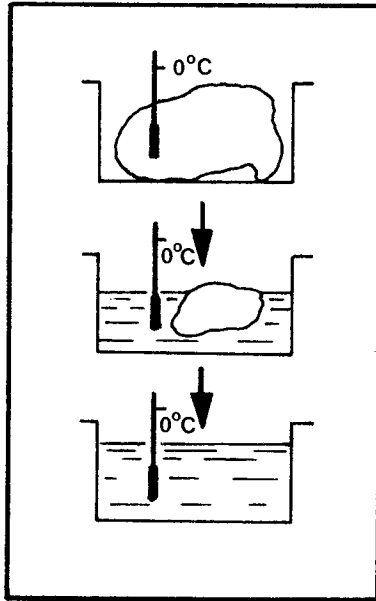
- 10.- Lor bedi litro bat oxigenoaren translaziozko barne-energia zinetikoa, baldintza normaletan.

Eraitza: $E_k = 152 \text{ J}$.

20. GAIA

**TERMODINAMIKAREN
BIGARREN PRINTZPIOA**

- 20.1.** Bi kilogramotako izotz-zati bat urtu egin da. Prozesuan zehar 0°C -tako temperatura konstante mantendu bada, zein izan da beraren entropiaren aldaketa?
 Datua: Izotzaren fusio-bero sorra: $l = 80 \text{ cal/g}$.



Izotzaren urtze-prozesua alboko irudian ageri dena da, alegia, temperaturaren aldaketarik gabekoa. Prozesu hori itzulgarria dela kontsideratuz, entropiaren definizioaz ondokoa idatz dezakegu:

$$\Delta S = \int_a^b \frac{dQ}{T} = S_b - S_a .$$

Tenperatura konstantea izanik:

$$\Delta S = \frac{1}{T} \int_a^b dQ = \frac{Q_{ab}}{T} .$$

Gure kasuan, $T = 273 \text{ K}$ da. Kalorimetriaren legeen arauera haxe atera dezakegu:

$$Q_{ab} = m l = 2000 \cdot 80 = 160000 \text{ cal} .$$

Azkenez:

$$\Delta S = \frac{160000}{273} = 586 \text{ cal/K} .$$

- 20.2.** Kilogramo bat ur 0°C -tatik 100°C -tara berotu da. Kalkula bedi beraren entropiaren aldaketa.
 Datua: Uraren bero-ahalmen espezifikoa: $c = 1 \text{ cal/g K}$

Presioa konstantea izanik, entropiaren aldaketa lortzeko, bero-kantitatearen diferentziala, dQ , tenperaturaren funtzioan adierazi beharko dugu. Hau erraz egingo da kalorimetroaren legearen bidez:

$$dQ = m c dT .$$

Beraz,

$$\Delta S = S_b - S_a = \int_a^b \frac{dQ}{T} = m c \int_a^b \frac{dT}{T} = m c L \frac{T_b}{T_a} .$$

Gure datuak hartuz:

$$S = 1000 \cdot 1 \cdot L \frac{373}{273} = 312 \text{ cal} / K .$$

20.3. Gas erreal bat Carnot-en ziklo bat jasaten ari da. Zein izango da zikloaren etekina?

Sistema batek ziklo bat osotzen duenean, zikloa itzulgarria bada (hauxe da gure kasua), ez du entropiaren aldaketarik edukiko, hasierako eta bukaerako egoerak berdinak bait dira (gogoratu entropia egoeraren funtzioa dela). Hau da,

$$\Delta S = S_2 - S_1 = 0 ,$$

edo,

$$\Delta S = \oint \frac{dQ}{T} = 0 .$$

Demagun T_1 eta T_2 iturri beroaren eta iturri hotzaren tenperaturak direla, hurrenez hurren, eta Q_1 eta Q_2 parte hartzen duten bero- kantitateak, Q_1 iturri berotik hartutakoa eta Q_2 iturri hotzera bidalitakoa.

Teoriaz dakigunez, prozesu adiabatikoetan entropiaren aldaketa nulua da, eta prozesu isotermikoetan, aurreko problema batetan ikusi dugun bezala, (20.1), halaxe idatz dezakegu:

$$\Delta S_{isot} = \int_a^b \left[\frac{dQ}{T} \right]_{isot} = \frac{1}{T} \int_a^b dQ = \frac{Q_{ab}}{T} .$$

Orduan, eta ziklo osoan, haxe izango da entropiaren aldaketa:

$$\Delta S = \frac{Q_1}{T_1} - \frac{Q_2}{T_2} \quad (Q_1 > 0, Q_2 > 0) .$$

Zikloa itzulgarria izanik, ondokoa beteko da:

$$\Delta S = 0 .$$

Hemendik:

$$\frac{Q_1}{T_1} - \frac{Q_2}{T_2} = 0 \rightarrow \frac{Q_1}{Q_2} = \frac{T_1}{T_2} .$$

Azkenez, erraz lortuko da:

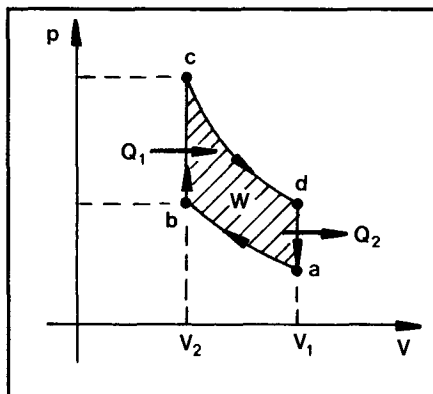
$$\frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = \frac{T_1 - T_2}{T_1} .$$

Baina lehenengo atala etekinaren adierazpena da, eta bigarrena, gas idealen zikloen etekina. Gainera, gure ebazpenean gas idealen propietateak ez ditugu inon sartu. Orduan, hau egia izango da Carnot-en ziklo guztietan, nahiz gas erreala nahiz gas ideala izan zikloa osotzen duena.

Azkenean, honako hau idatz dezakegu:

$$\text{Etekina:} \quad \eta = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = \frac{T_1 - T_2}{T_1} .$$

20.4. Ondoko irudian Otto-ren ziklo bat ageri da $a \rightarrow b$ eta $c \rightarrow d$ prozesuak adiabatikoak izanik, eta $b \rightarrow c$ eta $d \rightarrow a$ isokoroak.



Kompresio-erlazioa $V_1/V_2 = 8$ bada, eta indize adiabatikoa $\gamma = 1,5$, zein izango da zikloaren etekina?

Teoriaz dakigunez, hauxe da etekinaren adierazpena:

$$\eta = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{Q_2}{Q_1} \quad (Q_1 > 0, Q_2 > 0) .$$

zeren $a \rightarrow b$ eta $c \rightarrow d$ prozesuetan, adiabatikoak izanik, bero-aldaketarik ez bait dago.

Bestalde, Termodinamikaren lehenengo printzipioa kontutan hartuz, $b \rightarrow c$ eta $d \rightarrow a$ prozesu isokoroak izanik, hauxek idatz ditzakegu:

$$Q_1 = U_c - U_b = n C_V (T_c - T_b)$$

eta

$$Q_2 = U_d - U_a = n C_V (T_d - T_a) .$$

Balio hauek ordezkatzuz:

$$\eta = 1 - \frac{T_d - T_a}{T_c - T_b} .$$

Halaber, eta $a \rightarrow b$ eta $c \rightarrow d$ prozesuak adiabatikoak direnez,

$$T_a V_a^{\gamma-1} = T_b V_b^{\gamma-1} , \quad V_a = V_d = V_1 ,$$

$$T_d V_d^{\gamma-1} = T_c V_c^{\gamma-1} , \quad V_b = V_c = V_2 .$$

Atalez atal bi ekuazio hauen arteko kenketa eginez,

$$(T_d - T_a) V_1^{\gamma-1} = (T_c - T_b) V_2^{\gamma-1} .$$

Hemendik:

$$\frac{T_d - T_a}{T_c - T_b} = \left[\frac{V_2}{V_1} \right]^{\gamma-1} = \frac{1}{(V_1/V_2)^{\gamma-1}} .$$

Beraz, eta edozein Otto-ren ziklotan, etekinaren adierazpena hauxe izango da:

$$\eta = 1 - \frac{1}{(V_1/V_2)^{\gamma-1}} ,$$

eta gure kasuan:

$$\eta = 1 - \frac{1}{(8)^{1/2}} = \frac{2\sqrt{2} - 1}{2\sqrt{2}} = 0,65 = 65\% .$$

20.5. Carnot-en motore batek 100 cal hartu ditu iturri berotik, beraren temperatura 127 C izanik, eta iturri hotzera 80 cal bidali ditu. Zein izango da iturri hotz honen temperatura?

Teoriaz dakigunez, edozein motoreren etekina hauxe da:

$$\eta = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{Q_2}{Q_1} \quad (Q_1 > 0, Q_2 > 0) ,$$

eta gainera, Carnot-en motore bada, ondokoa ere beteko da:

$$\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1} = 1 - \frac{T_2}{T_1} .$$

T_1 eta T_2 iturri beroaren eta iturri hotzaren tenperaturak izanik, hurrenez hurren. Honek ondokoa esan nahi du:

$$\frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = \frac{T_1 - T_2}{T_1} \rightarrow \frac{Q_2}{Q_1} = \frac{T_2}{T_1} .$$

Hemendik:

$$T_2 = \frac{Q_2}{Q_1} T_1 = \frac{80}{100} \cdot 400 = 320 K = 47^\circ C .$$

20.6. Carnot-en motore batek 40%-tako etekina dauka, iturri hotzaren temperatura $7^\circ C$ -takoa izanik. Zenbat gradutan igon beharko da iturri beroaren temperatura, motorearen etekina 50%-takoa izan dadin?

Teoriaz dakigunez, Carnot-en motore baten etekina honela adieraz dezakegu:

$$\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1} = 1 - \frac{T_2}{T_1} .$$

T_1 eta T_2 iturri beroaren eta iturri hotzaren tenperaturak izanik, hurrenez hurren. Gure bi kasuetako datuak harturik:

$$\eta_1 = 0,4 = 1 - \frac{280}{T_1} ,$$

$$\eta_2 = 0,5 = 1 - \frac{280}{T'_1} .$$

Hemendik:

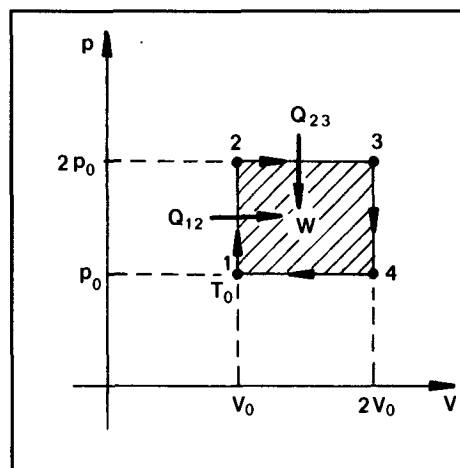
$$T_1 = 466,7 \text{ K} , \quad T_2 = 560 \text{ K} .$$

Azkenez:

$$\Delta T = T'_1 - T_1 = 93,3 \text{ K} .$$

20.7. Gas monoatomiko ideal baten n molek, ondoko irudian ageri den zikloa burutu dute. Zein izango da honelako makina baten etekina?

Datua: $C_v = 3 \text{ cal / mol K} .$



Gas idealen egoera-ekuazioa erabiliz, kalkula ditzagun lehenik 2,3 eta 4 puntuetako tenperaturak. Dakigunez, gas idealek $pV/T = k$ ekuazioa bete behar dute. Beraz,

$$1 \rightarrow 2: \frac{p_1}{T_1} = \frac{p_2}{T_2} \quad (V = \text{kte}) ,$$

$$\frac{p_0}{T_0} = \frac{2p_0}{T_2} \quad T_2 = 2T_0 .$$

$$2 \rightarrow 3: \frac{V_2}{T_2} = \frac{V_3}{T_3} \quad (p = \text{kte}) ,$$

$$\frac{V_0}{2T_0} = \frac{2V_0}{T_3} \quad T_3 = 4T_0 .$$

$$3 \rightarrow 4: \frac{p_3}{T_3} = \frac{p_4}{T_4} \quad (V = \text{kte}) ,$$

$$\frac{2p_0}{4T_0} = \frac{p_0}{T_4} \quad T_4 = 2T_0 .$$

Zikloaren taula osoa beteaz:

	p	V	T
1	p_0	V_0	T_0
2	$2p_0$	V_0	$2T_0$
3	$2p_0$	$2V_0$	$4T_0$
4	p_0	$2V_0$	$2T_0$

Gure kasuan, gasak $1 \rightarrow 2$ eta $2 \rightarrow 3$ prozesuetan hartu du beroa. Alegia,

$$\begin{aligned} Q_{12} &= n C_V (T_2 - T_1) = n \cdot 3 \cdot (2T_0 - T_0) = \\ &= 3nT_0 \quad (V = \text{kte}) . \end{aligned}$$

$$Q_{23} = n C_p (T_3 - T_2) = n \cdot 5 \cdot (4 T_0 - 2 T_0) = \\ = 10 n T_0 \quad (p = \text{cte}, C_p = C_v + 2) .$$

Ziklo osoan sistemak hartutako bero guztia, hauke da:

$$Q_{abs} = Q_{12} + Q_{23} = 13 n T_0 .$$

Zikloan egindako lana hasierako irudiko laukizuzenaren azaleraz emanda dator, hau da,

$$W = (2 p_0 - p_0) \cdot (2 V_0 - V_0) = p_0 V_0 = n R T_0 = 2 n T_0 ,$$

zeren $R = 2 \text{ cal} / \text{mol} \text{ } ^\circ\text{K}$ bait da. Eta zikloaren etekina hauke izango da:

$$\eta = \frac{W}{Q_{abs}} = \frac{2 n T_0}{13 n T_0} = 0,154 = 15,4 \% .$$

20.8. Demagun uraren entropia, 0°C -tako tenperaturaz eta 1 atm-tako presioaz, zero dela.

- a) Zein izango da 500 g uren entropia, beraren tenperatura 80°C -takoa bada?
- b) Sistema batek 500 g ur, 80°C -tako tenperaturaz, eta beste 500 g ur, 0°C -tako tenperaturaz dauzka. Zein izango da sistema honen entropiaren aldaketa, bi masa hauek nahastean?

a) 80°C -tako tenperaturaz urak duen entropia honelaxe kalkulatu dugu: Ura 0°C -tako tenperaturaz hartuko dugu (beraren entropia nulua izanik, $S_0 = 0$, hitzarmenez), eta berotu egingo dugu ur hori 80°C -taraino. Ur honen entropiaren aldaketa, $S - S_0$, beraren entropia izango da, $S_0 = 0$ bait da.

Entropiaren definizioaz:

$$\Delta S = S - S_0 = \int_{T_0}^T \left[\frac{dQ}{T} \right] .$$

Baina $dQ = m c dT$ da, bertan uraren bero-ahalmen espezifikoa $c = 1 \text{ cal/g } ^\circ\text{C}$ izanik. Hemendik:

$$\begin{aligned}\Delta S &= S - S_0 = S = m c \int_{T_0}^T \frac{dT}{T} = m c \ln \frac{T}{T_0} = \\ &= 500 \cdot 1 \cdot \ln \frac{353}{273} = 128,5 \text{ cal/K} .\end{aligned}$$

b) Erraz ikus daitekeenez, sistemaren entropia nahastu baino lehenago ur beroak zuena izango da (ur hotzarena, 0°C -takoa, zero izango bait da), hau da,

$$S = 128,5 \text{ cal/K} .$$

Nahastu eta gero, kalorimetriaz, bukaerako tenperatura 40°C -takoa izango da. Eta sistema honen entropia, 1000 g ur daukagula kontutan hartuz, lehen ikusi dugunez, hauxe izango da:

$$S' = 1000 \cdot 1 \cdot \ln \frac{313}{273} = 136,7 \text{ cal/K} .$$

Eta sistemaren entropiaren aldaketa:

$$\Delta S = S' - S = 136,7 - 128,5 = 8,2 \text{ cal/K} .$$

20.9. Ontzi batetan, 100 g izotz 0°C -tako tenperaturaz, 200 g ur 100°C -tako tenperaturaz, eta 10 g ur-lurrin, 1 atm -tako presioaz eta 100°C -tako tenperaturaz nahastean,

a) Zein izango da bukaerako oreka termikoaren tenperatura?

b) Lor bedi nahastura honen entropiaren aldaketa.

Datuak: Lurrintze-bero sorra : $l_k = 540 \text{ cal/g}$, fusio-bero sorra : $l_f = 80 \text{ cal/g}$.

a) Aplika ditzagun kalorimetriako legeak nahastura honen kasuan. Demagun, oreka termikoaren tenperatura t dela.

Gainera, suposa dezagun : $0^\circ < t < 100^\circ \text{C}$ dela. Honek, izotz guztia urtu egin dela esan nahi du. Beraz,

$$m_i l_f + m_i (t - 0) = m_u (100 - t) + m_l l_k + m_l (100 - t) ,$$

non m_i = izotz-masa, l_f = fusio-bero sorra,
 m_u = ur-masa, l_k = kondentsatze- (edo lurrintze-) bero sorra,
 m_l = lurrin-masa, t = oreka termikoaren tenperatura.

Datuak ordezkatzuz:

$$100 \cdot 80 + 100 t = 200 (100 - t) + 10 \cdot 540 + 10 (100 - t) .$$

Hemendik:

$$310 t = 18400 \rightarrow t = \frac{18400}{310} = 60^\circ \text{C} .$$

Gure emaitza negatiboa izango balitz, esangura fisikorik gabe izango litzateke.

Entropia neurtzeko jatorria izotzarenean jarritz gero, $S_i = 0$, hasierako uraren eta lurrinaren entropiak honelaxe adieraz ditzakegu, lehen ikusi dugunez:

$$S_u = \frac{200 \cdot 80}{273} + 200 \cdot 1 \cdot \ln \frac{373}{273} = 121 \text{ cal} / K ,$$

$$S_l = \frac{10 \cdot 80}{273} + 10 \cdot 1 \cdot \ln \frac{373}{273} + \frac{10 \cdot 540}{373} = 20,5 \text{ cal} / K .$$

Hasierako sistemaren entropia haxe izango da:

$$S_h = 121 + 20,5 = 141,5 \text{ cal} / K .$$

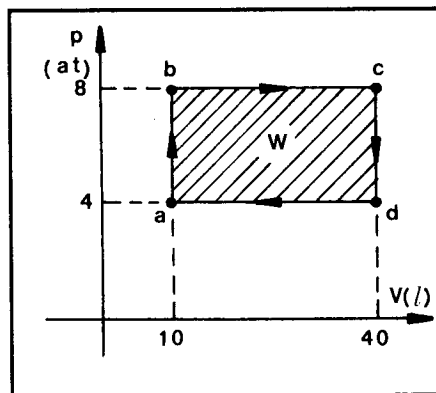
Bukaeran, 310 g ur 60°C -tako tenperaturan edukiko ditugu. Bukaerako entropia, bada, haxe izango da, gure hitzarmenari jarraituz:

$$S_b = \frac{310 \cdot 80}{273} + 310 \cdot 1 \cdot \ln \frac{333}{273} = 153 \text{ cal / K} ,$$

eta sistemaren entropiaren aldaketa, hauex:

$$\Delta S = S_b - S_h = 153 - 144,5 = 11,5 \text{ cal / K} .$$

20.10. Gas baten bi molek 10 l-tako bolumena bete dute, 4 atm-tako presioaz (ikus irudiko a puntua).



Gasak irudian ikus daitekeen zikloa osotuz gero, zein izango da gasaren entropiaren aldaketa a eta c puntuen artean, b bidetik joanda eta d bidetik joanda? Gasak segundo bakoitzean 10 ziklo osotuz gero, zein izango da honelako motore baten potentzia:

Oharra: Kontsidera dezagun prozesu guztiak itzulgarriak direla.

Datua: Gasaren bero-ahalmen espezifikoak : $C_V = 3 \text{ cal / mol K}$.

Teoriaz dakigunez, entropia egoera-funtzioa da, eta horregatik, beraren aldaketa hasierako eta bukaerako puntuetako funtzioa izango da, nahiz b bidez nahiz d bidez joan. Hau da,

$$\Delta S_{ac} = \Delta S_{abc} = \Delta S_{adc} = S_c - S_a .$$

Kalkula dezagun entropiaren aldaketa b bidetik. Lehenik, a, b eta c

puntuetako tenperaturak beharko ditugu. Egoera-ekuaziotik,

$$p_a V_a = n R T_a \rightarrow T_a = \frac{4 \cdot 10}{2 \cdot 0,08206} \approx 244 \text{ K} .$$

$a \rightarrow b$ prozesua: $V = \text{ktea}$,

$$\frac{p_a}{T_a} = \frac{p_b}{T_b} \rightarrow T_b = \frac{p_b}{p_a} \cdot T_a = \frac{8}{4} \cdot 244 = 488 \text{ K} .$$

$b \rightarrow c$ prozesua: $p = \text{ktea}$.

$$\frac{V_b}{T_b} = \frac{V_c}{T_c} \rightarrow T_c = \frac{V_c}{V_b} \cdot T_b = \frac{40}{10} \cdot 488 = 1952 \text{ K} .$$

$a \rightarrow b$ prozesua isokorua izanik, hauxe idatz dezakegu:

$$dQ = n C_V dT = 6 dT ,$$

eta hemendik:

$$\Delta S_{ab} = S_b - S_a = \int_a^b \frac{dQ}{T} = 6 \int_{244}^{488} \frac{dT}{T} = 6 \ln \frac{T_b}{T_a} ,$$

$$\Delta S_{ab} = 4,15 \text{ cal / K} .$$

$b \rightarrow c$ prozesua isobaroa izanik, hauxe idatziko dugu:

$$dQ = n C_p dT = 10 dT ,$$

$$\text{zeren } C_p = C_V + R = 3 + 2 = 5 \text{ cal / K} \text{ bait da,}$$

eta hemendik:

$$\Delta S_{bc} = S_c - S_b = \int_b^c \frac{dQ}{T} = 10 \int_{488}^{1952} \frac{dT}{T}$$

$$\Delta S_{bc} = 10 \ln \frac{T_c}{T_b} = 13,85 \text{ cal} / K .$$

Azkenez:

$$\Delta S_{ac} = S_c - S_a = \Delta S_{ab} + \Delta S_{bc} = 18 \text{ cal} / K ,$$

$$\Delta S_{ac} (b \text{ bidetik}) = \Delta S_{ac} (d \text{ bidetik}) = 18 \text{ cal} / K .$$

Ziklo bakoitza segundo-hamarren batetan osotuko da. Zikloan egindako lana W bada, honelako motore baten potentzia hauxe izango da:

$$P = \frac{W}{T} = \frac{W}{1/10} = 10 W \text{ watt} .$$

Baina W lana, $a b c d$ laukizuzenaren azaleraz emanda dator, hots,

$$W = (p_b - p_a) \cdot (V_d - V_c) = 4 \cdot 30 \text{ atm} \cdot l = 12156 \text{ J} .$$

eta motorearen potentzia:

$$P = 10 \cdot 12156 = 1,22 \cdot 10^5 \text{ watt} = 122 \text{ kw} .$$

20.11. Lor bedi gas ideal baten entropiaren adierazpena, p eta V aldagaien funtzioan.

Teoriaz dakigunez:

$$dS = \frac{dQ}{T} .$$

Termodinamikaren lehenengo printzipioa hartuz:

$$dS = \frac{1}{T} (n C_V dT + p dV) .$$

Baina:

$$p V = n R T \rightarrow p = \frac{n R T}{V} .$$

Balio hauek ordezkatzuz:

$$dS = n C_V \frac{dT}{T} + n R \frac{dV}{V} ,$$

eta hau integratuz, ondokoa idatz dezakegu:

$$S = n C_V \ln T + n R \ln V + S_0 .$$

Bestalde, eta $T = p V / n R$ dela kontutan hartuz:

$$S = n C_V \ln p + \ln V - \ln(n R) + n R \ln V + S_0 .$$

Hemendik:

$$S = n C_V \ln p + n (C_V + R) \ln V + [S_0 - n C_V \ln(n R)] .$$

Azkenez:

$$S = n C_V \ln p + n C_p \ln V + S' .$$

20.12. Froga bedi, T_1 temperaturan dagoen eta m masa duen likidoa, T_2 temperatura duen eta n bider handiago den beste masa batekin nahastean, sistemaren entropiaren aldaketa

$$S = (n+1) m C_p \ln \frac{T_1 + n T_2}{(n+1) \sqrt[n+1]{T_1 T_2^n}}$$

baino handiago izango dela, sistema isolaturik badago.

Teoriaz dakigunez, eta prozesua itzulezina izanik,

$$\Delta S > \int_a^b \left[\frac{dQ}{T} \right] .$$

Edozein likidotarako, hauxe idatz dezakegu:

$$dQ = m C_p dT .$$

Hemendik:

$$\int_a^b \left[\frac{dQ}{T} \right] = m C_p \int_a^b \left[\frac{dT}{T} \right] .$$

Gure kasuan, hauexek dira gertatuko diren prozesuak:

- Likido hotzena (T_1), berotu egingo da T_0 temperaturaraino (T_0 oreka termikoaren temperatura izanik).
- Likido beroena (T_2), hoztu egingo da T_0 temperaturaraino.

Horregatik, integral osoa honelaxe geratuko da:

$$\begin{aligned} \int \frac{dQ}{T} &= \int_B \frac{dQ}{T} + \int_H \frac{dQ}{T} \\ &= m C_p \ln \frac{T_0}{T_1} + n m C_p \ln \frac{T_0}{T_2} , \end{aligned}$$

adierazpen honetan B beroketa-prozesua eta H hozketa-prozesua izanik.

Oreka termikoaren tenperatura lortzeko, aplikatu dezagun kalorimetriaren legea:

$$m C_p (T_0 - T_1) = n m C_p (T_2 - T_0) ,$$

$$T_0 = \frac{T_1 + n T_2}{n + 1} .$$

Hau ordezkatur:

$$\Delta S > m C_p \left(\ln \frac{T_0}{T_1} + n \ln \frac{T_0}{T_2} \right) = m C_p \ln \frac{T_0^{n+1}}{T_1 T_2^n} .$$

$$\begin{aligned} \Delta S &> (n + 1) m C_p \ln \frac{T_0}{\sqrt[n+1]{T_1 T_2^n}} = \\ &= (n + 1) m C_p \ln \frac{T_1 + n T_2}{(n + 1) \sqrt[n+1]{T_1 T_2^n}} . \end{aligned}$$

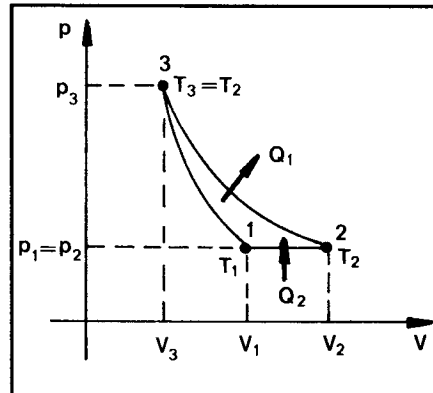
20.13. Gas ideal batek hurrengo orrialdeko irudian ikus daitekeen ziklo itzulgarria bete du, ondoko prozesu hauen bidez:

- 1 → 2 : beroketa isobarikoa.
- 2 → 3 : konpresio isotermikoa.
- 3 → 1 : expantsio adiabatikoa.

Honelako zikloa hozkailu batena da, eta beraren etekina honelaxe dator emanda:

$$\eta = \frac{Q_2}{W} = \frac{Q_2}{Q_1 - Q_2} ,$$

non Q_1 , $2 \rightarrow 3$ prozesuan iturri berora bidalitako bero-kantitatea den, Q_2 , $1 \rightarrow 2$ prozesuan iturri hotzetik hartutako bero-kantitatea eta W , zikloan egindako lana. Orokorrean, etekin honi "efizientzia" deritzo: ε .



Lor bedi gure zikloaren "efizientzia", $r = T_2/T$ delakoaren funtzioan.

Kalkula ditzagun, lehenik, Q_1 eta Q_2 bero-kantitateak. $2 \rightarrow 3$ prozesua isotermikoa izanik,

$$dU = 0 \rightarrow dQ = -p dV .$$

Hemendik:

$$Q_1 = - \int_{V_2}^{V_3} p dV = -n R T_2 \int_{V_2}^{V_3} \frac{dV}{V} ,$$

$$Q_1 = n R T_2 \ln \frac{V_2}{V_3} = n R T_2 \ln \frac{p_3}{p_2} .$$

Integralaren aurrean minus zeinua ipini dugu, Q_1 balioa positiboa izan dadin. $1 \rightarrow 2$ prozesua isobaroa izanik,

$$Q_2 = n C_p (T_2 - T_1) .$$

Baina $3 \rightarrow 1$ prozesua adiabatikoa izanik, $dQ = 0$ da prozesu osoan zehar, hau da,

$$\Delta S_{31} = S_1 - S_3 = 0 \rightarrow S_1 = S_3 .$$

Hemendik:

$$S_2 - S_3 = S_2 - S_1 .$$

Beste problema batzutan ikusi dugunez,

$$S_2 - S_3 = n R \ln \frac{p_3}{p_2} \quad (T = kte) ,$$

zeren

$$\Delta S_{32} = n C_V \ln \frac{T_2}{T_3} + n R \ln \frac{V_2}{V_3} + n R \ln \frac{p_3}{p_2}$$

bait da, eta bestetik

$$S_2 - S_1 = n C_p \ln \frac{T_2}{T_1} \quad (p = kte) .$$

Balio hauek konparatuz,

$$n R \ln \frac{p_3}{p_2} = n C_p \ln \frac{T_2}{T_1} .$$

Azkenez emaitza hau lortuko dugu:

$$\varepsilon = \frac{Q_2}{Q_1 - Q_2} = \frac{n C_p (T_2 - T_1)}{n R T_2 \ln \frac{p_3}{p_2} - n C_p (T_2 - T_1)} ,$$

$$\varepsilon = \frac{n C_p (T_2 - T_1)}{n C_p T_2 \ln \frac{T_2}{T_1} - n C_p (T_2 - T_1)},$$

$$\varepsilon = \frac{T_2 + T_1}{T_2 \ln \frac{T_2}{T_1} - T_2 + T_1} = \frac{\frac{T_2}{T_1} - 1}{\frac{T_2}{T_1} \ln \frac{T_2}{T_1} - \frac{T_2}{T_1} + 1}.$$

Hots:

$$\varepsilon = \frac{r - 1}{r \ln r - r + 1}.$$

ARIKETAK

- 1.- 60 °C-tako tenperaturan dauden 200 g ur, 20 °C-tako tenperaturan dauden beste 400 g urekin nahastu dira.

- a) Zein izango da oreka termikoaren tenperatura?
- b) Lor bedi sistemaren entropiaren aldaketa.

Eraitzak: a) $t_0 = 33,3\text{ }^{\circ}\text{C}$.

b) $\Delta S = 0,9\text{ cal / K}$.

- 2.- 100 g izotz, 0 °C-tako tenperaturan, eta 200 g ur, 10 °C-tako tenperaturan, nahastu egin dira.

- a) Zein izango da oreka termikoaren tenperatura?
- b) Lor bedi sistemaren entropiaren aldaketa.

Datua: Izotzaren fusio-bero sorra : $l = 80\text{ cal / g}$.

Eraitzak: a) $t_0 = 0\text{ }^{\circ}\text{C}$.

b) $\Delta S = 0,128\text{ cal / K}$.

- 3.- Demagun gas ideal baten bero-ahalmen molarra $C_p = a + b T$ dela ($p = kte$). Lor bedi gasaren entropiaren aldaketa:

- a) T eta p aldagaien funtzioan.
- b) T eta V aldagaien funtzioan.

Eraitzak:

$$\text{a) } \Delta S = n a \ln \frac{T_2}{T_1} + n b (T_2 - T_1) - n R \ln \frac{p_2}{p_1} .$$

$$\text{b) } \Delta S = n (a - R) \ln \frac{T_2}{T_1} + n b (T_2 - T_1) + n R \ln \frac{V_2}{V_1} .$$

- 4.- Gas karbonikoaren entropiak, 25 °C-tako tenperaturan, $51,1\text{ cal / K}$ balio du. Bero-ahalmen molarra ($p = kte$) $C_p = a + bT + cT^2$ cal / mol K bada, a , b eta c konstanteak izanik, zein izango da gasaren entropia 250 °C-tako tenperaturan?

Datuak: $a = 6,21$, $b = 10,4 \cdot 10^{-3}$, $c = 3,545 \cdot 10^{-6}$.

Eraitza: $S_{523} = 55,5\text{ cal / K}$.

- 5.- 10 g ur, 42,5 °C-tako tenperaturan, nahastu egin dira -10 °C-tako tenperaturan dauden 5 g izotzekin.

a) Aurki bedi oreka termikoaren tenperatura.

b) Zein izango da sistemaren entropiaren aldaketa?

Datua: Izotzaren bero-ahalmen espezifikoa : $C_i = 0,5 \text{ cal} / \text{g} \text{ } ^\circ\text{C}$.

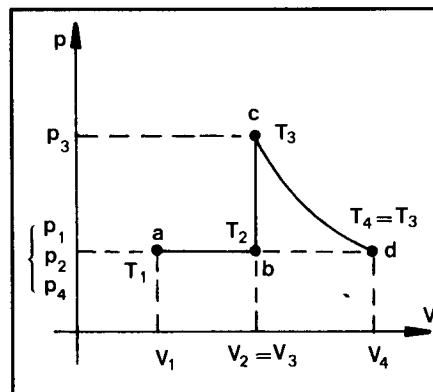
Emaitza: a) $t_0 = 0 \text{ } ^\circ\text{C}$.

b) $\Delta S = 0,117 \text{ cal} / \text{K}$.

- 6.- Litro bat uraren entropia, presioa normala izanik, 1390 cal / K-tan gehitzen da, 100 °C-tako tenperaturan lurin bihurtzean. Uraren dentsitatea, 100 °C-tako tenperaturan, $\rho = 0,9584 \text{ g cm}^{-3}$ bada, zein izango da uraren lurrintze-bero sorra?

Emaitza: $l = 539 \text{ cal} / \text{g}$.

- 7.- Gas ideal baten mol batek irudian ageri diren prozesuak pairatu ditu, $a \rightarrow b$ prozesua isobaroa, $b \rightarrow c$ isokoroa eta $c \rightarrow d$ isoterma izanik.



Lor bedi entropiaren aldaketa:

a) p eta V -ren hasierako eta bukaerako balioen funtzioan.

b) p eta T -ren hasierako eta bukaerako balioen funtzioan.

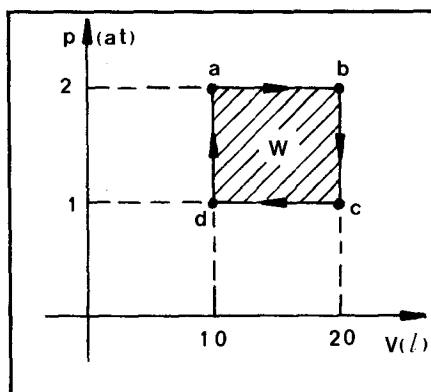
c) V eta T -ren hasierako eta bukaerako balioen funtzioan.

Emaitzak: a) $\Delta S = C_p \ln \frac{V_4}{V_1}$.

$$b) \Delta S = C_p \ln \frac{T_4}{T_1} .$$

$$c) \Delta S = C_v \ln \frac{T_4}{T_1} + R \ln \frac{V_4}{V_1} .$$

- 8.- Gas biatomiko ideal baten mol batek irudian ageri den zikloa osotatu.



Lor bitez zikloaren lana eta etekina.

Datua: $C_v = 5 \text{ cal/mol K}$.

Eraitza: $W = 1012 \text{ J}$.

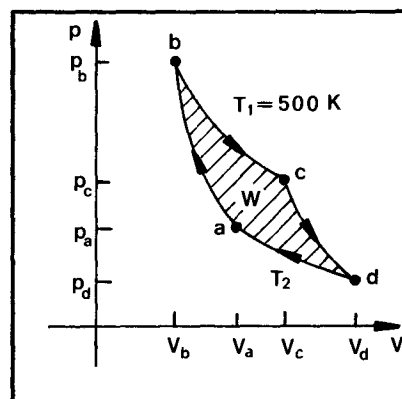
$$\eta = 0,105 = 10,5\% .$$

- 9.- Gas biatomiko ideal baten mol batek Carnot-en ziklo itzulgarri bat osotatu du (ikus alboko irudia), iturri beroaren tenperatura 500 K -etakoa izanik.

Expansio adiabatikoan eginiko lana 4157 J -takoa bada, lor bedi zikloaren etekina.

Zein izango da iturri hotzaren tenperatura?

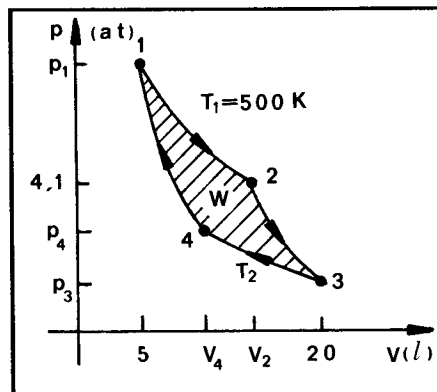
Datua: $C_v = 5 \text{ cal/mol K}$.



Eraitza: $\eta \approx 0,4 = 40\%$.

$T_2 \approx 300^\circ\text{K}$.

- 10.- Gas biatomiko ideal baten mol batek irudian ageri den Carnot-en zikloa osatu du. Zein izango da zikloaren etekina? Zikloa osotzean 30 s eman baditu, zein izango da beraren potentzia?



Datuak: $C_V = 5 \text{ cal/mol}^\circ\text{K}$ eta hurrengo taulakoak.

	1	2	3
$p \text{ (atm)}$	p_1	4,1	p_3
$V \text{ (l)}$	5	V_2	20
$T \text{ (}^\circ\text{K)}$	500	500	T_3

Eraitza: $\eta = 0,244 = 24,4\%$.

$p = 22,8 \text{ watt} = 0,031 \text{ ZP}$.

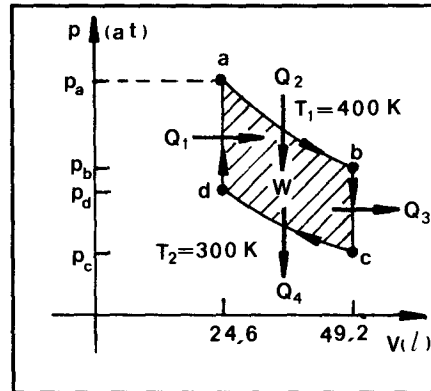
- 11.- Gas ideal baten mol batek irudian ageri den zikloa osatu du, prozesu hauen bidez:

$a \rightarrow b$: isoterma, bolumena bikoiztu arte ($T_a = T_b = T_1 = 400 \text{ K}$).

$b \rightarrow c$: isokorua, $T_c = 400 \text{ K}$ -tarainokoa.

$c \rightarrow d$: isoterma, hasierako bolumenerainokoa.

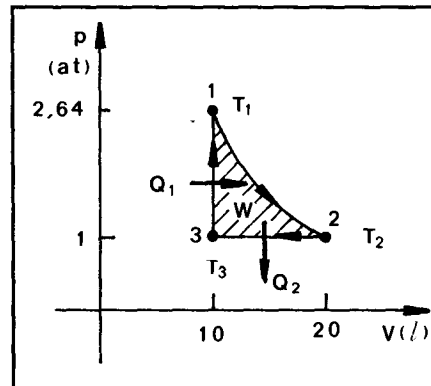
$d \rightarrow a$: isokorua, hasierako baldintzak berriz lortu arte.



Lor bedi zikloaren etekina, hasierako bolumena $V_a = 24,6\text{ l}$ bada.
 Datua: Gasaren bero-ahalmen espezifikoa: $C_V = 5 \text{ cal/mol K}$.

Emaitza: $\eta = 0,13 = 13 \%$.

12.- Gas ideal baten mol batek hiru pausotako zikloa osatu du:



- Lehenengo expantsio adiabatiko baten bidez, $2,64 \text{ atm}$ -tako presiotik eta 10 l -tako bolumenetik, 1 atm -tako presiora eta 20 l -tako bolumenera pasatu da.
- Gero, baldintza hauetatik eta presioa konstante mantendurik, konpresio bat pairatu du, 10 l -tako bolumeneraino.
- Azkenez, bolumena konstantea izanik, berotu egin da gasa hasierako baldintzak lortu arte. Zein izango da zikloaren etekina?

Datuak:

$$C_V = \frac{5}{2}R \quad C_P = \frac{7}{2}R .$$

$$\text{Emitza: } \eta = 0,1468 = 14,68\% .$$

13.- Gas ideal baten *mol* batek expantsio adiabatiko librea pairatu du hutsaren aurka (Joule-ren experimentua), hasierako baldintzak $V_1 = 12,3 \text{ l}$ eta $T_1 = 300 \text{ K}$ izanik, eta bukaerakoak $V_2 = 24,6$ eta $T_2 = 300 \text{ K}$. Gero, prozesu isotermiko itzulgarri baten bidez, hasierako baldintzetara iritsi da berriz.

Lor bitez:

- a) Unibertsoaren entropiaren aldaketa ziklo osoan.
- b) Zenbateko lana egin da ziklo osoan?

$$\text{Emitzak: a) } \Delta S_u = 1,38 \text{ cal/K} .$$

$$\text{b) } W = 413 \text{ cal} .$$