ESTATISTIKA-ARIKETAK

Estatistika Deskribatzailea, Probabilitate-Teoria eta Estatistika Inferentziala

Karmele Fdz. Agirre
Miren Barrenetxea
M. Isabel Orueta

udako euskal unibertsitatea

ESTATISTIKA-
-ARIKETAK

Estatistika Deskribatzailea, Probabilitate-
-Teoria eta Estatistika Inferentziala

Karmele Fdz. Agirre
Miren Barrenetxea
M. Isabel Orueta

HEZKUNTZA, UNIBERTSITATE ETA IKERKETA SAILAK ONETSIA
(1.991-VI)

© U.E.U.ko Estatistika Saila
General Concha 25, 6. 48010 BILBO

I.S.B.N.: 84-86967-35-X
Lege-gordailua: BI-1955-91

Inprimategia: BOAN, S.A.
Padre Larramendi 2 - bajo 48012 BILBO
Azalaren diseinua: Julio Pardo

AURKIBIDEA

HITZAURREA 3

ESTATISTIKA DESKRIBATZAILEA

1. EZAUGARRI ESTATISTIKO BAKUNAK 11

ADIERAZBURUAK 11
Maiztasun-Banaketak
Taulak
Adierazpide Grafikoak
Momentuak
Balio tipiko edo estatistikoak
Aldagai-Aldaketa
Tipifikazioa edo Standardizazioa
Kontzentrazio-Neurketak

EBAZPIDEAK 23

BESTE ADIERAZBURU BATZUK 42

2. ZENBAKI INDIZEAK 49

ADIERAZBURUAK 49
Indize sinpleak
Indize konplexuak
Laspeyres-en indizea
Paasche-ren indizea
Kontsumo-prezioen indizea

EBAZPIDEAK 54

BESTE ADIERAZBURU BATZUK 60

PROPIETATE TEORIKOEI BURUZKO GALDERAK 65

3. EZAUGARRI ESTATISTIKO BIKOITZAK 69

ADIERAZBURUAK 69
Maiztasun-banaketak
Taulak
Dispertsio-diagrama edo puntu-hodeia
Momentuak
Korrelazioa eta erregresioa
Aldagaien aldaketak
Tipifikazioa edo standardizazioa
Batezbestekoaren erregresioa
Erregresio lineala
Erregresio polinomikoa
Erregresioa ortogonala

EBAZPIDEAK 82

BESTE ADIERAZBURU BATZUK 101

PROPIETATE TEORIKOEI BURUZKO GALDERAK 120

4. EZAUGARRI ESTATISTIKO ANIZKOITZAK 125

ADIERAZBURUAK 125
Banaketak
Taulak
Erregresio-planoa eta hiperplanoa
Erregresio-planoa eta hiperplanoa tipifikatuak edo standardizatuak
Korrelazio partziala

EBAZPIDEAK 135

BESTE ADIERAZBURU BATZUK 146

PROPIETATE TEORIKOEI BURUZKO GALDERAK 162

5. S.P.S.S.X NAHIZ MINITAB ERABILIZ ORDENADORE BIDEZ EBATZI DAITEZKEEN ZENBAIT ADIBIDE 167

ADIERAZBURUAK 167
Estatistika bakuna eta anizkoitzaren zenbait adibide

PROBABILITATE-TEORIA ETA ESTATISTIKA INFERENTZIALA

1. PROBABILITATEA 17
Probabilitateen egokiera
Independentzia estokastikoa
Probabilitate baldintzatua
Ebaketa teorema
Zatiketa teorema
Bayes-en teorema

2. PROBABILITATE-BANAKETAK 185
Probabilitate-banaketak
Probabilitate bazter banaketa
Banaketa funtzioa
Banaketa diskretu eta jarraia

3. TRANSFORMAZIOAK 189
Metodo orokorra
Kasu bereziak
Beste banaketen batura, biderkadura eta zatiduraren bidez lortutako banaketak

4. MOMENTUAK ETA TCHEBYCHEV-EN BORNAPENAK .. 191
Lehen ordenako momentuak. Batezbesteko balioak
Bigarren ordenako momentuak. Bariantzak eta kobariantzak
Tchebychev-en bornapenak

5. FUNTZIO KARAKTERISTIKOA 195
Funtzio karakteristikoa: definizioa
Funtzio karakteristikoaren Mac-Laurin-en garapena
Bakartasun eta inbertsio teorema
Momentu faktorialen funtzio sortzailea

6. BANAKETA NORMALA 197
Banaketa normala murriztua, N (0,1)
Banaketa normal orokorra, N (m, σ^2)

7. BANAKETAZKO KONBERGENTZIA 201
Banaketen segida: legezko konbergentzia
Funtzio karakteristikoen jarraitasunezko teorema
Banaketa asintotikoki normalak
Limitearen teorema zentrala

8. INFERENTZIA ESTATISTIKOAREN HASTAPENAK 203
Puntuzko estimazioa:
. egiantz-handiko estimatzailea
. momentuen bidezko estimatzailea
Hipotesi testak egiteko proba estatistikoak:
. esangura maila
. potentzia
. kurba karakteristikoak
χ^2-aren egokitze testak:
. guztiz zehaztutako banaketa bati egindakoa
. erdi zehaztutako banaketa bati egindakoa

9. ESTIMATZAILEEN PROPIETATEAK 207
Alboragabetasuna
Efizientzia
Tinkotasuna
Cramer-Rao-ren kota

10. TARTEZKO ESTIMAZIOA ETA HIPOTESIEN TESTAK .. 209
Batezbestekoaren tartezko estimazioa
Bariantzaren tartezko estimazioa
Aldebitako eta aldebateko kontrasteak
Batezbestekoaren kontrastea
Batezbestekoaren desberdintasunaren kontrastea
Bariantzaren kontrastea
Bariantzaren arrazoiaren kontrastea

11. POISSON-EN BANAKETA 215
Poisson-en banaketa: $\mathcal{P}(\lambda)$
Konbergentzia normal banaketara
Estimazioak
Hipotesi-testak

12. BANAKETA BINOMIALA 219
Banaketa binomiala: b (p, n)
Konbergentzia Poisson-en banaketara
Konbergentzia normal banaketara
Estimazioak
Hipotesi-testak

EMAITZAK 223

HITZAURREA

Eskutartean daukazun liburua, Sarrikoko Ekonomi eta Enpresa Zientzien Fakultatean ESTATISTIKARAKO SARRERA eta ESTATISTIKA TEORIKOA asignaturetan landutako material praktikoa da.

Liburuaren lehen atalean ditugun ariketak aipatutako lehen asignaturari dagozkio; *Estatistika Deskribatzaile*ko alorrekoak dira. Bigarren atalean ditugunak ordea, aipatutako bigarren asignaturari dagozkio; *Probabilitate-Teoria* eta *Estatistika Inferentziala* alorrekoak dira hain zuzen.

Lehen atalean 1985 urtean *Estatistikaren Hastapenak. ARIKETAK* izenaz argitaratutako liburuan genituen ariketak biltzen ditugu, baita azkeneko urte hauetan landu ditugun ESTATISTIKA DESKRIBATZAILEko eta DATU ANIZKOITZEN ANALISIkoak ere, hauetatik gehienak Beste Adierazburu Batzuk eta Propietate Teorikoei Buruzko galderak ataletan bilduta daude ebazpiderik gabe.

Bigarren atalean Probabilitate-Teorian eta Estatistika Inferentzialean erabiltzen diren ariketa praktikoak bildu ditugu, baita azken urteetako azterketan agertutako problemak ere. Ariketa hauen emaitzak liburuaren azken orrialdeetan aurkitzen dira.

Dena dela, ariketa hauen sorreraren meritua ez da bakarrik gurea, lan-talde bezala gurekin bi asignaturetan diharduten beste irakasle guztiena ere bada.

Gure eskerrik beroenak gure kide guztiei eta lan honen prestaketan lagundu diguten UEUko guztiei.

Sarrikon, 1991ko Uztailaren 4ean.

Estatistika Deskribatzailea

Karmele Fdz. Agirre

1. EZAUGARRI ESTATISTIKO BAKUNAK

ADIERAZBURUAK

1.1.- Ondoko taulan, X aldagaiaren banaketa emanik:

x_i :	0	1	2	3
n_i :	2	3	1	5

Atera itzazu:

1) 2. ordenako momentu arrunta edo jatorriarekikoa.
2) 2. ordenako momentu zentrala edo batezbestekoarekikoa.
3) 2. ordenako momentua $x_o = 2$ balioarekiko. Azal itzazu lortutako emaitzak.

1.2.- Demagun asmatutako bi herritarako populazio-datuak ditugula:

	ZIMBA		SILDAVIA	
Adina	Gizonezkoak	Emakumezkoak	Gizonezkoak	Emakumezkoak
0-10	200	200	500	500
10-30	100	300	1200	800
30-60	60	100	800	700
60-80	15	25	200	300

1) Egin itzazu herri horiei dagozkien populazio-piramideak.
2) Konpara itzazu biak, desberdintasunak aipatuz.

1.3.- Ondoko taulan herrialde bateko udalen banaketa aurkezten dugu beraien biztanle--kopuruen arabera:

Biztanleak : X	Udal-kopurua: n
$x \leq 10.000$	90
$10.000 \leq x \leq 50.000$	600
$50.000 \leq x \leq 150.000$	300
$150.000 \leq x \leq 450.000$	10

Honakoa eskatzen da:

1) Banaketa grafikoki adieraztea.
2) Batezbesteko aritmetikoa, mediana, moda, batezbesteko desbidazioa, desbidazio tipikoa eta g_o aldakuntz koefizientea.

1.4.- Ondoan, per capita errentan eta petrolio-erreserbatan munduko errekor batzuk dituelarik, Pertsiar Golkoan dagoen herri txiki baten estatistika demografikoaren laburpena daukagu.

Adina	biztanleak milatan	
1966-XII-31	Emakumezkoak	Gizonezkoak
0 - 9	70	75
10 - 29	80	130
30 - 49	35	75
50 - 79	15	20

Honakoa eskatzen da:

1) Grafikoki adieraztea (histogramak edo piramidea)
2) Zentrurako joeraren eta sakabanatzearen neurriak.
3) Azal itzazu laburki ateratako emaitzak.

1.5.- Goi-mailako bi ikastetxetan, ikasleen adinak honela banatzen dira:

Urteak (mailak)	M.E. Ikastetxea	E.F. Ikastetxea
17 - 19	400	750
20 - 25	400	2.000
26 - 37	200	250

Konpara itzazu, histogramen, zentrurako joeraren eta sakabanatzearen balio tipikoen bidez, ikastexe horiei dagozkien maiztasun-banaketak.

1.6.- Berrogei ikasle dituen talde batek S asignaturan lortutako kalifikazioak hauek izanik:

4	5	5	2	0	1	7	6	3	2
1	6	7	6	4	5	4	2	3	3
8	7	4	4	3	6	5	9	1	8
3	5	5	4	6	8	5	7	3	4

1.9.- Erostetxe bateko erosleriaren gastuak aztertu ondoren, gastuak honela banatu ziren milaka pezetatan:

Gastu-tarteak	Maiztasunak
0 - 4'99	5
5 - 9'99	10
10 - 14'99	14
15 - 19'99	20
20 - 24'99	35
25 - 29'99	15
30 - 34'99	1

Honakoa eskatzen da:
Kalkula itzazu neurri hauek, beren esanahia adieraziz: batezbestekoa, desbidazio tipikoa, aldakuntz koefizientea eta moda.

1.10.- Butano-banatzaile batek, ondoz ondoko 20 lanegunetan, honako kantitate hauek banatu ditu:

351	303	185	94	510	423	285	212	104	512
390	308	200	88	485	401	310	195	90	485

Datuak lau taldetan banatu eta klase-ordezkaritzat, tarteen erdiko puntua edo justifikatutako zenukeen beste edozein puntu hartu ondoren:

Honakoa eskatzen da:
1) Aldagai taldekatu horren batezbestekoa, desbidazio tipikoa eta aldakuntz koefizientea.
2) Dagokion adierazpide grafikoa.

1.11.- Populazio batean 20 pertsonako lagin bat hartu da. Altuerak neurtu dira eta ondoko emaitzak lortu ditugu:

1'65 - 1'70 - 1'68 - 1'82 - 1'80 - 1'45 - 1'56 - 1'35 - 1'90 - 1'56
1'88 - 1'66 - 1'65 - 1'55 - 1'57 - 1'60 - 1'62 - 1'90 - 1'82 - 1'65

Kalkula itzazu: zentrurako joeraren balio tipikoak (batezbestekoa, moda, mediana) eta sakabanatzearenak (bariantza, desbidazio tipikoa eta ibiltartea).

Honakoa eskatzen da:

1) Aurkez ezazu, grafikoki, talde horren kalifikazioen banaketa.
2) Atera itzazu batezbesteko aritmetikoa, moda, mediana, bariantza eta aldakuntz koefizientea.
3) Adieraz itzazu laburki lortutako emaitzak.

1.7.- Herri bateko burdingintz sektorearen 10 enpresak dituzten faktoriak, hauexek dira:

Enpresak	Faktori kopurua
3 enpresak	1
2 enpresak	2
5 enpresak	3

Honakoa eskatzen da:

1) Maiztasun-banaketa hori adierazten duen barra-diagrama.
2) Banaketa horren g_o, g_1, g_2 koefizienteak; aldakuntz, asimetri eta kurtosi koefizienteak, hain zuzen.
3) Lortutako balioen esangura, laburki, adieraztea.

1.8.- Ondoko taulan Bizkaitik Karlos II.aren gudetara bere 35 urteko aginte-garaian urtez urte joaten ziren gizaseme-kopuruak ikusten ditugu:

200	300	100	100	0
200	0	0	200	0
0	400	0	0	400
0	1.000	300	0	0
0	0	0	0	100
0	300	0	200	200
0	0	100	300	0

Honakoa eskatzen da:

1) Maiztasun-banaketaren adierazpide grafikoa.
2) Zentrurako joeraren balio ezagunenak.
3) Sakabanatze-balio ezagunenak.

1.12.- Talde bat osatzen duten hogei gazteri, proba psikotekniko berezi bat egin zaie, ondoko puntuazio hauek lortu dituztelarik:

91	92	83	80	87	94	91	86	89	94
85	92	90	89	85	86	90	85	87	84

Honakoa eskatzen da:

1) Zabalera berdineko 4 unitate ibiltarteaz dauzkaten taldetan sailka itzazu datuak eta lortzen den maiztasun-banaketaren adierazpide grafikoa egin.
2) Atera itzazu batezbestekoa, mediana, moda, bariantza, desbidazio tipikoa eta aldakuntz koefizientea.
3) Azal itzazu emaitzak taula argi baten bidez eta balora ezazu, gazte-talde horretaz, emaitza horiek emandako informazioa.

1.13.- Ondorengo multzoan, dimentsio geopolitiko berdintsuak dituzten 20 estatuetarako, (N.P.G) Nazio-Produktu Gordina/biztanle, aldagai estatistikoa ikertu nahi da.

Ondoko datuak 1981. urterako izanik:

ALEMAN ERREPUBLIKA FEDERALA	11.730 $
FRANTZIA	9.940 $
ITALIA	5.240 $
ESPAINIA	4.340 $
POLONIA	3.840 $
VENEZUELA	3.130 $
JUGOSLAVIA	2.430 $
TURKIA	1.330 $
KOLONBIA	1.010 $
MAROKKO	740 $
PERU	730 $
NIGERIA	670 $
FILIPINAK	600 $
TAILANDIA	590 $
EGIPTO	460 $
KENYA	380 $
UGANDA	290 $
TANZANIA	270 $
BIRMANIA	160 $
ETIOPIA	130 $

Honakoa eskatzen da:

1) Ondoko bost tarte hauetan taldeka itzazu balioak (0;500), (500;2000), (2000;4000), (4000;8000), (8000;12000) dagokion maiztasun absolutu eta erlatiboen taula osatuz eta ateratzen den banaketa histogramaren bidez grafikoki adieraziz.
2) Estima itzazu banaketaren mediana eta moda.
3) Kalkula itzazu batezbesteko aritmetikoa, desbidazio tipikoa eta aldakuntz koefizientea, klase-ordezkaritzat tarteen erdiko puntuak harturik.
4) Komenta itzazu laburki, banaketaren asimetria eta soslaia.

1.14.- Ondoko taulan, O.H.O.n diharduten 100 ikasle daude banatuta beraiek duten adinaren arabera.

Adina:	6	7	8	9
maiztasunak:	35	49	14	2

Honakoa eskatzen da:
Lor itzazu batezbesteko aritmetikoa, mediana eta moda, ondoko bi ikuspuntuak kontutan harturik:

1) Adina praktikoki diskretua dela kontsideratzen da.
2) Adina ezaugarri jarraia da. Kasu honetan klase-ordezkaritzat, tartearen erdiko puntua hartu behar da.
3) Emaitzen irazkina edo komentarioa.

1.15.- Banaketa baten a_1, a_2, a_3 momentuak ondokoak izanik:

$a_1 = 10$ $a_2 = 116$ $a_3 = 1160$

lor itzazu g_o eta g_1 koefizienteak eta komenta ezazu banaketa horren posizioaz, sakabanatze erlatiboaz eta asimetriaz ikusten duzuna.

1.16.- 1) Froga ezazu g_1 asimetri koefizientea neurri-unitatearen aldaketarekiko independentea dela.
2) Atera ezazu kurtosi koefizientea ondoko banaketarako, bere balioaren esangura azalduz.

x_i	n_i
1	2
2	4
3	5
4	3

1.17.- 1) Maiztasun-banaketa baten ondoko momentuak ditugularik:

$a_1 = 3$ $a_2 = 18$ $m_3 = -905$ $m_4 = 243$

Kalkula itzazu: bariantza, desbidazio standarda, asimetri eta kurtosi koefizienteak.
Marraz ezazu banaketaren soslaia.

1.18.- Aldagai estatistiko baten aurreneko bi momentu arruntak ezagutzen dira

$a_1 (x) = 40$ $a_2 (x) = 2.500$

1) Lor itzazu bariantza, batezbestekoa eta aldakuntz koefizientea.
2) Beste aldagai estatistiko bat 1) ataleko aldagaiarekin, ondoren azaltzen den transformazioaren bidez erlazionatuta dagoela dakigu:

$Y = 5X + 100$

Lor itzazu aldagai berriaren batezbestekoa, bariantza eta aldakuntz koefizientea.

1.19.- Ondoko hiru kasuak kontsideratuz:

- Bi aldagai estatistikoren batura
- Aldagai bat eta eskalare baten biderkadura
- Aldagai baten transformazio lineala

Lor itzazu, transformazio hauen batezbesteko aritmetikoa, desbidazio tipikoa eta aldakuntz koefizientea.

1.20.- 1) Froga itzazu batezbesteko aritmetikoaren propietateak.

Zer informazio berezi ematen digu batezbesteko aritmetikoak zentrurako joerari buruz? Eta modak? Eta medianak?

2) Lor itzazu aldagai tipifikatuaren batezbesteko aritmetikoa eta desbidazio tipikoa.

1.21.- Ikasle batek A eta B asignaturetan ondoko notak lortu ditu: 80 eta 98 puntuak, hurrenez hurren.
A asignaturaren puntuen banaketak, 75 puntu ditu batezbeste eta 10 puntuko desbidazio tipikoa.

B asignaturaren puntuen banaketak, aldiz, 90 puntu batezbeste eta 15eko desbidazio tipikoa.

Zein asignaturatan atera du posturik onena?

1.22.- Familia batek jolasaldi, atsedenaldi eta aisialdietan egindako gastuak 20.000 pezetakoak dira batezbeste urte guztiaren lan-hilabeteetan. Opor-hilabeteetan berriz 2´5 bider gehiago dira.

Bere etxebizitza dagoen auzoan egindako gastuak 15.500 pta./hilabete familia dira batezbeste eta 3.500 pzt/hilabete familiako desbidazio tipikoa dago.

Oporrak igarotzen dituen tokian, berriz, balio horiek 42.000 pta. eta 7.500 pta.--koak dira hurrenez hurren. Zein tokitan dago, gastu horien arabera, egoera hobean?

1.23.- Ondoan daukagun nomina-zerrendan, 25 langileentzako "Hileroko ordainketa" aldagaiari dagozkion balioak azaltzen dira.

LANGILEA			HILEROKO ORDAINKETA GUZTIRA	
1	ALVILLOS Agirre	Maria Pilar	80.000	pezeta
2	ARRESE Oceja	Emilio	200.000	"
3	BANDAÑA Rodriguez	Crisanto	120.000	"
4	BERNARDO Perez	Antonia	200.000	"
5	CALVO Artazkotz	M. Jose	80.000	"
6	CERCEDA Amulio	Germán	120.000	"
7	CHARLOT Gómez	Luis	40.000	"
8	EGIA Arozena	Enrique	80.000	"
9	FEO González	Fermín	40.000	"
10	FUNOLL Varela	Paula	80.000	"
11	GARIN Frade	Pedro	200.000	"
12	GONZALEZ Navarro	M. Carmen	80.000	"
13	HINOJAL Calvo	Gregorio	120.000	"
14	JUARISTI Eizagirre	Edurne	80.000	"
15	LIZASO Urkiza	Valentin	320.000	"
16	MAR Herrera	M. Luisa	40.000	"
17	MENDIBE Abasolo	Jenaro	40.000	"
18	NAVARRO Carreño	José Ramón	200.000	"
19	PAVON Mendibe	M. Nieves	120.000	"
20	RASTRILLA Frías	Borja	120.000	"

21	RUEDA Carrizo	Benedicto	120.000	"
22	SANTAMARINA Pascual	Micaela	80.000	"
23	TATO Carreira	Gerardo	80.000	"
24	VALDEMOROS Artesero	Filomena	80.000	"
25	ZABALA Macía	Agustina	80.000	"
		GUZTIRA:	2.800.000	pezeta

Edurne Juaristi
Bilbo, 1984.eko otsailaren 28an

Honakoa eskatzen da:

1) Aldagai horren banaketaren maiztasun absolutu eta erlatiboen taula.
2) Banaketa hori errepresentatzen duen barra-diagrama marraztea.
3) Ezagutzen diren zentrurako joeraren balio tipikoak.
4) Ezagutzen diren sakabanatzearen balio tipikoak.
5) 2) atalean lortutako adierazpen grafikoa ikusiz, esan ezazu g_1, g_2 koefizienteen zeinua zein den.
6) Atera itzazu, "hileroko ordainketa" aldagai estatistikoaren balioei (pezetatan emanda) dagozkien balio zentralak eta tipifikatuak.
7) Azter ezazu "hileroko ordainketen" kontzentrazio-maila Lorenz-en kurba eta Gini-ren indizearen bidez.

Komenta ezazu laburki lortutako emaitza.

1.24.- I.M.N.E.B.ren ordezkaritza probintzialeko enplegatuen hileroko soldatak honela banatzen dira.

40	enplegatuk	50.000	pezeta bakoitzak.
100	enplegatuk	100.000	pezeta bakoitzak.
40	enplegatuk	200.000	pezeta bakoitzak.
20	enplegatuk	500.000	pezeta bakoitzak.

Honakoa eskatzen da:

1) Barra-diagrama, enplegatuen soldaten araberako banaketa grafikoki adierazteko.
2) Banaketa honen g_o, aldakuntz koefizientea, hain zuzen.
3) Lorenz-en kurba, soldaten enplegatuen arteko banaketa aurkezteko.
4) GINIren indizea, kontzentrazio-maila neurtzeko.

1.25.- Talde bateko 10 lagun beraien sarrera-mailen arabera sailkatu dira:

Klase-ordezkariak:	1	4	10
Lagunak:	5	4	1

1) Lor ezazu Gini-ren indizea, talde horretan sarreren kontzentrazioa erakusteko.
2) Sarrera txikienak dituzten bi mailak sail batean hartzen baditugu:

Klase-ordezkaria :	x	y
Lagunak :	9	1

Zeintzuk dira x eta y-ren balioak Gini-ren indizeak lehenengo balioa eduki dezan?

1.26.- Ondoko taulan, Elkarte Anonimo bateko akziodunen artean akzio-tituluen kopurua banaturik daukagu.

Titulu-kopurua/Akziodun	Akziodun-kopurua
25	4
5	40
1	100
100	1

Honakoa eskatzen da:
1) Banaketari dagokion Lorenz-en kurba, kontzentrazioa grafikoki aurkez dezagun.
2) Gini-ren indizea, banaketaren kontzentrazioa neur dezagun.

1.27.- VD zerbitzu publikoaren sukurtsalaren banaketa estatuko 50 probintzietan, honako hau da:

Sukurtsal-kopurua/Probintzia	Probintzi-kopurua
1	30
20	3
10	5
5	12

Honakoa eskatzen da:
1) Banaketa horren Lorenz-en kurba marraztea.
2) Banaketaren Gini-ren indizea kalkulatzea.

1.28.- Ondoko 120 gazteen taldea sailkatuta daukagu, bakoitzak daukan disko--kopuruaren arabera.

Diskoak	Gazteak
1 - 5	20
6 - 12	40
13 - 25	40
26 - 45	20

Honakoa eskatzen da:

1) Eraiki ezazu Lorenz-en kurba, talde horretako, diskoen banaketa ikusterazteko.
2) Kalkula ezazu berari dagokion Gini-ren kontzentrazio-indizea.

1.29.- Ondoko taulan, Estatuko probintzien banaketa datorkigu, bakoitzaren produkzio total garbiaren arabera, 1975. urterako eta milioika pezetatan:

Mailak	Batezbesteko produkzioa	Probintzi kopurua
150.000 baino gehiago	400.000	5
50.000 baino gutxiago	30.000	15
Beste gainerakoak	100.000	30

Honakoa eskatzen da:

1) Banaketa hau, histograma baten bidez, grafikoki aurkeztea.
2) Gini-ren indizea eta Lorenz-en kurbaren bidez 50 probintzietan produkzio totalaren kontzentrazioa aurkeztea.

1.30.- Hiri batean bi mila familia bizi dira. Dituzten hileroko sarrerei buruz informazioa jaso da.

900 familiak	150.000-300.000	pta/hilabete	jasotzen	dute
800 "	50.000-150.000	"	"	"
200 "	300.000-500.000	"	"	"
100 "	0- 50.000	"	"	"

Honakoa eskatzen da:

1) Familien banaketa adierazten duen histograma, "hileroko sarrera" aldagai estatistikoaren arabera.
2) Banaketa horren modaren estimazioa.
3) Bi mila familietan "hileroko sarrera" totalaren kontzentrazioa adieraziko duen Lorenz-en kurba.
4) Kontzentrazio hori neurtuko duen Gini-ren indizea.
5) Lortutako emaitzak aztertzea.

1.31.- Mbocne enpresa afrikarraren hileroko alokairuen banaketa (finkatua dagoen herriari dagozkion pezetatan) ezagutzen dugu:

10 langilek	400.000 pta.
40 langilek	137.500 pta.
50 langilek	10.000 pta.

Boc-Buba enpresa afrikarraren hileroko alokairuen banaketa ere badugu, finkatua dagoen herriko pesotan:

20k	150.000	peso
80k	6.250	peso
100ek	15.000	peso

1) Konpara ezazu bi banaketen uniformetasun-maila, Lorenz-en kurba eta Gini-ren indizearen bidez.
2) Komenta ezazu laburki lortutako emaitza.

1.32.- Estatu konkretu batean eta data zehatz batean ondorengo informazioak hartu ditugu:

- 10 milioi familia ditu
- Hilean 200.000 pezeta baino gehiago jasotzen duten 2 milioi familiak, estatuko famili errenta totalaren ehuneko 55 hartzen dute.
- Hilean 100.000 pezeta baino gehiago jasotzen duten 4 milioi familiak, estatuko famili errenta totalaren ehuneko 75 jasotzen dute.
- Hilean 50.000 pezeta baino gehiago jasotzen duten 8 milioi familiak, estatuko famili errenta totalaren ehuneko 95 jasotzen dute.

Honakoa eskatzen da:
1) Lorenz-en grafikoa marraztea, famili errentaren banaketa adieraziz.
2) Dagokion Gini-ren kontzentrazio-indizea kalkulatzea.

1.33.- Berrehun langile dituzten A, B enpresetan, langileak eta hileroko alokairuak honela banatzen dira.

A Enpresa		B Enpresa	
Alokairuak	Langileak	Alokairuak	Langileak
4.500	90	6.000	80
2.000	20	7.000	100
8.000	30	10.000	20
3.000	50		
10.000	10		

Honakoa eskatzen da:
1) Enpresa bakoitzaren batezbestekoa, mediana, desbidazio standarda eta aldakuntz koefizientea.
2) Enpresa bakoitzaren alokairu-banaketari dagokion Gini-ren kontzentrazio--indizea.
3) Konpara itzazu bi alokairu-banaketak lortu dituzun estatistikoen arabera.

EBAZPIDEAK

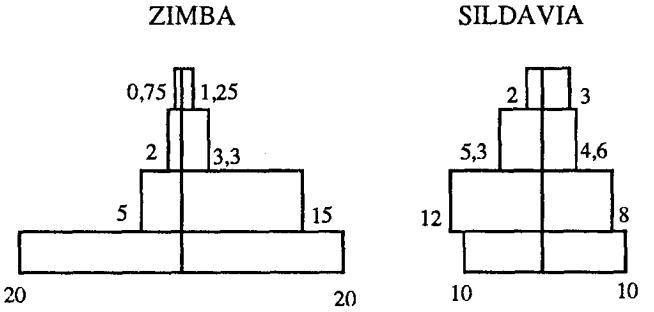
1.1.

$a_2 = 4,73$; $m_2 = S_x^2 = 1,42$; $a_{2,2} = 1,45$

Bariantza bigarren ordenako momentu zentralik txikien bezala aurkezten zaigu. Bestalde, m_2 eta $a_{2,2}$ momentuek hurbileko balioak dituzte; $\bar{x}$ = 1,82 eta 2 ere hurbilekoak bait dira.

1.2.

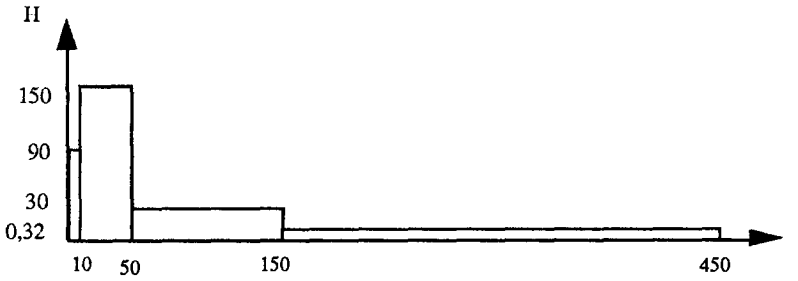
1) Populazio-piramideak



2) ZIMBAren soslaiak jaiotza-tasa garrantzitsua eta gizonezkoen emigrazio handia adierazten du. SILDAVIArenak, ordea, jaiotza-tasa eta hilkortasun txikiagoa. Halaber, gizonezkoen inmigrazio handia adierazten du.

1.3.

1)



2) $\bar{x}$ = 51.450 biztanle
Me = 37.333 biztanle
Mo = 20.000 biztanle

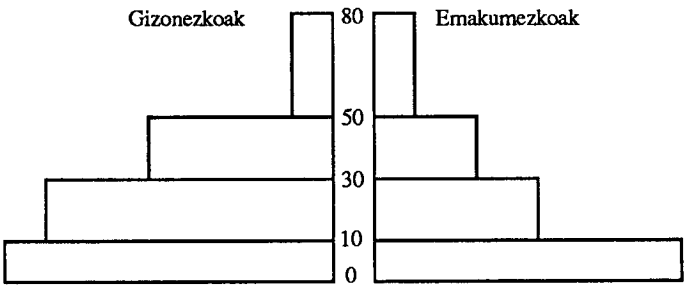
DMe = 28.737 biztanle
$D_{\bar{x}}$ = 34.101 biztanle
S_x = 42.369 biztanle
g_o = % 82,4

Banaketa, modabakarra eta eskuinerantz asimetrikoa izanik, $Mo \leq Me \leq \bar{x}$ betetzen da.

Halaber, $D_{Me} \leq D\,\bar{x} \leq S_x$ betetzen dela ikusten dugu.

1.4.

1) Populazio-piramidea



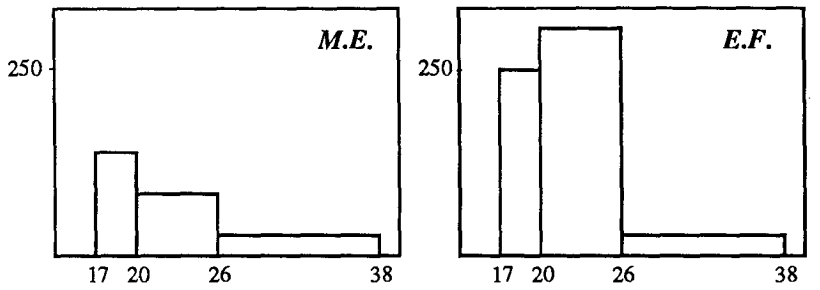
2)

Banaketa	x	S_x^2	S_x	g_o
Emakumezkoena	21,67	297,9	17,26	% 80
Gizonezkoena	24,27	271,9	16,49	% 68

3) Zabaltasun handia aurkezten du adierazpide grafikoak adin ertaineko gizonezkoen populazioan. Balio tipikoak kontutan hartuz, estatu gaztea dela antzeman daiteke. Halaber, gizonezkoen inmigrazio-maila nabaria da.

1.5.

Histogramak:



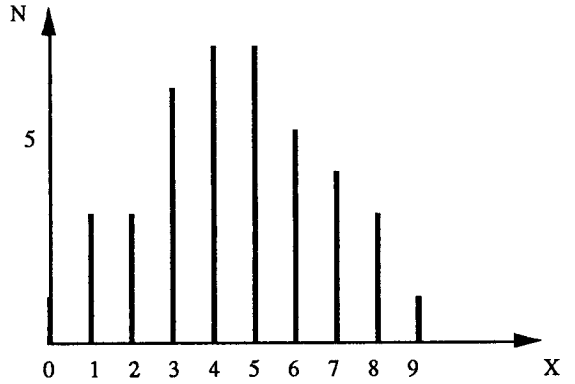
	x	Me	Mo	S_x	g_o	R
M. E.	23	21,5	20	4,93	% 21	21
E. F.	22,6	22,25	20,465	3,41	% 15	21

Zentrurako joeraren neurriak ez dira oso desberdinak. Bi kasuetan $Mo \leq Me \leq \bar{x}$ daukagu, eskuinerantz asimetrikoak direlako. Sakabanatzearen neurri txikiagoak ditu E.F. ikastetxeak M.E. ikastetxeak baino. Adibide honetan, desbidazio tipikoak konparagarriak dira, batezbesteko aritmetikoak berdintsuak direlako.

Halaber, histogramak ikusirik, E.F. banaketaren sakabanatzearen estatistikoak M.E. banaketarenak baino txikiagoak izango zirela aurresan genezakeen ikastetxe honetan; batezbestekoaren inguruan ikasle gehiago daudela argi ikusten bait da.

1.6.

1)

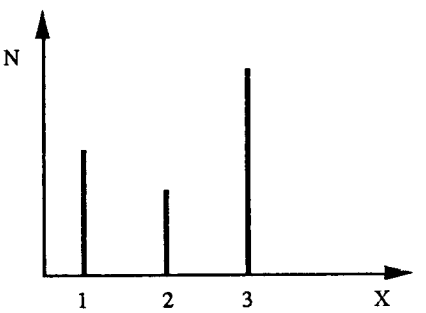


2) $\bar{x}$ = 4,525 puntu
Mo = 4,5 puntu
Me = 4,5 puntu
S^2 = 4,65 puntu
g_o = 0,48 puntu

3) Zentrurako joeraren hiru neurriak berdintsuak dira, asimetria txikia duten banaketetan gertatzen den bezala.
Sakabanatzea, batezbestekoarekin parekatuz, ez da handia; % 48koa da.

1.7.

1)

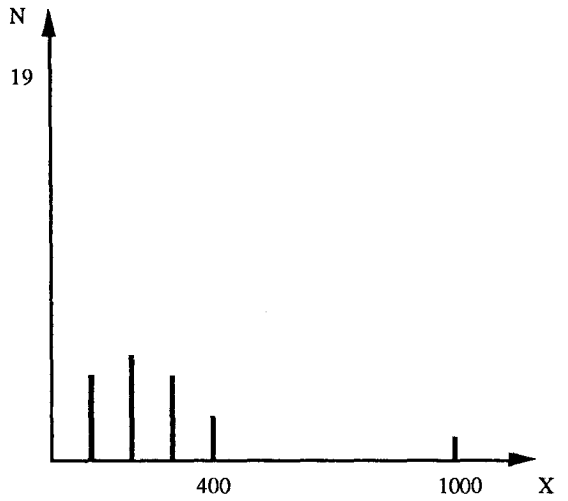


2) g_o = % 39,6 g_1 = - 0,40 g_2 = 1,43 - 3 = - 1,57

3) Aldakuntz koefizienteak sakabanatze erlatiboa nahikoa txikia dela esaten digu. Bestalde, asimetri eta kurtosi-koefizienteek ezkerrerantz zertxobait asimetrikoa eta nahikoa zapala dela adierazten dute.

1.8.

1)



2) $\bar{x} = 125,7$ bizkaitar/urte $Me = Mo = 0$
$q_1 = 0$ $q_3 = 200$

3)

S_x^2	=	39.150		bizkaitar^2
S_x	=	197,8		bizkaitar
D_{Me}	=	125,7		bizkaitar
$D\bar{x}$	=	142,4		bizkaitar
g_o	=	1,5	=	% 156
R	=	1.000		bizkaitar
q_3-q_1	=	200		bizkaitar

Diagramak azaltzen duenez, neurri guztiek 126 bizkaitar/urte batezbestekoarekiko sakabanatze handia erakusten dute.

1.9.

$\bar{x}$ = 18,45 mila pezeta (gastuen grabitate-zentrua)
S_x = 7,06 mila pezeta (gastu gehienak 11,39 - 25,51 tartekoak dira)
g_o = 0,38 (sakabanatzse erlatiboa batezbestekoarekin konparatuz txikia da)
Mo = 20 + 5 (15/35) = 22,14 mila pezeta (gasturik errepikatuena balio hau duela estimatzen da).

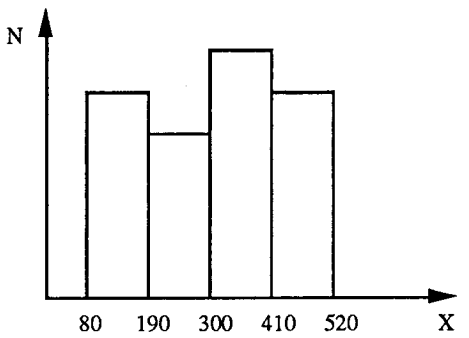
1.10.

Zabalera berdineko lau talde hauek izan daitezke:

Klaseak:	]80;190]	]190;300]	]300;410]	]410;520]
Klase-ordezkariak:	135	245	355	465
Maiztasunak:	5	4	6	5

1) $\bar{x}$ = 305,5 bonbonak
   S_x = 122,9 "
   g_o = % 40,2 "

2)



1.11.

Zabalera berdineko ondoko sei taldeak hartuz
Klaseak:]1,30;1,40]]1,40;1,50]]1,50;1,60]]1,60;1,70]]1,70;1,80;]]1,80;1,90]

Klase-ordezkariak:	1,35	1,45	1,55	1,65	1,75	1,85
Maiztasunak:	1	1	5	7	1	5

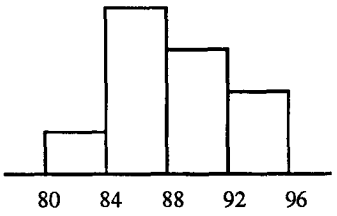
$\bar{x}$ = 1,65 Mo = 1,617 Me = 1,64

S_x^2 = 0,0195 S_x = 0,139 R = 1,87 − 1,35 = 0,50

Informazioa galdu arren, ezaugarria jarraia izanik ariketa taldekatuz ebatzi dugu.

1.12.

1) Klaseak	x_i	n_i
$80 \leq x \leq 84$	81,5	2
$84 \leq x < 88$	85,5	8
$88 \leq x < 92$	89,5	6
$92 \leq x < 96$	93,5	4



2,3)

Zentrurako joeraren estatistikoak	Sakabanatzearen estatistikoak
$\bar{x}$ = 87,9 puntu Me = 88 " Mo = 87 "	S_x^2 = 13,42 puntu^2 S_x = 3,66 puntu g_o = % 4,16

Beste sailkapen batez, emaitzak zertxobait desberdinak izango lirateke.
Taldekatu gabe ebatziz, emaitzak hauek dira:
$\bar{x}$ = 88, Sx = 13,7. Logikoa denez, taldekatuta sakabanatzea txikiagotu egiten da. Horri "taldekatze-ondorioa" deritzogu. g_1 ez da eskatzen, baina, estatistiko honi dagokionez, lagin interesgarria da. Adierazpide grafikoak asimetria partzialak erakusten dizkigu. Hala ere, ia konpentsatu egiten dira eta emaitza g_1 = 0,09 da.

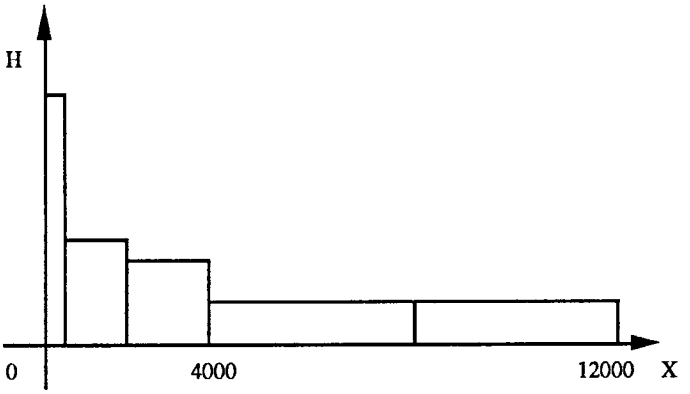
1.13.

1) Klaseak	x_i	n_i	f_i
(0 ; 500)	250	6	0,3
(500 ; 2.000)	1.250	7	0,35
(2.000 ; 4.000)	3.000	3	0,15
(4.000 ; 8.000)	6.000	2	0,10
(8.000 ; 12.000)	10.000	2	0,10

2) $Me = 500 + 1500\frac{4}{7} = 1.357\$$

$Mo = 500\frac{2,33}{2,33+0} = 500\$$

(Turkia eta Egipto hurrenez hurren eta gutxi gorabehera)



3) $\bar{x}$ = 2.562,5 $ (Jugoslaviako balioaren antzekoa)
Sx = 2.992 $ g_o = 1,17
(Datuak taldekatu gabe ebatziz gero, 2.400 $, 3.189,4 $ eta 1,33 dira emaitzak)

4) Eskuin alderantz oso asimetrikoa dela ikusten da. Baita oso puntaduna ere modaren altueraren arabera. Horren ondorioz, g_1 eta g_2 nahitaez positiboak izango dira.

1.14.

1) $\bar{x}$ = 6,83 ≅ 7 urte Me = 7 urte Mo = 7 urte

2)

Klaseak	x_i	n_i	N_i
[6 - 7)	6,5	35	35
[7 - 8)	7,5	49	84
[8 - 9)	8,5	14	98
[9 - 10)	9,5	2	100

$\bar{x}$ = 7,33 urte Me = 7,30 urte Mo = 7,28 urte

3) Aldagaia diskretua balitz bezala kontsideratuta, hurbilketa-errorea daukagu. Ikasleen urteak beteberriak balira bezala hartzen ditugu eta balio tipikoen emaitzak benetakoak baino txikiagoak ditugu.

Aldagaia jarraia denez, klase-ordezkariak kontsideratuta grabitate-zentruak 0,5 eskuinerantz desplazatzen da; aldagaiaren balioak 0,5 handiagoak bait dira.

1.15.

g_o = 0,4 (% 40) g_1 = -5

Banaketa honen grabitate-zentrua, 10 balioan dago ($\bar{x}$ = 10). Sakabanatzea $S_x = 4$ da absolutuki neurturik, hots, balio gehienak (6,14) tartean daude. Erlatiboki neurturik (batezbestekoarekiko) sakabanatzea %40koa da. Ezin esan ordea, handia denik. Asimetria, azkenik, ezker alderantz nabaria da; asimetri koefizientea $g_1 = -5$ bait da.

1.16.

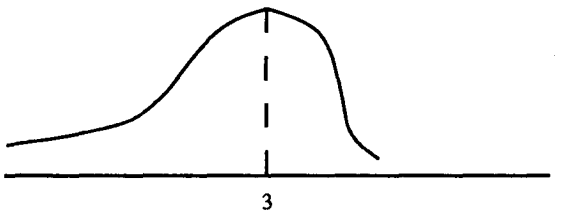
2) $\bar{x}$ = 2,6429 S_x = 0,9715 a_2 = 7,9286
a_3 = 25,7867 a_4 = 88,5 m_4 = 1,8098
$q_2 = 2,0317 - 3 = -0,968$

Dakusagunez, banaketa honen kurtosia banaketa normalarena baino txikiagoa da, hots, zertxobait zapala da.

1.17.

1) $S_x^2 = 9$ $S_x = 3$ $g_1 = \frac{-905}{27} = -33,514$ $g_2 = \frac{243}{81} = 3$

Ezkerrerantz argiro asimetrikoa eta kurtosiaren aldetik normala denez, banaketa honen soslaia gutxi gorabehera, ondokoa izango da:



1.18.

1) $S_x^2 = 900$ $Sx = 30$ $g_0(x) = 0,75$

2) $\bar{y} = 300$ $S_y^2 = 22.500$ $S_y = 150$ $g_0(y) = 0,50$

1.21.

$a_i = 80$, $b_i = 98$ puntuak ezin ditugu parekatu; banaketa desberdinetako balioak bait dira.

$$t_{a_i} = \frac{80-75}{10} = 0,50 \quad < \quad t_{b_i} = \frac{98-90}{15} = 0,53$$

Hots, bi balioak zentratu ondoren beren desbidazio tipikoekiko neurtu ditugularik konparagarriak dira.
Hau da, balio tipifikatuak parekatuz dakusagunez, posturik onena, B asignaturan atera du.

1.22.

$$T_{x_i} = \frac{20.000-15.500}{3.500} = 1,285 \quad > \quad T_{y_i} = \frac{50.000-42.000}{7.500} = 1,066$$

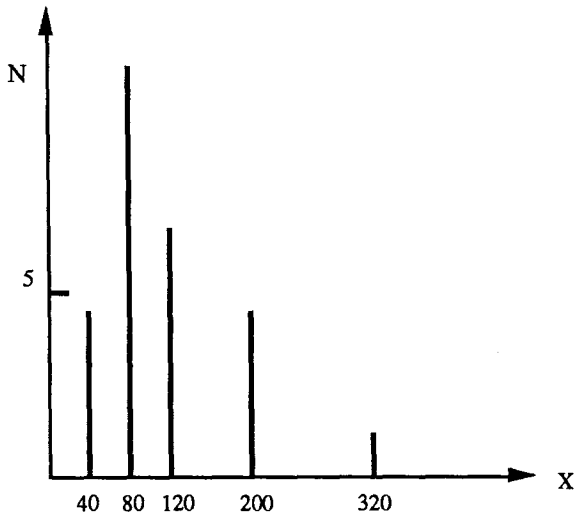
Jolasaldi, atsedenaldi eta aisialdiko kontsumo-maila altuagoa dauka familia horrek bere ohizko bizitzan. Horregatik, postu hobeagoan dago bere auzoan oporrak igarotzen dituen tokian baino.

1.23.

1)

x_i	n_i	N_i	f_i
40.000	4	4	0,16
80.000	10	14	0,40
120.000	6	20	0,24
200.000	4	24	0,16
320.000	1	25	0,04

2)



3) $\bar{x}$ = 112.000 pta.
Mo = Me = 80.000 pta.
q_1 = 80.000 pta.
q_3 = 120.000 pta.
min(x) = 40.000 pta.
max(x) = 320.000 pta.

4) $S_x^2 = 4.224.10^6$
S_x = 64.992 pta.
g_o = 0,58
R = 280.000 pta.
$q_3 - q_1$ = 40.000 pta.

5) Diagramako eskuin aldean, adar bat ikusten da. Horregatik susmatzen dugu g_1 positiboa izango dela (kalkulatzean + 1,625 lortzen da).
Soslai zorrotza ere ikusten dugu (moda-mediana nola nabaritzen den, eskuineko adarra nola estutzen eta hedatzen den). Horregatik, g_2 ere positiboa izango dela kontsideratzen dugu. (+2 lortzen da).

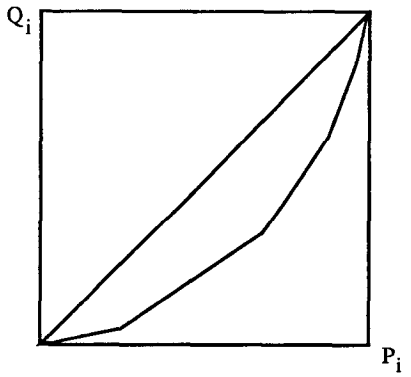
6)

z_i	t_i
-72.000	-1,1078
-32.000	-0,4923
8.000	0,1230
88.000	1,3540
208.000	3,2003

7)

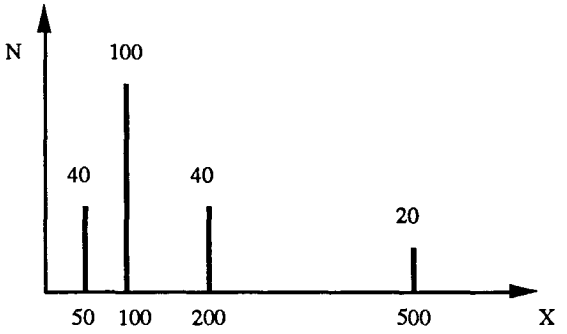
P_i	Q_i
16	5
56	34
80	60
96	88
100	100

$I_G = 1 - 187/248 = 0,246$



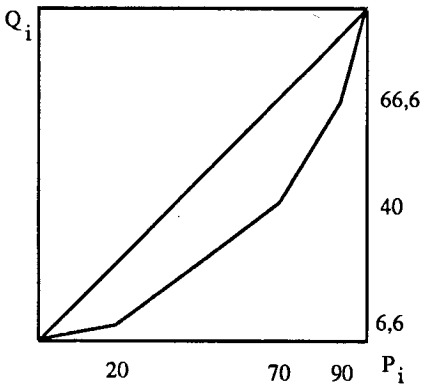
Kontzentrazio-mailaren adierazle biek, hileroko ordainketa nahikoa uniformekoki banatuta dagoela ikusterazten digute.

1.24.



2) $g_o = \frac{126.491}{150.000} = 0,84$

3)



4)

P_i	Q_i
20	6,6
70	40
90	66,6
100	100

$$I_G = \frac{66,8}{180} = 0,37$$

1.25.

1)

P_i	Q_i
50	16
90	67
100	100

$I_G = 0,4$

2) Bi ebazpide kontsideratuko ditugu:

a) "Sarrerak guztira" aurrenekoak izanik, hau da,

$$M = \sum_i x_i n_i = 31$$

	n_i	$x_i n_i$	N_i	M_i	P_i	Q_i
X	9	9x	9	9x	90	900x / 31
Y	1	31 - 9x	10	31	100	100

$I_G = 0,4$ $\quad x = 1,86$

$y = 14,26$

b) "Sarrerak guztira" 9x + y izanik

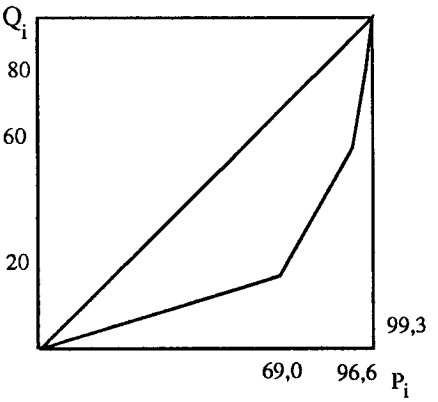
	n_i	$x_i n_i$	N_i	M_i	P_i	Q_i
X	9	9x	9	9x	90	$\frac{900x}{9x+y}$
Y	1	y	10	9x+y	100	100
		9x+y				

$I_G = 0,4$ $\quad x = 0,13\ y$ edota $y = 7,67\ x$

Noski, kasu honetan, soluzioa mugatu gabe geratzen da.

1.26.

1)

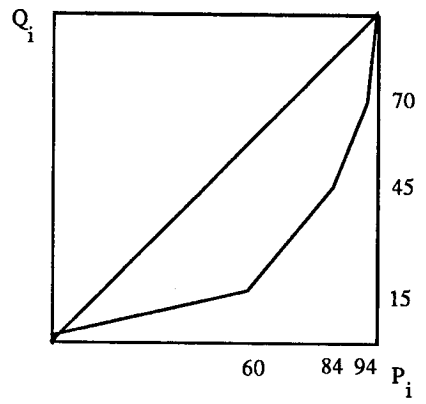


2) $I_G = \frac{104,9}{264,9} = 0,396$

Kontzentrazio sakona (akziodun batek ehun akziodunek adina akzio ditu: Akziodun--kopuruaren datua ez da nahikoa, elkarte anonimoa "herrikoia" dela ziurtatzeko....)

1.27.

1)



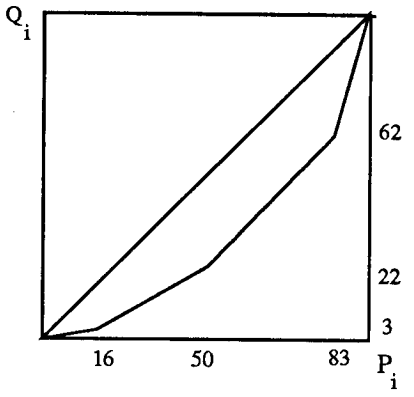
2)

P_i	Q_i	$P_i - Q_i$
60	15	45
84	45	39
94	70	24
100	100	

$I_G = 108/238 = 0,45$

1.28.

1)

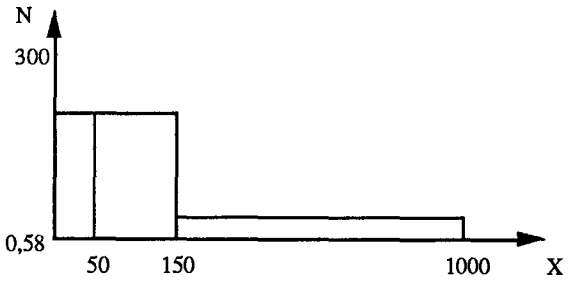


2)

P_i	Q_i	$(P_i - Q_i)$
16	3	13
50	22	28
83	62	21
100	100	

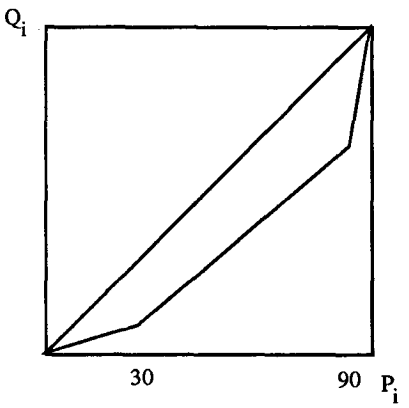
$$I_G = \frac{62}{149} = 0,41$$

1.29.



2)

P_i	Q_i	$P_i - Q_i$
30	8,25	21,75
90	63,3	26,7
100	100	

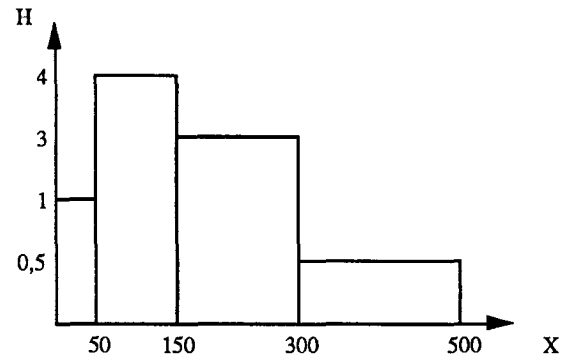


$$I_G = \frac{48,45}{120} = 0,404$$

Histogramak, probintzi produkzioen banaketa nahikoa sakabanatua dela adierazten du. Horrek, Estatuko produkzio totala probintzia batzuetan nahikoa kontzentratua dagoela esan nahi du, Lorenz-en kurbak eta Gini-ren indizeak ere adierazten dutenez.

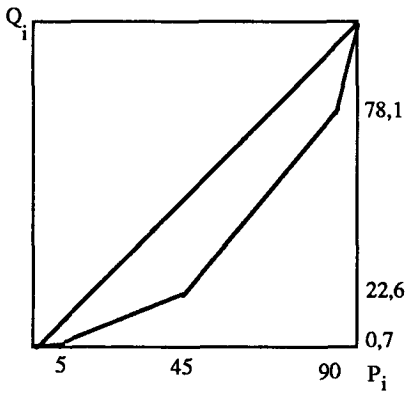
1.30.

1)



2) Mo = 50 + (3/4) 100 = 125

3)



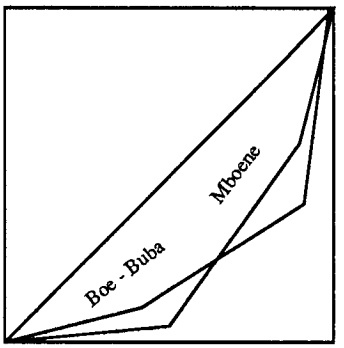
4) $I_G = \frac{38,6}{140} = 0,27$

5) Histograman ikusten denez, familia gehienak ez dira batabestearekiko oso desberdinak.
Horregatik, Gini-ren indizeak banaketa nahikoa uniformea dela adierazten digu.

1.31.

1)

Mboene		Boe - Buba	
P_i	Q_i	P_i	Q_i
50	5	40	10
90	60	90	40
100	100	100	100
I_G = 0,536		I_G = 0,616	

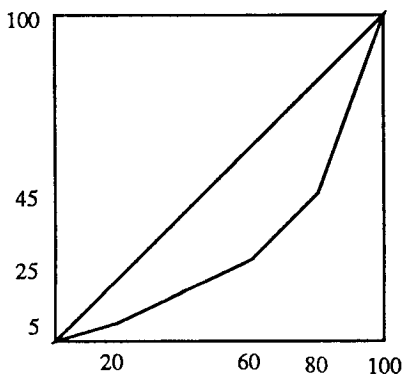


Kontzentrazioa, bi enpresetan, oso handia da, Boe-Buban-en zerbait handiagoa izanik. Lorenz-en kurbak kontzentrazioaren zehaztasuna Gini-ren indizeak (multzo-neurri bakarrak) baino hobeto jasotzen du:
Mboenen erdiko klasea goi-mailakoari gehiago urreratzen zaio, baina Boe-Buba baino gehiago urrutiratzen zaio behe-mailakoari.

1.32.

1) Klaseak	Familiak	P_i	Errenta	q_i	P_i	Q_i	$P_i - Q_i$
(mila pta.)	(milioiak)	%	%	%	%	%	%
0 ; 50	10 - 8 = 2	20	100 -95 =	5	20	5	15
50 ; 100	8 - 4 = 4	40	95 -75 =	20	60	25	35
100 ; 200	4 - 2 = 2	20	75 - 55 =	20	80	45	35
200 ;	2	20		55			
	10	100		100	160	75	85

2) $I_G = \frac{80}{160} = 1 - \frac{75}{160} = 0{,}53$



Nahiz eta Estatuari dagokion indizea izan, altua da, hots, Estatu honetan famili errenta nahikoa kontzentratuta dago. Datuak, biribilduak, 1.982.ekoak dira eta Espainako iturri "fidagarri" batzuetatik hartu dira.
Ohar gaitezen maila-markak ariketa honetan ez direla beharrezkoak; errentaren portzentaiak adierazburuak ematen bait dizkigu.

1.33.

1)

	x (pta.)	Me (pta.)	S_x (pta.)	g_o (%)
A	4.675	4.500	2.122,94	45,41
B	6.900	7.000	1.135,78	16,46

2) $I_G(A) = 0,2$ $I_G(B) = 0,08$

3) Alokairuen batezbestekoa txikiagoa da A enpresan B enpresan baino. Alderantziz gertatzen da desbidazio tipikoetan. Horregatik, aldakuntz koefizienteak %45,41 eta %16,46 dira hurrenez hurren.

Ohar daiteke aldagaiaren ibiltartea A enpresan B enpresan baino handiagoa dela ere. Giniren indizeak aurreneko emaitzekin ados daude. A enpresa nahikoa uniformea da alokairuen arabera eta B enpresa ia guztiz uniformea da.

BESTE ADIERAZBURU BATZUK

1.- Urbanizazio baten erroldatik balio hauek atera ditugu.

10 urte baino gutxiagokoak: 500 emakumezko eta 500 gizonezko
10 urtetik 30 urterartekoak: 700 emakumezko eta 800 gizonezko
30 urtetik 50 urterartekoak: 500 emakumezko eta 500 gizonezko
50 urtetik 80 urterartekoak: 300 emakumezko eta 299 gizonezko

Honakoa eskatzen da:
1) Histogramak edo populazio-piramidea.
2) Batezbesteko aritmetikoa eta desbidazioa tipikoa gizonezko, emakumezko eta populazio totalarekiko, hurrenez hurren.

2.- Normal jaiotako 20 haurren pisua neurtu da eta emaitzak hauek dira.

Pisua (kilotan)	Haur-kopurua
2'15 - 2'55	1
2'55 - 2'95	3
2'95 - 3'35	9
3'35 - 3'75	5
3'75 - 4'15	1
4'15 - 4'55	1

Honakoa eskatzen da:
1) Banaketaren adierazpide grafikoa.
2) Batezbestekoa, moda, mediana, eta asimetri koefizientea.

3.- Ondoko taulan 500 familiaren bakoitzaren senide-kopuruaren araberako banaketa daukagu.

Senide-kopurua	Famili kopurua
0 - 2	110
2 - 3	100
3 - 6	190
6 - 10	100

Honakoa eskatzen da:
1) Familien batezbesteko senide-kopurua.
2) Zein da maiztasun handieneko senide-kopurua?.

3) %50 familiarentzako aparkalekuak dauzkagula eta hauek senide-kopuru handiena daukatenei ematen zaizkiela suposaturik, aparkalekua lortzeko zenbateko senide--kopurua eduki behar da?.
4) Kalkula itzazu aldakuntz koefizientea eta desbidazio tipikoa, lortutako emaitzak komentatuz.

4.- A multzoan indibiduoen erdiak automobil bat du eta beste erdiak ez du automobilik.

B multzoan laurdenak bina automobil dauka eta gainerakoak ez dauka automobilik.

Honakoa eskatzen da:
Pareka itzazu, grafiko eta estatistiko egokienen bidez, banaketa horien zentzurako joeraren, sakabanatzearen, asimetriaren eta (ikaslea animatuko balitz) kurtosiaren ezaugarriak.

5.- Hiri bateko familiek dituzten elikadura-gastuak ikertu nahian 1.000 familia lagindu dugu.

Ondoko banaketan, lagindutako familien erantzunak bilduta izanik:

Gastua (milaka pta.)	Famili kopurua
(0 , 20)	100
(20 , 40)	300
(40 , 80)	500
(80 , 130)	100

Honakoa eskatzen da:
1) Histograma
2) Aldagai zentratuaren eta tipifikatuaren balioak.
3) Aldagai zentratuaren, tipifikatuaren eta jatorrizko aldagaiaren desbidazio tipikoak.
4) Aldagai zentratuaren eta jatorrizko aldagaiaren aldakuntz koefizienteak.
5) Komenta itzazu eskatutako balioen berezitasunak.

Oharra: Klase-ordezkaritzat erdiko puntuak hartu behar dira.

6.- X aldagaiaren ondoko momentu arruntak jakinik.

$a_1 = 0$ $a_2 = 2,4$ $a_3 = 3,6$

Lor ezazu:

1) X aldagaiaren asimetri koefizientea.
2) Z aldagaiaren aldakuntz koefizientea, Z aldagaia X aldagaiaren ondoko konbinazio lineala izanik.
   $Z = 5 - 3X$

7.- Ondoan X aldagai jarraiaren maiztasun erlatiboen banaketa daukagu:

X	f_i
[0;100)	0,2
[100;300)	f_2
[300;400)	f_3

Honakoa eskatzen da:

1) f_2, f_3 balioak $\bar{x}$ = 215 izan dadin.
2) " " " Me = 215 " "
3) " " " $g_1(x)$ = 0 " "

8.- Ondoko banaketa emanik.

X	n_i
(-1,5; -0,5)	8
(-0,5; 0,5)	74
(0,5 ; 1,5)	n_3
(1,5 ; 2,5)	n_4

Honakoa eskatzen da:

n_3, n_4 maiztasunak aldi berean $Mo(x) = 0$ eta $\bar{x} = 0,2$ izateko baldintzaz.

9.- Ondoko taulan, 1.982. urtean 24 estatutan produzitutako tomatea daukagu.

X_i (milaka tonatan)	
(0 - 100)	4
(100 - 500)	6
(500 - 2.000)	7
(2.000 - 5.000)	5
(5.000 - 7.0000)	2

Honakoa eskatzen da:

1) Histograma, eta asimetriari buruz grafikoan ikusten duzunaz komentarioa.
2) Batezbesteko aritmetrikoa, moda eta mediana.
3) Bariantza eta batezbesteko desbidazioa.
4) Lortutako emaitzen komentarioa.

10.- Lor ezazu momentu zentralen eta momentu arrunten arteko erlazioa (adierazpen orokorra edo laugarren ordenako momentuei dagokiona lor daiteke).
Ondoko momentuak emanik:

$a_1 = 3,83$ $a_3 = 79,70$ $a_2 = 24,46$ $a_4 = 400,2153$

lor itzazu asimetri eta kurtosi-koefizienteak. Komenta itzazu lortutako emaitzak.

11.- Ondoko 1. eta 2. tauletan, hurrenez hurren munduko 100 enpresa handienak eta Espainiako 100 enpresa handienak salmenten arabera sailkatuak ditugu.

1.TAULA			2.TAULA		
Salmentak 10^9 $-tan	klase--ordezkaria	Enpresen kopurua	Salmentak 10^9 pta.-tan	klase--ordezkaria	Enpresa--kopurua
≥ 25	40	24	≥ 60	200	26
$25 > x \geq 15$	20	25	$60 > y \geq 40$	50	23
$15 > x \geq 12$	13,5	19	$40 > y \geq 30$	35	21
$12 > x \geq 9$	10,5	32	$30 > y \geq 24$	27	30

Honakoa eskatzen da:
1) Pareka ezazu, Lorenz-en kurben eta Gini-ren indizeen bidez, bi banaketetan dakusagun salmenten kontzentrazio-maila erlatiboa.
2) Komenta itzazu, laburki, lortutako emaitzak.
Munduko estatu-talde baterako edo estatu bakar baterako daukagun kontzentrazio--maila erlatiboa berdintsua izango al da?

12.- Ondoko taulan, urte bakoitzean herrialde batek azken 20 urteetan izan dituen euri--egunak ditugu.

125	200	115	135	108	150	95	98	140	85
115	175	140	97	180	65	170	150	110	143

Honakoa eskatzen da:
1) Taldeka itzazu datuak [50;100), [100; 125), [125; 150), [150; 200) taldeetan eta aurkez ezazu, grafikoki, datu taldekatu hauen banaketa.
2) Azter ezazu urte desberdinetako totalaren kontzentrazioa, Lorenz-en kurba eta Gini-ren indizearen bidez.
3) Komenta ezazu, laburki, 1) ataleko grafikoak eta 2) alaleko adierazleek banaketa honi buruz ematen diguten informazioa.

15.- Bi herrialdetan lortutako errentaren banaketak, honako hauek dira:

13.- Famili aurrekontuen inkestaren arabera, herri bateko familiak honela banatzen dira.

Sarrera-tarteak	Klase-ordezkaria	Familien ehunekoa
$0 \leq x < 10$	6	%50
$10 \leq x < 30$	20	%40
$30 \leq x \leq 200$	90	%10

Honakoa eskatzen da:

1) Banaketaren histograma.
2) Medianaren estimazioa eta interkuartil-ibiltartea.
3) Gini-ren indizea.
4) Komenta itzazu sarrera-banaketaren ezaugarriak.

14.- Udondoko BILMA enpresaren nomina-zerrendan zortzi milioi pezeta honela banatzen dira:

500.000	pta.	guztira	5 administrari
1.600.000	"	"	20 espezialista
400.000	"	"	gerentearen soldata
800.000	"	"	4 zerbitzu-zuzendari
800.000	"	"	5 lantegi-maisu
1.400.000	"	"	lehen mailako 10 ofizial
2.000.000	"	"	bigarren mailako 20 ofizial
500.000	"	"	10 peoi

(maila berdina dauketenek berdin irabaziz)

Honakoa eskatzen da:

1) Aurkez ezazu Lorenz-en kurbaren bidez, enpresa honen soldaten kontzentrazioa.
2) Berari dagokion Gini-ren indizea.
3) Komenta itzazu 1) eta 2) ataletan lortutako emaitzak.

Oharra: Ahal den zero gutxien erabiliz lan egitea komeni da.

17.- TAMEC enpresako 50 langileen alokairuak honela banatzen dira:

2. ZENBAKI INDIZEAK

ADIERAZBURUAK

2.1.- Herri batean egindako inkesta baten ondoren, prezio-segida hauek lortuko dira urte bakoitzeko pezetatan:

Urteak	Ardoa (litroa)	Okela (kg.)	Arrautzak (dozena)	Gurina (1/2kg.)
1.977	40	310	30	100
1.978	45	390	45	150
1.979	50	450	60	175
1.980	80	550	90	250

1.977. urtea oinarritzat harturik, atera ezazu indizeen segida bakarra kontsumo--ondasun multzo horren prezioen eboluzioa ikusteko, indizearen hautaketa arrazonatuz.

2.2.- Ondoko taulan datuak milaka tonatan adierazten dira.

URTEAK	Bakailao eta kidekoak	Sardina eta kidekoak
1.965	282	249
1.966	312	220
1.967	349	197
1.968	350	194
1.969	297	185

Honakoa eskatzen da:

1) Kalkula itzazu ahal dituzun indizeak.

2) Komenta itzazu laburki indize hauek dituzten eragozpenak.

2.3.- Ondoan ditugu bi estatutara "baterako elkarteen" bidez esportatutako itsasuntziak, 1.980-1.985 bitartean urteko tartea kontutan harturik.

URTEAK	1.980	1.981	1.982	1.983	1.984
Irlandara	3	7	7	8	9
Erresuma Batura	5	28	53	54	48

Honakoa eskatzen da:

1) Kalkula itzazu ezagutzen dituzun indizeak, (1.980. urtean oinarriturik), bi estatu hauetara esportatutako itsasuntzien eboluzioa aztertzeko.
2) Azter itzazu emaitzak, lortutako indizeak parekatuz eta berauek erabiltzearen egokitasuna aztertuz.

2.4.- Hiri batean zinetokietako sarreren batezbesteko prezioak aztertu ondoren, emaitza hauek ditugu (1.978-1.981) urte tarterako.

	Estreinaldiko filmeak		Berrestrenaldiko filmeak	
URTEA	Zinetoki--kopurua	Batezbesteko prez. (pta.)	Zinetoki--kopurua	Batezbesteko prez. (pta.)
1.978	6	125	20	40
1.979	7	150	18	70
1.980	8	175	16	100
1.981	9	200	14	130
1.982	10	250	12	160

Honako eskatzen da:

Bost urte horietako ondoko PREZIO-INDIZE KONPLEXUAK, filme-prezioen eboluzioa oro har ikus ahal izateko.

1) Batezbesteko aritmetiko eta agregatu sinplearen metodoak erabiliz (oinarria = =1.978). Komenta itzazu laburki metodo hauek, lortu dituzun emaitzekin erlazionatuz.
2) Laspeyres eta Paasche-ren indizeak (oinarria = 1.978). Zergatik dira desberdinak bi emaitzak?
3) 1.982. urtean segida berria eraiki nahi dugu 1.981. urtean oinarriturik. Kalkula itzazu: oinarri berriarekiko 1.982. urteko indizea eta aurreko urteetakoak lotura eragiketaren bidez.

2.5.- Automobilgintzan diharduen enpresa batek bi auto-mota kaleratzen ditu; "A" eta "B" motakoak alegia.

1.979-82 urteetako produkzio-indizea ateratzeko ondoko datuak ditugu.

	"A" MOTA		"B" MOTA	
URTEA	Prezioa/unitatea milaka pezetatan	Salmentak milaka unitatean	Prezioa/unitatea milaka pezetatan	Salmentak milaka unitatean
1.979	700	300	450	400
1.980	800	350	600	425
1.981	950	270	600	600
1.982	1.200	150	600	500

Honakoa eskatzen da:

1) Paasche-ren prezio eta kopuru-indizeak, 1.979. urtean oinarriturik.
2) Lortutako emaitzak interpretatzea, zein ondorio aterako zenituzkeen azalduz.

2.6.- Merkatu konkretu batean 3 labaingarri-motari dagozkien prezio (pezetak/litro) eta kantitateen (milaka tonatan) eboluzioa ikusteko, hiru urtetako datu hauek ditugu:

	W labaingarria		X labaingarria		Y labaingarria	
URTEA	P	K	P	K	P	K
1.980	30	4	40	2	20	5
1.981	20	4	50	2	40	4
1.982	30	4	60	1	80	10

Honakoa eskatzen da:

1) Prezio-indizeen segida, batezbesteko aritmetiko sinplearen metodoaz, 1.980. urtea oinarritzat harturik.
2) Prezio-indizeen segida, batezbesteko agregatu sinplearen metodoaz, urte bera oinarritzat harturik.
3) Laspeyres eta Paasche-ren prezio-indizeak, urte bera oinarritzat harturik.

2.7.- Mykran Elkarte Anonimoak bi kalkulagailu-mota kaleratzen ditu: 16-C eta 43-E motak, alegia. Beren prezio-segidak (milaka pezetatan) eta saldutako kantitateenak (milaka unitatetan) taula honetan aurkitzen dira:

	16-C		43-E	
URTEA	P	K	P	K
1.980	8	1	10	4
1.981	9	2	10	3
1.982	10	3	10	2
1.983	11	4	10	1

1) Lor ezazu Laspeyres-en prezio-indizeen segida, 1.980. urtean oinarriturik.
2) Berrizta ezazu segida hori 1.982. urtea oinarritzat harturik eta egin ezazu lotura eragiketa.

2.8.- 1) 1.970. urtea oinarritzat harturik, kalkula itzazu Laspeyres-en indizea prezioetarako eta Paasche-ren indizea kopuruetarako ondoko datuen bidez:

	A ONDASUNA		B ONDASUNA	
URTEAK	Kop.	Prez.	Kop.	Prez.
1.970	3	2	5	2
1.971	4	2	6	3
1.972	5	3	4	3
1.973	6	4	5	3

2) 1.972. urtea oinarritzat harturik, berritu ezazu 1.973 urtekoa, eta kalkula itzazu 1.970 eta 1.971. urtekoak, lotura eragiketa erabiliz.

3) Zein eragozpen du loturak?

2.9.- Eskualde batean gurina eta gaztari dagozkien kopuruak eta prezioak ondokoak dira:

	1.983		1.984	
	P	K	P	K
Gurina	150	100	165	105
Gazta	100	200	120	300

Honakoa eskatzen da:

1) 1.984. urterako prezio-indize sinpleak ondasun bakoitzerako, 1.983. urtean oinarriturik.
2) Ondoko prezio-indize konplexuak 1.984. urterako, 1.983. urtean oinarriturik:
   a) Batezbesteko agregatuaren metodoaz eta batezbesteko aritmetikoaren metodoaz.
   b) Laspeyres, Fisher eta Paasche-renak. Komenta itzazu laburki lortutako adibide edo adierazburu honentzako indizeen egokitasuna.

2.10.- Ondoko taulan, azido batzuei dagozkien saldutako kopuruak eta prezioak dauzkagu.

	Berezko azidoa		Azido sintetikoa	
URTEA	Pta/litro	10^6 litro	Pta/litro	10^6 litro
1.978	2	5	4	1
1.979	5	4	4	3
1.980	10	3	5	4
1.981	20	2	5	6

Kalkula itzazu ondoko prezio-indize konplexuak.

1) Batezbesteko agregatua sinplearen metodoaz eta batezbesteko aritmetiko sinplearen metodoaz, lau urteetako segidarentzat eta 1.978. urtean oinarriturik.
2) Laspeyres-en eta Paasche-ren indizeak lau urteetako segidarentzat eta 1.978. urtean oinarriturik.
3) Laspeyres-en eta Paasche-ren beste bi segida 1.980. urtean oinarriturik, 1.981. urteko indizeak berrituz eta 1.978 -1.979. urteetakoak lotura eragiketaren bidez.

2.11.- Herrialde batean Kontsumo-Prezioen Indizea kalkulatzeko, "erosketa-otarrea" hiru artikuluren ondoko proportzioz osatuta dago:
"A" artikulua: % 35 "B" artikulua: % 40 "C" artikulua: % 25

Artikulu hauen prezioei buruzko datuak 1.976. eta 1.982. urtekoak ditugu:

URTEA	A	B	C
1.976	12	7	13
1.982	24	10	15

Honakoa eskatzen da:

1) 1.982. urteari dagokion (K.P.I.) Kontsumo-Prezioen Indizea 1.976. urtea oinarritzat harturik.
2) Bere esangura adieraztea.

2.12.- a) Azal itzazu, indize sinple eta konplexuen arteko desberdintasunak. Baita ponderatu eta ez-ponderatuen artekoak ere.

Zein indize erabil daiteke ondasun batzuk neurri desberdinetan adierazi badira?

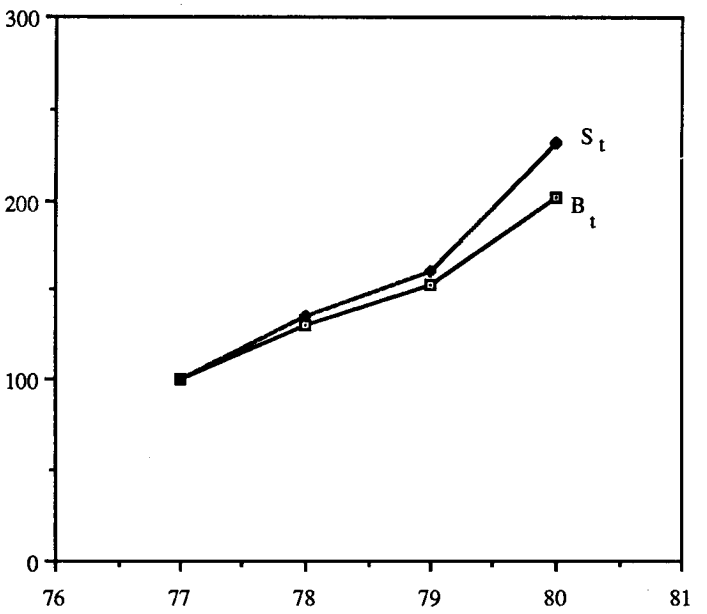
b) Kalkula ezazu kontsumo-prezioen indizea ondoko datuen bidez.

		Prezioak	
Ondasunak	Kopuruak	1.969	1.979
A	80	8	7
B	40	10	14
C	30	5	11
D	50	20	25

EBAZPIDEAK

2.1.

$B_{t,77}$	$S_{t,77}$
100	100
131	135
153	161
202	232



Kantitate-unitateak ("litro ardoa", "kiloerdi gurina",...) proportzio horretan erosketa tipiko mota bat izango balira, batezbesteko agregatua izango litzateke indizerik egokiena. Horrela ez balitz, batezbesteko aritmetikoa izango litzateke. Adierazpide grafikoan, B_t polikiago hazten dela argiro ikusten da.

Gertatzen dena hau da: okela gutxiago garestitzen dela eta B_t indizeak askoz pisu handiago ematen diola beste hiru produktuei batera baino: (310) ; (40+30+100).

2.2.

1) Urteak	I_t(B)	I_t(S)	S_t	B_t
1.965	100	100	100	100
1.966	110,6	88,4	99,4	100,2
1.967	123,8	79,1	101,4	102,8
1.968	124,1	77,9	101,0	102,4
1.969	105,3	74,3	89,8	90,7

2) Bi arrain-mota neurri berdinetan neurturik daudenez, agregazioa egin ondoren B_t metodoa aplika daiteke. Dena dela, indize honek zentzu handiagoa edukiko luke agregatu horretan arrain-mota guztiak edo arrain urdinak kontsideratuko balira.

Batezbesteko aritmetikoak 1:1 ponderazioa eta agregatuak 282:249koa ematen die indize sinpleei.

S_t nahiz B_t indizeak ponderazio gabekoak izatearen eragozpena daukate, hau da, arrain-mota horiei ez zaie garrantzi ezberdinik ematen merkatuan dauzkaten prezioen arabera.

2.3.

1) Urteak	I_t(IR)	I_t(EB)	S_t	B_t
1.980	100	100	100	100
1.981	233,33	560	396,66	437,5
1.982	233,33	1.060	646,66	750
1.983	266,66	1.080	673,33	775
1.984	300	960	630	712,5

2) Bi estatuetara esportatutakoaren ibilbidea ikusi nahian S_t, B_t indizeak atera ditugu. Biek ezponderatuak izatearen eragozpena daukatela kontutan harturik, honakoa esan dezakegu:
B_t indizearen balioak altuagoak dira Erresuma Batura esportatutako itsasuntziak urtez urte askoz gehiago direlako.
Hau da, aldez aurretik guretzat bi estatuek garrantzi berdina badaukate, S_t izango da indizerik egokiena.
Aldiz, Erresuma Batuari garrantzi handiagoa eman nahi badiogu, B_t aukeratu beharko dugu; balio agregatuetan Erresuma Baturako balioak garrantzitsuagoak baitira.

2.4.

1) $S_{t,78}$	$B_{t,78}$
100	100
147,5	133
195	166
242,5	200
300	248,5

2) $L^p_{t,78}$	$P^p_{t,78}$
100	100
148	145
197	183
245	215
303	255

3) S_t indizeak estrenaldi/berrestrenaldi erlazioari 1:1 proportzioko garrantzia ematen dio
B_t indizeak 125:40koa
L_t " 750:800koa (S_t-tik oso hurbila)
P_t indizearen proportzioa aldatzen doa, estrenaldiko zinetokien pisua handiagotuz, prezioen gorakada txikiagoa jasaten dutelarik.

4) $L_{t,82}$	$P_{t,82}$
41	46
60	67
81	85
100	100
124	124

2.5.

1) $P^p_t = 100$	122,64	134,31	145,45
$P^k_t = 100$	111,46	117,43	80

2) Prezio-indizeak, ondoko gehikuntzak ditu:
(% 22,6, % 34,3, % 45,5) lehenengo urtean, bi lehenengoetan eta hiru urteetan, hurrenez hurren.

Gehikuntza hauek "A" motak pairatzen duen prezioen igoeretan oinarritzen dira; "B" motaren prezioa ia konstante geratzen bait da.

Kopuru-indizeak, ordea, gehikuntza hauek ditu:
(%11,1, %17,4, %-20), hurrenez hurren. 1.980. urtean indizearen ibilbide gorakorra hautsi egiten da, azkeneko urtean saldutako kopuruek (batez ere, "A" motakoek) beherapen handia daukatelako.

1),2)

S_t^p	B_t^p
100	100
130	121
216	188

3)

L_t	P_t
100	100
126	121
213	272

2.7.

1) $L_{t,80}$ = 100 102 104 106,25
2) $L_{t,82}$ = (96 98) 100 106

$L_{83,82}$-k ia $L_{83,80}$ harrapatzen du, zeren eta ponderazio berriak (82an balioak: 30 eta 20) askoz garrantzi handiago ematen bait dio 16-c motari 80. urtekoak baino (80an balioak: 8 eta 40), eta 16-c da denbora-tarte horretan garestitzen dena.

2.8.

1) $L_{71}^p = 131,25$ $P_{71}^k = 123,8$
$L_{72}^p = 150$ $P_{72}^k = 112,5$
$L_{73}^p = 168,75$ $P_{73}^k = 144,4$

2)

	L_t^p(oinarria = 1.972)	P_t^k(oinarria = 1.972)
1.970	66,66	88,88
1.971	87,5	110
1.972	100	100
1.973	118,51	121,8

2.9.

1) I_{84} (Gur.) = 110
   I_{84} (Gazta) = 120

2) a) $B_{t,84} = 114$ $S_{t,84} = 115$
   b) $L^P_{84,83} = 115,7$ $P^P_{84,83} = 116,5$ $F^P_{84,83} = 116,1$

Dakigunez, indize sinpleek ondasun bakoitzaren eboluzioa ikusterazten digute.

B_t, S_t indize konplexuek, ordea, ondasun-multzoaren eboluzioa, baina ponderatu gabe.

L^P_t, P^P_t, F^P_t indize konplexu ponderatuek kantitateen arabera prezioei garrantzia ematen die.

Kasu honetan kopuruen eboluzioa ikusirik (gurinarena bikoiztu eta gaztarena, aldiz, hirukoiztu egiten dira) Paasche-ren indizea Laspeyres-ena baino egokiagoa da; indize honek, indizea kalkulatzen den urterako ditugun kopuruak hartzen bait ditu ponderatzeko.

Fisher-en indizea, beti da egokia beste bien batezbesteko geometrikoa bait da.

2.10.

1) B_t : 100 150 250 416,7
   S_t : 100 175 312,5 708,35

1.978. urtean, azido sintetikoaren prezioa bikoitza izanik, B_t indizeak ez du S_t indizeak bezain ondo berezko azidoak eduki duen gehikuntza ikusterazten (lau urteetan, bider 10 biderkatu bait da prezioa).

2) $L^P_t = 100$ 207,14 392,8 750
   $P^P_t = 100$ 160 227,27 250

Indize hauen emaitzak, hain desberdinak, kopuruen eboluzioak ikusirik eta oinarrizko 5 : 1 ponderazioa Laspeyres-engan finkoa izanik uler daitezke.

3) $L^P_{t,80}$: 25,45 52,73 100 160
   $P^P_{t,80}$: 44,00 70,40 100 140

2.11.

1) 157,6

2) $I_A = 200$, $I_B = 143$, $I_C = 115$ indize sinpleak izanik, hauen batezbestekoa "erosketa--otarrearen" portzentaien arabera ponderatuta lortzen da indizea.

2.12.

2) $\frac{2.700}{2.190} 100 = 123,28$

Honen arabera, hamar urte horietan prezioak % 23,28 gehitu direla esan daiteke.

BESTE ADIERAZBURU BATZUK

1.- Pentsa dezagun ohizko unitateetan eman diren ondoko informazio-estatistikaz baliatzen garela:

	A		B		C	
	kop.	prez.	kop.	prez.	kop.	prez.
1.976	5	4	2	2	2	4
1.977	3	5	4	6	3	6
1.978	2	6	4	10	5	8

1.976. urtea oinarritzat harturik, honakoa eskatzen da:

1.- Prezio-indize sinpleak, hiru ondasunen kasuan.

2.- Laspeyres, Paasche eta Fisher-en prezio-indize konplexu ponderatuak.

2.- Zein indize kalkula daitezke, litro bat olio, ehun gramo gurin, litro bat esne eta dozena bat arrautzari dagozkien prezio-segidak 1.970 -77 urte-tartean ondokoak badira?

Urteak	O	G	E	A
1.970	54	20	17	43
1.971	58	27	18	45
1.972	60	30	19	50
1.973	62	31	20	53
1.974	67	34	23	56
1.975	70	36	28	61
1.976	74	37	31	64
1.977	80	40	32	70

3.- Azkeneko hiru urteetarako eta hiru traktore-motetarako prezio-indize sinpleak, 1985. urtean oinarriturik ondokoak dira:

Urteak	Elberfeld	Trasmoto	Hakodate
1985	100	100	100
1986	200	125	66,66
1987	400	150	100

Mota bakoitzetik saldutako traktoreak eta 1985. urtean egindako prezioak hauexek dira:

Elberfeld 5.000 traktore 2 milioi pta / traktore
Trasmoto 2.000 traktore 4 milioi pta / traktore
Hakodate 4.000 traktore 3 milioi pta / traktore

Honakoa eskatzen da:

1) Kalkula itzazu Laspeyres-en baterako prezio-indizeak 1986 eta 1987 urteetarako, merkatu horretan.
2) Komenta itzazu lortutako emaitzak.
3) Komenta ezazu, Laspeyres-en indizeen segidan aldaketa zein izango litzatekeen, oinarri den urterako Elberfeld traktorearen kopurua eta prezioa ondokoak izan balira:
   Elberfeld 10.000 traktore 2 milioi pta / traktore.

4.- Ondoko taulan, bi desinfektagarriren prezioak eta kopuruak ditugu.

	MIXER		STAKER	
Urtea	pta / kg	Tm	pta / kg	Tm
80	250	50	800	200
81	500	60	700	300
82	800	80	1.000	200
83	1.400	100	800	150
84	2.000	100	900	100
85	2.500	90	1.000	100

Honakoa eskatzen da:

1) Laspeyres eta Paascheren kopuru-indizeak 1980. urtean oinarriturik.
2) Oinarri berria 1984. urtea izanik. Berritu ezazu indizea, 1985. urterako eta atera ezazu beste urteetarako lotura eragiketaren bidez.

5.- Ondoan, hiru eraikuntz materialen prezio eta kopuruak ditugu

	A		B		C	
	pta. / kg	Tm.	pta. / kg	Tm	pta. / kg	Tm
1975	10	1	20	1	20	2
1985	20	5	20	3	10	2

a) Kalkula itzazu ondoko prezio-indize konplexuak, 1975. urtean oinarriturik: batezbesteko aritmetikoaren metodoaz, batezbesteko agregatuaren metodoaz, Laspeyres, Paasche eta Fisher-en metodoaz.
b) Aurreko indizeak, baina 1985. urtean oinarriturik, datuen bidez kalkulatuz, hau da, ez lotura eragiketaren bidez.
d) Komenta itzazu lortutako emaitzak.

6.- Biltegi baten urteroko salmenta-zifrak, ehunekotan aurreneko urtearekiko, 1982-1986 tarterako ondoko taulan ditugu.

Urteak	$\frac{\text{Salmentak t. urtean}}{\text{Salmentak t}-1\text{. urtean}} \times 100$
1982	118
1983	104
1984	98
1985	96
1986	100

1981. urtean salmentak 1.000 milioi pezetakoak izan zirela jakinik:

Honakoa eskatzen da:
a) Salmenta-zifrak urte bakoitzerako.
b) Salmenten indizea urte bakoitzerako 1981. urtean oinarriturik, hots, indizea 1981. urtean =100 izanik.
d) Urteroko batezbesteko hazkunde-tasa tarte horretako salmentetarako.

7.- Merkatu batean, ondoko datuak lortu ditugu:

	"A" Ondasuna		"B" Ondasuna	
	Prezioa	Kopurua	Prezioa	Kopurua
1970	10	1	30	3
1980	20	2	50	2
1990	X	3	100	1

Honakoa eskatzen da:
1) Zenbatekoa izan beharko du X-en prezioak ondoko berdintasuna egiaztatzeko?.
$L^P_{90,\,70} = 2\,L^P_{80,\,70}$
2) Gauza bera Paasche-ren indizerako.
3) Gauza bera Fisher-en indizerako.
4) Lor ezazu batezbesteko hazkunde-tasa 1980-1990 tarterako, aurreko kasu bakoitzean.

8.- Ondoko datuak emanik:

	A artikulua		B artikulua	
	pta. / unitate	milaka unitate	pta / unitate	milaka unitate
1981	20	5	200	2
1986	100	q_A	250	q_B

Honakoa eskatzen da:

1) Zenbat balio beharko lukete q_A eta q_B kopuruek 1986. urteko 1981. urtearekiko Laspeyres eta Paascheren prezio indizeak berdinak izan daitezen?.
2) Zenbat balio beharko lukete q_A eta q_B kopuruek 1986. urteko 1981. urtearekiko Paascheren indizea Laspeyres-ena baino doblea izan dadin?.
   Zenbat balioko luke Fisher-enak kasu honetan?.

9.- Bilbo, Sevilla, Bartzelona hirietan hiribuseko txartelen-prezioek ondoan adierazten den eboluzioa eduki dutela suposatuz:

Urteak	Bilbo	Sevilla	Bartzelona
1965	5	3	7
1980	25	20	15

eta txartelen salmenta totalen balioa, 1965.urtetako, 400 milioikoa Bilbon, 198 milioikoa Sevillan, 840 milioikoa Bartzelonan izan zirela jakinik:

Honakoa eskatzen da:

1) Laspeyres-en prezio-indizea 1980.urterako 1965.urtean oinarriturik. Zer azaltzen du indize honek?
2) Kalkula ezazu urteroko batezbesteko hazkunde-tasa Bilboko hiribusen txartelen kasuan.

10.- Ondoko taulan eskualde batean saldutako hiru elektrogailu-ereduren prezio eta kopuruen segidak ditugu.

	HG - 1		HG - 7		HGT - 0	
Urteak	10^4pta./un.	10^3 un.	10^4pta./un.	10^3 un.	10^4pta./un.	10^3 un.
1983	2	10	5	12	10	3
1984	2	12	6	10	11	2
1985	3	15	x	y	12	3
1986	4	20	7	6	12	1
1987	4	18	8	5	13	2

1) 1985. urterako 1983. urtearekiko Laspeyres eta Paasche-ren prezio-indizeen balioak ondokoak izanik:

$$L^{P}_{85,83} = 125,4 \qquad P^{P}_{85,83} = 130,6$$

kalkula ezazu HG-7 ereduaren prezio eta kopurua.

2) Kalkula itzazu Laspeyres eta Paasche-ren prezio-indizeak beste urteentzat, lortutako bi segideen desberdintasunak aztertuz.

3) Kalkula ezazu batezbesteko hazkunde-tasa (metakorra) 1983-1987 urte tarterako eta HG-1, HG-7, HGT-0, ereduen salmentena hurrenez hurren.

11.- Lantegi batean hiru automobil-mota egiten dira. Azkeneko hiru urteetan produzitutako unitateak eta lortutako prezioak, ondokoak izan dira:

	1986		1987		1988	
Mota	p	k	p	k	p	k
205	5	32	6	41	6	56
309	7	42	6	30	8	43
405	9	23	9	24	8	20

Honakoa eskatzen da:

1) 1987, 1988 urteetarako 1986. urtean oinarriturik Laspeyres-en kopuru-indizea.

2) Berritu 1988. urtearen indizea, 1987. urtea oinarritzat harturik, eta lor ezazu 1986. urterakoa lotura eragiketaren bidez.

3) Atera ezazu 205 motaren balioaren batezbesteko hazkunde-tasa, 1986-1988 urte tarterako.

EZAUGARRI ESTATISTIKO BAKUNAK ETA ZENBAKI INDIZEAK

Propietate teorikoei buruzko galderak

1.- Ondoko informazioa: "Esferak bere zirkulu handiena baino lau bider azalera haundiagoa dauka" informazio estatistikoa al da?.

Arrazona ezazu.

2.- Zergatik, klaseen zabalera ezberdina denean ezin ditugu maiztasunak altuerak bezala hartu histograma egiterakoan?

3.- Noiz esaten dugu Estatistika Deskribatzailean aldagai estatistikoa jarraia dela?. Eta noiz diskretua dela?

4.- Zergatik populazio-piramidea egiterakoan, laukizuzenen azalerak maiztasun erlatiboen totalarekiko (bi sexoena) proportzionalak egiten dira?. Zergatik?.

Eta adin-tarteak ezberdinak direnean, zergatik laukizuzenen luzerak, klaseak aurkezterakoan, ezin dira maiztasunekiko proporzionalak izan?

5.- Froga ezazu: $m_2 = a_2 - a_1^2$, m_h h. ordenako batezbestekoarekiko momentu zentratua eta a_h, h. ordenako momentu arrunta izanik.

6.- a) Atera ezazu m_h momentu zentratuaren adierazpena momentu arrunten bidez. (Egin daiteke m_4 momenturako).

b) Banaketa bakun baten batezbestekoa eta aldakuntz koefizientea+1 eta, halaber, asimetri koefizientea-1 balio dutela jakinik, atera itzazu a_0, a_1, a_2, a_3 momentuak.

7.- Zein izango da banaketaren moda, ondokoa gertatzen bada?

$n_1 = n_2 = ... = n_m$

Zein izango da banaketa jarrai baten mediana, ondokoa gertatzen bada?

$$N_i = \frac{N}{2}.$$

8.- Bi banaketen sakabanatzeak parekatu nahi baditugu, zein da erabili behar dugun estatistikoa?. Zergatik?.

9.- Froga ezazu:

$$m_3(X) = a_3(X) - 3\bar{x}a_2(X) + 2\bar{x}^3$$

10.- Lor ezazu U = X+Y+Z aldagaiaren batezbesteko aritmetikoa, X, Y, Z aldagaien batezbestekoen funtzioan.

11.- Atera ezazu, formula orokorra ondorioztatuz, aldagai baten transformazio linealak bariantzan eta desbidazio tipikoan daukan eragina.
Ondoko maiztasun-banaketa emanik:

x_i :	100.000	100.500	101.000	101.500	102.000
n_i :	10	12	9	20	15

Zein transformazio lineal egingo zenuke bariantzaren kalkulua errazteko?

12.- Zergatik multzo baterako ditugun aldagai tipifikatu baten balio guztiek ezin dute -10 eta -1 balioen artean egon?.

Eta egon al daitezke guztiak -1 eta +1 balioen artean?. Zergatik?.

13.- Zergatik Giniren indizearen balioak ezin du 1 baino handiagoa izan?

14.- Nolakoa behar du izan banaketak Giniren indizearen balioa zero izan dadin?.

Froga ezazu:
(i) Giniren kontzeptutik abiaturik.
(ii) Erabiltzen dugun gutxi gorabeherako formulatik abiaturik.

15.- Komenta ezazu ondoko baieztapena:
"Multzo batean indibiduoen errentak oso sakabanatuta daude", "multzo berean errenta totalaren banaketa oso kontzentratuta dago".

16.- 1) Kalkula ezazu $I_{t+k,0}$, $t+k$ unearen 0 unearekiko indize sinplea, honako indize hauek jakinik: $I_{t+k,t} = 102$, $I_{t,o} = 105$.

17.- Froga ezazu, Paascheren kantitate-indizea kantitateen indize sinpleen batezbesteko aritmetiko ponderatu bezala aurkez daitekeela.

18.- Laspeyres-en prezio- eta kopuru-indizeak eta balio-indizea jakinik nola lor daitezke Paasche-ren prezio- eta kopuru-indizeak?

19.- Ondokoak, 1988.urterako 1985.urtean oinarriturik, hiru ondasunen prezio-indize sinpleak dira:

$I_{88,85}(A) = 150$ $I_{88,85}(B) = 135$ $I_{88,85}(D) = 120$

Halaber, kontsumitu diren balioak oinarri denbora 2,3, 1 bilioi pta. hurrenez hurren izanik, kalkula ezazu Laspeyres-en prezio-indizea. Zer adierazten digu indize honek?

20.- Batezbesteko Agregatu Sinplearen indizearen eta Laspeyres-en kantitate-indizearen adierazpen orokorretatik abiatuz, lor itzazu indize konplexu hauen adierazpenak indize sinpleen batezbesteko ponderatu bezala.

1) Zein kopuru-indizerekin da bateragarria Laspeyres-en prezio-indizea?. Froga ezazu erantzuna.

21.- Froga itzazu:

1) $\frac{I_{t,o}}{100} = \frac{1}{\frac{I_{o,t}}{100}}$ 2) $\frac{L^P_{t,o}}{100} \neq \frac{1}{\frac{L^P_{o,t}}{100}}$ 3) $\frac{F^P_{t,o}}{100} = \frac{1}{\frac{F^P_{o,t}}{100}}$

3. EZAUGARRI ESTATISTIKO BIKOITZAK

ADIERAZBURUAK

3.1.- Ondoko taula hau emanik:

X \ Y	2	4	6
1	10	0	60
3	20	5	10
5	10	70	15

Honakoa eskatzen da:
1) Y = 4 baldintzatutako maiztasun erlatiboen banaketa.
2) X eta Y aldagaiek, maiztasun banaketa independentea ahal dute? Zergatik?
3) Koerlazio-matrizea

3.2.- Ondoko taulan X, Y aldagaien 1.971-1.980. urte tartearentzako balioak ditugu.

X: 1.970. urtearekiko farmazi sektorearen inbertsioen koefiziente biderkatzailea.
Y: 1.970. urtearekiko inbertsio-errendimenduen koefiziente biderkatzailea.

Y: 0'5	0'1	0'4	0'9	1'1	2'1	3'2	4'6	8'8	3'9
X: 2'0	3'8	2'5	2'6	3'1	2'2	1'2	1'3	2'6	6'8

Honakoa eskatzen da:
1) (X,Y) aldagai estatistiko bikoitzaren adierazpide grafikoa.

Grafikoa ikusirik, arrazona ezazu X, Y-ren artean zure ustetan dagoen koerlazio--mailaz (sakona, ahula, ertaina, gutxi gora behera zero....)

2) Lor ezazu koerlazio-koefiziente lineala eta komenta ezazu emaitza.

3.3.- Euskal Herriko lau probintzia hauen kasuan, X aldagaiak populazio-igoera ematen digu ehunekotan 1.973-1.976 tartean eta Y aldagaiak "per capita" famili errentaren igoera urte-tarte berean.

	X	Y
ARABA	6	49
GIPUZKOA	2'5	46
NAFARROA	1	43
BIZKAIA	3'5	44

Honakoa eskatzen da:

1) Sakabanatze-diagrama edo puntu-hodeia.
2) X eta Y aldagaien batezbestekoak edo desbidazio tipikoak.
3) (X,Y) aldagaien kobariantza eta koerlazio-koefizientea emaitzari irazkinak edo komentarioak eginez.

3.4.- Zein da koerlazio-koefizientearen balioa, ondoko maiztasun absolutuen taula bakoitzerako?

X \ Y	y_1	y_2
x_1	3	0
x_2	0	2

X \ Y	y_1	y_2
x_1	0	1
x_2	1	0

X \ Y	y_1	y_2
x_1	1	2
x_2	2	4

Hiru taula hauetan $x_1 < x_2$ eta $y_1 < y_2$ dira.

3.5.- Ondoko taulan, maiztasun-banaketa bat ematen da.

X \ Y	1	2	3
10	0	4	10
11	5	9	1
12	9	2	0

1) Lor itzazu bazter-banaketak eta banaketa-baldintzatu guztiak.
2) U, V aldagaiak honela ateratzen badituzu:
   $X = Ua + b$, $Y = Ve + f$
   zein da S_{xy} eta S_{uv} kobariantzen arteko erlazioa?
3) Kalkula ezazu koerlazio-koefizientea, laburrena den kalkulua eginez.

3.6.- Populazio konkretu batean (X,Y) aldagai estatistiko bidimentsional baten banaketari dagokionez, ondoko momentuak ezagutzen dira:

$a_{10} = 5$ $a_{01} = 8$ $a_{20} = 27$ $a_{02} = 69$ $a_{11} = 43$

Atera itzazu:

1) Banaketa honen batezbestekoak, bariantzak, kobariantza eta koerlazio linealaren koefizienta.
2) Populazio horretarako ere, banaketaren (U,V) aldagaiaren batezbestekoak, bariantzak, kobariantza eta koerlazio linealaren koefizientea, aldagai hori (X,Y) aldagaiarekin ondoko berdintasunen bidez erlazionatuta badago:
   $U = 10X + 10$ $V = 20Y - 10$

3.7.- (X,Y) aldagai bikoitzaren ondoko momentuak dauzkagu.

$a_{10} = 4$ $a_{01} = -3$ $a_{20} = 20$ $a_{02} = 10$ $a_{11} = -11$

Honakoa eskatzen da:

1) S_x, S_{xy}, r_{xy} estatistikoak
2) $(X + Y)$aldagaiaren bariantza, hau da, S^2_{x+y}
3) S^2_u, S_{uv}, r_{uv} estatistikoak

$U = 100 - 10X$, $V = -5Y$ izanik.

3.8.- Ondoko taulak zulatzaile izan nahi duen mila kandidaturen sailkapena ematen digu bi aldagai hauen arabera:

X : kandidatu bakoitzaren adina, urtetan emanik.
Y : bakoitzak proba batean egindako akatsen kopurua.

X \ Y	0-4	5-9	10-14	15-19
[20 ; 30)	20	100	130	50
[30 ; 40)	160	270	140	30
[40 ; 50)	20	30	30	20

Honakoa eskatzen da:

1) Y-ren X-ekiko batezbestekoaren erregresio-lerroa.
2) X eta Y-ren arteko koerlazio-koefiziente lineala.
3) Komenta itzazu 1) eta 2) ataletan lortutako emaitzak.

3.9.- Ondoko maiztasun-taulan Bizkaiko 10 udalen X, Y aldagaien balioak ditugu.

X : euskaldunen proportzioa ehunekotan.
Y : lehen sektorean lanean dihardutenen proportzioa ehunekotan.

X \ Y	30	40	80
10	1	0	0
50	2	2	1
80	0	1	3

Honakoa eskatzen da:
1) Y aldagaiaren X-ekiko eta X-en Y-rekiko batezbestekoaren erregresio-lerroak.
2) r_{xy} koerlazio-koefizientea.
3) Zein izango litzateke aldagai dependentearen bariantzaz estimatutako proportzioa X-en Y-rekiko karratu txikienen erregresio lineala egingo bagenu?
Eta zein Y-ren X-ekiko karratu txikienen erregresio lineala egingo bagenu?

3.10.- GREENFIELD HISPANIA enpresa TK-32 eultzkailu merkaturatzen ari da, azkeneko hiru urteetan 200 salmenta agenteen bidez eginez.

Zuzendaritzak, agenteen gaitasun profesionalaren aurrerapena aztertu nahian, ondoko maiztasun-taula bikoitza lortu du.

		Urtean zehar lortutako kontratuak			
		2	3	4	5
Enpresan daramatzaten urteak	1	10	20	10	0
	2	10	10	60	20
	3	0	10	30	10

Honakoa eskatzen da:
1) Bi aldagaien arteko koerlazio-koefizientea.
2) Bi aldagaien arteko erlazio-maila adieraztea.
3) Karratu txikieneko bi erregresio-zuzenak lortzea eta grafikoki adieraztea.
4) Lortutako kontratuen aldagaiak enpresan daramatzaten urteak aldagaiarekiko duen batezbestekoaren erregresioa lortzea eta grafikoki adieraztea.
5) Komenta itzazu laburki erregresio-mota bakoitzaren abantailak.

3.11.- 200 langile dituen MEZ.I lantegiko ekonomilariak produktibitatean eragina daukaten faktoreak aztertu behar ditu. Ikasketa hori hasteko 200 langileak X,Y ezaugarrien arabera sailkatu ditu.

X ezaugarriak, langileak muntaketak egiten daramatzan urte-kopurua neurtzen du. Y ezaugarriak, ordea, langileak 1.983. urtean egindako muntaketa-kopurua neurtzen du.

Y / X	$Y < 400$	$400 \leq Y < 800$	$800 \leq Y < 1200$	$1200 \leq Y < 1600$
1	20	30	0	0
2	20	30	40	0
3	0	0	40	20

Honakoa eskatzen da:

1) Langileen banaketari dagokion histograma muntaketa-kopuruaren arabera egitea.
2) Lorenz-en kurba eta Gini-ren indizea, muntaketa guztien kopuruak 200 langileen artean daukan banaketaren kontzentrazioa aztertzeko.
3) X ezaugarriaren maiztasun erlatiboen bazter-banaketa eta $Y \in [800, 1200)$ baldintzatutako X aldagaiaren maiztasun erlatiboen banaketa baldintzatua. Marraz itzazu dagozkien barra-diagramak eta azter itzazu emaitzak.
4) Lor ezazu r_{xy} koerlazio-koefizientea eta komenta ezazu lortutako balioa.
5) Lor itzazu Y-ren X-ekiko karratu txikienen erregresio lineala, batezbesteko errore koadratikoa edo hondar-bariantza eta erregresio honetan estimatzen den bariantzaren proportzioa.

3.12.- Urteko bost aste zoriz hartuta, lastozko kapelak egiten dituen enpresa batek, ondoko informazioa lortu du.

Tenperatura (gradu zentig.tan)	Egindako kapelak
10	15
5	10
25	77
20	40
30	70

Enpresa honek planifika al dezake bere produkzioa egungo duen tenperaturaren funtziotan? Zergatik?

Zure erantzuna baiezkoa izan bada, zein izango litzateke 32ºko tenperaturarentzako balio estimatua?

3.13.- $Y = 0'90X + 0'40$ Y-ren X-ekiko erregresio zuzena dela eta $S_x = 0'48$, $S_y = 0'60$, $\bar{x} = 30$ direla kontsideratuz, honakoa eskatzen da:

1) Koerlazio-koefizientea.
2) X-ren Y-rekiko erregresio-zuzena.

3.14.- Ondoko taulan, X,Y, hileroko errenta eta hileroko gastua hurrunez hurren, hiru familiatan neurtu dira milaka pezetatan.

X	Y
100	80
60	65
180	125

Honakoa eskatzen da:
1) Y-ren X-ekiko erregresio-zuzena.
2) Zein da, portzentaiatan, azaldutako bariantza?
3) Zein da 200 mila pezetako errentari dagokion estimatutako gastua?

3.15.- Hamar galsoro dituen lagin baten balio hauek ezagutzen dira:

X: uzta ondoren neurtutako errendimendu erreala eta
Y: uzta egin aurretik ikerle koalifikatu batek egindako estimazioa:

Galsoroa:	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
X:	36	36	31	30	40	36	12	16	24	28
Y:	38	30	32	28	38	42	18	20	22	26

1) Errepresenta itzazu grafikoki, (X,Y) aldagai bikoitzaren datuak.
2) Atera ezazu bi aldagaien arteko koerlazio linealaren koefizientea.
3) Y-ren X-ekiko eta X-en Y-rekiko karratu txikienen doikuntza linealak.
4) Bi erregresio-zuzen hauetan, zein da egokiena?. Arrazona ezazu erantzuna.

3.16.- Enpresa batean, egiten diren piezen diametroak eta pisuak neurtzen dira. Ondoan 5 piezen neurketak dauzkagu, eta seigarren piezaren diametroa 4m eta 10mm izan dela badakigu, baina pisuaren neurria galdu egin zaigu.

Pieza	Diametroa	Pisua
1	3 m 995 mm	114 kg
2	4 m 0 mm	118 kg
3	4 m 5 mm	120 kg
4	4 m 20 mm	122 kg
5	4 m 30 mm	126 kg

1) Zein izango da dauzkagun datuen bidez aurresan daitekeen pisua, karratu txikieneko erregresio lineala egiten badugu?
2) Eman ezazu doikuntza honen neurriren bat, zenbateraino ona den esateko.

3.17.- Ondoko taulan, bost estaturi dagozkien analfabeto-portzentaia eta jaiotzan duten bizi-itxaropena adierazten dira:

Estatuak	Analfabeto-portzentaia	Bizi-itxaropena
A	40	55
B	80	30
C	4	65
D	50	20
E	10	70

Honakoa eskatzen da:
1) Aurresan ezazu jaiotzean 75 urteko bizi-itxaropena duen estatuko analfabeto--kopurua doikuntza linealaren bidez.
2) Lor ezazu bi aldagaien arteko koerlazio-koefiziente lineala eta azal ezazu emaitza datuen arabera.

3.18.- Bizkaiko sei udalentzat balio hauek lortu dira, X_1 : (1.960-1.981) tarteko populazio-hazkuntzaren portzentaia eta X_2: populazio totalarekiko 64 urte baino gehiago duen populazioaren portzentaia izanik.

	X_1	X_2
Ermua	490	4
Zornotza	90	7
Durango	80	8
Gernika	70	11
Ondarroa	40	8
Bermeo	30	9

Honakoa eskatzen da:

1) Karratu txikienen metodoa aplikatuz, datuei ongien doitzen zaion $\hat{X}_2(X_1)$ zuzena lortzea.
2) 1.960 eta 1.981 urte-bitartean Sopelako udaleko hazkuntza % 200ekoa izan dela jakinik, estima ezazu itsasaldeko udal horretan 64 urte baino gehiago duten pertsonen portzentaia 1) atalean lortutako zuzenaren bidez.

3.19.- Hamar ikaslek M-I eta T-I asignaturetan atera dituzten notak, ondokoak dira:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
M-I:	9	7,5	3	5	7	6,5	4,5	2	8	7,5
T-I:	6,5	8	4	4,5	6,5	6	4	3	7,5	8

1) Kalkula itzazu koerlazio-koefizientea eta mugatze-koefizientea.
2) Zein proportziotan azalduko litzateke bariantza erregresio linealaren kasuan?

3.20.- X, Y aldagaietarako ondoko datuak emanez

X	0	1	2	3
Y	3	0	2	4

Honakoa eskatzen da:

1) Karratu txikienen metodoa erabiliz bigarren graduko polinomioa doitzea.
2) Hondar-bariantza eta doikuntzaren egokitasuna aztertzea.
3) Zein izango litzateke Y aldagaiaren bariantzaren mugatasunaren portzentaia, doikuntza lineala egingo bagenu?

3.21.- Ondorengo taulak X eta Y aldagaien lau pertsonentzako balioak ematen dizkigu:

X:	0	-1	+2	+1
Y:	+2	0	0	+2

Honakoa eskatzen da:

1) Lor ezazu Y-ren X-ekiko doikuntza parabolikoa, karratu txikienen metodoa erabiliz.
2) Kalkula itzazu Y-ren balio estimatuak X-en balioentzat eta hondar-bariantza.
3) Zein zitekeen hondar-bariantza doikuntza linealaren kasuan?

3.22.- Ondoko taulan agertzen diren herrietarako X_1, X_2 aldagaiak neurtu dira:

X_1: hazkuntza demografikoa portzentaiatan
X_2: Esportatutako balioa/biztanle

	X_1	X_2
Afganistan	2,5	13
Jordania	3,2	63
Turkia	2,4	36

Honakoa eskatzen da:
1) X_2-ren X_1-ekiko erregresio-zuzena eta doikuntza honen egokitasuna.
2) Erregresio-zuzen ortogonala eta baita doikuntza honen egokitasuna ere.
3) Zertan desberdintzen dira doikuntza hauek?
Azal ezazu doikuntza bakoitza, zertan oinarritzen den adieraziz.

3.23.- Ondoko taulan, X_1, X_2 aldagaien 1.976. urterako datuak ditugu.

X_1 : ospitaletako ohe-kopurua/1.000 biztanle
X_2 : kontsumitutako energiaren neurria/biztanle

	X_1	X_2
Iran	2	0,7
Irak	1,6	1,5
Israel	7,0	2,5

Honakoa eskatzen da:
1) Erregresio ortogonalaren zuzena eta adierazitako bariantza.
2) Zuzenaren gainean, estatu bakoitzari dagokion proiekzioa.
3) Egindako erregresioaren adierazpide grafikoa.

3.24.- Lau ikaslek 2. eta 3. mailako Estatistika asignaturetan lortu dituzten puntuazioak, ondokoak izanik:

2.m.E.	6	0	6	9
3.m.E.	6	6	3	9

Honakoa eskatzen da:

1) Karratu txikienen erregresio ortogonalaren zuzena.
2) Zuzen horrek estimatzen duen baterako bariantzaren proportzioa eta estimatu gabe geratzen dena.
3) Indibiduo-puntuei dagozkien zuzenaren gaineko proiekzioak.
4) Adieraz ezazu, grafikoki, egindako erregresioa.

3.25.- Hiru indibiduok osaturiko taldean, (X_1, X_2) aldagai estatistikoa neurtu da, ondoko datuak lortuz:

X_1:	1	2	3
X_2:	2	6	4

Honakoa eskatzen da:

1) Lor ezazu karratu txikienen erregresio ortogonalaren zuzena.
2) Zuzen honek estimatzen duen baterako bariantzaren proportzioa.
3) Zuzenaren gainean, hiru puntuei dagozkien proiekzioak.
4) Kalkula itzazu, halaber, hiru puntuei dagozkien hondarrak.
5) Kalkula ezazu 3. eta 4. atalean lortutako proiekzio-bektore eta hondar-bektore bakoitzaren bariantza. Baita beraien arteko kobariantza ere.

3.26.- Beren etxean lan egiten duten 50 langilerentzako X_1, X_2 aldagaiak kontutan hartu dira.

X_1 : egindako trebatze-ikastaroak
X_2 : lanaren akatsengatik idatziz jasotako kexak.

X_2 \ X_1	0	1
0	5	20
1	20	5

Honakoa eskatzen da:

1) X_2 aldagaiaren X_1-ekiko batezbestekoaren erregresio-lerroa.
2) X_2 aldagaiaren X_1-ekiko karratu txikienen erregresio linealaren lerroa, doikuntzaren egokitasuna aztertuz.
3) Bi aldagaien karratu txikienen erregresio ortogonalaren zuzena, doikuntzaren egokitasuna ere aztertuz.

3.27.- Ondoko taulan, X, Y aldagaien lau balio ikusten ditugu.

X:	0	+4	0	-4
Y:	4	2	2	0

Honakoa eskatzen da:

1) Y aldagaien X-ekiko karratu txikienen erregresio parabolikoaren lerroa.
2) Doikuntza horren hondar-bariantza eta Y aldagaiaren bariantzatik estimatzen den proportzioa.
3) Y aldagaiaren X-ekiko karratu txikienen erregresio linealaren lerroa.
4) Doikuntza horren hondar-bariantza eta Y aldagaiaren bariantzatik estimatzen den proportzioa.
5) X eta Y-ren karratu txikienen erregresio ortogonalaren zuzena, hondar bariantza adieraziz.
6) Proiektutako bariantzaren eta hondar-bariantzaren proportzioak baterako bariantzarekiko.
7) Indibiduo-puntuen f_i proiekzioak erregresio-zuzenaren gainean.
8) Indibiduo-puntuen e_i hondarrak. Egiazta ezazu, halaber, proiekzioak eta hondarrak koerlazio gabeak direla.

3.28.- Ondoko taulan, (1.961-1.965) urte bitartean batezbeste Bizkaian jausitako euri--kantitateak eta tenperaturak ditugu.

Hilak	U	O	M	A	M	E	U	A	I	U	A	A
Tenperaturak (gradutan)	8	11	11	12	15	17	20	20	19	16	11	9
Euri-kantitateak (litrotan)	120	113	88	177	68	57	32	91	104	134	180	134

Honakoa eskatzen da:

1) Zein izango litzateke karratu txikienen erregresio linealaren bidez estimatuko zenukeen euri-kantitatea hileko batezbesteko tenperatura 10 gradukoa izango balitz? Ona al da estimazioa?
2) Idatz ezazu aldagai tipifikatuen kobariantz matrizea.
3) Aldagai tipifikatuen karratu txikienen erregresio ortogonalaren zuzena.
4) Puntu tipifikatuei dagozkien zuzenaren gaineko proiekzioak.
5) Azaldutako bariantzaren proportzioa.
6) Erregresio-zuzen ortogonalean proiekzioen adierazpide grafikoa.
7) Proiekzioen koerlazio-koefizientea aldagai tipifikatu bakoitzarekin.

3.29.- Aurrezki-kutxa batean, ehun bezero dituen lagina kontsideraturik, X_1, X_2 aldagaien azterketa egin nahi da.

X_1 : kontu korronteen batezbesteko saldoa milaka pezetatan eta X_2: kutxak emandako maileguen ordaingabeko saldoak mila pezetatan emanik.
Ondoko estatistikoak lortu dira:

$$\bar{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 50 \\ 60 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{L} = \begin{bmatrix} 100 & 500 \\ & 10000 \end{bmatrix}$$

Honakoa eskatzen da:
1) Lor ezazu erregresio ortogonalaren zuzena aldagai tipifikatuentzat, ehunekotan zenbat bariantza proiektatu biltzen duen esanez.
2) Lehenengo bi bezeroak bi aldagaiekiko ondoko balioak hartzen badituzte:

i	X_1	X_2
1	40	1000
2	50	0

Zeintzuk dira erregresio-zuzen ortogonalaren gainean dauzkaten koordenatuak edo proiekzioak?

3.30.- Ondoko estatistikoak emanik:

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 8/3 & 8/3 \\ & 32/3 \end{bmatrix} \qquad \|C_1\| = 2\sqrt{2} \qquad \|C_2\| = 4\sqrt{2}$$

Honakoa eskatzen da:
1) Zenbat indibiduotan neurtu dira X_1, X_2 aldagaiak?
2) Datu-matrize zentratua lortzea, 2 eta 0 lehenengo indibiduoari dagozkion balio zentratuak izanik.
3) Zein da aldagai zentratuek osaturiko angelua?

3.31.- Hamasei indibiduo dituen populazio baterako, X_1, X_2 aldagaien desbidazio standardak ondokoak dira:

$S_1 = 3 \qquad S_2 = 5$

Bi aldagai zentratuen biderkadura eskalarra, ordea, $< C_1 \mid C_2 > = 160$ da.

Honakoa eskatzen da:

1) r_{12} koerlazio-koefizientea.

2) $\hat{X}_2$ (X_1) erregresioaren b_{21} koefizientea.

3) S_e^2 hondar - bariantza.

4) Interpreta itzazu grafikoki lortutako emaitzak.

3. EBAZPIDEAK

3.1.

1)

x_i	1	3	5
$f_{i/4}$	0	1/15	14/15

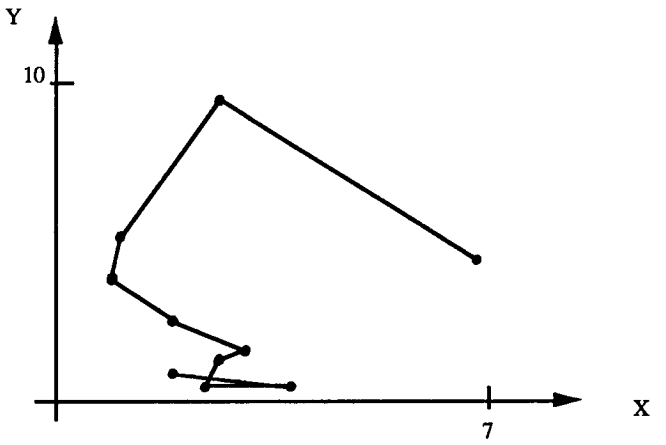
2) Ez. Dakusagunez, $f_{i/4}$ lortutako banaketa eta $f_{i.}$ maiztasun erlatiboen bazter-banaketa ez dira berdinak; ezta $f_{i/4}$ edota $f_{i/6}$ ere.

3)

$$\begin{bmatrix} 1 & -0,371 \\ -0,371 & 1 \end{bmatrix}$$

3.2.

1)



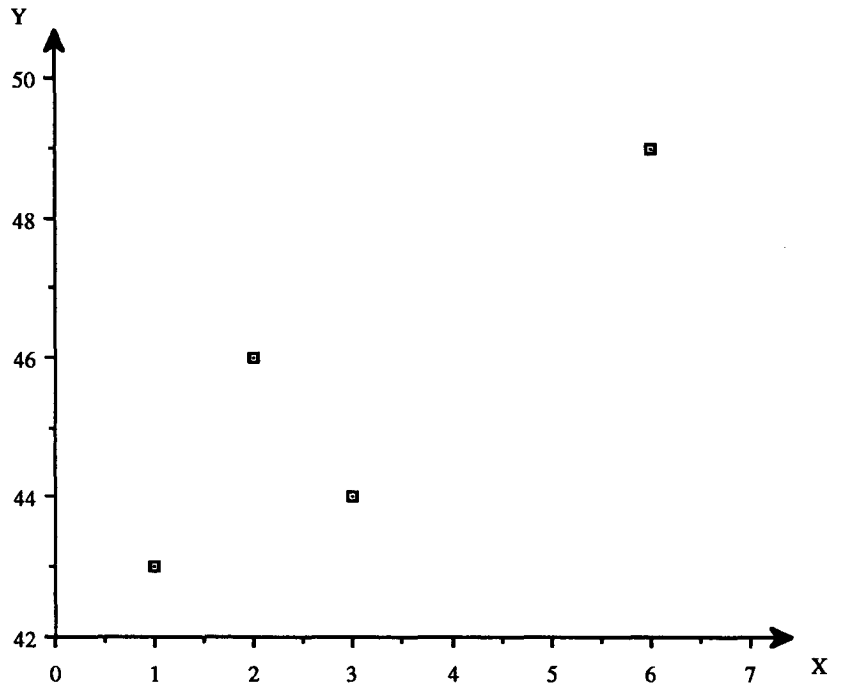
Lehen begiratuan, erlazioa alderantzizkoa eta ahula dela antzematen da, baina balioak denboran zehar ditugunez, marra batez puntuak lotzean, erlaziorik ez dagoela argiro ikusten da.

2) $r_{xy} = 0,0008 \simeq 0$

Dakusagunez, koerlazio gabeak direla esan daiteke.

3.3.

1)



2) $\bar{x}$ = % 3,25 S_x = % 1,82
$\bar{y}$ = 45,5 S_y = 2,29

3) S_{xy} = 3,625 r_{xy} = 0,86
Bi aldagaien arteko erlazioa zuzena eta nahikoa nabaria da.

3.4.

Lehenengoak malda positiboa duen zuzen baten gainean dauzka puntuak, hots, r = 1.
Bigarrenak, ordea, malda negatiboa duen zuzen baten gainean, hots, r = -1.
Hirugarrenak, azkenik, banaketa bikoitz independente bat aurkezten du, hots, r = 0 independentziak koerlazio eza halabehartzen bait du.

3.5.

1) Bazter-banaketak:

$n_{i.}$: 14, 15, 11 $\qquad$ $f_{i.}$: $\frac{14}{40}, \frac{15}{40}, \frac{11}{40}$

$n_{.j}$: 14, 15, 11 $\qquad$ $f_{.j}$: $\frac{14}{40}, \frac{15}{40}, \frac{11}{40}$

Banaketa baldintzatuak:

$f_{i/1}$: $0, \frac{5}{14}, \frac{9}{14}$ $\qquad$ $f_{j/10}$: $0, \frac{4}{14}, \frac{10}{14}$

$f_{i/2}$: $\frac{4}{15}, \frac{9}{15}, \frac{2}{15}$ $\qquad$ $f_{j/11}$: $\frac{5}{15}, \frac{9}{15}, \frac{1}{15}$

$f_{i/3}$: $\frac{10}{11}, \frac{1}{11}, 0$ $\qquad$ $f_{j/12}$: $\frac{9}{11}, \frac{2}{11}, 0$

2) Kasu honetan, $X = U + 11$, $Y = V + 2$ direnez $S_{xy} = S_{uv}$ daukagu; aldagaietan jatorri-aldaketa bakarrik egin bait dugu.

U \ V	-1	0	1
-1	0	4	10
0	5	9	1
-1	9	2	0

taularen bidez,
$r_{xy} = -0{,}7759$

3.6

1) $\bar{x} = 5$ $\qquad$ $S_x^2 = 2$ $\qquad$ $S_{xy} = 3$

$\bar{y} = 8$ $\qquad$ $S_y^2 = 5$ $\qquad$ $r_{xy} = 0{,}95$

2) $\bar{u} = 60$ $\qquad$ $S_u^2 = 200$ $\qquad$ $S_{uv} = 600$

$\bar{v} = 150$ $\qquad$ $S_v^2 = 2000$ $\qquad$ $r_{uv} = 0{,}95$

3.7.

1) $S_x^2 = 4 \quad S_{xy} = 1 \quad r_{xy} = 0,5$

2) $S_{(x+y)}^2 = 7$

3) $S_u^2 = 400 \quad S_{uv} = 50 \quad r_{uv} = 0,5$

3.8.

1) Klase-ordezkari bezala x = 25 balioak baldintzatutako Y aldagaiaren banaketa ondokoa da:

$y_i =$	2	7	12	17
$n_i =$	20	100	130	50
$f_{i/25} =$	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{13}{30}$	$\frac{1}{6}$

banaketa baldintzatuaren bidez $\overline{y} / (x = 25) = 10,5$ lortu dugu analogikoki

$\overline{y} / (x = 35) = 7,3$

$\overline{y} / (x = 45) = 9,5$

azkenik, batezbesteko erregresioaren puntuak:

x	25	35	45
$\hat{y}$	10,5	7,3	9,5

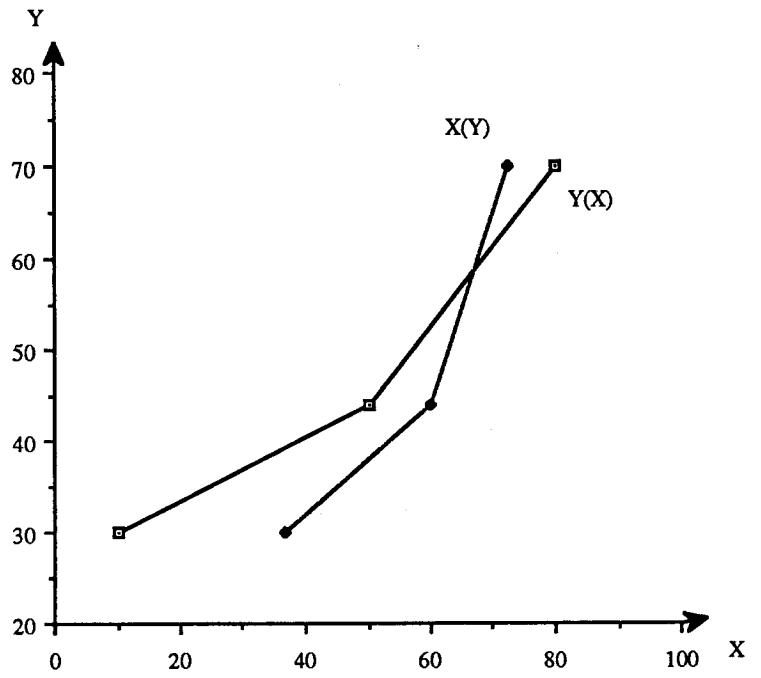
2)

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 36 & -5 \\ -5 & 20 \end{bmatrix}$$ matrizetik r = -0,185 lortzen da

3) Batezbestekoaren erregresioak, datuen erlazio lineala oso ahula dela detektatzen du, baita koerlazio koefizientearen balio absolutuak ikusterazten duelarik ere.

3.9.

1) $x = 10$ 50 80 $y = 30$ 40 80
$\hat{y} = 30$ 44 70 $\hat{x} = 36,6$ 60 72,5



2) r = 0,62

3) Bi kasuetan proportzio berdina : % 38,4ekoa.

3.10.

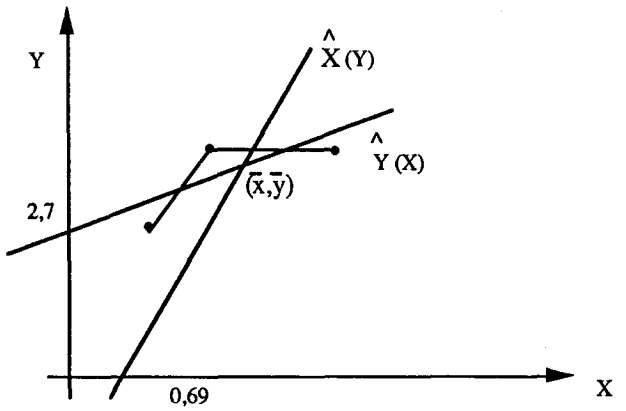
1) X Aldagaia, enpresan daramatzaten urteak eta Y aldagaia, urtean zehar lortutako kontratuak izanik.

$r_{xy} = 0,420$

2) $r^2_{xy} = 0,176$ (%17,6) azaldutako bariantza
Bi balioek erlazio ahula adierazten dute.

3) $\hat{Y} = 0,5X + 2,7$

$\hat{X} = 0,35Y + 0,697$



4)

X	1	2	3
Y	3	3,9	4

(Puntu-lerroa grafikoan)

5) Erlazio linealak eredu bat dagoela esan nahi du, dagoen erlazioarentzat oso eredu sinplea izanik.

Batezbestekoaren erregresioa erlazio-eredu bati lotuta ez egonik, datuei jarraitzeko askeagoa da.

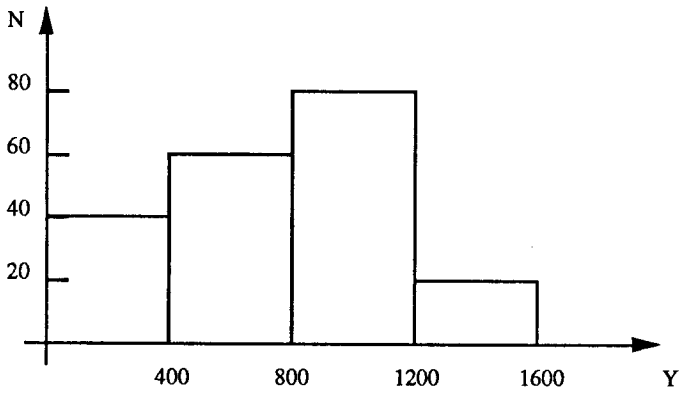
Erregresio-lerroak, irudian ikusten dugunez linealki nahitaez jarraituta emaitza arraroak erakusten dizkigu.

Lagin-espaziotik urrunduta, hauxe ikusten dugu: "enpresan -1 urte izanik gutxi--gorabehera 2 salmenta-kontratu". ("200 urte izanez, 103 lortutako kontratuak"...).

Bestalde, batezbestekoaren erregresioaren ibilbidea, ez da proportzionalki igotzen. Malda lehenengo zatian askoz handiagoa da.

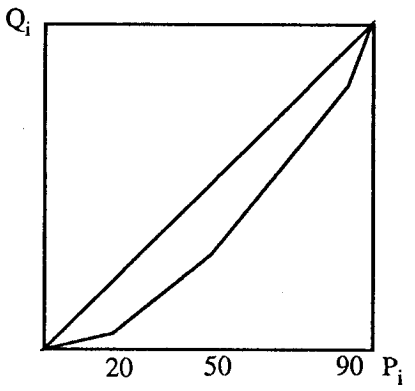
3.11.

1)



2)

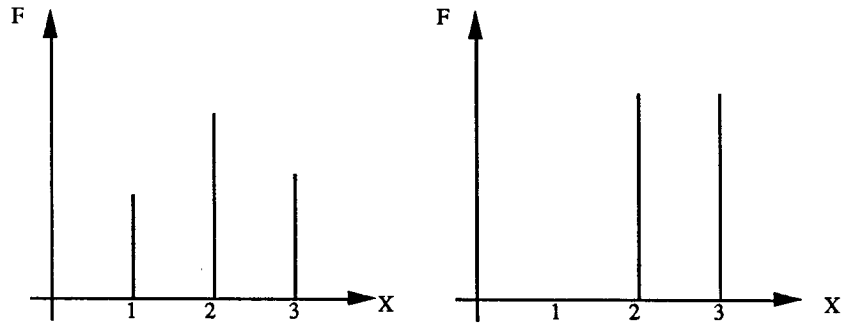
P_i	20	50	90	100
Q_i	5,26	28,9	81,5	100



$I_G = 0,27$

3)

x_i	f_i	$f_i(x_i/y \in [800;1200))$
1	0,25	0
2	0,45	0,5
3	0,30	0,5



Dakusagunez maiztasun erlatiboen banaketa hauek oso desberdinak dira. Bazter--banaketari dagokionez honakoa esan dezakegu: langileen %50ak bi urte daramatza enpresan eta beste %50ak ia zati berdinetan urte bat edo hiru. Banaketa baldintzatuari dagokionez, ordea, honakoa ikusten dugu; [800; 1200) tartean egindako muntaketak dituztenetatik %50ak bi urte daramatzala enpresan eta beste %50ak hiru.

4) $r_{xy} = 0,707$

Erlazio zuzena eta nabaria adierazten du koerlazio-koefizienteak, taula ikusita ere pentsa daitekelarik.

5) $Y = 350,68\ X + 41,09$

$S_e = 67334,4$, $r_{xy} = 0,499 \simeq 0,5$

% 50ekoa da azaldutako bariantza

3.12.

$r = 0,95$, $r^2 = 0,90$ izanik, aldagaien arteko erlazio lineala sakona dela esan daiteke. Ondorioz, enpresa honek planifika dezake bere produkzioa egingo duen tenperaturaren arabera, laginak hartutako datuak fidagarriak eta nahikoak kontsideratzen baditu.

Tenperatura : X, Egindako kapelak : Y deiturik.

$\overline{x} = 18$ gradu $\quad S_x = 9,27$ gradu $\quad S_{xy} = 241,8$

$\overline{y} = 42,2$ kapela $\quad S_y = 27,44$ kapela

$Y = 2,8138X - 8,449$

$x = 32^{\circ} \Rightarrow \hat{y} = 81,6 \cong 82$ kapela izango litzateke estimatutako balioa.

3.13.

1) $r_{xy} = 0,72$

2) $X = 0,576Y + 14,22$

3.14.

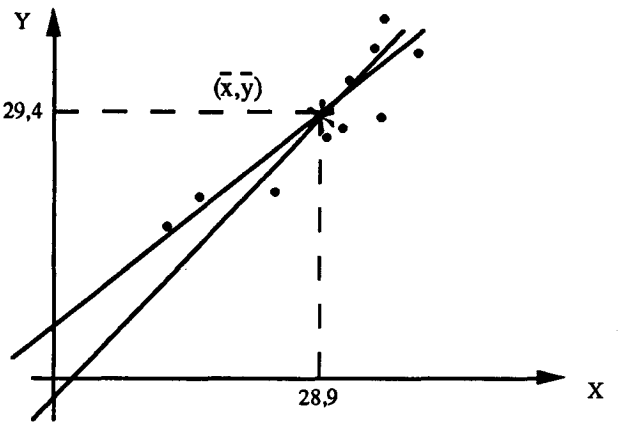
1) $\overline{x} = 113,33$ $\quad S_x = 25,49$ $\quad S_{xy} = 1266,6$
$\overline{y} = 90$ $\quad S_y = 49,88$
$\hat{Y} = 1,9487X - 130,848$

2) $r = 0,9958$ $\quad r^2 = 0,9917$ $\quad \%99,17$
ia guztiz azalduta geratzen da bariantza

3) $x = 200 \Rightarrow \hat{y} = 258,892$

3.15.

1)



2) $r_{xy} = 0,901$

3) $\hat{Y} = 0,8024X + 6,208$
$\hat{X} = 1,0116Y - 0,843$

4) $r^2 = 0,812$ bi doikuntzetan bariantzaren %81,2 gelditzen da mugatuta.

3.16.

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 4{,}01 \text{ m.} \\ 120 \text{ kg.} \end{bmatrix} \qquad \mathbf{L} = \begin{bmatrix} 0{,}00017 & +0{,}05 \\ +0{,}05 & 16 \end{bmatrix}$$

Zuzenean lortutako estatistiko horien bitartez (egokiena kalkulagailuaz egiten denean) edo ondoan daukagun bezala aldagaien aldaketak eginez:

$$\overline{\mathbf{X}}' = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{L}' = \begin{bmatrix} 6{,}8 & +5 \\ +5 & 4 \end{bmatrix}$$

$$X' = \frac{1000\,(X-4)}{5}$$

izanik

$$Y' = \frac{Y-120}{2}$$

(egokiena kalkulagailurik gabe eginez)

Honakoa lortzen da:
$\hat{P} - 120 = 294{,}12(D - 4{,}01)$ nondik $\hat{P}\,(4{,}01) = 120$ Kg.

2) $r = 0{,}9587$, % 92an P aldagaiaren bariantzatik azaltzen delarik.

3.17.

1) Ondoko hauen bidez:

$$\overline{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 36{,}8 \\ 48 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{L} = \begin{bmatrix} 768{,}96 & -454{,}4 \\ -454{,}4 & 386 \end{bmatrix}$$

Honakoa lortzen da:

$$\hat{X}_1 - 36{,}8 = -1{,}17(X_2 - 48)$$

$$\hat{X}_1\,(75) = 5{,}21$$

2) $r = -0{,}834$ bost estatuen multzoan, deskribatutako bi aldagaientzat, alderantzizko erlazio lineala nahikoa sakona dela adierazten du.

3.18.

Hauen bidez

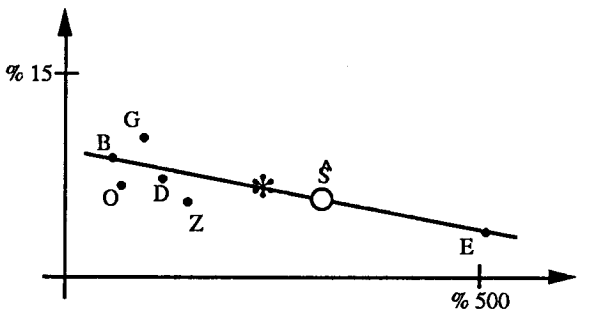
$$\bar{x} = \begin{bmatrix} 133,3 \\ 7,83 \end{bmatrix} \qquad L = \begin{bmatrix} 25.888,8 & -279,4 \\ -279,4 & 4,472 \end{bmatrix}$$

lortzen da:

1) $\hat{X}_2 = 9,27 - 0,0108\ X_1 \qquad \hat{X}_2(200) = \%7,11$

(Urtekari estatistikoak Sopelako aiton-amonen proportzio erreala ematen digu: zifra biribilduta: % 7)

Taldekatu gabeko datuen ariketetan paregabekoa da puntu-hodeiaren balio deskribatzailea.



Komentatu behar dena hau da: nahiz eta lortutako koerlazioa handia izan, udal--kopurua txikia dela eta Ermuak doikuntzan duen eragina gehiegizkoa.

Ondorioak ateratzeko lagin zabalagoak beharko dira. Sopelarekiko dena dela, asmatzen du.

3.19.

$\bar{m} = \bar{t} = 6 \qquad S_m = 2,168 = S_t \qquad S_{mt} = 4,3 \qquad r = -0,915$

% 83,7 adierazita eta % 16,3 adierazi gabe geldituko lirateke.

3.20.

1) $\hat{Y} = 2,75 - 3,25X + 1,25X^2$

2) $S_e = 0,3125$ $\quad S_y^2 = 2,1875$ $\quad S_e^2 / S_y^2 = \%14,3$

Doikuntza parabolikoak, Y-ren bariantzaren %85,7 aurresaten du.

3) $r^2 = 14,28$ (doikuntza lineala askoz txarragoa da eta nahikoa litzateke puntu-hodeia marraztea horretaz ohartzeko).

3.21.

1) $\hat{Y} = 2 + X - X^2$

2) $+2, 0, 0, +2$ $\quad S_e^2 = 0 (\%100$ ondo doituta dago)

3) $r_{xy} = 0$ $\quad S_e^2 = 1$ (errorea %100ekoa da.)

3.22.

1) $\bar{x}_1 = 2,7$ $\quad S_1 = 0,3559$ $\quad S_{12} = 6,03$

$\bar{x}_2 = 37,3$ $\quad S_2 = 20,434$

$\hat{X}_2 = 47,63\ X_1 - 91,2738$

$r = 0,8296$

2) Aldagaien eskalak hain desberdinak ($S_1 = 0,35$, $S_2 = 20,4$) izanik, erregresioa tipifikatuz egingo dugu:

$$L(T) = \begin{bmatrix} 1 & 0,829 \\ 0,829 & 1 \end{bmatrix} \qquad \lambda_1 = 1 + 0,829 = 1,829$$

$$\lambda_2 = 1 - 0,829 = 0,1708$$

$$0,707\ T_1 - 0,707\ T_2 = 0, \qquad \frac{1,829}{2} = 0,9145$$

% 91,45 adierazten da baterako bariantza.

3) Bi doikuntzak zeharo desberdinak dira. Lehen atalean egin dugun karratu txikienen erregresio linealean X_2 aldagaia X_1 aldagaiaren menpe kontsideratzen dugu, hau da, erregresioaren helburua X_1 balioetarako zein den aurresan ahal dugun kasu bakoitzean X_2 aldagaiaren balioa bilatzen dugu. Horretarako errore karratuak batezbeste txikien egiten dituen funtzioa lortzen dugu, errore hori X_2 aldagaiaren jasotako balioen eta estimatuen arteko kendura izanik.

Bigarren atalean egin dugun erregresio ortogonalean, ordea, bi aldagaien konbinazio linealen artean onena den funtzioa bilatzen da (karratu txikienen zentzuan hau ere), hau da, errore koadratikoak batezbestekoaz txikienaz bihurtzen dira, errorea kasu honetan puntutik funtziora dagoen distantzia euklidearra izanik.

3.23.

1) $\bar{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 3,53 \\ 1,5666 \end{bmatrix}$ $\quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} -1,5333 & -0,8667 \\ -1,9333 & -0,0667 \\ 3,4666 & 0,9334 \end{bmatrix}$

$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 6,035 & 1,564 \\ & 0,542 \end{bmatrix}$ $\quad \text{tr } \mathbf{L} = 6,577$ $\quad |\mathbf{L}| = 0,825$

$\lambda_1 = 6,45$

$\lambda_2 = 0,128$

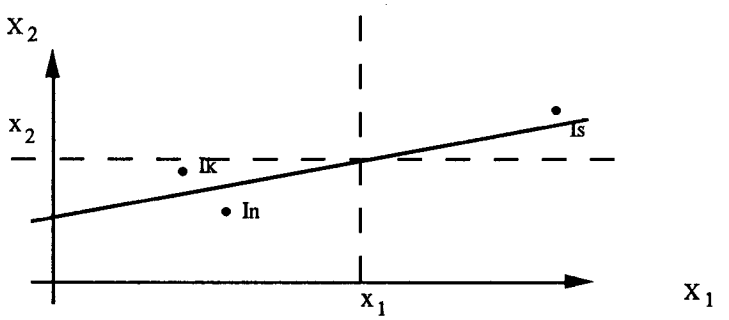
$\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,256 \\ -0,967 \end{bmatrix}$

$0,256\ (X_1 - 3,53) - 0,967\ (X_2 - 1,5666) = 0$

$\frac{6,45}{6,577} = 0,98$ $\quad$ % 98ko proportzioan adierazten da bariantza

2) $\mathbf{f} = \begin{bmatrix} -1,705 \\ -1,886 \\ 3,591 \end{bmatrix}$

3)



3.24.

1)

$X - \bar{x}$	0,75	-5,25	0,75	3,75
$Y - \bar{y}$	0	0	-3	3

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 10,6875 & 2,25 \\ & 4,5 \end{bmatrix} \qquad \text{tr } \mathbf{L} = 15,1875 \qquad |\mathbf{L}| = 43,03125$$

$$\lambda_1 = 11,42 \qquad \lambda_2 = 3,786 \qquad \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,309 \\ -0,951 \end{bmatrix}$$

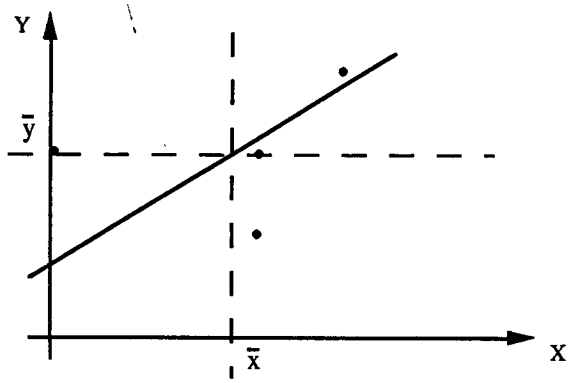
$$0,309\ (X - 5,25) - 0,951\ (Y - 6) = 0$$

2) $$\frac{11,42}{15,1875} = 0,75$$

% 75 estimatzen da $S^2_{(x,y)}$ baterako bariantza eta % 25 estimatu gabe geratzen da, hain zuzen ere.

3) $f_1 = 0,713$, $f_2 = -4,993$, $f_3 = -0,214$, $f_4 = 4,493$

4)



3.25.

1) $0{,}957\ (X_1 - 2) - 0{,}289\ (X_2 - 4) = 0$

2) % 86koa da estimatutako proportzioa

3), 4)

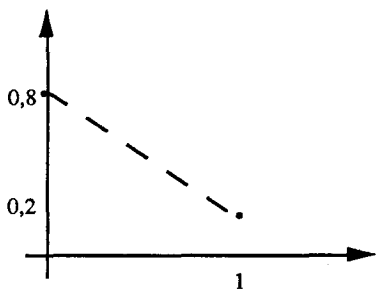
$$\mathbf{f}_1 = \begin{bmatrix} -2{,}203 \\ 1{,}914 \\ 0{,}289 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} -0{,}397 \\ -0{,}578 \\ 0{,}957 \end{bmatrix}$$

5) $S_f^2 = \lambda_1 = 2{,}868 \qquad S_e^2 = \lambda_2 = 0{,}465 \qquad S_{fe} = 0{,}002 \cong 0$

3.26.

1)

X_1	$\hat{X}_2 = \bar{x}_2 / x_1$
0	0,8
1	0,2



2) $\hat{X}_2 = -0{,}6\ X_1 + 0{,}8 \qquad r^2 = 0{,}36$ % 36 azaltzen da X_2 aldagaiaren bariantza eta % 64 azaldu gabe geratzen, hots, ez da batere egokia karratu txikienen doikuntza lineala.

3)

$$\frac{X_1 - 0{,}5}{\sqrt{2}} + \frac{X_2 - 0{,}5}{\sqrt{2}} = 0$$

% 80 estimatzen da baterako bariantza, hain zuzen.

3.27.

1) $\hat{Y} = 3 + 0,25X - 0,125X^2$

2) $S_e^2 = \frac{\sum e^2}{4} = \frac{2}{4} = 0,5 \qquad \frac{S_e^2}{S_y^e} = \frac{0,5}{2} = 0,25$

% 75 estimatzen da Y aldagaiaren bariantza.

3) $\hat{Y} = 2 + 0,25X$

4) $S_e^2 = 1,50 \qquad \frac{S_e^2}{S_y^2} = \frac{1,50}{2} = 0,75$

% 25 estimatzen da Y aldagaiaren bariantza kasu honetan.

Dakusagunez, karratu txikien metodoaz ohizko erregresioa planteatu nahi badugu aukeratutako funtzioa bigarren graduko polinomioa izango da.

5) $0,29X - 0,958\,(Y-2) = 0 \qquad S_e^2 = \lambda_2 = 1,395$

6)

$$\frac{S_e^2}{S_{(x,y)}^2} = \frac{1,4}{10} = 0,14 \qquad \frac{S_f^2}{S_{(x,y)}^2} = \frac{8,6}{10} = 0,86$$

% 86, % 14 dira estimatuta eta estimatu gabe geratzen diren proportzioak, kasu honetan baterako bariantzarekiko izanik. Dakigunez, erregresio ortogonalaren doikuntzak hoberen doitzen den konbinazio lineala bilatzen du eta ohizko erregresioarekin ez dauka parekatzerik (emaitzei dagokienez); abiapuntu desberdinak bait dituzte. Kontutan hartu behar da errore edo hondarraren definizioa desberdina dela.

7), 8)

$$\mathbf{f}_i = \begin{bmatrix} 0,58 \\ 3,832 \\ 0 \\ -4,412 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{e}_i = \begin{bmatrix} -1,916 \\ 1,16 \\ 0 \\ 0,756 \end{bmatrix}$$

$S_{fe} = 1/4\ (4,445 - 4,446) \simeq 0$

3.28.

1) X_1: tenperaturak, X_2: euri – kantitateak izanik

$\hat{X}_2 = -5,83X_1 + 190,9188$

$\hat{X}_2(x_1 = 10) = 132{,}6189$ litro izango litzateke jausitako euri-kantitatea doikuntzaren arabera.

$r^2 = 0{,}3143$ % 31,43 azaltzen da Y aldagaiaren bariantza. Ezin da esan estimazioa ona denik, nahiko urrun egon bait daiteke jausitako euri-kantitatea 132,6 litro horietatik.

2) $\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1 & -0{,}5607 \\ & 1 \end{bmatrix}$

3) $0{,}707\ X_1 + 0{,}707\ X_2 = 0$

4)

Hilabetea	T_1	T_2	Proiekzioak: f_i
U	-1,4795	0,2612	-1,23
O	-0,7500	0,0973	-0,6
M	-0,7500	-0,4874	-0,18
A	-0,5068	1,5945	-1,48
M	0,2231	-0,9551	0,83
E	0,7094	-1,2124	1,36
U	1,4390	-1,7972	2,29
A	1,4390	-0,2300	1,18
I	1,1958	-0,1129	0,93
U	0,4663	0,5856	-0,09
A	-0,7500	1,6648	-1,71
A	-1,2363	0,5886	-1,29

5) % 78 da azaldutako baterako bariantzaren proportzioa.

6)



7) $r_{f,t_1} = 0{,}8834$ $\qquad r_{f,t_2} = \dfrac{-1{,}1037}{1.\quad 1{,}5607} = -0{,}8834$

3.29.

1)

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1 & 0{,}5 \\ 0{,}5 & 1 \end{bmatrix}$$

Diagonalizatuz: $\lambda_1 = 1 + r_{12} = 1{,}5$

$\lambda_2 = 1 - r_{12} = 0{,}5$

$\lambda = 0{,}5$ autobalioari

$\begin{bmatrix}\alpha\\ \beta\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0,707\\ -0,707\end{bmatrix}$ autobektorea dagokio.

Beraz : $0,707\ T_1 - 0,707\ T_2 = 0$

$\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2} = \frac{1,5}{2} = 0,75$ % 75 da bildutako bariantza.

2) $f_1 = [-1,\ 9,4] \begin{bmatrix}0,707\\ 0,707\end{bmatrix} = 5,94$

$f_2 = [0,\ -0,6] \begin{bmatrix}0,707\\ 0,707\end{bmatrix} = -0,424$

3.30.

1) $S_1^2 = \frac{8}{3} = \frac{\left(2\sqrt{2}\right)^2}{m} = \frac{\|C_1\|^2}{m}$

$m = 3$

2)

$\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & 4\\ -2 & 4\end{bmatrix}$ edota $\begin{bmatrix}2 & 0\\ -2 & -4\\ 0 & 4\end{bmatrix}$

3) $r_{12} = 1/2 = \cos\alpha$

Angelua 60ºkoa da.

3.31.

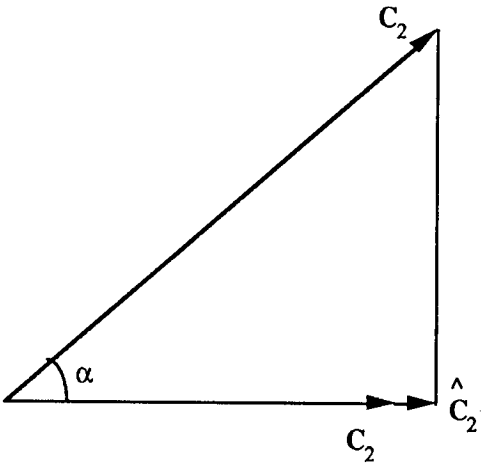
1) $r_{12} = 2/3 = 0,67$ $\|C_1\| = 12$; $\|C_2\| = 20$ $\|\hat{C}_2\| = b_{21}.\|C_1\| = 13,2$

2) $b_{21} = 10/9 = 1,1$

3) $S_e^2 = 14,11$ $\|e\|^2 = 225,76$

$\|e\| = 15,02$

4)



BESTE ADIERAZBURU BATZU

1.- Ondoko datuak 1.956, 1.957,....,1.964 urteetako diru-joanetorriaren kopuruak eta prezio-indizeak baldin badira,

Urteak	Diru-kop.	Pre.- ind.
1.956	4.377	174'8
1.957	4.244	167'9
1.958	4.284	161'4
1.959	4.346	167'7
1.960	4.499	167'0
1.961	5.013	169'8
1.962	4.879	166'6
1.963	4.788	159'1
1.964	4.678	163'4

Kalkula ezazu koerlazio-koefizientea, datuak sinplifikatzeko ahal duzun aldaketa eginez.

2.- 1.976. urteko datu hauek ditugu Iran, Irak, eta Israel estatuetan.

	X_1	X_2	X_3
IRAN	2	5	0,7
IRAK	1,6	8,2	1,5
ISRAEL	7	44,5	2,5

X_1 aldagaiak ospitaleko ohe-kopurua/biztanle adierazten du.
X_2-k zinetoki-jezarlekuak/1.000 biztanle.
X_3-k energi kontsumoa/biztanle.
Kalkula ezazu koerlazio-matrizea, koerlazio horien esanahia azalduz.

3.- Bost urtetan, hurrenez hurren eta mila pezetatan, ondoko sarrerak eta gastuak izan baditugu,

Sarrerak:	35	40	50	70	80
Gastuak :	33	37	40	52	60

Honakoa eskatzen da:

1) Koerlazio-koefizientea, bere esanahia azalduz.
2) Atera ezazu egokiena izango litzatekeen erregresio-zuzena, datuak nahikoa eta errepresentagarriak balira bezala jokatuz.
3) Zertarako balio du aurreko atalean ateratako zuzenak?

4.- Ondoko taulan estatuko 100 udal handienen 1.988. urtean banaketa daukagu, X, Y aldagai estatistikoen arabera.

X: Biztanle-kopurua milaka.
Y: Udal-aurrekontua milaka milioi pezetatan.

X / Y	$150 \geq y \geq 10$	$10 > y \geq 5$	$5 > y \geq 2{,}5$	$2{,}5 > y \geq 1{,}5$
$x \geq 200$	14	7	0	0
$200 > x \geq 100$	3	14	16	0
$100 > x \geq 50$	0	2	20	24

Honakoa eskatzen da:

1) X aldagaiaren tarte bakoitzak baldintzatutako Y aldagaiaren banaketa baldintzatuen aurkezpen grafikoa.
2) Estimatutako moda eta mediana banaketa baldintzatu bakoitzerako.
3) Komenta itzazu laburki lortutako emaitzak. Zergatik aurrekontuak ez dira hain proportzionalak udalen biztanle-kopuruekiko?.

5.- Ondoko taulan EAJ/PNV-ri eta EA-ri Gipuzkoan eta Bizkaian botua eman zietenen banaketa daukagu.

	EAJ / PNV	EA
Bizkaia	139.431	52.222
Gipuzkoa	44.427	61.031

1) Kalkula itzazu "hauteskunde-aukera" ezaugarriaren "probintzia" ezaugarriaren klaseei baldintzatutako maiztasun erlatiboen banaketa baldintzatuak.

2) Lortutako banaketak ikusirik, azal ezazu botuen banaketa bi koalizioetan eta bi herrialdeetan independentziaren kasutik hurbil dagoen ala ez. Nolabaiteko menpekotasuna ikusten baduzu, zein motatakoa da, zuzena ala alderantzizkoa?
3) Aurkez itzazu, sektore-grafikoen bidez, 1) atalean lortutako bi banaketak. Zein abantaila edukiko genuke 2) erantzuteko, lehen 3) atalaren erantzuna emana izan balitz?.

6.- Hurrengo taulan, (X,Y) aldagaien maiztasun erlatiboen banaketa emanik.

X \ Y	2	4	6
10	0,2	0,2	0
20	0,1	0,2	0,3

non: X = indibiduoek egindako ikastaroen hilebete-kopuruak, eta
Y = saldutako atoiuntzien kopurua izanik,

Honakoa eskatzen da:
1) a: X,Y aldagaiak independenteki banatuta al daude? Zergatik?
b: Atera ezazu maiztasun erlatiboen banaketa, bazter-banaketak mantenduz, independenteki banatuak izan daitezen.
2) Kalkula ezazu r_{xy} koerlazio-koefizientea a) eta b) kasuetarako. Aldagaien aldaketak egitea komenigarria da.

7.- Ondoko taulan X,Y aldagaien baterako banaketa daukagu:
X: hiri batean, 100 enpresatatik bakoitzak daukan bezero-kopurua da.
Y: bakoitzak daukan bulego-kopurua da.

X / Y	1	2	3	4
]0 ; 1000[	10	7	6	1
[1000 ; 3000[	12	9	5	3
[3000 ; 5000[	9	10	8	2
[5000 ; 8000]	7	6	4	1

Honakoa eskatzen da:
1) Lor itzazu bezero-kopuruak baldintzatutako bulego-kopuruaren banaketa baldintzatuak.

2) X,Y aldagaien banaketak, elkarren arteko independentziatik hurbil al daude taula honetan?
3) Estima ezazu bezero-kopuruaren moda.
4) Estima ezazu bezero-kopuruaren mediana.

8.- Euskal Urtekari Estatistikotik, bizi direneko probintzien eta adin-taldeen arabera, Komunitate Autonomoko biztanleen sailkapena hartu dugu 1981. urtean finkaturik.

Batezbesteko datuak, mila biztanletara biribildurik agertzen dira:

	Adin-taldeak		
	0-19	**20-49**	**50-89**
ARABA	92	110	56
GIPUZKOA	240	287	167
BIZKAIA	406	492	292

Honakoa eskatzen da:
1) Marraz ezazu Komunitate Autonomoaren biztanleen sailkapena probintzien arabera erakusten duen sektore-grafikoa.
2) Marraz ezazu Komunitate Autonomoaren biztanleen sailkapena adin-taldeen arabera erakusten duen histograma.
3) Estima ezazu adinaren moda probintzia bakoitzerako.
4) Kalkula ezazu probintzia bakoitzak baldintzatutako adin-taldeen maiztasun erlatiboen banaketa. Banaketak independentziaren kasutik hurbil aurkitzen al dira taula honetan?

9.- Ondoko maiztasun-banaketa bikoitza emanik.

X \ Y	1	2
0	64	16
4	16	n_{22}

Lor ezazu arrazonatuz n_{22} maiztasunaren balioa ondoko hiru kasuetarako.
1) $\bar{x} = \bar{y}$ izan dadin.
2) Asimetri koefizientea [g_1 (x)] zero izan dadin.
3) X,Y aldagaien balioak independenteki bana daitezen.

10.- Ondoko maiztasun-taula emanik

X \ Y	1	2	3
3	6	4	4
5	4	3	2
7	4	2	0

Honakoa eskatzen da:

1) X aldagaiak baldintzatutako Y aldagaiaren maiztasun erlatiboen banaketak. Komenta itzazu lortutako emaitzak.
2) Lor ezazu koerlazio-koefizientea ahal den era laburrenean, aldagaien aldaketaren bidez.

11.- Izan bedi ondoko maiztasun-banaketa.

X \ Y	(−0,5, 0.5)	(0,5, 1.5)
(−1,5, −0.5)	2	6
(−0,5, 0.5)	2	n_{22}
(0.5, 1.5)	n_{31}	n_{22}

Indibuduo-kopurua N=20 izanik.
Lor itzazu n_{22}, n_{31}, n_{32} bide batez ondoko bi baldintzak bete daitezen:

a) $M_e(x) = 0$
b) $S_{xy} = 0,2$

Oharra: klase-ordezkaritzak erdiko puntuak hartu behar dira.

12.- Ondoko taulan, X,Y aldagaietarako maiztasun-banaketa bikoitzaren datuak ditugu:

X \ Y	1	2	4
5	1	0	2
10	2	1	0
15	0	1	3

1) Lor itzazu (X, Y) aldagaiaren batezbesteko bektorea eta kobariantz matrizea datu horietarako, ondoko transformazio linealak erabiliz.

$$x'_i = \frac{x_i - 10}{5} \qquad y'_j = y_j - 2$$

2) Azter ezazu kolektibo horretan X eta Y-ren artean izan daitekeen independentzia. Eman ezazu erantzuna 1) atalean lortutako datuetan oinarriturik.

13.- (X,Y) aldagaiaren ondoko momentuak ditugu:

$$a_{10} = 0 \quad a_{20} = 0{,}2 \quad a_{30} = 0 \quad a_{40} = 0{,}2 \quad a_{01} = 0{,}2 \quad a_{02} = 0{,}2 \quad a_{11} = 0$$

Honakoa eskatzen da:

1) X aldagaiaren kurtosi-koefizientea, emaitza komentatuz.

2) S_z^2 bariantza, $Z = X + Y$ dela jakinik.

14.- Hamasei makinatan X, Y aldagaiak neurtu dira. X: funtzionatzen igarotako urteak eta Y: edukitako aberiak, izanik:

X \ Y	3	4	5
1	0	2	3
2	6	0	0
3	0	2	3

Honakoa eskatzen da:

1) Y aldagaiaren maiztasun erlatiboen bazter-banaketa.

2) X=2 baldintzatutako Y aldagaiaren maiztasun erlatiboen banaketa.

3) X eta Y aldagaiak, banaketa independentea al daukate emandako taulan?

4) r_{xy} koerlazio-koefizientea. Komenta ezazu lortutako emaitza.

15.- Ondoko taulan, X, Y aldagaien datuak ditugu munduko 100 herritarako. X: N.P.G. "per capita" 10^3 $-tan 1986. urtetako, Y: batezbesteko inflazio-tasa 1980-86 urte bitarterako izanik,

X \ Y	$y < 5$	$5 \leq y \leq 20$	$y > 20$
$x < 1$	5	35	10
$1 \leq x < 4$	5	8	12
$x \geq 4$	10	15	0

Honakoa eskatzen da:

1) "Per capita" produktu-maila ezberdinak baldintzatutako inflazio-tasaren maiztasun erlatibo baldintzatuak. Bi aldagaien banaketa, taula honetan independetziatik hurbil dagoela kontsidera al daiteke?.
2) Lor ezazu eta aurkez ezazu grafikoki Y aldagaiaren batezbestekoaren erregresio--lerroa. X aldagaiaren klase-ordezkariak 0,5, 2,5 eta 5,5 eta Y aldagaiaren klase--ordezkariak % 3, % 10 eta % 40 dira hurrenez hurren. Pentsa ahal daiteke erlazio linealaz?.
3) Estima ezazu medianaren balioa, 1) atalean lortutako banaketa baldintzatu bakoitzerako.

16.- Ondoko taulan, 1960. urtean hiri batean ospatu ziren ezkontzak, ezkongaien urteen arabera, gutxi gorabehera sailkatuak ditugu

(Y) Em. adina	(18)	(25)	(35)	(45)	
(X) Giz. adina	16-20	20-30	30-40	40-50	ni.
(25) 20-30	100	1.200	50	10	1.360
(35) 30-40	35	250	125	25	435
(50) 40-60	15	50	75	65	205
n.j	150	1.500	250	100	2.000

Honakoa eskatzen da:

1) Bi bazter-banaketen aurkezpen grafikoak, berdintasunak eta ezberdintasunak azalduz.
2) Azter ezazu taula honetan daukagun banaketen dependentzia ala independentzia.
3) Egin ezazu taula honen menpekotasun linealaren azterketa.

17.- 100 produktu elektromekanikoren multzoan bi aldagai estatistiko diskretu honela banatzen dira:

Y	120000	126000	132000
X			
1525000	25	0	0
1475000	5	10	0
1425000	0	10	5
1375000	0	5	40

Honakoa eskatzen da:

1) Kalkula ezazu koerlazio-koefizientea laburrena den kalkulua eginez.
2) Lor ezazu Y-ren X-ekiko batezbestekoaren erregresio-lerroa eta pareka itzazu 1), 2) ataletan lortutako emaitzak.

18.- Sail bateko liburutegian dauden 4.000 liburuak bizkar-luzeraren arabera taldekatu dira. Orrialde-kopurua ere ezagututa ondoko taula lortu dugu:

	Orrialdeak			
Luzera	(0, 300)	(300, 600)	(600, 900)	(900, 1200)
A	200	500	300	0
B	200	1.000	800	500
C	100	300	100	0

Honakoa eskatzen da:

1) Orrialde-kopuruaren luzera desberdinekiko batezbestekoaren erregresio-lerroa (200,450, 750, 1000, klase-ordezkaritzat hartu behar dira)
2) Banaketa bikoitz honen batezbesteko-bektorea eta kobariantz matrizea ondokoak izanik:

$$\bar{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 23{,}25 \text{ zentimetro} \\ 577{,}5 \text{ orrialde} \end{pmatrix} \qquad \mathbf{L} = \begin{pmatrix} 12{,}9375 & 43{,}125 \\ 43{,}125 & 56.368{,}75 \end{pmatrix}$$

lor ezazu orrialde-kopuruaren luzera desberdinekiko karratu txikienen erregresio--zuzena.

3) Marraz itzazu bi erregresio-lerroak grafiko berean eta azal ezazu bakoitzaren egokitasuna emandako banaketarako.

Oharra: $\bar{\mathbf{x}}$ eta **L** lortzeko (A, B, C) taldeetan, 18 cm., 24 cm. eta 30 cm. hartu dira klase-ordezkaritzat.

19.- Ondoko taulan 50 autogidari sailkatuta daude X,Y aldagaien arabera X = adin-tarteak eta Y = azkeneko 5 urteetan edukitako istripuak izanik:

X/Y	1	2	3	4	5
(18-25)	4	4	2	4	3
(26-31)	2	3	4	2	4
(32-51)	1	1	1	3	1
(52-81)	3	2	3	1	2

Honakoa eskatzen da:

1) Froga ezazu bi aldagaien arteko dependentzia ala independentzia maiztasun--banaketa horretarako.
2) Lor ezazu istripuen adinarekiko batezbestekoaren erregresio-lerroa.

20.- Ondoko taulan hiru komunitate autonomo udaletako biztanleen arabera banatuta ditugu:

Populazioaren tartea (milaka biztanletan)	klase - -ordezkaria	CANTABRIA	EUSKAL HERRIKO K. A.	NAFARROA
$X < 1$	0,4	25	90	190
$1 \leq X < 5$	2	60	75	60
$5 \leq X < 50$	20	15	60	14
$50 \leq X$	100	2	10	1

1) Lor ezazu Gini-ren indizea komunitate bakoitzeko populaziaren kontzentrazioa aztertzeko.
2) Lor ezazu populazio-ezaugarriak komunitate autonomoko ezaugarriarekiko duen batezbestekoaren erregresio-lerroa.

21.- Ondoan, (X,Y) aldagaiaren 6 balio-bikote emanik,

X	1	2	3	5	6	7
Y	0	3	4	6	6	11

Honakoa eskatzen da:

1) Puntu-hodeia eta berari legokioken r_{xy} koerlazio-koefizientearen komentarioa.
2) Y aldagaiaren X-ekiko erregresio-zuzena.
3) Bazter-aldagaien balio tipifikatuak eta puntu-hodei tipifikatua.
4) r_{xy} koerlazio-koefizientea eta erregresio-zuzen tipifikatua.

22.- Ondoko taulan, urte-tarte ezberdinetarako,

X_1: Arabako inmigranteen populazioa eta

X_2: Gipuzkoako inmigranteen populazioa daukagu milaka inmigrantetan neurturik.

	1951-55	56-60	61-65	66-70	71-75	76-80
X_1	7	14	25	26	27	17
X_2	19	36	46	54	55	41

Datu horiei dagozkien batezbesteko-bektorea eta kobariantz matrizea ondokoak dira:

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} 19,3 \\ 41,83 \end{bmatrix} \qquad L = \begin{bmatrix} 53,55 & +86,72 \\ +0,72 & 149,138 \end{bmatrix}$$

Estatistiko horietan *errore bat* zuzentzeko egonik.

Honakoa eskatzen da:
1) Lor ezazu X_2 aldagaiaren X_1 aldagaiarekiko karratu txikienen erregresio-zuzena.
2) Marraz ezazu zuzena puntu-hodeiaren barruan.
3) Doikuntza horren hondar-bariantza eta egokitasunaren neurriren bat.

23.- Merkatari batek erostetxe edo magazin bat erosi du, sarrerak, gutxi gorabehera linealki, auzoko biztanleriaren menpe daudela suposatuz. Hipotesi hau baieztatzeko aldameneko 10 erostetxeen datuak ditu:

Biztanleria:	70	35	55	25	28	43	15	33	23	4
Sarrerak:	198	209	197	156	85	187	43	211	120	62

Honakoa eskatzen da:
1) Karratu txikienen erregresio-lerroa (azaldutako erlazioari dagokiona).
2) Doikuntzaren egokitasuna bere esangura azalduz.
3) Zein da erosleak itxaron behar duen sarrera doikuntza honen arabera, bere erostetxea dagoen auzoko bizanleriaren balioa 20 izanik?.

24.- Ondoko taulan, ekonomi sektore bateko, azkeneko urteetako produkzioak eta esportazioak neurturik ditugu:

Urteak	Produkzioak (milioika pta-tan)	Esportazioak (milioika pta-tan)
1983	400	80
1984	420	80
1985	440	90
1986	480	92
1987	500	98

Honakoa eskatzen da:
1) Dispertsio-diagrama edo puntu-hodeia, bi aldagaien arteko erlazioa ikus dezagun. Hodei horren arabera, zein izango litzateke esperoko genukeen

doikuntza linealaren egokitasuna? Zein erlazio-mota ikusten dugu aldagaien artean?

2) Datu tipifikatuen puntu-hodeia. Lor ezazu, datu tipifikatuetarako, karratu txikienen erregresio-zuzena eta adieraz ezazu grafikoki puntu-hodeian.
3) Lor ezazu doikuntzaren egokitasunaren neurriren bat eta esan ezazu, datu tipifikatu gabeen doikuntzarenarekiko parekatuz, handiago ala txikiago izango den.

25.- Ondoko taulan, bost enpresetarako 1986. urteko X, Y aldagaien balioak ditugu.
-X baliabide propioen 10^9 pezetako duten langile-kopurua.
-Y balio erantsiaren 1.000 pezetako duten mozkina.

	X	Y
Petronor	20	130
Altos Hornos	600	-350
Firestone	400	40
Eroski	240	230
Aurora Polar	90	200

Honakoa eskatzen da:
1) Enpresa baten x balioa 500 dela jakinik. Zein izango litzateke legokiokeen y balioa ongien doitzen den erregresio-zuzenaren bidez?
2) Kalkula ezazu estimatutako bariantza eta batezbesteko errore koadratikoa. Doikuntza hobea izango al litzateke datu tipifikatuen bidez egingo balitz? Zergatik?

26.- Berrehun familia dituen lagin baten bidez, (X,Y) aldagai bikoitzerako ondoko banaketa lortu dugu X: familiaren tamaina, Y: etxebizitzaren gela-kopurua izanik:

X \ Y	3	4	5
4	25	18	6
5	29	41	30
6	9	24	18

Honakoa eskatzen da:
1) Etxebizitzako gela-kopuruaren, familiaren tamainarekiko erregresio lineala.
2) Azter ezazu, aldagaien arteko menpekotasun linealaren maila, lagin honetarako.

3) Izango ahal litzateke baliagarria doikuntza hau, 3 senitartekoen familia baten etxebizitzak zenbat gela edukiko lukeen aurresateko?. Arrazona ezazu.
Sartuko al zenuke beste aldagairen bat erregresio-eredu honetan?

27.- Edari freskagarrien faktoria batean, urtean zehar hamar aste harturik, tenperaturak eta saldutako freskagarrien datuak jaso dira.

Batezbesteko tenperatura:	10	28	12	31	30	19	24	5	15	9
Freskagarri-kopurua:	21	65	19	72	75	34	67	11	24	12

1) Irudika ezazu banaketa bikoitz honi dagokion aurkezpen-grafikorik egokiena. Egokia al litzateke banaketa bakoitzaren moda kalkulatzea? Eta mediana? Azal itzazu emandako erantzunak.
2) Egokia izango al da faktoriarentzat produkzio-kopurua tenperaturaren arabera planifikatzea?. Azal ezazu erantzuna.
Erantzuna baiezkoa izan bada, gara ezazu metodorik egokiena, ondoren estimazio batzuk eginez.

28.- Hiru indibiduotan hartutako X_1, X_2 aldagaietarako, ondoko koerlazio-matrizea daukagu.

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1 \end{bmatrix}$$

Lor ezazu datu-matrize tipifikatua, lehenengo indibiduoaren balio tipifikatuak $\left(-\sqrt{3/2}\,, 0\right)$ direla jakinik.

29.- Ondoko balioak emanik:

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 2{,}\hat{6} & 2{,}\hat{6} \\ & ? \end{bmatrix} \qquad \|C_1\| = 2\sqrt{2} \qquad \|C_2\| = 2\|C_2\|$$

Honakoa eskatzen da:
1) Balio ohartuen kopurua
2) Datu-matrize zentratua, lehenengo bi balio zentratuak 0 eta 4 direla jakinik.

30.- X_1, X_2 aldagaientzat ondoko datuak ditugu:

m = 4 (indibiduo-kopurua), α=60 (aldagai-bektore zentratuen arteko angelua), $\langle C_1 | C_2 \rangle = 16$, $\|C_1\| = 2\|C_2\|$, $\overline{x}_1 = 2$ eta $\overline{x}_2 = 3$

Honakoa eskatzen da:

1) **L** kobariantz matrizea.
2) $\hat{X}_2(X_1)$ erregresio – zuzena eta S_e^2
3) $\hat{T}_2(T_1)$ erregresio - zuzen tipifikatua eta hondar - bariantza.
4) Interpreta ezazu grafikoki C_1, C_2 bektoreen erlazioa beroriek mugatutako planoan.

31.- Lau unitate estatistiko osatzen diren kolektibo batean, X_1, X_2, aldagaien arabera bi lehenengokoek hartzen dituzten balioak hauexek dira:

1. unitatea: $x_{11}=4$ $x_{12}=0$
2. unitatea: $x_{21}=2$ $x_{22}=6$

ondokoak batezbesteko-bektorea eta kobariantz matrizea izanik:

$$\bar{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{L} = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 6 \end{bmatrix}$$

1) Osa ezazu **X** datu-matrizea
2) Aurkez itzazu, grafikoki, X_1 eta X_2 aldagaien lau balio zentratuek osatzen dituzten bektoreak, beraiek sortzen duten planoan.

   Komenta ezazu, halaber, aldagaien balioek kolektibo txiki horretan daukaten erlazioa.

32.- Ondoko taulan, 4 ikerketa-enpresen emaitzak ditugu:

	GASTUAK	MOZKINAK
Sears	500	500
Ducher	300	400
Forsch	400	600
Ikerlan	400	500

1) Lor ezazu datu hauetan ongien doitzen den Mozkinen Gastuekiko erregresio--zuzena
   Aurkez ezazu, grafikoki, puntu-hodeiaren gainean, lortutako erregresio-zuzena eta interpreta itzazu, halaber, lau hondarrak.
2) Kalkula ezazu hondar-bariantza eta burutu ezazu, halaber, doikuntzaren egokitasunaren azterketa.
3) Aurkez itzazu, grafikoki, bi aldagaien balio zentratuen bektoreak, beroriek sorterazitako R^4 espazioaren azpiespazioan.

33.- X_1, X_2 aldagaiek ondoko balioak dituzte 6 indibiduorentzat.

X_1	4	7	5	5	4	5
X_2	2	5	7	4	2	4

Interpreta ezazu, grafikoki:

1) Aldagaien balio zentratuen bektoreen arteko erlazioa (angeluak eta normak grafikoki adieraziz).
2) Aldagaien balio tipifikatuen bektoreen arteko erlazioa (angeluak eta normak grafikoki adieraziz).

34.- Ondoko taulan X,Y aldagai bikoitzaren banaketa daukagu 1.000 indibiduorentzat:

X \ Y	-1	+1
-1	200	300
+1	300	200

Honakoa eskatzen da:

1) Y aldagaiaren X aldagaiarekiko batezbestekoaren erregresio-lerroa.
2) Y aldagaiaren X aldagaiarekiko karratu txikienen erregresio-lerroa.
   Zaila izango litzateke X-en Y-rekikoa kalkulu gehiagorik gabe ateratzea?
3) Karratu txikienen erregresio ortogonalaren lerroa
4) Aurkez ezazu grafikoki 1), 2), 3) ataletan lortutako lerroak.
5) Zaila al litzateke kalkulurik egin gabe 2), 3) ataletako lerroak X, Y aldagaiei dagozkien aldagai tipifikatuetarako lortzea?

35.- Enpresa-talde baterako X_1, X_2 aldagaiak neurtu dira:

X_1: 1986. urterako, inbertsio-kopurua milaka milioi pezetatan.
X_2: 1986. urterako, balio erantsi gordina milaka milioi pezetatan.
Ondokoak, talderako lortutako estatistikoak izanik.

$$\bar{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{L} = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$$

Honakoa eskatzen da:

1) Puntu-hodeian ongien doitzen den erregresio ortogonalaren zuzena.
2) Berdin X_1, X_2 balioak tipifikatuak balira.
3) Ondoko bi enpresei dagozkien koordenatuak edo proiekzioak 1) atalean lortu dugun zuzenarako:

	Inbertsioa	Balio Erantsi G.
Lacosa	4.000 milioi	5.000 milioi
Iberian Buss	4.000 "	1.000 "

4) Berdin 2) atalean lortu dugun zuzenerako.

36.- Ondoko bi tauletan Europako Ekonomi Elkartearen hamar estatu ditugu sailkaturik X_1, X_2 aldagaien arabera.

X_1: Espainiatik inportatutako batezbesteko balioa, biztanleko, milaka pezetatan.
X_2: Espainiara esportatutako batezbesteko balioa, biztanleko, milaka pezetatan.

Esp.tik inportatutakoa: X_1		Esp.-ra esportatutakoa: X_2	
Portugal	25,5	Belgika+Luxemb.	24,0
Belgika+Luxemb.	15,9	Al. Err. Federatua	18,7
Holanda	15,8	Frantzia	17,1
Frantzia	15,6	Holanda	16,8
A. Err. Federatua	9,2	Portugal	14,6
Britainia Haundia	8,1	Eire	13,4
Italia	7,9	Italia	11,8
Dinamarka	6,0	Danimarka	10,0
Eire	5,8	Britainia Haundia	8,8
Grezia	3,2	Grezia	1,8
Batezbestekoa	11,3 milaka pta.	Batezbestekoa	13,7 milaka pza.
Desbidazio tip.	6,4 " "	Desbidazio tip.	5,8 " "

Honakoa eskatzen da:

1) Puntu-hodeiaren aurkezpen grafikoa.
2) Aldagaien balio zentratuen arteko erlazioa grafikoki adieraztea.
3) Komenta ezazu, laburki, aurreneko bi grafikoek ematen diguten informazioa.

4) Lor ezazu ongien doitzen den karratu txikienen erregresio ortogonalaren zuzena eta aurkez ezazu grafikoki 1) atalean egindako puntu-hodeian.
5) Kalkula itzazu proiekzio edo koordenatuak eta erroreak edo hondarrak "Frantzia", " Aleman Err. F." eta "Portugal"en balio-bikoteentzat eta interpreta itzazu, grafikoki, 1) eta 4) ataletan egindako grafikoan.

37.- BBB ikasten diharduten 15 ikasleri bi azterketa egin zaie: X_1, ahozko arrazonamenduaz bata eta X_2, memoriaz, bestea.

Ondoan, lortutako puntuazioak eta dagozkien estatistikoak ditugu:

Ikaslea:	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
X_1:	20	29	24	22	14	28	16	8	20	18	11	19	22	15	25
X_2:	17	22	8	20	18	19	7	4	23	2	10	15	18	19	22

$$\bar{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 19,466 \\ 14,933 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{L} = \begin{bmatrix} 31,58 & 20,23 \\ 20,23 & 44,59 \end{bmatrix}$$

Honakoa eskatzen da:
1) Lor ezazu datu hauetan ongien doitzen den karratu txikienen erregresio-zuzen ortogonala.
2) Marraz ezazu, erregresio-zuzen hori, puntu-hodeiaren irudian.
3) Lor ezazu koordenatua (projekzioa) zuzen horretan lehenengo 4 ikasleentzat eta bakoitzari dagokion hondarra ere bai. Ikasle baten koordenatua beste batenaren bikoitza bada, zein izango litzateke esanahia?
   Eta ikasle baten hondarra beste batenaren bikoitza bada, zein izango litzateke esanahia?
4) Zein da 15 proiekzioen bariantza? Eta 15 hondarrena?

38.- 10.000 piezaren luzera eta diametroa ezaguturik, ondoko batezbesteko bektorea eta kobariantz matrizea lortu dira.:

$$\bar{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 80 \\ 60 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{L} = \begin{bmatrix} 16 & 16 \\ 16 & 25 \end{bmatrix}$$

Honakoa eskatzen da:
1) Erregresio-zuzen ortogonalaren ekuazioa eta baterako bariantzarekiko hondar--bariantzaren proportzioa
2) Erregresio zuzen ortogonalaren ekuazioa aldagai tipifikatuentzako eta hondar--bariantzaren balioa ebazpide orokorra aplikatuz.

39.- Ondoko osatu gabeko datuek, estatu batzuetarako, bizi-txaropenaz (E) eta "per capita" errentaz (R) milaka $-tan informazioa ematen digute:

	R	E
Suedia	-	78
Italia	5,3	73
Alemania	11,4	-
Espainia	4,8	72
Britainia Haundia	-	74
Grezia	4,2	72

Honakoa eskatzen da:

1) Lor ezazu ezagutzen ditugun datuetan, karratu txikienen erizpideaz ongien doitzen den erregresio ortogonalaren zuzena. Lor ezazu, halaber, doikuntzaren egokitasuna bere esangura komentatuz.
2) Datu ezezagunen estimazioa egin, lortu duzun erregresio-zuzen ortogonalaren bidez.
3) Aurkez ezazu, grafikoki, erregresio-zuzen ortogonala, R_2 espazioan daukagun puntu-hodeian.

40.- Ondoko taulan X_1 X_2 aldagaietarako Ertamerika eta Hegoamerikako 18 estaturen datuak ditugu.

X_1 = hiri-populazioaren portzentaia.

X_2 = eskolako matrikula-tasa.

	X_1	X_2
Venezuela	85	74
Argentina	84	88
Mexiko	69	88
Panama	50	83
Uruguay	85	86
Brasil	73	78
Txile	83	95
Kolonbia	67	73
Costa Rica	45	69
Guatemala	41	47
Ekuador	52	85
Peru	68	85
Paraguay	41	73
Nikaragua	56	81
Dominikar Errep.	56	81

Honduras	39	67
El Salvador	43	56
Bolivia	44	71

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} 60.05 \\ 76.11 \end{bmatrix} \qquad L = \begin{bmatrix} 268.96 & 127.68 \\ 127.68 & 135.02 \end{bmatrix}$$

Kobariantz matrizeari dagozkion autobalioak ondokoak dira:

$\lambda_1 = 346.161 \qquad \lambda_2 = 57.815$

1) Lor ezazu ongien doitzen den erregresio ortogonalaren zuzena.

41.- Estatuko 9 komunitate autonomo handienen X_1, X_2 aldagaiak neurtu dira:
- X_1 harrapatutako kokaina-kopurua, gramotan / milaka biztanle.
- X_2 harrapatutako heroina-kopurua, gramotan / milaka biztanle.

Datuak biribildu ondoren, ondoan ditugun posizioaren eta sakabanatzearen neurketa matrizialak lortu ditugu:

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} 7 \\ 5 \end{bmatrix} \qquad L(x) = \begin{bmatrix} 50 & 15 \\ 15 & 25 \end{bmatrix}$$

Honakoa eskatzen da:
1) Aurkez itzazu grafikoki aldagaien balio zentratuen bektoreak, berauek dauden planoan, eta interpreta ezazu grafiko horretan aldagaien koerlazio-koefiziente lineala multzo horretarako.
2) Lor ezazu ongien doitzen den erregresio ortogonalaren zuzena. Zein da hondar--bariantzaren proportzioa?

42.- Bost indibiduotan datuak jasota bi aldagairentzat ondoko estatistikoak lortu dira:

$$\bar{x}_1 = 10 \qquad \bar{x}_2 = 25 \qquad S^2_{x_1} = 120 \qquad S^2_{x_2} = 65$$
$$S_{x_1 x_2} \cong \frac{2\lambda_1 - \lambda_2}{5} \qquad \lambda_1 = 160$$

non λ_1, λ_2 kobariantz matrizearen autobalioak bait dira.

Honakoa eskatzen da:

1) Ongien doitzen den erregresio ortogonalaren zuzena.
2) Laugarren eta bostgarren indibiduoen hondarrak eta proiekzioak lehenengo hiru indibiduoenak ondokoak direla jakinik.

$$e_1 = 2,2 \qquad e_2 = 0,5 \qquad e_3 = -1$$
$$f_1 = 3 \qquad f_2 = -2 \qquad f_3 = 1$$

43.- Estatuko zazpi probintziatan X_1 (Ameriketara joandakoen kopurua / milaka biztante, 1885-86. urteetan) eta X_2 (errepideak egiten peoiei ordaindutako jornala, 1.859. urtean) neurtu ditugu:

	X_1	X_2
Pontevedra	13,3	4,5
A Coruña	12,7	4,5
Oviedo	8,5	6
Santander	7,4	8
Bartzelona	3,8	8,5
Cadiz	2,7	7,5
Bizkaia	2,7	6

$$\bar{\mathbf{x}} = \begin{vmatrix} 7,3 \\ 6,43 \end{vmatrix} \qquad \mathbf{L} = \begin{vmatrix} 17,311 & -4,65 \\ & 2,245 \end{vmatrix}$$

Honakoa eskatzen da:

1) Aldagai tipifikatuentzako erregresio-zuzen ortogonala.
2) Pontevedra eta Bartzelonari zuzenaren gainean dagozkien proiekzioak.

44.- Bost merkatal saltegitarako ondoko bi aldagaiak neurtu dira.

X: hileroko erosketen bolumena milioika pezetatan.
Y: hileroko sarreren bolumena milioika pezetatan.

X:	1	3	4	5	7
Y:	3	3	7	8	9

Honakoa eskatzen da:

1) Karratu txikienen erregresio ortogonalaren zuzena eta bere aurkezpen grafikoa puntu-hodeiaren irudian.
2) Bost merkatal saltegiei dagozkien proiekzioak (koordenatuak) eta hondarrak erregresio honekiko.
3) Erregresio ortogonalaren zuzena aldagai tipifikatuetarako.
4) Konpara ezazu kasu bakoitzerako erregresioaren egokitasuna.

3. EZAUGARRI ESTATISTIKO BIKOITZAK

Propietate Teorikoei Buruzko Galderak

1.- Sarrikoko Ekonomi eta Enpresa-Zientzien Fakultateko ikaslegoa sailez eta zikloz honela banatzen dela jakinik:

	Ekonomia	Enpresa
1. zikloa	1.150	1.704
2. zikloa	1.427	2.182

konpara ezazu sektore-grafikoen bidez ikasleen banaketa zikloen arabera eta komenta ezazu lortutako informazioa.

2.- Froga ezazu X, Y aldagaien banaketak kolektibo batean independenteak direnean, kolektibo horretan koerlazio gabeak direla.

3.- Lor itzazu S_{uv} eta r_{uv} ondoko erlazioak eta balioak jakinik:

$X = 100U$ $Y = 10V$ $S_{xy} = 12327{,}5$ $r_{xy} = 0{,}85$

4.- Froga ezazu,
a) koerlaziorik gabeko aldagai biren baturaren bariantza zein den.
b) aldagai estatistiko batek beste birekiko bete behar duen baldintza zein den, hauen edozein konbinazio linealekiko koerlazio gabea izan dadin.

5.- Zergatik aldagaien baturaren bariantza ez da, normalean, aldagaien bariantzen batura?

6.- Froga ezazu bi aldagai tipifikatuen arteko kobariantza koerlazio-koefizientea dela.

7.- Defini ezazu, laburki, karratu txikienen doikuntzaren erizpidea.

8.- Azal itzazu batezbestekoaren erregresioaren eta karratu txikienen erregresioaren ezberdintasunak, abantailak eta eragozpenak.

9.- a) Froga ezazu koerlazio-koefizientearen balioa [-1; +1] tartean dagoela.
b) $\hat{Y} = 2X + 3$; $\hat{X} = 3Y + 5$ Y-ren X-ekiko eta X-en Y-rekiko, puntu-hodei baten erregresio-zuzentzat emanik. Arrazona ezazu aurrenekoa onar daitekeen ala ez, zergatia emanez.

10.- Lor itzazu $\hat{Y}$ (X), $\hat{X}$ (Y) bi erregresio-zuzenen adierazpideak, X, Y aldagaiak koerlazio gabeak direla jakinik.

11.- 1) Lor ezazu, arrazonatuz, hondar-bariantzaren adierazpena Y-ren X-ekiko erregresio linealaren kasuan.
2) Erlaziona ezazu, halaber, hondar-bariantza eta mugatze-koefizientea.
3) Azal itzazu koerlazio-koefizienteak har ditzakeen balioak, halaber, erlaziona itzazu balio horiek eta bi erregresio-zuzenek har ditzaketen posizioak.

12.- 1) X eta Y koerlazio gabeko bi aldagai izanik, froga ezazu ondoko berdintasuna:

$$S^2_{(x+y)} = S^2_x + S^2_y$$

2) Froga ezazu R^2 planoan bi erregresio-ekuazioak ekuazio berbera direla, datuak eredu linealari ezin hobeki doitzen zaizkionean.
3) Froga ezazu, halaber, bi erregresio-zuzenak elkartzut direla X, Y aldagaiak koerlazio gabeak direnean.

13.- Bigarren ordenako zenbat momentu zentratu ezberdin ditugu (X_1, X_2, ..., X_5) aldagai estatistikorako kolektiboan?.

14.- Azter itzazu ondoko multzoetan ditugun bateragarritasunak edo bateraezintasunak.
a) Maiztasun-banaketa bikoitz baten taulan:

$n_{ij} = 9$ $\quad n_{i.} = 3$ $\quad n_{n.j} = 4$ $\quad N = 10$

b) (X,Y) aldagai bikoitzaren banaketarako:

$\bar{x} = 3$ $\quad \bar{y} = 5$ $\quad S_{xy} = 0$ $\quad \hat{y} = 6 + 3x$

d) $S^2_e = 1{,}25$ $\quad S^2_y = 2$ $\quad S^2_{\hat{y}} = 0{,}50$ $\quad (\hat{y}(x)$ erregresioa)

15.- Azter eta azal ezazu ondoko 1) 2) 3)...5) kasu bakoitzetik bateragarriak zeintzuk diren.

1) $S_{xy} = 100$ $\quad S_x = 5$ $\quad S^2_y = 400$ $\quad S^2_e = 0$
2) $\hat{Y} = 5X + 8$ $\quad Y = 1/5\hat{X} + 9$ $\quad r_{xy} = 0{,}2$
3) $\hat{Y} = 1/2X + 4$ $\quad \hat{X} = Y + 4$ $\quad \bar{x} = 16$ $\quad \bar{y} = 12$
4) $S^2_{\hat{y}} = 200$ $\quad S^2_e = 50$ $\quad r^2_{xy} = 0{,}8$
5) 2x2 kontingentzi taulan:
$n_{11} = 8$ $\quad n_{12} = 4$ $\quad n_{21} = 6$ $\quad n_{22} = 3$ $\quad r_{xy} = 0{,}5$

16.- Ondoko emaitzak bateragarriak ala bateraezinak al dira? Zergatik?

$\hat{X}_2(X_1)$ erregresioaren kasuan: $b_{21} = +0{,}25$; $m = 4$; $\langle C_1 C_2 \rangle = 16$; $= \|C_1\| = 10$

1) $S_{xy} = -2{,}8$ $S_x = -5$ $S_y^2 = 49$ $r_{xy} = 0{,}08$

2) $S_y = 4$ $S_{xy} = 0$ $S_e^2 = 0$

3) $y_1 = 3$, $y_2 = 5$, $y_3 = 8$, $\hat{y}_1 = 2$, $\hat{y}_2 = 4$, $\hat{y}_3 = 5$, $S_e^2 = 0$ $N = 3$

17.- Ehun indibiduo dituen multzoan X_1, X_2 aldagaiak neurturik, ondoko estatistikoak lortu dira:

$S_{x_1}^2 = 25$ $S_{x_2}^2 = 49$ $S_{x_1 x_2} = -10$

Aurkez itzazu, grafikoki X_1 eta X_2 aldagaien balio zentratuen bektoreak, beroriek sortzen duten planoan.

18.- Froga ezazu bi aldagaien arteko koerlazio-koefiziente lineala bere balio zentratuen bektoreen arteko angeluaren kosinua dela.

Marraz ezazu, horren arabera, balio tipifikatuen bi bektoreen grafikoa, koerlazioaren balioa -1 eta indibiduoen kopurua 9 izanik.

19.- Atera itzazu aldagai zentratuen bektoreen normak eta biderkadura eskalarrak hurrenez hurren aldagairen desbidazio standardarekin eta kobariantzarekin daukaten erlazioa.

20.- R^m espazioan ditugun aldagaien bektoreen aurkezpen grafikoan, multzoaren tamaina m izanik. Zein zentzu geometriko dauka bektorea zentratzeak? Eta tipifikatzeak?

21.- Izan ahal daitezke ondoko estatistikoak 10 indibiduo dituen multzo batenak?.

$\langle C_1 | C_2 \rangle = 100$; $\|C_1\| = 8$; $S_{xy} = 25$; $S_x^2 = 4$

Arrazona ezazu erantzuna.

22.- Puntu-hodei bikoitzetan zuzen bat doitzean, gutxienez bi doikuntz mota lor ditzakegu: ohizkoa eta ortogonala. Halaber, bi kasuak karratu txikienen erizpideari jarraitzen zaizkiola jakina da. Zertan datza ezberdintasuna? Azal ezazu laburki irudiaz lagunduta.

23.- Lor ezazu, arrazonatuz, maiztasun-banaketa bikoitz baten karratu txikienen erregresio ortogonalaren zuzena.

24.- Froga ezazu, analitikoki, ondoko baieztapena:
R^2 espazioan, hodei baten grabitate-zentruarekiko baterako barianza, puntu horretatik pasatzen den zuzen batean proiektatutako bariantzan eta zuzenarekiko daukan hondar-bariantzan deskonposatzen da batukorki.

25.- Froga ezazu erregresio-zuzen ortogonalaren hondarrak eta proiekzioak elkarren artean koerlazio gabeak direla.

Hondarrak eta X, Y jatorrizko aldagaiak, normalean, koerlazio gabeak izango al dira? Zergatik?

Erregresio ortogonalaren hondarrak edo erroreak aldagai estatistiko zentratua osatzen dutela. Zein arrazoi matematikogatik kobariantz matrizearen λ_1, λ_2 autobalioek ezin dute negatiboak izan?. Eta zein arrazoi estatistikogatik?.

26.- Froga ezazu puntu-hodei batean karratu txikienen erregresio-zuzen ortogonalaren adierazpen normalizatuaren α, β koefizienteek kobariantz matrizearen autobektore unitario bat osatzen dutela.

27.- a) Adieraz ezazu, garbi eta laburki, zertan diren berdinak eta zertan ezberdinak puntu-hodei batean doitu ahal dugun:
- Y-ren X-ekiko erregresio lineala.
- erregresio ortogonala.
Noiz izango dira zuzen berbera?
b) Froga ezazu, erregresio ortogonalaren kontzeptutik abiatuz, α, β, γ zuzenaren parametroek hartu behar dituzten balioak batezbesteko bektorearen eta kobariantz matrizearen funtzioan.

28.- α, β erregresio-zuzen ortogonalaren koefizienteak, kobariantz matrizearen autobektore unitario baten osagaiak direla jakinik,

a) Froga ezazu autobektore unitario hori autobalio txikienari dagokiona dela.
b) Froga ezazu erregresio ortogonalaren gainean proiekzioen bektorea eta hondarren bektorea koerlazio gabeak direla.

29.- Kobariantz matrizearen diagonalizazioan ateratzen den zein neurrirekin da baliokidea erregresio ortogonalaren proiektatutako bariantza?. Froga ezazu.

30.- Komenta itzazu, ondoko emaitzetan, eduki ditzakegun erroreak.

a) $S^2_{\hat{x}_1} = 10 \quad r^2 = 0{,}90 \quad S^2_{x_1} = 45 \quad S^2_e = 50$

b) $S^2_{x_1} = 30 \quad S^2_{x_2} = 50 \quad S_{x_1x_2} = -15 \quad \lambda_1 = 45 \quad \lambda_2 = 10$

d) $0{,}5\,(X_1 - 5) - 1{,}5\,(X_2 - 3) = 0$ (erregr. ort. zuzena)

e) $m = 3 \quad e = -1{,}5 \quad e_2 = 2 \quad e_3 = -0{,}5$

$f_1 = -1{,}4 \quad f_2 = -2{,}3 \quad f_3 = 3{,}7$

31.- Azter itzazu bateragarritasuna edo bateragarritasunik eza ondoko kasuetan:

a) $\lambda_1 = 3{,}25 \quad \lambda_2 = 0{,}75 \quad S^2_x = 2{,}5 \quad S^2_y = 1{,}5 \quad S_{FE} = 0{,}25$

(erregresio ortogonala)

b) $S^2_{x_1} = 25 \quad S^2_{x_2} = 64 \quad S_{x_1x_2} = 30 \quad \cos\alpha = 1$

d) $\lambda_1 = 15 \quad S^2_{(x,y)} = 30 \quad S^2_e = 10$

e) $\mathbf{e} = \begin{bmatrix} 0{,}5 \\ -0{,}5 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{f} = \begin{bmatrix} -1{,}5 \\ -1{,}5 \\ 3 \end{bmatrix} \quad \lambda_1 = 4{,}5 \quad \lambda_2 = 0{,}16$

32.- X_1, X_2 aldagaien erregresio ortogonalaren kasuan:

$\lambda_1 = 0{,}4 \quad S^2_E = 1 \quad \mathbf{L} = \begin{bmatrix} 0{,}25 & -0{,}15 \\ -0{,}15 & 0{,}25 \end{bmatrix}$

4. EZAUGARRI ESTATISTIKO ANIZKOITZAK

ADIERAZBURUAK

4.1.- 1) Lor itzazu, arrazonatuz, $X_2 = b_{21} X_1 + b_{23} X_3 + a$ erregresio-planoaren koefizienteak.

2) $X_2 = -0'5X_1 + 1'3X_3 + 5$ erregresio-planoa izanik, zer esanahi daukate -0,5, 1'3 eta 5 koefizienteek?

4.2.- Ondoko taulan emandako gurinaren eta margarinaren datuen bidez,

	GURINA		MARGARINA	
URTEAK	P	K	P	K
0	20	98	10	90
1	20	100	11	95
2	21	101	12	100
3	27	101	22	101

Honakoa eskatzen da:

1) Prezio-indize ponderatuak Laspeyres eta Paasche-ren metodoaz, hurrenez hurren. Komenta itzazu lortutako emaitzak.
2) Gurinaren prezioaren saldutako kopuruarekiko erregresio zuzena eta beren aurkezpen grafikoa.
3) Gurinaren prezioaren saldutako kopuruarekiko eta margarinaren prezioarekiko erregresio-planoa.
4) Azter itzazu bi erregresioak zuk uste duzun koefizienteak edo balioak parekatuz.

4.3.- 490 ikasle dituen lagin bati buruzko ikerketa egin da, bi faktoreren bidez beraien emaitzak nola azaltzen diren ikus dezagun.

X_1 delakoa, lortu zituzten puntuak, X_2 adimen-koefizientea eta X_3 ikasketa--orduak/aste izango dira.

Eta: $\begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \\ \bar{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18,5 \\ 100,6 \\ 24 \end{bmatrix}$ $S_1 = 11,2$ $S_2 = 15,8$ $S_3 = 6$ $r_{12} = 0,60$ $r_{13} = 0,32$ $r_{12} = -0,35$

Kalkula ezazu:

1) X_1 aldagaiaren X_2 eta X_3-aldagaiekiko erregresio-planoa.
2) Mugatze-koefizientea eta koerlazio-koefiziente anizkoitza.
3) Emaitzen irazkina.

4.4.- Lagin aleatorio batean bost familia hartu ditugu. Aurrezkiak, sarrerak eta kapitalak neurtuz, ondoko datuak ditugu:

Fam.	S: Aurrezkia	Y: Sarrera	W: Kapitala
1	600 $	8.000 $	12.000 $
2	1.200	11.000	6.000
3	1.000	9.000	6.000
4	700	6.000	3.000
5	300	6.000	18.000

Honakoa eskatzen da:

1) S-ren Y-rekiko erregresio-zuzena eta, marraztu ondoren, a eta r^2 koefizienteak interpretatzea.
2) S-ren, Y eta W-rekiko erregresio lineala. Kasu honetan Y-ren koefizientea desberdina al da? Zein da koefizienterik hoberena S eta Y-ren arteko erlazioa adierazteko?
3) Zein izango da familia baten aurrezkia, kapitala 5.000 $ eta sarrera 8.000 $ izanik?
4) Zein proportziotan igoko da aurrezkia, kapitala konstantea izanik, sarrerak 2.000 $ igotzen badira?
5) Zer gerta daiteke, sarrerak 1.000 $ igotzen badira eta kapitala 3.000 $?
6) Zein proportziotan azaltzen da edota azaldu gabe geratzen da S-ren bariantza?

4.5.- Aurreko ariketan daukagun lagin berbera kontsideratuz, beste aldagai bat kontutan hartuko dugu: N, haur-kopurua, hain zuzen.

Familia	N: Haurrak
1	5
2	2
3	1
4	3
5	4

Kalkula ezazu:

1) S-ren Y, W, N-ekiko hiperplano tipifikatua.

2) $r^2_{s.y,w,n}$ eta beronen esangura.

3) Komenta itzazu laburki lortutako emaitzak.

4.6.- Lau indibiduotan jaso diren balioak X_1 aldagaiarekiko hauek izan dira:

0 0 0 4

Indibiduo horientzat gainera X_1 aldagaiaren karratu txikienen erregresio linealaren funtzioa $X_2,...,X_n$ aldagaiekiko eta aurreneko bi indibiduoei dagozkien hondarrak lortu dira.

Hondarrak $e_1 = -1$, $e_2 = +1$ izanik eta karratu txikienen erregresio linealaren propietateak kontutan harturik,

Honakoa eskatzen da:

1) Beste bi hondarren balioak; e_3, e_4 balioak, hain zuzen.

2) $r_{1.23...n}$ koerlazio anizkoitzaren balioa.

4.7.- Garapen bidean dagoen lurralde-multzo batean, ondoko aldagai estatistikoei dagozkien balioak jaso dira:

X_1: goi-mailako tituluen batezbesteko kopurua /milaka biztanle

X_2: "per capita" esportatutako balioa.

X_3: Errenta erabilgarria/biztanle.

Datu-matrizearentzat, ondoko koerlazio-matrizea atera da:

$$R = \begin{bmatrix} 1 & +0,48 & +0,52 \\ +0,48 & 1 & +0,92 \\ +0,53 & +0,98 & 1 \end{bmatrix}$$

Honakoa eskatzen da:

1) X_3 aldagaiaren X_1 aldagaiarekiko erregresio-zuzena (biak tipifikatuak daudela kontsideratuz).

2) X_3-ren X_1, X_2 aldagaiekiko erregresio-planoa (hiru aldagaiak tipifikatuak daudela kontsideratuz).

3) Konpara itzazu lortutako bi doikuntzak, beren egokitasunak aztertuz.

4.8.- Lau estatutan ondoko ezaugarriak neurtu ditugu:

X_1 : Nazio Produktu Gordina / biztanle dolarretan
X_2 : Biztanle-kopurua sendagile bakoitzeko
X_3 : Zerbitzu-sektorearen produkzioa produkzio guztirekiko, ehunekotan.

X_1	X_2	X_3
1000	700	10
3000	700	50
5000	700	50
7000	300	50

Honakoa eskatzen da:

1) b_{12} eta b_{13} koefizienteak $\hat{X}_1(X_2,X_3)$ erregresiorako.

2) β_{12} eta β_{13} koefizienteak $\hat{T}_1(T_2,T_3)$ erregresiorako.

3) Zein da erregresorerik inportanteena erregresio honetan? X_2 ala X_3? Arrazona ezazu.

4) X_2 eta X_3 aldagaiak X_1 aldagaiaren erregresioan sartzeak, bat bakarrik sartu ordez, merezi al du? Neur ezazu lortutako abantaila.

4.9.- Ondoko datu-matrizean, lau indibiduori eta X_1, X_2, X_3 aldagaiei dagozkien datuak ditugu:

X_1	X_2	X_3
-1	+3	+6
-1	+3	+4
-1	+1	+2
+3	+1	0

Honakoa eskatzen da:

1) X_3 aldagaiaren X_1, X_2-aldagaiekiko karratu txikieneko erregresio-planoa.
2) Erregresio-plano berbera baina aldagaiak tipifikaturik daudenean.
3) Erregresio-koefiziente guztien irazkin edo komentario laburra.
4) $r_{3.12}$ koerlazio-koefiziente anizkoitzaren balioa, r_{13} eta r_{23} balioekin parekatuz.
5) Erregresio honen hondarrak edo erroreak. Zein izango da beraien balioen karratuen batezbestekoa?
6) $r_{12.3}$ koerlazio-koefiziente partziala eta gero r_{12} koefizientearekin parekatzea.

4.10.- Irakasle batek bi azterketa partzialetan eta azkeneko azterketan ateratako puntuazioen arteko erlazioa aztertu nahi du.

X_1, X_2, eta X_3 aldagaiek lehenengo partzialeko, bigarreneko eta azkeneko azterketako ikasleen puntuazioak, hurrenez hurren, errepresentatzen badituzte eta 100 ikasle dituen lagin batean emaitza hauek eduki baditugu:

$\bar{x}_1 = 6,8$	$\bar{x}_2 = 7$	$\bar{x}_3 = 74$
$S_1 = 1,0$	$S_2 = 0,8$	$S_3 = 9$
$r_{12} = 0,60$	$r_{13} = 0,70$	$r_{23} = 0,65$

Honakoa eskatzen da:

1) Kobariantz matrizea.
2) Aurresan ezazu ikasle baten azkeneko azterketako puntuazioa, beste bi azterketetan 9 eta 7, hurrenez hurren, lortu baditu.
3) Koerlazio-koefiziente anizkoitza eta $r_{13.2}$ koerlazio-koefiziente partziala.

4.11.- Lau indibiduotan lortutako datuak X_1, X_2, X_3 aldagaien arabera ondokoak dira.

X_1	X_2	X_3
1	1	1
2	1	1
3	2	1
4	2	3

Honakoa eskatzen da:

1) Batezbesteko-bektorea eta kobariantz matrizea.
2) Koerlazio-matrizea.
3) X_1 aldagaiaren X_3-rekiko eta X_2-ren X_3-rekiko erregresio-zuzenak. Bazter ezazu X_1, X_2 aldagaietan X_3 aldagaiak duen eragina edo efektua.
   Kalkula ezazu aldagai depuratu horien koerlazio-koefizientea.
4) X_1, X_2-ren arteko koerlazio-koefiziente partziala.
5) X_1 aldagaia X_2, X_3 aldagaien konbinazio lineal bezala estimatzen duen karratu txikienen erregresio-planoa.
6) $r_{1.23}$ koerlazio-koefiziente anizkoitza.
   Erlaziona ezazu planoari dagokion hondar-bariantzarekin.

4.12.- Korporazio industrial bateko Pertsonal-sailak, asteko alokairua, zerbitzu-denbora eta enplegatuen adinen arteko erlazioa aztertu nahi du gerentzi-mailan.

Horretarako 8 enplegatu aukeratu ditu eta ondoko datu-taula hau beraiei dagokie:

Asteko alokairua	Zerbitzu-denbora	Adina
52.000 pta.	27	46
56.000	31	57
44.000	18	41
41.000	21	45
43.000	29	55
34.000	7	28
32.000	3	28
42.000	18	46

Honakoa eskatzen da:

1) Alokairu-aldagaiaren beste bi aldagaiekiko erregresio-planoaren ekuazioa.
2) Erregresio-planoaren ekuazioa, aldagaiak tipifikatuak izanik.
   Komenta itzazu erregresio horren koefizienteak beste erregresioaren koefizienteekin parekatuz.
3) Azter ezazu doikuntzaren egokitasuna.
4) Zein da aurrikusten dugun alokairua, 15 urteko zerbitzu-denbora eta 47 urteko adina dituen enplegatuarentzat?
5) Atera itzazu (Alokairu, Zerbitzu-denbora) eta (Alokairu, Adina) bikoteen koerlazio partzialak.
   Konpara itzazu, halaber, koerlazio horiek koerlazio totalekin, aldagaien arteko elkar-aldaketak azalduz.

4.13.- Ondoko sei urteko segidetan, X_1, X_2, X_3 aldagaiek hartzen dituzten balioak dauzkagu:

X_1: Nazio-Produktu Gordina	X_2: Gasolina--kontsumoa	X_3: Elektrizitate--kontsumoa
8	4	20
10	3	22
12	6	23
13	6	26
15	7	27
18	8	30

Honakoa eskatzen dira:

1) $r_{12.3}$, $r_{13.2}$, $r_{23.1}$ koerlazio partzialak.
2) X_1 aldagaiaren erregresio-planoa eta koerlazio-koefiziente anizkoitza.

4.14.- X_1, X_2, X_3 aldagaietarako daukagun batezbesteko bektorea eta kobariantz matrizea hauek dira:

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{L} = \begin{bmatrix} 4 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 9 \end{bmatrix}$$

Honakoa eskatzen da:

1) X_2 aldagaiaren X_1, X_3-aldagaiekiko erregresio-planoaren ekuazioa.
2) Hondar-bariantza eta koerlazio koefiziente anizkoitza.
3) $r_{12.3}$ eta $r_{23.1}$ koerlazio partzialaren koefizienteak r_{12} eta r_{23} koerlazio koefizienteekin parekatu.
4) Komenta ezazu, laburki, X_2 aldagaiak X_1, X_3 aldagaiekin dituen erlazioak.

4.15.- Lau familiatarako ondoko datuak ditugu:

X_1: hileroko sarrerak milaka pezetatan
X_2: hileroko gastua ikuskizun publikotan milaka pezetatan
X_3: daukaten bideogailu-kopurua.

X_1	X_2	X_3
100	8	0
120	9	0
130	9	0
170	2	1

Batezbesteko bektorea eta kobariantz matrizeak hauexek dira:

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} 130 \\ 7 \\ 0{,}25 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{L} = \begin{bmatrix} 650 & -62{,}5 & 10 \\ -62{,}5 & 8{,}5 & -1{,}25 \\ 10 & 3 & -1 \end{bmatrix}$$

Baina **L** matrizean bi errore ditugu.

Honakoa eskatzen da:
1) Zeintzuk dira errore horiek?
2) Ordezka itzazu egiazko balioez.
3) Ikuskizun publikotan egindako gastua beste bi aldagaien bidez azaltzen duen erregresio-plano tipifikatua.

4) Lor ezazu $r^2_{2.13}$, β_{ij} eta r_{ij} koefizienteen bidez.

5) Lor ezazu $r_{12.3}$ koerlazio partzialaren koefizientea, hau da, sarrera eta ikuskizun publikotan daukaten gastuen arteko koerlazio-koefizientea bideogailu-kopurua kontrolatuz. Konpara ezazu r_{12} koefizientearekin eta komenta ezazu bi koefizienteen arteko desberdintasuna.

4.16.- Bost urteko ondoko segidak emanez:

Urteak	Y	X_1	X_2	X_3
1.955	20	4	10	2
1.956	22	5	12	3
1.957	23	7	13	5
1.958	24	6	16	6
1.959	26	8	19	9
1.960	?	8	22	12

non: Y = nazio-errenta, milaka milioi pezetatan.
X_1 = nekazal sektoreko produktu gordina, milaka milioi pezetatan.
X_2 = industri sektoreko produktu gordina, milaka milioi pezetatan.
X_3 = hezkuntz sektoreko aurrekontua, milaka milioi pezetatan.

Honakoa eskatzen da:

1) Nazio-Errenta eta Nekazal produkzioaren arteko koerlazioa, industri produkzioa eta hezkuntz sektorea konstante izanik.
2) Nazio-Errenta eta Industri produkzioaren arteko koerlazioa nekazal sektorea eta hezkuntza sektorea konstante izanik.
3) Nazio-Errenta eta Hezkuntz sektorearen arteko koerlazioa X_1, X_2 konstante izanik.
4) Nazio-Errentaren beste hiru aldagaiekiko erregresio-hiperplanoa.
5) Y = N-E estimatua 1.960. urterako, beste aldagaien balioak taulakoak izanik.
6) Y eta (X_1, X_2, X_3) multzoaren arteko koerlazioa.
7) Kalkula ezazu (X_1, X_2, X_3)ren bidez N-E aurresanda, dukagun batezbesteko errorea.

4.17.- Ekialde Hurbileko bost estaturentzat, ondoko aldagai jarraiei dagozkien balioak ditugu:

X_1: hazkuntza demografikoaren portzentaia.
X_2: zineko jarlekuen batezbesteko kopurua/milaka biztanle.
X_3: esportatutako balioa/biztanle dolarretan.

	X_1	X_2	X_3
Afganistan	2,5	0,7	13
Jordania	3,2	8,4	63
Libano	3,1	33,0	244
Siria	3,3	7,6	140
Turkia	2,4	31,5	36

Honakoa eskatzen da:

1) X_2 aldagaiaren X_1 eta X_3-ekiko karratu txikienen erregresio-planoa.
2) Zein izango litzateke erregresio-planoa, hiru aldagaiak tipifikatuak izango balira?
3) Doikuntzaren egokitasunaren azterketa.
4) Ondoko koerlazio-koefiziente partzialak; $r_{12.3}$ eta $r_{23.1}$, hain zuzen. Konpara itzazu koerlazio horiek r_{12}, r_{13} koerlazio-koefiziente totalekin.

4.18.- X_1, X_2, X_3 aldagaien ondoko estatistikoak ezagutuz:

$$\bar{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 10 \\ 100 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} S_1 = 1 \\ S_2 = 5 \\ S_3 = 20 \end{matrix} \quad \mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1 & 0,4 & -0,4 \\ 0,4 & 1 & 0,4 \\ -0,4 & 0,4 & 1 \end{bmatrix}$$

1) Lor itzazu X_3 aldagaiaren X_1, X_2 aldagaickiko erregresio-planoa eta erregresio-plano tipifikatua.
2) Komenta itzazu lortutako b eta β koefizienteak, beraien arteko desberdintasunak adieraziz.
3) Lor ezazu $r_{12.3}$ koerlazio-koefizientea eta komenta ezazu beraren esangura.

4.19.- Bost automobil-motatan ondoko aldagaiak neurtu dira.

X_1 : prezioa milaka milioi pezetatan
X_2 : zerotik ehun kilometro/ordu abiadurara pasatzeko azelerazio-denbora.
X_3: potentzia Z.P.tan

X_1 :	1	2	3	4	5
X_2 :	15	15	10	10	5
X_3 :	60	90	110	130	160

1) Datu horiei dagozkien estatistikoak ondokoak dira:

$$\bar{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 3 \\ 11 \\ 17 \end{bmatrix} \quad \mathbf{L} = \begin{bmatrix} 2 & -5 & 48 \\ -5 & 14 & -120 \\ 48 & -120 & 1060 \end{bmatrix}$$

baina, errore bat dagoenez, ikasleak kalkulurik egin gabe zein den ikusi behar du. Zergatik ezin du balio horrek egiazkoa izan?

2) Kalkula itzazu egiazko balio hori eta $\hat{X}_1(X_2,X_3)$ erregresio - planoa.

3) Konpara itzazu X_1 aldagaiaren erregresioan X_2, X_3 erregresore bakoitzak daukan eragina "β" koefizienteen bidez.

4.20.- Bost unitate estatistiko dituen talde batentzat X_1, X_2, X_3 aldagaiak neurtu dira, kobariantz matrizea ondokoa delarik:

$$\mathbf{L}=\begin{bmatrix}4 & 4 & 4\\ 4 & 16 & 10\\ 4 & 10 & 9\end{bmatrix}$$

X_3-ren X_1, X_2-ekiko karratu txikienen erregresio lineala kontsideratuz.

Honakoa eskatzen da:

1) S_e^2; hondar-bariantza eta $r_{3.12}$ koerlazio-koerfiziente anizkoitza.

2) Erregresio horren lehen hiru hondarrak $e_1 = 1, e_2 = -2, e_3 = 0$ izanik, lor itzazu e_4 eta e_5.

4.21.- 1) Defini ezazu X_1, X_2 aldagaien arteko koerlazio partzialaren koefizientea $X_3,...X_n$ aldagaiaren eragina baztertuz.

2) Lau indibiduo dituen multzo baterako kobariantz matrize adjuntua ondokoa izanik:

$$\mathbf{A_L}=\begin{bmatrix}18 & -36 & 0\\ -36 & 288 & \mathbf{L}_{23}\\ 0 & \mathbf{L}_{23} & 8\end{bmatrix}$$

Honakoa eskatzen da:

lor ezazu $\mathbf{L}_{23}$ adjuntua, X_2 aldagaiaren X_1 aldagaiarekiko erregresioaren hondarrak ondokoak izanik:

$$\frac{3}{4}\ ,\ -\frac{2}{3}\ ,\ 0\ ,\ -\frac{2}{3}$$

eta, X_3 aldagaiaren X_1 aldagaiarekiko erregresioarenak ondokoak izanik:

$$4\ ,\ 4\ ,\ 0\ ,\ -8$$

EBAZPIDEAK

4.1.

2) Koefizienteen esanahia hau da:
X_2 aldagaiaren aurresanean X_1 aldagaiaren unitate bakoitzetik erdia jeisten dela eta X_3 aldagaiaren unitate bakoitzetik, 1,3 gehitzen dela. Halaber, 5 balioa plano horren jatorriaren ordenatua da. Hots, $x_1 = x_3 = 0 \Rightarrow \hat{x}_2 = 5$ eta adibidez: $x_1 = 1$, $x_3 = 1 \Rightarrow \hat{x}_2 = 5{,}8$

4.2.

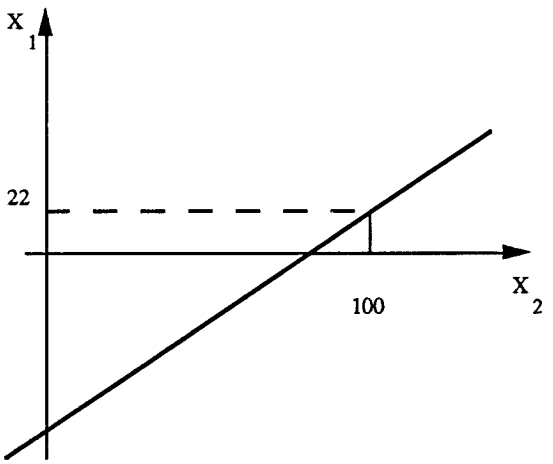
1)

t	L_t	P_t
0	100	100
1	103,15	103,22
2	109,72	109,97
3	161,75	163,33

Dakusagunez, emaitzak oso antzekoak dira; urtez urte kopuruen proportzioak oinarrizko denborarekiko ez bait dira oso desberdinak.

2) X_1 : P (Gurina), X_2 : K (Gurina) izanik

$$\hat{X}_1 - 22 = 1{,}33(X_2 - 100)$$



3) X_1, X_2 aurrenekoak eta X_3 : P (Margarina) izanik

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} 22 \\ 100 \\ 13,75 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{L} = \begin{bmatrix} 8,5 & -2 & 14 \\ & 1,5 & 3,5 \\ & & 23,18 \end{bmatrix}$$

$$\hat{X}_1 - 22 = -0,117(X_2 - 100) + 0,622(X_3 - 13,75)$$

4) Mugatze-koefizienteak parekatuz:

$$r^2 = 0,31 \text{ eta } r^2_{1.23} = 0,996$$

Dakusagunez, zuzenaren kasuan, aldagai dependentearentzat azaldutako bariantza % 31koa bakarrik da. Planoaren kasuan, ordea, % 99,6koa.
Hortik ateratzen dugun ondorioa hau da: gurinaren prezioen aurresanean ondasun honen kopurua ez dela garrantzitsua eta margarinaren prezioa, aldiz, erabakiorra dela.

4.3.

1)

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1 & 0,6 & 0,32 \\ 0,6 & 1 & -0,35 \\ 0,32 & -0,35 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\hat{X}_1 - 18,5 = -\frac{12,2}{15,8} \cdot \frac{\mathbf{R}_{12}}{\mathbf{R}_{11}} (X_2 - 100,6) - \frac{11,2}{6} \frac{\mathbf{R}_{13}}{\mathbf{R}_{11}} (X_3 - 24)$$

$$\hat{X}_1 - 18,5 = 0,575\ (X_2 - 100,6) + 1,127\ (X_3 - 24)$$

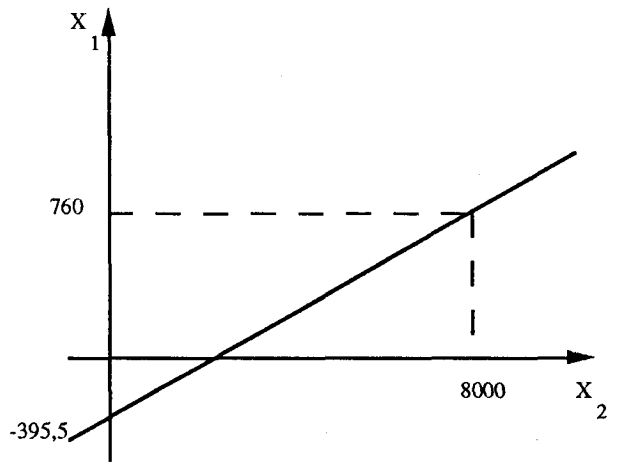
2) $r_{1,23} = 0,82 \qquad r^2_{1,23} = 0,68$

3) $r^2_{12} = 0,36$ izanik, hau esan dezakegu: lortutako puntuak adimen-koefizientearen menpe kontsideratuta bariantzaren % 36 bakarrik mugatzen dela. Aldagai horrekin batera ikasketa-orduak erregresore bezala kontsideratuta, ordea, % 68 mugatzen da.
Argi dago, bada, errealitatean lagin honetan bezala gertatzen bada ikasketa-orduak guztiz garrantzitsuak direla emaitza onak lortzeko.

4.4.

1) Aldagaiak X_1, X_2, X_3, hurrenez hurren, izendatuz

$$\hat{X}_1 = -395,5 + 0,144\ X_2 \qquad r_2 = 0,76$$



a = - 395,5 izateak honakoa esan nahi du: sarrerak zero izanik familiak, lagin eta eredu honen arabera, 395,5 dolarretan zorpetu egiten direla.
$r^2 = 0,76$ izanik, Aurrezkiaren bariantza % 76 azalduta geratzen da.

2) $\hat{X}_1 = 105 + 0,115 X_2 - 0,0292\ X_3$

Ereduan, erregresore bat gehiago sartuta, nahitaez erregresioa hobetu egiten da. Ondorioz, 0,115 da koefizienterik onena aurrezki eta sarreraren arteko erlazioa adierazteko.

3) $\hat{X}_1(8000,5000) = 878\$$

4) 230 $

5) 26,8 $

6) $r^2_{1.23} = 0,98$; % 96 azaldua eta % 2 azaldu gabe.

4.5.

1) Aldagaiak X_1, X_2, X_3, X_4, hurrenez hurren izendatuz $\hat{T}_1 = 0,635T_2 - 0,42T_3 - 0,14T_4$

2) $r^2_{1.234} = 0,998$; % 99,8 geratzen da mugatuta aurrezkiaren bariantza hiru erregresore horien bidez, hau da, ia guztiz mugatuta.

3) Erregresio tipifikatua egitearen abantailaz ohartu behar duen, hots, neurri-unitateen eragina bazterturik geratzen da edota aldagai bakoitza bere desbidazio tipikoarekiko neurturik, guztiak eskala berean ipinita daude.

Erregresio-koefizienteek, bada, honakoa esaten digute sarrera 0,635 indar erlatiboaz sartzen da zentzu positiboaz aurrezkiaren aurresanean, kapitala eta haurrak 0,42, 0,14 indar erlatiboaz eta zentzu negatiboan, hurrenez hurren.

4.6.

1) Erroreak zentratuak eta balio estimatuekin koerlazio gabeak direnez, $e_3 = \mp 1$, $e_4 = \pm 1$ lortzen dugu.

2)

$$r^2_{1.23..n} = 1 - \frac{Se^2}{S_1^2} = 0,66 \qquad r = 0,816$$

4.7.

1) $\hat{T}_3 = 0,52T_1$

2) ($R_{33} = 0,77$; $R_{31} = -0,05$; $R_{32} = -0,73$) Adjuntuen bitartez.

$$\hat{T}_3 = 0,064T_1 + 0,95T_2$$

3) Lehenengo kasuan,
$0,52^2 = 0,27$ (% 27) izanik, doikuntza ahula da.

Bigarrena, askoz hobea da:

1- 0,0280/0,7696 = 0,964 (% 96,4) emaitza honen zergatia, bigarren erregresoreari dagokio; berak bakarrik X_3-ren bariantza % 96 batetan mugatzen bait du.

4.8.

1) $b_{12} = -7{,}501$ $\quad b_{13} = 75{,}005$

2) $\beta_{12} = -0{,}581$ $\quad \beta_{13} = 0{,}581$

3) Bi erregresoreek garrantzi berdina daukate erregresioan, biek X_1 aldagaiaren aurresanean indar erlatibo berdinaz parte hartzen bait dute.

4) $r^2_{12} = r^2_{13} = 0{,}60$ mugatze-koefizientea aldagai bat bakarrik sartuz.
$r^2_{1.23} = 0{,}90$ da mugatze-koefizientea planoa kontsideratuz, hau da, % 30eko abantaila daukagu.

4.9.

$$\bar{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{L} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -3 \\ -1 & 1 & +2 \\ -3 & +2 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1 & -0{,}577 & -0{,}774 \\ -0{,}577 & 1 & +0{,}894 \\ -0{,}774 & +0{,}894 & 1 \end{bmatrix}$$

Estatistiko hauen bidez lortzen da:

1) $\hat{X}_3 = 1{,}5X_2 - 0{,}5X_1$

2) $\hat{T}_3 = 0{,}671T_2 - 0{,}387T_1$

3) b_{32} b_{31} baino hiru bider handiagoa da alde batetik, erregresioan zeregin handiagoa daukalako (β_{32} benetan β_{31} baino handiagoa da) baina bestetik X_2 aldagaia eskala txikiagoarekiko aldatzen delako $\left(S_1^2 = 3\ ;\ S_2^2 = 1\right)$

4) $r^2_{3.12} = 1 - \dfrac{1}{5.2} = 0{,}9$ edota

$r^2_{3.12} = -0{,}387 \,.\, (-0{,}0774) + 0{,}671 \,.\, (0{,}894) = 0{,}9$

5) $+1, -1, 0, 0.$ $\qquad \overline{e^2} = 1/2$

6) $r_{12.3} = 0{,}405$
X_1 eta X_2-ren arteko kobariazio negatiboa, X_3 aldagaia baztertuta positibo bihurtu da.

4.10

1)

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0,48 & 6,3 \\ 0,48 & 0,64 & 4,68 \\ 6,3 & 4,68 & 81 \end{bmatrix}$$

2) $\hat{X}_3 - 74 = 4,3647\,(X_1 - 6,8) + 4,0479\,(X_2 - 7)$

$x_1 = 9,\ x_2 = 7 \Rightarrow \hat{x}_3 = 83,6$

3) $r_{3.12} = 0,757 \qquad r_{13.2} = 0,5$

4.11

1)

$$\bar{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 5/2 \\ 3/2 \\ 3/2 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{L} = \begin{bmatrix} 5/4 & 1/2 & 3/4 \\ 1/2 & 1/4 & 1/4 \\ 3/4 & 1/4 & 1/4 \end{bmatrix}$$

2)

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}} \\ & 1 & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ & & 1 \end{bmatrix}$$

3) $\hat{X}_1 = X_3 + 1 \qquad \hat{X}_2 = X_3 \ / \ 3 + 1$

X_3	$\hat{X}_1$	$\hat{X}_2$	$e_{13} = X_1 - \hat{X}_1$	$e_{23} = X_2 - \hat{X}_2$
1	2	4/3	-1	-1/3
1	2	4/3	0	-1/3
1	2	4/3	1	2/3
3	4	2	0	0

$r_{e,13\ e,23} = \sqrt{3}/2$

4)

$r_{12.3} = \sqrt{3}/2$

5) $\hat{X}_1 = \frac{3}{2} X_2 + \frac{1}{2} X_2 - \frac{1}{2}$

6)

$$r_{1.23} = \sqrt{1 - \frac{S_e^2}{l_{11}}} = \sqrt{1 - \frac{1/8}{5/4}} = \sqrt{1 - \frac{1}{10}} = 0{,}948$$

$$S_e^2 = \frac{1}{8}$$

4.12.

$$\bar{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 43 \\ 19{,}25 \\ 43{,}25 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{L} = \begin{bmatrix} 57{,}25 & 63{,}50 & 62{,}50 \\ & 89{,}19 & 91{,}81 \\ & & 101{,}94 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1 & 0{,}889 & 0{,}818 \\ & 1 & 0{,}963 \\ & & 1 \end{bmatrix}$$

Estatistiko hauen bidez lortzen da:

1) $\hat{X}_1 = 1{,}11\, X_2 - 0{,}385\, X_3 + 38{,}283$

2) $\hat{T}_1 = 1{,}39\, T_2 - 0{,}51\, T_3$

3) $r_{1.23} = 0{,}81$

4) 36.830 pta. gutxi gorabehera.

5) $r_{12.3} = 0{,}65$ eta $r_{12} = 0{,}889$

$r_{13.2} = -0{,}31$ eta $r_{13} = 0{,}818$

Adibide honetan, hiru aldagaiek beraien arteko kobariazio positibo sakona aurkezten dute, baina "alokairu" eta "adinaren" arteko erlazioa ($r_{13} = 0{,}818$) faltsua dela kontsidera daiteke, zeren eta alokairua igo egiten da adinarekin batera zerbitzu--denbora dela medio, hau da, X_2 aldagaiaren eragina baztertuta, konstantea balitz bezala kontsideratuz $r_{13.2} = -0{,}31$ daukagu.

4.13.

1)

$$\begin{bmatrix} 1 & 0,9155 & 0,9851 \\ & 1 & 0,8873 \\ & & 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{aligned} r_{12.3} &= 0,516 \\ r_{13.2} &= 0,9307 \\ r_{23.1} &= 0,2033 \end{aligned}$$

2) $\hat{X}_1 = -8,8947 + 0,3684\, X_2 + 0,7894\, X_3$

$r^2_{1.23} = 0,978 \qquad r_{1.23} = 0,988$

Erlazio-maila sakona adierazten du.

4.14.

1) $\hat{X}_2 = 0,156\, X_1 - 0,187\, X_3 + 2,28$

2) $S^2_e = 0,468 \qquad r_{2.13} = 0,729$

3) $r_{12.3} = 0,39$ eta $r_{12} = 0,5$

$r_{23.1} = -0,60$ eta $r_{23} = -0,66$

X_3 aldagaiaren eragina kontrolatuta X_1 eta X_2-ren arteko koerlazioa txikiagotu egiten dela ikusten dugu: X_3 aldagaiak koerlazio negatiboa zuen biekin.
Neurri txikiagoan X_1 aldagaiaren eragina baztertuta X_2, X_3-ren arteko koerlazio negatiboa ere murriztu da balio absolutuan.
Koerlazio partzial eta erregresio partzialeko koefizienteen arteko erlazioa ikusten dugu erregresio-planoan.

4.15.

1) Kobariantz matrizean, bi erroreak argiro ikusten dira, $S_{23} = S_{32}$ izanik benetako balioa $S_{23} = S_{32} = -1,25$ izango da datu-matrizean X_2, X_3 aldagaien balioak alderantziz dihoazela ikusten bait da. Bestalde, S^2_3 bariantza izanik negatiboa ezin du izan.

Kalkuluak eginez:

$$S_{23} = S_{32} = -1,25, \quad S^2_3 = 0,1875$$

2)

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 650 & -62,5 & 10 \\ -62,5 & 8,5 & -1,25 \\ 10 & 3 & -1 \end{bmatrix}$$

3) $\hat{T}_2 = 0,3123\ T_1 - 1,2730\ T_3$

4) $r^2_{2.13} = r_{12}\ \beta_{21} + r_{23}\ \beta_{23} =$
$= (-0,8408) \cdot 0,3123 + (-0,9901)\ (-1,2730) =$
$= 0,9978$ % 99,78 da azaldutako bariantza.

5) $r_{12.3} = 0,94$ $r_{12} = 0,84$
Dakusagunez, bideogailu-kopurua kontrolatuz agertzen zaigu sarrerek eta ikuskizun publikotan egindako gastuek daukaten koerlazio positiboa, hots, argi dago gehien irabazten dutenek ikuskizun publikotan gutxiago gastatzen badute bideogailua daukatelako dela.

4.16.

Aldagaiak Z_1, Z_2, Z_3, Z_4 berrizendaturik

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1 & 0,9193 & 0,9803 & 0,9798 \\ & 1 & 0,8497 & 0,9238 \\ & & 1 & 0,9812 \\ & & & 1 \end{bmatrix}$$

1) $r_{12.34} = 0,9974$
2) $r_{13.24} = 0,9980$
3) $r_{14.23} = -0,9938$
4) $\hat{Z}_1 = 8 + Z_2 + Z_3 + Z_4$
5) $\hat{Z}_1 = \hat{Y} = 8 + 8 + 22 - 12 = 26$ mila milioi pta.
6) $r_{1.234} = 0,999$ $r^2_{1.234} = 0,9998 \simeq 1$
7) $S^2_e = 0,0259$

4.17.

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} \%2,9 \\ \%16,24 \\ 99,20\$ \end{bmatrix} \qquad L = \begin{bmatrix} 0,14 & -0,774 & 20,1 \\ & 178,274 & 546,65 \\ & & 7073,36 \end{bmatrix}$$

$r_{12} = -0,155$
$r_{13} = 0,639$
$r_{23} = 0,487$

Estatistiko hauen bidez lortzen da:

1) $\hat{X}_2 = 82,09 + 0,157\ X_3 - 28,08\ X_1$

2) $\hat{T}_2 = 0,99\ T_3 - 0,79\ T_1$

3)
$$r^2_{2.13} = 1 - \frac{0,234}{0,592} = 0,6045$$

Aldagai dependentearen bariantzaren proportzio nabaria azaltzen da.
Hala ere, hondarra gelditzen da eta honek, datu-matrizean ipini den zerbaitetan zergatia dauka, hain zuzen. Afganistan eta Siriak zine-jarleku aldagaiarekiko duten hain balio txikia eta Turkiak, aldiz, hain handia.
Bestalde oso estatu esportatzaileak sartu dira; seguraski, "per capita" errenta hobea izango litzateke erregresore bezala esportatutako balioa baino.

4) $r_{12.3} = -0,694$
Ahalmen esportatzaileekin daukaten kobariazioa kenduz, hazkuntza demografikoa eta zine-jarlekuen arteko erlazioa are eta aurkakoagoa bihurtzen da.

$r_{23.1} = 0,771$
Aldiz, hazkuntza demografikoarekin daukaten kobariazioa baztertuz, erlazio zuzena sakondu egiten da.

4.18.

1) $\hat{X}_3 = 86,73 - 13,3\,X_1 + 2,6\,X_2 \qquad \hat{T}_3 = 0,6\,(T_2 - T_1)$

2) Kasu honetan, X_3-ren erregresioan, erregresore bakoitzak indar erlatibo berdinaz hartzen du parte, baina aurkako zeinuaz.

Aldiz, b_{31} bost bider handiagoa da balio absolutuan, b_{32} baino, S_1 S_2 baino bost bider txikiagoa delako.

3) $r_{13.2} = -0,6$ $r_{13} = 0,4$ izanik, X_2-ren eragina kontrolatuz (koerlazio positiboa bait du biekin) X_1 eta X_3-ren arteko koerlazioa are eta negatiboago bihurtzen dela ikusten dugu.

4.19.

1) Argi dago hirugarren batezbestekoak ezin duela 17 balioa izan; aldagaiaren balio-multzotik at bait dago.

2) $\bar{x}_3 = 110$

$\hat{X}_1 = -0,0217\,X_2 + 0,039\,X_3 - 1,065$

3) $\beta_{12} = -0,05 \qquad \beta_{13} = 0,94$

β_{13} hemeretzi bider handiagoa da balio absolututan β_{12} baino. Honek hau esan nahi du X_2, X_3 aldagaiek erlazio horretan daukatela eragina X_1 aldagaiaren aurresanean, hau da, potentzia askoz garrantzitsuagoa da azelerazio-denbora baino automobilen prezioa aurresateko.

4.20.

1) $S_e^2 = 2 \qquad r_{3.12} = 0,8819$

2) $S_e^2 = 2$ eta $\sum e = 0$ izanik

$e_4 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ eta $e_5 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$

4.21.

$$r_{23.1} = r_{e_{21}\, e_{31}} = \frac{-L_{23}}{(L_{22}\, L_{33})^{1/2}} = \text{izanik}$$

$r_{23.1} = 0,5$ eta $L_{23} = -24$

BESTE ADIERAZBURU BATZUK

1.- O.N.U.ko urtekari estatistikotik ondoko datuak atera ditugu, 1.976. urtea harturik:

	X_1	X_2	X_3
Birmania	0'69	5	96
Bangla Desh	0'23	5	112
Sri Lanka	3'85	38	214
Indonesia	0'75	61	234
Tailandia	1'56	69	351
Malaysia	2'93	322	825

X_1 aldagaia, ospitale-ohe/1.000 biztanle
X_2 esportatutako balioa/biztanle (dolarretan) eta
X_3 Nazio-errenta erabilgarria (dolarretan) izanik.

Kalkula ezazu:
1) X_3-ren X_1 eta X_2 -rekiko erregresio lineala.
2) Koerlazio-koefiziente anizkoitza.
3) Zein da aldagai independenteek X_3-ren bariantzatik azaltzen duten proportzioa?
4) Komenta itzazu laburki lortutako emaitzak.

2.- **X**, Ondoko datu-matrizea emanik:

$$\mathbf{X}=\begin{bmatrix}0 & 6 & 1 & 0\\ 0 & 6 & 4 & 4\\ 0 & 3 & 5 & 0\\ 0 & 3 & 4 & 6\\ 5 & 2 & 1 & 0\end{bmatrix}$$

Honakoa eskatzen da:
1) Batezbesteko-bektorea
2) Kobariantz matrizea datu-matrize zentratuaren bidez.
3) Datu-matrize tipifikatua.
4) A_L eta A_R, **L** eta **R**-ren matrize adjuntuak
5) $|\mathbf{L}|$ eta $|\mathbf{R}|$ determinanteak

6) Ondoko arrazoiak azaltzea,

$$\frac{|\mathbf{L}|}{|\mathbf{R}|}\ ,\ \frac{\mathbf{L}_{22}}{\mathbf{R}_{22}}\ ,\ \frac{\mathbf{L}_{34}}{\mathbf{R}_{34}}$$

7) $\mathbf{Y}$ datu - matrizea $\boldsymbol{Y}=\mathbf{A}\boldsymbol{X}+\mathbf{b}$ izanik

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}0 & 2 & 1 & 0\\ 1 & 0 & -1 & 1\end{bmatrix} \qquad \mathbf{b}=\begin{bmatrix}-3\\ 2\end{bmatrix}$$

8) $\bar{\mathbf{y}}$ batezbesteko-bektorea, $\bar{\mathbf{x}}$ batezbesteko-bektorearen bidez.

9) $\mathbf{L}(\boldsymbol{Y})$ kobariantz matrizea $\mathbf{L}(\boldsymbol{X})$ kobariantz matzizearen bidez.

Oharra: $\mathbf{X}$, $\mathbf{Y}$ datu-matrizeen arteko erlazioa hauxe da:

$$\mathbf{Y}=\mathbf{X}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}+\begin{bmatrix}1\\ 1\\ :\\ 1\end{bmatrix}\mathbf{b}^{\mathrm{T}}$$

3.- Hamar etxebizitzatarako ondoko datuak hartu ditugu:

X_1: Beroketa-zerbitzuan erabilitako propano-kontsumoa.
X_2: inguruko tenperatura Fahrenheit gradutan.
X_3: sabaiaren isolamendua zentimetrotan.

X_1	X_2	X_3
270	40	2
360	25	2
160	40	10
50	75	6
95	65	6
230	40	6
370	10	6
300	10	6
240	25	10
125	70	2

Honakoa eskatzen da:

1) $\hat{X}_1\,(X_2,\ X_3)$; karratu txikienez doitutako erregresio-planoa.

2) Konstantea (jatorriaren ordenatua) eta erregresio-koefizienteen esanahia azaltzea.

4.- FORD RENAULT eta CITROEN automobilen saldutako kopuruak ditugu. Halaber, lortutako koerlazio-matrizea eta desbidazio tipikoak.

F	R	C
46	60	14
31	45	14
61	75	14
58	80	22
43	65	22
73	95	22
70	100	30
55	85	30
85	115	30

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1 & 0,97 & 0,62 \\ & 1 & 0,80 \\ & & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} S_1 = 15,86 \\ S_2 = 20,41 \\ S_3 = 6,53 \end{matrix}$$

Honakoa eskatzen da:

1) FORD automobilen salmentak ongien aurresaten duen erregresio-zuzena eta doikuntzaren egokitasuna.
2) FORD automobilen salmentak aurresaten duen erregresio-planoa eta doikuntzaren egokitasuna. Zenbatekoa da ehunekotan azaldutako bariantzaren irabazia aurreneko doikuntzarekin parekatuz?

5.- (Y, X_1, X_2) aldagaien ondoko balioak emanik:

Y: ondasun eta zerbitzuen inportazio-indizeak

X_1: Nazio Produktu Gordinaren indizeak

X_2: inportazioen prezio-indizeak.

URTEAK	Y	X_1	X_2
1970	21	52	120
71	30	58	120
72	40	64	116
73	50	69	109
74	56	73	105
75	72	78	98
76	82	84	96
77	81	88	94
78	86	93	100
79	100	100	100
80	?	110	103

Honakoa eskatzen da:

1) Datu hauetan $\hat{Y}(X_1, X_2)$ ongien doitzen den erregresio-planoa.
2) Bi erregresoreetan zein da inportanteena erregresio honetan?. Arrazona ezazu.
3) 1980. urterako NPG 110 eta inportazioen prezio-indizea 103 izanik, zein da erregresio-planoaren bidez estimatutako ondasun eta zerbitzuen indizea?

6.- Ondoko taulan, X_1, X_2, X_3 aldagaien datuak ditugu:

X_1	X_2	X_3
2	4	2
3	5	4
6	10	6
8	11	7
10	15	10

Lor itzazu:

1) Ongien doitzen den $\hat{X}_1\ (X_2, X_3)$ erregresio-planoa, karratu txikienen erizpideari jarraituz.
2) Erregresioaren mugatze-koefizientea.
3) Pareka ezazu, $\hat{X}_1(X_2, X_3)$ erregresioa $\hat{X}_1(X_2)$ eta $\hat{X}_1(X_3)$ erregresioekin.

7.- Ondoko taulan (L) latitudea gradutan, (A) altuera metrotan, eta (T) urteroko betezbezteko tenperatura itsasertzeko sei hiriburutarako dauzkagu.

	$L(X_1)$	$A(X_2)$	$T(X_3)$
Gijon	44	22	13
Vigo	43	45	14
Bartzelona	41	95	16
Valentzia	39	24	17
Almeria	37	6	18
Cadiz	36	30	18

$$\bar{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 40 \\ 37 \\ 16 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{L} = \begin{bmatrix} 8{,}67 & 26 & -5{,}5 \\ 26 & 805{,}33 & -10 \\ -5{,}5 & -10 & 3{,}67 \end{bmatrix}$$

Honakoa eskatzen da:

1) Eraiki eta interpreta ezazu erregresio-eredu modelo bat tenperatura beste bi aldagaien menpe dagoela lortzeko.
2) Kalkula itzazu mugatze-koefizientea eta hondar-bariantza.
3) Aurresan ezazu Tortosa-ren batezbesteko tenperatura bere datuak ondokoak direla jakinik: L=40, 5; A=50m. (INE-ren datuak).
4) Esan al daiteke erregresio honetan latitudea altuera baino garrantzitsuago dela?

8.- Ondoko taulan, Arabako sei eskualdeetarako EUSTAT-ek ematen dizkigun lau aldagaien datuak ditugu:

X_1: langabeen %
X_2: pertsonal zuzendari eta teknikoen %
X_3: biztanleria okupatuaren %, industrian.
X_4: biztanleria okupatuaren %, zerbitzutan.

	X_1	X_2	X_3	X_4
Errioxa arabarra	10,9	5,2	29,4	28,3
Arabako ibarrak	12,3	6,3	20,7	28
Arabako mendialdea	13,7	4,7	22,8	25,3
Gorbei inguruak	15,6	9,1	40,7	36,1
Arabako lautada	18,9	12,4	43,7	47,7
Kantauria arabarra	22,2	6,7	59,5	29,1

Datu horien bidez lortutako estatistiko bakunak eta bikoitzak hauexek dira:

$S_1 = 3,89 \qquad S_2 = 2,64 \qquad S_3 = 13,45 \qquad S_4 = 7,58$

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} 15,6 \\ 7,4 \\ 36,13 \\ 32,4 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1 & 0,50 & 0,91 & 0,43 \\ & 1 & 0,46 & 0,98 \\ & & 1 & 0,40 \\ & & & 1 \end{bmatrix}$$

Ondokoa, **R** koerlazio-matrizearen matrize adjuntua izanik.

$$A_R = \begin{bmatrix} 0,00286 & -0,0158 & 0,0239 & 0,5587 \\ & 0,14004 & 0,0026 & -0,1314 \\ & & 0,0261 & -0,0027 \\ & & & 0,1289 \end{bmatrix}$$

Honakoa eskatzen da:

1) Langabeen portzentaia beste aldagaien bidez estimatuko duen erregresio--hiperplanoa lortzea.
2) Langabeen portzentaiaren beste aldagaiekiko hiperplanoa, aldagai tipifikatuetarako.
3) Lortutako b eta β koefizienteen azterketa. Halaber, doikuntzaren egokitasunarena.
4) Nola justifikatuko zenuke r_{14} eta β_{14} koefizienteen arteko ezberdintasuna?.

9.- Ekonomilari batek, galsoroen (X_1) errendimenduan faktore batzuen eragina aztertu behar du. Konkreturi, ondoko faktoreen lehentasunak erabakiz:

X_2 = potasio eta azido fosforikoarena
X_3 = nitrogenoarena
X_4 = Lurraren pH-arena

Hamar sorotan errendimenduak neurtu ondoren, alboan daukagun koerlazio-matrizea lortu da.

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1 & 0,736 & 0,523 & 0,383 \\ & 1 & 0,012 & 0,758 \\ & & 1 & -0,341 \\ & & & 1 \end{bmatrix}$$

Honakoa eskatzen da:

1) Erregresiorik egokiena, finkatutako helbururako.
2) Lortutako emaitzaren komentarioa, doikuntzaren egokitasuna aztertu ondoren.

10.- Hamar parkineko katearen jabeak, sarreretan eragina daukaten faktoreak, inguruko familien bizi-maila eta hirilurraren urritasuna direla uste du.

Hamar parkinei dagozkien ondoko hiru aldagaien balioak ditu:
X_1: hileroko sarrerak/biztanle, 10^3 pezetatan, parkinaren barrutian.
X_2: biztanle-kopurua/ha., parkinaren barrutian.
X_3: parkinen sarrera totalak, 10^6 pezetatan.

Aldagaien balioen bidez lortutako estatistikoak hauexek dira:

$$\bar{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 50 \\ 100 \\ 12 \end{bmatrix} \qquad \begin{aligned} S_1^2 &= 140 \\ S_2^2 &= 900 \\ S_3^2 &= 20 \end{aligned} \qquad \mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1 & +0,20 & -0,20 \\ +0,20 & 1 & +0,60 \\ -0,20 & +0,80 & 1 \end{bmatrix}$$

1) Lor ezazu, ongien doitzen den, parkinen sarreren beste bi aldagaiekiko karratu txikienen erregresio-planoa. Kalkula ezazu, halaber, hondarren bariantza.
2) Zein da, doikuntza honetan, erregresore bakoitzak daukan pisu erlatiboa?. Komenta ezazu laburki.
3) Zortzi parkinen (planoaren bidez) estimatutako balioak ezagunak eta beste biak ezezagunak direla suposaturik:

$\hat{X}_3$: 9,0; 6,5; 16,5; 12,0; 7,5; 15,5; 14,0; 15,0; x; y.

Lor itzazu balio horiek, karratu txikienen erregresio linealaren propietateak aplikatuz.

11.- Merkatal elkarte handi batek langile berriak aukeratzerakoan bi aproba berezi planteatzen ditu. Aproba horiek gainditu zituzten 20 langile, bi urteren buruan honela sailkatu dira:
X_1: lortutako puntuazio teorikoaren arabera.
X_2: lortutako puntuazio praktikoaren arabera.
X_3: lortutako puntuazioa, langile bakoitzak egindako lanean eduki duen trebetasunaren arabera.

Halaber, ondoko estatistikoak lortu dira:

$$\bar{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 108 \\ 96 \\ 93 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{L} = \begin{bmatrix} 20 & 5,5 & 13 \\ 5,5 & 11 & 17 \\ 13 & 17 & 37 \end{bmatrix}$$

Honakoa eskatzen da:

1) X_3 aldagaia azaltzen duen erregresio-planoa X_1, X_2 aldagaiekiko, beronen hondar-bariantza eta mugatze-koefizientea. Komenta itzazu lortutako emaitzak.
2) Zein izango litzateke langile baten trebetasunaren puntuazioa, puntuazio teorikoan 105 puntu eta puntuazio praktikoan 110 puntu lortu bazituen?
3) Kalkula itzazu X_2, X_3 aldagaien koerlazio-koefiziente totala eta koerlazio--koefiziente partziala. Pareka itzazu lortutako balioak berorien ezberdintasuna azalduz.

12.- Hiri batean etxebizitzen merkaturako ondoko datuak ditugu:

X_1: busaren geltokira daukaten distantzia (etxaldetan).
X_2: Salmenta-prezioa (milaka $-tan).
X_3: Azalera bizigarria (hamarnaka m^2-tan).

X_1	X_2	X_3
3	41	13
3	32	10
4	24	8
4	44	14
4	42	14
5	36	12
0	35	10
1	40	12
6	29	10
4	26	8

Datu horien multzo-neurriak hauexek dira:

$\overline{x}_1 = 3,4$ $\quad S_1^2 = 2,84$ $\quad S_{12} = -2,96$

$\overline{x}_2 = 34,9$ $\quad S_2^2 = 43,89$ $\quad S_{13} = -0,04$

$\overline{x}_3 = 11,1$ $\quad S_3^2 = 4,49$ $\quad S_{12} = +13,51$

1) Zeinek uste duzu edukiko duela eragin handiagoa salmenta-prezioan: azalera bizigarriak edo bus-geltokira dagoen distantziak?.
   Egin ezazu dagokion erregresioa zeure ustea egiaztatzeko.
   Azter ezazu, halaber, doikuntzaren egokitasuna lortutako emaitza komentatuz.
   Esan al dezakezu erregresore bakoitzak azaltzen duen ehunekoa zein den?.
2) Froga ezazu ondoko baieztapena egiazkoa edo gezurrezkoa den:
   Datu hauetan, prezioak azaltzen duena bazterturik, buserainoko distantzia handiagoari azalera erabilgarri handiagoa dagokiola esan daiteke.

13.- Automobil-marka baten salmentetan "mass media" desberdinetan egindako publizitateak daukan eragina aztertu nahi da.
Horretarako ondoko datuak bildu dira bost europar estatutarako.

Publizitate-gastuak ECU-milioetan				Salmentak milaka unitatetan
Estatuak	Prentsa (X_1)	Irratia (X_2)	Telebista (X_3)	(X_4)
A	4	1	7	18
B	6	2	5	20
D	10	3	8	30
E	9	1	9	24
F	4	2	6	19

Datu hauen bidez lortutako kobariantz matrizea eta berorren matrize adjuntua ondokoak dira.

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 6,24 & 0,72 & 2,4 & 10,28 \\ & 0,56 & -0,2 & 2,04 \\ & & 2 & 3,8 \\ & & & 19,36 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{A}_L = \begin{bmatrix} 1,40 & 4,38 & 1,67 & -1,53 \\ & 16,14 & 6,40 & -5,28 \\ & & 2,67 & -2,08 \\ & & & 1,79 \end{bmatrix}$$

Honakoa eskatzen da:
1) Salmenta aldagaiaren, gastu-motek adierazten duten hiru aldagaiekiko, karratu txikienen erregresioa linealaren funtzioa.
2) Azter ezazu erregresore bakoitzaren garrantzia 1) atalean egindako doikuntzaren arabera.
3) Azter ezazu doikuntzaren egokitasuna.

14.- Hamar probintzia dituen lagin batean, ondoko hiru aldagaiak neurtu dira:

X_1: famili errenta erabilgarria.
X_2: aurrezki-kutxatan gainezarritako saldoa.
X_3: "Per capita" errenta.

Koerlazio-koefizienteak: $r_{12} = 0,88$, $r_{13} = 0,48$, $r_{23} = 0,68$ izanik,

1) Lor ezazu "gainezarritako saldoa" aldagaiaren erregresio-planoa, "famili errenta" eta "per capita errenta" aldagai erregresoreetan erregresioan indar handiena zeinek daukan ikus dezagun. Komenta ezazu lortutako emaitza.
Kalkula itzazu mugatze-koefizientea eta koerlazio-koefiziente anizkoitza.

2) Tipifikatu gabeko erregresioaren hondarrak ondokoak direla jakinik:
-3, 1, -2, 0, -5, 1, -1, -2, e_9, e_{10}
lor ezazu fala zaizkigunak, $S^2_{x_2} = 104,45$ izanik.

3) Lor ezazu $r_{13.2}$ koerlazio-koefiziente partziala eta pareka ezazu r_{13} koerlazio totalarekin, elkarren arteko desberdintasuna azalduz.

15.- Ondoko taulak, Y, X_1, X_2, aldagaien datuak biltzen ditu.

Y: migrazio-tasa
X_1: errenta / biztanle eta
X_2: nekazaritzako populazioaren portzentaia izanik, beraiei dagozkien datuak 50.eko hamarkadaren azkeneko urteetarako hartu dira.

Probintziak	Y	X_1	X_2
Jaen	−10	13	69
Caceres	−9	10	75
Lleida	−2	20	60
Girona	+2	21	39
Bizkaia	+8	31	17
Madril	+11	27	9
Bartzelona	?	28	9

Eta datuen bidez lortutako batezbesteko aritmetikoak, bariantzak eta kobariantzak:

$\bar{y} = 0$ $\quad S^2_y = 62,33$ $\quad S_{yx_1} = 54,5$

$\bar{x}_1 = 20,33$ $\quad S^2_{x_1} = 53,36$ $\quad S_{yx_2} = -195,33$

$\bar{x}_2 = 44,83$ $\quad S^2_{x_2} = 636,44$ $\quad S_{x_1x_2} = -172,06$

Honakoa eskatzen da:
a) Doi ezazu Y-ren (X_1,X_2)-rekiko karratu txikienen erregresio planoa aldagaien datu-hodeian.
b) Lor ezazu plano honek Bartzelonako probintziarako estimatuko lukeen migrazio-tasa.
d) Azal ezazu, arrazonatuz, parte handiena hartzen duen aldagaia zein den, a) atalean lortutako erregresioan.
e) Doikuntza ona dela esan al da?. Arrazona ezazu erantzuna.

16.- X_1, X_2, X_3 aldagai hirukoitzaren ondoko datuak jakinik:

$r_{12}=0$ $r_{13}=+0,6$ $r_{23}=+0,8$

Honakoa eskatzen da:

1) Lor ezazu, X_1 aldagaiaren erregresioaren beste bi aldagaiekiko $r_{1.23}$ koerlazio-koefiziente anizkoitza.
2) Lor ezazu X_3-ren eragina beste aldagaietan kontrolatzen duen $r_{12.3}$ koerlazio-koefiziente partziala.
3) Komenta itzazu lortutako emaitzak.

17.- Azpigaratutarako 49 herritan X_1, X_2, X_3 aldagaiak neruturik kobariantz matrizea lortu da.

X_1: inflazioaren batezbesteko tasa 1980-1985 urte bitartean.
X_2: haurren hilkortasunaren batezbesteko tasa 1985. urtean.
X_3: pertsona bakoitzeko NPG (Nazio Produktu Gordina), dolarretan 1985. urtean.

$$\mathbf{L}=\begin{bmatrix} 16 & 80 & -1200 \\ 80 & 2500 & 20000 \\ -1200 & -20000 & 250000 \end{bmatrix}$$

Honakoa eskatzen da:

1) $r_{3.12}$ koerlazio-koefiziente anizkoitza bere balioaren esangura komentatuz edo irazkinduz.
2) $r_{12.3}$ koerlazio-koefiziente partziala bere balioaren esangura irazkinduz.
3) Aurkez ezazu grafikoki ondoko aldagai-bikoteen balio tipifikatuen bektoreen arteko erlazioa.
   X_1 eta X_2
   X_2 eta X_3

18.- Oporrak Espainian igarotzeko aukera egiterakoan, atzerritako turistek daukaten motibazioei buruz, azterketarako hurbilketa gisa, 5 Herritan, ondoko aldagaiak neurtu dira.

X_1: distantzia kilometrotan
X_2: Barne Produktu Gordina/biztanle ECU-tan
X_3: Herri bakoitzetik etorritako turisten bere populazio totalarekiko ehunekoa.

Ondoko estatistikoak lortu dira:

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} 2020 \\ 3,4 \\ 1,62 \end{bmatrix} \qquad \begin{matrix} S_1 = 691,1 \\ S_2 = 0,59 \\ S_3 = 0,66 \end{matrix} \qquad \mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1 & -0,77 & -0,90 \\ -0,77 & 1 & 0,83 \\ -0,90 & 0,83 & 1 \end{bmatrix}$$

Honakoa eskatzen da:

1) Lor ezazu etorritako turisten ehunekoaren, ongien doitzen den karratu txikienen erregresio linealaren eredua, beste bi aldagaien funtziotan.
2) Nola neurtuko genuke datu hauetan erregresioaren ahalmen azaltzailea?. Zein da erregresorerik garrantzitsuena erregresio honetan?
3) Kalkula ezazu $r_{13.2}$ koerlazio-koefizientea eta interpreta ezazu **R** koerlazio--matrizeko koefizienteekin daukan erlazioa.

19.- Sektore bateko enpresa-multzo bati buruzko azterketa egin nahian hiru aldagaitarako ondoko estatistikoak lortu dira.

X_1: itzulitakoa milaka milioi pezetatan.

X_2: salmentak milaka milioi pezetatan.

X_3: bezero-kopurua.

$$\bar{x}_1 = 20 \qquad S_1^2 = 100 \qquad r_{12} = 0,9$$

$$\bar{x}_2 = 100 \qquad S_2^2 = 900 \qquad r_{13} = 0,6$$

$$\bar{x}_3 = 25 \qquad S_3^2 = 36 \qquad r_{23} = 0,2$$

Honakoa eskatzen da:

1) Lor itzazu X_1 aldagaiaren X_2, X_3-ekiko erregresio-planoa eta doikuntzaren egokitasuna.
2) Konpara ezazu lortutakoa aldagai azaltzaile bat kenduz lortzen ditugun emaitzekin.
3) Lor itzazu $r_{12.3}$, $r_{13.2}$ koerlazio-koefiziente partzialak eta komenta itzazu lortutako emaitzak 2) atalean lortutakoekin parekatuz

20.- Ondokoa koerlazio-matrizearen *ADJUNTUEN* matrizea izanik

$$\mathbf{A_R} = \begin{bmatrix} 0,296 & 0,04 & -0,124 & 0,024 \\ & 0,326 & -0,088 & -0,068 \\ & & 0,8 & -0,58 \\ & & & 0,75 \end{bmatrix}$$

Honakoa eskatzen da:

1) $r_{12.34}$, $r_{13.24}$, $r_{14.23}$ koerlazio-koefiziente partzialak.
2) Koefiziente horien esangura.
3) Zein da erregresorerik inportanteena X_1 aldagaiaren erregresioan?

21.- Herri bateko kriminaltasunean eragina daukaten faktoreen azterketa egin nahian ondoko aldagaiak neurtu dira populazioaren adierazgarri diren sekzioen multzo baterako.

X_1: talde txikien edo baztertuen populazioaren portzentaia.
X_2: kriminaltasunaren tasa/milaka biztanle.
X_3: langabeziaren tasa.

Ondoko koerlazio-matrizea lortu da:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1 & 0,82 & 0,48 \\ 0,82 & 1 & 0,59 \\ 0,48 & 0,59 & 1 \end{bmatrix}$$

1) Lor ezazu ongien doitzen den karratu txikienen erregresio-planoa, plano hori gure helburuari erantzuteko dagokiona izanik.
   Azter ezazu doikuntzaren egokitasuna eta esan ezazu, ahal bada, erregresore bakoitzari azaldutako bariantzan dagokion proportzioa.
2) Lor ezazu X_1, X_2 aldagaien artean X_3 aldagaiaren eragina baztertu ondoren geratzen den koerlazioa. Pareka ezazu eragin hori baztertu gabe daukaten koerlazioarekin.

22.- Ondoko datu-matrizearen batezbesteko-bektorea, kobariantz matrizea eta azkeneko honen λ_2 autobalioa jakinik:

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 4 & 4 & 8 \\ 6 & 2 & 6 \\ 8 & 4 & 4 \end{bmatrix} \qquad \bar{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{L} = \begin{bmatrix} 5 & 9 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 5 \end{bmatrix} \qquad \lambda_2 = 4$$

Honakoa eskatzen da:

1) Aurkez itzazu grafikoki, plano faktorial nagusia eta beronen gain proiektatutako errenkada-puntuen hodeia.
2) Zein da planoak jasotzen duen proiektatutako bariantzaren proportzioa?
3) Atera ezazu planoak puntu bakoitzaren posizioarekiko daukan ekarpen erlatiboa.

4) Aurkez ezazu, grafikoki, plano faktorial nagusira proiektatutako zutabe-puntuen hodeia.
5) Aurkez ezazu, grafikoki, bi hodeien baterako aurkezpen grafikoa, hauen arteko erlazio nagusiak azalduz.

23.- **X** datu-matrizea, **L** (X) bere kobariantz matrizea eta honen $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ autobalioak jakinik:

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 15 \\ 5 & 5 & 20 \\ 5 & 10 & 20 \\ 10 & 10 & 20 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{L(X)} = \begin{bmatrix} 10 & 10 & 20 \\ 10 & 20 & 25 \\ 20 & 25 & 60 \end{bmatrix} \qquad \begin{aligned} \lambda_1 &= 79{,}2 \\ \lambda_2 &= 8{,}0 \\ \lambda_3 &= 2{,}8 \end{aligned}$$

Honakoa eskatzen da:
1) Lor itzazu lehen bi ardatz nagusiei dagozkien autobektoreak eta bi ardatzetan bost indibiduoek dituzten koordenatuak.
2) Irudika ezazu hodei hirudimentsionalaren plano nagusia eta kalkula ezazu honek hodeiarekiko daukan hondar-bariantzaren proportzioa.
3) Lor ezazu bi lehen faktoreen **L** (F_1, F_2) kobariantz matrizea.

24.- Ondoko **X** datu-matrizea, bere kobariantz matrizea eta honen autobalioak jakinik

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 5 & 10 & 15 & 20 \\ 10 & 15 & 20 & 30 \\ 10 & 15 & 25 & 25 \\ 10 & 20 & 20 & 25 \\ 15 & 15 & 20 & 25 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{L(X)} = \begin{bmatrix} 10 & 5 & 5 & 5 \\ 5 & 10 & 5 & 5 \\ 5 & 5 & 10 & 5 \\ 5 & 5 & 5 & 10 \end{bmatrix}$$

$\lambda_1 = 25 \qquad \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 5$

Honakoa eskatzen da:
1) Lor itzazu 5 indibiduoen koordenatuak lehen ardatz faktorialean λ_1 autobaliori dagokion bektore unitarioa (1/2 1/2 1/2 1/2) zutabe-bektorea dela jakinik.
2) Lor itzazu, halaber, 4 aldagaien koordenatuak lehen ardatz faktorialean.
3) Lor ezazu lehen ardatz faktorialaren bariantz tasa, bere esangura adieraziz.

25.- Ondoko lau probintziatarako, mila milioi pezetatan, Balio Erantsi Gordinaren datuak ditugu:

	Nekazaritza eta Arr.	B.E.G. Industria	Zerbitzuak
Almeria	38	21	81
Cadiz	37	121	205
Cordoba	28	60	132
Granada	25	46	83

Datu hauei dagozkien estatistiko batzuk jakinik:

$$\mathbf{L}=\begin{bmatrix} 31,5 & 42,2 & 100,5 \\ 42,5 & 1355,5 & 1795,5 \\ 100,5 & 1795,5 & 2537,2 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{R}=\begin{bmatrix} 1 & 0,20 & 0,36 \\ 0,20 & 1 & 0,97 \\ 0,36 & 0,97 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_1(\mathbf{L})=3839,6 \qquad \lambda_2(\mathbf{L})=70,6 \qquad \lambda_3(\mathbf{L})=14$$

Honakoa eskatzen da:

1) Lor ezazu , X_2, X_3, azkeneko bi aldagaiei dagozkien aldagai tipifikatuentzako, erregresio ortogonalaren zuzena, halaber, hondarren eta proiekzioen arteko **L**(E, F) kobariantz matrizea.
2) Lor itzazu lau indibiduoen koordenatuak, Osagai Nagusizko Analisiaren lehenengo bi ardatzen gain,

$\mathbf{u}_1=(0,03,\quad 0,59,\quad 0,81)'$ eta

$\mathbf{u}_2=(0,51,\quad -0,712,\quad 0,49)$

zutabe-bektoreak jakinik.

Zein izango da **L** (F_1, F_2, F_3) kobariantz matrizea?

26.- Ondoko datu-matrizea, dagokion koerlazio-matrizea eta aldagaien kobariantzak jakinik

$$\mathbf{X}=\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{R}=\begin{bmatrix} 1 & \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & 1 & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} & 1 \end{bmatrix}$$

$$S_1^2=0,1875$$
$$S_2^2=0,25$$
$$S_3^2=0,1875$$

Halaber, koerlazio-matrizearen autobalioak edo balio propioak ondokoak izanik:

$\lambda_1 = 2;$ $\lambda_2 = 0,66 = 2/3;$ $\lambda_3 = 0,33 = 1/3$

Honakoa eskatzen da:

1) Kalkula eta marraz ezazu, osagai naugusizko analisi normalizatuaren, errenkada--puntuen plano nagusia. Zein da plano horren bariantz tasa edo inertzi tasa?
2) Aurkez itzazu grafikoki 1) atalean kalkulatutako $\mathbf{f}_1$, $\mathbf{f}_2$ bektoreak beroriek sorterazitako planoan.

EZAUGARRI ESTATISTIKO ANIZKOITZAK

Propietate Teorikoei buruzko galderak

1.- Dakigunez, $S_e = \mathbf{L}/\mathbf{L}_{ii}$ adierazpena X_i aldagaiaren $(X_1, X_2.....X_{i-1}, X_{i+1},...X_n)$ aldagaiekiko karratu txikieneko erregresio linealaren hondar-bariantza da, non **L** kobariantz matrizearen determinantea den.

1) Adierazpen hori kontutan hartuz, lor ezazu X_i aldagaiaren beste (n-1) aldagaiekiko koerlazio-koefiziente anizkoitza.
2) Komenta ezazu laburki koefiziente horren esangura.
3) (X_1, X_2, X_3) aldagai hirukoitza kontsideratuz, froga ezazu $r_{1.23} = 1$ denean $r_{2.13} = 1$ eta $r_{3.12} = 1$ direla.

2.- Lor ezazu $\hat{T}_1(T_2, T_3)$ aldagai tipifikatuen erregresio - planoa, $\hat{X}_1(X_2, X_3)$ erregresio - -planoaren adierazpen batetik abiatuz.

3.- a) Defini ezazu "β" erregresio standardizatuaren koefizientearen kontzeptua. Zergatik ematen digu, koefiziente standardizatu gabeak baino hobeki, erregresore bakoitzaren garrantzi erlatiboa?.

b) Defini itzazu, X_1, X_2, X_3 aldagai hirukoitzerako, $r_{1.23}$ koerlazio-koefiziente anizkoitza eta $r_{12.3}$ koerlazio partzialaren koefizientea.

4.- a) Froga ezazu $\hat{X}_1(X_2, X_3)$ erregresioaren erroreak zentratuak eta balio estimatu eta errealen batezbestekoak berdinak direla.

b) Froga ezazu, halaber, erregresioaren erroreak aldagai independenteekin eta baita aldagai dependentearen balio estimatuekin ere koerlazio gabeak direla.

5.- Karratu txikienen erregresio lineal anizkoitzean erregresore bakoitza hondarren aldagaiarekin koerlazio gabea dela jakinik, lor ezazu, arrazonatuz, erregretzailearen bariantza balio estimatuen bariantzan eta hondar bariantzan batukorki deskonposatzen dela.

6.- $(X_1, X_2, ..., X_5)$ aldagai estatistikorako, $\beta_{12.345}$ $\beta_{21.345}$ erregresio partzial tipifikatuaren koefizienteek -0,8 eta -0,2, hurrenez hurren, balio dute. Kalkula ezazu, arrazonatuz, $r_{12.345}$ koerlazio-koefiziente partzialak zenbat balio duen.

7.- a) Froga itzazu balio estimatuen bektoreak eta hondarren bektoreak dauzkaten propietateak, X_1 aldagaiaren X_2, X_3 aldagaiekiko karratu txikienen erregresio linealaren kasuan.

b) Lor ezazu, arrazonatuz, bi aldagaien arteko koerlazio-koefiziente partzialaren eta "β" erregresio-partzial tipifikatuaren koefizienteen arteko erlazioa.

8.- Defini ezazu X_1, X_2 aldagaien arteko koerlazio-koefiziente partziala X_3, X_4, ... X_n aldagaien eragina kontrolatuz.

9.- Lor ezazu, koerlazio partzialaren kontzeptutik abiatuz, $r_{12.3}$, X_1, X_2 aldagaien koerlazio partzialaren koefizientea X_3 aldagaiarekiko, ematen digun formula, r_{12}, r_{13}, r_{23} koerlazio totaleen koefizienteez adieraziz.

10.- a) Atera itzazu $|\mathbf{L}|$, $|\mathbf{R}|$ determinanteen eta $\mathbf{L}_{23}$, $\mathbf{R}_{23}$ minoreen arteko erlazioak $\mathbf{L}(x)$ eta $\mathbf{R}(x)$ matrizeen arteko erlazioa kontutan hartuz (R^4 espazioan egin daiteke).

b) Lor ezazu b_{1j} erregresio partzial koefizientearen eta β_{1j} erregresio partzial tipifikatu koefizientearen arteko erlazioa, $\hat{X}_1(X_2...X_n)$ eta $\hat{T}_1(T_2...T_n)$, karratu txikienen erregresio-plano homologoen adierazpen matematikoetatik abiatuz.

d) Atera ezazu, arrazonatuz, $r_{1.2,...,n}$ koerlazio anizkoitzaren koefizientea, hondar--bariantza eta kobariantz matrizearen ondoko erlaziotik abiatuz:

$$\overline{e^2} = \frac{|\mathbf{L}|}{\mathbf{L}_{11}}$$

e) $\beta_{12.3,...,n}$ eta $r_{12.3,...,n}$ balioek zeinu desberdina eduki al dezakete? Zergatik?

f) X eta Y aldagaien arteko koerlazioa angelu baten kosinua izanik, zehaztu, laburki, argi eta orokorki, koerlazio koefizientea zein angeluren kosinua den.

(Adibide bat ipintzea argigarri izan daiteke, baina, horrek, erantzun gisa, ez du balio)

g) Arrazona ezazu R^2-espazioan egindako erregresio ortogonalaren doikuntzaren egokitasunak inoiz % 50 baino txikiago zergatik ezin duen izan.

11.- X_1, X_2 aldagaien balioak eta X_3 aldagaiaren bidez berorien estimatutako balioak ondokoak dira:

X_1:	0	5	3	4	X_2:	0	12	12	16
$\hat{X}_1(X_3)$:	1	3	3	5	$\hat{X}_2(X_3)$:	2	10	10	18

Lor eta konpara itzazu r_{12} koerlazio-koefiziente totala eta X_3-rekiko, $r_{12.3}$ koerlazio-koefiziente partziala.

12.- Multzo batean neurturik daukagun (X_1, X_2, X_3) aldagai hirukoitzerako izan al ditzakegu ondoko koerlazio eta erregresio partzialaren koefizienteak?

$\beta_{12.3} = -0,8$ $\beta_{21.3} = -0,2$ $r_{12.3} = 0,4$ $r_{12} = 0,2$

Arrazona ezazu erantzuna.

13.- a) Ondoko datuak bateragarriak al dira?.

$|L| = 200$ $S^2_{x_1} = 75$ $r^2_{1.23} = 0,53$ $S^2_e = 4$

b) Ondoko emaitzak kontutan harturik:

$r_{12} = -0,5$ $r_{13} = 0,7$ $r_{23} = -0,9$ $\beta_{12} = -0,68$ $\beta_{13} = 1,31$

X_1 aldagaiaren bariantzaren azalpenean, X_2, X_3-aldagaiekiko egindako erregresioan, kalkula al daiteke erregresore bakoitzari dagokion portzentaia?. Azal ezazu erantzuna.

d) $\hat{X}_3(X_1, X_2)$ erregresiorako, ondoko emaitzak lortu dira:

$\hat{X}_3 = (2, \quad 0, \quad 1, \quad 1)$
$e = (1, \quad -1, \quad e_3, \quad e_4)$

Zeintzu izango dira e_3, e_4 balioak?. (m = 4).

14.- a) Ondoko erregresio anizkoitzaren kasurako:

$\hat{x}_1(x_2,\ldots,x_n)$

froga ezazu honako inplikazio hau:

$$\forall\ i \in \{2,...,n\} \qquad S_{e,x_i} = 0 \Rightarrow S_{e,\hat{x}_1} = 0$$

b) $r^2_{1.23} = 1 - \dfrac{\mathbf{R}}{\mathbf{R}_{11}}$ dela jakinik. Lor ezazu $r^2_{1.23}$ koerlazio total edo zero mailako koefizienteen eta β koefizienteen bidez.

d) Froga ezazu ondoko datuen bateragarritasuna edo bateragarritasunik eza.

$$r_{12.3} = \sqrt{3/2} \qquad \beta_{12} = \frac{3\sqrt{5}}{10} \qquad R_{11} = \frac{2}{3} \qquad R_{22} = \frac{2}{5}$$

e) Froga ezazu ondoko datuen bateragarritasuna edo bateragarritasunik eza.

$$\beta_{21} = 0{,}229 \qquad S_2 = \frac{1}{2} \qquad S_1 = \frac{\sqrt{5}}{2} \qquad L_{12} = \frac{3}{16} \qquad L_{22} = \frac{2}{16}$$

15.- a) Defini ezazu X_1, X_2 aldagaien arteko koerlazio-koefiziente partziala X_3 aldagaiaren eragina baztertuz.

b) Kalkula ezazu $r_{12.3}$ koerlazio-koefiziente partziala, ondoko hondarrak jakinik.

e_{13} = (10/3,	-8/3,	1/3,	-1)
e_{23} = (-1/3,	5/3,	2/3,	-2)

16.- Zer neurtzen du $r_{1.23}$ koerlazio-koefiziente anizkoitzak?. Bi aldagairen arteko koerlazio-koefizientea izanik jakingo al zenuke bi aldagai horiek zeintzuk diren?

$r_{12.3}$ koerlazio partzialaren koefizientea. Zein bi aldagairen artekoa da koerlazio koefiziente totala?

17.- Osagai Nagusizko Analisiaren baterako aurkezpen grafikoa egitean, nola lortzen dira indibiduoen koordenatu zuzenduak?. Zein da zuzenketa horren oinarria?. Azal ezazu.

Azter itzazu datutan dituzun bateragarritasunak, ondoko kasuetarako:

a) $|\mathbf{L}| = -3.200$ $|\mathbf{R}| = 0{,}5$ $S_1 = 2$ $S_2 = 4$ $S_3 = 10$

b) $\|\mathbf{f}_1\| = 4$ $\|\mathbf{f}_2\| = 8$ $\lambda_1 = 4$ $\lambda_2 = 16$ (Osagai nagusizko analisia)

d) $\lambda_1 = 2{,}5$ $\lambda_2 = 0{,}2$ $\lambda_3 = 1$ $S_{f_1 f_2} = 0$ $S^2_{f_1} = 2{,}5$ (Osagai nagusizko analisia)

e) $\hat{T}_1(T_2, T_3)$ erregresio-kasurako $\beta_{12} = -0,25$, $\beta_{13} = 1,3$ daukagu eta
$\hat{T}_3(T_1, T_2)$ erregresio-kasurako $\beta_{31} = -0,50$, $\beta_{32} = -0,50$

f) X_1 aldagaiaren $X_2,..., X_n$ aldagaiekiko erregresio anizkoitzerako:

$|\mathbf{L}| = -102$ $\mathbf{L}_{11} = 34$ $\overline{e^2} = -3$

18.- $X^T X$ matrize simetrikoa diagonalizatzean, R^n aldagaien espazioa, R^q eta R^{n-q} azpiespazio betegarritan deskonposatzen da.

Azal ezazu: R^{n-q} espazioan proiektatutako inertzia eta R^q espazioarekiko hondar--inertzia berdinak direla.

Oharra: X (m, n) datu-matrizea da.

19.- Komenta itzazu "erregresio ortogonalaren" eta "osagai nagusizko analisiaren" arteko berdintasunak.

20.- Froga ezazu: R^n espazioaren hodeian ongien doitzen den zuzena, kobariantz matrizearen λ_1 autobaliorik handienari dagokion autodirekzioa dela.

21.- Froga ezazu, n-dimentsioko hodei baten bigarren ardatz nagusia λ_2 bigarren autobalioari dagokion autodirekzioa dela.

S.P.S.S.X nahiz MINITAB erabiliz ordenadore bidez ebatzi daitezkeen zenbait adibide.

ADIERAZBURUAK

5.1.- Urtekari estatistiko batetik, ondoko taula atera dugu.

X_1 = aurrezki-gordailuak aurrezki-kutxatan/biztanle, milaka pezetatan.
X_2 = ezkonkortasuna/milaka biztanle, 1981. urtean
X_3 = langabeziaren ehunekoa populazio aktiboarekiko 1981. urtean.
X_4 = Famili errenta erabilgarria/biztanle, milaka pezetatan 1976. urtean taula honen aldagaiak izanik.

	X_1	X_2	X_3	X_4
Andaluzia	67'6	6'64	9'03	214'6
Kanariak	72'3	5'62	9'36	243'3
Asturias	75'1	5'34	6'59	267'8
Estremadura	78'5	7'19	7'70	193'2
Murtzia	81'7	5'97	7'56	240'5
Galizia	87'2	5'09	3'93	244'8
Madril	98'5	4'62	7'49	325'1
Gaztela/Mantxa	98'5	6'42	6'14	229'0
Kantabria	108'9	6'16	6'07	265'5
Balentziako K. A.	111'3	5'73	8'94	281'2
Gaztela/Leon	130'1	4'67	5'79	242'9
Balcareak	149'5	4'81	4'28	341'6
Aragona	170'8	5'40	6'12	286'3
Errioxa	186'9	5'30	5'55	303'2
Nafarroako K.A.	189'6	5'57	7'04	280'7
Katalunia	206'0	4'03	10'06	324'2
Euskal Herriko K.A.	294'6	4'37	9'57	305'2

SPSS programa bat egitea eskatzen da aldagaien arteko erlazioak aztertu ahal izateko.

Konkretuki:

1) X_1 aldagaiaren erregresio-ekuazioak beste aldagaiekiko.
2) Lau aldagaien arteko koerlazio-koefiziente partzialak, (aldagaien bikote bakoitzerako beste bi aldagaien eragina baztertuz).

5.2.- Ondoko taulan ditugun aldagaiei dagozkien balioak, 1981. urterako estimatu dira 20 estatu horientzat.

X_1 = Nazio-Produktu Gordina/biztanle dolarretan
X_2 = jaiokuntza/1.000 biztanle
X_3 = Hilkortasuna/1.000 biztanle

	X_1	X_2	X_3
ETIOPIA	130	50	24
BIRMANIA	160	37	14
TANTZANIA	270	46	15
UGANDA	290	45	14
KENIA	380	51	13
EGIPTO	460	37	12
TAILANDIA	590	31	8
FILIPINAK	600	34	8
NIGERIA	670	50	17
PERU	730	38	11
MAROKKO	740	44	13
KOLONBIA	1.010	30	8
TURKIA	1.330	34	10
JUGOSLAVIA	2.430	18	9
VENEZUELA	3.130	35	6
POLONIA	3.380	19	9
ESPAINIA	4.340	18	9
ITALIA	5.240	14	10
FRANTZIA	9.940	14	11
ALEMAN. ERR. F.	11.730	10	12

Datu-multzo hau estatistika deskribatzaileak dituen baliabide ezagunez ikertu nahian SPSS programa bat egin nahi dugu.

Idatz ezazu programa hori, konkretuki ondoko puntuak lortu ahal izateko.

1. Aldagai bakoitzaren azterketa bakuna
   a) Datuak taldekatu gabe.
   b) X_1 , X_2 aldagaiak 4 mailatan taldekatu eta maila-ordezkaritzat erdiko puntua hartu ondoren maiztasun-banaketak (absolutuak eta erlatiboak) hiru aldagaientzako.

2. Aldagaiak binaka hartuz, azterketa bikoitza.
   a) (X_1 , X_2) aldagaien maiztasun-taula gurutzatua.
   b) Dispertsio-diagrama (edo puntu-hodeia) X_1 , X_3 aldagaien artean.
   c) r_{12} , r_{13} , r_{23} koerlazio-koefizienteak.

5.3.- Ondoko taulan, urtekari estatistiko batetik ateratako datuak ditugu. Datu hauek 1981. urtean 100.000 langile baino gehiago zituzten enpresa europar batzuetakoak dira.

ENPRESA	SEKTOREA	LANGILEAK	SALMENTAK (10 $)	NETOA (10 $)
1 PHILIPS	Elektronika	384.100	17.069	144
2 SIEMENS	Elektronika	338.000	16.030	208
3 FIAT	Automobilak	314.845	19.603	-----
4 NAT. COAL BOARD	Meatzaritza	296.000	10.291	135
5 UNILEVER	Janariak	292.000	24.096	800
6 VOLKSWAGEN	Automobilak	246.906	16.822	99
7 PEUGEOT	Automobilak	218.000	13.338	396
8 RENAULT	Automobilak	215.844	16.230	125
9 G. ELECTRIC CO.	Ekipo-ondas.	193.000	8.100	755
10 DAIMLER-BENZ	Automobilak	187.961	16.281	365
11 HOECHST	Kimika	184.722	15.293	132
12 BAYER	Kimika	180.906	14.985	225
13 BAT	Tabakoa	169.500	14.301	371
14 R. DUTCH/SHELL	Petrolioa	166.000	82.292	3.642
15 BRITISH PETR.	Petrolioa	153.250	52.120	2.063
16 THYSSEN	Siderurgia	149.264	13.064	32
17 NESTLE	Janariak	145.815	14.172	493
18 ST. GOBAIN	Beirak	135.559	8.049	83
19 RUHRKOMIE	Meatzaritza	136.562	8.092	12
20 IMPERIAL CHEM.	Kimika	132.400	13.338	377
21 GR. METROPOLITAN	Edariak	131.757	6.038	324
22 THOMSON-BRANDT	Elektronika	129.000	8.079	14
23 AEG-TELEFUNKEN	Elektronika	123.700	6.589	1
24 ENI	Petrolioa	122.769	29.444	383
25 IMPERIAL GROUP	Tabakoa	122.400	5.915	119

26 BRITISH STEEL	Siderurgia	120.900	6.912	2.387
27 BR. LEYLAND	Automobilak	117.043	5.814	1.007
28 BASF	Kimika	116.646	13.707	163
29 MICHELIN	Kautxua	115.000	6.228	67
30 R. BOSCH	Aut. Laguntz.	112.796	5.751	110
31 SCHNEIDER	Ekipo-ondas.	107.000	6.609	63
32 MANNESMANN	Ekipo-ondas.	106.660	6.852	115
33 BROWNBOYERI	Elektronika	105.400	5.057	----
34 ELECTROLUX	Elektronika	101.700	5.283	191

Plantea ezazu SPSS programa bat ondoko azterketa estatistikoak lortu ahal izateko.

1) Azterketa bikoitzak, numerikoki eta grafikoki eginik.
2) Aldagaien multzoari buruzko ikasketa anizkoitza:
   - interesgarri kontsidera daitekeen erregresio bat
   - koerlazio partzial bat edo beste.

5.4.- 1978. urtean 20 estatutan, 5 aldagai estatistikoren balioak jaso dira ondoko zerrendan.

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5
Txile	% 13'0	1.360 US$	% 1'8	-11'7 US$	8'6 US$
Jugoslavia	% 12'0	2.100 US$	% 1'0	-201'2 US$	51'7 US$
Eire	% 10'7	3.740 US$	% 1'2	-306'9 US$	105'9 US$
Portugal	% 8'1	1.190 US$	% 0'8	-302'2 US$	34'8 US$
Espaina	% 7'6	3.510 US$	% 1'2	-205'8 US$	85'5 US$
Suomi	% 7'5	6.820 US$	% 0'2	+14'3 US$	311'7 US$
Kanada	% 7'5	9.180 US$	% 1'3	+ 70'5 US$	83'3 US$
Italia	% 7'2	3.850 US$	% 0'4	- 44'6 US$	89'8 US$
Australia	% 6'1	7.920 US$	% 1'5	-+ 58'8 US$	7'1 US$
Britainia Haundia	% 6'0	6.340 US$	% 0'0	-109'9 US$	79'7 US$
Estatu Batuak	% 6'0	9.950 US$	% 0'8	-171'4 US$	24'8 US$
Frantzia	% 5'2	8.260 US$	% 0'3	-130'7 US$	68'1 US$
Herbehereak	% 5'0	8.410 US$	% 1'0	-138'1 US$	116'0 US$
Costa Rica	% 4'6	1.540 US$	% 2'9	- 37'5 US$	25'6 US$
Alem. Errep. Fed.	% 4'3	9.580 US$	% -0'2	+ 239'3 US$	79'1 US$
Suedia	% 2'2	10.235 US$	% 0'4	-90'0 US$	417'7 US$
Austria	% 2'0	7.030 US$	% 0'1	- 590'4 US$	417'7 US$
Argentina	% 2'0	1.910 US$	% 1'7	+ 57'3 US$	12'8 US$
Norvegia	% 1'3	9.510 US$	% 0'2	- 134'7 US$	125'0 US$
Suitza	% 0'4	12.000 US$	% 0'3	- 46'9 US$	594'7 US$

X_1 : populazio aktiboarekiko langabeziaren maila ehunekotan
X_2 : sarrerak/biztanle dolarretan
X_3 : urteko hazkuntza demografikoa/100 biztanle
X_4 : Merkatal-balantzaren saldoa/biztanle dolarretan
X_5 : turismo-sarrerak/biztanle dolarretan izanik.

Egin ezazu agindu-multzo bat SPSS azpilengoaiaren bidez posible izan dadin:

a) X_1 aldagaiaren beste 4 aldagaiekiko erlazioak ikertzea, erregresio anizkoitza aplikatuz.
b) X_2 aldagaiaren beste 4 aldagaiekiko erlazioak ikertzea, erregresio anizkoitza aplikatuz.

5.5.- Ondoko taulan, Egin-ek lehenengoz argitaratu zuen EUSKADI (1.977-1.982) aldizkaritik ateratako datuak ditugu.

Dakusagunez, hogeitazazpi aldagai neurtuak ditugu Bizkaiko laurogeitasei udalentzat. Bestalde, "kokapetasuna" aldagaia sartu dugu eskualdeka azterketak egin ahal izateko.

Honakoa eskatzen da:
Plantea ezazu SPSS programa bat ondoko azterketa estatistikoak lortu ahal izateko:
1) Aldagaien azterketa bakunak.
2) Aldagaien azterketa bakunak eskualdeka, BREAKDOWN aginduaren bidez.
3) Euskaldunen ehunekoa lau mailatan sailkatu ondoren, aldagai honen "kokapetasuna" aldagaiaren azterketa bakunak.
4) Koerlazio-koefizienteak.
5) Zenbait puntu-hodei.
6) Interesgarri izan daiztezkeen erregresio batzuk.

BIZKAIA

nombre oficial	nombre vasco	habitantes	superficie	%de crecimiento reciente	%de vasco-parlantes	sexo		edad		
						hombres	mujeres	niños	adultos	mayores
Abadiano	Abadino	6.511	36	+135	74	51	49	31	62	7
Abanto y Ciérvana	Abanto-Zierbana	9.420	26	−19	0	50	50	23	66	11
Amorebieta-Echano	Zornotza	15.575	59	+87	50	51	49	31	62	7
Amoroto	Amoroto	412	13	−30	100	53	47	29	62	9
Arcaldo	Arakaldo	120	3	−61	38	55	45	15	74	11
Aránzazu	(Arratl-)Arantzazu	282	4	−10	91	49	51	15	76	9
Arbácegui y Guerricaiz	Munitibar	495	24	−49	99	52	48	20	67	13
Arcentales	Artzentales	714	37	−40	0	55	45	10	76	14
Arrancudiaga	Arrankudiaga	837	23	−27	29	50	50	22	67	11
Arrieta	Arrieta	449	14	−49	100	51	49	14	70	16
Arrigorriaga	Arrigorriaga	8.912	16	+9	5	49	51	30	63	7
Baquio	Bakio	1.175	16	+6	93	50	50	20	64	16
Barcaldo	Barakaldo	117.422	45	+51	0	50	50	27	66	7
Barrica	Barrika	774	7	−23	67	48	52	19	58	23
Basauri	Basauri	51.996	7	+126	5	50	50	31	63	6
Berango	Berango	4.135	9	+128	25	50	50	30	63	7
Bermeo	Bermeo	17.778	33	+29	76	49	51	26	65	9
Bérriz	Berriz	4.127	30	+87	51	50	50	32	61	7
Bilbao	Bilbo	443.030	109	+41	0	48	52	26	65	9
Busturia	Busturia	1.832	20	+22	94	49	51	23	63	14
Carranza	Karrantza	3.392	138	−24	0	53	47	20	63	17
Castillo y Elejabeitia	(Arratl-)Arteaga	650	12	−39	90	47	53	21	62	17
Ceánuri	Zeanuri	1.298	67	−45	99	53	47	16	67	17
Ceberio	Zeberio	1.067	48	−49	97	53	47	13	70	17
Dima	Dima	1.093	62	−46	99	52	48	14	65	21
Durango	Durango	26.101	30	+81	27	50	50	29	63	8
Ea	Ea	845	14	(−20	97	49	51	17	63	20
Echévarri	(Uribe-)Etxebarri	6.523	3	+57	4	51	49	35	61	4
Echevarría	(Markina-)Etxebarri	717	18	−28	99	52	48	17	70	13
Elanchove	Elantxobe	578	2	−29	98	50	50	9	68	23
Elorrio	Elorrio	7.857	37	+63	55	50	50	27	66	7
Ereño	Ereño	310	11	−34	99	50	50	7	77	16
Ermua	Ermua	18.705	6	+518	8	52	48	35	61	4
Fruiz	Fruiz	286	6	−33	100	52	48	15	69	16
Galdácano	Galdakao	26.545	32	+154	5	51	49	30	63	7
Galdames	Galdames	812	44	−57	0	50	50	12	66	22
Gámiz-Fica	Gamiz-Fika	979	16	−21	99	53	47	24	65	11
Garay	Garai	235	7	−34	93	51	49	28	58	14
Gatica	Gatika	897	18	−21	98	51	49	18	65	17
Gauteguiz de Arteaga	(Gautegiz-)Arteaga	759	14	−29	82	49	51	22	56	22
Gordejuela	Gordoxola	1.701	41	−8	0	51	49	22	65	13
Górliz	Gorliz	3.205	10	+67	17	48	52	23	67	10
Guecho	Getxo	67.321	12	+193	15	48	52	32	60	8
Güeñes	Guenes	6.483	41	+28	0	50	50	27	63	10
Guernica y Luno	Gernika-Luno	17.836	64	+66	78	49	51	25	64	11
Guizaburuaga	Gizaburuaga	139	6	−45	100	47	53	24	66	10
Ibarranguelua	Ibarrangelu	499	15	−51	92	44	56	17	57	26
Ispaster	Ispaster	628	23	−34	98	52	48	20	62	18
Izurza	Izurtza	311	4	−12	98	49	51	13	78	9
Lanestosa	Lanestosa = Isasti	304	1	−27	0	47	53	25	55	20
Larrabezúa	Larrabetzu	1.608	21	−5	86	49	51	22	65	13
Lauquíniz	Laukiz	1.050	8	+86	100	50	50	36	60	4
Lejona	Leioa	22.382	9	+196	17	50	50	32	62	6
Lemona	Lemoa	3.033	16	+23	31	51	49	23	68	9

estudios				sectores productivos			clases sociales			votos 9-III-80							
analfabetos	primarios	medios	superiores	primario	industria	servicios	patronos	autónomos	asalariados	abstención	PNV	HB	PSOE	UCD	EE	AP	PC
0	89	10	1	24	30	46	0	17	83	34	38	13	0	1	13	1	0
3	80	16	1	25	27	48	3	9	88	29	42	18	1	1	5	2	0
2	85	13	0	27	43	30	2	22	76	47	24	17	3	2	2	2	0
4	90	6	0	10	71	19	2	3	95	31	34	23	0	1	0	8	1
2	84	13	1	19	51	30	1	15	84	41	36	12	1	1	2	2	0
0	84	16	0	50	32	18	0	43	57	35	50	3	1	2	6	3	0
3	94	1	2	55	25	20	0	26	74	33	46	12	0	1	1	1	0
6	89	5	0	60	30	10	0	63	37	28	38	24	0	1	5	1	0
6	76	18	0	55	38	7	7	55	38	35	45	7	0	3	7	2	0
1	89	9	1	1	76	23	3	5	92	37	25	17	7	1	7	2	2
1	86	13	0	61	16	23	3	46	51	41	43	8	0	0	4	2	0
3	82	14	1	26	46	28	3	23	74	40	37	18	0	1	2	1	0
3	77	19	1	16	30	54	2	16	82	23	50	18	0	0	1	3	1
3	78	17	2	12	55	33	3	17	80	42	39	7	3	1	5	2	1
5	82	13	0	33	47	20	2	18	80	51	27	16	0	1	1	1	0
2	75	22	1	6	66	28	3	8	89	36	26	9	10	1	6	2	8
3	89	6	2	13	74	13	1	15	84	32	32	22	1	1	2	2	7
2	87	10	1	49	26	25	4	7	89	35	32	18	1	1	6	3	0
3	77	18	2	6	61	33	2	11	87	39	33	9	2	5	3	5	0
4	85	10	1	21	57	22	4	15	81	42	39	8	1	6	2	1	0
0	68	28	4	13	30	57	0	22	78	31	52	9	0	2	3	0	1
2	60	33	5	13	40	47	6	6	88	34	40	11	1	2	7	2	0
3	71	24	2	0	69	31	3	4	93	48	14	7	13	3	4	3	5
9	77	14	0	57	22	21	0	50	50	39	37	19	0	1	2	2	0
5	76	19	0	1	72	27	1	4	95	37	19	10	16	1	7	2	7
2	87	9	2	17	50	33	7	18	75	25	51	16	1	1	2	3	1
3	77	19	1	1	64	35	3	4	93	46	14	10	12	3	4	2	5
3	81	15	1	1	72	27	1	4	95	36	13	9	18	2	7	2	11
3	79	18	0	0	73	27	1	4	95	43	13	8	16	4	4	2	6
3	62	32	3	3	63	34	4	8	88	39	28	18	5	1	4	1	2
2	80	17	1	16	54	30	1	14	85	32	35	7	5	4	8	2	3
2	94	4	0	50	25	25	2	40	58	35	38	8	1	4	1	10	0
12	69	19	0	29	50	21	0	14	86	11	32	42	1	0	0	13	0
1	84	13	2	8	66	26	1	16	83	39	31	15	5	1	3	1	1
2	78	18	2	1	67	32	5	5	90	36	40	15	1	2	2	1	2
2	87	9	2	16	62	22	2	26	72	36	25	11	18	3	1	2	1
3	84	11	2	9	73	18	1	10	89	27	48	13	2	0	1	2	3
7	75	15	3	8	52	40	0	13	87	27	39	10	3	2	7	9	1
5	83	12	0	6	67	27	2	7	91	32	42	17	4	0	2	2	0
6	79	14	1	8	70	22	5	9	86	45	28	9	6	2	4	2	1
2	79	19	0	3	73	24	3	4	93	35	39	12	6	3	2	0	1
1	85	13	0	1	79	20	0	2	98	36	30	19	3	2	4	1	1
3	72	23	2	4	57	39	3	7	90	41	24	10	9	4	5	3	3

Probabilitate-Teoria eta Estatistika Inferentziala

Miren Barrenetxea
M. Isabel Orueta

1. PROBABILITATEA

1.1.- Akatsik gabeko dato bat jaurtita, zein da :
a) 2 zenbakia ateratzeko probabilitatea?.
b) Zenbaki bikoitia ateratzeko probabilitatea?.
d) 5 zenbakia baino txikiagoa ateratzeko probabilitatea?.

1.2.- Kalkula ezazu "Urrea ateratzea" eta "Erregea ateratzea" gertaerak, 48 karta dituen sortan, independenteak diren ala ez.

1.3.- Izan bitez A, B eta D hiru gertaera. Idatz ezazu formalki
a) Gertaera bat bakarrik jazotzeko probabilitatea.
b) Gertaera bi jazotzeko probabilitatea.
d) Hiru gertaeretatik bat behintzat jazotzeko probabilitatea.
e) Gertaera bi baino gehiago ez jazotzeko probabilitatea.

1.4.- Ardatzak eta kojineteak independenteki fabrikatzen dira eta ondoren makina batean ipintzeko ardatza eta kojinetea doitu egin behar ditugu. Denbora-tarte batean hartutako balioak ikertuz, ondoko balioak atera dira:

	Akastuna izateko probabilitatea	Akatsik gabea izateko probabilitatea
Kojineteak	0,05	0,95
Ardatzak	0,02	0,98

Kojinete eta ardatz banako multzoa ondoko kasu hauetan da erabilgarria:
a) Kojinetea eta ardatza akatsik gabeak direnean.
b) % 75 kasutan, kojinetea ala ardatza akastuna dencan.
d) % 50 kasutan, kojinetea eta ardatza akastunak direnean.
Zein da zoriz aukeratutako multzo bat erabilgarria izateko probabilitatea?.

1.5.- Hiru ontzi berdin ditugu, bakoitzak hamar bola dituelarik: 3 zuri, 2 gorri eta 5 beltz. Ontzi bakoitzetik bola bat ateratzen baldin badugu, kalkula ezazu zein den bola gorririk ez ateratzeko eta gehienez bola zuri bat ateratzeko dugun probabilitatea.

1.6.- Izan bitez $Pr(A) = 0,4$; $Pr(B) = 0,5$; $Pr(A \cap B) = 0,2$.
Honakoa eskatzen da :
a) Ez A gertaera eta ez B gertaera jazotzeko probabilitatea.
b) Gertaera bat bakarrik (A edo B) jazotzeko probabilitatea.
d) Independenteak al dira?.

1.7.- Kalkula ezazu, 8 edo 9 puntu ateratzeko probabilitatea, dato bi aldi berean jaurtikitzen badira.

1.8.- Hamar karta ateratzen dira, 40 karta dituen sorta batetik. Kalkula ezazu, 6 karta palu batekoak eta 4 beste palu batekoak izateko probabilitatea.

1.9.- Hiri batean, produktu kosmetikoen 2 handizkari daude. A handizkariak farmazien % 70 hornitzen ditu. B handizkariak, farmazien % 50 hornitzen ditu, eta farmazia guztietako, % 20ak ez du produktu kosmetikorik erosten.
Farmazia bat zoriz aukeratzen badugu:
a) Zein da bere hornitzailea A handizkaria izateko probabilitatea?.
b) Zein da bere hornitzaileak A eta B handizkariak izateko probabilitatea?.
d) Zein da bere hornitzailea A handizkaria eta B handizkaria ez izatearen probabilitatea ?.

1.10.- Gizon batek beste 25 urte bizirik irauteko probabilitatea 3/5 da, eta bere emazteak beste 25 urte bizirik irauteko probabilitatea 2/3.
Kalkula ezazu:
a) Hemendik 25 urtera biak bizirik egoteko probabilitatea.
b) Hemendik 25 urtera emaztea bakarrik bizirik egoteko probabilitatea.
d) Hemendik 25 urtera bietatik bat behintzak bizirik egoteko probabilitatea.

1.11.- Sistema batek, denbora jakin baten %30ean energia elektrikoa jasotzen du, denboraren % 60an energia hidraulikoa eta denboraren % 10ean energia mekanikoa. Energia elektrikoaz dabilenean, matxura edukitzeko probabilitatea 0,002 da, energia hidraulikoaz dabilenean 0,001 eta energia mekanikoaz dabilenean 0,05 . Kalkula ezazu matxura edukitzeko probabilitatea.

1.12.- Hamar artikuluz osotutako lote batek, zortzi artikulu akatsgabe ditu. Segidan, zoriz, hiru artikulu aukeratzen dira.
Kalkula ezazu, aukeratutako artikuluak akastunak ez izateko probabilitatea (hau da, hiru artikuluetatik bat ere akastuna ez izatekoa.).

1.13.- Azterketa batean 50 gaitatik, hiru zozketaz aukeratu dira. Ikasle bakoitzak hiru horietatik nahi duena aukera dezake.
Honakoa eskatzen da:
a) Ikasle batek 10 gai bakarrik ikasi baldin baditu, zein da azterketa ez gainditzeko duen probabilitatea?.
b) Zein da azterketa gainditzeko duen probabilitatea?.

1.14.- Fakultate batean, gizonezkoen % 70ak eta emakumezkoen % 80ak A asignatura gainditu egin zuten. Ikaslegoaren % 60 gizonezkoa da.
Ikasle bat zoriz aukeratu da eta honakoa eskatzen da:
a) Zein da A asignatura gainditua izateko duen probabilitatea?.
b) A asignatura gainditu baldin badu, zein da emakumea izateko duen probabilitatea?.

1.15.- Lau pertsonak segidan aukeratu dute zoriz, itxita dauden lau kutxen artean. Lau kutxetatik batek dauka lehiaketako saria. Konproba ezazu lau pertsona horiek saria lortzeko probabilitate berdina dutela.

1.16.- Herri batean, HIES gaitzaz kutsatutako pertsonak, toxikomano izateko duen probabilitatea 0,8 da. Herriko biztanleriaren %2 dago HIESaz kutsatuta, eta toxikomano izateko probabilitatea HIESaz kutsatu gabe dagoen pertsonarentzak 0,03 da. Zoriz toxikomano bat aukeratzen baldin badugu, zein da HIESaz kutsatuta egoteko duen probabilitatea?.

1.17.- Meteorologo batek egun eguzkitsu batean hurrengo egunean eguzkia egingo duela aurresateko duen probabilitatea 0,8 da. Eguzkitsua ez den egunean, hurrengo egunean eguzkia egingo duela aurresateko probabilitatea 0,4 da. Eguna eguzkitsua ez izateko dagoen probabilitatea 0,4 da. Eguna eguzkitsua izateko dagoen probabilitatea 0,6 da. Zein da eguraldia iragartzean eguzkia egingo duela esateko probabilitatea?

1.18.- Kontsidera dezagun P (.) probabilitate-funtzio bat, A , Ω-ren multzoen, σ-algebran definiturik. Izan bitez A , B, C eta D , A-ren gertaerak, non $A \cup B \cup C = \Omega$, eta A, B eta C bateraezinak dira. Izan bitez:
P(D/A) = 0,3 P(D/B) = 0,2 P(D) = 0,3 P(A) = 0,6 P(B) = 0,3
Honakoa eskatzen da :
a) P(D/C)
b) $P(D \cap A)$
d) $P(D \cap B)$
e) P(C)
f) $P[D/(A \cup B)]$
g) P(A/D)

1.19.- Ohianeko herrialde batean, kide berriek erritu bat bete behar dute: begiak bendaturik, hobi batetik 2 suge atera behar dituzte (bakoitza esku batekin). Hobian bi suge pozoitsu eta 4 pozoigabe daude.
Honakoa eskatzen da:
a) Bi pozoitsu ateratzeko dagoen probabilitatea.
b) Bi pozoigabe ateratzeko dagoen probabilitatea.
d) Pozoitsu bat ateratzeko dagoen probabilitatea.
e) Horrela ateratako pozoitsu batek, kide berria fizatzeko daukan probabilitatea 0,3 da (fizadurak derrigorrez heriotza dakar). Pertsona batek erritua egiten baldin badu, zein da bizirik ateratzeko duen probabilitatea?

1.20.- A_1, A_2,..... A_n ontzi ditugu, eta beraien barnean bola zuriak eta beltzak daude. Bola zuria ateratzeko dagoen probabilitatea, ontzi bakoitzean P_1 , P_2, ...P_n da. Ontzi bat zoriz aukeratzen baldin badugu (ontzi bakoitza aukeratzeko dagoen probabilitatea 1/n da) eta ontzi horretatik bola bat ateratzen badugu, zein da ateratzen dugun bolak zuria izateko duen probabilitatea?.

1.21.- Telebista-enpresa batek, bere aparatuetako balbulak urtebeteko garantiaz hornitzen ditu. Telebista batek zortzi balbula ditu eta balbula bat lehen urtean hondatzeko dagoen probabilitatea 0,01 da.
Balbulen hutsak independente kontsideratuz, bezero bati saldutako telebista batean, zein da balbula bat behintzat konpondu behar izateko dagoen probabilitatea?.

1.22.- Herri batcko telefono-zentral batean 100 dei jaso ziren egun batean. Hogei dei hiritik egin zirela badakigu.
Honakoa eskatzen da:
a) Zein da lehen eta hirugarren deiak hiritik eginak eta bigarrena hiritik ez egina izateko dagoen probabilitatea?.
b) Zein da lau dei hartuta bi behintzat hiritik eginak izateko dagoen probabilitatea?.

1.23.- A eta B makinetan txandaka hiru kontrol-proba egiten dira (hau da A B A edo B A B egiten dira). Artikulu batek, enpresa bati saltzeko, hiru proba horietatik, bi behintzat pasatu behar ditu. Produzitzen diren artikuluetako % 99ek, A makinako kontrol-proba pasatzen dute eta % 95ek, B makinakoa.
Artikulua saltzen duen enpresak, kontrol-proba A edo B makinarekin hastea aukera badezake, zein aukera izango litzateke hobea berarentzat, A makinarekin hastea ala B makinarekin hastea?

1.24.- Gai kimikoak egiten diren lantegi batean, kola, erretxina eta disolbatzailea produzitzen dira, eta litro bateko ontzietan saltzen dira. Aurreko ikerketei esker, badakigu fabrikazio-prozesuan gaien kalitatea hondatzen duten akatsak badaudela eta horren ondorioz, beharrezkoa dela:
kola-poteen % 5, erretxina-poteen % 10 eta disolbatzaile-poteen % 20 prozesuaren amaieran baztertzea.
Lantegiko produkzio osoa hartuz, badakigu % 20 kola-poteak direla, % 30 erretxina-poteak eta % 50 disolbatzaile-poteak.

a) Kalitate-kontrola egin nahi badugu, eta horretarako poteak zoriz aukeratuz beraien egoera aztertzen baldin badugu, zein da baztertu egin behar dela konprobatu dugun pote bat kolazkoa izateko dagoen probabilitatea?
b) Zein da zoriz aukeratutako pote bat erretxinazkoa izateko dagoen probabilitatea?
d) Zein da zoriz aukeratutako pote bat baldintza onetan aurkitzeko eta baztertu behar ez izateko dagoen probabilitatea?
e) Produktu berri bat atera dugu. Produktu berri hau, % 50 litro bat kolaz eta litro bat erretxinaz osotuta dago, eta bi litroko potetan sartzen da. Produktu hau egoera onean egon dadin, beharrezkoa da kola eta erretxina biak egoera onean egotea. Zein da produktu berri honetako pote bat baztertzeko dagoen probabilitatea?

2. PROBABILITATE-BANAKETAK

2.1.- Izan bedi $(X_1, X_2)^T$ aldagai aleatorio diskretuaren probabilitate-banaketa elkartua ondoko hau:

x_2 / x_1	0	1
1	1/8	3/8
2	2/8	2/8

Honakoa eskatzen da:

a) Banaketa-funtzioa.

b) Bazter-banaketa funtzioak.

d) Independenteak al dira X_1 eta X_2 ?

2.2.- Izan bitez X eta Y bi aldagai aleatorio independente, ondoko probabilitate--banaketarekin:

x	1	2
P (x)	0,4	0,6

y	3	9
P (y)	0,7	0,3

Honakoa eskatzen da:

a) (X,Y)-ren probabilitate-banaketa elkartua.

b) Kalkula itzazu F(x), F(y), F(x,y)

2.3.- $(X, Y)^T$ aldagaiaren probabilitate-banaketa ondoko hau izanik:

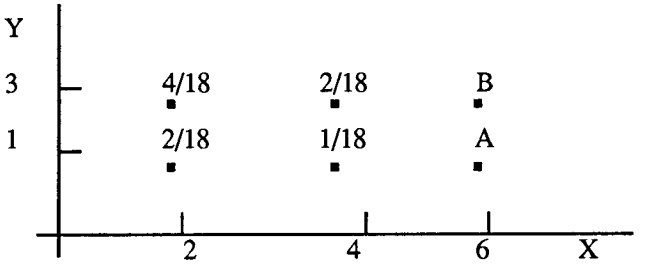
y / x	0	2	4
1	1/4	0	1/4
2	1/12	1/3	1/12

Honakoa eskatzen da:

a) X = 0 baldin bada, kalkula ezazu Y-ren banaketa baldintzatua.

b) Independenteak al dira?

2.4.- Izan bedi $(X,Y)^T$ a.a. diskretua, ondoko probabilitate-banaketa izanik:



Kalkula itzazu A eta B probabilitateak, X eta Y aldagaiak independenteak izan daitezen.

2.5.- Izan bedi $(X, Y, Z)^T$ a.a. bat, bere zenbatasunezko funtzioa ondoko hau izanik:

P(2, 8, 1) = 3/30 P(2, 8, 5) = 4/30 P(2, 3, 9) = 2/30
P(6, 8, 1) = 9/30 P(6, 8, 5) = 7/30 P(6, 3, 5) = 1/30
P(6, 8, 9) = 4/30

Honakoa eskatzen da:

a) Banaketaren interpretazio grafikoa

b) F(4, 9, 7)

d) Banaketaren eten-puntuak

e) Kalkula itzazu bazter-zenbatasunezko funtzioak OX eta OYZ espazioetan.

2.6.- Baldosa-enpresa batek datu hauek atera ditu bere produkziotik:

x \ y	1	2	3	4
1	1/24	1/24	2/24	2/24
2	2/24	2/24	4/24	4/24
3	1/24	1/24	2/24	2/24

X: higadura-erresistentzia

Y: baldosen kolorea

Honakoa eskatzen da:

a) Kalkula ezazu higadura-erresistentzia eta kolorea independenteak diren ala ez.

b) "2" erresistentziako baldosa bat "3" kolorekoa izateko dagoen probabilitatea.

d) "1" koloreko baldosa bat, "3" erresistentziakoa izateko dagoen probabilitatea.

2.7.- X aldagai aleatorioaren banaketa-funtzioa ondoko hau da:

$$F(x)=\begin{cases} 0 & x<0 \\ kx^4 & 0\le x<5 \\ 1 & x\ge 5 \end{cases}$$

Honakoa eskatzen da:

a) k parametroa

b) f(x) dentsitate-funtzioa

d) P { (0,1) $\cup$ (4,10) }

2.8.- Egun batean artikulu bat erosten duen jendearen portzentaia aleatorioa da, eta 20 eta 40 tartean banatzen da dentsitate uniformez.

Zein da egun batean erosten dutenen portzentaia 25 eta 35 tartean egoteko dagoen probabilitatea?

2.9.- $0 \le x \le 3$ eta $0 \le y \le 2$ tartean, $(X, Y)^T$ a.a-ri dagokion dentsitate-funtzioa ondoko hau da:

$$f(x,y) = \begin{cases} \alpha x^2 y & (x,y)\in T \\ 0 & (x,y)\notin T \end{cases}$$

Honakoa eskatzen da :

a) Kalkulatu α

b) Kalkulatu bazter dentsitate-funtzioak

d) Independenteak al dira X eta Y?

3. TRANSFORMAZIOAK

3.1.- Izan bedi (0,4) tartean uniformea den X a.a. bat. Honakoa eskatzen da:
a) Bere dentsitate-funtzioa
b) Z-ren dentsitate-funtzioa ondoko hiru kasuetan:
i) $Z = 2X + 3$ ii) $z = 3 - 2X$ iii) $Z = X^2$

3.2.- Ale bat fabrikatzeko erabiltzen den denbora, 10 eta 12 minutu bitartean banatzen da uniformeki. Alearen ezaugarri bat funtzionalki erlazionatuta dago fabrikatzeko denborarekin:
Ezaugarria = 2/denbora.
Kalkula ezazu ezaugarriaren dentsitate-funtzioa.

3.3.- Izan bedi X, banaketa esponentziala duen aldagai aleatorioa, bere banaketa-funtzioa ondoko hau izanik:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 - e^{-x} & x > 0 \end{cases}$$

Kalkula ezazu Z aldagaiaren banaketa-funtzioa, Z aldagaia ondoko hau izanik:

$$Z = \begin{cases} X+1 & X \geq 1 \\ 1-X & X \leq 1 \end{cases}$$

3.4.- Izan bedi X aldagai aleatorioa (0,1) tartean uniformeki banatua. Kalkula ezazu, $Y = -\ln X$ transformazioaren dentsitate-funtzioa.

3.5.- Izan bedi X, banaketa normala $N(0,\sigma^2)$, duen aldagai aleatorioa, bere dentsitate--funtzioa ondoko hau izanik:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{\frac{-x^2}{2\sigma^2}} \quad ; -\infty < x < \infty$$

Izan bedi $Y = |X|$ transformazioa. Kalkula ezazu Y aldagaiaren dentsitate-funtzioa.

3.6.- Izan bedi X aldagai aleatorio diskretu bat eta bere zenbatasunezko funtzioa:

x	-1	0	1
P(x)	1/4	1/4	1/2

Kalkula ezazu Z aldagaiaren banaketa-funtzioa ondoko bi kasutan:

a) $Z = X^2$

b) $Z = X + 2$

3.7.- Izan bedi (X,Y) aldagai aleatorioaren dentsitate-funtzioa ondoko hau:

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} e^{-(x+y)} & x > 0 \; ; \; y > 0 \\ 0 & x \leq 0 \; ; \; y \leq 0 \end{cases}$$

Kalkula ezazu, Z aldagaiaren dentsitate-funtzioa eta banaketa-funtzioa, $Z = X + Y$ izanik.

3.8.- Izan bitez X eta Y bi aldagai aleatorio independente. Beraien banaketak uniformeak dira (0 , 1) tartean. Kalkula itzazu U, V eta Z aldagaien dentsitate-funtzioak eta banaketa-funtzioak.

a) $U = X.Y$

b) $V = X - Y$

d) $Z = X - 1$

3.9.- Izan bedi $\dot{X}$ aldagai aleatorio jarraia, bere banaketa-funtzioa ondoko hau izanik:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \dfrac{x^2}{4} & 0 \leq x < 2 \\ 1 & x \geq 2 \end{cases}$$

Kalkula ezazu $f_z(z)$, $Z = X^2/2$ dela jakinez.

3.10.- Izan bedi X aldagai aleatorio jarraia, bere dentsitate-funtzioa ondoko hau izanik:

$$f(x) = \begin{cases} xe^{-x} ; & x > 0 \\ 0 \; ; & x \leq 0 \end{cases}$$

Har dezagun $Y = e^{-X}$ transformazioa. Kalkula ezazu Y aldagaiaren dentsitate--funtzioa

4. MOMENTUAK ETA TCHEBYCHEV-en BORNAPENAK

4.1.- X eta Y aldagai aleatorioen baterako dentsitate-funtzioa ondoko hau da:

$$f(x,y)=\begin{cases} xy/96\,; & 0\le x\le 4 \ \wedge \ 1\le y\le 5 \\ 0\,; & 0>x>4 \ \vee \ 1>y>5 \end{cases}$$

Honakoa eskatzen da :

a) EX^2

b) EY^2

d) EX^2Y^2

e) $E(2X^2+3Y^2)$

4.2.- Izan bedi X aldagai aleatorioa, bere dentsitate-funtzioa ondoko hau izanik.

$$f(x)=\begin{cases} \frac{1}{2}+\frac{x}{4} & ; \quad x\in(-2,0) \\ \frac{1}{2}-\frac{x}{4} & ; \quad x\in(0,2) \\ 0 & ; \quad x\notin(-2,2) \end{cases}$$

Honakoa eskatzen da :

a) EX

b) D^2X

d) $P[\,|X|>1{,}5\,]$

e) Froga ezazu Tchebychev-en teorema betetzen duen ala ez.

4.3.- Izan bedi $(X,Y)^T$ aldagai aleatorio bikoitza, (0,0) (2,0) (2,1) eta (0,1) erpinak dituen laukizuzenean banaturik.

Bere dentsitate-funtzioa f(x,y) ondoko hau da:

$$f(x,y)=\begin{cases} axy^2 & \text{laukizuzenaren barnean} \\ 0 & \text{laukizuzenaren kanpoan} \end{cases}$$

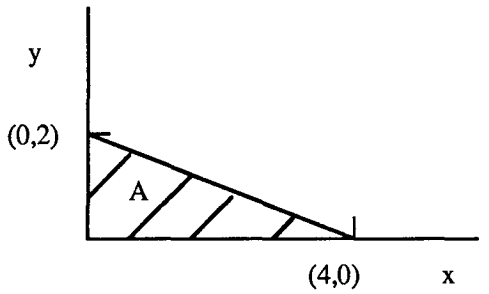
Kalkula ezazu kobariantz matrizea.

4.4.- Izan bedi $(X,Y)^T$, A triangeluan dentsitate konstateaz banatzen den a.a. bikoitza. Kalkula itzazu:

a) Batezbesteko bektorea

b) Kobariantz matrizea

d) Erregresio-zuzenak



4.5.- X aldagai aleatorioaren lehen eta bigarren momentuak bakarrik ezagutzen dira: m=2; $\sigma^2 = 1$. Zein da X aldagaiaren balioa (0, 4) tartean aurkitzeko dagoen behe probabilitatea?.

4.6.- Produzitzen diren piezen tamainaren batezbestekoa, 30 mm-koa da eta bere desbidazioa 0,2 mm-koa. Pieza hauen onarpen-tartea (29,4 ; 30,6) da. Populazioak banaketa jarraia duela suposatuz, kalkula ezazu akastun piezen portzentaia teorikoaren goi-bornea.

4.7.- Astegun batean, zineman emanaldi bakoitzera doazen ikusleen kopuruak, hurrengo batezbesteko eta desbidazio estandarra dituen probabilitate-banaketa du:

	Batezbestekoa	Desbidazio estandarra
1. Emanaldia	110	9
2. Emanaldia	240	12
3. Emanaldia	100	8

Emanaldi bakoitzera doazen ikusleen kopuruak elkarrekiko independenteak direla kontsideratuz, honakoa eskatzen da:

a) Astegun batcko ikusle guztien kopuruarentzat kalkula ezazu handiago edo berdin % 75 den probabilitate-tarte bat.

b) "Patioko besaulkia" 225 pezeta kostatzen baldin bada, kalkula ezazu egun batean biltzen den diruarentzat handiago edo berdin % 75 den probabilitate-tartea.

4.8.- Hegazkin-konpainia batek Santiago de Compostela-tik Valentzia-ra linea erregularra du, Bilbon eskala egiten duelarik.
Hiri honetan bidaiariak har daitezke baina ez da bidaiaren helmuga inorentzat. Txartel-eskaera Santiagotik aldagai aleatorioa da, bere batezbestekoa 100 txartel, eta desbidazioa 25 txartel direlarik, eta txartel-eskaera Bilbotik ere aurrekoarekiko aldagai aleatorio independentea da, batezbestekoa 120 txartel eta desbidazioa 30 direlarik.
Zerbitzua egiten duen hegazkinak 300 bidaiarirentzako lekua baldin badu, kalkula ezazu hegalaldi honetan joan nahi duen bidaiari batek txartelik ez lortzeko duen probabilitate-kota bat.

4.9.- Pentsa ezazu datu erregular eta hobezina duzula, (hau da jaurtiketa batean aurpegi bakoitza irteteko dagoen probabilitatea berdina da = 1/6).
a) Jaurtiketa bat egindakoan, zein da lortzen diren puntuen batezbestekoa?
b) Zein da bere bariantza?
d) Zein da n segidazko jaurtiketetan lortutako puntuen betezbesteko aritmetikoaren bariantza?
e) Zenbat izan beharko luke gutxienez n-k aurreko atalean, puntuen batezbesteko aritmetikoa eta lehenengo atalean kalkulatutako batezbesteko balioaren diferentzia 0,1 baino txikiagoa, 0,95 baino probabilitate handiagoaz izan dadin?.

5. FUNTZIO KARAKTERISTIKOA

5.1.- Izan bitez X_1, X_2 eta X_3, hiru aldagai aleatorio independente, beraien balio tipikoak ondokoak izanik:

$$m_1 = m_2 = m_3 = 5$$
$$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = 0{,}1$$

Izan bedi Z beraien batezbesteko aritmetikoa,

$$Z = \frac{X_1 + X_2 + X_3}{3}$$

Honakoa eskatzen da:

a) Kalkula itzazu, X_i-ren funtzio karakteristikoaren McLaurin-en seriearen lehen hiru terminoak.

b) Adieraz ezazu Z-ren funtzio karakteristikoa, X_i-en funtzio karakteristikoak erabiliz.

5.2.- Izan bitez X eta Y, banaketa berdina duten bi aldagai aleatorio independente. Bakoitzaren funtzio karakteristikoa ondokoa da:
$\Psi(u) = a + bu + cu^2 + ...$

Honakoa eskatzen da:

a) Kalkula itzazu a, b, eta c parametroak, m=2 eta σ=3 izan daitezen.

b) Kalkula ezazu 3X-en funtzio karakteristikoa.

d) (2X + Y)-ren funtzio karakteristikoa.

5.3.- Izan bedi f(x), X aldagai aleatorioaren dentsitate-funtzioa

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \notin (0,1) \\ xe^{x} & x \in (0,1) \end{cases}$$

Kalkula ezazu momentuen funtzio sortzailea.

5.4.- Izan bitez X eta Y, bi aldagai aleatorio independente beraien funtzio karakteristikoak ondokoak izanik:

$\Psi_X(u) = 1 + 2iu - 10u^2 + \ldots\ldots$
$\Psi_Y(u) = 1 - 6u^2 + \ldots\ldots$

Kalkula ezazu $Z = X + Y$-ren bariantza.

5.5.- Izan bitez X eta Y, bi aldagai aleatorio independente, beraien funtzio karakteristikoak ondokoak izanik:

$$\Psi x(u) = 1 + iu + \frac{3}{2}(iu)^2 + \ldots$$

$$\Psi y(u) = 1 - iu + \frac{5}{2}(iu)^2 + \ldots$$

Honakoa eskatzen da:
a) Kalkula ezazu (X, Y)-ren kobariantz matrizea
b) Kalkula ezazu $Z = 2X + 3Y$-ren bariantza
d) Kalkula ezazu $W = X + Y$-ren funtzio karakteristikoa (u^3 terminoraino)

5.6.- Izan bitez X eta Y, Poisson-en banaketa duten bi aldagai aleatorio independente, beraien parametroak $\lambda = 1$ eta $\lambda = 2$ izanik. Esan arrazonatuz, $Z = X + Y$ aldagaiak zein banaketa izango duen. (Laguntza: W, Poisson-en banaketa duen aldagai aleatorioa baldin bada, bere parametroa λ izanik, bere funtzio karakteristikoa ondoko hau izango da : $\Psi w(u) = e^{\lambda\left(e^{iu}-1\right)}$

6. BANAKETA NORMALA

6.1.- Izan bedi Z, banaketa normala murriztua duen a.a. bat. Kalkulatu:

a) $P(Z \leq 0,6)$
b) $P(Z > 0,35)$
d) $P(Z \leq -0,30)$
e) $P(Z > -1,60)$
f) $P(1,30 < Z < 1,40)$
g) $P(|Z| \leq 2)$
h) $P(|Z| > 2)$

6.2.- Z banaketa normala murriztua duen a.a. baldin bada, kalkula ezazu b-ren balioa ondoko kasuetan:

a) $P(Z \leq b) = 0,8264$
b) $P(Z \leq b) = 0,1314$
d) $P(-0,5 < Z < b) = 0,6687$

6.3.- Kalkula ezazu batezbestekoan zentratutako tartea, 0,95 probabilitateaz, banaketa N(0, 1)-rentzat.

6.4.- Kalkula ezazu k ondoko kasuetan, X banaketa murriztua duen a.a. bat denean.

a) $P(X > k) = 0,2119$
b) $P(-k < X < k) = 0,8064$

6.5.- Izan bedi X banaketa normala $N(2,\sigma^2 = 4)$ duen aldagai aleatorioa. Kalkulatu:

a) $P(X \leq 3)$
b) $P(1 < X < 3)$
d) k balioa, non $P(X < k) = 0,975$
e) k balioa, non $P(X > k) = 0,975$

6.6.- Lanpara-mota batek 1.500 orduko bizitza du batezbestekoaz, desbidazio estandarra 150 ordukoa izanik.

Zerbitzu bat lanpara batekin bakarrik argitzeko, 3 lanpara konektatu dira. Lehenengoa apurtzen denean, bigarrena pizten da (momentu horretararte itzalita egon da) eta beharrezkoa denean, hirugarrenak, bigarrenaren eginkizuna beteko du. Lanpararen iraupena normal banatzen dela kontsideratuz, zein da zerbitzua argituta egoteko dagoen probabilitatea?:

a) Gutxienez 5.000 ordutan
b) Gehienez 4.200 ordutan

6.7.- Izan bedi ondoko dentsitate-funtzioaz definitutako banaketa:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & ; \quad x \leq 0 \\ \dfrac{2}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} & ; \quad x > 0 \end{cases}$$

Kalkula ezazu zoriz aukeratutako balioak bat baino txikiagoa izateko duen probabilitatea.

6.8.- Geltoki batera heltzen den tren bateko bidaiari-kopuruak, banaketa normala $N(100, \sigma^2 = 20)$ du. Geltoki horretan bidaiariek trena utzi edo bidaian segi dezakete, eta bidaiari berriak ere igo daitezke. Geltoki horretan trenetik jaisten den bidaiari--kopuruak banaketa $N(30, \sigma^2 = 12)$ du eta igotzen den bidaiari-kopuruak $N(40, \sigma^2 = 9)$. Aldagai hauek elkarrekiko independente direla suposatuz, kalkulatu:
a) Geltokia utzitakoan trenak eramaten duen bidaiari-kopuruaren banaketa.
b) Kalkulatu trenak zenbat eserleku eduki behar dituen, geltoki horretatik aurrera zutik joan behar ez izateko probabilitatea 0,95-ekoa izan dadin.

6.9.- Artikulu baten eguneroko kontsumoak banaketa normala du, batezbestekoa 5.000 gramo eta desbidazioa 400 izanik. Eguneroko kontsumoak independenteak baldin badira, kalkula itzazu ondoko probabilitateak lau eguneko epean:
a) Gutxienez 25.000 g kontsumitzeko dagoen probabilitatea
b) Gehienez 15.000 g kontsumitzeko dagoen probabilitatea

6.10.- Hamabi urteko mutikoen altuerek banaketa normala dute, batezbestekoa m = 157 cm izanik. Mutiko guztien % 98ak, 166 cm baino gutxiago neurtzen baldin badu, kalkula ezazu σ-ren balioa.

6.11.- Izan bedi $X \in N(0, 1)$ eta $Y = X^2$.
Honakoa eskatzen da:
a) Frogatu $E(Y) = 1$ dela.
b) Frogatu $\sigma_Y^2 = 2$ dela
d) Kalkulatu Y-ren dentsitate-funtzioa.

6.12.- Motore txiki baten bizitza, normal banatzen den aldagai aleatorioa da, bere batezbestekoa 10 urtekoa eta desbidazio estandarra 2 urtekoa izanik. Fabrikatzaileak, bermealdian apurtzen diren motoreak kobratu gabe ordezkatzen ditu.
Apurtzen diren motoreen %3 bakarrik ordezkatu nahi badu, zenbateko bermealdia eskaini behar du?.

6.13.- Berrehun ikaslez osatutako talde batean, azterketaren emaitzak normal banatzen dira, bere batezbestekoa 30 eta desbidazioa 10 izanik. Kalkulatu:

a) Ikasleen zein portzentaiak atera du 30 puntu edo gehiago azterketan ?

b) Zein da, zoriz aukeratutako ikasle baten puntuazioa 30 eta 40-ren artekoa izateko (biak sartuta) dagoen probabilitatea?

d) Nota onena atera dutenen % 25-en artean egoteko, zein da atera behar den puntuazio minimoa?.

7. BANAKETAZKO KONBERGENTZIA

7.1.- Izan bedi X, { 1, 2, 3, 4, 5, 6 } multzoan, probabilitate kostantea duen aldagai aleatorioa. X aldagai aleatorioaren 100 obserbazio dituen zorizko lagin batek, $\overline{X}$ batezbesteko aritmetikoa ematen du.
Kalkula ezazu:
a) $\overline{X}$ -en banaketaren itxura
b) $\overline{X}$ -en batezbestekoa eta bariantza

7.2.- Lurrinezko artikuluak saltzen dituen denda-kate batek, penintsula osoan ditu banaturik bere dendak.
Hiriburuetan aurkitzen diren 80 denden urteko mozkina, lege uniformeari U (5, 25) jarraituz banatzen da (milioi pezetatan).
Hiriburuetatik kanpo aurkitzen diren 60 denden urteko mozkinaren banaketari buruz, batezbestekoa 100 eta desbidazioa 5 duen banaketa jarraia dela besterik ez dakigu.
Kalkula ezazu, urteko mozkin osoak 1.700 milioi gainditzeko duen probabilitatea zein den. (Pentsa ezazu denda desberdinen mozkinak elkarrekiko independente direla).

7.3.- Artikulu baten eguneroko eskaria (milaka unitatetan) aleatorioa da eta bere dentsitate-funtzioa:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ x/18 & 0 < x \leq 2 \\ x^2/21 & 2 < x \leq 4 \\ 0 & x > 4 \end{cases}$$

Kalkula ezazu, 189 eguneko epean, eskaria 560 baino handiagoa izateko dagoen probabilitatea.

7.4.- Zorizko joko bat, hamar zenbakiz osatzen da. Ateratzen den zenbakiari igartzen dion pertsona bakoitzari, apostu eginiko dirua gehi bost bider diru hori ordaintzen zaio. Jokalari batek, jokaldi bakoitzean 50 pezeta jokatu ditu: 25 pezeta zenbaki batean eta 25 pezeta beste zenbakian. 100 bider jokatzen baldin badu, zein da dirurik ez galtzeko duen probabilitatea?

7.5.- Jokalari batek irabazteko probabilitatea berdin 1/2 du. Irabazten duen bakoitzean 5 pezeta lortzen ditu, eta galtzen duen bakoitzean 5 pezeta utzi behar ditu.
Arratsalde batean 400 jokaldi izan ditu. Zenbat diru eraman beharko luke bere galera posiblcak % 95eko probabilitateaz gainditu ahal izateko?.

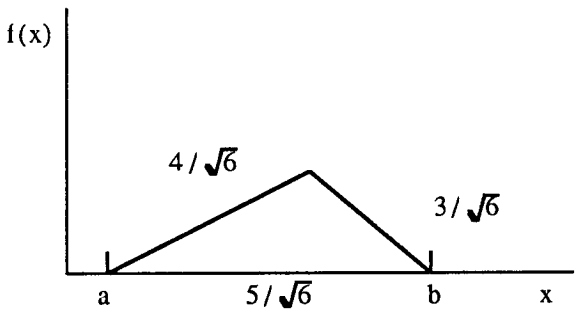
7.6.- Merkatal eragiketa batek ondoko emaitzak eman ditzake:
a) Milioi bat galdu 0,1eko probabilitateaz
b) Milioi bi irabazi 0,6ko probabilitateaz
d) Hiru milioi irabazi 0,3ko probabilitateaz
Aurrekoa bezain 120 eragiketa independente egiten badira, kalkula ezazu 220 milioi baino irabazi handiagoak lortzeko probabilitatea zein den.

8. INFERENTZIA ESTATISTIKOAREN HASTAPENAK: PUNTUZKO ESTIMAZIOA, HIPOTESIEN TESTAK ETA χ^2-AREN TESTAK.

8.1.- Estimatu egiantz handiko metodoa erabiliz, Poisson-en populazio baten λ parametroa. Horretarako, 4, 5, eta 6 balioak hartzen dituen lagin aleatorio bakuna hartzen dugu.

8.2.- Kalkula itzazu banaketa normalaren batezbestekoa eta bariantzaren egiantz handiko estimatzaileak, n tamainako lagin aleatorioa erabiliz.

8.3.- Ondoko grafikoan dauden "a" eta "b" balioak estimatu nahi ditugu egiantz handiko metodoaz. Hori lortzeko, bat tamainako lagina hartuko dugu: x = 0 emaitza lortuz.



8.4.- Izan bedi x aldagai aleatorio diskretua, bere banaketa ondokoa izanik:

P(X = 1) = 2/10 P(X = 2) = (2 - θ)/10

P(X = 3) = θ/10 P(X = 4) = 6/10

a) Zein balio har ditzake θ-k ?

b) Lagin aleatorio bakunak ondoko balioak ematen ditu:
(1,3,3,3,1,2,4,4,4,4,4,4,4). Zein da θ-ren egiantz handiko estimazioa?

8.5.- Kalkulatu θ-ren egiantz handiko estimadorea, n tamainako lagina dugunean, $f(x) = (1+\theta)\, x^{\theta}$ dentsitate-funtzioa duen populaziotik hartuta.

8.6.- Banaketa baten zenbatasunezko funtzioa ondoko hau da:

$P(3) = (5 + \theta - \lambda)/12 \quad P(5) = (3 - \theta)/12$

$P(8) = (4 + \lambda)/12$

Estima itzazu λ eta θ, momentuen metodoaz, hurrengo lagina erabiliz :

3, 5, 8, 8, 3, 8 .

8.7.- Badakigu autoen garbiketa-estazio batera heltzen den bezero batetik bestera dagoen denbora-diferentzia, banaketa esponentziala jarraitzen duen X aldagai aleatorioa dela, bere parametroa k/60 izanik.

Estima ezazu k parametroa egiantz handiko metodoa eta momentuen metodoa erabiliz, hurrengo laginatik: 3, 15, 20, 7, 15.

Konpara itzazu emaitzak.

8.8.- Banaketa esponentzialaren dentsitate-funtzioa, ondoko hau da:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ \lambda e^{-\lambda x} & x > 0 \end{cases}$$

Kalkula ezazu λ parametroaren estimatzailea egiantz handiko metodoaz, n balioz osaturiko laginetik.

8.9.- Zaku batean 100 eskutitz-azal daude (50 zuri eta 50 gorri) eta hauetatik 10ek saria dute (9 zurik eta gorri batek). Azal bat zoriz ateratzen da eta sarituta dagoen ala ez egiaztatzeko, hurrengo arauari jarraitzen zaio: "Saritua dagoen hipotesi hutsa baztertu egiten da azala gorria baldin bada".

Honakoa eskatzen da:

a) Frogaren esangura-maila

b) Frogaren potentzia

8.10.- Bariantza berdin 36 duen populazio batean Ho: m = 5, hipotesi hutsa, Ha: m = 4, hipotesi alternatiboaren aurka kontrastatu nahi dugu. Horretarako n = 9 duen lagina hartzen da eta estatistiko bezala laginaren batezbestekoa hartzen dugu. Bi froga desberdin hartzen ditugu kontutan:

1. froga: $E.K_1 = (-\infty; 2,4)$

2. froga: $E.K_2 = (3,08; 3,76)$

Honakoa eskatzen da:

a) Frogen esangura-maila

b) Aurkitu potentziak eta irudikatu kurba karakteristikoak

d) Froga bietatik esan, arrazonatuz, hobea zein den.

8.11.- $(0,\theta)$ tartean banaketa uniformea duen populazio batetik, bat tamainako lagin aleatorio bakuna hartzen dugu. Ho: $\theta = 2$, hipotesi hutsa, Ha: $\theta \neq 2$ hipotesi alternatiboaren aurka kontrastatu nahi dugu, eta horretarako, ondoko erregela aukeratu dugu: "Ho baztertu, $x \notin (0,1 ; 1,9)$ baldin bada".

Honakoa eskatzen da:

a) Frogaren esangura-maila

b) Bigarren motako errorearen probabilitatea, $\theta a = 2,5$ denean.

8.12.- Produktu bat potetara sartuta saltzen da, eta haietan ondoko hau jartzen da: pisua = 300 g. Ontziratze-prozesua automatikoki egiten da, eta ondo baldin badago, ateratzen diren poteen pisuak normal banatzen dira: $N(300, \sigma^2= 25)$. Prozesua ondo dagoen ala ez kontrastatzeko, 25 poteko lagina hartzen da, eta $\bar{x} < 300 - k$ edo $\bar{x} > 300 + k$ denean prozesua gelditu egiten da.

Honakoa eskatzen da:

a) Aurkitu k, prozesua behar ez bezala gelditzearen probabilitatea berdin 0, 001 izan dadin.

b) a atalean aurkitu duzun k balioarentzat, kalkulatu prozesua ez gelditzearen probabilitatea zein den, nahiz eta prozesua desegokia izan eta 290 g-ko batezbestekoa eta bariantza zuzena ($\sigma^2 = 25$) dituzten poteak produzitu.

8.13.- Populazio batetik 1.000 pertsona aukeratzen dira zoriz eta hurrengo ezaugarrien arabera sailkatzen dira: gizona-emakumea, daltonikoa-ez daltonikoa. Lortu diren emaitzak A taulakoak dira. Eredu genetikoari jarraituz, lau sailetako probabilitateek B taulakoak izan behar dute.

A taula

	G	E
D	39	6
ED	441	541

B taula

	G	E
D	1/2q	$1/2q^2$
ED	1/2p	$1/2p^2+pq$

Honakoa eskatzen da:

a) Estimatu p egiantz handiko metodoaz

b) Kontrastatu datuek eredu genetikoarekin duten komunztadura (konkordantzia) % 5eko esangura-mailaz.

8.14.- Hiru eskualdeko bizi-maila ikertzeko, 20, 30 eta 50 familiaz osaturiko laginak hartu dira, hurrengo emaitzak lortuz:

	Egokia	Desegokia	
1.eskualdea	5	15	20
2.eskualdea	10	20	30
3.eskualdea	20	30	5
	35	65	100

Kontrastatu % 10 esangura-mailaz ondoko hipotesia: errenta egokia eta desegokia dutenen arteko familien banaketa hiru eskualdeetan berdina dela.

8.15.- Ehun pieza hartu dira zoriz egun bateko produkziotik eta hurrengo emaitzak lortu dira:

Makinaren zenbakia	Pieza akastunak	Lagineko piezak
1	14	180
2	19	230
3	16	210
4	14	170
5	17	210

Begira ezazu estatistikoki, % 2ko esangura-mailaz, pieza akastunen proportzioa bost makinetan berdina dela baiezta dezakegun. Har itzazu kontutan ondoko bi suposizioak:

a) Bost makinen eguneroko produkzioa nahastuta dago multzo bakarra osatuz eta hortik 1.000 pieza hartu ditugu.

b) Makina bakoitzeko produkzioak banatuta daude eta berorietatik, 180, 230, 210, 170 eta 210 unitatetako laginak hartu ditugu.

9. ESTIMATZAILEEN PROPIETATEAK

9.1.- X aldagai aleatorioa erabiltzen ari zara eta ezagutzen ez duzun bere "m" batezbestekoa estimatu nahi duzu.

a) Eraiki ezazu m-ren estimatzaile alboragabea n tamainako lagin bat hartuz.

b) Aurki ezazu bere bariantza, X aldagaiaren bariantzaren funtzioan.

d) σ^2 eta n-ren balio batzuentzat, aurki ezazu probabilitate-kota bat estimatzailearen balioa, m-tik h baino gehiago urruntzen delarik, h aurrez jarritako zenbaki positiboa izanik.

e) Zer gertatzen da n infiniturantz hurbiltzen denean?

f) Tinkoa al da zure estimatzailea?. Arrazonatu erantzuna.

9.2.- Izan bedi X, (0, θ) tartean uniformeki banatuta dagoen aldagai aleatorioa. Izan bedi (x_1, x_2, x_3, x_4), X aldagaiaren lagin aleatorio bakun bat. Har ezazu ondoko estimatzailea.

$\theta^* = k(x_1 + x_2 + x3 + x_4)/4$.

a) Zein da θ^*-ren bariantza, θ eta k-ren funtzioan idatzita?

b) Zein balio hartu behar du k konstanteak, θ^* alboragabea izan dadin?.

9.3.- Populazio normal N(a, 1) batetik, n = 2 tamainako lagin aleatorio bakun bat lortzen da. Har ditzagun hurrengo bi estimatzaileak:

$a^* = 2/3\ x_1 + 1/3\ x_2$

$a^{**} = 2/5\ x_1 + 4/5\ x_2$

a) Alboragabeak al dira bi estimatzaile hauek?

b) Zeintzuk dira beraien bariantzak?

d) Lor al dezakezu x_1 eta x_2 bakarrik erabiliz a*-k baino bariantza txikiagoa duen beste estimatzaile alboragabe bat?. Ezetz erantzuten baduzu, azaldu zergatik. Bai erantzuten baduzu, eman adibide bat esaten duzuna frogatzeko. (Laguntza: zer dio honi buruz Cramer-Rao-ren teoremak?).

9.4.- Bariantza ezezaguneko banaketa dugu, eta n tamainako lagin aleatorio bakun bat hartzen dugu. Banaketaren bariantza estimatzeko laginaren bariantza erabiltzen baldin badugu, estimatzaile hau, alboragabea izango al da?.

10. TARTEZKO ESTIMAZIOA ETA HIPOTESIEN TESTAK

10.1.- Bonbila baten iraupen-orduak, lege normalari jarraituz banatzen dira, batezbestekoa ezezaguna eta desbidazioa 200 izanik. Banaketa horren betezbestekoa estimatzeko, 25 bonbilaz osatutako lagin aleatorio bakun bat hartu da. Lagin horretatik, laginaren batezbestekoa kalkulatu da eta 1.905 dela atera da.
a) Kalkula ezazu % 95ko konfidantza-tartea batezbestekoarentzat.
b) Kontrasta ezazu % 5eko esangura-mailaz, Ho: $m_o = 2.000$ hipotesia.

10.2.- Pentsa dezagun, herrialde batean langabezian dauden pertsonen adinaren batezbestekoa tartezko estimazioaren bidez estimatu nahi dugula. Egiazko batezbestekoa eta laginaren batezbestekoaren arteko diferentzia txikiago edo berdin 2 izatea nahi dugu, % 95eko konfidantzaz. Adinen bariantza berdin 36 urte dela dakigu. Kalkula ezazu zein tamainako lagina behar dugun, baldintza hauek bete daitezen.

10.3.- Izan bedi X banaketa normala duen aldagai bat, bere bariantza eta batezbestekoa ezezagunak izanik. Hartu dugu $n = 26$ tamainako lagin aleatorio bakun bat eta $\overline{x} = 1905$ eta $S^2 = 38.025$ balioak lortu ditugu.
a) Estimatu % 95eko konfidantza-tartea, batezbestekoarentzat.
b) Egin ezazu ondoko testa: Ho : $m = 2000$
Ha : $m \neq 2000$

10.4.- Probintzia bateko aurrezki-libreten desbidazio estandarra $\sigma = 40.000$ da. 100 saldoz osaturiko lagin aleatorio bakun bat hartu da, laginaren batezbestekoa $\overline{x} = 100.000$ izanik.
Kalkula ezazu % 95eko konfidantza-tartea populazioaren batezbestekoarentzat ondoko kasuetan:
a) Populazioaren banaketa normala denean.
b) Populazioaren banaketa uniformea denean.
d) Banaketa konkreturik kontsideratzen ez denean.

10.5.- Medikamentu baten dosi bakoitzak dituen uniteteen kopurua, ontzian agertzen den 10.000 baino gutxiago denaren susmoa daukagu. Laborategiak honakoa segurtatzen du: dosiaren batezbestekoa 10.000 dela.

Hau egiaztatzeko, 100 dosi aukeratzen ditugu zoriz, eta bakoitzaren unitate-kopuruak hartuz, ondokoa lortu da: $\bar{x} = 9.940$

$S = 120$

Dosien kopurua normala dela suposatzen badugu, zer esan genezake laborategiko informazioari buruz, $\alpha = \%\ 1$ bada?.

10.6.- Urteroko aurrekontu eta egiazko gastuen arteko diferentziek banaketa normala jarraitzen dute eta independenteak dira periodo ezberdinetan. Bost periodotarako diferentziak hartu dira, ondoko datuak lortuz:

50.000 100.000 0 -50.000 100.000

a) Estima itzazu egiantz handiko metodoa erabiliz, diferentzia hauen batezbestekoa eta desbidazioa.

b) Kalkula ezazu batezbestekoarentzat % 90eko konfidantza duen tartea. σ^2 ezaguna dela kontsideratu, $\sigma^2 = 3.400.000$ izanik.

10.7.- "A" arloko landareen diametroa milimetrotan legè normala jarraituz banatzen dela onartzen da. Banaketaren bariantza estimatzeko, 25 landare hartu dira, beraien laginaren bariantza $S^2 = 0,36$ izanik. Ondokoa eskatzen da:

a) % 95eko konfidantza-tartea populazioaren bariantzarentzat.

b) Kontrasta ezazu populazioaren bariantza 0,4 den ala ez, % 5eko esangura-mailaz.

10.8.- Zuku bat egiteko bi tratamendu desberdin erabiltzen dira: A tratamendua eta B tratamendua. Sedimentazio-abiaduren batezbestekoen arteko diferentziarik dagoen kontrastatu nahi da % 5eko esangura-mailaz. Horretarako, ondoko lagin aleatorio bakunak hartu dira: A tratamendua 20 bider errepikatu da eta $\bar{x}_A = 22,91$ lortu da. B tratamendua 40 bider errepikatu da eta $\bar{x}_B = 23,12$ lortu da.

Sedimentazio-abiadurak banaketa normal bezala banatzen direla onartzen da, beraien bariantzak $\sigma^2_A = 0,28$ eta $\sigma^2_B = 0,31$ izanik.

Egin kontrastea.

10.9.- Araba, Burgos eta Cordoba-ko peoien asteroko batezbesteko errentak, banaketa normal bezala banatzen dira hiru probintzietan. Probintzia bakoitzean, langileen lagina hartzen da, ondoko datuak lortuz:

Araba:	$n = 31$	$\bar{x} = 6.000$	$S = 1.600.000$
Burgos :	$n = 31$	$\bar{x} = 4.400$	$S = 2.500.000$
Cordoba:	$n = 31$	$\bar{x} = 4.000$	$S = 1.200.000$

Honakoa eskatzen da:

a) Kontrastatu bariantzen berdintasunaren hipotesia, α = % 10eko esangura-mailaz.

b) Kontrastatu batezbestekoen berdintasuna % 5eko esangura-mailaz, barientzen berdintasuna onartu den kasuetan.

10.10.- Metalezko pieza baten produkzioaren desbidazio estandarra σ = 10 mm-koa da. Lagin aleatorio batek eduki behar duen elementu-kopuruaren behe-kota lortu nahi dugu, 3mm-ko zehetasunaz, produkzioaren batezbestekoarentzat %95eko konfidantza-tartea eraiki ahal izateko (normaltasuna kontsideratu).

10.11.- Izan bedi 4 balioz osatutako lagin aleatorio bakuna: 1'25, 2'39, 0'92, 1'98. Honakoa eskatzen da:

a) Kontrasta ezazu Ho : $X \in N(1,1)$ hipotesi hutsa, Ha :$X \in N(2,1)$ hipotesi alternatiboaren aurka, α = 0,05 esangura-mailaz.

b) Kalkula ezazu probaren potentzia.

10.12.- Makina baten erregulartasuna ikertu nahi dugu. Horretarako makina horrek, 10 egunetan, zenbat ale produzitu dituen begiratu da ondoko emaitzak lortuz:
60, 70, 80, 60, 65, 60, 70, 85, 70, 80
Kalkula ezazu % 90eko konfidantza-tartea, produzitu diren aleen bariantzarentzat. Normaltasuna kontsideratu.

10.13.- 1.000 elementuz osatutako populazio baten batezbestekoa estimatu nahi dugu. Populazioaren ezaugarria pezetatan neurtzen da, eta $\pm$ 20 pezetako zehaztasuna eta % 90eko konfidantza nahi dugu estimazioarentzat.
Lagin pilotua hartuz, laginaren kuasibariantza berdin 150^2 dela lortzen da.
Kalkula ezazu laginaren tamainak zenbatekoa izan behar duen, estimazioak aurreko baldintzak bete ditzan.

10.14.- Enpresa batek pneumatikoak fabrikatzen ditu A produkzio-prozesua erabiliz. Beste produkzio-prozesu berri batek, (B deitutakoak), kautxu gutxiago kontsumitzen duen susmoa dago. Hipotesi hori kontrastatzeko, A prozesuaz fabrikatutako 10 pneumatiko, eta B prozesuaz fabrikatutako 15 pneumatiko hartzen dira lagina osatzeko. Pneumatiko bakoitzean zenbat kautxu erabili den neurtzen da. Lortutako emaitzak ondoko hauek dira:

$\bar{x}_A = 5.100$ g. $\qquad S_A^2 = 121$ g.^{2}

$\bar{x}_B = 4.980$ g. $\qquad S_B^2 = 144$ g.^{2}

Kautxuaren kontsumoaren banaketa normala dela kontsideratzen da eta bariantza berdina dela prozesu bietan ere bai.

a) Kalkula ezazu % 95eko konfidantza-tartea kautxu-kontsumoaren batezbestekoarentzat A prozesuan.

b) Kontrasta ezazu % 5eko esangura-mailaz, prozesu bietan kontsumo berdina dagoela, B prozesuan kontsumo txikiagoa dagoela hipotesi alternatiboaren aurka.

10.15.- Ekonomilari batek, enpresa bateko enplegatuen asteko lanorduen batezbestekoa azkenengo urtekoekin konparatuz ez dela gutxiagotu kontsideratu du, (azken urteko batezbestekoa 43 ordu astero zen).
Hipotesi hau kontrastatzeko 64 enplegatuz osatutako lagin bat hartu du, astero 42,5 orduko batezbestekoa lortuz. Banaketa normala dela suposatuz eta bariantza aldatu gabe mantendu dela $\sigma^2 = 0,64$, onar al dezakegu aurreko hipotesia % 1eko esangura-mailaz?.

10.16.- Produktu baten eskaria banaketa normala $N(200,\sigma^2 = 20)$ jarraitu du azkeneko 20 urteetan. Produktua fabrikatzen duen enpresak publizitate-kanpaina merkaturatu nahi du salmentak hobetu asmoz. Enpresak, kanpaina errentagarritzat jotzen du, batezbesteko salmenta 250 unitatetik gora igotzen bada. Erabakia hartu aurretik kanpaina epe laburrean proba-zona batean aplikatu da, eta epe horretan 260 unitateko batezbesteko salmentak lortu dira, ohizko 35 bezeroren artean.
Zein erabaki hartuko du enpresak % 1eko esangura-mailaz?.

10.17.- Banaketa normala N (m , $\sigma^2 = 36$) duen populazio baten batezbestekoa berdin 4 dela hipotesia kontrastatu nahi da, m = 6 hipotesi alternatiboaren aurka. Horretarako "n" unitatez osatutako lagin aleatorio bakun bat hartzen da, eta $\bar{x}$ kalkulatzen da. Erabakitzeko erregela ondokoa izango da: baztertu Ho hipotesia, $\bar{x} > k$ baldin bada. Kalkula itzazu "n" eta "k", $\alpha = \%\ 5$ eta potentzia berdin % 90 izan daitezen.

10.18.- Pentsa dezagun nazioarteko erakunde batek hegazkinez bidaiatzen duten bidaiarien batezbesteko pisuaren ikerketa egin nahi duela. Pasaiarien pisuaren desbidazio tipikoa 20 kg-takoa dela suposatzen da. Erakundeak, laginaren batezbestekoak eta egiazko batezbestekoak ez dutela 3 kg baino gehiago desbidatu behar zehaztatzen du eta zehaztasun-gradu horretara heltzeko probabilitateak gutxienez 0,95 izan behar duela. Zenbatekoa izango da laginaren tamaina aurreko baldintzak bete ahal izateko?.

10.19.- Ogiaren prezioari buruzko (unitate-prezioaz) gobernu-erabakiak batezbesteko pisua berdin 300g. izatera behartzen du. Erabakiak betetzen direla kontrastatzeko, proba bat diseinatu da: bost unitateko lagina hartu, eraiki laginaren batezbestekoa

eta, baztertu lotea $\bar{x} < 290$ baldin bada. Ogiaren pisuaren banaketa normala dela kontsideratu $\sigma^2 = 80$ izanik.
Honakoa eskatzen da:
a) Probaren esangura-maila
b) II. motako errorearen probalitatea, m = 295 duen lote batentzat.

10.20.- A eta B detergenteak erabiltzen ditugu. Lehenengoarekin 8 alkondara eta bigarrenarekin 6 garbitzen dira. Tresna egokia erabiliz zuritasun-indizea neurtu dugu 1-etik 10-era doan eskala erabiliz.
Laginaren batezbestekoak eta desbidazioak ondokoak dira:
$\bar{x}_A = 7{,}5$; $\bar{x}_B = 6{,}8$; $S_A = 3$; $S_B = 4$.
Zuritasun-indizea, normal banatzen dela onartuz, ondokoa eskatzen da:
a) Kontrastatu detergenteen bariantzen berdintasunaren hipotesia, $\alpha = 0{,}10$ esangura mailaz.
b) Kontrastatu zuritasun indizearen batezbestekoen berdintasunaren hipotesia bi detergenteetan. Erabil ezazu $\alpha = 0{,}05$, eta suposatu bariantzak berdinak direla populazio bietan.

10.21.- Pentsa ezazu bi populazio dituzula, eta bietan aldagai baten obserbazioak har ditzakezula. Pentsatu, aldagai horren banaketa bi kasuetan normala dela ere eta bariantza berdina dutela.
Populazio bakoitzetik lagin bat hartu dugu: lehen populaziotik 7 balioz osatutako lagina eta bigarren populaziotik 8 balioz osatutako lagina:

1. populazio - 10, 10, 12, 12, 13, 13, 14
2. populazio - 8, 9, 10, 10, 10, 10, 12, 12

Eraiki ezazu 0,95 konfidantza-tartea populazioen batezbestekoen diferentziarentzat.

10.22.- Aurtengo irakaskuntzaren hitzarmen kolektiboan sindikatu batek ondokoa dio: irakasleen hileroko soldatak eta maila berdineko beste funtzionari batzuenak ez direla berdinak.
Baieztapen hori kontrastatzeko, sindikatuak, 21 irakaslez osatutako lagina hartu zuen, eta lortutako hileroko soldaten batezbestekoa berdin 120.000 pta. izan zen, desbidazioa 15.000 pta. izanik; eta 31 maila berdineko beste funtzionariz osatutako lagin batek, 140.000 pezetako hileroko soldaten batezbestekoa eman zuen, desbidazioa 16.000 pezetakoa izanik.
Egin ezazu kontrastea % 10eko esangura-mailaz. Horretarako kontsidera ezazu banaketa normalak direla.

11. POISSON-EN BANAKETA

11.1.- Arrantzale batek, ibaiaren alderdi konkretu batean, kanabera botatzen duen bakoitzean amuarrain bat harrapatzeko duen probabilitatea, p = 0,02 da. 400 botaldi egiten baditu, kalkula ezazu:

a) Zein da arrain bat ere ez harrapatzeko duen probabilitatea?

b) Zein da arrain bat bakarrik harrapatzeko duen probabilitatea?

d) Zein da 3 arrain baino gutxiago harrapatzeko duen probabilitatea?

e) Zein izango litzateke amuarrain-kopururik probableena.

11.2.- Bulego batean 80 telefono daude. Ordubetean batezbeste, 3 minutu hitz egiten dira, eta momentu batean batera erabiltzen diren lineak, Poisson-en banaketa bezala banatzen dira.

a) Zenbat linea izan behar du telefonetxeak, momentu konkretu batean erabiltzaileek linea librea aurki dezaten probabilitatea handiago edo berdin 0,97 izan dadin?

b) Enpresak 4 bulego berdin baldin baditu (aurreko bulegoa bezalakoak) zenbatekoa izan behar du telefonetxearen dimentsioak denak berdin zerbitzeko?

11.3.- Esneki baten eskariaren ikerketan, 30 pertsona konsultatu dira (n = 30) ondoko galdera eginez: zenbat aldiz eskatzen duten esneki hori aste batean.
Erantzunak ondoko hauek izan ziren:

Zenbat aldiz	Zenbat pertsonak
0	9
1	10
2	7
3	3
4	1

Kontrastatu % 5eko esangura-mailaz, esnekiaren eskariak Poisson-en banaketa jarraitzen duen.

11.4.- Balio osoak bakarrik hartzen dituen aldagai aleatorio batentzat, 1.000 tamainako lagin aleatorio bakun bat hartu da, hurrengo taula lortuz:

x	0	1	2	3
n_i	900	84	12	4

Kontrastatu $\lambda = 0,1$ parametroa duen Poisson-en banaketa batera hurbiltzen den, % 5eko esangura-mailaz.

11.5.- Lantegi batean 1.000 langilek lan egiten du. Lanera ez agertzearen ikerketa egin nahi dugu, hutsune hauek betetzeko asmotan. Horretarako azkeneko urteko ez agertzeen datuak bildu dira:

Ez agertzeen orduak	Egunen kopurua
0	41
1	90
2	87
3	60
4	14
6	8

a) Ez agertzeen orduak egun baterako Poisson-en banaketa jarraitzen duela suposatuz, zein da λ parametroaren estimazioa, momentuen metodoa erabiliz?
b) Esan al dezakegu ez agertzeak Poisson-en banaketa bezala banatzen direla?. Egin itzazu behar dituzun kalkuluak erantzuna azaltzeko. Har ezazu esangura-maila $\alpha = 0,10$.
d) Poisson-en banaketa duela suposatuz, $\lambda = 2$ izanik. Zein izango litzateke langileen kopurua, 1.000 lanpostuak % 95 egunetan beterik izateko?
e) Aurreko atalean suposatutakoa aplikatuz (hau da $\mathbb{P}(\lambda = 2)$) ez agertze baten kostua 6.000 pezetatan neurtzen baldin bada, zein da egun bateko kostuak, kontzeptu honegatik 13.000 pezeta baino handiagoa izateko duen probabilitatea?
f) Enpresak 2 faktoria berdin baldin baditu, (d atalekoa bezalakoa) zein izango da eguneroko ez agertzeen kopuruaren banaketa enpresan?.

11.6.- Ordu-punta batean, banku baten leihatilara minutuoro hurbiltzen diren bezeroen kopuruaren batezbestekoa 1 da.
Kalkula ezazu ordu-punta batean bi edo bezero gehiago hurbiltzeko dagoen probabilitatea zein den.
Oharra.- kontsidera ezazu leihatilara hurbiltzen diren bezeroen kopurua Poisson--en banaketa bezala banatzen dela.

11.7.- Pieza akastun bat aurkitzeko dagoen probabilitatea p = 0,10 da. Kalkula ezazu $8 \leq x \leq 12$ izateko probabilitatea, laginaren tamaina 50 izanik.

11.8.- Automobil batek puntu konkretu batetik pasatzean istripua izateko duen probabilitatea p = 0,0001 da. Zein da, urtebetean, trafikoen ezaugarriak ez direla aldatu suposatuz, gehienez 5 istripu gertatzeko dagoen probabilitatea?. Urtebetean puntu konkretu horretatik 20.000 automobil pasatu direla kontsideratuko dugu.

11.9.- Izan bitez 4 a.a., bakoitzak $\lambda = 5$ parametroa duen Poisson-en banaketa jarraituz banatzen direlarik. Banaketa bakoitzetik balio batez osaturitako l.a.b hartzen da. Honakoa eskatzen da:

a) Zein da 4 balio horiek 3 baino txikiagoak izateko probabilitatea?

b) Zein da, 4 balioen batura 12 baino txikiagoa izateko probabilitatea?

11.10.- Punta-orduko minutu bakoitzean zerbitzu baten bila hurbiltzen diren bezeroen kopuruak, Poisson-en banaketa segitzen duela dakigu, $\lambda = 2$ izanik. Punta-garaiak egun bakoitzean 10 minutu irauten badu, eta denbora guztian zorizko ezaugarriak aldatu gabe mantentzen badira, kalkula ezazu, edozein punta-ordutan zerbitzua 18 pertsona baino gutxiagok eskatzeko dagoen probabilitatea zein den.

11.11.- Errepideko tarte batean, astero 3 istripu izan dira. Jasotako datuek ondokoa adierazten digute: astero gertatzen diren istripuek Poisson-en banaketa segitzen dutela, $\lambda = 3$ izanik. Azkeneko hilabeteetan hobekuntza batzuk egin dira seinaleztapenean eta zoruan. Lanak amaitu ondoren pasatu diren 3 asteetan 1, 4 eta 1 istripu izan dira (lehenengo, bigarren eta hirugarren astean).

a) Kontrasta ezazu % 5eko esangura-mailaz, aurrekoekiko konparatuz istripuen kopurua txikiagotu egin den ala ez.

b) Zein izango litzateke kontrastearen potentzia, $\lambda = 2$ izango balitz?.

11.12.- Hiri batera sartzeko, A, B edo D bidea erabili behar da. Automobilak aleatorioki eta independenteki heltzen dira, eta momentu konkretu batean ondoko banaketak dituzte:

A bidea $\in$ P ($\lambda_A = 200$)

B bidea $\in$ P ($\lambda_B = 300$)

D bidea $\in$ P ($\lambda_D = 400$)

Sarrerako bideen ahalmena (ez kolapsatzeko) 950 autokoa da. Kalkula ezazu hiriaren sarreran ataskua gertatzeko dagoen probabilitatea zein den.

Oharra: Ataskua izango da ahalmena < iritsitako autoak baldin bada izango da.

11.13.- Egunero kai batean atrakatzeko eskatzen duten untzien kopurua, batezbesteko 9 da eta Poisson-en banaketa jarraitzen du.
Atrakatzeko, "praktiko" baten laguntza behar bada, eta "praktiko" bakoitzak egunero 16 itsasuntzi lagundu ahal baditu, honakoa eskatzen da:
a) Egun batean untzi bat baino gehiago atrakatu gabe geratzeko dagoen probabilitatea.
b) Bi egun segidotan hain zuzen bi untzi atrakatu gabe geratzeko dagoen probabilitatea.

11.14.- Ondoko datuak estimatuak eta gutxi gorabeherakoak dira, eta Euskal Herriko 1.986.eko erroldatik daude hartuta. Belaunaldi bateko (1.931.eta 1.935. urte bitartean jaiotakoak) emakumeek 50 urte egitean duten seme-alaben kopurua adierazten dute.

Seme - alabak	Emakumeak
Bat ere ez	7.300
1	7.100
2	21.100
3	16.700
4	10.000
5	4.800
6	1.700
7	1.200
≥ 8	700
GUZTIRA	70.600

Kalkuluak egiteko, 8 seme-alaba baino gehiago eduki dutenek zehazki 8 izan dituztela har dezakezu. X = "emakume bakoitzaren seme-alaben kopurua" aldagaiak balio positibo eta osoak hartzen dituenez, egin dezakegun hipotesi bat ondoko hau da: X aldagaiak Poisson-en banaketa P (λ)-ri jarraitzen duela.
a) Estima ezazu λ parametroa egiantz handiko metodoa erabiliz.
b) Kontrasta ezazu X aldagaiak Poisson-en banaketa jarraitzen duen: Ho hipotesia. Erabil ezazu $\alpha = 0{,}01$ esangura-maila.

11.15.- Gaiak saltzen etxez etxe ibiltzen den enpresa batek, komisioz lan egiten dituzten bi ordezkari ditu, bakoitzak 100 bisita egiten dituztelarik. A ordezkariak 5 salmenta du eguneroko batezbestekoa eta B ordezkariak, alderantziz, 3 salmenta du eguneroko batezbestekoa. Ordezkari bien salmentak independenteak baldin badira,
a) Zein da egun konkretu batean enpresak 9 salmenta baino gehiago lortzeko duen probabilitatea?
b) Zein da 20 lanegun duen hilabetean, 160 salmenta baino gutxiago lortzeko duen probabilitatea?

12. BANAKETA BINOMIALA

12.1.- 1.000 piezaz osatutako lote batean % 5 pieza akastun dago. Lote honetatik 100 piezaz osatutako lagin bat hartu da.

a) Zein da, laginean zehazki 3 pieza akastun agertzeko dagoen probabilitatea.

b) Zein da laginean gehienez 3 pieza akastun agertzeko dagoen probabilitatea.

12.2.- Aspirina-tauleta akastunen proportzioa, makina automatiko batean egiaztatutakoa, 0,01 da.

a) Pilulak, 20 tauletatako tutuetan sartzen baldin badira, zein da tutu batek x tauleta akastun edukitzeko dagoen probabilitatea?.

b) Tutuak, 25 unitateko kutxetan sartzen baldin badira, zein da kutxa batek zehazki 20 tutu tauletatan akasturik bat ere ez edukitzeko probabilitatea?.

12.3.- Eskualde bateko mota biologiko konkretu baten barruan dauden gazteen portzentaia ikertzeko, 1.000 pertsonaz osatutako lagin aleatorio bakun bat hartu da, eta horietatik 130 pertsona mota horren barrukoak zirela konprobatu da.

a) Estimatu p-rentzat gutxi gorabehera, % 95eko konfidantza-tartea.

b) Egin p = 0,1 kontrastea, gutxi gorabehera % 5 esangura-mailaz.

12.4.- Lantegi batean produzitu diren pote tomateen pisua, banaketa normal $N\left(550, \sigma = \sqrt{225}\right)$ bezala banatzen da. Potea ontzat hartzen da bere pisua 472 g baino gehiagokoa baldin bada.

a) Kalkula ezazu potea ontzat hartzeko dagoen probabilitatea zein den.

b) 300 potez osatutako lote batean, kalkula ezazu gutxienez % 95-a ontzat hartzeko probabilitatea zein den.

12.5.- Hiru enplegatuk gauza bat berdina dute. Egiten dituzten 5 aurrekontutatik, 1 oker dago. Hori guztiz aleatorioki gertatzen da eta independenteki kasu bakoitzean. Gaur goizean 20 aurrekontu egin dituzte, ondoko eran banaturik:

A enplegatuak → 10 aurrekontu
B " → 5 "
D " → 5 "

Zein probabilitatea dago aurrekontu guztietatik erdia edo gehiago oker egoteko?.

12.6.- Inkesta baten erantzunen portzentaia % 8koa dela estimatzen da. Inkestatzaile batek, elkarrizketatu behar dituen 10 pertsonen zerrenda du.
a) Zein izango da, gutxi gorabehera, bi inkesta lortzeko duen probabilitatea?
b) Elkarrizketatzaile berak 100 pertsonen zerrenda baldin badu, gutxi gorabehera, zein da 90 baino erantzun gehiago ukatzeko probabilitatea?.

12.7.- Makina batek egiten dituen pieza akastunen proporzioa 0,1 da makina ondo dabilenean eta 0,7ra igotzen da ondo ez dabilenean. Makina ondo dagoen hipotesia kontrastatzeko, 10 piezako l.a.b. bat hartzen da eta hurrengo araua betetzen da: kontrastearen hipotesia baztertzea, pieza akastunen kopurua 3 edo gehiago bada.
Honakoa eskatzen da:
a) Esangura-maila
b) Bigarren motetako errorearen probabilitatea.

12.8.- Langile batek txarteletan zuloak egitean akatsen bat egiteko duen probabilitatea 0,01 da. 90 txartel orduko zulatzen baditu, kalkulatu:
a) ordubetean 88 txartel baino gehiago akatsik gabe zulatzeko duen probabilitatea.
b) 35 orduko astean 35 baino txartel akastun baino gehiago zulatzeko duen probabilitatea.

12.9.- Klub bateko administrariak klubera egunero 5 bisita egitea erabaki du, langile bat bere lanpostuan dagoen edo ez ikusteko. Bi hilabete igaro ondoren bere notak hauek dira:

Egunero lanpostuan zenbat bider ez den egon	zenbat egunetan
0	21
1	12
2	10
3	10
4 edo gehiago	7

% 5eko esangura-mailaz, lanpostuan ez egotearen egunen kopurua, p = 0,3 duen banaketa binomiala den edo ez kontrastatu.

12.10.- Bi makina ditugu. Lehenengoaren produkziotik zoriz 80 pieza hartu dira, 21 akastun atera direlarik eta bigarrenetik 120 atera dira, 43 akastun izanik.
Estatistikoki ikus ezazu akastunen proporzioak makina bietan berdinak direla onar daitekeen ala ez.

12.11.- Enpresa batek, telebista pribatuko kanal bat jartzea edo ez jartzea erabaki nahi du. Ekintza hau errentagarria izango da, 3.000 pezeta hilero kobratuz, gutxienez populazioaren % 30ak zerbitzua kontratatzen badu. Erabakia hartzeko 100 familia inkestatu dira aleatorioki hartuta, eta hauetatik 28k kuota horrekin kanala konektatuko lukeela erantzun du
Zein izango da enpresaren erabakia, α = %5 izanik.

12.12.- Irakasle batek, ikaslea klasera etortzea ontzat hartzen du faltak % 10 baino gehiago ez direnean. Klasera etortze hau kontrastatzeko, 15 kontrol egin dira.
a) Bilatu eskualde kritiko bat α = 0,06 -rentzat.
b) % 30 falta dituen ikasle batentzat, kalkulatu P (II).

12.13.- 20 galderako azterketan, erantzunak: E edo F dira.
Honakoa eskatzen da:
a) Azterketa gainditzeko gutxienez galderetan erdiak ondo egon behar badute, ezer ere ikasi ez duen ikasle batek, zein probabilitate du azterketa gainditzeko?
b) Irakasleak, ezer ikasi ez duen ikasleak gutxienez % 85ko probabilitatearekin azterketa ez gainditzea nahi badu, zenbat erantzun egoki eskatu beharko ditu?.

12.14.- Baldintza batzuetan, fusil-tiro batez hegazkin bat lurrera botatzeko probabilitatea 0,004 da.
a) Zein izango litzateke 250 fusilek batera egindako tiroek hegazkina lurrera botatzeko probabilitatea?
b) Egun batean toki horretan 5 hegazkinek hegaz egiten dutela suposatuz, bakoitzak 250 tiro jasoz zein izango litzateke lurrera bi baino gehiago ez botatzeko probabilitatea?.

12.15.- Zerbitzu-enpresa batek produktu berri bat egiteko posibilitatea ikertu nahi du. Aurrez egindako ikerketa batzuk kontutan hartuz, badakigu produktua errentagarria izango dela populazioaren p $\geq$ % 50eko proporzioak (hau da, gutxienez % 50ek) zerbitzua kontratatzen badu. Erabakia hartzeko inkesta egin nahi du, proportzio hori estimatzeko.
a) Zein tamaina izan beharko du laginak, p-ren estimazioan, errorea 0,10 baino txikiago % 95eko konfidantza izateko (testu batzuk honi errorea deitzen diote)? Oharra: p ezezaguna dela kontsideratu, kalkulatu n kasu desegokienetan ere, esandako doitasuna eman dezan.
b) 100 pertsonari galdetu ondoren, % 48k zerbitzua kontratatu egin nahi duela lortu dugu. Baztertuko al zenuke Ho : p $\geq$ 0,50 hipotesi hutsa, α = 0,05 gutxi gorabeherako esangura-mailaz?
d) Zein izango litzateke frogaren potentzia p = 0,3 baldin bada?.

E M A I T Z A K

1. PROBABILITATEA

1.1.- a) 1/6 b) 1/2 d) 2/3

1.2.- Independienteak dira, zeren :
$\frac{12}{48} \cdot \frac{4}{48} = \frac{1}{48}$ bait da.

1.3.- a) $Pr(\overline{A} \cap \overline{B} \cap D) \cup Pr(A \cap \overline{B} \cap \overline{D}) \cup Pr(\overline{A} \cap B \cap \overline{D})$
b) $Pr(\overline{A} \cap B \cap D) \cup Pr(A \cap \overline{B} \cap D) \cup Pr(A \cap B \cap \overline{D})$
d) $Pr(A \cup B \cup D)$
e) $1 - Pr(A \cap B \cap D)$

1.4.- 0,9825

1.5.- 0,35

1.6.- a) $Pr(\overline{A} \cap \overline{B}) = 0,3$
b) $Pr(\overline{A} \cap B) \cup Pr(A \cap \overline{B}) = 0,5$
d) Independienteak dira

1.7.- 1/4

1.8.- $$\frac{\left[2\binom{10}{6}\binom{10}{4}\right]\binom{4}{2}}{\binom{40}{10}}$$

1.9.- a) Pr (A) = 0,70
b) Pr (A ∩ B) = 0,4
d) Pr $\left(A \cap \overline{B}\right)$ = 0,3

1.10.- a) Pr ($G_B \cap E_B$) = 6/15
b) Pr $\left(E_B \cap \overline{G}_B\right)$ = 4 /15
d) Pr ($G_B \cup E_B$) = 13/15

1.11.- 0,0062

1.12.- 7/15

1.13.- a) 0,504 b) 0,496

1.14.- a) 0,74 b) 0,432

1.15.- Pr (A) = Pr (B) = Pr (D) = Pr (E) = 1/4

1.16.- 0,3524

1.17.- 0,64

1.18.- a) 0,6 b) 0,18 d) 0,06 e) 0,1
f) 0,266 g) 0,6

1.19.- a) Pr (2 pozoitsu) = Pr ($A_p \cap B_p$) = 1/15

b) Pr (2 pozoirik gabe) = Pr ($A_{Ep} \cap B_{Ep}$) = 2/5

d) Pr (Bat pozoitsua eta bat pozoirik gabea) =

= Pr ($A_p \cap B_{Ep}$) + Pr ($A_{Ep} \cap B_p$) = 8/15

e) Pr (Bizitzeko) = 1 - Pr (Hiltzeko) = 0,806

1.20.- $\frac{P_1 + P_2 + P_3}{n}$

1.21.- 0,07725

1.22.- a) 0,031

b) 0,18

1.23.- B makinaz hastea aukeratuko luke

1.24.- a) 0,0714

b) 0,30

d) 0,86

e) 0,145

2. PROBABILITATE-BANAKETAK

2.1.- a) $$F(x_1,x_2)=\begin{cases}0 & x_1<1 \text{ edo } x_2<0\\ 1/8 & 1\le x_1<2 \text{ eta } 0\le x_2<1\\ 3/8 & x_1\ge 2 \text{ eta } 0\le x_2<1\\ 4/8 & 1\le x_1<2 \text{ eta } x_2\ge 1\\ 1 & x_1\ge 2 \text{ eta } x_2\ge 1\end{cases}$$

b) $$F_1(x_1)=\begin{cases}0 & x_1<1\\ 1/2 & 1\le x_1<2\\ 1 & x_1\ge 2\end{cases} \qquad F_2(x_2)=\begin{cases}0 & x_2<0\\ 3/8 & 0\le x_2<1\\ 1 & x_2\ge 1\end{cases}$$

d) X_1 eta X_2 ez dira independenteak.

2.2.- a) P (1, 3) = 0,28
P (1, 9) = 0,12
P (2, 3) = 0,42
P (2, 9) = 0,18

b) $$F(x)=\begin{cases}0 & x<1\\ 0,4 & 1\le x<2\\ 1 & x\ge 2\end{cases} \qquad F(y)=\begin{cases}0 & y<3\\ 0,7 & 3\le y<9\\ 1 & y\ge 9\end{cases}$$

$$F(x,y)=\begin{cases}0 & x<1 \text{ edo } y<3\\ 0,28 & 1\le x<2 \text{ eta } 3\le y<9\\ 0,4 & 1\le x<2 \text{ eta } y\ge 9\\ 0,7 & x\ge 2 \text{ eta } 3\le y<9\\ 1 & x\ge 2 \text{ eta } y\ge 9\end{cases}$$

2.3.-

a) $P(y/x=0)=\begin{cases}\dfrac{Pr(y=1\cap x=0)}{Pr(x=0)}=\dfrac{1/4}{4/12}=3/4 & y=1\\ \dfrac{Pr(y=2\cap x=0)}{Pr(x=0)}=\dfrac{1/12}{4/12}=1/4 & y=2\end{cases}$

b) Ez dira independenteak

2.4.- P (6, 1) = A = 1/6
P (6, 3) = B = 1/3

2.5.- b) 7/30
d) (2, 8, 1), (2, 8, 5), (2, 3, 9), (6, 8, 1), (6, 8, 5), (6, 3, 5), (6, 8, 9)
e) 0X espazioan : Px (2) = 9/30
Px (6) = 21/30

0YZ espazioan : P_{YZ} (3,5) = 1/30
P_{YZ} (3,9) = 2/30
P_{YZ} (8,1) = 12/30
P_{YZ} (8,5) = 11/30
P_{YZ} (8,9) = 4/30

2.6.- a) Independenteak dira
b) P (y = 3/ x = 2) = 1/3
d) P (x = 3/ y = 1) = 1/4

2.7.- a) k = 1/625

b) $f(x)=\begin{cases}0 & x<0\\ \dfrac{4}{625}x^3 & 0\le x<5\\ 0 & x\ge 5\end{cases}$

d) 0,592

2.8.- 1/2

2.9.- a) $\alpha = 1/18$

b) $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{9} & x \in (0,3) \\ 0 & x \notin (0,3) \end{cases}$

$f(y) = \begin{cases} \frac{y}{2} & y \in (0,2) \\ 0 & y \notin (0,2) \end{cases}$

d) Independenteak dira

3. TRANSFORMAZIOAK

3.1.- a) $f_X(x) = \begin{cases} 1/4 & 0 < x < 4 \\ 0 & x \le 0 \text{ edo } x \ge 4 \end{cases}$

b) i) $f_Z(z) = \begin{cases} 0 & z \notin (3,11) \\ 1/8 & z \in (3,11) \end{cases}$

ii) $f_Z(z) = \begin{cases} 0 & z \notin (-5,3) \\ 1/8 & z \in (-5,3) \end{cases}$

iii) $f_Z(z) = \begin{cases} 0 & z \notin (0,16) \\ \dfrac{1}{8\sqrt{z}} & z \in (0,16) \end{cases}$

3.2.- $f_Z(z) = \begin{cases} 0 & z \notin (1/6,\ 1/5) \\ 1/z^2 & z \in (1/6,\ 1/5) \end{cases}$

3.3.- $F_Z(z) = \begin{cases} 0 & z < 0 \\ e^{-1+z} - e^{-1-z} & 0 \le z < 1 \\ 1 - e^{-1-z} & z \ge 1 \end{cases}$

3.4.- $f_Y(y) = \begin{cases} 0 & y < 0 \\ e^{-y} & y > 0 \end{cases}$

3.5.- $f_Y(y) = \begin{cases} \dfrac{2}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{\frac{-y^2}{2\sigma^2}} & y \in (o,\infty) \\ 0 & y \notin (0,\infty) \end{cases}$

3.6.- a) $F_Z(z)=\begin{cases}0 & z<0\\ 1/4 & 0\le z<1\\ 1 & z\ge 1\end{cases}$

b) $F_Z(z)=\begin{cases}0 & z<1\\ 1/4 & 1\le z<2\\ 2/4 & 2\le z<3\\ 1 & z\ge 3\end{cases}$

3.7.- $f_Z(z)=\begin{cases}e^{-z}\cdot z & z>0\\ 0 & z\le 0\end{cases}$

$F_Z(z)=\begin{cases}1-e^{-z}(1+z) & z>0\\ 0 & z\le 0\end{cases}$

3.8.- a) $f_U(u)=\begin{cases}-\ln u & u\in(0,1)\\ 0 & u\notin(0,1)\end{cases}$

$F_U(u)=\begin{cases}0 & u<0\\ u(1-\ln u) & 0\le u<1\\ 1 & u\ge 1\end{cases}$

b) $f_V(v)=\begin{cases}0 & v\notin(-1,1)\\ 1+v & v\in(-1,0)\\ 1-v & v\in(0,1)\end{cases}$

$F_V(v)=\begin{cases}0 & v<-1\\ v+\left(v^2/2\right)-(-1+1/2) & -1\le v<0\\ v-\left(v^2/2\right)+(1/2) & 0\le v<1\\ 1 & v\ge 1\end{cases}$

d) $f_Z(z) = \begin{cases} 1 & z \in (-1, 0) \\ 0 & z \notin (-1, 0) \end{cases}$

$$F_Z(z) = \begin{cases} 0 & z < -1 \\ z+1 & -1 \le z < 0 \\ 1 & z \ge 0 \end{cases}$$

3.9.- $f_Z(z) = \begin{cases} 0 & z \notin (0, 2) \\ 1/2 & z \in (0, 2) \end{cases}$

3.10.- $F_Y(y) = \begin{cases} -\ln y & 0 < y < 1 \\ 0 & 0 > y > 1 \end{cases}$

4. MOMENTUAK ETA TCHEBYCHEV-EN BORNAPENAK

4.1.- a) 8 b) 13 d) 104 e) 55

4.2.- a) 0 b) 2/3 d) 0,0625 e) betetzen du

4.3.- $\vec{C}_{XY} = \begin{bmatrix} 2/9 & 0 \\ 0 & 3/80 \end{bmatrix}$

4.4.- a) $\vec{m} = \begin{bmatrix} 4/3 \\ 2/3 \end{bmatrix}$ b) $\vec{C}_{xy} = \begin{bmatrix} 8/9 & -2/9 \\ -2/9 & 2/9 \end{bmatrix}$

d) $x-$ekiko $y-$ren zuzena: $4y + x = 4$
$y-$rekiko $x-$en zuzena: $x + y = 2$

4.5.- 3/4

4.6.- 1/9

4.7.- a) (416, 484) b) (93.600, 108.000)

4.8.- Txartelik ez lortzeko probabilitatea, gehienez 0,28 da.

4.9.- a) $E(X) = 3,5$
b) $\sigma^2_X = 35/12$
d) $\sigma^2_{\bar{x}} = \frac{35}{12} \cdot n$ (jaurtiketak independenteak direla suposatuz)
e) $n \geq 5834$

5. FUNTZIO KARAKTERISTIKOA

5.1.- a) $\psi_{X_i}(u) = 1 + 5iu - (25{,}01/2)\,u^2 + \ldots\ldots\ldots\ldots$

b) $\psi_z(u) = \psi_{X_1}\left(\frac{u}{3}\right) \cdot \psi_{X_2}\left(\frac{u}{3}\right) \cdot \psi_{X_3}\left(\frac{u}{3}\right)$

5.2.- a) $a = 1;\ b = 2i;\ c = -13/2$

b) $\psi_{3X}(u) = 1 + 6iu - (117/2)\,u^2 + \ldots\ldots\ldots\ldots$

d) $\psi_{2X+Y}(u) = 1 + 6iu - (81/2)\,u^2 + \ldots\ldots\ldots\ldots$

5.3.- $\alpha(u) = \frac{1}{(u+1)^2}\left[u\,e^{(u+1)} + 1\right]$

5.4.- Bar (Z) = 28

5.5.- a) $\vec{C}_{XY} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$ b) $\sigma^2_z = 44$

d) $\psi_w(u) = 1 - 3u^2 - iu^3 + \ldots\ldots\ldots\ldots$

5.6.- $\psi_Z(u) = e^{3\left(e^{iu}-1\right)}$ Levy-ren alderantzizko teorema aplikatuz, ondokoa esan genezake: Z aldagaiak Poisson-en banaketa jarraitzen duela, $\lambda = 3$ izanik.

6. BANAKETA NORMALA

6.1.- a) 0,7257 b) 0,36315
d) 0,3821 e) 0,9452
f) 0,0159 g) 0,9544
h) 0,0456

6.2.- a) b = 0,94
b) b = -1,12
d) b = 2

6.3.- [-1,96, 1,96]

6.4.- a) k = 0,80
b) k = 1,30

6.5.- a) 0,6915 b) 0,383
d) k = 5,92 e) k = -1,92

6.6.- a) 0,0274 b) 0,12505

6.7.- 0,6826

6.8.- a) N (110, 41) b) 121 eserleku gutxienez.

6.9.- a) 0 b) 0

6.10.- $\sigma = 4,36$

6.11.- a eta b) Gogoratu banaketa normalaren bikoiti ordenako momentu ez zentratuak ondoko eran kalkulatzen direla:

$$\alpha_{2k} = \frac{(2\ k)!}{2^k \cdot k\ !}$$

d) $$f_Y(y) = \begin{cases} (1/\sqrt{2\pi y}\ e^{-y/2}) & ; \quad y \geq 0 \\ 0 & ; \quad y < 0 \end{cases}$$

6.12.- 7 urtekoa

6.13.- a) 0,5 b) 0,3413
d) 36,7

7. BANAKETAZKO KONBERGENTZIA

7.1.- a) Gutxi gorabehera normala
b) $m_{\bar{x}} = 3,5$; $\sigma_{\bar{x}}^2 = 0,029$

7.2.- 0,9382 gutxi gorabehera.

7.3.- 0,7642 gutxi gorabehera.

7.4.- 0,00048 gutxi gorabehera.

7.5.- 164 pezeta gutxienez.

7.6.- 0,9515 gutxi gorabehera.

8. INFERENTZIA ESTATISTIKOAREN HASTAPENAK: PUNTUZKO ESTIMAZIOA, HIPOTESIEN TESTAK ETA x2AREN TESTAK.

8.1.- $\hat{\lambda} = 5$

8.2.- $\hat{m} = \bar{x} = (x_1 + \ldots\ldots\ldots\ldots x_2)/n$

$$\hat{\sigma}^2 = \left[(x_1 - m)^2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + (x_n - m)^2\right]/n$$

8.3.- $\hat{a} = \left(-8\sqrt{6}\right)/15 \qquad \hat{b} = \left(3\sqrt{6}\right)/10$

8.4.- a) $0 \leq \theta \leq 2$
b) $\hat{\theta} = 3/2$

8.5.- $\hat{\theta} = \dfrac{-n}{\ln(x_1 \ldots x_n)} - 1$

8.6.- $\hat{\theta} = 1 \quad ; \quad \hat{\lambda} = 2$

8.7.- $\hat{k} = 5$ k balioaren estimazioa berdina da bi metodoetan.

8.8.- $\hat{\lambda} = \dfrac{n}{x_1 + \ldots\ldots + x_n} = \dfrac{1}{\bar{x}}$

8.9.- a) $\alpha = 0{,}1$
b) potentzia $= 1 - \beta = 0{,}54$

8.10.- a) $\alpha_1 = 0,0968$
$\alpha_2 = 0,0991$
b) Lehen frogaren potentzia = 0,2119
Bigarren frogaren potentzia = 0,1294
d) Lehen froga hobea da, $\alpha_1 < \alpha_2$ eta poten 1 > poten 2 delako

8.11.- a) a= 0,1 b) b= 0,72

8.12.- a) k= 3,30 b) b = 0

8.13.- a) $\hat{p} = 0,91$
b) Ez da baztertzen hipotesia (konkordantzia dagoela)

8.14.- Ez da baztertzen hipotesia, hau da, errentaren banaketa berdina dela ez da baztertzen (homogenotasun-testa)

8.15.- a) (Independentzi testa) Ez da baztertzen hipotesia, ez da baztertzen pieza askatsdunen proportzioa bost makinetan berdina dela
b) (Homogenotasun-testa) Ez da baztertzen hipotesia, ez da baztertzen pieza akatsdunen proportzioa bost makinetan berdina dela

9. ESTIMATZAILEEN PROPIETATEAK

9.1.- a) $\hat{m} = \bar{x}$ b) $\sigma^2_{\bar{x}} = \sigma^2/n$

d) Kota $= \sigma^2/\left(h^2 \cdot n\right)$ e) $\bar{x} \to m$

f) Tinkoa da, hurrengo baldintzak betetzen dituelako:

i) alboragabea da

ii) $n \to \infty$, orduan Bar $(\bar{x}) \to 0$

9.2.- a) Bar $\theta^* = \left(k^2\theta^2\right)/48$

b) $k = 2$

9.3.- a) a^* alboragabea da; a^{**} ez da alboragabea

b) Bar $\left(a^*\right) = 0{,}55$; Bar $\left(a^{**}\right) = 0{,}8$

d) Bai, $\hat{a} = \left(x_1 + x_2\right)/2$, hau da egiantz handiko metodoa erabiliz lortzen dena.

Bar$(\hat{a}) = 0{,}5$, beraz Bar$(\hat{a}) <$ Bar$\left(a^*\right)$.

9.4.- Ez, $E\left(S^2\right) = \sigma^2 \cdot [(n-1)/n]$ delako.

10. TARTEZKO ESTIMAZIOA ETA HIPOTESIEN TESTAK

10.1.- a) Ic = (1826,6 ; 1983,4)
b) Ho = 2000 hipotesia baztertu egiten da.

10.2.- $n \geq 35$

10.3.- a) Ic = (1824,6 ; 1985,3)
b) Ho hipotesia baztertu egiten da.

10.4.- a) Ic = (92.160, 107.840)
b) Ic ≈ (92.160, 107.840)
d) berdin b)

10.5.- Baztertu egiten da Ho : m = 10.000 hipotesia, Ha: m < 10.000 hipotesiaren aurka.

10.6.- a) $\hat{m} = \bar{x} = 40.000$
$\hat{\sigma}^2 = S^2 = 3.400.000.000$
b) Ic = (38647,62 ; 41352,37)

10.7.- a) Ic = (0´228, 0´726)
b) Ez dugu baztertuko $\sigma^2 = 0.4$ hipotesia

10.8.- Ez da baztertzen Ho : $m_A - m_B = 0$ dela.

10.9.- a) Ho : $\sigma^2_A = \sigma^2_B$ baztertu egiten da
Ho : $\sigma^2_A = \sigma^2_c$ ez da baztertzen
Ho : $\sigma^2_B = \sigma^2_c$ baztertu egiten da.
b) Ho : $m_A = m_c$ ez da baztertzen.

10.10.- a) $n \geq 43$

10.11.- a) Ez dugu baztertuko Ho hipotesia,
$\bar{x} = 1,635 \notin$ E.K.= $(1,82 ; \infty)$ bait da.
b) Pot = $1 - \beta = 0,6406$

10.12.- Ic = (44,37 ; 225,225)

10.13.- $n \geq 152$

10.14.- a) Ic = (5091,71 ; 5108,28)
b) Baztertu egiten da Ho : $m_A = m_B$
$\bar{x}_A - \bar{x}_B = 120 \in$ E.K = $(8,45;\infty)$ bait da.

10.15.- $m_o = 43$ hipotesia baztertu egin dugu, $m_a < 43$ hipotesi alternatiboaren aurka
$\bar{x} = 42,5 \in$ E.K = $(-\infty ; 42,768)$ bait da.

10.16.- Publizitate-kanpaina merkaturatzea erabakiko du,
$\bar{x} = 260 \notin$ E.K = $(-\infty ; 248,2)$ bait da.

10.17.- n = 76; k = 5,13

10.18.- $n \geq 171$

10.19.- a) $a \geq 0,0062$
b) P (II) = 0,8943

10.20.- a) Ez dugu baztertuko a = 0,10 esangura-mailaz, bariantzen berdintasunaren hipotesia.

b) Ez da baztertzen Ho : $m_A = m_B$ hipotesia a = 0,05 esangura-mailaz

10.21.- Ic = (0,269 ; 3,4809)

10.22.- Lehen $\sigma^2_A = \sigma^2_B$ hipotesia kontrastatu dugu, eta hipotesi hau ez da baztertzen. Ondoren Ho : $m_A = m_B$, kontrastatu da $\sigma^2_A = \sigma^2_B$ dela suposatuz eta % 90 konfidantza-tartea lortu da:

Ic = (-27533,13 ; -12466,86), orduan $m_A - m_B = 0 \notin$ Ic eta horregatik baztertu egiten da Ho : $m_A = m_B$.

11. POISSON-EN BANAKETA

11.1.- a) P (0) = 0,000335
b) P (1) = 0,002684
d) P (X ≤ 2)= 0,013754
e) λ zenbaki osoa denez, bi balio egongo dira: X = 8 eta X =7

11.2.- a) 8 linea
b) 24 linea

11.3.- Ez dugu baztertzen esnekiaren eskaria Poisson-en banaketa jarraitzen duenik, $z = 0,05 < \chi^2_{2;0,05}$ delako.

11.4.- Baztertu egin dugu, lagina $\lambda = 0,1$ parametroa duen Poisson-en banaketa batetik datorrela $z = 24,63 > \chi^2_{2;0,05}$ delako.

11.5.- a) $\hat{\lambda} = \overline{x} = 1,8$
b) Baztertu egin da hipotesia, $z = 12,2016 > \chi^2_{4;0,10}$ delako
d) 1005 langile
e) 0,3233
f) $P(\lambda = 4)$

11.6.- 0,26424

11.7.- 0,127919

11.8.- 0,983437

11.9.- a) 0,0002415
b) 0,03

11.10.- 0,2877

11.11.- a) Ez dugu baztertzen Ho : $\lambda \geq 3$ hipotesia, hau da, estatistikoki ez da inkontsistentea datuekin, istripuak ez direla gutxiagotu konsideratzea, $z = 6 \notin$ E.K.= (0 ; 3,2) delako.
b) Potentzia = 0,151205

11.12.- 0,0465

11.13.- a) 0,005312
b) 0,005749

11.14.- a) $\hat{\lambda} = \overline{X} = 2,6572$
b) Baztertu egin dugu Ho hipotesia, $Z > \chi^2_{7;0,01}$ delako.

11.15.- a) 0,283375
b) 0,491

12. BANAKETA BINOMIALA

12.1.- a) P (3) = 0,1395
b) P ($X \leq 3$) $\cong$ 0,265026

12.2.- a) $P(x) = \binom{20}{x} \cdot 0{,}01^{x} \cdot 0{,}99^{20-x}$
b) 0,1916

12.3.- a) Ic $\approx$ (0,11 ; 0,15)
b) Baztertu egin da p = 0,1 dela, gutxi gorabehera, %5 esangura-mailaz.

12.4.- a) 0,9515
b) 0,55

12.5.- 0,0026

12.6.- a) 0,1478
b) Pr ($X < 10$) $\approx$ 0,716625

12.7.- a) 0,0702 baino handiagoa edo berdina.
b) 0,0016

12.8.- a) P ($X > 88$) $\approx$ 0,77248
b) 0,2358

12.9.- Baztertu egin da lanpostuan ez egotearen kopurua p = 0,3 duen banaketa binomial bezala banatzen dela,
$z \approx 34,8 > \chi^2_{4;\%5} = 9,49$ delako.

12.10.- Ez da baztertu Ho: $p_1 = p_2$ hipotesia, hau da, ez da baztertzen akastunen proportzioa makina bietan berdina denik.

12.11.- Telebista-kanala jartzea erabakiko du. Ho : $p \geq 0,30$ ez da baztertzen, $28 \notin$ E.K. = (0 ; 21,89) delako.

12.12.- a) E.K = (3,2, ∞)
b) P (II) = 0,2969

12.13.- a) 0,5881
b) 13

12.14.- a) 0,6328
b) 0,2625

12.15.- a) $n \geq 97$
b) Ez da baztertzen Ho; $0,48 \notin$ E.K. = ($-\infty$ 0,418) delako.
d) Potentzia $\approx$ 0,9938

udako euskal unibertsitatea

9 788486 967352