

N. PISKUNOV

KALKULU

DIFERENTZIALA

ETA

INTEGRALA

II

N. PISKUNOV

KALKULU DIFERENTZIALA ETA INTEGRALA II

Koordinatzaileak:

Joserra Aizpurua

Patxi Angulo

Euskaratzaileak:

Joserra Aizpurua. Elhuyar

Patxi Angulo. UPV/EHU

Victoria Fernandez. UPV/EHU

Adela Moyua. UPV/EHU

Juanjo Otxoa Diaz. UPV/EHU

Cecilia Sarasola. UPV/EHU

M. Jose Zarate. UPV/EHU

Enrike Zuazua. U.C.Madril

UDAKO EUSKAL UNIBERTSITATEA

Bilbo, 1992

**Hezkuntza, Unibertsitate eta Ikerketa Sailaren
dirulaguntza jaso du**

Liburu hau UEUren eta UPV/EHUren arteko koedizioa da.

© Euskarako Itzulpena. Patxi Angulo eta beste.
© Udako Euskal Unibertsitatea. Matematika Saila.

ISBN: 84-86967-46-5 Lan osorako
ISBN: 84-86967-48-1 2. liburukia
Lege-gordailua: BI-2256-92

Inprimategia: BOAN, S.A. Padre Larramendi 2 BILBO

Azala: UEU

Banatzailleak: UEU. General Concha 25, 6. BILBO
Zabaltzen: Igarabide, 88 DONOSTIA

AURKIBIDEA

AURKIBIDEA	V
AINTZINSOLASA	XI
EUSKARATZAILEEN OHARRA	XIV
XIII. Gaia. EKUAZIO DIFERENTZIALAK	1
§ 1. <i>Problemaren planteamendua</i>	1
§ 2. <i>Definizioak</i>	5
§ 3. <i>Lehen ordenako ekuazio diferentzialak (Orokortasunak)</i>	7
§ 4. <i>Aldagai bananduetako eta banangarrietako ekuazioak</i>	12
§ 5. <i>Lehen ordenako ekuazio homogenoak</i>	18
§ 6. <i>Ekuazio homogenogarriak</i>	21
§ 7. <i>Lehen ordenako ekuazio linealak</i>	26
§ 8. <i>Bernoulli-ren ekuazioa</i>	31
§ 9. <i>Ekuazio diferentzial totalak</i>	34
§ 10. <i>Integrazio-faktorea</i>	39
§ 11. <i>Kurba-familia baten inguratzailea</i>	42
§ 12. <i>Lehen ordenako ekuazio diferentzialaren soluzio singularrak</i>	52
§ 13. <i>Clairaut-en ekuazioa</i>	53
§ 14. <i>Lagrange-ren ekuazioa</i>	57
§ 15. <i>Ibilbide ortogonalak eta isogonalak</i>	60
§ 16. <i>Bat baino ordena handiagoko ekuazio diferentzialak (orokortasunak)</i>	67
§ 17. $y^{(n)} = f(x)$ itxurako ekuazioa	69
§ 18. <i>Lehen ordenako ekuazio bihurtzen den bigarren ordenako ekuazio diferentzialen zenbait mota</i>	73
§ 19. <i>Bigarren ordenako ekuazio diferentzialen integrazio-metodo grafikoa</i>	86
§ 20. <i>Ekuazio lineal homogenoak. Definizioak eta propietate orokorrak</i>	89
§ 21. <i>Koefiziente konstantedun bigarren ordenako ekuazio diferentzial lineal homogenoak</i>	98
§ 22. <i>Koefiziente konstantedun n. ordenako ekuazio diferentzial</i>	

<i>lineal homogenoak</i>	105
§ 23. <i>Bigarren ordenako ekuazio diferentzial ez-homogenoak</i>	108
§ 24. <i>Koefiziente konstantedun bigarren ordenako ekuazio diferentzial</i> <i>lineal ez-homogenoak</i>	114
§ 25. <i>n. ordenako ekuazio diferentzial lineal ez-homogenoak</i>	124
§ 26. <i>Oszilazio mekanikoen ekuazio diferentziala</i>	130
§ 27. <i>Oszilazio askeak</i>	132
§ 28. <i>Oszilazio bortxatuak</i>	135
§ 29. <i>Ekuazio diferentzial arruntezko sistemak</i>	141
§ 30. <i>Koefiziente konstantedun ekuazio diferentzial linealezko sistemak</i>	149
§ 31. <i>Liapunov-en egonkortasunaren teoriari buruzko nozioak</i>	158
§ 32. <i>Lehen ordenako ekuazio diferentzialen soluzio hurbildua</i> <i>Euler-en metodoa erabiliz</i>	166
§ 33. <i>Ekuazio diferentzialen diferentzien metodoaren bidezko soluzio hurbildua,</i> <i>Taylor-en formularen erabileran oinarriturik. Adams-en metodoa</i>	169
§ 34. <i>Lehen ordenako ekuazio diferentzialezko sistemen integrazio-metodo</i> <i>hurbildua</i>	179
<i>Ariketak</i>	184
XIV. Gaia. INTEGRAL ANIZKOITZAK	207
§ 1. <i>Integral bikoitza</i>	207
§ 2. <i>Integral bikoitzaren kalkulua</i>	210
§ 3. <i>Integral bikoitzaren kalkulua (jarraipena)</i>	218
§ 4. <i>Azalera eta bolumenen integral bikoitzen bidezko kalkulua</i>	225
§ 5. <i>Integral bikoitzak koordenatu polarretan</i>	228
§ 6. <i>Aldagai-aldaketa integral bikoitzean (kasu orokorra)</i>	237
§ 7. <i>Gainazalen azalaren kalkulua</i>	243
§ 8. <i>Materiaren banaketaren dentsitatea eta integral bikoitza</i>	248
§ 9. <i>Irudi laun baten inerti momentua</i>	250
§ 10. <i>Irudi laun baten grabitate-zentruaren koordenatuak</i>	256
§ 11. <i>Integral hirukoitza</i>	258
§ 12. <i>Integral hirukoitzen kalkulua</i>	259
§ 13. <i>Aldagai-aldaketa integral hirukoitzean</i>	266
§ 14. <i>Gorputz baten inerti momentua eta grabitate-zentruaren koordenatuak</i> ..	270
§ 15. <i>Parametro baten menpeko integralen kalkulua</i>	273
<i>Ariketak</i>	275

XV. Gaia. LERRO- ETA GAINAZAL-INTEGRALAK	285
§ 1. Lerro-integrala	285
§ 2. Lerro-integralaren kalkulua	289
§ 3. Green-en formula	298
§ 4. Lerro-integrala integrazio-bidearen menpe ez egoteko baldintzak	301
§ 5. Gainazal-integrala	308
§ 6. Gainazal-integralaren kalkulua	311
§ 7. Stokes-en formula	315
§ 8. Ostrogradski-ren formula	322
§ 9. Hamilton-en eragilea eta zenbait aplikazio	325
Ariketak	329
XVI. Gaia. SERIEAK	340
§ 1. Seriea. Serie baten batura	340
§ 2. Serie baten konbergentziarako baldintza beharrezkoa	344
§ 3. Gai positibotako serieen arteko konparazioa	347
§ 4. D'Alembert-en irizpidea	350
§ 5. Cauchy-ren irizpidea	356
§ 6. Konbergentzi irizpide integrala	359
§ 7. Serie alternatuak. Leibniz-en teorema	363
§ 8. Gai positibo eta negatibotako serieak. Konbergentzia absolutua eta baldintzatua	367
§ 9. Funtzio-serieak	372
§ 10. Serie majoragarriak	373
§ 11. Serie baten baturaren jarraitasuna	377
§ 12. Serieen deribazio eta integrazioa	380
§ 13. Berredura-serieak. Konbergentzi tarteak	384
§ 14. Berredura-serieen deribazioa	390
§ 15. $(x - a)$ -ren berreduratako serieak	392
§ 16. Taylor eta Maclaurin-en serieak	394
§ 17. Funtzioen seriezko garapenen adibideak	396
§ 18. Euler-en formula	398
§ 19. Serie binomikoa	399
§ 20. $\ln(1 + x)$ funtzioaren berredura-serieazko garapena. Logaritmoen kalkulua	402
§ 21. Serieen aplikazioa integral mugatuen kalkuluan	405
§ 22. Serieen aplikazioa ekuazio diferentzialen integrazioan	407

§ 23. <i>Bessel-en ekuazioa</i>	412
<i>Ariketak</i>	418
XVII. Gaia. FOURIER-EN SERIEAK	433
§ 1. <i>Definizioa. Problemaren planteamendua</i>	433
§ 2. <i>Funtzioen Fourier-en seriezko garapenen adibideak</i>	438
§ 3. <i>Funtzio periodikoen Fourier-en seriezko garapenari buruzko oharpena</i> ..	444
§ 4. <i>Funtzio bikoiti eta bakoitien Fourier-en serieak</i>	447
§ 5. <i>2l periodoko funtzioen Fourier-en seriea</i>	449
§ 6. <i>Funtzio ez-periodiko baten Fourier-en seriezko garapena</i>	451
§ 7. <i>Funtzio baten batezbesteko hurbilketa polinomio</i> <i>trigonometrikoen bidez</i>	453
§ 8. <i>Dirichlet-en integrala</i>	460
§ 9. <i>Fourier-en seriearen konbergentzia emandako puntu batean</i>	463
§ 10. <i>Zenbait baldintza nahikoa Fourier-en serieen konbergentziarako</i>	465
§ 11. <i>Analisi harmoniko praktikoa</i>	468
§ 12. <i>Fourier-en integrala</i>	469
§ 13. <i>Fourier-en integrala era konplexuan</i>	474
<i>Ariketak</i>	476
XVIII. Gaia. FISIKA MATEMATIKOKO APLIKAZIOAK	479
§ 1. <i>Fisika matematikoko ekuazioen oinarrizko motak</i>	479
§ 2. <i>Soka baten oszilazioen ekuazioa. Problemaren formulazioa</i> <i>mugalde-baldintzekin. Eroaleetako oszilazio elektrikoaren ekuazioak</i>	480
§ 3. <i>Soka baten bibrazioen ekuazioaren ebazpena aldagai-banaketaren</i> <i>metodoaren bidez (Fourier-en metodoa)</i>	485
§ 4. <i>Hagaska baten bero-barreiapenaren ekuazioa. Mugalde-baliiodun</i> <i>problemaren planteamendua</i>	489
§ 5. <i>Beroaren barreiapena espazioan</i>	491
§ 6. <i>Mugalde-baliiodun lehen problemaren soluzioa beroaren kondukzioaren</i> <i>ekuaziorako, diferentzia finituen metodoaren bidez</i>	496
§ 7. <i>Beroaren barreiapena mugarik gabeko hagaskan</i>	499
§ 8. <i>Laplace-ren ekuazioaren soluzioak ikertzerako garamatzaten problemak.</i> <i>Mugalde-baliiodun problemen planteamendua</i>	505
§ 9. <i>Laplace-ren ekuazioa koordenatu zilindrikoetan. Dirichlet-en</i> <i>problemaren soluzioa eratzun zirkular baterako, funtzio ezezagunak</i> <i>kanpo- eta barne-zirkunferentzietan balio konstanteak dituelarik</i>	511

§ 10. Dirichlet-en problemaren soluzioa zirkulu baterako	514
§ 11. Dirichlet-en problemaren soluzioa diferentzia finituen metodoaren bidez.	519
Ariketak	522
XIX. Gaia. ERAGILE-KALKULUA ETA ZENBAIT APLIKAZIO	528
§ 1. Hasierako funtzioa eta bere transformazioa (irudia)	528
§ 2. $\sigma_0(t)$, $\sin t$, $\cos t$ funtzioen irudiak	530
§ 3. Aldagai askearen eskala aldatuta daukan funtzioaren irudia. $\sin at$, $\cos at$ funtzioen irudia	532
§ 4. Irudiaren linealtasunaren propietatea	534
§ 5. Desplazamenduaren teorema	535
§ 6. $e^{-\alpha t}$, $\sinh \alpha t$, $\cosh \alpha t$, $e^{-\alpha t} \sinh at$, $e^{-\alpha t} \cosh at$ funtzioen irudiak	536
§ 7. Irudiaren deribazioa	538
§ 8. Deribatuen irudia	541
§ 9. Zenbait irudiren taula	542
§ 10. Ekuazio laguntzailea emandako ekuazio diferentzialerako	544
§ 11. Deskonposaketa-teorema	550
§ 12. Ekuazio diferentzial eta ekuazio diferentziazko sistemen eragile-metodoaren bidezko soluzioen adibideak	552
§ 13. Konboluzio-teorema	555
§ 14. Oszilazio mekanikoen ekuazio diferentzialak. Zirkuitu elektrikoen teoriako ekuazio diferentzialak	558
§ 15. Oszilazioen ekuazio diferentzialaren soluzioa	560
§ 16. Oszilazio askeen estudioa	562
§ 17. Oszilazio mekaniko eta elektrikoen estudioa, kanpo-indar periodiko bat aplikatzen deneko kasuan	563
§ 18. Oszilazioen ekuaziaren soluzioa erresonantzi kasuan	566
§ 19. Atzerapen-teorema	568
Ariketak	569
AURKIBIDE ALFABETIKOA	571

EUSKAL BERTSIORAKO AINTZINSOLASA

Piskunov liburuaren euskal bertsioaren aurkezpenerako aitzinsolasa idazterakoan, interesgarri eritzi izan diot, egunotan unibertsitateko euskal lerroetan lanean dihardugun irakasleen artean eztabaidagai den kezka eta jokatzeko modu bati buruzko gogoeta egiteari, zientziaren arloko eskuliburuaren itzulpengintzari buruzkoa hain zuzen. Kezkaren muina honetan datza, alegia, ea buru-belarri abiatu behar dugun horrelako liburuaren itzulpengintzara edo ea egokiago ez ote den lehentasuna bestelako eginbeharretan jartzea.

‘Eskuliburuak’ izenarekin, munduan zehar dauden unibertsitate gehienetan –edo askotan bederen– erabili ohi diren liburuak adierazi nahi ditut, goi-mailako zientzilariek idatziak, urteen joanean irauten dutenak, ongi eginak direlako, noski, eta mundu osoko irakasleek kontsulta-liburu modura darabiltzatenak. Esan gabe doa, holakoak euskara onean idatzirik egotea oso baliagarri gerta daitekeela, eta, esatera ausartu egingo naiz, holakoaren argitarapenak gure hizkuntzaren osasuna adieraz dezakeela. Edozertara, horrek ez narama eskuliburu klasikoaren berehalako itzulpen hutsa bultzatzera, prozesu hori onuragarria eta egokia izan dadin, aldeztu aurretik zenbait baldintza bete behar direla uste bait dut.

Itzulpengintzarako baldintzak aipatu ditut, jarraian zehaztuko ditudanak, aldian aldiko arrazoibidea azaltzen saiatuko naizelarik:

- Lehenengo eta behin, liburuari dagokion jakintza-arloan erabili ohi den hizkera berezia, eginda egon behar da itzulpena prestatzen ari deneko unean. Honekin adierazi nahi dudana, ondokoa besterik ez da, itzulpengintzan ezin daitekeela etengabe asmatzen ibil. Hori, gehienara ere, itzultzaileak berak asmatutako hizkera litzateke, bai hitzei dagokienez, bai sintagma lexikal konplexuei dagokienez, eta bai joskerazko esateko moduei dagokienez ere. Alegia, itzulpenaren helburu edo erreferentzia garbirik gabe, nora hel daitekeen eta nora heldu nahi dugun argiro jakin gabe, inora ez heltzeko arrisku bizia dagoelakoan nago.
- Aurrekoarekin loturik, arloan arloko hizkera berezia erabiltzeko ohitura duen gizataldea behar da. Hau da, hizkera berezi hori erabiliz elkarrekin komunikatzeko eta jakintza-arlo horretan informazioa trukatzeko gai den hiztun-multzoa. Gizatalde hori arlo horretako espezialistek eta ikasleek osotua izan ohi da batzutan. Prezeski, aipaturiko hiztun-multzo horri zuzentzen zaio itzulpena, bere eguneroko praktikan lagungarri gerta dakion. Zer laguntza eta mesede etor dakioke, ordea, berarentzat arrotz suertatzen den hizkeran idatzia den itzulpenetik?

- Baldintzen aipamen honetan azkena datorrena, itzultzaileei buruzkoa da. Labur esanda, edonork ezin dezake edozer itzul, hots, itzultzaileak itzuliko duen liburuko jakintza-gaia aritua izan behar duela uste dut, ez bait da nahikoa hizkuntzaren ezagumendu orokorra, berori zabala izan arren ere. Beste hitz batzutatuz esanda, liburu espezializatuen itzulpena jakintza-arlo horretan espezializaturik daudenek egin behar dute, edota bestela itzulpena desegokia izateko arrisku handiegia izango da.

Abiapuntu honekin, aitzinsolasaren irakurleak eritzi ezkorra atera dezake lehenengo begikolpeaz, izkutuan itzulpenaren aurkako zerbait bainekuan, baina ez da horrela. Soilik esan gura nuke, aipaturiko pausoak nolabait eman aurretik, eta era horretako joera bultzatu aurretik, arriskugarria gerta daitekeela. Are gehiago, ene eritzian, orain arte liburu klasiko batzuren itzulpenean egin den lan erraldoiak ez du behar adinako fruiturik eman zenbait kasutan, azaldutako baldintza horietatik urrunegi geundelako. Horrek ez du esan nahi etorkizunerako lan horiek baliagarri izango ez direnik, egokitasunari begira egindako aukeran desegoki gerta daitezkeenik baizik, epe labur eta ertainean behintzat.

Hain zuzen, eztabaida honen gakoa, euskalgintzan ditugun baliabide murrizten erabilpenaren optimizazioan dagoela deritzot. Horregatik, zientziaren arloan euskaraz lan egitean harturiko eskarmentuan oinarriturik, optimoa ez bada ere biderik onenetik hurbil dagoelakoan, bestelako praktika-modua proposatu izan diet neure lankideei. Ene ustez, lehenengo eta behin hizkuntza bera trebatu behar da, horretarako bereziki antolaturiko mintegi eta lantaldeen bidez, bertan hizkuntzak dituen arazoak gainditzeko proposamenak eginez eta mota desberdinetako aukeren arteko eztabaida landuz. Horretan unibertsitateko irakasleek zeresan handia daukate, beren irakasgaiak prestatzeko eskuzkribuen laguntzaz beste irakasleen eta ikasleen eritziak eta kritikak bilduz. Mintegi eta irakastaldien bidez, hizkera espezializatu berezia normaltasunez erabiliko duen gizataldea eginez eta trinkotuz doa. Hori gertatuz doan neurrian, oso egokia da liburu desberdinetako laburpen edo sintesi berriak egitea, horrela egunetik egunera osotuz doan behin-behineko materiala sortuz. Material hori **euskaraz pentsatuz birsortu** behar dela uste dut nik, bestela beste hizkuntzen menpekotasun erabatekoan erortzeko arriskuan gaudela uste bait dut. Gainera, gaur eguneko bitarteko teknikoan laguntzaz –batez ere ordenadoreenaz– prozesu hori inolako arazorik gabe eraman daiteke aurrera, argitarapen txukun eta egokiak prestatuz. Horrela eginez, hizkera berezitua egin-samarra gertatzen den neurrian, orduan izan daiteke hurrengo pausoa emateko garaia, liburu klasikoak itzuliz.

Baina ez pentsa, horrek itzulpengintzan jadanik abiatu behar ez dugunik esan nahi duenik. Prezeski, euskara zientifikoaren arloan, talde batzuk eginiko lanari esker –Elhuyar, UZEI eta unibertsitateko euskara zientifikoan diharduten irakasleen taldeak ezin utz ditzaket aipatu gabe–, gaur egunean zientziaren oinarritzko zenbait arlotan euskara ia erabat

prestaturik dago, normaltasun osoz aritzeko. Holako zerbait da, Piskunov liburuan ageri diren gaiekin gertatzen dena.

Eskuliburu honen itzulpena edo, zehaztasunez hitz egiteko nahiago bada, **euskal bertsioa**, Matematikaren arloan adituak diren irakasleek eta zientzilariek egina izan da, unibertsitate eta talde desberdinetakoak gainera. Matematikari horiek guztiok arituak dira euskarazko irakaskuntzan, dela UPVn dela UEUn, eta, beraz, liburuan ageri den hizkera, praktikan oinarriturik dago, bertan matematikari euskaldunen arteko akordioa bildu delarik. Ikasleek ere ezagun dute hizkera-modu hori, horrela komunikazioaren bidea erabat irekirik geratu delarik. Nola ez, ba, egoki ikusi itzulpen bidez datorkigun liburu klasiko hau? Alde horretatik guztiz egokitzat daukat.

Liburuaren edukinari dagokionez, ez dut ezer berezirik esatekorik, berori darabilten gehienek diotenaz gain. Alegia, kalkulu diferentzialaren eta integralaren arloko bilduma zabal eta praktikoa dela, ez soilik matematikarientzat egokia, baizik eta oso erabilgarria unibertsitateko zientzia eta ingeniartzako irakasle eta ikasle guztiontzat ere. Eta, zer esanik ez, orain arte hizkuntza desberdinetako itzulpenetan niretzat ere kontsulta-liburu baliagarria izanda, hemendik aurrera askoz gehiago erabiliko dudala euskal bertsioa.

Eskerrik beroenak eta zorionak euskal bertsioa prestatzen aritu izan diren guztiei.

J.R. Etxebarria

Leioan, 1992.eko irailaren 27an

EUSKARATZAILEEN OHARRA

Liburu hau N. Piskunov-en "Kalkulu diferentziala eta integrala" lanaren euskarazko lehenengo bertsioa da. Honetarako errusierazko 7. argitarapenean oinarritu den gaztelanierazko lehenengo bertsioaren 6. argitarapena (1983) erabili da. Gaztelanierazko bertsioa K. Medkov injineruak egin du eta MIR argitaletxeak kaleratu du. Euskarazko bertsioa ere bi liburukitan argitaratuta dago. Lehenengo liburukian I-XII gaiak eta bigarrenean XIII-XIX gaiak daude.

Hizkuntza aldetik x letraren erabilera aipatzekoa. x letraren euskal izena *ixa* da, eta hori izan da liburuan erabili dena. Horregatik, x -k, x -ren, x -rekiko, e.a. egiturak ikusi ahal izango dituzu. Bestalde, baldintzazko esaldietan erabiltzen den "orduan" leloa ez da idatzi. Azkenik esan, adibide eta ariketetako enuntziatuetan aditzaren partizipioa erabili dugula irakurketa errazteko asmoz.

Hiztegiari begira, UZEIren Matematika hiztegian oinarritu da. Hala ere, kontzeptu berri asko sortu behar izan da.

Euskaratze-lanetan zortzi lagun aritu dira. Lan osoa homogenotu da, norberaen estiloa eta ekarpena ahalik eta gehien errespetatuz.

XIII. GAIA

EKUAZIO DIFERENTZIALAK

§ 1. Problemaren planteamendua

Demagun $y = f(x)$ funtzioak fenomeno bat kuantitatiboki adierazten duela. Fenomeno hori aztertzerakoan ezin da zuzenean y eta x aldagaien arteko erlazioaren izaera erabaki; hala ere, x eta y magnitudeen eta $y', y'', \dots, y^{(n)}$, x -rekiko y -ren deribatuen arteko erlazioa ezar daiteke, hau da, ekuazio diferentzial bat idatz daiteke.

x, y eta deribatuen artean lortutako erlaziotik x eta y -ren arteko erlazio zuzena ateratzea beharrezkoa da, hots, $y = f(x)$ bilatzea edo, esan ohi den bezala, ekuazio diferentzial bat integratzea.

Azter dezagun bi adibide.

1. Adibidea. Altuera batetik m masako gorputz bat jaurtiki da. Determinatu v erorketa-abiaduraren aldakuntzaren legea, gorputzaren gainean grabitatearen indarrez aparte airearen erresistentzi indarrak eragiten badu, azken hori, v abiadurarekiko proportzionala izanik (proportzionaltasun-koefizientea k da), hau da, $v = f(t)$ bilatu behar da.

Ebazpena. Newton-en bigarren legearen arabera $m \frac{dv}{dt} = F$, non $\frac{dv}{dt}$ gorputzaren azelerazioa gorputza higitzen denean (abiaduraren deribatua denborarekiko) eta F , gorputzak higiduraren norantzan eragiten duen indarra bait dira. Azken hori bi indarren erresultantea da: grabitatearena, mg , eta airearen erresistentziarena, $-kv$ (minus zeinua hartzen da bere norantza abiadurarenaren aurkakoa bait da). Beraz,

$$m \frac{dv}{dt} = mg - kv. \quad (1)$$

v funtzio ezezaguna eta $\frac{dv}{dt}$ bere deribatuaren arteko erlazio bat lortu dugu, v funtzio ezezagunarekiko ekuazio diferentzial bat alegia. (Zenbait motatako jausgailuen higiduraren ekuazioa). Ekuazio diferentzial hori ebaztea emandako ekuazio diferentziala betetzen duen $v = f(t)$ funtzio bat bilatzean datza. Horrelako infinitu funtzio dago. Erraz egiazta liteke

$$v = C e^{-\frac{k}{m}t} + \frac{mg}{k} \quad (2)$$

motako funtzio orok (1) ekuazioa betetzen duela, C konstantea edozein izanik ere. Baina, horien artean zeinek emango du v eta t -ren artean bilatutako erlazioa?. Aurkitzeko erabil dezagun baldintza gehigarri bat: gorputza v_0 hasierako abiaduraz jarturik dugu (zero izan daitekeena); demagun hasierako abiadura ezaguna dela. Baina, kasu horretan, bilatzen dugun $v = f(t)$ funtzioak $t=0$ (higiduraren hasieran) denean $v = v_0$ bete behar du. (2) formulatan $t=0$, $v = v_0$ ipinuz gero

$$v_0 = C + \frac{mg}{k}$$

lortzen dugu, eta hortik

$$C = v_0 - \frac{mg}{k}.$$

Horrela, C konstantea finkatzen da. Hortaz, v eta t -ren artean bilatutako erlazioa

$$v = \left(v_0 - \frac{mg}{k} \right) e^{-\frac{kt}{m}} + \frac{mg}{k} \quad (2')$$

da.

Formula horretatik t nahiko handia bada v -ren v_0 -rekiko menpekotasun ahula dela ondorioztatzen da.

Ohar gaitezen $k=0$ bada (hau da, ez dago airearen erresistentziarik, edo hain txikia izanik mespreza dezakegu), fisikan oso ezaguna den emaitza¹⁾ lortzen dugu:

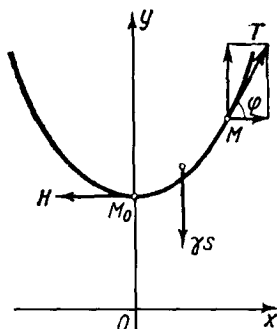
$$v = v_0 + gt. \quad (2'')$$

1) (2'') formula (2') formulatik lor daiteke limitearen bidez:

$$\lim_{k \rightarrow 0} \left[\left(v_0 - \frac{mg}{k} \right) e^{-\frac{kt}{m}} + \frac{mg}{k} \right] = v_0 + gt.$$

Funtzio horrek (1) ekuazio diferentziala betetzen du, baita hasierako baldintza ere, $v = v_0$, $t = 0$ denean.

2. Adibidea. Hari malgu homogeno bat bere bi muturretatik esegita dago. Bilatu hariak, bere pisuak eragina, hartuko duen itxurako kurbaren ekuazioa (hori da esegitako sokek, kableek eta kateek hartzen duten forma).



244. IRUDIA

Ebazpena. Izan bedi $M_0(0,b)$ hariaren punturik bajea, eta M edozein puntu (244. irudia). Azter dezagun hariaren M_0M zatia. Zati hori hiru indarrek orekatzen dute:

- 1) M puntuko ukitzailean zehar eragin eta Ox ardatzarekin φ angelua osatzen duen T tentsioa;
- 2) M_0 puntuan horizontalki eragiten duen H tentsioa;
- 3) hariaren γs pisua, bertikalki beherantz zuzendua, non s M_0M arkuaren luzera eta γ hariaren pisu espezifiku lineala diren.

T bere osagai horizontal eta bertikaletan deskonposatuz, orekaren ekuazioak lortzen ditugu:

$$\begin{aligned} T \cos \varphi &= H \\ T \sin \varphi &= \gamma s \end{aligned}$$

Bigarren berdintza lehenengoaz zatituz,

$$\tan \varphi = \frac{\gamma}{H} s \quad (3)$$

lortzen dugu. Jo dezagun orain bilatzen den kurbaren ekuazioa $y = f(x)$ idatz daitekeela.

Hor, $f(x)$ bilatu behar dugun funtzioa da. Ohar gaitezen $\tan \varphi = f'(x) = \frac{dy}{dx}$ dela.

Beraz,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{a} s, \quad (4)$$

non a -k $\frac{H}{\gamma}$ zatidura adierazten duen.

Deriba ditzagun (4) berdintzaren bi atalak x -rekiko:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{a} \frac{ds}{dx}. \quad (5)$$

Baina dagoeneko badakigu (ikus VI. gaiko § 1)

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

dela.

Adierazpen hori (5) ekuazioan idatziz kurbaren ekuazio diferentziala erdiesten dugu:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{a} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}. \quad (6)$$

Funtzio horrek y funtzio ezezagunaren lehenengo eta bigarren deribatuen arteko erlazioa adierazten du.

Ekuazioen ebazpen-metodoak alde batera utziz, derragun

$$y = \frac{a}{2} \left[e^{+\left(\frac{x}{a} + C_1\right)} + e^{-\left(\frac{x}{a} + C_1\right)} \right] + C_2 \quad (7)$$

iturako funtzio orok, (6) ekuazioa betetzen duela, C_1 eta C_2 konstanteen balioak edozein izanik ere. Hori egiaztatzea erraza da aipatutako funtzioaren lehenengo eta bigarren deribatuak, (6) ekuazioan ordezkatzuz. Esan dezagun, frogatu gabe, funtzio horiek direla (C_1 eta C_2 konstanteen balio desberdinetarako), (6) ekuazioak eduki ditzakeen soluzio guztiak, aurrerago, § 18an, frogatuko dena.

Horrela lortutako funtzio guztien grafikoei *kateneri* izena dute. Azal dezagun, orain, nola aukeratu behar diren C_1 eta C_2 konstanteak, $(0, b)$ koordinatueta beheko puntua daukan katenaria lortzeko. $x=0$ denean katenariaren puntua posiziorik bajeanean dagoenez, puntu horretako ukitzaila horizontala da, hots $\frac{dy}{dx} = 0$. Horrez gain, hipotesiz, puntu horren ordenatua b da, hau da, $y=b$.

(7) ekuaziotik

$$y' = \frac{1}{2} \left(e^{\frac{x}{a} + C_1} - e^{-\left(\frac{x}{a} + C_1\right)} \right)$$

ondorioztatzen da.

Hor $x=0$ eginez gero, $0 = \frac{1}{2}(e^{C_1} - e^{-C_1})$ lortzen dugu. Hortaz, $C_1 = 0$.

Baldin b M_0 puntuaren ordenatua bada, $y=b$ da $x=0$ denean. $x=0$, $C_1=0$

eginez, (7) ekuaziotik $b = \frac{a}{2}(1+1) + C_2$ ateratzen dugu, eta hortik $C_2 = b - a$.

Laburbilduz,

$$y = \frac{a}{2} \left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}} \right) + b - a$$

aurkitu dugu.

(7) ekuazioa nabariki errazten da, M_0 puntuaren ordenatua a balioa hartuz gero. Orduan, katenariaren ekuazioa

$$y = \frac{a}{2} \left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}} \right)$$

da.

§ 2. Definizioak

1. Definizioa. x aldagai independentea, $y=f(x)$ funtzio bilatua eta $y', y'', \dots, y^{(n)}$ bere deribatuen arteko erlazio bat ezartzen duen ekuazioari *ekuazio diferentzial* deritzen.

Ekuazio diferentziala sinbolikoki $F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$ eran idatz daiteke, edo,

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \dots, \frac{d^ny}{dx^n}\right) = 0$$

eran ere.

$y = f(x)$ bilatutako funtzioa aldagai independente batekoa bada ekuazio diferentzialari *arrunt* deitzen zaio. Ihardun dezagun oraingoz ekuazio diferentzial arruntez soilik²⁾.

2. Definizioa. Ekuazioan agertzen den ordena handieneko deribatuaren ordena ekuazio diferentzialaren *ordena* da.

Adibidez, $y' - 2xy^2 + 5 = 0$ ekuazioa lehenengo ordenakoa da.

$y'' + ky' - by - \sin x = 0$ ekuazioa bigarren ordenakoa, etab.

Aurreko ataleko lehenengo adibidean aztertutako ekuazioa lehenengo ordenakoa da, eta bigarren adibidekoa, bigarren ordenakoa.

3. Definizioa. Ekuazioan ordezkatzuz gero, identitate bihurtzen duen $y = f(x)$ funtzio orori ekuazio diferentzialaren *soluzio* edo *integral* deritzo.

1. Adibidea. Izan bedi $\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0$ ekuazio diferentziala.

$y = \sin x$, $y = 2 \cos x$, $y = 3 \sin x - \cos x$ funtzioak eta, orokorrean, $y = C_1 \sin x$, $y = C_2 \cos x$ edo $y = C_1 \sin x + C_2 \cos x$ erako funtzio guztiak emandako ekuazioaren soluzioak dira, C_1 eta C_2 konstanteak edozein badira ere. Hori egiaztatzea erraza da aipatutako funtzioak ekuazioan ordezkatzuz.

2) Ekuazio diferentzial arruntak bezala, analisi matematikoan deribatu partzialetako ekuazioak ere aztertzen dira. z funtzio ezezaguna, $x, y, \dots$ bi edo aldagai gehiagokoa, $x,$

$y, \dots$ aldagai berak eta z -ren $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \dots$ deribatu partzialen arteko erlazioa ezartzen duten ekuazioei *deribatu partzialetako ekuazio* deitzen zaie.

Adibidez, $x \frac{\partial z}{\partial x} = y \frac{\partial z}{\partial y}$ deribatua partzialetako ekuazioa da, funtzio ezezaguna $z(x, y)$ izanik.

Erraz egiaztatzaiteke $z = x^2 y^2$ funtzioak emandako ekuazioa betetzen duela (beste infinitu funtzioek bezala). Liburu honetan, deribatu partzialetako deribatuak XVIII. gaian aztertuko dira.

2. Adibidea. Azter dezagun $y'x - x^2 - y = 0$ ekuazioa.

Bere soluzioak $y = x^2 + Cx$ itxurako funtzioak dira, non C hautazko konstantea den. Izan ere, $y = x^2 + Cx$ ekuazioa deribatuz $y' = 2x + Cx$ aurkitzen dugu.

y eta y' -aren adierazpenak jatorrizko ekuazioan ordezkatzuz

$$(2x + C)x - x^2 - x^2 - Cx = 0$$

identitatea lortzen dugu.

1. eta 2. adibideetan arakatutako ekuazio bakoitzak infinitu soluzio dauka.

§ 3. Lehen ordenako ekuazio diferentzialak (Orokortasunak)

1. Lehen ordenako ekuazio diferentzial batek

$$F(x, y, y') = 0 \quad (1)$$

itxura dauka.

Ekuazio hori y' -arekiko ebazkarria bada

$$y' = f(x, y) \quad (1')$$

eran (normal deitutakoa) idatz daiteke.

Kasu horretan ekuazio diferentziala deribatuarekiko ebazkarria dela esan ohi da. Horrelako ekuaziorako ekuazio diferentzial baten soluzioaren existentzia eta bakartasunari buruzko ondoko teorema baliagarria da.

Teorema. $y' = f(x, y)$ ekuazioan $f(x, y)$ funtzioa eta $\frac{\partial f}{\partial y}$ y -rekiko bere deribatu partziala jarraiak badira Oxy planoko D eremu batean, eta (x_0, y_0) eremuko puntu bat bada, ekuazioaren $y = \varphi(x)$ soluzio bakar bat existitzen da, zeinak $x = x_0$ denean $y = y_0$ baldintza betetzen bait du.

Teoremaren esanahi geometrikoa hauxe da: (x_0, y_0) puntutik igarotzen den grafikoa duen $y = \varphi(x)$ funtzioa bakarra da.

Aurreko teorematik (1') ekuazioak infinitu soluzio desberdin daukala ondorioztatzen da [esaterako, (x_0, y_0) puntutik pasatzen den grafikoari dagokiona, (x_0, y_1) puntutik

igarotzen denari dagokiona, (x_0, y_2) puntutik etab., puntu horiek D eremuan dauden bitartean].

y funtzioak $x=x_0$ denean y_0 balioa hartu beharreko baldintza *hastapen-baldintza* deitzen da. Sarritan baldintza hori,

$$y|_{x=x_0} = y_0$$

eran idazten da.

1. Definizioa.

$$y = \varphi(x, C) \quad (2)$$

funtzioari lehenengo ordenako ekuazio diferentzial baten *soluzio orokor* deitzen zaio, funtzioa C hautazko konstantearen menpe dago eta ondoko baldintzak betetzen baditu:

- a) C konstantearen edozein baliotarako ekuazio diferentziala betetzen du;
- b) hastapen-baldintza edozein izanik, $x=x_0$ denean $y=y_0$, hau da, $(y)_{x=x_0} = y_0$, $C=C_0$ balio bat aurki daiteke non $y = \varphi(x, C_0)$ funtzioak hastapen-baldintza betetzen duen.

Kasu horretan x_0 eta y_0 balioak x eta y aldagaien aldakuntz eremuan daudela suposatzen da, eremu horretan soluzioaren existentzia eta bakartasunari buruzko teoremaren baldintzak betetzen direlarik.

2. Ekuazio diferentzial baten soluzio orokorra bilatzean,

$$\Phi(x, y, C) = 0 \quad (2')$$

y -rekiko ez-askatua, itxurako erlazio batera heltzen gara askotan. y -rekiko ebaztean soluzio orokorra lortzen dugu. Hala ere, ez dago (2') erlazioetik abiatuz y funtzio elementalen bidez beti adierazterik. Antzeko kasuetan soluzio orokorra era implizituan agertzen da.

Soluzio orokorra era implizituan ematen duen $\phi(x, y, c) = 0$ itxurako berdintza ekuazio diferentzialaren *integral orokor* deitzen da.

2. Definizioa. $y = \varphi(x, C)$ soluzio orokorretik, C konstanteari $C=C_0$ balio finko bat emanez, erdietsitako $y = \varphi(x, C_0)$ funtzio orok *soluzio partikular* izena du. Kasu horretan $\Phi(x, y, C_0) = 0$ erlazioak ekuazioaren *integral partikular* izena du.

1. Adibidea.

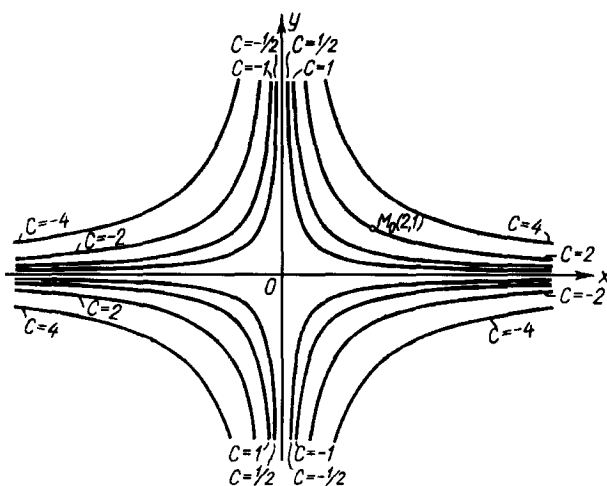
$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}$$

lehen ordenako ekuazioak soluzio orokortzat $y = \frac{C}{x}$ funtzioen familia dauka; berori ekuazioan ordezkapen simple baten bidez egiazta daiteke.

Bila dezagun $y_0 = 1$, $x_0 = 2$ denean, hastapen-baldintza betetzen duen soluzio partikular bat. Balio horiek $y = \frac{C}{x}$ formulan ordezkatzuz $1 = \frac{C}{2}$ edo $C = 2$ lortzen dugu. Hortaz, $y = \frac{2}{x}$ funtzioa bilatutako soluzio partikularra da.

Ikuspuntu geometrikotik, integral orokorrak koordinatu-planoko kurben familia adierazten du, C hautazko konstantearen (edo esan ohi bezala, C parametroaren) menpean. Kurba horiek emandako ekuazio diferentzialaren *kurba integral* deitzen dira.

Integral partikular bakoitza planoko puntu ezagun batetik igarotzen den familiaren kurba batek adierazten du.



245. IRUDIA

Horrela, azkeneko adibidean integral orokorra geometrikoki $y = \frac{C}{x}$ hiperbolen familiak adierazita dator eta integral partikularra, hastapen-baldintzak determinatua, $M_0(2,1)$ puntutik igarotzen den hiperbolaz. 245. irudian parametroaren $C = \frac{1}{2}$, $C = 1$, $C = 2$, $C = -1$ etab. balioei dagozkien familiaren kurbak agertzen dira.

Gure arrazonamenduak hobeto laguntzeko asmoz, ekuazioa betetzen duen $y = \varphi(x, C_0)$ funtzioari ezezik dagokion kurba integralari ere ekuazioaren soluzio deituko diogu. Honelatan, esaterako (x_0, y_0) puntutik pasatzen den soluzioaz mintzatuko gara.

Oharra. $\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}$ ekuazioak ez dauka Oy ardatzeko puntuetatik igarotzen den soluziorik (ikus 245. irudia). Hori, ekuazioaren bigarren atala $x=0$ denean definiturik ez dagoelako, eta beraz, jarraia ez delako gertatzen da.

Ekuazio diferentzialak ebazteak, edo esan ohi den bezala integratzeak, zera esan nahi du:

a) bere soluzio edo integral orokorra aurkitzea (hastapen-baldintzarik ez badago),
edo

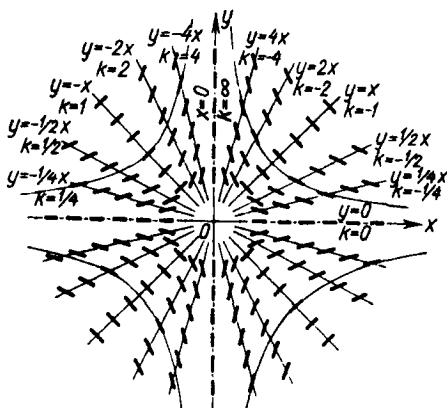
b) emandako hastapen-baldintzak (baldin badaude) betetzen dituen ekuazioaren soluzio partikularra bilatzea.

3. Eman dezagun lehen ordenako ekuazio diferentzial baten adierazpen geometrikoa.

Izan bedi

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \quad (1')$$

forma normalean emandako ekuazio diferentzial bat eta izan bedi $y = \varphi(x, C)$ bere soluzio orokorra. Soluzio orokor horrek Oxy planoko kurba integralen sorta determinatzen du.



246. IRUDIA

x, y koordinatuetako M puntu guztietarako (1') ekuazioak $\frac{dy}{dx}$ deribatuaren balio bat mugatzen du, hau da, puntu horretatik pasatzen den kurba integralaren ukitzailearen koefiziente angeluarra. Hortaz, (1') ekuazio diferentzialak norabide-multzo bat definitzen du, edo, esaten den bezala, Oxy planoan *norabide-eremu* bat mugatzen du.

Ikuspuntu geometrikotik, ekuazio diferentzial baten integrazioaren problema kurbak bilatzean datza, zeinen ukitzaileen norabideak puntu horietan, eremuaren norabidearekin batera bait datoz.

246. irudian $\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}$ ekuazio diferentzialak definitutako norabide-eremua irudikatu da.

4. Kontsidera dezagun, orain, hurrengo problema.

Izan bedi

$$y = \varphi(x, C) \quad (2)$$

C parametro baten menpeko funtzioen multzo bat, non planoko (edo planoko eremu bateko) puntu orotik multzo horren kurba bakar bat pasatzen bait da.

Zein da integral orokortzat funtzio-multzo hori duen ekuazio diferentziala?

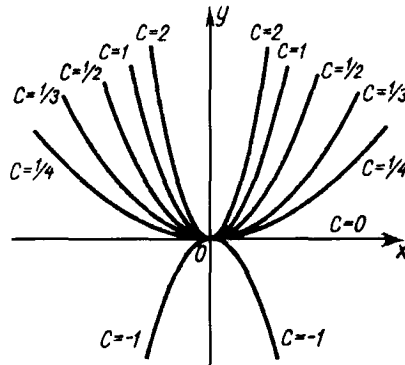
(2) ekuazioa x -rekiko deribatuz:

$$\frac{dy}{dx} = \varphi'_x(x, C). \quad (3)$$

Planoko puntu orotik sortaren kurba bakar bat igarotzen denez, x, y zenbaki-bikote bakoitzerako (2) ekuaziotik C balio bat lortzen da. C balio hori (3) ekuazioan ordezkatzuz, $\frac{dy}{dx}$ x eta y -ren funtzio bezala topatzen dugu. Horrela, (2) multzoaren funtzio orok betetzen duen ekuazio diferentziala erdiesten dugu.

Hortaz, x, y eta $\frac{dy}{dx}$ -aren erlazioa aurkitzeko, hau da, (2) formulak emandako integral orokorra daukan ekuazio difentziala aurkitzeko, (2) eta (3)-tik C ezabatzea beharrezkoa da

2. Adibidea. Bilatu $y = Cx^2$ parabola-sortaren ekuazio diferentziala (247. irudia).



247. IRUDIA

Ekuazioa x -rekiko deribatuz, $\frac{dy}{dx} = 2Cx$ aurkitzen dugu.

Azken horretan $C = \frac{y}{x^2}$ balioa, sortaren ekuazioak emandakoa, ordezkatzuz

sortaren ekuazio diferentziala lortzen dugu: $\frac{dy}{dx} = \frac{2y}{x}$.

Ekuazio diferentzial hori $x \neq 0$ guztietarako betetzen da, hots, Oy ardatzeko punturik ez daukan eremu orotan.

§ 4. Aldagai bananduetako eta banangarrietako ekuazioak

Azter dezagun

$$\frac{dy}{dx} = f_1(x)f_2(y) \quad (1)$$

iturako ekuazio diferentzial bat, non bigarren atala x -ren funtzio baten eta y -ren beste funtzio baten arteko biderkadura den. $f_2(y) \neq 0$ dela suposatuz egin dezagun ondoko aldaketa:

$$\frac{1}{f_2(y)} dy = f_1(x) dx. \quad (1')$$

x -ren y funtzioa ezaguna dela suposatuz, (1') ekuazioa bi diferentzialen berdintza bezala har daiteke, zeinen integral mugagabeak batugai konstantetan desberdintzen diren. Lehenengo atala y -rekiko eta bigarrena x -rekiko integratuz,

$$\int \frac{1}{f_2(y)} dy = \int f_1(x) dx + C$$

lortzen dugu.

y soluzioa, x aldagai independentea eta C hautazko konstantearen arteko erlazioa erdietsi dugu, hau da, (1) ekuazioaren integral orokorra erdietsi dugu.

1. (1') itxurako

$$M(x) dx + N(y) dy = 0 \quad (2)$$

ekuazio diferentziala *aldagai bananduetako ekuazio* deitzen da. Frogatuaren arabera, bere integral orokorra:

$$\int M(x) dx + \int N(y) dy = C$$

da.

1. Adibidea. Izan bedi

$$x dx + y dy = 0$$

aldagai bananduetako ekuazioa. Integratuz

$$\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} = C_1$$

integral orokorra lortzen dugu.

Azken ekuazioaren lehenengo atala negatibo ez denez, gauza bera gertatuko da bigarrenarekin. Ordezka dezagun, $2C_1 = C^2$:

$$x^2 + y^2 = C^2.$$

Berori C erradioa eta zentrua koordinatu-jatorrian dauzkaten zirkunferentzia zentrukideen sortaren ekuazioa da (248. irudia).

2.

$$M_1(x)N_1(y) dx + M_2(x)N_2(y) dy = 0 \quad (3)$$

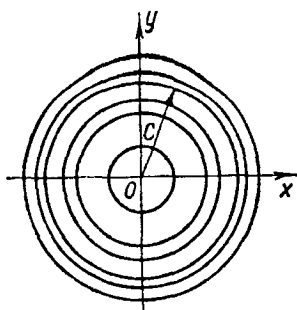
itxurako ekuazio bati *aldagai banangarrietako ekuazio* deritzo. Aldagai bananduetako ekuazio bihur daiteke³⁾, bi atalak $N_1(y)M_2(x)$ adierazpenaz zatituz gero,

$$\frac{M_1(x)N_1(y)}{N_1(y)M_2(x)} dx + \frac{M_2(x)N_2(y)}{N_1(y)M_2(x)} dy = 0,$$

edo

$$\frac{M_1(x)}{M_2(x)} dx + \frac{N_2(y)}{N_1(y)} dy = 0,$$

hau da, (2) itxurako ekuazioa.



248. IRUDIA

2. Adibidea . Izan bedi

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}$$

ekuazioa.

Bana ditzagun aldagaiak:

$$\frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x}.$$

Integratuz,

$$\int \frac{dy}{y} = -\int \frac{dx}{x} + C$$

3) Aldaketa horiek $N_1(y)$ eta $M_2(x)$ anulatzek ez diren eremuan bakarrik egin daitezke.

topatzen dugu, hau da,

$$\ln |y| = -\ln |x| + \ln |C|^{(4)}$$

edo

$$\ln |y| = \ln \left| \frac{C}{x} \right|;$$

eta hortik soluzio orokorra $y = \frac{C}{x}$ lortzen dugu.

3. Adibidea. Izan bedi

$$(1+x)y \, dx + (1-y)x \, dy = 0$$

ekuazioa.

Aldagaiak bananduz,

$$\frac{1+x}{x} \, dx + \frac{1-y}{y} \, dy = 0; \left(\frac{1}{x} + 1 \right) dx + \left(\frac{1}{y} - 1 \right) dy = 0$$

aurkitzen dugu. Integratuz,

$$\ln |x| + x + \ln |y| - y = C \quad \text{edo} \quad \ln |xy| + x - y = C$$

lortzen da; azken erlazioa emandako ekuazioaren integral orokorra da.

4. Adibidea. Radioaren desintegrazio-abiadura, aldiune bakoitzean bere masarekiko zuzenki proportzionala dela aurkitu da. Determinatu, denboraren funtzioan, radioaren masaren aldakuntz legea, baldin $t=0$ zenean radioaren masa m_0 izan bazen.

Desintegrazio-abiadura ondoko erara kalkulatzen da: izan bedi m, t aldiuneko masa eta $m + \Delta m$ $t + \Delta t$ aldiunekoa. Δt denboraz desintegratutako masa Δt da eta

$\frac{\Delta m}{\Delta t}$ arrazoa desintegrazioaren batezbesteko abiadura da. Arrazoi horren limitea $\Delta t \rightarrow 0$

denean, $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta m}{\Delta t} = \frac{dm}{dt}$, t aldiuneko radioaren *desintegrazio-abiadura* da.

4) Geroko transformazioak kontutan hartuz, hautazko konstantea $\ln |C|$ izendatu dugu, hori egin daiteke, $C \neq 0$ denean, $\ln |C|$ -k, $-\infty$ -tik $+\infty$ -rainoko edozein balio har bait dezake.

Hipotesiaren arabera:

$$\frac{dm}{dt} = -km, \quad (4)$$

non k ($k > 0$) proportzionaltasun-koefizientea den. Minus zeinua ipini dugu, denbora pasa ahala radioaren masa gutxitzen delako eta horrexegatik $\frac{dm}{dt} < 0$. (4) ekuazioa aldagai banangarrietako ekuazioa da. Bana ditzagun aldagaiak:

$$\frac{dm}{m} = -k dt.$$

Ekuazioa ebatziz,

$$\ln m = -kt + \ln C$$

lortzen dugu, eta hortik

$$\ln \frac{m}{C} = -kt,$$

$$m = Ce^{-kt}. \quad (5)$$

$t = 0$ aldiuneko radioaren masa m_0 izanik, orduan C -k

$$m_0 = C \cdot e^{-k \cdot 0} = C$$

bete behar du.

(5) ekuazioan C -ren balioa ordezkatzuz, denboraren funtzioan bilatzen genuen radioaren masaren menpekotasuna erdiesten dugu (ikus 249. irudia):

$$m = m_0 e^{-kt}. \quad (6)$$

k koefizientea esperimentalki aurkitzen da ondoko erara: izan bedi α , t_0 denboraz desintegratutako radioaren hasierako masaren portzentaia. Beraz,

$$\left(1 - \frac{\alpha}{100}\right) m_0 = m_0 e^{-k t_0},$$

beteko da; hortik,

$$-kt_0 = \ln \left(1 - \frac{\alpha}{100} \right)$$

edo

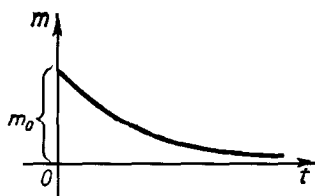
$$k = -\frac{1}{t_0} \ln \left(1 - \frac{\alpha}{100} \right).$$

Horrela, radiorako $k = 0,00044$ dela aurkitu dugu (denboraren neurri-unitatea urtea da).

k -ren balio hori (6) formularen ordezkatzuz

$$m = m_0 e^{-0,00044t}$$

daukagu.



249. IRUDIA

Bila dezagun radioaren semidesintegrazioaren periodoa, hau da, radioaren hasierako masaren erdia desintegratzen den denbora-tartea. Azken formularen $m = \frac{m_0}{2}$ balioaz ordezkatzuz, semidesintegrazioaren T periodoa kalkulatzeko ekuazioa aterako dugu:

$$\frac{m_0}{2} = m_0 e^{-0,00044T},$$

eta, hortik

$$-0,00044T = -\ln 2,$$

hau da;

$$T = \frac{\ln 2}{0,00044} = 1590$$

urte.

Esan dezagun beste problema fisiko eta kimiko askok (4) itxurako ekuazio batera garamatzala.

Oharra:

$$\frac{dy}{dx} = f(x) \quad \text{edo} \quad dy = f(x) dx$$

itxurako aldagai bananduetako ekuazio diferentziala sinpleena da.

Bere integral orokorrak

$$y = \int f(x) dx + C$$

itxura dauka.

Mota horretako ekuazioen soluzioei X. gaia eskaini zaie.

§ 5. Lehen ordenako ekuazio homogenoak

1. Definizioa. $f(x, y)$ funtzioa, x eta y aldagaiekiko n mailako funtzio homogenoa dela esaten da, baldin λ guztietarako

$$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n f(x, y)$$

identitatea betetzen bada.

1. Adibidea. $f(x, y) = \sqrt[3]{x^3 + y^3}$ funtzioa lehen mailako funtzio homogenoa da, zeren

$$f(\lambda x, \lambda y) = \sqrt[3]{(\lambda x)^3 + (\lambda y)^3} = \lambda \sqrt[3]{x^3 + y^3} = \lambda f(x, y)$$

betetzen bait da.

2. Adibidea. $f(x, y) = xy - y^2$ bigarren mailako funtzio homogenoa da,

$$(\lambda x)(\lambda y) - (\lambda y)^2 = \lambda^2 [xy - y^2]$$

delako.

3. Adibidea. $f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{xy}$ zero mailako funtzio homogenoa da,

$$\frac{(\lambda x)^2 - (\lambda y)^2}{(\lambda x)(\lambda y)} = \frac{x^2 - y^2}{xy}, \text{ hau da, } f(\lambda x, \lambda y) = f(x, y) \text{ edo } f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^0 f(x, y)$$

betetzen delako.

2. Definizioa.

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \quad (1)$$

lehen ordenako ekuazioari, x eta y -rekiko *homogeno* deitzen zaio, $f(x, y)$ funtzioa x eta y -rekiko zero mailako funtzio homogenoa bada.

Ekuazio homogeno baten ebazpena. Hipotesiz $f(\lambda x, \lambda y) = f(x, y)$. $\lambda = \frac{1}{x}$ eginez gero,

$$f(x, y) = f\left(1, \frac{y}{x}\right)$$

daukagu, hau da, zero mailako funtzio homogenoa aldagaien zatiduraren menpean dago soilik.

Kasu horretan, emandako ekuazioak

$$\frac{dy}{dx} = f\left(1, \frac{y}{x}\right) \quad (1')$$

itxura hartzen du.

Buru dezagun ordezkapena:

$$u = \frac{y}{x}, \text{ hots, } y = ux.$$

Beraz,

$$\frac{dy}{dx} = u + \frac{du}{dx} x$$

daukagu. Deribatuaren balio hori (1')ean ordezkatzuz

$$u + x \frac{du}{dx} = f(1, u)$$

lortzen dugu, aldagai banangarrietako ekuazioa alegia:

$$x \frac{du}{dx} = f(1, u) - u \quad \text{edo} \quad \frac{du}{f(1, u) - u} = \frac{dx}{x}.$$

Integratuz gero,

$$\int \frac{du}{f(1, u) - u} = \int \frac{dx}{x} + C$$

aurkitzen dugu.

Integratutakoan, $u = \frac{y}{x}$ arrazoiak ordezkatzuz (1') ekuazioaren integrala lortzen dugu.

4. Adibidea. Izan bedi

$$\frac{dy}{dx} = \frac{xy}{x^2 - y^2}.$$

ekuazioa.

Bigarren atalean zero mailako funtzio homogenoa daukagu. Hortaz, ekuazio homogenoa da. Egin dezagun $\frac{y}{x} = u$ ordezkapena; orduan,

$$y = ux; \quad \frac{dy}{dx} = u + x \frac{du}{dx}; \quad u + x \frac{du}{dx} = \frac{u}{1 - u^2}; \quad x \frac{du}{dx} = \frac{u^3}{1 - u^2}.$$

Aldagaiak bananduz,

$$\frac{(1 - u^2) du}{u^3} = \frac{dx}{x}; \quad \left(\frac{1}{u^3} - \frac{1}{u} \right) du = \frac{dx}{x}$$

geratzen da, eta hortik, integratutakoan,

$$-\frac{1}{2u^2} - \ln |u| = \ln |x| + \ln |C| \quad \text{edo} \quad -\frac{1}{2u^2} = \ln |u x C|$$

lortzen dugu.

$u = \frac{y}{x}$ ordezkatzuz gero, hasierako ekuazioaren integral orokorra erdiesten dugu:

$$-\frac{x^2}{2y^2} = \ln |Cy|.$$

Kasu horretan ez dago, y funtzio elementalen bidez, x -ren funtzio esplizitu bezala adierazterik. Erraz adieraz daiteke, ordea, x y -ren funtzioan

$$x = y\sqrt{-2\ln |Cy|}.$$

Oharra.

$$M(x, y) dx + N(x, y) dy = 0$$

itxurako ekuazioa homogenoa izango da soilik $M(x, y)$ eta $N(x, y)$ funtzioak maila bereko funtzio homogenoak direnean. Hori, maila bereko bi funtzio homogenoren arteko zatidura zero mailako funtzio homogenoa izatetik ondorioztatzen da

5. Adibidea.

$$\begin{aligned}(2x + 3y) dx + (x - 2y) dy &= 0, \\ (x^2 + y^2) dx - 2xy dy &= 0\end{aligned}$$

ekuazioak homogenoak dira.

§ 6. Ekuazio homogenogarrak

$$\frac{dy}{dx} = \frac{ax + by + c}{a_1x + b_1y + c_1} \quad (1)$$

itxurako ekuazioak homogenogarrak dira.

$c_1 = c = 0$ badira (1) ekuazioa, argi eta garbi, homogenoa da. Demagun, beraz, c eta c_1 (edo horietako bat) ez direla zero. Egin dezagun

$$x = x_1 + h, \quad y = y_1 + k \quad (2)$$

aldagai-aldaketa. Orduan,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy_1}{dx_1}$$

dugu.

(1) ekuazioan x , y eta $\frac{dy}{dx}$ -aren adierazpenak ordezkatur:

$$\frac{dy_1}{dx_1} = \frac{ax_1 + by_1 + ah + bk + c}{a_1x_1 + b_1y_1 + a_1h + b_1k + c_1} \quad (3)$$

daukagu. Aukera ditzagun h eta k , ondoko ekuazioak egiazta daitezen,

$$\left. \begin{aligned} ah + bk + c &= 0 \\ a_1h + b_1k + c_1 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

hau da, determina ditzagun h eta k (4) ekuazio-sistemaren soluzio bezala. Baldintza horrekin (3) ekuazioa homogenoa da:

$$\frac{dy_1}{dx_1} = \frac{ax_1 + by_1}{a_1x_1 + b_1y_1}.$$

Ekuazio hori ebaztean eta, (2) formulen arabera x eta y aldagiaetara bueltatuz, (1) ekuazioaren soluzioa lortuko dugu.

$$\begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} = 0$$

bada, hots, $ab_1 = a_1b$ bada (4) sistemak ez dauka soluziorik. Baina, kasu horretan,

$$\frac{a_1}{a} = \frac{b_1}{b} = \lambda \quad \text{hau da, } a_1 = \lambda a, \quad b_1 = \lambda b, \text{ eta beraz, (1) ekuazioa,}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(ax + by) + c}{\lambda(ax + by) + c_1} \quad (5)$$

eran idatz daiteke.

$$z = ax + by \quad (6)$$

ordezkapena eginez gero, emandako ekuazioak aldagai banangarrietako ekuazioen itxura har dezake. Izan ere,

$$\frac{dz}{dx} = a + b \frac{dy}{dx},$$

eta hortik

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{b} \frac{dz}{dx} - \frac{a}{b}. \quad (7)$$

(6) eta (7) adierazpenak (5) ekuazioan ordezkatzuz

$$\frac{1}{b} \frac{dz}{dx} - \frac{a}{b} = \frac{z + c}{\lambda z + c_1}$$

lortzen dugu, aldagai banangarrietako ekuazioa alegia.

(1) ekuazioa integrazteko erabilitako prozedura,

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{ax + by + c}{a_1x + b_1y + c_1}\right)$$

ekuazioaren integrazioari ere aplika dakioke, f hautazko funtzio jarraia izanik.

1. Adibidea. Izan bedi

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x + y - 3}{x - y - 1}$$

ekuazioa. Ekuazio homogeno bihurtzeko asmoz,

$$x = x_1 + h; \quad y = y_1 + k$$

ordezkapena egin dezagun. Orduan,

$$\frac{dy_1}{dx_1} = \frac{x_1 + y_1 + h + k - 3}{x_1 - y_1 + h - k - 1}$$

izango dugu.

$$h + k - 3 = 0; \quad h - k - 1 = 0$$

ekuazio-sistema ebatziz

$$h = 2, \quad k = 1$$

aurkitzen ditugu. Ondorioz,

$$\frac{dy_1}{dx_1} = \frac{x_1 + y_1}{x_1 - y_1}$$

ekuazio homogenoa lortzen dugu, zeina

$$\frac{y_1}{x_1} = u$$

aldaketaren bidez ebazten bait dugu; orduan,

$$y_1 = ux_1, \quad \frac{dy_1}{dx_1} = u + x_1 \frac{du}{dx_1}, \quad u + x_1 \frac{du}{dx_1} = \frac{1+u}{1-u},$$

eta aldagai banangarrietako ekuazioa,

$$x_1 \frac{du}{dx_1} = \frac{1+u^2}{1-u}$$

alegia, lortzen dugu. Aldagaiak banatzen baditugu

$$\frac{1-u}{1+u^2} du = \frac{dx_1}{x_1}.$$

Integratuz gero,

$$\arctan u - \frac{1}{2} \ln(1+u^2) = \ln x_1 + \ln C,$$

$$\arctan u = \ln(Cx_1 \sqrt{1+u^2})$$

edo

$$Cx_1 \sqrt{1+u^2} = e^{\arctan u}$$

aurkitzen dugu. Azken berdintzan, $u = \frac{y_1}{x_1}$ ordezkatzuz,

$$C\sqrt{x_1^2 + y_1^2} = e^{\arctan \frac{y_1}{x_1}}$$

erdiesten dugu. Azkenik, x eta y aldagaiak itzuliz,

$$C\sqrt{(x-2)^2 + (y-1)^2} = e^{\arctan \frac{y-1}{x-2}}$$

lortzen dugu.

2. Adibidea.

$$y' = \frac{2x + y - 1}{4x + 2y + 5}$$

ekuazioa ezin da $x = x_1 + h$, $y = y_1 + k$ ordezkapenaren bidez ebatzi, kasu honetan, h

eta k determinatzen dituen ekuazio-sistema indeterminatua da (hemen, $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}$ aldagaien koefizienteen determinantea, zero da).

Ekuazio hori aldagai banangarrietako ekuazio bihurtu daiteke

$$2x + y = z$$

ordezkapenaren bidez.

Orduan, $y' = z' - 2$ eta ekuazioak

$$z' - 2 = \frac{z - 1}{2z + 5}$$

itxura hartzen du, hau da,

$$z' = \frac{5z + 9}{2z + 5}.$$

Ebatziz gero,

$$\frac{2}{5}z + \frac{7}{25} \ln |5z + 9| = x + C$$

lortzen da. $z = 2x + y$ denez, hasierako ekuazioaren behin betiko soluzioa:

$$\frac{2}{5}(2x + y) + \frac{7}{25} \ln |10x + 5y + 9| = x + C$$

edo

$$10y - 5x + 7 \ln |10x + 5y + 9| = C_1$$

eran erdiesten dugu, hau da, x eta y -ren funtzio inplizitu baten itxuran.

§ 7. Lehen ordenako ekuazio linealak

Definizioa. Funtzio ezezagun eta bere deribatuarekiko lineala den ekuazio diferentzialari *lehen ordenako ekuazio lineal* deritzo.

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x) \quad (1)$$

itxura dauka, non $P(x)$ eta $Q(x)$ x -ren funtzio jarraiak (edo konstante) diren.

(1) ekuazio linealaren ebazpena. Bila dezagun ekuazioaren soluzioa x -ren bi funtzioaren arteko biderkadura bezala:

$$y = u(x)v(x). \quad (2)$$

Funtzio horietako bat edonola aukera daiteke, bestea (1) ekuazioaren arabera determinatuko delarik.

(2) berdintzaren bi atalak deribatuz gero

$$\frac{dy}{dx} = u \frac{dv}{dx} + v \frac{du}{dx}$$

topatzen dugu.

$\frac{dy}{dx}$ deribatuaren adierazpena (1) ekuazioan ordezkatzuz,

$$u \frac{dv}{dx} + \frac{du}{dx} v + Puv = Q$$

edo

$$u \left(\frac{dv}{dx} + Pv \right) + v \frac{du}{dx} = Q \quad (3)$$

daukagu. Aukera dezagun v funtzioa

$$\frac{dv}{dx} + Pv = 0 \quad (4)$$

bete dadin.

Ekuazio diferentzial horretan aldagaiak v funtzioarekiko bananduz

$$\frac{dv}{v} = -P dx$$

lortzen dugu. Integratuz gero,

$$-\ln C_1 + \ln v = -\int P dx$$

edo

$$v = C_1 e^{-\int P dx}$$

aterako dugu.

(4) ekuazioaren zero ez den edozein soluzio bat edukitzea nahikoa denez, har dezagun $v(x)$ ondoko funtzioa:

$$v(x) = e^{-\int P dx}, \quad (5)$$

non $\int P dx$ edozein jatorrizko funtzio den. Bistakoa da $v(x) \neq 0$. $v(x)$ -ren bilatutako

balioa (3) ekuazioan ordezkatuz ($\frac{du}{dx} + Pv = 0$ kontutan hartuz),

$$v(x) \frac{du}{dx} = Q(x)$$

lortuko dugu, hau da,

$$\frac{du}{dx} = \frac{Q(x)}{v(x)},$$

eta hortik

$$u = \int \frac{Q(x)}{v(x)} dx + C.$$

Adierazpen hori (2) ekuazioan ordezkatuz,

$$y = v(x) \left[\int \frac{Q(x)}{v(x)} dx + C \right]$$

edo

$$y = v(x) \int \frac{Q(x)}{v(x)} dx + Cv(x) \quad (6)$$

lortzen dugu.

Oharra. Begien bistan dago (6) adierazpena ez dela aldatuko, baldin (5) ekuazioak determinatutako $v(x)$ funtzioaren lekuan, $v_1(x) = \bar{C}v(x)$ beste funtzio bat hartzen badugu. Izan ere, (6)an $v(x)$, $v_1(x)$ -z ordezkatuz,

$$y = \bar{C} v(x) \int \frac{Q(x)}{\bar{C} v(x)} dx + C \bar{C} v(x)$$

lortzen dugu. Lehenengo gaian $\bar{C}$ ezabatzen da, bigarrenetan $C \bar{C}$ biderkadura hautazko konstantea da, C -z izendatuko duguna, eta (6) adierazpenera itzultzen gara berriro.

$$\int \frac{Q(x)}{v(x)} dx = \varphi(x)$$

izendatzen badugu, (6) adierazpenak

$$y = v(x) \varphi(x) + C v(x) \quad (6')$$

itxura hartuko du. Nabaria da (6') integral orokorra dela, C aukera bait daiteke, $x = x_0$ denean $y = y_0$ hastapen-baldintza bete dadin.

C -ren balioa

$$y_0 = v(x_0) \varphi(x_0) + C v(x_0)$$

ekuazioz determina daiteke.

Adibidea. Bilatu

$$\frac{dy}{dx} - \frac{2}{x+1} y = (x+1)^3$$

ekuazioaren soluzioa.

Ebazpena. Dagun $y = uv$. Orduan,

$$\frac{dy}{dx} = u \frac{dv}{dx} + \frac{du}{dx} v.$$

$\frac{dy}{dx}$ adierazpena hasierako ekuazio linealean ordezkatzuz,

$$u \frac{dv}{dx} + \frac{du}{dx} v - \frac{2}{x+1} uv = (x+1)^3,$$

$$u \left(\frac{dv}{dx} - \frac{2}{x+1} v \right) + v \frac{du}{dx} = (x+1)^3 \quad (7)$$

daukagu. v determinatzeko,

$$\frac{dv}{dx} - \frac{2}{x+1} v = 0$$

ekuazioa daukagu, hau da,

$$\frac{dv}{v} = \frac{2dx}{x+1},$$

hortik,

$$\ln v = 2 \ln (x+1),$$

hau da,

$$v = (x+1)^2.$$

v funtzioaren adierazpena (7) ekuazioan sartuz gero u determinatzeko ekuazioa ateratzen dugu:

$$(x+1)^2 \frac{du}{dx} = (x+1)^3$$

edo

$$\frac{du}{dx} = (x+1),$$

eta hortik

$$u = \frac{(x+1)^2}{2} + C.$$

Hortaz, emandako ekuazioaren integral orokorra,

$$y = \frac{(x+1)^4}{2} + C(x+1)^2$$

izango da.

Lortutako familia soluzio orokorra da. (x_0, y_0) , $x_0 \neq -1$ izanik, hastapen-baldintza edozein dela ere, beti aukera daiteke C , dagokion soluzio partikularrak emandako hastapen-baldintza bete dezan. Esate baterako, $x_0=0$ denean $y_0=3$ baldintza betetzen duen soluzio partikularra ondoko eran aurkitzen da:

$$3 = \frac{(0+1)^4}{2} + C(0+1)^2; \quad C = \frac{5}{2}.$$

Beraz, bilatutako soluzio partikularra

$$y = \frac{(x+1)^4}{2} + \frac{5}{2}(x+1)^2$$

da.

(x_0, y_0) hastapen-baldintzan $x_0 = -1$ hartzen bada ezin izango da, ordea, baldintza hori betetzen duen soluzio partikularrik aurkitu. Hori, hala da $P(x) = -\frac{2}{x+1}$ funtzioa $x_0 = -1$ puntuan etena delako, eta ondorioz, soluzioaren existentzi teoremaren baldintzak ez dira betetzen.

§ 8. Bernoulli-ren ekuazioa

Kontsidera dezagun

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)y^n \quad (1)$$

itxurako ekuazioa⁵⁾, non $P(x)$ eta $Q(x)$ x -ren funtzio jarraiak (edo konstanteak) diren eta $n \neq 0, n \neq 1$ (bestela ekuazio lineala da).

Bernoulli-ren ekuazio deitutako ekuazio hori ekuazio lineal bihurtzen da ondoko aldaketaren bidez:

Ekuazioaren gai guztiak y^n -z zatituz gero,

$$y^{-n} \frac{dy}{dx} + P y^{-n+1} = Q \quad (2)$$

lortuko dugu. Buru dezagun

$$z = y^{-n+1}$$

aldaketa, ondorioz

$$\frac{dz}{dx} = (-n+1)y^{-n} \frac{dy}{dx}$$

izango dugu. Adierazpen hori (2) ekuazioan idatziz gero

$$\frac{dz}{dx} + (-n+1)Pz = (-n+1)Q$$

ekuazio lineala lortuko dugu.

Bere integral orokorra kalkulatzean, eta z bere adierazpenez, y^{-n+1} , ordezkatzuz, Bernoulli-ren ekuazioaren integral orokorra aterako dugu.

Adibidea. Bilatu

$$\frac{dy}{dx} + xy = x^3 y^3 \quad (3)$$

ekuazioaren soluzioa.

Ebazpena. Gai guztiak y^3 gaiatz zatituz

5) Ekuazio hori gorputz baten higidurari buruzko probleman azaltzen da, ingurunearen F erresistentzia abiaduraren mende badago, $F = \lambda_1 v + \lambda_2 v^n$. Higiduraren ekuazioa

$$m \frac{dv}{dt} = -\lambda_1 v - \lambda_2 v^n, \text{ edo } \frac{dv}{dt} + \frac{\lambda_1}{m} v = -\frac{\lambda_2}{m} v^n \text{ izango da.}$$

$$y^{-3}y' + xy^{-2} = x^3 \quad (4)$$

daukagu. Ordezka dezagun funtzio berria:

$$z = y^{-2},$$

orduan

$$\frac{dz}{dx} = -2y^{-3} \frac{dy}{dx}$$

izango da.

Balio hori (4) ekuazioan ordezkatuz

$$\frac{dz}{dx} - 2xz = -2x^3 \quad (5)$$

ekuazio lineala lortzen da.

Bila dezagun, orain, integral orokorra:

$$z = uv; \quad \frac{dz}{dx} = u \frac{dv}{dx} + \frac{du}{dx} v.$$

z eta $\frac{dz}{dx}$ -aren adierazpenak (5) ekuazioan ordezkatuz gero,

$$u \frac{dv}{dx} + \frac{du}{dx} v - 2xuv = -2x^3,$$

edo

$$u \left(\frac{dv}{dx} - 2xv \right) + v \frac{du}{dx} = -2x^3$$

lortuko dugu.

Parentesien arteko adierazpena berdin zero egin dezagun:

$$\frac{dv}{dx} - 2xv = 0; \quad \frac{dv}{v} = 2x dx;$$

$$\ln v = x^2; \quad v = e^{x^2}.$$

u determinatzeko

$$e^{x^2} \frac{du}{dx} = -2x^3$$

ekuazioa daukagu.

Aldagaiak bananduz:

$$du = -2e^{-x^2} x^3 dx, \quad u = -2 \int e^{-x^2} x^3 dx + C.$$

Zatika integratuz

$$u = x^2 e^{-x^2} + e^{-x^2} + C,$$

$$z = uv = x^2 + 1 + C e^{-x^2}$$

aurkitzen dugu.

Hortaz, emandako ekuazioaren integral orokorra

$$y^{-2} = x^2 + 1 + C e^{-x^2}, \quad \text{hau da,} \quad y = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1 + C e^{-x^2}}} \quad \text{da.}$$

Oharra. Ekuazio linealen kasuan egin dugunaren antzera, Bernoulli-ren ekuazioaren soluzioa bi funtzioen arteko biderkadura bezala bila daitekeela frogatzerik badago:

$$y = u(x)v(x)$$

non $v(x)$ hautazko funtzio ez nulua den eta $v' + Pv = 0$ ekuazioa betetzen duen.

§ 9. Ekuazio diferentzial totalak

Definizioa.

$$M(x, y) dx + N(x, y) dy = 0 \quad (1)$$

ekuazioa *ekuazio diferentzial total* deitzen da, baldin $M(x, y)$ eta $N(x, y)$ funtzio jarraiak eta deribagarriak badira eta

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} \quad (2)$$

berdintza betetzen badute, $\frac{\partial M}{\partial y}$ eta $\frac{\partial N}{\partial x}$ eremu batean jarraian izanik.

Ekuazio diferentzial totalen integrazioa. Froga dezagun (1) ekuazioaren lehenengo atala diferentzial totala bada (2) baldintza betetzen dela eta, alderantziz, (2) baldintza betez gero, (1) ekuazioaren lehenengo atala $u(x, y)$ funtzio baten diferentzial totala dela, hau da, (1) ekuazioak

$$du(x, y) = 0 \quad (3)$$

itxura dauka, eta beraz, bere integral orokorra $u(x, y) = C$ da.

Demagun lehendabizi, (1) ekuazioaren lehenengo atala $u(x, y)$ funtzio baten diferentzial totala dela, hau da,

$$M(x, y) dx + N(x, y) dy = du = \frac{du}{dx} dx + \frac{du}{dy} dy;$$

orduan,

$$M = \frac{\partial u}{\partial x}; \quad N = \frac{\partial u}{\partial y} \quad (4)$$

daukagu.

Lehenengo erlazioa y -rekiko eta bigarrena x -rekiko deribatuz gero,

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}; \quad \frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$$

izango dugu.

Bigarren ordenako deribatuak jarraiak suposatuz

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

daukagu, hau da, (2) berdintza baldintza beharrezkoa da (1) ekuazioaren lehenengo atala $u(x, y)$ funtzio baten diferentzial totala izan dadin. Froga dezagun baldintza hori nahikoa dela, hau da, (2) berdintza betetzen bada (1) ekuazioaren lehenengo atala $u(x, y)$ funtzio baten diferentzial totala dela.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = M(x, y)$$

erlaziotik,

$$u = \int_{x_0}^x M(t, y) dt + \varphi(y)$$

ateratzen dugu, non x_0 soluzioaren existentzi eremuko hautazko puntu baten abzisa den.

x -rekiko integratuz, suposa dezagun y konstante. Horrexegatik integrazio konstantea y -ren menpean egon daiteke. Aukera dezagun $\varphi(y)$ funtzioa (4) berdintzetatik bigarrena bete dadin. Horretarako⁶⁾ azken berdintzaren bi atalak y -rekiko deriba ditzagun eta emaitza $N(x, y)$ -rekin berdin dezagun:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \int_{x_0}^x \frac{\partial M}{\partial y} dt + \varphi'(y) = N(x, y).$$

Baina, $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ denez,

$$\int_{x_0}^x \frac{\partial N}{\partial t} dt + \varphi'(y) = N,$$

6) $\int_{x_0}^x M(t, y) dt$ integrala y -ren menpe dago, integral horren y -rekiko deribatua bilatzeko

$\frac{\partial}{\partial y} \int_{x_0}^x M(t, y) dt = \int_{x_0}^x \frac{\partial M}{\partial y} dt$ integrakizuna y -rekiko deribatu behar da.

Aurrekoa, integral mugatu baten parametroarekiko deribatuari buruzko Leibniz-en teorematik ondorioztatzen da. (ikus XI. gaiko § 10).

hau da,

$$N(t, y) \Big|_{x_0}^x + \varphi'(y) = N(x, y)$$

idatz daiteke, edo

$$N(x, y) - N(x_0, y) + \varphi'(y) = N(x, y).$$

Hortaz,

$$\varphi'(y) = N(x_0, y)$$

edo

$$\varphi(y) = \int_{y_0}^y N(x_0, t) dt + C_1.$$

Horrela, $u(x, y)$ funtzioak

$$u = \int_{x_0}^x M(t, y) dt + \int_{y_0}^y N(x_0, t) dt + C_1$$

itxura hartuko du.

Hemen, $P(x_0, y_0)$ puntu bat da, zeinaren ingurune batean (1) ekuazio diferentzialaren soluzioa dagoen.

Adierazpen hori C hautazko konstante batekin berdinduz, (1) ekuazioaren integral orokorra lortuko dugu:

$$\int_{x_0}^x M(t, y) dt + \int_{y_0}^y N(x_0, t) dt = C. \quad (5)$$

Adibidea. Izan bedi

$$\frac{2x}{y^3} dx + \frac{y^2 - 3x^2}{y^4} dy = 0$$

ekuazioa.

Jakin dezagun ekuazio hori diferentzial totala den. Egin dezagun,

$$M = \frac{2x}{y^3}; \quad N = \frac{y^2 - 3x^2}{y^4},$$

orduan,

$$\frac{\partial M}{\partial y} = -\frac{6x}{y^4}; \quad \frac{\partial N}{\partial x} = -\frac{6x}{y^4}.$$

$y \neq 0$ denean (2) baldintza betetzen da. Hortaz, emandako ekuazioaren lehenengo atala $u(x, y)$ funtzio ezezagun baten diferentzial totala da. Bila dezagun funtzio hori.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{2x}{y^3} \text{ denez,}$$

$$u = \int \frac{2x}{y^3} dx + \varphi(y) = \frac{x^2}{y^3} + \varphi(y)$$

daukagu, non $\varphi(y)$ determinatu beharreko y -ren funtzioa den.

Erlazio hori y -rekiko deribatuz eta

$$\frac{\partial u}{\partial y} = N = \frac{y^2 - 3x^2}{y^4}$$

kontutan hartuz

$$-\frac{3x^2}{y^4} + \varphi'(y) = \frac{y^2 - 3x^2}{y^4}$$

aurkitzen dugu. Horregatik,

$$\varphi'(y) = \frac{1}{y^2}, \quad \varphi(y) = -\frac{1}{y} + C_1,$$

$$u(x, y) = \frac{x^2}{y^3} - \frac{1}{y} + C_1$$

betetzen dira.

Horrela, hasierako ekuazioaren integral orokorra

$$\frac{x^2}{y^3} - \frac{1}{y} = C$$

dugu.

§ 10. Integrazio-faktorea

Jo dezagun

$$M(x, y) dx + N(x, y) dy = 0 \quad (1)$$

ekuazioaren lehenengo atala ez dela diferentzial total bat. Batzutan $\mu(x, y)$ funtzio bat aukera daiteke, non ekuazioaren gai guztiak eta funtzio hori biderkatuz gero lehenengo atala diferentzial total bihurtzen bait da. Horrela lorturiko ekuazioaren soluzio orokorra hasierako ekuazioaren soluzio orokorrarekin bat dator; $\mu(x, y)$ funtzioak (1) ekuazioaren *integrazio-faktorea* izena du.

μ integrazio-faktore bat bilatzeko ondorengo bideari jarraituko gatzazkio: emandako ekuazioaren bi atalak, oraingoz, ezezaguna den μ integrazio-faktoreaz biderkatzen ditugu:

$$\mu M dx + \mu N dy = 0.$$

Azkeneko ekuazioa diferentzial total izan dadin nahikoa eta beharrezkoa da

$$\frac{\partial(\mu M)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu N)}{\partial x}$$

berdintza betetzea, hau da,

$$\mu \frac{\partial M}{\partial y} + M \frac{\partial \mu}{\partial y} = \mu \frac{\partial N}{\partial x} + N \frac{\partial \mu}{\partial x}$$

edo

$$M \frac{\partial \mu}{\partial y} - N \frac{\partial \mu}{\partial x} = \mu \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right).$$

Azken ekuazioaren bi atalak μ faktoreaz zatitzean

$$M \frac{\partial \ln \mu}{\partial y} - N \frac{\partial \ln \mu}{\partial x} = \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \quad (2)$$

lortzen dugu.

Bistakoa da azken ekuazioa betetzen duen $\mu(x,y)$ funtzio oro (1) ekuazioaren integrazio-faktorea dela.

(2) ekuazioa deribatu partzialetako ekuazioa da, x eta y bi aldagaien menpeko μ funtzio ezezagunarekin. Froga daiteke zenbait baldintzatan ekuazioak infinitu soluzio daukala eta, beraz, (1) ekuazioak integrazio-faktorea onartzen duela. Hala ere, kasu orokorrean (2) ekuazioaren $\mu(x,y)$ funtzioaren bilatzea (1) ekuazioa integratzea baino zailagoa izaten da. Kasu batzutan soilik lortzen da funtzioa determinatzea.

Demagun, adibidez, (1) ekuazioak y -ren menpean, soilik, dagoen integrazio-faktorea onartzen duela. Orduan,

$$\frac{\partial \ln \mu}{\partial x} = 0$$

eta μ bilatzeko ekuazio diferentzial arrunta lortzen dugu,

$$\frac{\partial \ln \mu}{\partial y} = \frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{M}$$

alegia, zeinetatik (koadratura baten bidez) $\ln \mu$ eta ondorioz μ bera, determinatzen bait

da. Nabaria da, hori $\frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{M}$ x -ren menpean ez dagoenean, soilik, egin daitekeela.

Era berean, $\frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{N}$ adierazpena y -ren menpe ez badago, x -ren menpe soilik

baizik, x -ren menpeko integrazio-faktorea bilatzea erraza izango da.

Adibidea. Bilatu

$$(y + xy^2) dx - x dy = 0$$

ekuazioaren soluzioa.

Ebazpena. Hemen dauzkagu:

$$M = y + xy^2; \quad N = -x;$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 1 + 2xy; \quad \frac{\partial N}{\partial x} = -1; \quad \frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}.$$

Hortaz, ekuazioaren lehenengo atala ez da diferentzial totala. Azter dezagun ekuazio horrek y -ren mepeko integrazio-faktorerik onartzen duen. Dakusagun

$$\frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{M} = \frac{-1 - 1 - 2xy}{y + xy^2} = -\frac{2}{y}$$

dela, beraz ekuazioak faktorea onartzen du. Aurki dezagun, orain, integrazio-faktore hori:

$$\frac{\partial \ln \mu}{\partial y} = -\frac{2}{y},$$

eta hortik

$$\ln \mu = -2 \ln y,$$

hau da,

$$\mu = \frac{1}{y^2}.$$

Emandako ekuazioaren gai guztiak lortutako μ integrazio-faktoreaz biderkatutakoan,

$$\left(\frac{1}{y} + x \right) dx - \frac{x}{y^2} dy = 0$$

ekuazio diferentzial totala erdiesten dugu

$$\left(\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} = -\frac{1}{y^2} \right).$$

Ebatziz gero, bere integral orokorra,

$$\frac{x}{y} + \frac{x^2}{2} + C = 0$$

edo

$$y = -\frac{2x}{x^2 + 2C}$$

aurkitzen dugu.

§ 11. Kurba-familia baten inguratzailea

Izan bedi

$$\Phi(x, y, C) = 0 \quad (1)$$

itxurako ekuazioa, non x eta y puntu baten koordenatu kartesiarrak eta C balio desberdinak har ditzakeen parametroa diren.

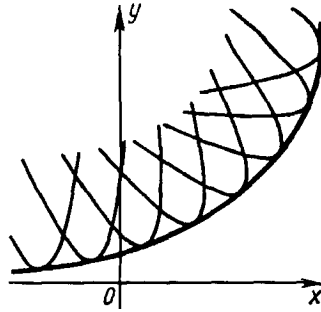
C parametroaren balio bakoitzerako (1) ekuazioak Oxy planoan kurba bat determinatzen du. C -ri ahal diren balio guztiak emanez gero, parametro baten menpeko kurba-sorta bat lortuko dugu. Horrela, (1) ekuazioa aipatutako sortaren ekuazioa da.

Definizioa. L lerroa kurba-sorta baten *inguratzaile* deitzen da bere puntu bakoitzean sortaren kurba batekiko ukitzaile bada, edota sortaren kurba desberdinak L lerroa puntu desberdinetan ukitzen badute (250. irudia).

1. Adibidea. Kontsidera dezagun

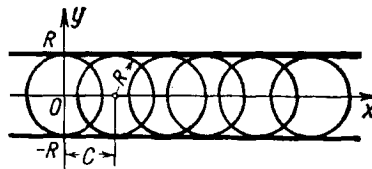
$$(x - C)^2 + y^2 = R^2$$

kurba-sorta, non R konstante bat eta C parametro bat diren.



250. IRUDIA

R erradiodun eta zentrua Ox ardatzean duten zirkunferentzien familia baten ekuazioa da. Nabaria da familia horrek $y = R$, $y = -R$ zuzenak inguratzaileztat onartzen dituela (251. irudia).



251. IRUDIA

Kurba-sorta baten inguratzailearen ekuazioa. Izan bedi

$$\Phi(x, y, C) = 0 \quad (1)$$

C parametroaren menpeko kurben sorta.

Demagun sorta horrek $y = \varphi(x)$ itxurako ekuazioa duen inguratzaile bat daukala, $\varphi(x)$ x -ren funtzio jarraia eta deribagarria izanik. Har dezagun $M(x, y)$ inguratzailearen puntu bat. Puntu hori (1) sortaren kurba baten puntua izango da. Kurba horri C parametroaren balio finko bat dagokio, (1) ekuazioak emandakoa: $C = C(x, y)$ alegia. Hortaz inguratzailearen puntu guztietarako

$$\Phi(x, y, C(x, y)) = 0 \quad (2)$$

berdintza betetzen da.

Demagun $C(x, y)$ funtzio deribagarria dela, aztertutako x eta y -ren balioen inongo tartetan konstante ez delarik. Inguratzailearen (2) ekuaziotik abiatuz bila dezagun

inguratzailearen $M(x, y)$ puntuko ukitzailearen koefiziente angeluarra. (2) ekuazioa x -rekiko deribatuko dugu, y x -ren funtziotzat hartuz:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial C} \frac{\partial C}{\partial x} + \left[\frac{\partial \Phi}{\partial y} + \frac{\partial \Phi}{\partial C} \frac{\partial C}{\partial y} \right] y' = 0$$

edo

$$\Phi'_x + \Phi'_y y' + \Phi'_C \left[\frac{\partial C}{\partial x} + \frac{\partial C}{\partial y} y' \right] = 0. \quad (3)$$

Beraz, sortaren kurbaren $M(x, y)$ puntuko ukitzailearen koefiziente angeluarra

$$\Phi'_x + \Phi'_y y' = 0 \quad (4)$$

(emandako kurban C konstante da) ekuaziotik ondorioztatzen da.

Jo dezagun $\Phi'_y \neq 0$ dela; bestela x funtziotzat eta y argumentutzat hartuko genituzke. Inguratzailearen k koefiziente angeluarra sortaren kurbarenarekin bat datorrenez, (3) eta (4) ekuazioetatik,

$$\Phi'_C \left[\frac{\partial C}{\partial x} + \frac{\partial C}{\partial y} y' \right] = 0$$

ateratzen dugu.

Baina, inguratzailean $C(x, y)$ konstante ez denez

$$\frac{\partial C}{\partial x} + \frac{\partial C}{\partial y} y' \neq 0$$

izango dugu, hortaz bere puntuetarako

$$\Phi'_C(x, y, C) = 0 \quad (5)$$

berdintza baliozkoa da.

Horrela, inguratzailea determinatzeko, C ,

$$\left. \begin{aligned} \Phi'_x(x, y, C) &= 0 \\ \Phi'_C(x, y, C) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

ekuazioen bidez ezabatu behar da. Ekuazio horietatik C ezabatuz $y = \varphi(x)$ lortzen badugu, non $\varphi(x)$ funtzio deribagarria den eta C konstante ez bada kurba horretan, $y = \varphi(x)$ inguratzailearen ekuazioa izango da.

1. Oharra. Baldin $y = \varphi(x)$ bezalako funtzio bat (1) sortaren *puntu singularren* leku geometrikoaren ekuazioa bada, hau da, $\Phi'_x = 0$ eta $\Phi'_y = 0$ betetzen dituzten puntuenarena, puntu horien koordenatuek ere (6) ekuazioak beteko dituzte.

Izan ere, puntu singularren koordenatuak (1) ekuazioan agertzen den C parametroaren funtzioan adieraz daitezke:

$$x = \lambda(C), \quad y = \mu(C). \quad (7)$$

Adierazpen horiek (1) ekuazioan ordezkatzuz gero, C -rekiko identitate bat lortuko dugu:

$$\Phi[\lambda(C), \mu(C), C] = 0.$$

Berdintza hori C -rekiko deribatuz

$$\Phi'_x \frac{d\lambda}{dC} + \Phi'_y \frac{d\mu}{dC} + \Phi'_C = 0$$

erdiesten dugu; puntu singularretarako $\Phi'_x = 0$ eta $\Phi'_y = 0$ betetzen direnez, puntu horietarako $\Phi'_C = 0$ ere beteko da.

Hortaz, puntu singularren koordenatuek (6) ekuazioak betetzen dituztela frogatu dugu.

Horrela, (6) ekuazioek inguratzailea definitzen dute, edo (1) sortaren puntu singularren leku geometrikoa, edo bi gauza horien konbinazioa. Hortaz, (6) ekuazioak betetzen dituen kurba bat lortzean, kurba hori inguratzaile edo puntu singularren leku geometrikoa den jakiteko asmoz azterketa bat burutzea nahita nahiezkoa da.

2. Adibidea. Bilatu

$$(x - C)^2 + y^2 - R^2 = 0$$

C parametroaren menpeko zirkunferentzien sortaren inguratzailea.

Ebazpena. Familiaren ekuazioa C -rekiko deribatuz

$$2(x - C) = 0$$

daukagu. Bi ekuazioen artean C ezabatuz

$$y^2 - R^2 = 0 \quad \text{edo} \quad y = \pm R$$

ekuazioa ateratzen dugu.

Kontsiderazio geometrikoen bidez, lortutako zuzen-bikotea inguratzailea dela ondorioztatzen da (eta ez puntu singularren leku geometrikoa, sorta osatzen duten zirkunferentziek ez bait dute puntu singularrik).

3. Adibidea. Bilatu

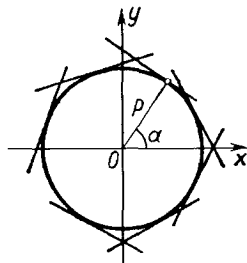
$$x \cos \alpha + y \sin \alpha - p = 0, \quad (\text{a})$$

α parametro izanik, zuzen-sortaren inguratzailea.

Ebazpena. Sortaren ekuazioa α -rekiko deribatuz

$$-x \sin \alpha + y \cos \alpha = 0 \quad (\text{b})$$

izango dugu.



252. IRUDIA

(a) eta (b) ekuazioetatik α parametroa ezabatzeko, biderka ditzagun lehenengo ekuazioaren atalak $\cos \alpha$ balioaz eta bigarrenaren atalak $\sin \alpha$ balioaz. Gero, lehenengo ekuazioari bigarrena ken diezaiogun. Horrela,

$$x = p \cos \alpha$$

erdiesten dugu.

Adierazpen hori (b) ekuazioan idatziz gero

$$y = p \sin \alpha$$

aurkitzen dugu.

Azken bi ekuazioen atalen karratuak kalkulatu eta atalez atal batuz gero

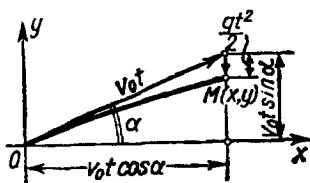
$$x^2 + y^2 = p^2$$

lortzen dugu.

Zuzen-sortak inguratzailatzat onartzen duen zirkunferentziaren ekuazioa da (eta ez puntu singularren leku geometrikoa, zuzenek ez bait dute horrelako punturik (252. irudia).

4. Adibidea. Bilatu, v_0 abiaduraz eta horizontearekiko kanoiaren inklinazio-angelu desberdinez, artilleria-pieza batek jaurtikitako jaurtikigaien ibilbideen inguratzaila. Demagun jaurtikigaiak koordenatu-jatorritik jaurtikitzen direla eta ibilbideak Oxy planoan daudela (airearen erresistentzia mesprezatuz).

Ebazpena. Lehendabizi kalkula dezagun Ox ardatzaren norabide positiboz eta α angeluz jaurtikitutako jaurtikigai baten ibilbidearen ekuazioa. Jaurtikigaiaren ibilbidea bi higidurek batera eragiten dute: bata jaurtiketaren norabidezko higidura uniforme, v_0 abiaduraz, eta bestea grabitatearen indarrak eragindako erorketa-higidura.



253. IRUDIA

Horrexegatik, t aldiune bakoitzean, M jaurtikigaiaren posizioa (253. irudia)

$$x = v_0 t \cos \alpha$$

eta

$$y = v_0 t \sin \alpha - \frac{gt^2}{2}$$

ekuazioek definitzen dute. Horiek ibilbidearen ekuazio parametrikokoak dira (parametroa t da).

t ezabatuz, ibilbidearen ekuazioa,

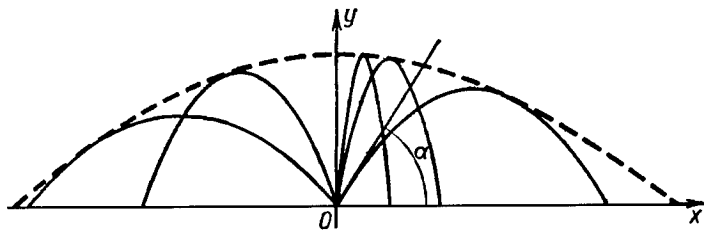
$$y = x \tan \alpha - \frac{gx^2}{2v_0^2 \cos^2 \alpha}$$

lortzen dugu, eta $\tan \alpha = k$, $\frac{g}{2v_0^2} = a$ idazkerak sartuz gero

$$y = kx - ax^2(1 + k^2) \quad (8)$$

geratzen da.

Ekuazio horrek koordinatu-jatorritik pasatzen diren eta adarrak beherantz zuzenduak dituzten ardatz bertikaldun parabolak definitzen ditu. k -ren balio desberdinetarako ibilbide desberdinak lortzen dira. (8) ekuazioa da, beraz, α angelu desberdinetarako jaurtikigaiaren ibilbideak diren parabolaren sorta baten ekuazioa, hasierako abiadura v_0 izanik (254. irudia).



254. IRUDIA

Bila dezagun parabola-sorta horren inguratzailea.

(8) ekuazioaren bi atalak k -rekiko deribatuz

$$x - 2akx^2 = 0 \quad (9)$$

daukagu. (8) eta (9) ekuazioetatik k ezabatuz

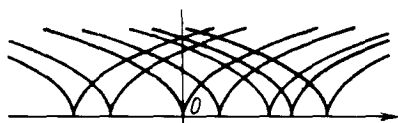
$$y = \frac{1}{4a} - ax^2$$

lortzen dugu.

Erpina $\left(0, \frac{1}{4a}\right)$ puntuan duen parabolaren ekuazioa da, ardatza Oy -rekin bat datorrelarik. Ekuazio hori ez da puntu singularren leku geometrikoa ((8) parbolek ez bait dute puntu singularrik). Horrela,

$$y = \frac{1}{4a} - ax^2$$

parabola ibilbideen sortaren ingurutzaila da. Segurtasun-parabola izena du, bere mugetatik kanpoko puntuetara ezin bait da v_0 hasierako abiaduraz jaurtikitutako jaurtikigai bat ere iritsi.



Puntu singularren leku geometrikoa

255. IRUDIA

5. Adibidea. Bilatu

$$y^3 - (x - C)^2 = 0$$

parabola erdikubikoen sortaren ingurutzaila.

Ebazpena. Deriba dezagun emandako ekuazioa C -rekiko:

$$2(x - C) = 0.$$

C parametroa bi ekuazioen artean ezabatuz

$$y = 0$$

lortzen dugu.

Ox ardatza puntu singularren leku geometrikoa da, lehen mailako atzerapen-puntuena (255. irudia). Bila ditzagun

$$y^3 - (x - C)^2 = 0$$

kurbaren puntu singularrak, C -ren balioa finkatuz. x eta y -rekiko deribatuz:

$$F'_x = -2(x - C) = 0$$

$$F'_y = 3y^2 = 0$$

aurkitzen dugu.

Aurreko hiru ekuazioak batera ebatziz gero puntu singular baten koordenatuak aurkitzen ditugu, $x = C$, $y = 0$ alegia. Hortaz, emandako sortaren kurba bakoitzak puntu singular bat dauka Ox ardatzean. C parametroa jarraiki aldatzen bada puntu singularrek Ox ardatz osoa korrituko dute.

6. Adibidea. Kalkulatu

$$(y - C)^2 - \frac{2}{3}(x - C)^3 = 0 \quad (10)$$

sortaren inguratzailea eta puntu singularren leku geometrikoa.

Ebazpena. (10) ekuazioaren atalak C -rekiko deribatuz,

$$-2(y - C) + \frac{2}{3}3(x - C)^2 = 0$$

edo

$$y - C - (x - C)^2 = 0 \quad (11)$$

lortuko dugu.

(10) eta (11) ekuazioekin C parametroa ezaba dezagun.

$$y - C = (x - C)^2$$

adierazpena (10) ekuazioan ordezkatuz:

$$(x - C)^4 - \frac{2}{3}(x - C)^3 = 0$$

edo

$$(x - C)^3 \left[(x - C) - \frac{2}{3} \right] = 0$$

lortzen dugu, eta hortik C -ren bi balio posible lortzen ditugu, zeinei problemaren bi soluzio bait dagokie.

Lehenengo soluzioa:

$$C = x;$$

beraz, (11) ekuaziotik

$$y - x - (x - x)^2 = 0$$

edo

$$y = x$$

erdiesten dugu.

Bigarren soluzioa:

$$C = x - \frac{2}{3};$$

horregatik, (11) ekuaziotik

$$y - x + \frac{2}{3} - \left[x - x + \frac{2}{3} \right]^2 = 0$$

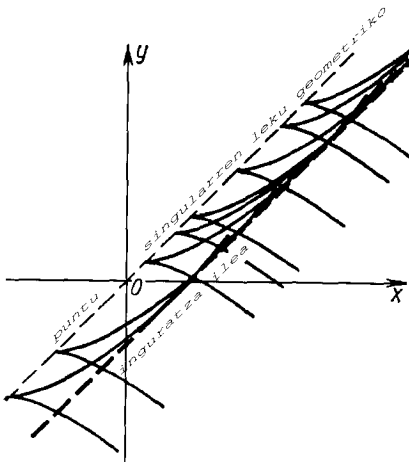
edo

$$y = x - \frac{2}{9}$$

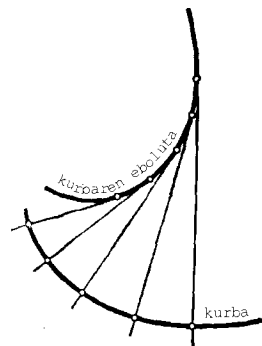
erdiesten dugu.

Bi zuzen lortu ditugu, $y = x$ eta $y = x - \frac{2}{9}$ alegia, lehenengoa puntu singularren leku geometrikoa da; bigarrena, aldiz, inguratzaila da (256. irudia).

2. Oharra. VI. gaiko § 7. atalean kurba baten normalak ebolutaren ukitzaileak direla frogatu dugu. Ondorioz, emandako kurba baten normalen sorta aldi berean bere ebolutaren ukitzaileen sorta da. Horrela, kurba baten eboluta kurba horren normal-sortaren inguratzaila da (257. irudia).



256. IRUDIA



257. IRUDIA

Ohar horrek eboluta bilatzeko beste metodo bat ematen digu: ebolutaren ekuazioa lortzeko emandako kurbaren normal-sorta bilatu behar da eta gero sorta horren inguratzailea aurkitu.

§ 12. Lehen ordenako ekuazio diferentzialaren soluzio singularrak

Demagun

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0 \quad (1)$$

ekuazio diferentzialak integral orokortzat

$$\Phi(x, y, C) = 0 \quad (2)$$

duela. Demagun ere (2) ekuazioari dagokion kurba integralen sortak inguratzaile bat daukala. Froga dezagun inguratzaile hori (1) ekuazio diferentzialaren kurba integrala ere badela.

Izan ere, inguratzailea puntu bakoitzean sortaren kurba baten ukitzailea da, hau da, inguratzaileak badu puntu horretan ukitzaile amankomun bat kurbarekin. Hortaz, puntu bakoitzean inguratzaileak eta kurbak x, y, y' magnitudeen balio berdinak dauzkate.

Baina, sortaren kurbarako, x, y, y' magnitudeek (1) ekuazioa betetzen dute. Beraz, abzisak, ordenatuak eta inguratzailearen puntu bakoitzeko koefiziente angeluarrak ekuazio bera betetzen dute, ondorioz inguratzailea kurba integrala da eta bere ekuazioa emandako ekuazio diferentzialaren soluzio bat da. Baina, inguratzailea, orokorrean, sortaren kurba ez denez, bere ekuazioa ezin da (2) integral orokorretik ondorioztatu, C -ren balio partikularra edozein izanik ere. Integral orokorraren bidez, C -ren balio finko baterako, lortzen ez den ekuazio diferentzialaren soluzioak, grafikotzat soluzio orokorra osaten duten kurba integralen sortaren inguratzailea duenak, ekuazio diferentzialaren *soluzio singular* izena du.

Jo dezagun

$$\Phi(x, y, C) = 0$$

integral orokorra ezaguna dela; C parametroa ekuazio horren eta $\Phi'_C(x, y, C) = 0$ ekuazioaren artean ezabatuz $\psi(x, y) = 0$ ekuazioa lortzen dugu. Funtzio horrek ekuazio diferentziala betetzen badu (eta ez badago (2) sortan), *integral singularra* izango da.

Ohar gaitezen soluzio singularra adierazten duen kurbaren puntu orotatik bi kurba integral, gutxienez, igarotzen direla, hau da, soluzioaren bakartasuna ez da betetzen soluzio singularren puntu bakoitzean.

Adibidea. Bilatu

$$y^2(1 + y'^2) = R^2$$

ekuazioaren soluzio singularra.

Ebazpena. Bere integral orokorra bilatuko dugu. Ebatz dezagun ekuazioa y' -arekiko:

$$\frac{dy}{dx} = \pm \frac{\sqrt{R^2 - y^2}}{y}.$$

Aldagaiak bananduz

$$\frac{y dy}{\pm \sqrt{R^2 - y^2}} = dx$$

lortzen dugu.

Hortik, integratuz, integral orokorra ateratzen dugu:

$$(x - C)^2 + y^2 = R^2.$$

Erraz ikusten da kurba integralen sorta zentruak abzisa-ardatzean eta R erradioa dituzten zirkunferentzia delarik. Kurba-sorta horren inguratzailea $y = \pm R$ zuzenak ematen digute.

$y = \pm R$ funtzioek ekuazio diferentziala betetzen dute, beraz, integral singularrak direla ondoriozta dezakegu.

§ 13. Clairaut-en ekuazioa

Kontsidera dezagun

$$y = x \frac{dy}{dx} + \psi\left(\frac{dy}{dx}\right) \quad (1)$$

Clairaut-en ekuazio izeneko ekuazioa. Hori parametro laguntzaile bat sartuz integratzen

da. Egin dezagun $\frac{dy}{dx} = p$, orduan (1) ekuazioak

$$y = xp + \psi(p) \quad (1')$$

itxura hartuko du.

Deriba ditzagun ekuazioaren bi atalak x -rekiko, $p = \frac{dy}{dx}$ x -ren funtzioa dela kontutan hartuz,

$$p = x \frac{dp}{dx} + p + \psi'(p) \frac{dp}{dx}$$

edo

$$[x + \psi'(p)] \frac{dp}{dx} = 0$$

lortzen dugu.

Faktore bakoitza zerorekin berdinduz

$$\frac{dp}{dx} = 0 \quad (2)$$

eta

$$x + \psi'(p) = 0 \quad (3)$$

lortzen ditugu

1. (2) berdintzaren integrazioak $p = C$ (C =ktea.) ematen du. p -ren balio hori (1') ekuazioan ordezkatzuz bere integral orokorra ateratzen dugu, hau da,

$$y = xC + \psi(C); \quad (4)$$

ikuspegi geometrikotik zuzen-sorta adierazten du.

2. (3) ekuaziotik p x -ren funtzio bezala bakantzen dugu, eta (1') ekuazioan ordezkatzuz

$$y = xp(x) + \psi[p(x)] \quad (1'')$$

funtzioa erdiesten dugu, zeina (1) ekuazioaren soluzio bat bait da, erraz froga litekeenez.

Izan ere, (3) berdintzaren arabera

$$\frac{dy}{dx} = p + [x + \psi'(p)] \frac{dp}{dx} = p$$

daukagu.

Horrexegatik (1'') funtzioa (1) ekuazioan sartuz gero

$$xp + \psi(p) = xp + \psi(p)$$

identitatea lortzen dugu.

(1'') soluzioa ezin da lortu (4) integral orokorretik C -ren balio baterako. Beraz soluzio singularra da eta p parametroa,

$$\left. \begin{array}{l} y = xp + \psi(p) \\ x + \psi'(p) = 0 \end{array} \right\}$$

ekuazioetatik ezabatuz lortzen da, edo, gauza bera dena, C ,

$$y = xC + \psi(C),$$

$$x + \psi'_C(C) = 0$$

ekuazioetatik ezabatuz.

Hortaz, Clairaut-en ekuazioaren soluzio singularra, (4) integral orokorrak definitutako zuzen-sortaren inguratzailea da.

Adibidea. Bilatu

$$y = x \frac{dy}{dx} + \frac{a \frac{dy}{dx}}{\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}}$$

ekuazioaren integral orokorra eta singularra.

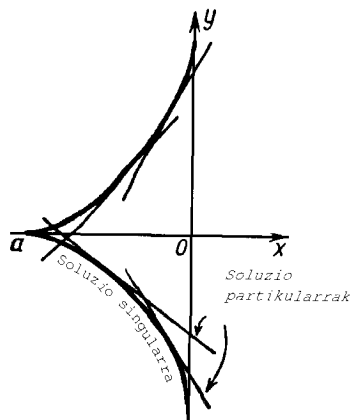
Ebazpena. $\frac{dy}{dx}$ adierazpena C balioaz ordezkatzuz

$$y = xC + \frac{aC}{\sqrt{1+C^2}}$$

integral orokorra lortzen dugu.

Soluzio singularra lortzeko azken ekuazioa C -rekiko deribatuko dugu:

$$x + \frac{a}{(1+C^2)^{3/2}} = 0.$$



258. IRUDIA

Soluzio singularra (inguratzailearen ekuazioa) era parametrikokoan lortzen da, (C parametroa delarik):

$$\begin{cases} x = -\frac{a}{(1+C^2)^{3/2}}, \\ y = \frac{aC^3}{(1+C^2)^{3/2}}. \end{cases}$$

C parametroa ezabatuz x eta y -ren arteko menpekotasun zuzena lor dezakegu.

Ekuazioen bi atalen $\frac{2}{3}$ berretzaileko berredura kalkulatu eta lortutako ekuazioak atalez atal batuz

$$x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$$

itxurako soluzio singularra lortzen dugu.

Astroide bat da. Hala ere, astroide osoa ez da zuzen-sortaren inguratzailea (eta, beraz, soluzio singularra), bere ezkerreko zatia baizik (inguratzailearen ekuazio parametrikotatik $x \leq 0$ dela ondorioztatzen bait da) (258. irudia).

§ 14. Lagrange-ren ekuazioa

$$y = x\varphi(y') + \psi(y') \quad (1)$$

itxurako ekuazioak, non φ eta ψ $\frac{dy}{dx}$ -aren funtzio ezagunak bait dira, *Lagrange-ren ekuazio* izena du. Ekuazio hori x eta y -rekiko lineala da. Aurreko atalean aztertutako Clairaut-en ekuazioa, Lagrange-ren ekuazioaren kasu partikularra da, $\varphi(y') \equiv y'$ denean alegia. Clairaut-en ekuazioaren kasuan bezala, Lagrange-ren ekuazioa p parametro laguntzaile bat sortuz integratzen da.

Dagigun

$$y' = p,$$

orduan jatorrizko ekuazioak

$$y = x\varphi(p) + \psi(p) \quad (1')$$

itxura hartzen du.

x -rekiko deribatuz

$$p = \varphi(p) + [x\varphi'(p) + \psi'(p)] \frac{dp}{dx}$$

edo

$$p - \varphi(p) = [x\varphi'(p) + \psi'(p)] \frac{dp}{dx} \quad (1'')$$

lortzen dugu.

Ekuazio horretatik berehala lor daiteke zenbait soluzio, hala nola:

$$P_0 - \varphi(P_0) = 0$$

baldintza betetzen duen $p = p_0$ balio konstante orotarako ekuazioa identitate bihurtzen da.

Izan ere, p konstante izanik, deribatua $\frac{dp}{dx}$ eta (1'') ekuazioaren atalak ezabatzen

dira. $p = p_0$ edo $\frac{dy}{dx} = p_0$ balio bakoitzari dagokion soluzioa x -ren funtzio lineala da

($\frac{dy}{dx}$ deribatua funtzio linealetarako soilik da konstante). Funtzio hori bilatzeko (1')

ekuazioan $p = p_0$ balioa ordezkatzeari nahikoa da:

$$y = x\varphi(p_0) + \psi(p_0).$$

Soluzio hori, hautazko kostantearen balio baterako ez bada soluzio orokorretik ateratzen, soluzio singularra izango da.

Aurki dezagun, orain, soluzio orokorra. Horretarako idatz dezagun (1'') ekuazioa,

$$\frac{dx}{dp} - x \frac{\varphi'(p)}{p - \varphi(p)} = \frac{\psi'(p)}{p - \varphi(p)}$$

eran, x , p -ren funtziotzat hartuz. Lortutako ekuazioa p -ren x funtzioarekiko ekuazio diferentzial lineala da.

Ebatziz,

$$x = \omega(p, C) \tag{2}$$

aurkitzen dugu.

p parametroa (1') eta (2) ekuazioetatik ezabatuz, (1) ekuazioaren

$$\Phi(x, y, C) = 0$$

iturako integral orokorra lortuko dugu.

Adibidea. Izan bedi

$$y = xy'^2 + y'^2 \tag{I}$$

ekuazioa.

$y' = p$ eginez gero

$$y = xp^2 + p^2 \quad (I')$$

izango dugu.

x -rekiko deribatuz

$$p = p^2 + [2xp + 2p] \frac{dp}{dx} \quad (I'')$$

lortuko dugu.

Bila ditzagun soluzio singularrak. $p = p^2$ denez, $p_0 = 0$ eta $p_1 = 1$ direnean, soluziotzat

$$y = x \cdot 0^2 + 0^2, \text{ hau da } y = 0,$$

eta

$$y = x + 1$$

funtzio linealak izango ditugu (ikus (I')).

Integral orokorra aurkitu eta gero, ikus dezagun funtzio horiek soluzio partikular edo singularrak diren. Integral orokorra bilatzeko (I'') ekuazioa,

$$\frac{dx}{dp} - x \frac{2p}{p - p^2} = \frac{2}{1 - p}$$

eran idatziko dugu, x , p aldagai independentearen funtzio bezala kontsideratuz. Ekuazio lineala (x -rekiko) integratuz,

$$x = -1 + \frac{C^2}{(p - 1)^2} \quad (II)$$

aurkitzen dugu.

p , (I') eta (II) ekuazioetatik ezabatuz

$$y = (C + \sqrt{x + 1})^2$$

integral orokorra erdiesten dugu.

Jatorrizko ekuazioaren integral singularra $y=0$ izango da, ez bait da soluzio orokorretik C -ren balio baterako ateratzen.

Hala eta guztiz ere, $y=x+1$ funtzioa ez da soluzio singularra, partikularra baizik, eta soluzio orokorretik $C=0$ baliorako ateratzen da.

§ 15. Ibilbide ortogonalak eta isogonalak

Kontsidera dezagun

$$\Phi(x, y, C) = 0 \quad (1)$$

kurba-sorta bat.

Emandako sortaren kurba guztiak, angelu konstantez ebakitzen dituzten lerroei *ibilbide isogonal* deritze. Angelu hori zuzena bada lerroei ibilbide *ortogonal* deitzen zaie.

Ibilbide ortogonalak. Aurki ditzagun ibilbide ortogonalen ekuazioa. Idatz dezagun emandako kurba-sortaren ekuazio diferentziala,

$$\Phi(x, y, C) = 0$$

eta

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \frac{dy}{dx} = 0$$

ekuazioetatik C ezabatuz.

Izan bedi

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0 \quad (1')$$

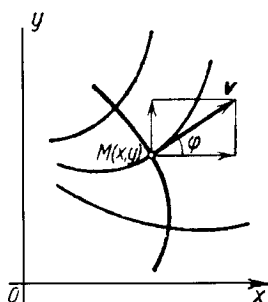
ekuazio diferentziala.

Hor, $\frac{dy}{dx}$ sortaren kurba baten $M(x, y)$ puntuko ukitzailearen koefiziente angeluarra da. $M(x, y)$ puntutik igarotzen den ibilbide ortogonala dagokion kurbarekiko elkartut denez, kurba horren ukitzailearen $\frac{dy_T}{dx}$ koefiziente angeluarra $\frac{dy}{dx}$ -ari loturik egongo da

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\frac{dy_T}{dx}} \quad (2)$$

dezagun, gainera, abiadura-potentzial bat dagoela, hau da, $u(x, y)$ funtzio bat non $v(x, y)$ bektorearen koordinatu-ardatzen gaineko projekzioak, $v_x(x, y)$ eta $v_y(x, y)$, bere x eta y -rekiko deribatu partzialak bait dira:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = v_x; \quad \frac{\partial u}{\partial x} = v_y. \quad (4)$$



260. IRUDIA

$$u(x, y) = C \quad (5)$$

sortaren kurbei *potentzikide* deritze (hau da potentzial berdineko lerroak).

Puntu bakoitzean $v(x, y)$ bektorearen norabide bereko ukitzaileak dituzten kurbek *korrante-lerro* izena dute eta puntu higikorren ibilbideak adierazten dituzte.

Froga dezagun korrante-lerroak kurba potentzikideen sortaren ibilbide ortogonalak direla (260. irudia).

Izan bedi φ v abiadura-bektoreak Ox ardatzarekin osatzen duen angelua. (4) ekuazioen arabera,

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} = |v| \cos \varphi; \quad \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} = |v| \sin \varphi$$

dauzkagu; hortik, korrante-lerroaren ukitzailearen koefiziente angeluarra kalkulatzeko dugu:

$$\tan \varphi = \frac{\frac{\partial u(x, y)}{\partial y}}{\frac{\partial u(x, y)}{\partial x}}. \quad (6)$$

(5) erlazioa x -rekiko deribatuz, lerro potentzikidearen ukitzailaren koefiziente angeluarra lortzen dugu:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{dy}{dx} = 0,$$

eta hortik,

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial u}{\partial x}}{\frac{\partial u}{\partial y}}. \quad (7)$$

Hortaz, lerro potentzikidearen ukitzailaren koefiziente angeluarra, korrante-lerroaren ukitzailaren koefiziente angeluarraren alderantzizkoa, magnitudez zein zeinuz, da. Beraz, lerro potentzikideak eta korrante-lerroak elkarren ortogonalak dira.

Eremu elektriko edo magnetikoa bada, lerro potentzikideen sortaren ibilbide ortogonalak eremuko indar-lerroak dira.

1. Adibidea. Bilatu

$$y = Cx^2$$

parabola-sortaren ibilbide ortogonalak.

Ebazpena. Idatz dezagun sortaren ekuazio diferentziala:

$$y' = 2Cx.$$

C ezabatuz,

$$\frac{y'}{y} = \frac{2}{x}$$

lortzen dugu.

y' , $\frac{-1}{y'}$ balioaz ordezkatzuz ibilbide ortogonalen sortaren ekuazio diferentziala,

$$-\frac{1}{yy'} = \frac{2}{x},$$

hau da,

$$y \, dy = -\frac{x \, dx}{2}$$

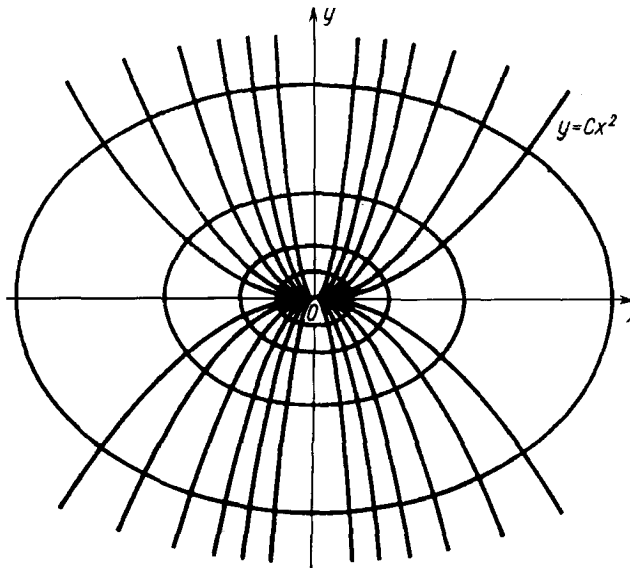
erdiesten dugu.

Bere integral orokorra

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = C^2$$

da.

Hortaz, parabola-sortaren ibilbide ortogonalek $a = 2C$ eta $b = C\sqrt{2}$ ardatzerdietako elipseen sorta osatzen dute (261. irudia).



261. IRUDIA

Ibilbide isogonalak. Jo dezagun ibilbideek sorta baten kurbak α angeluz ebakitzen dituztela, $\tan \alpha = k$ izanik.

Sortaren kurbaren ukitzailearen $\frac{dy}{dx} = \tan \varphi$ koefiziente angeluarra eta ibilbide

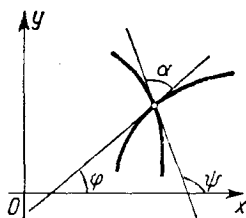
isogonalaren ukitzailearen $\frac{dy_T}{dx} = \tan \psi$ koefiziente angeluarra,

$$\tan \varphi = \tan(\psi - \alpha) = \frac{\tan \psi - \tan \alpha}{1 + \tan \alpha \tan \psi}$$

erlazioaren bidez daude lorturik, hau da:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy_T}{dx} - k}{k \frac{dy_T}{dx} + 1}. \quad (2')$$

Adierazpen hori (1') ekuazioan ordezkatzuz eta T azpiindizea kenduz, ibilbide isogonalen ekuazio diferentziala lortzen dugu.



262. IRUDIA

2. Adibidea. Bilatu

$$y = Cx \quad (8)$$

zuzen-sortaren lerroak α angelupean, $\tan \alpha = k$ izanik, ebakitzen dituzten ibilbide isogonalak.

Ebazpena. Idatz dezagun zuzen-sortaren ekuazio diferentziala.

(8) ekuazioa x -rekiko deribatuz,

$$\frac{dy}{dx} = C$$

aurkitzen dugu.

Bestalde, ekuazio bertatik

$$C = \frac{y}{x}$$

ondorioztatzen da.

Hortaz, emandako sortaren ekuazio diferentzialak

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$$

itxura dauka. (2') erlazioa erabiliz, ibilbide isogonalen ekuazio diferentziala erdiesten dugu:

$$\frac{\frac{dy_T}{dx} - k}{k \frac{dy_T}{dx} + 1} = \frac{y}{x}.$$

Hortik, T azpiindizea kenduz,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{k + \frac{y}{x}}{1 - k \frac{y}{x}}$$

ateratzen dugu.

Ekuazio homogeno hori integratuz integral orokorra lortzen dugu:

$$\ln \sqrt{x^2 + y^2} = \frac{1}{k} \arctan \frac{y}{x} + \ln C, \quad (9)$$

zeinak ibilbide isogonalen sorta determinatzen bait du. Familia horren kurbak zeintzuk diren argitzeko, alda dezagun koordenatu polarretara:

$$\frac{y}{x} = \tan \varphi; \quad \sqrt{x^2 + y^2} = \rho.$$

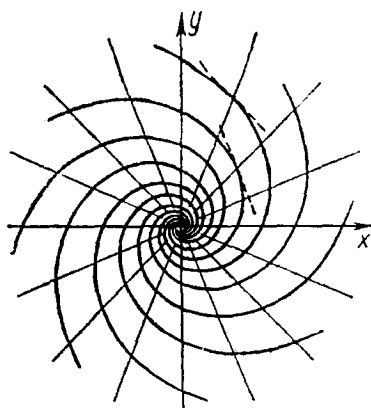
Adierazpen horiek sartzen baditugu (9) berdintzan,

$$\ln \rho = \frac{1}{k} \varphi + \ln C$$

edo

$$\rho = C e^{\frac{\varphi}{k}}$$

lortzen dugu.



263. IRUDIA

Hortaz, ibilbide isogonalen sorta kiribil logaritmikoz osaturik dago (263. irudia).

§ 16. Bat baino ordena handiagoko ekuazio diferentzialak (orokortasunak)

Gorago aipatu dugun bezala (ikus § 2.), n . ordenako ekuazio diferentzial bat

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0 \quad (1)$$

eran idatz daiteke sinbolikoki, edo n . deribatuarekiko ebatz badaiteke,

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}). \quad (1')$$

Oraingoan, ordena handieneko deribatuarekiko ebatz daitezkeen ordena handiagoko ekuazioak soilik aztertuko ditugu. Ekuazio horietarako soluzioaren existentzi eta bakartasun-teorema betetzen da, lehen ordenako ekuazioen soluzioei buruzkoaren antzekoa dena.

Teorema.

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$$

ekuazioan, $f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$ funtzioa eta $y, y', \dots, y^{(n-1)}$ argumentuekiko bere

deribatu partzialak jarraiak badira $x = x_0, y = y_0, y' = y'_0, \dots, y^{(n-1)} = y_0^{(n-1)}$ balioak barne dituen eremu batean, ekuazioaren $y = y(x)$ soluzio bakar bat existitzen da, zeinak

$$\begin{aligned} y_{x=x_0} &= y_0 \\ y'_{x=x_0} &= y'_0 \\ &\dots \dots \dots \\ y^{(n-1)}_{x=x_0} &= y_0^{(n-1)}, \end{aligned} \quad (2)$$

baldintzak betetzen bait ditu.

Baldintza horiei *hastapen-baldintza* deitzen zaie. Lan honetan ez da teorema hori frogatuko.

Bigarren ordenako ekuazio bat, $y'' = f(x, y, y')$, kontsideratzen badugu, $x = x_0$ baliorako soluzioaren hastapen-baldintzak

$$y = y_0, \quad y' = y'_0$$

izango dira, non x_0, y_0, y'_0 zenbaki ezagunak diren. Baldintza horien esanahi geometrikoa ondokoa da: planoko emandako (x_0, y_0) puntu batetik, y'_0 maldako ukitzailea duen kurba bakar bat igarotzen da. Hortik ateratzen da y'_0 -ri balio desberdinak emanez gero, x_0 eta y_0 konstante mantenduz, emandako puntutik inklinazio-angelu desberdinez igarotzen den infinitu kurba integral lortzen dugula.

Ezar dezagun, orain, n . ordenako ekuazio baten soluzio orokorraren nozioa.

Definizioa. n . ordenako ekuazio diferentzial baten *soluzio orokor* deituko diogu, $C_1, C_2, \dots, C_n$ n hautazko konstanteren menpeko

$$y = \varphi(x, C_1, C_2, \dots, C_n)$$

bezalako funtzio bati baldin eta

- $C_1, C_2, \dots, C_n$ konstanteen edozein baliotarako ekuazioa betetzen badu eta
-

$$\begin{aligned} y_{x=x_0} &= y_0 \\ y'_{x=x_0} &= y'_0 \\ &\dots \dots \dots \\ y^{(n-1)}_{x=x_0} &= y_0^{(n-1)} \end{aligned}$$

hastapen-baldintzetarako konstanteak aukeratzetik badago $y = \varphi(x, C_1, C_2, \dots, C_n)$ funtzioak baldintza horiek bete ditzan $(x_0, y_0, y_0', \dots, y_0^{(n-1)})$ hasierako balioak soluzioaren existentzi eremuaren baitan daudela suposatuz).

$\psi(x, C_1, C_2, \dots, C_n) = 0$ itxurako erlazioak, soluzio orokorra era implizituan definitzen duenak, ekuazio diferentzialaren *integral orokor* izena du.

$C_1, C_2, \dots, C_n$ konstanteei balio konketuak emanez soluzio orokorretik lortutako funtzio oro *soluzio partikular* deitzen da. Soluzio partikular baten grafikoari ekuazio diferentzialaren *kurba integral* deritzogu.

n . ordenako ekuazio diferentzial ebaztea (integratzea)

1) bere soluzio orokorra (hastapen-baldintzarik ez badira eman) bilatzean edo

2) emandako hastapen-baldintzak (existitzen badira) betetzen dituen ekuazioaren soluzio partikularra kalkulatzetan datza.

Hurrengo ataletan n . ordenako ekuazio desberdinen ebazpen-metodoak ikusiko ditugu.

§ 17. $y^{(n)} = f(x)$ itxurako ekuazioa

$$y^{(n)} = f(x) \quad (1)$$

itxurako ekuazioa n . ordenako ekuaziorik sinpleena da.

Bila dezagun bere integral orokorra.

Ekuazioaren bi atalak x -rekiko integratuz, eta $y^{(n)} = (y^{(n-1)})'$ dela kontutan hartuz,

$$y^{(n-1)} = \int_{x_0}^x f(t) dt + C_1$$

lortzen dugu, non x_0 x -ren hautazko balioa eta C_1 integrazio-konstantea bait dira.

Berriz integratuz gero,

$$y^{(n-2)} = \int_{x_0}^x \left(\int_{x_0}^u f(t) dt \right) du + C_1(x - x_0) + C_2$$

izango dugu. Prozesu horri jarraituz (n aldiz integratu eta gero) integral orokorraren adierazpena lortuko dugu:

$$y = \int_{x_0}^x \dots \int_{x_0}^z f(t) dt \dots du + \frac{C_1 (x - x_0)^{n-1}}{(n-1)!} + C_2 \frac{(x - x_0)^{n-2}}{(n-2)!} + \dots + C_n.$$

$$y_{x=x_0} = y_0; \quad y'_{x=x_0} = y'_0; \dots; \quad y^{(n-1)}_{x=x_0} = y^{(n-1)}_0$$

hastapen-baldintzak betetzen dituen soluzio partikularra bilatzeko

$$C_n = y_0, \quad C_{n-1} = y'_0, \dots, \quad C_1 = y_0^{n-1}$$

egitea nahikoa da.

1. Adibidea. Bilatu

$$y'' = \sin(kx)$$

ekuazioaren integral orokorra eta

$$y_{x=0} = 0, \quad y'_{x=0} = 1$$

hastapen-baldintzak betetzen dituen soluzio partikularra.

Ebazpena:

$$y' = \int_0^x \sin kt \, dt + C_1 = -\frac{\cos kx - 1}{k} + C_1,$$

$$y = -\int_0^x \left(\frac{\cos kt - 1}{k} \right) dt + \int_0^x C_1 \, dt + C_2$$

edo

$$y = -\frac{\sin kx}{k^2} + \frac{x}{k} + C_1 x + C_2.$$

Hori da integral orokorra. Emandako baldintzak betetzen dituen soluzio partikularra bilatzeko C_1 eta C_2 -ri dagozkien balioak determinatzea nahikoa da.

$y_{x=0} = 0$ baldintzatik $C_2 = 0$ aurkitzen dugu.

$y'_{x=0} = 1$ baldintzatik $C_1 = 1$ aurkitzen dugu.

Horrela, bilatzen dugun soluzio partikularrak

$$y = -\frac{\sin kx}{k^2} + x\left(\frac{1}{k} + 1\right)$$

itxura dauka.

Horrelako ekuazio diferentzialak aurkitzen dira, esate baterako, habeen flexio-teorian.

2. Adibidea. Azter dezagun kanpotiko indarrek, jarraian sakabanatuak (pisua, zama) zein bilduak, eragindako flexioaren menpeko habe prismatiko elastiko bat. Ezar ditzagun Ox ardatza horizontala, habe ez-itxuragabetuaren ardatzaren luzeran, eta Oy ardatza behearanzko bertikalean (264. irudia).

Habeari aplikatzen zaion indar orok (adibidez, zama, eustarren erreakzioa) habearen edozein zeharkako sekzioetikiko momentu bat dauka; momentu hori, emandako sekzio eta indarra aplikatzen den puntaren arteko distantzia eta indarraren arteko biderkadura da. x abzisako sekzioaren alde berean aplikatutako indar guztien momentuen $M(x)$ baturari sekzio horrekiko habearen flexio-momentu deitzen zaio. "Materialen erresistentzia"

kurtsuan habe baten flexio-momentua $\frac{EJ}{R}$ dela frogatzen da, non E materialaren menpean dagoen elastizitate-modulua bait da; J sekzioaren grabitate-zentrutik igarotzen den ardatz horizontalarekiko, habearen zeharkako sekzioaren gainazalaren inerti momentua bait da; R habe makotuaren ardatzaren kurbadur erradioa, eta

$$R = \frac{(1 + y'^2)^{3/2}}{y''}$$

formularen bidez adierazten dena, bait da (VI. gaiko § 6.). Horrela, habe makotuaren ardatzaren ekuazio diferentziala

$$\frac{y''}{(1 + y'^2)^{3/2}} = \frac{M(x)}{EJ} \quad (2)$$

da. Deformazioak txikiak eta habe makotuaren ardatzaren ukitzaileen eta Ox ardatzaren arteko angeluak nahiko txikiak direla onartzen badugu y'^2 magnitudea, y' -aren karratua, mespreza dezakegu eta

$$R = \frac{1}{y''}$$

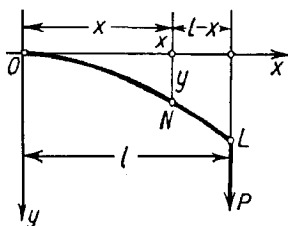
kontsideratu.

Habe makotuaren ekuazio diferentzialak, beraz,

$$y'' = \frac{M(x)}{EJ} \quad (2')$$

itxura hartuko du, (1) itxurako ekuazioarena alegia.

3. Adibidea. Habe batek O muturra horman landaturik dauka eta, l distantziara dagoen L mutur askean, P indar bertikal bildu baten eragina jasaten du (264. irudia). Mespreza dezagun habearen pisua.



264. IRUDIA

Kontsidera dezagun $N(x)$ puntuko sekzioa. N sekzioarekiko flexio-momentua

$$M(x) = (l - x)P$$

izango da.

(2') ekuazio diferentzialak

$$y'' = \frac{P}{EJ} (l - x)$$

itxura hartuko du.

Hastapen-baldintzak hauek dira: $x=0$ denean, y flexioa zeroren berdina da eta habe makotuaren ardatzaren ukitzailea Ox ardatzarekin bat dator, hau da,

$$y_{x=0} = 0, \quad y'_{x=0} = 0.$$

Ekuazioa integratuz:

$$y' = \frac{P}{EJ} \int_0^x (l-t) dt = \frac{P}{EJ} \left(lx - \frac{x^2}{2} \right);$$

$$y = \frac{P}{2EJ} \left(lx^2 - \frac{x^3}{3} \right) \quad (3)$$

ateratzen dugu.

(3) formulatik, kasu partikular bezala, habearen L muturreko h flexioa lortzen da:

$$h = y_{x=l} = \frac{Pl^3}{3EJ}.$$

§ 18. Lehen ordenako ekuazio bihurtzen den bigarren ordenako ekuazio diferentzialen zenbait mota

I.

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = f\left(x, \frac{dy}{dx}\right) \quad (1)$$

itxurako ekuazioa, y funtzio ezezaguna esplizituki ez duena.

Ebazpena. Izenda dezagun $p = \frac{dy}{dx}$ deribatua, hau da, dagigun

$$\frac{dy}{dx} = p.$$

Orduan

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{dp}{dx}.$$

Deribatuen adierazpen horiek (1) ekuazioan sartuz gero lehen ordenako ekuazio bat lortzen dugu,

$$\frac{dp}{dx} = f(x, p)$$

alegia, non p x aldagaiaren funtzio ezezaguna bait da. Ekuazio hori integratzean bere soluzio orokorra aurkitzen dugu:

$$p = p(x, C_1)$$

eta, gero, $\frac{dy}{dx} = p$ erlaziotik (1) ekuazioaren integral orokorra,

$$y = \int p(x, C_1) dx + C_2,$$

ondorioztatzen dugu.

1. Adibidea. Kontsidera dezagun katenari baten ekuazio diferentziala (ikus § 1.),

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{a} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}.$$

$$\frac{dy}{dx} = p$$

eta

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dp}{dx},$$

egiten baditugu x -ren p funtzio laguntzailearekiko, lehen ordenako ekuazio diferentziala erdiesten dugu:

$$\frac{dp}{dx} = \frac{1}{a} \sqrt{1 + p^2},$$

hain zuzen.

Aldagaiak bananduz gero:

$$\frac{dp}{\sqrt{1 + p^2}} = \frac{dx}{a}$$

izango dugu, eta hortik:

$$\ln \left(p + \sqrt{1 + p^2} \right) = \frac{x}{a} + C_1,$$

$$p = \frac{1}{2} \left(e^{\frac{x}{a} + C_1} - e^{-\left(\frac{x}{a} + C_1\right)} \right).$$

Baina, $p = \frac{dy}{dx}$ denez, azken erlazio hori y funtzio ezezagunarekiko ekuazio diferentziala da. Integratuz katenariaren ekuazioa ateratzen dugu (ikus § 1.):

$$y = \frac{a}{2} \left(e^{\frac{x}{a} + C_1} + e^{-\left(\frac{x}{a} + C_1\right)} \right) + C_2.$$

Aurki dezagun,

$$\begin{aligned} y_{x=0} &= a, \\ y'_{x=0} &= 0 \end{aligned}$$

hastapen-baldintzak betetzen dituen soluzio partikularra. Lehenengo baldintzak $C_2 = 0$ eta bigarrenak $C_1 = 0$ ematen dute. Azkenik,

$$y = \frac{a}{2} \left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}} \right)$$

lortzen dugu.

1. Oharra. Era berean integra daiteke

$$y^{(n)} = f(x, y^{(n-1)})$$

ekuazioa.

$y^{(n-1)} = p$ eginez, p determinatzeko lehen ordenako ekuazio bat eskuratzen dugu:

$$\frac{dp}{dx} = f(x, p).$$

p , x -ren funtzioan lortuz gero, $y^{(n-1)} = p$ erlaziotik y ateratzen da (ikus § 17.).

II.

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = f\left(y, \frac{dy}{dx}\right) \quad (2)$$

itxurako ekuazioa, x aldagai independentea esplizituki ez duena. Ebazteko egin dezagun

$$\frac{dy}{dx} = p \quad (3)$$

berriro, baina orain p y -ren funtziotzat (eta ez x -rena, lehenago bezala) har dezagun. Orduan,

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy} \frac{dy}{dx} = \frac{dp}{dy} p.$$

(2) ekuazioan, $\frac{dy}{dx}$ eta $\frac{d^2 y}{dx^2}$ adierazpenak ordezkatzuz, p funtzio laguntzailearekiko lehen ordenako ekuazio bat lortzen dugu:

$$p \frac{dp}{dy} = f(y, p). \quad (4)$$

Integratuz gero, p aurkituko dugu y eta C_1 hautazko konstante baten funtzioan,

$$p = p(y, C_1).$$

Balio hori (3) ekuazioan sartuz x -ren y funtzioarekiko lehen ordenako ekuazio diferentzial bat erdiesten dugu:

$$\frac{dy}{dx} = p(y, C_1).$$

Aldagaiak bananduz:

$$\frac{dy}{p(y, C_1)} = dx$$

izango dugu.

Ekuazio hori integratuz gero,

$$\Phi(x, y, C_1, C_2) = 0$$

ekuazioaren integral orokorra erdiesten dugu.

2. Adibidea. Bilatu

$$3y'' = y^{-\frac{5}{3}}$$

ekuazioaren integrala.

Ebazpena. Dagigun, $p = \frac{dy}{dx}$, p y -ren funtziotzat hartuz. Orduan, $y'' = p \frac{dp}{dy}$, eta beraz, p funtzio laguntzailearekiko lehen ordenako

$$3p \frac{dp}{dy} = y^{-\frac{5}{3}}$$

ekuazioa lortzen dugu.

Ekuazio hori integratuz,

$$p^2 = C_1 - y^{-\frac{2}{3}} \quad \text{edo} \quad p = \pm \sqrt{C_1 - y^{-\frac{2}{3}}}$$

ateratzen dugu.

Baina, $p = \frac{dy}{dx}$; ondorioz, y determinatzeko,

$$\pm \frac{dy}{\sqrt{C_1 - y^{-\frac{2}{3}}}} = dx \quad \text{edo} \quad \frac{y^{1/3} dy}{\pm \sqrt{C_1 y^{2/3} - 1}} = dx$$

ekuazioa daukagu, hortik,

$$x + C_2 = \pm \int \frac{y^{1/3} dy}{\pm \sqrt{C_1 y^{2/3} - 1}}.$$

Azken integrala kalkulatzeko egin dezagun

$$C_1 y^{2/3} - 1 = t^2$$

ordezkapena. Orduan,

$$y^{1/3} = (t^2 + 1)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{C_1^{1/2}};$$

$$dy = 3t(t^2 + 1)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{C_1^{3/2}} dt.$$

Hortaz,

$$\int \frac{y^{1/3} dy}{\sqrt{C_1 y^{2/3} - 1}} = \frac{1}{C_1^2} \int \frac{3t(t^2 + 1)}{t} dt = \frac{3}{C_1^2} \left(\frac{t^3}{3} + t \right) = \frac{1}{C_1^2} \sqrt{C_1 y^{2/3} - 1} (C_1 y^{2/3} + 2).$$

Azkenik,

$$x + C_2 = \pm \frac{1}{C_1^2} \sqrt{C_1 y^{2/3} - 1} (C_1 y^{2/3} + 2)$$

daukagu.

3. Adibidea. Jo dezagun puntu bat higitzen dela, Ox ardatzean zehar puntuaren posizioaren menpe soilik dagoen indar batek eraginda. Higiduraren ekuazio diferentziala

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = F(x)$$

izango da.

Izan bedi $x = x_0$, $\frac{dx}{dt} = v_0$, $t = 0$ denean.

Ekuazioaren bi atalak $\frac{dx}{dt} dt$ gaiaz biderkatzean eta x_0 eta x limiteen artean integratzean,

$$\frac{1}{2} m \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 - \frac{1}{2} m v_0^2 = \int_{x_0}^x F(t) dt$$

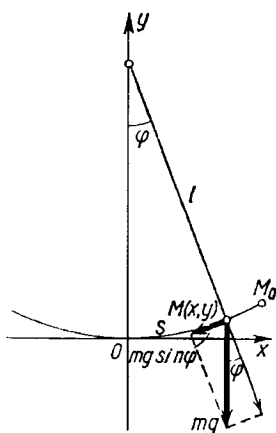
edo

$$\frac{1}{2} m \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \left[- \int_{x_0}^x F(t) dt \right] = \frac{1}{2} m v_0^2 = \text{ktea.}$$

lortzen dugu.

Azken ekuazioaren lehenengo atalak energia zinetikoa adierazten du eta bigarrenak, ordea, puntu higikorraren energia potentziala. Lortutako ekuaziotik energia zinetikoa eta potentzialaren arteko batura higidura osoan konstante mantentzen dela ondorioztatzen da.

Pendulu matematikoaren problema. Demagun m masako puntu material bat, grabitate-indarrak eragina, plano bertikal batean dagoen L zirkunferentzia batean zehar mugitzen dela. Kalkula dezagun puntuaren higiduraren ekuazioa, erresistentzi indarrak (marruskadura, airearen erresistentzia e.a.) mesprezatuz.



265. IRUDIA

Har dezagun koordenatu-jatorritzat zirkunferentziako punturik behearena, Ox ardatza zirkunferentziaren ukitzailearekin bat datorrelarik (265. irudia).

Izan bitez l zirkunferentziaren erradioa eta s O jatorritik masa dagoen M puntu aldakorrerainoko arkuaren luzera; aldi berean har dezagun aipatu arkua, dagokion zeinuarekin ($s > 0$, M, O jatorriaren eskuinaldean badago; $s < 0$, M, O -ren ezkerrean badago).

Konsideratutako problema t denbora eta s -ren arteko erlazioa ezartzean datza.

Deskonposa dezagun mg grabitate-indarra bi osagaitan: ukitze-osagaia eta osagai normala hain zuzen ere. Lehenengoak, $-mg \sin \varphi$, higidura sortzen du, bigarrena aldiz, m masaren higidura bitartean deskribatutako kurbaren erreakzioaz ezabatzen da.

Horrela, higiduraren ekuazioak,

$$m \frac{d^2 s}{dt^2} = -mg \sin \varphi$$

itxura hartzen du. Zirkunferentzian φ angelua $\frac{s}{l}$ denez gero,

$$\frac{d^2 s}{dt^2} = -g \sin \frac{s}{l},$$

ekuazioa lortzen dugu.

II motako ekuazio diferentziala da (t aldagai independentea ez bait dauka esplizituki).

Dagokion eran integratuz gero,

$$\frac{ds}{dt} = p, \quad \frac{d^2 s}{dt^2} = \frac{dp}{ds} p$$

izango dugu. Hortaz,

$$p \frac{dp}{ds} = -g \sin \frac{s}{l},$$

edo

$$p dp = -g \sin \frac{s}{l} ds,$$

eta hortik,

$$p^2 = 2gl \cos \frac{s}{l} + C_1.$$

Izenda dezagun s_0 M puntuak deskribaturiko arkuaren luzerarik handiena. $s = s_0$ denean, puntuaren abiadura nulua da:

$$\left. \frac{ds}{dt} \right|_{s=s_0} = p \left|_{s=s_0} = 0,$$

Horrek uzten digu C_1 kalkulatzeko:

$$0 = 2gl \cos \frac{s_0}{l} + C_1,$$

nondik

$$C_1 = -2gl \cos \frac{s_0}{l}$$

ateratzen bait dugu. Beraz,

$$p^2 = \left(\frac{ds}{dt} \right)^2 = 2gl \left(\cos \frac{s}{l} - \cos \frac{s_0}{l} \right)$$

edo, azken adierazpenari kosinuen arteko kenduraren formula trigonometrikoa aplikatuz:

$$\left(\frac{ds}{dt} \right)^2 = 4gl \sin \frac{s+s_0}{2l} \sin \frac{s_0-s}{2l}, \quad (5)$$

edota⁷⁾,

$$\frac{ds}{dt} = 2\sqrt{gl} \sqrt{\sin \frac{s+s_0}{2l} \sin \frac{s_0-s}{2l}}. \quad (6)$$

Hori aldagai banangarrietako ekuazioa da. Bananduz gero

$$\frac{ds}{\sqrt{\sin \frac{s+s_0}{2l} \sin \frac{s_0-s}{2l}}} = 2\sqrt{gl} dt \quad (7)$$

ateratzen dugu.

7) Erroaren aurretik plus zeinua hartzen dugu. Problemaren amaieran ematen den oharretik ondorioztatzen da ez dagoela minus zeinuari dagokion kasua aztertu beharrik.

Demagun, oraingoz, $s \neq s_0$; orduan zatikiaren izendatzailea ez da zero. $t = 0$ denean $s = 0$ suposatzen badugu, (7) berdintzatik,

$$\int_0^s \frac{du}{\sqrt{\sin \frac{u+s_0}{2l} \sin \frac{s_0-u}{2l}}} = 2\sqrt{gl} t \quad (8)$$

eskuratzen dugu.

Berdintza horrek s eta t -ren arteko erlazioa adierazten du. Ezkerreko atalaren integrala ezin da funtzio elementalen bidez adierazi, gauza bera gertatzen zaio s -ri t -ren funtzio bezala.

Azter dezagun planteatutako problema modu hurbilduan. Demagun $\frac{s_0}{l}$ eta $\frac{s}{l}$

angeluak txikiak direla. $\frac{s+s_0}{2l}$ eta $\frac{s_0-s}{2l}$ angeluak ez dira $\frac{s_0}{l}$ baino handiagoak. (6)

ekuazioan ordezkia ditzagun angeluen sinuak beren angeluez:

$$\frac{ds}{dt} = 2\sqrt{gl} \sqrt{\frac{s+s_0}{2l} \cdot \frac{s_0-s}{2l}}$$

edo

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{\frac{g}{l}} \sqrt{(s_0^2 - s^2)}. \quad (6')$$

Aldagaiak bananduz, (behin behinean $s \neq s_0$ suposatuz),

$$\frac{ds}{\sqrt{s_0^2 - s^2}} = \sqrt{\frac{g}{l}} dt \quad (7')$$

lortzen dugu.

Demagun, berriro, $s = 0$ dela $t = 0$ denean. Azken ekuazioa integratuz,

$$\int_0^s \frac{du}{\sqrt{s_0^2 - u^2}} = \sqrt{\frac{g}{l}} t \quad (8')$$

edo

$$\arcsin \frac{s}{s_0} = \sqrt{\frac{g}{l}} t$$

erdiesten dugu, nondik

$$s = s_0 \sin \sqrt{\frac{g}{l}} t \quad (9)$$

ateratzen bait dugu.

2. Oharra. Problema ebatzean $s \neq s_0$ suposatu dugu. Hala eta guztiz ere, ordezkapen zuzenez, (9) funtzioa t -ren edozein baliotarako (6') ekuazioaren soluzioa dela ikusten dugu.

Gogora dezagun (9) soluzioa (5) ekuazioaren soluzio hurbildua dela. (6) ekuazioa (6') ekuazio hurbilduaz ordezkatu bait dugu.

(9) ekuazioak M puntuak (penduluaren muturtzat har dezakeguna), $T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$ periodoko oszilazio harmonikoak egiten dituela erakusten digu. Periodo hori ez dago s_0 oszilazioaren anplitudearen mende.

4. Adibidea. Bigarren abiadura kosmikoaren problema (ihes-abiadura).

Determinatu gorputz bat bertikalki gorantz jaurtiki behar den abiadurarik txikiena lurrera buelta ez dadin. Airearen erresistentzia mesprezatzen da.

Ebazpena. Izenda ditzagun Lurra eta gorputzaren masak M eta m -z, hurrenez hurren. Newton-en erakarpen-legearen arabera, m masaren gainean eragiten duen f indarra,

$$f = -k \frac{M \cdot m}{r^2}$$

da, non r Lurraren zentru eta jaurtikitako gorputzaren grabitate-zentruaren arteko distantzia den eta k grabitazio unibertsalaren konstantea den.

m masako gorputzaren higiduraren ekuazio diferentziala,

$$m \frac{d^2 r}{dt^2} = -k \frac{M \cdot m}{r^2}$$

edo

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = -k \frac{M}{r^2} \quad (10)$$

da.

Minus zeinua hartu dugu kasu horretan azelerazioa negatiboa bait da. (10) ekuazio diferentziala (2) itxurako ekuazioa da. Ebatz dezagun ekuazioa ondorengo hastapen-baldintzak hartuz:

$$t = 0 \quad \text{denean,} \quad r = R \quad \text{eta} \quad \frac{dr}{dt} = v_0.$$

Hor, R Lurraren erradioa da, eta v_0 jaurtiketa-abiadura. Sar ditzagun

$$\frac{dr}{dt} = v, \quad \frac{d^2 r}{dt^2} = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dr} \frac{dr}{dt} = v \frac{dv}{dr}$$

idazkerak, non v higiduraren abiadura bait da.

Adierazpen hori (10) ekuazioan ordezkatzuz

$$v \frac{dv}{dr} = -k \frac{M}{r^2}$$

daukagu.

Aldagaiak bananduz,

$$v \, dv = -kM \frac{dr}{r^2}$$

geratzen da.

Ekuazio hori integratuz gero,

$$\frac{v^2}{2} = +kM \frac{1}{r} + C_1 \quad (11)$$

aurkitzen dugu.

Determina dezagun C_1 , Lurraren gainazalean ($r=R$), $v=v_0$ baldintzapean:

$$\frac{v_0^2}{2} = +kM \frac{1}{R} + C_1$$

edo

$$C_1 = -\frac{kM}{R} + \frac{v_0^2}{2}.$$

C_1 -en balioa (11) berdintzan ordezkatzuz:

$$\frac{v^2}{2} = +kM \frac{1}{r} - \frac{kM}{R} + \frac{v_0^2}{2}$$

edo

$$\frac{v^2}{2} = kM \frac{1}{r} + \left(\frac{v_0^2}{2} - \frac{kM}{R} \right). \quad (12)$$

Hipotesiaren arabera, gorputzaren abiadurak beti izan behar du positiboa (ez da anulatzen), hortaz, $\frac{v^2}{2} > 0$. r mugagabeki hazi ahala $\frac{KM}{r}$ magnitudea oso txikia egiten denez, $\frac{v^2}{2} > 0$ baldintza r orotarako beteko da baldin

$$\frac{v_0^2}{2} - \frac{kM}{R} \geq 0 \quad (13)$$

edo

$$v_0 \geq \sqrt{\frac{2kM}{R}}$$

bada.

Beraz, abiadurarik txikiena

$$v_0 = \sqrt{\frac{2kM}{R}} \quad (14)$$

berdintzaz definitzen da, non

$$k = 6,66 \cdot 10^{-8} \frac{cm^3}{g \cdot s^2},$$

$$R = 63 \cdot 10^7 \text{ cm},$$

diren. Lurraren gainazalean, $r=R$ denean, grabitate-indarraren azelerazioa, $g \left(g = 981 \frac{cm}{s^2} \right)$

da. Azkenekoaren arabera, (10) berdintzatik,

$$g = k \frac{M}{R^2},$$

edo

$$M = \frac{gR^2}{k}$$

ateratzen dugu.

M -ren balio hori (14) formularen ordezkatzuz,

$$v_0 = \sqrt{2gR} = \sqrt{2 \cdot 981 \cdot 63 \cdot 10^7} \approx 11,2 \cdot 10^5 \frac{cm}{s} = 11,2 \frac{Km}{s}$$

daukagu.

§ 19. Bigarren ordenako ekuazio diferentzialen integrazio-metodo grafikoa

Ikus dezagun zein den bigarren ordenako ekuazio diferentzial baten interpretazio geometrikoa. Izan bedi

$$y'' = f(x, y, y') \quad (1)$$

ekuazioa, izenda dezagun φ kurbaren ukitzaileak Ox ardatzaren norantza positiboarekin osatzen duen angelua; orduan

$$\frac{dy}{dx} = \tan \varphi. \quad (2)$$

Bigarren deribatuaren esanahi geometrikoa argitzeko asmoz gogora dezagun kurba baten puntu bateko kurbadur erradioa determinatzen duen formula⁸⁾:

$$R = \frac{(1 + y'^2)^{3/2}}{y''}.$$

Hortik,

$$y'' = \frac{(1 + y'^2)^{3/2}}{R}.$$

Baina,

$$y' = \tan \varphi; \quad 1 + y'^2 = 1 + \tan^2 \varphi = \sec^2 \varphi;$$

$$(1 + y'^2)^{3/2} = |\sec^3 \varphi| = \frac{1}{|\cos^3 \varphi|},$$

horrexegatik,

$$y'' = \frac{1}{R |\cos^3 \varphi|}. \quad (3)$$

y' eta y'' deribatuaren adierazpenak (1) ekuazioan ordezkatzuz,

$$\frac{1}{R |\cos^3 \varphi|} = f(x, y, \tan \varphi)$$

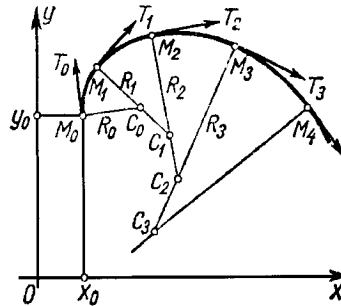
edo

$$R = \frac{1}{|\cos^3 \varphi| \cdot f(x, y, \tan \varphi)} \quad (4)$$

erdiesten dugu.

8) Orain arte kurbadur erradioa zenbaki positibo bat dela pentsatu dugu beti. Baina atal honetan kurbadur erradioak balio positibo zein negatiboak har ditzakeela suposatuko dugu: Kurba ganbila bada ($y'' < 0$) kurbadur erradio negatiboa ($R < 0$) kontsidera dezagun; aldiz, kurba ahurra bada ($y'' > 0$) positibotzat ($R > 0$) har dezagun.

Horrek bigarren ordenako ekuazio diferentzialak, puntuaren koordinatuak eta puntu horretako ukitzailearen norabidea emanak badira, kurba integralaren kurbadur erradioaren magnitudea determinatzen duela frogatzen du.



266. IRUDIA

Aurrekotik ondoriozta liteke, kurba integralaren eraiketa hurbilaren metodoa, kurba leun baten laguntzaz⁹⁾; kurba zirkunferentzi arku osatuta dago.

Demagun, adibidez,

$$y_{x=x_0} = y_0; \quad y'_{x=x_0} = y'_0$$

hastapen-baldintzak betetzen dituen (1) ekuazioaren soluzioa bilatu behar dela.

Marra dezagun $M_0(x_0, y_0)$ puntutik, $y' = \tan \varphi_0 = y'_0$ koefiziente angeluarreko M_0T_0 zuzen bat (266. irudia). (4) ekuaziotik $R = R_0$ magnitudea lortzen dugu. Eraman dezagun R_0 luzerako M_0C_0 zuzenkia M_0T_0 norabidearen elkartutuan eta marra

dezagun (C_0 puntua zentruzat hartuz) R_0 erradioko $\widehat{M_0M_1}$ arku txikia. Ohar gaitezen M_0C_0 zuzenkia norantza egokirantz orientatu behar dela zirkunferentziaren arku gorantz ganbila izan dadin $R_0 < 0$ denean; eta beherantz ganbila $R_0 > 0$ denean (ikus 8) oharra). Izan bitez x_1 eta y_1 , M_1 puntuaren koordinatuak, eraikitako arkuarena eta M_0 puntutik nahiko gertu dagoena, eta bedi $\tan \varphi$ marratutako zirkunferentziaren M_1 puntuko M_1T_1 ukitzailearen koefiziente angeluarra. (4) ekuaziotik M_1 puntuari dagokion $R = R_1$ balioa lortzen da. Marra dezagun M_1C_1 zuzenkia, R_1 luzerakoa eta

M_1T_1 -en elkartuta; C_1 puntua zentruzat hartuz R_2 erradioko $\widehat{M_1M_2}$ arku marra dezagun. Gero, arku horretan, M_1 puntutik gertu, $M_2(x_2, y_2)$ puntu bat har dezagun

9) Puntu guztietan ukitzailea duen kurba da, ukitzailearen inklinazio-angelua arkuaren s luzeraren funtzio jarraia delarik.

eta segi dezagun gure eraiketa zirkunferentzi arkuz osatutako kurbaren tarte nahikoa handia lortu arte. Arestian esanatik ondorioztatzen da kurba hori, gutxi gorabehera M_0 puntutik igarotzen den kurba integrala dela. Argi dago eraikitako kurba $\bigcap M_0 M_1, \bigcap M_1 M_2 \dots$ arkuak zenbat eta txikiago izan gero eta hurbilago egongo dela kurba integraletik.

§ 20. Ekuazio lineal homogenoak. Definizioak eta propietate orokorrak.

1. Definizioa. n . ordenako ekuazio diferentzial bati *lineal* esaten zaio, y funtzio ezezaguna eta $y', \dots, y^{(n-1)}, y^{(n)}$ bere deribatuekiko lehenengo mailakoa bada, hau da, ekuazio horrek

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y = f(x) \quad (1)$$

itxura badauka, non $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ eta $f(x)$ x -ren funtzioak edo konstanteak bait dira; horrez gain, $a_0 \neq 0$ (1) ekuazioaren definizio-eremuk x -ren balio guztietarako.

Aurrerantzean, $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ eta $f(x)$ x -ren balio guztietarako funtzio jarraiak direla eta a_0 koefizientea 1 dela (a_0 ez bada 1, nahikoa da ekuazioaren gai guztiak berarekin zatitzea) suposatuko dugu. $f(x)$ funtzioa ekuazioaren *bigarren atal* deitzen da.

Baldin $f(x) \neq 0$, ekuazioari lineal *ez-homogeno* edo *bigarren ataldun* ekuazio deritzo. Baldin $f(x) \equiv 0$, ekuazioak

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y = 0 \quad (2)$$

itxura dauka eta *homogeno*, edo *bigarren atal gabeko* deritzo (ekuazio horren lehenengo atala $y, y', y'', \dots, y^{(n)}$ -arekiko lehen mailako funtzio homogenoa da).

Defini ditzagun ekuazio lineal homogenoen oinarritzko propietate batzuk, frogapenak bigarren ordenako ekuazioetara mugatuz.

1. Teorema. Baldin y_1 eta y_2

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = 0 \quad (3)$$

bigarren ordenako ekuazio lineal homogenoaren bi soluzio partikular badira $y_1 + y_2$ ere ekuazio horren soluzioa da.

Frogapena. y_1 eta y_2 ekuazioaren soluzioak badira:

$$\left. \begin{aligned} y_1'' + a_1 y_1' + a_2 y_1 &= 0 \\ y_2'' + a_1 y_2' + a_2 y_2 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

(3) ekuazioan $y_1 + y_2$ batura ordezkatzuz eta (4) identitateak kontutan hartuz,

$$\begin{aligned} (y_1 + y_2)'' + a_1(y_1 + y_2)' + a_2(y_1 + y_2) &= \\ = (y_1'' + a_1 y_1' + a_2 y_1) + (y_2'' + a_1 y_2' + a_2 y_2) &= 0 + 0 = 0 \end{aligned}$$

daukagu, hau da $y_1 + y_2$ ekuazioaren soluzioa da.

2. Teorema. Baldin y_1 , (3) ekuazioaren soluzio bat bada eta C konstante bat, Cy_1 biderkadura ere da (3) ekuazioaren soluzioa.

Frogapena. (3) ekuazioan Cy_1 adierazpena sartuz,

$$(Cy_1)'' + a_1(Cy_1)' + a_2(Cy_1) = C[y_1'' + a_1 y_1' + a_2 y_1] = C \cdot 0 = 0$$

lortzen dugu eta teorema frogaturik daukagu.

2. Definizioa. y_1 eta y_2 (3) ekuazioaren bi soluzio $[a, b]$ tartean *linealki independenteak* dira, beren arteko arrazioa tarte horretan konstante ez bada, hau da,

$$\frac{y_2}{y_1} \neq \text{ktea.}$$

denean.

Bestela, soluzioei *linealki menpeko* deritze. Beste hitzetan, y_1 eta y_2 bi soluziori $[a, b]$ tartean *linealki menpeko* esaten zaie λ zenbaki konstante bat existitzen bada, non

$$\frac{y_1}{y_2} = \lambda \quad \text{den, } a \leq x \leq b \text{ izanik. Kasu horretan } y_1 = \lambda y_2.$$

1. Adibidea. Izan bedi $y'' - y = 0$ ekuazioa, $e^x, e^{-x}, 3e^x, 5e^{-x}$ funtzioak ekuazio horren soluzio direla egiaztatzea erraza da. e^x eta e^{-x} funtzioak tarte orotan linealki independenteak dira,

$$\frac{e^x}{e^{-x}} = e^{2x}$$

arrazoia ez bait da konstante mantentzen x aldatzen denean. Ordea, e^x eta $3e^x$ funtzioak

linealki menpekoak dira, $\frac{3e^x}{e^x} = 3 = k$ tea. denez gero.

3. Definizioa. y_1 eta y_2 x -ren funtzioak badira,

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = y_1 y_2' - y_1' y_2$$

determinanteari *Wronski-ren determinante* edo emandako funtzioen *Wronskiar* deritzo.

3. Teorema. y_1 eta y_2 funtzioak $[a, b]$ tartean linealki menpekoak badira wronskiarra nulua da tarte horretan.

Izan ere, $y_2 = \lambda y_1$ bada, non $\lambda = k$ tea. den, $y_2' = \lambda y_1'$ eta

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_1 & \lambda y_1 \\ y_1' & \lambda y_1' \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} y_1 & y_1 \\ y_1' & y_1' \end{vmatrix} = 0$$

daukagu.

4. Teorema. (3) ekuazio lineal homogenoaren y_1 eta y_2 bi soluzioren $W(y_1, y_2)$ wronskiarra $[a, b]$ tarteko $x = x_0$ puntu batean, non ekuazioaren koefizienteak jarraiak bait dira, anulatzen ez bada ez da tarte horretako inongo x puntutan anulatuko.

Frogapena. y_1 eta y_2 (3) ekuazioaren bi soluzio direnez gero,

$$y_1'' + a_1 y_1' + a_2 y_1 = 0, \quad y_2'' + a_1 y_2' + a_2 y_2 = 0$$

daukagu.

Lehenengo berdintzaren gaiak $-y_2$ faktoreaz eta bigarrenaren gaiak y_1 faktoreaz biderkatuz eta gero batuz,

$$(y_1 y_2'' - y_1'' y_2) + a_1 (y_1 y_2' - y_1' y_2) = 0 \quad (5)$$

lortzen dugu.

Bigarren parentesiko kendura $W(y_1, y_2)$ wronskiarra da:

$$W(y_1, y_2) = (y_1 y_2' - y_1' y_2).$$

Lehenengo parentesiko kendura Wronski-ren determinantearen deribatua da:

$$W'(y_1, y_2) = (y_1 y_2' - y_1' y_2)' = y_1 y_2'' - y_1'' y_2.$$

Hortaz, (5) berdintza

$$W' + a_1 W = 0 \quad (6)$$

idazten da.

Bila dezagun,

$$W \Big|_{x=x_0} = W_0$$

hastapen-baldintza betetzen duen azken ekuazioaren soluzioa.

Aurki dezagun, hasieran, (6) ekuazioaren soluzio orokorra, $W \neq 0$ suposatuz.

(6) ekuazioan aldagaiak bananduz,

$$\frac{dW}{W} = -a_1 dx$$

ateratzen dugu.

Integratuz gero,

$$\ln W = - \int_{x_0}^x a_1 dt + \ln C$$

edo

$$\ln \frac{W}{C} = - \int_{x_0}^x a_1 dt$$

topatzen dugu, eta hortik:

$$W = C e^{- \int_{x_0}^x a_1 dt}. \quad (7)$$

Kontura gaitezen (7) funtzioa, (6) ekuazioa bete dezan eran idatz litekeela. Hori egiaztatzea erraza da (6) ekuazioan ordezkapen zuzenaren bidez. $W \neq 0$ suposamendua ez da beharrezkoa.

(7) formulak *Liouville-ren formula* izena du.

Aurki dezagun C hastapen-baldintza bete dadin. (7) ekuazioaren lehenengo eta bigarren ataletan $x=x_0$ eginez gero

$$W_0 = C$$

lortzen dugu.

Hortaz, hasierako baldintzak betetzen dituen soluzioak

$$W = W_0 e^{-\int_{x_0}^x a_1 dt} \quad (7')$$

itxura hartzen du.

Hipotesiz, $W_0 \neq 0$. Beraz, (7') ekuaziotik $W \neq 0$ ondorioztatzen da, x -ren balioa edozein izanik ere, funtzio esponentziala ez bait da aldagaiaren inongo balio finitutarako anulatzen. Teorema frogaturik dago.

1. Oharra. Wronskiarra x -ren x_0 balio baterako nulu bada nulu izango da ere, tarte horretako x -ren edozein baliotarako.

Hau (7) ekuaziotik zuzenean ateratzen da: $W=0$ bada $x=x_0$ denean,

$$(W)_{x=x_0} = C = 0$$

izango da; hortaz $W=0$ (7) ekuazioan x goi-limitearen balioa edozein izanik ere.

5. Teorema. (3) ekuazioaren y_1 eta y_2 soluzioak $[a,b]$ tartean linealki independenteak badira, soluzio horiekin osaturiko W wronskiarra ez da anulatzen tarte horretako inongo puntutan.

Teorema horren frogapenaren ideia soilik aipatuko dugu, osoa eman gabe.

Jo dezagun tarteko puntu batean $W=0$ dela; orduan 4. teoremaren arabera, $[a,b]$ tarteko puntu guztietan Wronskiarra nulua izango da:

$$W = 0$$

edo

$$y_1 y_2' - y_1' y_2 = 0.$$

Azter ditzagun, lehendabiziz, $y_1 \neq 0$ den $[a,b]$ -ren azpitarteak. Orduan,

$$\frac{y_1 y_2' - y_1' y_2}{y_1^2} = 0$$

edo

$$\left(\frac{y_2}{y_1} \right)' = 0.$$

Hortaz, $\frac{y_2}{y_1}$ arrazoi konstante da aipatutako azpitarte bakoitzean:

$$\frac{y_2}{y_1} = \lambda = \text{ktea.}$$

Existentzi eta bakartasun-teorema erabiliz $[a,b]$ tarteko puntu guztietan $y_2 = \lambda y_1$ dela frogatu daiteke, $y_1 = 0$ den puntuak barne; hori ezinezkoa da, hipotesiz, y_2 eta y_1 linealki independenteak bait dira. Hortaz, Wronskiarrak ez da $[a,b]$ tarteko inongo puntutan anulatzen.

6. Teorema. y_1 eta y_2 (3) ekuazioaren bi soluzio linealki independente badira,

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 \quad (8)$$

(3) ekuazioaren soluzio orokorra da, non C_1 eta C_2 hautazko konstanteak bait dira.

Frogapena. 1. eta 2. teoremetatik

$$C_1 y_1 + C_2 y_2$$

(3) ekuazioaren soluzioa dela ateratzen da, C_1 eta C_2 konstanteak edozein izanik ere.

Froga dezagun, orain, $y_{x=x_0} = y_0, y'_{x=x_0} = y'_0$ hastapen-baldintzak edozein direla ere, C_1 eta C_2 hautazko konstanteen balioak aukera daitezkeela, dagokien $C_1 y_1 + C_2 y_2$ soluzio partikularrek emandako hastapen-baldintzak bete ditzan.

(8) berdintzan hastapen-baldintzak sartuz gero,

$$\left. \begin{aligned} y_0 &= C_1 y_{10} + C_2 y_{20} \\ y'_0 &= C_1 y'_{10} + C_2 y'_{20} \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

daukagu, non

$$(y_1)_{x=x_0} = y_{10}; \quad (y_2)_{x=x_0} = y_{20}; \quad (y_1')_{x=x_0} = y_{10}'; \quad (y_2')_{x=x_0} = y_{20}'$$

idatzi den.

(9) sistemak C_1 eta C_2 lortzen uzten digu, sistema horren determinantea,

$$\begin{vmatrix} y_{10} & y_{20} \\ y_{10}' & y_{20}' \end{vmatrix} = y_{10}y_{20}' - y_{10}'y_{20},$$

$x = x_0$ puntuko wronskiarrak bait da eta, hortaz, ez da zero (y_1 eta y_2 soluzioen independentzia lineala dela eta).

Soluzio partikularra, (8) ekuaziotik, C_1 eta C_2 aurkitutako balioez ordezkaturaz ateratzen da eta emandako hastapen-baldintzak betetzen ditu. Horrela teorema frogaturik dago.

2. Adibidea.

$$y'' + \frac{1}{x}y' - \frac{1}{x^2}y = 0$$

ekuazioak, zeinen koefizienteak

$$a_1 = \frac{1}{x} \quad \text{eta} \quad a_2 = -\frac{1}{x^2},$$

$x=0$ puntua ez daukan tarte guztietan jarraiak bait dira,

$$y_1 = x, \quad y_2 = \frac{1}{x},$$

soluzio partikularrak onartzen ditu (erraz frogatzen dena ekuazioan ordezkaturaz). Hortaz bere soluzio orokorrak

$$y = C_1x + C_2 \frac{1}{x}$$

itxura du.

2. Oharra. Ez dago koefiziente aldakorretako ekuazio diferentzial lineal baten soluzio orokorra era finituan ematen digun metodo orokorrik. Hala ere, koefiziente konstanteak dituzten ekuazioetarako metodo hori existitzen da eta hurrengo atalean

azalduko da. Kofiziente aldakorretako ekuazioei dagokienez, XVI. gaian, "Serieak", hastapen-baldintzak betetzen dituzten soluzio hurbilduak aurkitzeko zenbait erabide azalduko dugu.

Oraingoz, kofiziente aldakorretako bigarren ordenako ekuazio diferentzial baten soluzio orokorra, soluzio partikularretako bat ezagutuz, kalkulatzeko utziko digun teorema bat frogatuko dugu. Teorema hau baliagarria izan liteke askotan, baldin eta edozein metodo erabiliz, soluzio partikular bat zuzenean aurkitzen bada.

7. Teorema. Baldin bigarren ordenako ekuazio lineal homogeno baten soluzio partikular bat ezagutzen bada soluzio orokorraren bilakera funtzioen integrazioan datza.

Frogapena. Izan bedi y_1 ,

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = 0$$

ekuazioaren soluzio partikular ezagun bat.

Bila dezagun emandako ekuazioaren beste soluzio partikular bat, y_2 , y_1 eta y_2 linealki independenteak izanik. Orduan, soluzio orokorra

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2$$

formularen bidez adieraziko da, non C_1 eta C_2 hautazko konstanteak bait dira. (7) formularen arabera (ikus 4. teoremaren frogapena),

$$y_2' y_1 - y_2 y_1' = C e^{-\int a_1 dx}$$

idatz daiteke.

Horrela, y_2 determinatzeko lehen ordenako ekuazio lineala daukagu.

Integra dezagun ondoko erara: gai guztiak y_1^2 -z zati ditzagun:

$$\frac{y_2' y_1 - y_2 y_1'}{y_1^2} = \frac{1}{y_1^2} C e^{-\int a_1 dx}$$

edo

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{y_2}{y_1} \right) = \frac{1}{y_1^2} C e^{-\int a_1 dx},$$

hortik,

$$\frac{y_2}{y_1} = \int \frac{C e^{-\int a_1 dx}}{y_1^2} dx + C_2.$$

Soluzio partikular bat bilatzen dugunez gero, $C_2=0$, $C=1$ eginez,

$$y_2 = y_1 \int \frac{e^{-\int a_1 dx}}{y_1^2} dx \quad (10)$$

erdiesten dugu.

Bistakoa da, y_1 eta y_2 soluzio linealki independenteak direla, $\frac{y_2}{y_1} \neq \text{ktea}$. bait

da.

Honelatan, ba, jatorrizko ekuazioaren soluzio orokorrak

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_1 \int \frac{e^{-\int a_1 dx}}{y_1^2} dx \quad (11)$$

itxura dauka.

3. Adibidea. Bilatu

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + 2y = 0$$

ekuazioaren soluzio orokorra.

Ebazpena. Zuzenean egiaztatzen da ekuazio horrek $y_1 = x$ soluzio partikularizat daukala. Bila dezagun bigarren soluzio partikular y_2 , non y_1 eta y_2 linealki independenteak bait dira.

Ohar gaitezen, gure kasuan, $a_1 = \frac{-2x}{1-x^2}$ dela, (10) formularen arabera:

$$\begin{aligned} y &= x \int \frac{e^{\int \frac{2x dx}{1-x^2}}}{x^2} dx = x \int \frac{e^{-\ln(1-x^2)}}{x^2} dx = x \int \frac{dx}{x^2(1-x^2)} = \\ &= x \int \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{2(1-x)} + \frac{1}{2(1+x)} \right) dx = x \left[-\frac{1}{x} + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right| \right] \end{aligned}$$

lortzen dugu.

Hortaz, soluzio orokorrak

$$y = C_1 x + C_2 \left(\frac{1}{2} x \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right| - 1 \right)$$

itxura dauka.

§ 21. Koefiziente konstantedun bigarren ordenako ekuazio diferentzial lineal homogenoak

Izan bedi

$$y'' + py' + qy = 0 \quad (1)$$

bigarren ordenako ekuazio lineal homogenoa, non p eta q zenbaki erreal konstanteak bait dira. Jadanik frogatu dugunez ekuazio horren integral orokorra bilatzeko nahikoa da bi soluzio partikular linealki independente aurkitzea.

Bila ditzagun

$$y = e^{kx} \quad (2)$$

itxurako soluzio partikularrak, non $k = k$ tea. bait da; orduan,

$$y' = k e^{kx}; \quad y'' = k^2 e^{kx}.$$

Lortutako adierazpenak (1) ekuazioan sartuz gero

$$e^{kx} (k^2 + pk + q) = 0$$

aurkitzen dugu. $e^{kx} \neq 0$ denez gero,

$$k^2 + pk + q = 0 \quad (3)$$

geratzen da.

Ondorioz, k balioak ekuazioa betetzen badu, e^{kx} (1) ekuazioaren soluzioa izango da. (3) ekuazioa (1) ekuazioaren *ekuazio karakteristiko* deitzen da.

Ekuazio karakteristikoak, bigarren mailako ekuazioa da, eta hain zuzen, k_1 eta k_2 bi erro dauka. Orduan,

$$k_1 = -\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q} \quad ; \quad k_2 = -\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}.$$

Ondoko kasuak ager daitezke.

I. k_1 eta k_2 zenbaki erreal desberdinak dira ($k_1 \neq k_2$).

II. k_1 eta k_2 zenbaki konplexuak dira.

III. k_1 eta k_2 zenbaki erreal berdinak dira ($k_1 = k_2$).

Azter dezagun banan-banan kasuak.

I. Ekuazio karakteristikoaren erroak errealak eta desberdinak dira: $k_1 \neq k_2$. Kasu honetan soluzio partikularrak $y_1 = e^{k_1 x}$; $y_2 = e^{k_2 x}$ funtzioak izango dira.

Soluzio horiek linealki independenteak dira,

$$\frac{y_2}{y_1} = \frac{e^{k_2 x}}{e^{k_1 x}} = e^{(k_2 - k_1)x} \neq \text{ktea}.$$

Hortaz, integral orokorrak

$$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}$$

itxura dauka.

1. Adibidea. Izan bedi

$$y'' + y' - 2y = 0$$

ekuazioa. Ekuazio karakteristikoak

$$k^2 + k - 2 = 0$$

itxura dauka. Bila ditzagun ekuazio karakteristikoaren erroak:

$$k_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 2};$$

$$k_1 = 1, \quad k_2 = -2.$$

Integral orokorra

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-2x}$$

da.

II. Ekuazio karakteristikoaren erroak konplexuak dira. Erro konplexuak binaka konjokatuak direnez, erabil dezagun

$$k_1 = \alpha + i\beta; \quad k_2 = \alpha - i\beta$$

idazkera, non

$$\alpha = -\frac{p}{2}; \quad \beta = \sqrt{q - \frac{p^2}{4}}$$

bait dira.

Soluzio partikularrak

$$y_1 = e^{(\alpha+i\beta)x}; \quad y_2 = e^{(\alpha-i\beta)x} \quad (4)$$

eran idatz daitezke.

Horiek, (1) ekuazio diferentziala betetzen duten aldagai errealeko funtzio konplexuak dira (ikus VII. gaiko § 4.).

Bistakoa da,

$$y = u(x) + iv(x) \quad (5)$$

aldagai errealeko funtzio konplexu batek (1) ekuazioa betetzen badu, ekuazio hori $u(x)$ eta $v(x)$ funtzioek, bere aldetik, ere betetzen dutela.

Izan ere, (5) adierazpena (1) ekuazioan ordezkatuz

$$[u(x) + iv(x)]'' + p[u(x) + iv(x)]' + q[u(x) + iv(x)] = 0$$

edo

$$(u'' + pu' + qu) + i(v'' + pv' + qv) \equiv 0$$

daukagu.

Baina funtzio konplexu bat nulua da baldin eta soilik baldin zati erreal eta zati irudikaria zero badira, hau da,

$$u'' + pu' + qu = 0,$$

$$v'' + pv' + qv = 0.$$

$u(x)$ eta $v(x)$ emandako ekuazioaren soluzio direla frogatu dugu.

Idatz ditzagun soluzio konplexuak zati erreal eta irudikariaren arteko batura bezala:

$$y_1 = e^{\alpha x} \cos \beta x + ie^{\alpha x} \sin \beta x,$$

$$y_2 = e^{\alpha x} \cos \beta x - ie^{\alpha x} \sin \beta x.$$

Frogatutakoaren arabera, ondoko funtzio errealak (1) ekuazioaren soluzio partikularrak dira:

$$\bar{y}_1 = e^{\alpha x} \cos \beta x, \quad (6')$$

$$\bar{y}_2 = e^{\alpha x} \sin \beta x. \quad (6'')$$

$\bar{y}_1$ eta $\bar{y}_2$ funtzioak linealki independeteak dira,

$$\frac{\bar{y}_1}{\bar{y}_2} = \frac{e^{\alpha x} \cos \beta x}{e^{\alpha x} \sin \beta x} = \cot \beta x \neq \text{ktea.}$$

bait da.

Hortaz, (1) ekuazioaren soluzio orokorrak, ekuazio karakteristikoaren erroak konplexuak direneko kasuan,

$$y = A\bar{y}_1 + B\bar{y}_2 = Ae^{\alpha x} \cos \beta x + Be^{\alpha x} \sin \beta x$$

edo

$$y = e^{\alpha x} (A \cos \beta x + B \sin \beta x) \quad (7)$$

itxura hartzen du, non A eta B hautazko konstanteak bait dira.

2. Adibidea. Izan bedi

$$y'' + 2y' + 5y = 0$$

ekuazioa. Bilatu integral orokorra eta

$$y_{x=0} = 0, \quad y'_{x=0} = 1$$

hastapen-baldintzak betetzen dituen soluzio partikularra. Grafikoa eraiki.

Ebazpena. 1) Idatz dezagun ekuazio karakteristikoa:

$$k^2 + 2k + 5 = 0,$$

eta bila ditzagun bere erroak:

$$k_1 = -1 + 2i, \quad k_2 = -1 - 2i.$$

Hortaz, integral orokorra

$$y = e^{-x}(A \cos 2x + B \sin 2x)$$

da.

2) Bila dezagun emandako hastapen-baldintzak betetzen dituen soluzio partikularra; horretarako determina ditzagun dagozkion A eta B -ren balioak. Lehenengo baldintzatik

$$0 = e^{-0}(A \cos 2 \cdot 0 + B \sin 2 \cdot 0)$$

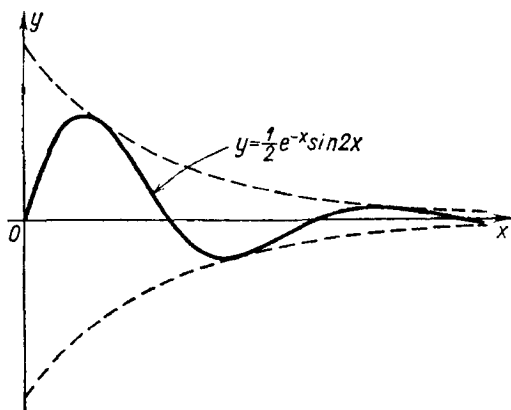
ateratzen da eta hortik $A = 0$.

Ohar gaitezen $y' = e^{-x} 2B \cos 2x - e^{-x} B \sin 2x$ dela. Bigarren baldintzatik $1 = 2B$,

hau da, $B = \frac{1}{2}$ lortzen da. Hortaz, bilatzen dugun soluzio partikularra

$$y = \frac{1}{2} e^{-x} \sin 2x$$

da. Soluzioaren Grafikoa 267. irudian agertzen da.



267. IRUDIA

III. Ekuazio karakteristikoaren erroak errealak eta berdinak dira, hau da, $k_1 = k_2$.

Soluzio partikular bat, $y_1 = e^{k_1 x}$ alegia, aurreko arrazonamenduen arabera lortzen da.

Aurrekoarekin linealki independentea den bigarren soluzio partikular bat aurkitu behar dugu ($e^{k_2 x}$ funtzioa $e^{k_1 x}$ funtzioaren berdina denez ezin da bigarren soluzio partikularizat hartu).

Bila dezagun bigarren soluzio partikularra $y_2 = u(x)e^{k_1 x}$ eran, non $u(x)$ determinatu behar den funtzio ezezaguna bait da.

Deribatuz:

$$y_2' = u' e^{k_1 x} + k_1 u e^{k_1 x} = e^{k_1 x} (u' + k_1 u),$$

$$y_2'' = u'' e^{k_1 x} + 2k_1 u' e^{k_1 x} + k_1^2 u e^{k_1 x} = e^{k_1 x} (u'' + 2k_1 u' + k_1^2 u)$$

aurkitzen dugu.

Deribatuaren adierazpenak (1) ekuazioan ordezkatuz

$$e^{k_1 x} [u'' + (2k_1 + p)u' + (k_1^2 + pk_1 + q)u] = 0$$

lortzen dugu.

k_1 ekuazio karakteristikoaren erro anizkoitza denez,

$$k_1^2 + pk_1 + q = 0$$

daukagu.

Gainera,

$$k_1 = k_2 = -\frac{p}{2}$$

edo

$$2k_1 = -p, \quad 2k_1 + p = 0.$$

Hortaz, $u(x)$ aurkitzeko, $e^{k_1 x} u'' = 0$ edo $u'' = 0$ ekuazioa ebatzi behar da. Integratuz

$$u = Ax + B$$

erdiesten dugu. $A = 1$, $B = 0$ aukera ditzakegu, orduan $u = x$. Horrela, bigarren soluzio partikularizat

$$y_2 = x e^{k_1 x}$$

har daiteke.

Ekuazio hori lehenengoarekiko linealki independentea da,

$$\frac{y_2}{y_1} = x \neq \text{ktea.}$$

bait da.

Hortaz, integral orokortzat,

$$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 x e^{k_1 x} = e^{k_1 x} (C_1 + C_2 x)$$

funtzioa har daiteke.

3. Adibidea. Izan bedi

$$y'' - 4y' + 4y = 0$$

ekuazioa.

Ekuazio karakteristikoa

$$k^2 - 4k + 4 = 0$$

da. Aurki ditzagun bere erroak, $k_1 = k_2 = 2$. Integral orokorra

$$y = C_1 e^{2x} + C_2 x e^{2x}$$

da.

§ 22. Koeffiziente konstantedun n . ordenako ekuazio diferentzial lineal homogenoak

Kontsidera dezagun n . ordenako ekuazio homogeno bat:

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y = 0. \quad (1)$$

Suposa dezagun $a_1, a_2, \dots, a_n$ konstante direla. (1) ekuazioaren ebazpen-metodo bat azaldu baino lehen, eman dezagun aurrerantzean baliagarri izango diren bi definizio.

1. Definizioa. $[a, b]$ tarteko x guztietarako,

$$\varphi_n(x) = A_1 \varphi_1(x) + A_2 \varphi_2(x) + \dots + A_n \varphi_{n-1}(x)$$

berdintza egiaztatzen bada, non $A_1, A_2, \dots, A_n$ konstante diren, eta zeinetatik gutxienez bat zero ez den, $\varphi_n(x)$ funtzioa, $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_{n-1}(x)$ funtzioen konbinazio lineala dela esan ohi da.

2. Definizioa.

$$\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_{n-1}(x), \varphi_n(x)$$

n funtzioari *linealki independente* deritze bat ere ezin bada besteen konbinazio lineal bezala idatzi.

1. Oharra. Definizio horietatik

$$\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x)$$

funtzioak linealki menpekoak badira $C_1, C_2, \dots, C_n$ konstanteak, bat gutxienez ez-nulua, existitzen direla ondorioztatzen da. Konstante horiek $[a, b]$ tarteko x guztietarako

$$C_1\varphi_1(x) + C_2\varphi_2(x) + \dots + C_n\varphi_n(x) \equiv 0$$

identitatea betetzen dute.

Adibideak.

1. $y_1 = e^x$, $y_2 = e^{2x}$, $y_3 = 3e^x$ funtzioak linealki menpekoak dira, $C_1 = 1$, $C_2 = 0$, $C_3 = -\frac{1}{3}$ balioetarako,

$$C_1e^x + C_2e^{2x} + C_33e^x \equiv 0$$

identitatea betetzen bait da.

2. $y_1 = 1$, $y_2 = x$, $y_3 = x^2$ funtzioak linealki independenteak dira,

$$C_1 \cdot 1 + C_2x + C_3x^2$$

adierazpena ezin bait da anulatu, C_1, C_2, C_3 edozein direla ere, hirurak batera nuluak ez diren artean.

3. $y_1 = e^{k_1x}$, $y_2 = e^{k_2x}, \dots, y_n = e^{k_nx}, \dots$ funtzioak, $k_1, k_2, \dots, k_n, \dots$ hautazkoak izanik, linealki independenteak dira. (Baieztapen hori frogatu gabe emango dugu).

Pasa gaitezen, orain (1) ekuazioaren soluziora. Ekuazio horretarako balio du ondoko teorema.

Teorema. $y_1, y_2, \dots, y_n$ funtzioak (1) ekuazioaren soluzio linealki independenteak badira, bere soluzio orokorra

$$y = C_1y_1 + C_2y_2 + \dots + C_ny_n \quad (2)$$

da, non $C_1, \dots, C_n$ hautazko konstanteak bait dira.

(1) ekuazioaren koefizienteak konstanteak badira, soluzio orokorra bigarren ordenako ekuazioaren kasuan bezala bilatzen da.

1) Osa dezagun ekuazio karakteristikoak:

$$k^n + a_1k^{n-1} + a_2k^{n-2} + \dots + a_n = 0.$$

2) Bila ditzagun ekuazio karakteristikoaren erroak:

$$k_1, k_2, \dots, k_n.$$

3) Erroen izakeraren arabera, idatz ditzagun soluzio partikular linealki independenteak, ondorengotik abiatuz:

a) k erro erreal bakun orori e^{kx} soluzio partikular bat dagokio;

b) $k^{(1)} = \alpha + i\beta$ eta $k^{(2)} = \alpha - i\beta$ erro konplexu konjokatuen bikote orori bi soluzio partikular dagokio, $e^{\alpha x} \cos \beta x$ eta $e^{\alpha x} \sin \beta x$ alegia;

c) r anizkoiztasun-ordenako k erro erreal orori r soluzio partikular linealki independente dagokio:

$$e^{kx}, xe^{kx}, \dots, x^{r-1} e^{kx};$$

d) μ anizkoiztasun-ordenako $k^{(1)} = \alpha + i\beta$, $k^{(2)} = \alpha - i\beta$ erro konplexu konjokatuen bikote orori 2μ soluzio partikular dagokio:

$$e^{\alpha x} \cos \beta x, xe^{\alpha x} \cos \beta x, \dots, x^{\mu-1} e^{\alpha x} \cos \beta x,$$

$$e^{\alpha x} \sin \beta x, xe^{\alpha x} \sin \beta x, \dots, x^{\mu-1} e^{\alpha x} \sin \beta x.$$

Soluzio partikularren kopurua ekuazio karakteristikoaren maila da (hau da, ekuazio diferentzialaren ordena). Soluzio horiek linealki independenteak direla frogatu liteke.

4) $y_1, y_2, \dots, y_n$, n soluzio linealki independente behin aurkitu eta gero osa dezagun emandako ekuazio linealaren soluzio orokorra:

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots + C_n y_n,$$

non $C_1, C_2, \dots, C_n$ hautazko konstanteak bait dira.

4. Adibidea. Bilatu

$$y^{IV} - y = 0$$

ekuazioaren soluzio orokorra.

Aurki ditzagun

$$k^4 - 1 = 0$$

ekuazioaren erroak:

$$k_1 = 1, \quad k_2 = -1, \quad k_3 = i, \quad k_4 = -i.$$

Integral orokorra

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + A \cos x + B \sin x$$

da, non C_1, C_2, A, B hautazko konstanteak diren.

2. Oharra. Esandakotik, koefiziente konstantedun ekuazio diferentzial homogenoaren ebaztearen zailtasuna dagokion ekuazio karakteristikoaren ebazpenean datzala ondorioztatzen da.

§ 23. Bigarren ordenako ekuazio diferentzial ez-homogenoak

Izan bedi

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = f(x) \quad (1)$$

bigarren ordenako ekuazio lineal ez-homogenoa.

(1) ekuazio horren soluzio orokorraren egitura ondoko teoremaren bidez determinatzen da.

1. Teorema. (1) ekuazio ez-homogenoaren soluzio orokorra, ekuazio horren edozein y^* soluzio partikular eta dagokion

$$\bar{y}'' + a_1 \bar{y}' + a_2 \bar{y} = 0 \quad (2)$$

ekuazio homogenoaren $\bar{y}$ soluzio orokorraren arteko batura bezala adierazten da.

Frogapena.

$$y = \bar{y} + y^* \quad (3)$$

batura (1) ekuazioaren soluzio orokorra dela frogatu behar da.

Froga dezagun, lehendabizi, (3) funtzioa (1) ekuazioaren soluzio dela.

$\bar{y} + y^*$ batura (1) ekuazioan, y -ren lekuan, idatziz gero

$$(\bar{y} + y^*)'' + a_1 (\bar{y} + y^*)' + a_2 (\bar{y} + y^*) = f(x)$$

edo

$$(\bar{y}'' + a_1 \bar{y}' + a_2 \bar{y}) + (y^{*''} + a_1 y^{*'} + a_2 y^*) = f(x) \quad (4)$$

topatzen dugu.

$\bar{y}$, (2) ekuazioaren soluzioa denez, lehenengo parentesiko adierazpena nulua da. y^* , (1) ekuazioaren soluzioa denez bigarren parentesiko adierazpena $f(x)$ da. Hortaz, (4) berdintza identitatea da, teoremaren lehenengo zatia frogatua delarik.

Froga dezagun, orain, (3) adierazpena (1) ekuazioaren soluzio orokorra dela; hau da, osatzen duten hautazko konstanteak aukera daitezkeela

$$\left. \begin{aligned} y_{x=x_0} &= y_0 \\ y'_{x=x_0} &= y'_0 \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

hastapen-baldintzak bete daitezen, x_0, y_0 eta y'_0 edozein badira ere (x_0 -ren balioa, a_1, a_2 eta $f(x)$ funtzioen jarraitasun-eremuan hartzen den artean).

Ohar gaitezen $\bar{y}$,

$$\bar{y} = C_1 y_1 + C_2 y_2$$

eran idatz daitezkeela, non y_1 eta y_2 (2) ekuazioaren bi soluzio linealki independente diren eta C_1, C_2 hautazko konstanteak bait dira. (3) ekuazioa

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + y^* \quad (3')$$

eran adieraz daiteke.

(5) baldintzen arabera,

$$C_1 y_{10} + C_2 y_{20} + y_0^* = y_0,$$

$$C_1 y'_{10} + C_2 y'_{20} + y_0^{*'} = y'_0$$

daukagu¹⁰⁾.

Ekuazio-sistema horretatik C_1 eta C_2 lortu behar dira. Idatz dezagun sistema

$$C_1 y_{10} + C_2 y_{20} = y_0 - y_0^*,$$

$$C_1 y'_{10} + C_2 y'_{20} = y'_0 - y_0^{*'} \quad (6)$$

10) Hor, $y_{10}, y_{20}, y_0^*, y'_{10}, y'_{20}$ eta $y_0^{*'}, y_1, y_2, y^*, y'_1, y'_2$ eta $y^{*'}$ funtzioen balioak dira $x = x_0$ puntuan.

eran. Kontura gaitezen sistema horren determinantea y_1 eta y_2 funtzioen $x = x_0$ puntuko Wronskiarra dela. Hipotesiz funtzio horiek linealki independenteak direnez, Wronskiarra ezin da nulua izan. Hortaz, (6) sistemak badu soluzio determinatua, C_1 eta C_2 alegia, hau da C_1 eta C_2 balioak existitzen dira, zeinetarako (3) formulak emandako hastapen-baldintzak betetzen dituen (1) ekuazioaren soluzioa determinatzen bait du. Teorema, bada, osoki frogatua geratzen da.

Ondoriozta daiteke, beraz, (2) ekuazio homogenoaren $\bar{y}$ soluzio orokorra ezagutzen bada, (1) ekuazio ez-homogenoaren integrazioan lan nagusia, ekuazio horren y^* soluzio partikular baten bilatzean datzala.

Eman dezagun metodo orokor bat ekuazio ez-homogenoaren soluzio partikularrak bilatzeko.

Konstanteen aldakuntzaren metodoa. Idatz dezagun (2) ekuazio homogenoaren soluzio orokorra:

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2. \quad (7)$$

Bila dezagun (1) ekuazio ez-homogenoaren (7) itxurako soluzio partikular bat, C_1 eta C_2 determinatu behar diren x -ren funtzio bezala kontsideratuz.

Deriba dezagun (7) berdintza:

$$y' = C_1 y_1' + C_2 y_2' + C_1' y_2 + C_2' y_1.$$

Aukera ditzagun C_1 eta C_2

$$C_1' y_1 + C_2' y_2 = 0 \quad (8)$$

berdintza egiazta dadin.

Baldintza gehigarri hori kontutan hartuz, y' lehenengo deribatua

$$y' = C_1 y_1' + C_2 y_2'$$

itxura hartzen du.

Adierazpen hori deribatuz, y'' aurkitzen dugu:

$$y'' = C_1 y_1'' + C_2 y_2'' + C_1' y_1' + C_2' y_2'.$$

y , y' eta y'' (1) ekuazioan sartuz gero:

$$C_1 y_1'' + C_2 y_2'' + C_1' y_2' + C_2' y_2' + a_1(C_1 y_1' + C_2 y_2') + a_2(C_1 y_1 + C_2 y_2) = f(x)$$

edo

$$C_1(y_1'' + a_1 y_1' + a_2 y_1) + C_2(y_2'' + a_1 y_2' + a_2 y_2) + C_1' y_1' + C_2' y_2' = f(x)$$

lortzen dugu.

Lehenengo bi parentesietako adierazpenak anulatzen dira y_1 eta y_2 ekuazio homogenoaren soluzio bait dira. Hortaz azken ekuazioak

$$C_1' y_1' + C_2' y_2' = f(x) \quad (9)$$

itxura hartzen du.

Horrela, (7) funtzioa (1) ekuazio ez-homogenoaren soluzio bat da C_1 eta C_2 funtzioek (8) eta (9) ekuazio-sistema betetzen dutenean, hau da, baldin

$$C_1' y_1 + C_2' y_2 = 0, \quad C_1' y_1' + C_2' y_2' = f(x)$$

bada.

Sistema horren determinantea y_1 eta y_2 funtzio linealki independenteen Wronskiarra denez ez da nulua; beraz, sistema ebatziz, C_1 eta C_2 x -ren funtzio bezala aurkitzen ditugu:

$$C_1' = \varphi_1(x) \quad C_2' = \varphi_2(x).$$

Integratuz,

$$C_1 = \int \varphi_1(x) dx + \bar{C}_1; \quad C_2 = \int \varphi_2(x) dx + \bar{C}_2$$

daukagu, non $\bar{C}_1$ eta $\bar{C}_2$ integrazio-konstanteak bait dira.

Lortutako, C_1 eta C_2 -ren adierazpenak (7) berdintzan ordezkatzuz gero hautazko bi konstanteren menpeko integral bat topatzen dugu, hau da, ekuazio ez-homogenoaren soluzio orokorra¹¹⁾.

11) $\bar{C}_1 = \bar{C}_2 = 0$ eginez gero, (1) ekuazioaren soluzio partikular bat lortzen dugu.

Adibidea. Bilatu,

$$y'' - \frac{y'}{x} = x,$$

ekuazioaren soluzio orokorra.

Ebazpena. Bila dezagun ekuazio homogenoaren soluzioa orokorra,

$$y'' - \frac{y'}{x} = 0,$$

$\frac{y''}{y'} = \frac{1}{x}$ denez, $\ln y' = \ln x + \ln C$; $y' = Cx$ daukagu. Honela,

$$y = C_1 x^2 + C_2$$

izango da.

Adierazpen hori emandako ekuazioaren soluzioa izan dadin

$$C_1' x^2 + C_2' \cdot 1 = 0, \quad 2C_1' x + C_2' \cdot 0 = x$$

sistematik C_1 eta C_2 x -ren funtzio bezala atera behar ditugu. Sistema hori ebatziz gero,

$$C_1' = \frac{1}{2}, \quad C_2' = -\frac{1}{2} x^2$$

aurkitzen dugu, eta hortik, integrazioz,

$$C_1 = \frac{x}{2} + \bar{C}_1, \quad C_2 = -\frac{x^3}{6} + \bar{C}_2$$

erdiesten dugu.

Aurkitu ditugun funtzioak

$$y = C_1 x^2 + C_2$$

formulan ordezkatzuz ekuazio ez-homogenoaren soluzio orokorra lortzen dugu:

$$y = \bar{C}_1 x^2 + \bar{C}_2 + \frac{x^3}{2} - \frac{x^3}{6}$$

edo

$$y = \bar{C}_1 x^2 + \bar{C}_2 + \frac{x^3}{3},$$

non $\bar{C}_1$ eta $\bar{C}_2$ hautazko konstanteak diren.

Soluzio partikularrak bilatzeko ondoko teorema erabil daiteke.

2. Teorema. Izan bedi

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = f_1(x) + f_2(x) \quad (10)$$

ekuazio ez-homogeno bat, non bere bigarren atala $f_1(x)$ eta $f_2(x)$ bi funtzioen arteko batura bait da. y_1 ,

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = f_1(x) \quad (11)$$

ekuazioaren soluzio partikular bat bada eta y_2 ,

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = f_2(x) \quad (12)$$

ekuazioaren soluzio partikular bat bada $y_1 + y_2$ (10) ekuazioaren soluzio partikular bat da¹²⁾.

Frogapena. $y_1 + y_2$ adierazpena (10) ekuazioan sartuz gero:

$$(y_1 + y_2)'' + a_1(y_1 + y_2)' + a_2(y_1 + y_2) = f_1(x) + f_2(x)$$

edo

$$(y_1'' + a_1 y_1' + a_2 y_1) + (y_2'' + a_1 y_2' + a_2 y_2) = f_1(x) + f_2(x) \quad (13)$$

lortzen dugu.

(11) eta (12) berdintzetatik (13) identitatea dela ondorioztatzen da. Teorema frogaturik dago.

12) Jakina, teorema egokituak balio izango du bigarren ataleko edozein batugai-kopurutarako.

§ 24. Koefiziente konstantedun bigarren ordenako ekuazio diferentzial lineal ez-homogenoak

Izan bedi

$$y'' + py' + qy = f(x) \quad (1)$$

ekuazio diferentziala, non p eta q zenbaki errealak diren.

Aurreko atalean metodo orokor bat eman dugu ekuazio ez-homogenoen soluzioak bilatzeko. Ekuazioak koefiziente konstanteak baditu, batzutan, integrazioa jo gabe, soluzio partikular bat aurkitzea errazagoa da. Azter ditzagun (1) ekuazioa ebazteko erabiltzen diren metodo batzuk.

I. Demagun (1) ekuazioaren bigarren atala funtzio esponentzial bat eta polinomio baten arteko biderkadura dela:

$$f(x) = P_n(x)e^{\alpha x}, \quad (2)$$

non $P_n(x)$ n mailako polinomioa den. Orduan, ondoko kasu partikularrak eman daitezke:

a) α zenbakia ez da

$$k^2 + pk + q = 0$$

ekuazio karakteristikoaren erroa.

Kasu horretan,

$$y^* = (A_0 x^n + A_1 x^{n-1} + \dots + A_n) e^{\alpha x} = Q_n(x) e^{\alpha x} \quad (3)$$

itxurako soluzio partikular bat bilatu behar da.

Izan ere, (1) ekuazioan y^* sartuz, eta $e^{\alpha x}$ -z zatituz,

$$Q_n''(x) + (2\alpha + p)Q_n'(x) + (\alpha^2 + p\alpha + q)Q_n(x) = P_n(x) \quad (4)$$

daukagu.

$Q_n(x)$ n mailako polinomioa da, $Q_n'(x)$ $(n-1)$ mailako polinomioa, $Q_n''(x)$ $(n-2)$ mailakoa. Hortaz, berdintzaren eskuin eta ezker aldeetan n mailako polinomioak daude. x -ren potentzia berdinen koefizienteak berdinduz (koefiziente

ezezagunen kopurua $n+1$ da) $n+1$ ekuaziotako sistema bat lortzen dugu. $A_0, A_1, \dots, A_n$ koefizienteak determinatzeko

b) α zenbakia ekuazio karakteristikoaren erro bakuna da.

(3) itxurako soluzio partikular bat bilatuko bagenu (4) berdintzako lehenengo atalean $(n-1)$ mailako polinomio bat lortuko genuke, $Q_n(x)$ -ren koefizienteak, hau da, $a^2 + p\alpha + q$ nulu bait da eta $Q_n'(x)$ eta $Q_n''(x)$ polinomioak n baino maila txikiagokoak bait dira. Hortaz, (4) berdintza ezin da identitate izan $A_0, A_1, \dots, A_n$ -ren edozein baliotarako. Horrexegatik, kasu horretan, soluzio partikularra gai askerik gabeko $(n+1)$ mailako polinomio bezala bilatuko dugu, gai askea deribazioan ezabatzen bait da¹³⁾:

$$y^* = xQ_n(x)e^{\alpha x}.$$

c) α ekuazio karakteristikoaren erro bikoitza da.

Orduan, $Q_n(x)e^{\alpha x}$ funtzioa ekuazio diferentzialean ordezkatzean, polinomioaren maila bi maila gutxitzen da. Izan ere, α ekuazio karakteristikoaren erroa bada $\alpha^2 + p\alpha + q = 0$ daukagu; gainera, α erro bikoitza denez gero $2\alpha = -p$ daukagu (Oinarritzko algebraren teorema baten arabera, bi mailako ekuazio laburtu baten erroen batura lehen mailako gaiaren koefizienteak, zeinuz aldatua, da). Horrexegatik, $2\alpha + p = 0$.

Hortaz, (4) berdintzako lehenengo atalean $Q_n''(x)$ geratzen da, hau da, $(n-2)$ mailako polinomio bat. Ordezkapenaren emaitza bezala n mailako polinomio bat lortzeko, soluzio partikular bat, $e^{\alpha x}$ eta $(n+2)$ mailako polinomio baten arteko biderkadura bezala bilatu behar da. Orduan, polinomio horren gai askea eta lehen mailako gaia ezabatzen dira deribazioan eta ahantz daitezke soluzio partikularrean.

Horrela, ekuazio karakteristikoaren erro bikoitza denean,

$$y^* = x^2 Q_n(x)e^{\alpha x}$$

itxurako soluzio partikular bat bila daiteke.

1. Adibidea. Bilatu

$$y'' + 4y' + 3y = x$$

13) Ohar gaitezen goian azaldutako emaitza guztiek ere balio dutela α zenbaki konplexua denean, hori, e^{mx} funtzioaren deribazio-erregelatetik ondorioztatzen da, m hautazko zenbaki konplexua izanik; ikus VII. gaiko § 4.

ekuazioaren soluzio orokorra.

Ebazpena. Dagokion ekuazio homogenoaren soluzio orokorra

$$\bar{y} = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-3x}$$

da. Ekuazio ez-homogenoaren bigarren atalak $x e^{0x}$ itxura duenez (hau da, $P_1(x) e^{0x}$ itxura) eta $0 \cdot k^2 + 4k + 3 = 0$ ekuazio karakteristikoaren erro ez denez, bila dezagun $y^* = Q_1(x) e^{0x}$ itxurako soluzio partikular bat, hau da,

$$y^* = A_0 x + A_1$$

dagigun. Emandako ekuazioan adierazpen hori sartuz

$$4A_0 + 3(A_0 x + A_1) = x$$

daukagu. x -ren potentzia berdinen koefizienteak berdinduz gero

$$3A_0 = 1, \quad 4A_0 + 3A_1 = 0$$

erdiesten dugu, eta hortik,

$$A_0 = \frac{1}{3}; \quad A_1 = -\frac{4}{9}.$$

Hortaz,

$$y^* = \frac{1}{3}x - \frac{4}{9}.$$

Soluzio orokorra, $y = \bar{y} + y^*$,

$$y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-3x} + \frac{1}{3}x - \frac{4}{9}$$

izango da.

2. Adibidea. Bilatu

$$y'' + 9y = (x^2 + 1)e^{3x}$$

ekuazioaren soluzio orokorra.

Ebazpena. Ekuazio homogenoaren soluzio orokorra erraz aurkitzen da:

$$\bar{y} = C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x.$$

Emandako ekuazioaren bigarren atalak, $(x^2 + 1)e^{3x}$,

$$P_2(x)e^{3x}$$

itxura dauka.

Potentziaren berretzaileko 3 koefizientea ekuazio karakteristikoaren erro ez denez, bila dezagun

$$y^* = Q_2(x)e^{3x} \quad \text{edo} \quad y^* = (Ax^2 + Bx + C)e^{3x}$$

itxurako soluzio partikular bat.

Adierazpen hori ekuazio diferentzialean sartuz,

$$\left[9(Ax^2 + Bx + C) + 6(2Ax + B) + 2A + 9(Ax^2 + Bx + C) \right] e^{3x} = (x^2 + 1)e^{3x}$$

daukagu.

Bi atalak e^{3x} -z zatituz eta x -ren potentzia berdinen koefizienteak berdinduz

$$18A = 1, \quad 12A + 18B = 0, \quad 2A + 6B + 18C = 1$$

lorten dugu, eta hortik, $A = \frac{1}{18}$; $B = -\frac{1}{27}$; $C = \frac{5}{81}$.

Hortaz, soluzio partikularra,

$$y^* = \left(\frac{1}{18}x^2 - \frac{1}{27}x + \frac{5}{81} \right) e^{3x}$$

da eta soluzio orokorra:

$$y = C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x + \left(\frac{1}{18}x^2 - \frac{1}{27}x + \frac{5}{81} \right) e^{3x}.$$

3. Adibidea. Bilatu

$$y'' - 7y' + 6y = (x - 2)e^x$$

ekuazioaren soluzio orokorra.

Ebazpena. Ekuazioaren bigarren atalak $P_1(x)e^{1 \cdot x}$ itxura dauka, non berretzailearen koefizientea polinomio karakteristikoaren erro bakuna den. Hortaz, bila dezagun

$$y^* = xQ_1(x)e^x$$

edo

$$y^* = x(Ax + B)e^x$$

itxurako soluzio partikularra; adierazpen hori ekuazioan ordezkatzuz:

$$\begin{aligned} & \left[(Ax^2 + Bx) + (4Ax + 2B) + 2A - 7(Ax^2 + Bx) - 7(2Ax + B) + \right. \\ & \left. + 6(Ax^2 + Bx) \right] e^x = (x - 2)e^x, \end{aligned}$$

edo

$$(-10Ax - 5B + 2A)e^x = (x - 2)e^x$$

dugu. x -ren potentzia berdinen koefizienteak berdinduz

$$-10A = 1, \quad -5B + 2A = -2$$

lortzen dugu, eta hortik,

$$A = -\frac{1}{10}, \quad B = \frac{9}{25}.$$

Hortaz, soluzio partikularra,

$$y^* = x \left(-\frac{1}{10}x + \frac{9}{25} \right) e^x$$

da eta soluzio orokorra

$$y = C_1 e^{6x} + C_2 e^x + x \left(-\frac{1}{10}x + \frac{9}{25} \right) e^x.$$

II. Demagun bigarren atalak

$$f(x) = P(x)e^{\alpha x} \cos \beta x + Q(x)e^{\alpha x} \sin \beta x \quad (5)$$

itxura daukala, non $P(x)$ eta $Q(x)$ polinomioak diren.

Kasu hau lehenago erabilitako prozeduraren bitartez analisa daiteke, funtzio trigonometrikotatik esponentzialetara pasatuz gero.

$\cos \beta x$ eta $\sin \beta x$ bere adierazpen esponentzialetaz, Euler-en formulen arabera (ikus VII. gaiko § 5.), ordezkatzuz:

$$f(x) = P(x)e^{\alpha x} \frac{e^{i\beta x} + e^{-i\beta x}}{2} + Q(x)e^{\alpha x} \frac{e^{i\beta x} - e^{-i\beta x}}{2i},$$

edo

$$f(x) = \left[\frac{1}{2} p(x) + \frac{1}{2i} Q(x) \right] e^{(\alpha+i\beta)x} + \left[\frac{1}{2} p(x) - \frac{1}{2i} Q(x) \right] e^{(\alpha-i\beta)x} \quad (6)$$

erdiesten dugu.

Kortxete artean, $P(x)$ eta $Q(x)$ -ren mailarik handieneko polinomioak ditugu. Beraz, bigarren atala I. kasuari dagokion atal bihurtu dugu.

Froga liteke (hemen frogapenik gabe onartu arren) zenbaki konplexurik gabeko soluzio partikularrak aurki daitezkeela.

Hortaz, ekuazioaren bigarren atalak;

$$f(x) = P(x)e^{\alpha x} \cos \beta x + Q(x)e^{\alpha x} \sin \beta x \quad (7)$$

itxura badauka, non $P(x)$ eta $Q(x)$ x -ren polinomiak bait dira, soluzio partikularra ondoko eran mugatzen da :

a) $\alpha + i\beta$ zenbakia ekuazio karakteristikoaren erroa ez bada, (1) ekuazioaren

$$y^* = U(x)e^{\alpha x} \cos \beta x + V(x)e^{\alpha x} \sin \beta x \quad (8)$$

itxurako soluzio partikular bat bilatu behar da, non $U(x)$ eta $V(x)$, $P(x)$ eta $Q(x)$ polinomioen mailarik handieneko polinomioak bait dira;

b) $\alpha + i\beta$ zenbakia ekuazio karakteristikoaren erroa bada,

$$y^* = x \left[U(x)e^{\alpha x} \cos \beta x + V(x)e^{\alpha x} \sin \beta x \right] \quad (9)$$

itxurako soluzio partikularra bilatu behar da.

Noiz behinkako erroreak ekiditzeko, ohar gaitezen (8) eta (9) soluzio partikularren formulek balio dutela (1) ekuazioaren bigarren atalean $P(x)$ edo $Q(x)$ polinomioetako nulua denean, hau da, bigarren atala,

$$P(x)e^{\alpha x} \cos \beta x \quad \text{edo} \quad Q(x)e^{\alpha x} \sin \beta x$$

itxurakoa denean.

Kontsidera dezagun, orain, kasu partikular inportante bat. Demagun bigarren ordenako ekuazio lineal baten bigarren atala

$$f(x) = M \cos \beta x + N \sin \beta x \quad (7')$$

dela, non M eta N konstanteak diren.

a) βi ekuazio karakteristikoaren erroa ez bada,

$$y^* = A \cos \beta x + B \sin \beta x \quad (8')$$

itxurako soluzio partikularra bilatuko dugu.

b) βi ekuazioa karakteristikoaren erroa bada,

$$y^* = x(A \cos \beta x + B \sin \beta x) \quad (9')$$

itxurako soluzio partikularra bilatuko dugu.

Kontura gaitezen (7') funtzioa (7) funtzioaren kasu partikularra dela ($P(x) = M$, $Q(x) = N$, $\alpha = 0$); (8') eta (9') funtzioen (8) eta (9) funtzioak kasu partikularrak dira.

4. Adibidea. Bilatu

$$y'' + 2y' + 5y = 2 \cos x$$

ekuazio lineal ez-homogenoaren integral orokorra.

Ebazpena.

$$k^2 + 2k + 5 = 0$$

ekuazio karakteristikoak

$$k_1 = -1 + 2i; \quad k_2 = -1 - 2i$$

erroak dauzka. Horrexegatik, dagokion ekuazio homogenoaren integral orokorra

$$\bar{y} = e^{-x}(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x)$$

da.

Bila dezagun ekuazio ez-homogenoaren

$$y^* = A \cos x + B \sin x$$

itxurako soluzio partikular bat, non A eta B kalkulatu behar diren koefiziente konstanteak bait dira. y^* emandako ekuazioan sartuz gero:

$$-A \cos x - B \sin x + 2(-A \sin x + B \cos x) + 5(A \cos x + B \sin x) = 2 \cos x$$

daukagu.

$\cos x$ eta $\sin x$ -ren koefizienteak berdinduz, bi ekuazio lortzen dugu, A eta B mugatzeko:

$$-A + 2B + 5A = 2; \quad -B - 2A + 5B = 0,$$

nondik

$$A = \frac{2}{5}; \quad B = \frac{1}{5}$$

diren.

Emandako ekuazioaren soluzio orokorra

$$y = \bar{y} + y^*$$

da, hau da,

$$y = e^{-x} (C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x) + \frac{2}{5} \cos x + \frac{1}{5} \sin x.$$

5. Adibidea Aurkitu

$$y'' + 4y = \cos 2x$$

ekuazioaren soluzioa.

Ebazpena. Ekuazio karakteristikoaren erroak $k_1 = 2i$, $k_2 = -2i$ dira, hortaz, ekuazio homogenoaren soluzio orokorrak

$$\bar{y} = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x$$

itxura dauka.

Bila dezagun ekuazio ez-homogenoaren

$$y^* = x(A \cos 2x + B \sin 2x)$$

itxurako soluzio partikular bat. Orduan,

$$y^{*'} = 2x(-A \sin 2x + B \cos 2x) + (A \cos 2x + B \sin 2x),$$

$$y^{*''} = 4x(-A \cos 2x - B \sin 2x) + 4(-A \sin 2x + B \cos 2x).$$

Emandako ekuazioan, deribatuen adierazpen horiek sartuz eta $\cos 2x$ eta $\sin 2x$ -ren koefizienteak berdinduz gero A eta B mugatzeko ekuazio-sistema bat erdiesten dugu:

$$4B = 1; \quad -4A = 0,$$

nondik $A = 0$; $B = \frac{1}{4}$ dauzkagun. Emandako ekuazioaren integral orokorra, beraz,

$$y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x + \frac{1}{4}x \sin 2x$$

da.

6. Adibidea. Aurkitu

$$y'' - y = 3e^{2x} \cos x$$

ekuazioaren soluzioa.

Ebazpena. Ekuazioaren bigarren atalak

$$f(x) = e^{2x}(M \cos x + N \sin x)$$

itxura dauka, $M=3$ eta $N=0$ izanik. $k^2 - 1 = 0$ ekuazio karakteristikoaren erroak $k_1 = 1$, $k_2 = -1$ dira. Ekuazio homogenoaren soluzio orokorra

$$\bar{y} = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$$

da.

$\alpha + i\beta = 2 + i \cdot 1$ zenbakia ekuazio karakteristikoaren erroa ez denez, bila dezagun

$$y^* = e^{2x}(A \cos x + B \sin x)$$

itxurako soluzio partikular bat.

Adierazpen hori ekuazioan sartuz eta antzeko gaiak laburtuz gero

$$(2A + 4B)e^{2x} \cos x + (-4A + 2B)e^{2x} \sin x = 3e^{2x} \cos x$$

lortzen dugu.

$\cos x$ eta $\sin x$ -ren koefizienteak berdinduz

$$2A + 4B = 3, \quad -4A + 2B = 0$$

daukagu, nondik $A = \frac{3}{10}$, $B = \frac{3}{5}$ erdiesten ditugun. Hortaz, soluzio partikularra

$$y^* = e^{2x} \left(\frac{3}{10} \cos x + \frac{3}{5} \sin x \right)$$

da eta orokorra

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + e^{2x} \left(\frac{3}{10} \cos x + \frac{3}{5} \sin x \right).$$

§ 25. n. ordenako ekuazio diferentzial lineal ez-homogenoak

Izan bedi

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y = f(x) \quad (1)$$

ekuazioa, non $a_1, a_2, \dots, a_n, f(x)$ x -ren funtzio jarraiak (edo konstanteak) bait dira.

Demagun

$$\bar{y} = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots + C_n y_n, \quad (2)$$

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \dots + a_n y = 0 \quad (3)$$

ekuazio homogenoaren soluzio orokorra ezagutzen dela.

Bigarren ordenako ekuazioaren kasuan bezala (1) ekuaziorako ere balio du ondorengo teorema.

Teorema. Baldin $\bar{y}$ (3) ekuazio homogenoaren soluzio orokorra bada eta y^* (1) ekuazio ez-homogenoaren soluzio partikular bat bada

$$Y = \bar{y} + y^*$$

ekuazio ez-homogenoaren soluzio orokorra da.

Honela, bigarren ordenako ekuazioaren kasuan legez, (1) ekuazioaren integrazioa ekuazio ez-homogenoaren soluzio partikular baten bilaketara mugatzen da.

Bigarren ordenako ekuaziorako bezala, (1) ekuazioaren soluzio partikular bat, konstanteen aldakuntzaren metodoz aurki daiteke, (2) adierazpenean $C_1, C_2, \dots, C_n$ x -ren funtzioak direla suposatuz.

Era dezagun ekuazio-sistema (§ 23koarekin konparatu):

[illegible]

Sistema horrek, $C_1', C_2', \dots, C_n'$ ezezagunekin, soluzio bakarra dauka ($C_1', C_2', \dots, C_n'$ ezezagunen koefizienteen determinantea, ekuazio homogenoaren $y_1, y_2, \dots, y_n$ soluzio partikularren wronskiara da eta, hipotesiz, soluzio horiek linealki independenteak direnez wronskiara ez da zero).

Horrela, (4) sistema ebatz daiteke $C_1', C_2', \dots, C_n'$ funtzioekiko. Funtzio horiek aurkitu eta integratutakoan

$$C_1 = \int C_1' dx + \bar{C}_1; \quad C_2 = \int C_2' dx + \bar{C}_2; \quad \dots; \quad C_n = \int C_n' dx + \bar{C}_n$$

lortzen dugu, $\bar{C}_1, \bar{C}_2, \dots, \bar{C}_n$ integrazio-konstanteak izanik.

Froga dezagun, kasu honetan,

$$y^* = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots + C_n y_n \quad (5)$$

adierazpena (1) ekuazio ez-homogenoaren soluzio orokorra dela.

Deriba dezagun n alditan (5) adierazpena, aldi bakoitzean (4) berdintzak kontutan hartuz; orduan,

$$\begin{aligned} y^* &= C_1 y_1 + C_2 y_2 + C_3 y_3 \dots + C_n y_n \\ y^{*'} &= C_1 y_1' + C_2 y_2' + C_3 y_3' + \dots + C_n y_n' \\ \dots \\ y^{*(n-1)} &= C_1 y_1^{(n-1)} + C_2 y_2^{(n-1)} + \dots + C_n y_n^{(n-1)} \\ y^{*(n)} &= C_1 y_1^{(n)} + C_2 y_2^{(n)} + \dots + C_n y_n^{(n)} + f(x) \end{aligned}$$

izango dugu.

Lehenengo ekuazioaren gaiak a_n koefizienteaz biderkatuz, bigarrenekoak a_{n-1} koefizienteaz, ..., eta azkenik, azkenaurrenekoak a_1 koefizienteaz, eta batuz gero

$$y^{*(n)} + a_1 y^{*(n-1)} + \dots + a_n y^* = f(x)$$

ateratzen dugu; $y_1, y_2, \dots, y_n$ ekuazio homogenoaren soluzio partikularrak bait dira eta, beraz, zutabe bereko gaiak batzean lortutako baturak nuluak dira.

Hortaz,

$$y^* = C_1 y_1 + \dots + C_n y_n$$

funtzioa, [non $C_1, \dots, C_n$ (4) ekuazioen bidez mugatutako x -ren funtzioak bait dira] (1) ekuazio ez-homogenoaren soluzioa da, eta $\bar{C}_1, \bar{C}_2, \dots, \bar{C}_n$ n hautazko konstanteren menpean dagoenez, hori soluzio orokorra ere bada.

Teorema frogaturik dago, beraz.

Batzutan, koefiziente konstantedun ordena handiagoko ekuazio ez-homogeno baten soluzio partikularrak errazago bila daitezke (§ 24). Ondorengo prozedurak erabiltzen dira.

I. Demagun ekuazio diferentzialaren bigarren atala

$$f(x) = P(x)e^{\alpha x}$$

funtzioa dela, $P(x)$ x -ren polinomioa izanik. Bi kasu bereiztu behar dira:

a) α ekuazio karakteristikoaren erroa ez bada,

$$y^* = Q(x)e^{\alpha x}$$

itxurako soluzio partikularra bilatuko dugu, non $Q(x)$ polinomioak $P(x)$ -ren maila daukan, baina koefiziente indeterminatuekin;

b) α ekuazio karakteristikoaren μ anizkoiztasun ordenako erroa bada, ekuazio ez-homogenoaren

$$y^* = x^\mu Q(x)e^{\alpha x}$$

itxurako soluzio partikular bat bilatuko dugu, $Q(x)$ $P(x)$ -ren maila berdineko polinomioa delarik.

II. Jo dezagun ekuazioaren bigarren atala

$$f(x) = M \cos \beta x + N \sin \beta x$$

itxurakoa dela, M eta N konstanteak direlarik. Orduan, soluzio partikularren itxura ondoko erara mugatuko da:

a) βi ekuazio karakteristikoaren erroa ez bada, soluzio partikularra

$$y^* = A \cos \beta x + B \sin \beta x$$

itxurakoa da, non A eta B koefiziente konstante indeterminatuak diren;

b) βi ekuazio karakteristikoaren μ anizkoiztasun-ordenako erroa bada

$$y^* = x^\mu (A \cos \beta x + B \sin \beta x)$$

izango da.

III. Izan bedi

$$f(x) = P(x)e^{\alpha x} \cos \beta x + Q(x)e^{\alpha x} \sin \beta x,$$

non $P(x)$ eta $Q(x)$ x -ren polinomioak diren. Orduan,

a) $\alpha + \beta i$, polinomio karakteristikoaren erroa ez bada

$$y^* = U(x)e^{\alpha x} \cos \beta x + V(x)e^{\alpha x} \sin \beta x$$

itxurako soluzio partikular bat bilatuko dugu; non $U(x)$ eta $V(x)$ polinomioen maila, $P(x)$ eta $Q(x)$ polinomioen mailarik handiena bait da;

b) $\alpha + \beta i$ ekuazio karakteristikoaren μ anizkoiztasun-ordenako erroa bada

$$y^* = x^\mu \left[U(x)e^{\alpha x} \cos \beta x + V(x)e^{\alpha x} \sin \beta x \right]$$

itxurako soluzio partikularra bilatuko dugu, non $U(x)$ eta $V(x)$ a) kasukoak bezalakoak bait dira.

II eta III kasuekiko ohar orokorra. Ekuazioaren bigarren atalean $\cos \beta x$ edo $\sin \beta x$ soilik daukan adierazpen bat badago ere, soluzioa aipatzen den bezala bilatu behar da, hau da, sinu eta kosinu banarekin. Beste hitzetan esanda bigarren atalak $\cos \beta x$ edo $\sin \beta x$ ez edukitzetik, ezin da inolaz ere ekuazioaren soluzio partikularrak funtzio horiek ez dituenik ondorioztatu. Honetaz jabe gaitzke aurreko pasartearen 4., 5. eta 6. adibidea eta atal honen 2. adibidea aztertuz.

1. Adibidea. Bilatu

$$y^{IV} - y = x^3 + 1$$

ekuazioaren soluzio orokorra.

Ebazpena. $k^4 - 1 = 0$ ekuazio karakteristikoaren erroak

$$k_1 = 1, \quad k_2 = -1, \quad k_3 = i, \quad k_4 = -i$$

dira. Aurki dezagun ekuazio homogenoaren soluzio orokorra (ikus § 22, 4. adibidea):

$$\bar{y} = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_3 \cos x + C_4 \sin x.$$

Bila dezagun

$$y^* = A_0 x^3 + A_1 x^2 + A_2 x + A_3$$

iturako ekuazio ez-homogenoaren soluzio partikular bat.

y^* lau alditan deribatuz eta lortutako adierazpenak emandako ekuazioan ordezkatzuz

$$-A_0 x^3 - A_1 x^2 - A_2 x - A_3 = x^3 + 1$$

daukagu.

Berdin ditzagun x -ren potentzia bereko koefizienteak:

$$-A_0 = 1; \quad -A_1 = 0; \quad -A_2 = 0; \quad -A_3 = 1;$$

hortaz,

$$y^* = -x^3 - 1.$$

Aurki dezagun ekuazio ez-homogenoaren integral orokorra

$$y = \bar{y} + y^*$$

formulari jarraituz, hau da,

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_3 \cos x + C_4 \sin x - x^3 - 1.$$

2. Adibidea. Aurkitu

$$y^{IV} - y = 5 \cos x$$

ekuazioaren soluzioa.

Ebazpena.

$$k_1 = 1, \quad k_2 = -1, \quad k_3 = i, \quad k_4 = -i$$

dira $k^4 - 1 = 0$ ekuazio karakteristikoaren erroak. Beraz, dagokion ekuazio homogenoaren soluzio orokorra

$$\bar{y} = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_3 \cos x + C_4 \sin x$$

da.

Emandako ekuazio ez-homogenoaren bigarren atalaren itxura

$$f(x) = M \cos x + N \sin x$$

da, $M = 5$, $N = 0$ direlarik.

i ekuazio karakteristikoaren erro bakuna denez bila dezagun

$$y^* = x(A \cos x + B \sin x)$$

itxurako soluzio partikular bat.

Adierazpen hori ekuazioan sartuz gero

$$4A \sin x - 4B \cos x = 5 \cos x$$

topatzen dugu, nondik

$$4A = 0, \quad -4B = 5$$

edo

$$A = 0, \quad B = -\frac{5}{4}$$

lortzen ditugun.

Emandako ekuazio diferentzialaren soluzio partikularra, beraz,

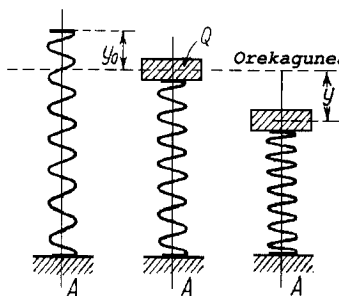
$$y^* = -\frac{5}{4} x \sin x$$

da eta integral orokorra

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_3 \cos x + C_4 \sin x - \frac{5}{4} x \sin x.$$

§ 26. Oszilazio mekanikoen ekuazio diferentziala

Atal honen eta hurrengoan helburua mekanika aplikatuaren problema bat aztertzea da, ekuazio diferentzial linealen laguntzaz.



268. IRUDIA

Demagun Q masako karga bat malguki elastiko baten gainean dagoela (268. irudia). Izenda dezagun y kargaren desbidazioa orekagunetik. Kontsidera ditzagun beheranzko desbidazioa positibotzat eta goranzkoa negatibotzat. Orekagunean, pisuaren indarra malgukiaren elastikotasunaz konpentsatzen da. Demagun karga orekagunera bueltatzera bultzatzen duen indarra, elastiko deiturikoa, desbidazioarekiko proportzionala dela, hau da, indar elastikoa $-ky$ dela, non k emandako malgukirako magnitude konstantea (malgukiaren zurruntasun izenekoa) bait da¹⁴⁾.

Jo dezagun malgukiaren punturik baxuenarekiko kargaren higidura-abiaduraren proportzionala den erresistentzi indar batek Q kargaren higiduraren kontra eragiten duela,

hau da: $-\lambda v = -\lambda \frac{dy}{dt}$ indarra, non $\lambda = k\tau > 0$ (indargetzailea). Era dezagun kargaren higiduraren ekuazio diferentziala. Newton-en bigarren legearen arabera

$$Q \frac{d^2 y}{dt^2} = -ky - \lambda \frac{dy}{dt} \quad (1)$$

daukagu, (hemen k eta λ zenbaki positiboak dira). Koefiziente konstantedun bigarren ordenako ekuazio diferentzial lineal homogeno bat erdietsi dugu.

Idatz dezagun

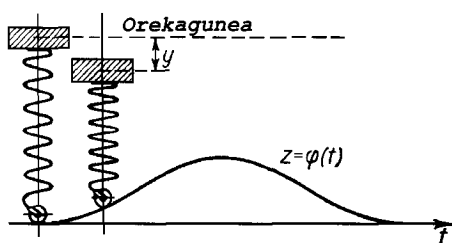
$$\frac{d^2 y}{dt^2} + p \frac{dy}{dt} + qy = 0 \quad (1')$$

¹⁴⁾ Malgukiak, zeinen indar elastikoa deformazioarekiko proportzionala bait da, "ezaugarri lineal"-eko malguki deitzen dira.

eran,

$$p = \frac{\lambda}{Q}; \quad q = \frac{k}{Q}$$

izanik.



269. IRUDIA

Suposa dezagun, orain, malgukiaren behe-puntuak $z = \varphi(t)$ legearen araberako higidura bertikalak egiten dituela. Fenomeno hori gerta liteke, esate baterako, malgukiaren behe-muturra, malguki eta kargarekin batera erliebe desberdinetako bide batean zehar higitzen den gurpiltxo bati loturik dagoenean (269. irudia).

Kasu horretan, indar elastikoa ez da $-ky$, $-k[y + \varphi(t)]$ baizik; erresistentzi indarra $-\lambda[y' + \varphi'(t)]$ izango da, eta (1) ekuazioaren ordeez

$$Q \frac{d^2 y}{dt^2} + \lambda \frac{dy}{dt} + ky = -k\varphi(t) - \lambda\varphi'(t) \quad (2)$$

edo

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + p \frac{dy}{dt} + qy = f(t) \quad (2')$$

ekuazioa lortzen dugu, non

$$f(t) = - \frac{k\varphi(t) + \lambda\varphi'(t)}{Q}$$

bait da.

Bigarren ordenako ekuazio diferentzial ez-homogeno bat lortu dugu.

(1') ekuazioak *oszilazio askeen ekuazio* izena du; (2') ekuazioak, aldiz, *oszilazio bortxatuen ekuazio*.

§ 27. Oszilazio askeak

Azter dezagun, lehendabizi, oszilazio askeen ekuazioa:

$$y'' + py' + qy = 0.$$

Idatz dezagun dagokion ekuazio karakteristikoa:

$$k^2 + pk + q = 0,$$

eta kalkula ditzagun bere erroak:

$$k_1 = -\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}; \quad k_2 = -\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}.$$

1) Izan bedi $\frac{p^2}{4} > q$. Kasu horretan k_1 eta k_2 erroak zenbaki erreal negatiboak dira. Soluzio orokorra funtzio esponenzialen bidez adierazten da;

$$y = C_1 e^{k_1 t} + C_2 e^{k_2 t} \quad (k_1 < 0, \quad k_2 < 0). \quad (1)$$

Formula horretatik, hastapen-baldintzak edozein izanda, t infiniturantz doanean y desbidazioak zerorantz asintotikoki jotzen duela ateratzen da. Emandako kasuan ez da oszilaziorik egongo, balaztatze-indarrak malgukiaren k zurruntasun-koefizientearekin konparatuz handiak bait dira.

2) Izan bedi $\frac{p^2}{4} = q$; orduan, k_1 eta k_2 berdina dira eta $-\frac{p}{2}$ zenbaki negatiboa balio dute. Hortaz, soluzio orokorra

$$y = C_1 e^{-\frac{p}{2}t} + C_2 t e^{-\frac{p}{2}t} = (C_1 + C_2 t) e^{-\frac{pt}{2}} \quad (2)$$

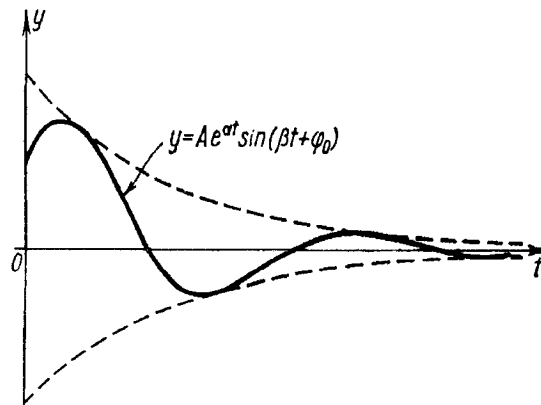
da.

Hemen ere desbidazioak zerorantz jotzen du t -k ∞ -rantz jotzen duenean; hala ere, aurreko kasuan baino abiadura txikiagoz ($C_1 + C_2 t$ faktoreari esker).

Oszilazio horiei *harmoniko* deritzegu. Kurba integralak sinusoideak dira. T denbora-tartea, zeinean $\beta t + \varphi_0$ arkuak 2π -ko aldakuntza duen, oszilazioen *periodo*

deitzen da; gure kasuan $T = \frac{2\pi}{\beta}$ dugu. 2π unitateko denboran gertatutako oszilazioen

kopuruari oszilazioen *maiztasun* deitzen zaio. Emandako kasuan maiztasuna β da. A konstantea, orekagunetik desbidaziorik handiena alegia, higidura oszilakorraren *anplitude* deitzen da eta φ_0 *hasierako fasea* da. (3') funtzioaren grafioa 270. irudian agertzen da.



271. IRUDIA

4) Izan bitez $p \neq 0$ eta $\frac{p^2}{4} < q$.

Kasu honetan ekuazio karakteristikoaren erroak

$$k_1 = \alpha + i\beta, \quad k_2 = \alpha - i\beta$$

zenbaki konplexuak dira, non

$$\alpha = -\frac{p}{2} < 0, \quad \beta = \sqrt{q - \frac{p^2}{4}}$$

bait dira.

Integral orokorrak

$$y = e^{\alpha t} (C_1 \cos \beta t + C_2 \sin \beta t) \quad (4)$$

edo

$$y = Ae^{\alpha t} \sin(\beta t + \varphi_0) \quad (4')$$

itxura dauka.

Anplitudea $Ae^{\alpha t}$, denboraren menpeko magnitudea, hartu behar dugu. $\alpha < 0$ denez gero anplitudeak zerorantz jotzen du $t \rightarrow \infty$ denean, hau da, kasu honetan *oszilazio indargetuak* ditugu. Oszilazio horien grafikoa 271. irudian ikusten da.

§ 28. Oszilazio bortxatuak

Oszilazio bortxatuen ekuazioa

$$y'' + py' + qy = f(t)$$

idazten da.

Analisa dezagun kanpo-indar perturbatzailea

$$f(t) = a \sin \omega t$$

funtzio periodikoaz adierazia deneko kasu praktiko garrantzitsua; orduan, ekuazioak

$$y'' + py' + qy = a \sin \omega t \quad (1)$$

itxura hartzen du.

1) Demagun, lehendabizi, $p \neq 0$ eta $\frac{p^2}{4} < q$, hau da, ekuazio karakteristikoaren erroak $\alpha \pm i\beta$ dira. Kasu honetan, (ikus § 27, (4) eta (4') formulak), ekuazio homogenoaren soluzio orokorrak

$$\bar{y} = Ae^{\alpha t} \sin(\beta t + \varphi_0) \quad (2)$$

itxura dauka.

Bila dezagun ekuazio ez-homogenoaren

$$y^* = M \cos \omega t + N \sin \omega t \quad (3)$$

itxurako soluzio partikularra.

y^* adierazpen hori jatorrizko ekuazio diferentzialean ordezkatzuz, M eta N -ren balioak lortzen ditugu,

$$M = \frac{-p\omega a}{(q - \omega^2)^2 + p^2\omega^2}; \quad N = \frac{(q - \omega^2)a}{(q - \omega^2)^2 + p^2\omega^2}.$$

Lortutako M eta N -ren balioak (3) berdintzan ordezkatu baino lehen, sar ditzagun A^* eta φ^* konstante berriak

$$M = A^* \sin \varphi^*, \quad N = A^* \cos \varphi^*$$

eginez, hau da,

$$A^* = \sqrt{M^2 + N^2} = \frac{a}{\sqrt{(q - \omega^2)^2 + p^2 \omega^2}}, \quad \tan \varphi^* = \frac{M}{N}.$$

Orduan, ekuazio ez-homogenoaren soluzio partikularra

$$y^* = A^* \sin \varphi^* \cos \omega t + A^* \cos \varphi^* \sin \omega t = A^* \sin (\omega t + \varphi^*)$$

eran idatz daiteke, edo azken finean

$$y^* = \frac{a}{\sqrt{(q - \omega^2)^2 + p^2 \omega^2}} \sin(\omega t + \varphi^*).$$

(1) ekuazioaren integral orokorra

$$y = \bar{y} + y^*$$

da, hots,

$$y = A e^{\alpha t} \sin(\beta t + \varphi_0) + \frac{a}{\sqrt{(q - \omega^2)^2 + p^2 \omega^2}} \sin(\omega t + \varphi^*).$$

Bigarren ataleko baturaren lehenengo gaiak (ekuazio homogenoaren soluzioa) oszilazio indargetuak adierazten ditu. Gai hori txikiagotzen da t handitzean eta, hortaz denbora-tarte baten buruan, bigarren gaiak jokatu du paper nagusia, oszilazio bortxatuak determinatzen dituen. Oszilazio horien ω maiztasuna $f(t)$ kanpo-indarraren maiztasunaren berdina da; p zenbat eta txikiagoa izan eta ω^2 q -ra zenbat eta gehiago hurbildu hainbat eta handiagoa izango da oszilazio bortxatuen anplitudea.

Analisa dezagun, zehazkiago, nola dagoen oszilazio bortxatuen anplitudea ω maiztasunaren menpe, p -ren balio desberdinetarako. Izenda dezagun $D(\omega)$ oszilazio bortxatuen anplitudea:

$$D(\omega) = \frac{a}{\sqrt{(q - \omega^2)^2 + p^2 \omega^2}}.$$

Dagigun $q = \beta_1^2$ ($p = 0$ baliorako β_1 bere oszilazioen maiztasuna izango litzateke). Orduan,

$$D(\omega) = \frac{a}{\sqrt{(\beta_1^2 - \omega^2)^2 + p^2 \omega^2}} = \frac{a}{\beta_1^2 \sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\beta_1^2}\right)^2 + \frac{p^2}{\beta_1^2} \frac{\omega^2}{\beta_1^2}}}$$

daukagu.

Sar ditzagun

$$\frac{\omega}{\beta_1} = \lambda, \quad \frac{p}{\beta_1} = \gamma$$

idazkerak, non λ sistemaren oszilazio askeen maiztasuna eta indar perturbatzailearen maiztasunaren arteko arrazoa den; γ konstantea ez dagoen indar perturbatzailearen menpe.

Anplitudearen magnitudea

$$\bar{D}(\lambda) = \frac{a}{\beta_1^2 \sqrt{(1 - \lambda^2)^2 + \gamma^2 \lambda^2}} \quad (4)$$

formularen bidez adierazten da.

Kalkula dezagun funtzio horren maximoa. Hori izendatzailearen karratua minimo egiten duen λ -ren balioari dagokiona izango da.

$$\sqrt{(1 - \lambda^2)^2 + \gamma^2 \lambda^2} \quad (5)$$

funtzioaren minimoa

$$\lambda = \sqrt{1 - \frac{\gamma^2}{2}}$$

denean lortzen da eta

$$\gamma \sqrt{1 - \frac{\gamma^2}{4}}$$

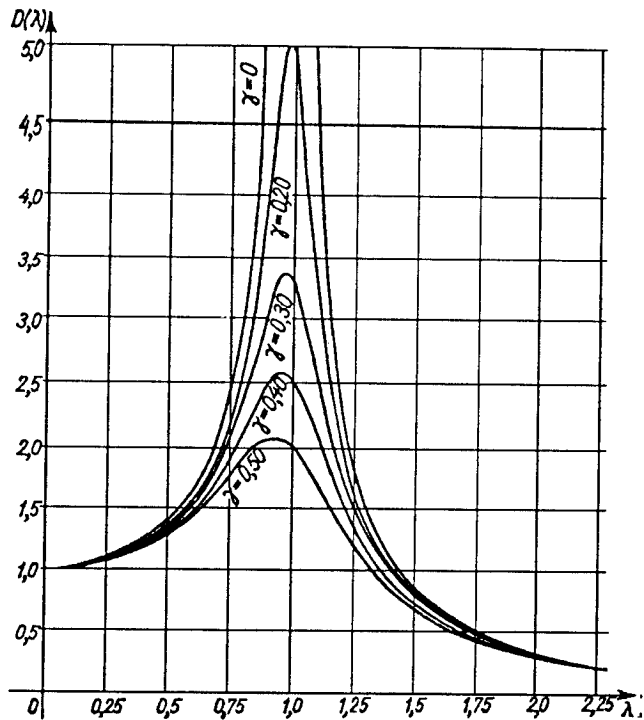
balioa da.

Hortaz, amplitudearen magnitude maximoa

$$\bar{D}_{\max} = \frac{a}{\beta_1^2 \gamma \sqrt{1 - \frac{\gamma^2}{4}}}$$

izango da.

$\bar{D}(\lambda)$ funtzioaren γ -ren balio desberdinetarako grafikoak 272. irudian ikusten dira (ideiak zehazteko, grafikoak eraikitzean $a = 1$, $\beta_1 = 1$ dagigun). Kurba hauei erresonantzi kurba deitzen zaie.



272. IRUDIA

(5) formulatik, γ txikietarako, amplitudearen balio maximoa λ -ren balioak 1etik gertu direnean lortzen dela ondorioztatzen da, hau da, kanpo-indarraren maiztasuna oszilazio askeenetik gertu denean. $\gamma = 0$ bada, (beraz, $p = 0$), hau da, ez badago higiduraren kontrako erresistentziarik, oszilazio bortxatuen amplitudea mugagabeki hazten da $\lambda \rightarrow 1$ denean, hau da, $\omega \rightarrow \beta_1 = \sqrt{q}$ dugunean:

$$\lim_{\lambda \rightarrow 1} \overline{D}(\lambda) = \infty$$

$$(\gamma=0)$$

daukagu.

$\omega^2 = q$ denean erresonantzia fenomeno dugu.

2) Demagun, orain, $p=0$ dela, hau da, azter dezagun erresistentziarik gabeko oszilazio elastikoen ekuazioa, kanpo-indar periodiko baten presentziaz:

$$y'' + qy = a \sin \omega t. \quad (6)$$

Ekuazio homogenoaren soluzio orokorra

$$\bar{y} = C_1 \cos \beta t + C_2 \sin \beta t \quad (\beta^2 = q)$$

da.

$\beta \neq \omega$ bada, hau da, kanpo indarraren maiztasuna berezko oszilazioen maiztasunaren berdina ez bada, ekuazio ez-homogenoaren soluzio partikularra

$$y^* = M \cos \omega t + N \sin \omega t$$

eran idazten da.

Adierazpen hori hasierako ekuazioan sartuz gero

$$M = 0, \quad N = \frac{a}{q - \omega^2}$$

aurkitzen ditugu.

Soluzio orokorra

$$y = A \sin(\beta t + \varphi_0) + \frac{a}{q - \omega^2} \sin \omega t$$

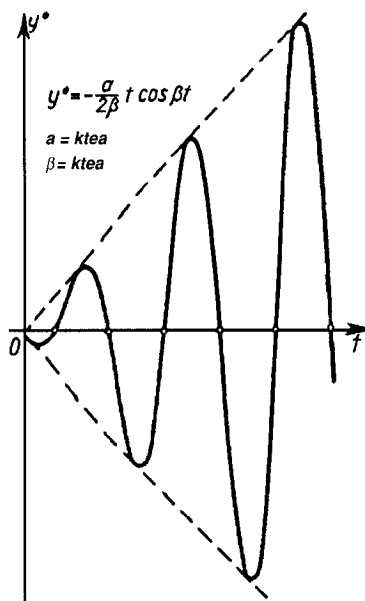
da.

Higidura, beraz, β maiztasuneko berezko oszilazio eta ω maiztasuneko oszilazio bortxatuaren gainezarmenaren emaitza bezala erdiesten da.

$\beta = \omega$ bada, hau da, berezko oszilazioen maiztasuna bat badator kanpo-indarraren maiztasunarekin, (3) funtzioa ez da (6) ekuazioaren soluzioa. Kasu horretan, § 24.eko emaitzen arabera, bila dezagun

$$y^* = t(M \cos \omega t + N \sin \omega t) \quad (7)$$

itxurako soluzio partikular bat.



273. IRUDIA

Adierazpen hori ekuazioan sartuz gero M eta N -ren balioak,

$$M = -\frac{a}{2\omega}; \quad N = 0,$$

aurkitzen ditugu.

Hortaz,

$$y^* = -\frac{a}{2\beta} t \cos \omega t.$$

Soluzio orokorrak

$$y = A \sin(\beta t + \varphi_0) - \frac{a}{2\omega} t \cos \beta t$$

itxura du.

Bigarren ataleko bigarren gaiak erakusten du, kasu honetan, oszilazioen amplitudea mugagabeki hazten dela t denbora era berean hazten denean ($t \rightarrow \infty$). Fenomeno hori, berezko oszilazioen maiztasuna eta kanpo-indarraren maiztasuna bat datozenean gertatzen dena, *erresonantzia* deitzen da.

y^* funtzioaren grafikoa 273. irudian agertzen da.

§ 29. Ekuazio diferentzial arruntezko sistemak

Problema ugariren ebazpenean, x argumentua, $y_1, y_2, \dots, y_n$ funtzio ezezagunak eta beren deribatuak dituzten ekuazio diferentzialezko sistema betetzen duten $y_1 = y_1(x), y_2 = y_2(x), \dots, y_n = y_n(x)$ funtzioak aurkitu beharra dago.

Kontsidera dezagun lehen ordenako ekuazio diferentzialezko sistema:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dy_1}{dx} &= f_1(x, y_1, y_2, \dots, y_n), \\ \frac{dy_2}{dx} &= f_2(x, y_1, y_2, \dots, y_n), \\ &\dots\dots\dots \\ \frac{dy_n}{dx} &= f_n(x, y_1, y_2, \dots, y_n), \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

non $y_1, y_2, \dots, y_n$ funtzio ezezagunak eta x argumentua bait dira.

Ekuazioen lehenengo ataletan lehen ordenako deribatuak bakanduta dituen sistemari *sistema arrunt* deritzo.

Sistema hori integratzea (1) ekuazio-sistema eta

$$(y_1)_{x=x_0} = y_{10}, (y_2)_{x=x_0} = y_{20}, \dots, (y_n)_{x=x_0} = y_{n0} \quad (2)$$

emandako hastapen-baldintzak betetzen dituzten $y_1, y_2, \dots, y_n$ funtzioak aurkitzea da.

(1) itxurako sistemaren integrazioa ondoko erara gauzatzen da.

Deriba dezagun lehenengo ekuazioa x -rekiko:

$$\frac{d^2 y_1}{dx^2} = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_1}{\partial y_1} \frac{dy_1}{dx} + \dots + \frac{\partial f_1}{\partial y_n} \frac{dy_n}{dx}.$$

$$\left. \begin{aligned} y_2 &= \varphi_2(x, y_1, y_1', \dots, y_1^{(n-1)}), \\ y_3 &= \varphi_3(x, y_1, y_1', \dots, y_1^{(n-1)}), \\ &\dots\dots\dots \\ y_n &= \varphi_n(x, y_1, y_1', \dots, y_1^{(n-1)}). \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Adierazpen horiek (3) sistemaren azken ekuazioan sartuz gero, y_1 kalkulatzeko n . ordenako ekuazio bat erdiesten dugu

$$\frac{d^n y_1}{dx^n} = \Phi(x, y_1, y_1', \dots, y_1^{(n-1)}). \quad (5)$$

Ekuazio hori ebatziz y_1 determinatzen dugu:

$$y_1 = \psi_1(x, C_1, C_2, \dots, C_n). \quad (6)$$

Adierazpen hori $(n-1)$ aldiz deribatuz, $\frac{dy_1}{dx}$, $\frac{d^2 y_1}{dx^2}$, ..., $\frac{d^{n-1} y_1}{dx^{n-1}}$ deribatuak, x , C_1 , C_2 , ..., C_n -ren funtzio bezala bilatzen ditugu.

Funtzio horiek (4) ekuazioetan ordezkatzuz y_2 , y_3 , ..., y_n lortzen ditugu:

$$\left. \begin{aligned} y_2 &= \psi_2(x, C_1, C_2, \dots, C_n), \\ &\dots\dots\dots \\ y_n &= \psi_n(x, C_1, C_2, \dots, C_n). \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Lortutako soluzioak (2) emandako hastapen-baldintzak bete ditzan nahikoa da (6) eta (7) ekuazioetatik C_1 , C_2 , ..., C_n konstanteak kalkulatzeko (ekuazio diferentzial bakar baten kasuan egin dugun bezala).

1. Oharra. (1) sistema funtzio ezezagunekiko lineala bada (5) ekuazioa ere lineala izango da.

1. Adibidea. Integratu

$$\frac{dy}{dx} = y + z + x, \quad \frac{dz}{dx} = -4y - 3z + 2x \quad (a)$$

sistema,

$$(y)_{x=0} = 1, \quad (z)_{x=0} = 0 \quad (b)$$

hastapen-baldintzen pean.

Ebazpena. (1) lehenengo ekuazioa x -rekiko deribatuz

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dy}{dx} + \frac{dz}{dx} + 1$$

daukagu.

(a) ekuazioak emandako $\frac{dy}{dx}$ eta $\frac{dz}{dx}$ adierazpenak ordezkatzuz

$$\frac{d^2y}{dx^2} = (y + z + x) + (-4y - 3z + 2x) + 1$$

edo

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -3y - 2z + 3x + 1 \quad (\text{c})$$

lortzen dugu.

2) (a) sistemaren lehenengo ekuaziotik

$$z = \frac{dy}{dx} - y - x \quad (\text{d})$$

ateratzen dugu, eta (c) ekuazioan ordezkatzuz

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -3y - 2\left(\frac{dy}{dx} - y - x\right) + 3x + 1$$

edo

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} + y = 5x + 1 \quad (\text{e})$$

lortzen dugu.

Azken ekuazioaren soluzio orokorra

$$y = (C_1 + C_2x)e^{-x} + 5x - 9 \quad (\text{f})$$

da eta (d) berdintzaren arabera

$$z = (C_2 - 2C_1 - 2C_2x)e^{-x} - 6x + 14. \quad (g)$$

Aukera ditzagun C_1 eta C_2 konstanteak (b) hastapen-baldintzak bete daitezen:

$$(y)_{x=0} = 1, \quad (z)_{x=0} = 0.$$

Orduan, (f) eta (g) berdintzetatik

$$1 = C_1 - 9; \quad 0 = C_2 - 2C_1 + 14$$

ondorioztatzen da, eta hortik $C_1 = 10$; $C_2 = 6$.

Hortaz, (b) emandako hastapen-baldintzak betetzen dituen soluzioa

$$y = (10 + 6x)e^{-x} + 5x - 9, \quad z = (-14 - 12x)e^{-x} - 6x + 14$$

da.

2. Oharra. Azaldutako arrazonamenduetan (3) sistemaren lehenengo ($n-1$) ekuazioetatik $y_2, y_3, \dots, y_n$ funtzioak bakan zitezkeela suposatu dugu. Hala ere, gerta liteke $y_2, \dots, y_n$ aldagaiak ekuazio-kopuru txikiagotik bakandu ahal izatea. Orduan, y_1 determinatzeko n baino ordena txikiagoko ekuazioa lortuko genuke.

2. Adibidea. Integratu

$$\frac{dx}{dt} = y + z; \quad \frac{dy}{dt} = x + z; \quad \frac{dz}{dt} = x + y$$

sistema.

Ebazpena. Lehenengo ekuazioa t -rekiko deribatuz

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dy}{dt} + \frac{dz}{dt} = (x + z) + (x + y),$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 2x + y + z$$

aurkitzen dugu.

y eta z aldagaiak

$$\frac{dx}{dt} = y + z; \quad \frac{d^2x}{dt^2} = 2x + y + z$$

ekuazioetatik ezabatuz x -rekiko 2. ordenako ekuazioa lortzen dugu:

$$\frac{d^2x}{dt^2} - \frac{dx}{dt} - 2x = 0.$$

Ekuazio hori integratuz bere soluzio orokorra,

$$x = C_1 e^{-t} + C_2 e^{2t}, \quad (\alpha)$$

lortzen dugu, nondik

$$\frac{dx}{dt} = -C_1 e^{-t} + 2C_2 e^{2t} \quad \text{eta} \quad y = \frac{dx}{dt} - z = -C_1 e^{-t} + 2C_2 e^{2t} - z \quad (\beta)$$

erdiesten ditugun.

x eta y -rako aurkitutako adierazpenak emandako sistemaren hirugarren ekuazioan sartuz gero z determinatzen duen ekuazioa,

$$\frac{dz}{dt} + z = 3C_2 e^{2t}$$

alegia, lortzen dugu. Ekuazio hori integratuz

$$z = C_3 e^{-t} + C_2 e^{2t} \quad (\gamma)$$

topatzen dugu. Baina, orduan, (β) ekuazioen arabera

$$y = -(C_1 + C_3) e^{-t} + C_2 e^{2t} \quad (\delta)$$

ateratzen dugu. (α) , (δ) eta (γ) ekuazioek sistema proposatuaren soluzio orokorra osatzen dute.

Sistema baten ekuazio diferentzialek lehenengoa baino ordena handiagoko deribatuak eduki ditzakete. Kasu horretan, ordena handiagoko ekuazio diferentzialezko sistema izango dugu.

Honela, adibidez, puntu material baten F indarraren eraginaren menpeko higiduraren problema bigarren ordenako hiru ekuazio diferentzialezko sistema batera murrizten da. Izan bitez F_x, F_y, F_z, F indarraren koordenatu-ardatzen gaineko projekzioak. Puntu baten posizioa t aldiune bakoitzean x, y, z bere koordenatuek mugatua da. Hortaz, x, y, z t -ren funtzioak dira. Puntu materialaren abiadura-bektorearen koordenatu-ardatzen gaineko projekzioak

$$\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}$$

izango dira.

Demagun F indarra, eta, ondorioz, bere projekzioak F_x, F_y, F_z, t denbora, puntuaren x, y, z posizio eta bere higiduraren abiaduraren, hau da,

$$\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt} - \text{aren}$$

menpe daudela.

Problema honetan bilatutako funtzioak

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t)$$

dira.

Funtzio horiek dinamikaren ekuazioen bidez determinatzen dira (Newton-en legea):

$$\left. \begin{aligned} m \frac{d^2 x}{dt^2} &= F_x \left(t, x, y, z, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt} \right), \\ m \frac{d^2 y}{dt^2} &= F_y \left(t, x, y, z, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt} \right), \\ m \frac{d^2 z}{dt^2} &= F_z \left(t, x, y, z, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt} \right). \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Bigarren ordenako hiru ekuazio diferentzialezko sistema baten aurrean gaude. Higidura launa bada, hau da, ibilbidea kurba launa bada (Oxy planoan kokatua esaterako), bi ekuaziozko sistema dugu $x(t)$ eta $y(t)$ funtzioak determinatzeko:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = F_x \left(t, x, y, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt} \right), \quad (9)$$

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} = F_y \left(t, x, y, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt} \right). \quad (10)$$

Ordena handiagoko ekuazio diferentzialezko sistema bat ebatz daiteke lehen ordenako ekuaziozko sistema batera pasatuz. (9) eta (10) ekuazioak erabiliz, adibidez, ikus dezagun ebazpide bat.

$$\frac{dx}{dt} = u, \quad \frac{dy}{dt} = v$$

idazkerak sar ditzagun. Orduan,

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{du}{dt}, \quad \frac{d^2 y}{dt^2} = \frac{dv}{dt}.$$

$x(t)$ eta $y(t)$ funtzio ezezagunak dituen bigarren ordenako (9) eta (10) bi ekuaziozko sistema ordezkatzan da x , y , u , v funtzio ezezagunak dituen lehenengo ordenako lau ekuaziozko sistemaz:

$$\frac{dx}{dt} = u, \quad \frac{dy}{dt} = v,$$

$$m \frac{du}{dt} = F_x(t, x, u, v),$$

$$m \frac{dv}{dt} = F_y(t, x, u, v).$$

Ohar gaitezen, ondorio bezala, ekuazio diferentzialezko sistemen ebazte-metodo orokor hori ordezkari daitekeela, kasu konkretu batzutan, helburura azkarrago garmatzen beste erabide artifizial batez.

3. Adibidea. Bilatu

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = z, \quad \frac{d^2 z}{dx^2} = y$$

ekuazio diferentzialezko sistemaren soluzio orokorra

alegia.

Beraz, (2) soluzio ez-nabaria (4) determinantea anulatzen duten k -ren balioetarako soilik lortuko ditugu. Honela, k determinatzeko n . ordenako ekuazio batera iritsiko gara:

$$\Delta(k) = \begin{vmatrix} a_{11} - k & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - k & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - k \end{vmatrix} = 0. \quad (5)$$

Ekuazio horri, (1) sistemaren *ekuazio karakteristiko* deitzen zaio, eta bere erroei *ekuazio karakteristikoaren erro* deritze.

Azter dezagun zenbait kasu.

I. Ekuazio karakteristikoaren erroak errealak eta desberdinak dira.

Izan bitez $k_1, k_2, \dots, k_i$ ekuazio karakteristikoaren erroak. Idatz dezagun (3) sistema erro bakoitzerako eta determina ditzagun

$$\alpha_1^{(i)}, \alpha_2^{(i)}, \dots, \alpha_n^{(i)}$$

koefizienteak. Froga daiteke koefizienteetako bat hauta daitekeela eta 1 izan daitekeela. Horrela, zera lortuko dugu:

k_1 errorako, (1) sistemaren soluzioa:

$$x_1^{(1)} = \alpha_1^{(1)} e^{k_1 t}, \quad x_2^{(1)} = \alpha_2^{(1)} e^{k_1 t}, \quad \dots, \quad x_n^{(1)} = \alpha_n^{(1)} e^{k_1 t};$$

k_2 errorako, (1) sistemaren soluzioa:

$$x_1^{(2)} = \alpha_1^{(2)} e^{k_2 t}, \quad x_2^{(2)} = \alpha_2^{(2)} e^{k_2 t}, \quad \dots, \quad x_n^{(2)} = \alpha_n^{(2)} e^{k_2 t};$$

k_n errorako, (1) sistemaren soluzioa:

$$x_1^{(n)} = \alpha_1^{(n)} e^{k_n t}, \quad x_2^{(n)} = \alpha_2^{(n)} e^{k_n t}, \quad \dots, \quad x_n^{(n)} = \alpha_n^{(n)} e^{k_n t}.$$

Ekuazioetan ordezkapen zuzenaren bidez

$$\left. \begin{aligned} \alpha_1^{(1)} + 2\alpha_2^{(1)} &= 0, \\ \alpha_1^{(1)} + 2\alpha_2^{(1)} &= 0, \end{aligned} \right\}$$

nondik $\alpha_2^{(1)} = -\frac{1}{2}\alpha_1^{(1)}$ daukagun. $\alpha_1^{(1)} = 1$ eginez gero, $\alpha_2^{(1)} = -\frac{1}{2}$ lortuko dugu.

Horrela, sistemaren soluzioa lortu dugu:

$$x_1^{(1)} = e^t, \quad x_2^{(1)} = -\frac{1}{2}e^t.$$

Era dezagun, orain, $k_2 = 4$ erroari dagokion (3) sistema eta $\alpha_1^{(2)}$ eta $\alpha_2^{(2)}$ kalkulatu ditugu:

$$\left. \begin{aligned} -2\alpha_1^{(2)} + 2\alpha_2^{(2)} &= 0, \\ \alpha_1^{(2)} - \alpha_2^{(2)} &= 0, \end{aligned} \right\}$$

nondik

$$\alpha_1^{(2)} = \alpha_2^{(2)} \quad \text{eta} \quad \alpha_1^{(2)} = 1, \quad \alpha_2^{(2)} = 1$$

bait ditugu. Beraz, sistemaren bigarren soluzioa daukagu:

$$x_1^{(2)} = e^{4t}, \quad x_2^{(2)} = e^{4t}.$$

Sistemaren soluzio orokorra

$$x_1 = C_1 e^t + C_2 e^{4t},$$

$$x_2 = -\frac{1}{2}C_1 e^t + C_2 e^{4t}$$

izango da [ikus (6)].

II. Ekuazio karakteristikoaren erroak desberdinak dira, baina erro konplexuak daude. Demagun ekuazio karakteristikoaren erroen artean bi erro konplexu konjugatu dagoela:

$$k_1 = \alpha + i\beta, \quad k_2 = \alpha - i\beta.$$

Erro horiei

$$x_j^{(1)} = \alpha_j^{(1)} e^{(\alpha+i\beta)t} \quad (j=1,2,\dots,n), \quad (7)$$

$$x_j^{(2)} = \alpha_j^{(2)} e^{(\alpha-i\beta)t} \quad (j=1,2,\dots,n) \quad (8)$$

soluzioak dagozkie.

$\alpha_j^{(1)}$ eta $\alpha_j^{(2)}$ koefizienteak (3) ekuazio-sistematik aterako dira.

§ 21.ean bezala soluzio konplexuaren zati erreala eta irudikaria ere soluzio direla frogatu liteke. Era horretan bi soluzio partikular lortzen ditugu:

$$\left. \begin{aligned} \bar{x}_j^{(1)} &= e^{\alpha t} (\lambda_j^{(1)} \cos \beta x + \bar{\lambda}_j^{(2)} \sin \beta x), \\ \bar{x}_j^{(2)} &= e^{\alpha t} (\bar{\lambda}_j^{(1)} \sin \beta x + \bar{\lambda}_j^{(2)} \cos \beta x), \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

non $\lambda_j^{(1)}$, $\lambda_j^{(2)}$, $\bar{\lambda}_j^{(1)}$, $\bar{\lambda}_j^{(2)}$, $\alpha_j^{(1)}$ eta $\alpha_j^{(2)}$ -ren bidez determinatutako zenbaki errealak bait dira.

(9) funtzioen konbinazioak sistemaren soluzio orokorrean sartzen dira.

2. Adibidea. Aurkitu

$$\frac{dx_1}{dt} = -7x_1 + x_2,$$

$$\frac{dx_2}{dt} = -2x_1 - 5x_2$$

sistemaren soluzio orokorra.

Ebazpena. Era dezagun ekuazio karakteristikoak:

$$\begin{vmatrix} -7-k & 1 \\ -2 & -5-k \end{vmatrix} = 0$$

edo

$$k^2 + 12k + 37 = 0$$

eta kalkula ditzagun bere erroak:

$$k_1 = -6 + i, \quad k_2 = -6 - i.$$

$k_1 = -6 + i$ (3) sisteman ordezkatzuz

$$\alpha_1^{(1)} = 1, \quad \alpha_2^{(1)} = 1 + i$$

topatzen ditugu. Idatz dezagun (7) soluzioa:

$$x_1^{(1)} = 1e^{(-6+i)t}, \quad x_2^{(1)} = (1+i)e^{(-6+i)t}. \quad (7')$$

$k_2 = -6 - i$ (3) sisteman ordezkatzuz gero

$$\alpha_1^{(2)} = 1, \quad \alpha_2^{(2)} = 1 - i$$

lortzen ditugu. (8) soluzioen bigarren sistema,

$$x_1^{(2)} = e^{(-6-i)t}, \quad x_2^{(2)} = (1-i)e^{(-6-i)t} \quad (8')$$

lor dezagun. (7') soluzioa beste era batera idatz dezagun:

$$x_1^{(1)} = e^{-6t}(\cos t + i \sin t), \quad x_2^{(1)} = (1+i)e^{-6t}(\cos t + i \sin t)$$

edo

$$x_1^{(1)} = e^{-6t} \cos t + ie^{-6t} \sin t,$$

$$x_2^{(1)} = e^{-6t}(\cos t - \sin t) + ie^{-6t}(\cos t + \sin t).$$

(8') soluzioa ere beste eran idatziz:

$$x_1^{(2)} = e^{-6t} \cos t - ie^{-6t} \sin t,$$

$$x_2^{(2)} = e^{-6t}(\cos t - \sin t) - ie^{-6t}(\cos t + \sin t).$$

Soluzio partikularren sistema bezala zati errealak eta irudikariak banaturik har ditzakegu:

$$\left. \begin{aligned} \bar{x}_1^{(1)} &= e^{-6t} \cos t, & \bar{x}_2^{(1)} &= e^{-6t} (\cos t - \sin t), \\ \bar{x}_1^{(2)} &= e^{-6t} \sin t, & \bar{x}_2^{(2)} &= e^{-6t} (\cos t + \sin t). \end{aligned} \right\} \quad (9')$$

Sistemaren soluzio orokorra

$$x_1 = C_1 e^{-6t} \cos t + C_2 e^{-6t} \sin t,$$

$$x_2 = C_1 e^{-6t} (\cos t - \sin t) + C_2 e^{-6t} (\cos t + \sin t)$$

da.

Era berean aurki liteke ordena handiagoko koefiziente konstantedun ekuazio diferentzial linealezko sistema baten soluzioa.

Bai mekanikan bai zirkuitu elektrikoien teorian aztertzen da, esate baterako,

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 x}{dt^2} &= a_{11}x + a_{12}y, \\ \frac{d^2 y}{dt^2} &= a_{21}x + a_{22}y \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

bigarren ordenako ekuazio diferentzialezko sistemaren soluzioa.

$x = \alpha e^{kt}$, $y = \beta e^{kt}$ itxurako soluzio bat bilatzen da.

Adierazpen horiek (10) sisteman sartuz eta e^{kt} sinplifikatuz gero

$$\left. \begin{aligned} (a_{11} - k^2)\alpha + a_{12}\beta &= 0, \\ a_{21}\alpha + (a_{22} - k^2)\beta &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

ekuazio-sistema lortuko dugu, α , β eta k determinatzeko. α eta β ez dira zero, sistemaren determinantea zero denean soilik determina daitezke:

$$\begin{vmatrix} a_{11} - k^2 & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - k^2 \end{vmatrix} = 0. \quad (12)$$

Hori da (10) sistemaren ekuazio karakteristikoa. k -rekiko laugarren mailako ekuazio karakteristikoa da. Izan bitez k_1, k_2, k_3, k_4 bere erroak (demagun desberdinak direla).

(11) sistemaren k_i erro bakoitzerako α eta β balioak aurkituko ditugu. (6) kasuan bezala soluzio orokorrak

$$x = C_1 \alpha^{(1)} e^{k_1 t} + C_2 \alpha^{(2)} e^{k_2 t} + C_3 \alpha^{(3)} e^{k_3 t} + C_4 \alpha^{(4)} e^{k_4 t},$$

$$y = C_1 \beta^{(1)} e^{k_1 t} + C_2 \beta^{(2)} e^{k_2 t} + C_3 \beta^{(3)} e^{k_3 t} + C_4 \beta^{(4)} e^{k_4 t}$$

itxura dauka.

Erroen artean konplexuak badaude, erro konplexuen bikote bakoitzari, soluzio orokorrean, (9) itxurako adierazpenak dagozkio.

3. Adibidea. Aurkitu

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = x - 4y,$$

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = -x + y$$

ekuazio diferentzialezko sistemaren soluzio orokorra.

Ebazpena. Idatz dezagun (12) ekuazio karakteristikoa eta bere erroak kalkula ditzagun:

$$\begin{vmatrix} 1 - k^2 & -4 \\ -1 & 1 - k^2 \end{vmatrix} = 0,$$

$$k_1 = i, \quad k_2 = -i, \quad k_3 = \sqrt{3}, \quad k_4 = -\sqrt{3}.$$

$$\begin{aligned} x^{(1)} &= \alpha^{(1)} e^{it}, & y^{(1)} &= \beta^{(1)} e^{it}, \\ x^{(2)} &= \alpha^{(2)} e^{-it}, & y^{(2)} &= \beta^{(2)} e^{-it}, \\ x^{(3)} &= \alpha^{(3)} e^{\sqrt{3}t}, & y^{(3)} &= \beta^{(3)} e^{\sqrt{3}t}, \\ x^{(4)} &= \alpha^{(4)} e^{-\sqrt{3}t}, & y^{(4)} &= \beta^{(4)} e^{-\sqrt{3}t} \end{aligned}$$

itxurako soluzioa bilatuko dugu.

(11) sistematik $\alpha^{(j)}$ eta $\beta^{(j)}$ ateratzen ditugu:

$$\begin{aligned}\alpha^{(1)} &= 1, & \beta^{(1)} &= \frac{1}{2}, \\ \alpha^{(2)} &= 1, & \beta^{(2)} &= \frac{1}{2}, \\ \alpha^{(3)} &= 1, & \beta^{(3)} &= -\frac{1}{2}, \\ \alpha^{(4)} &= 1, & \beta^{(4)} &= -\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Idatz ditzagun soluzio konplexuak:

$$\begin{aligned}x^{(1)} &= e^{it} = \cos t + i \sin t, & y^{(1)} &= \frac{1}{2}(\cos t + i \sin t), \\ x^{(2)} &= e^{-it} = \cos t - i \sin t, & y^{(2)} &= \frac{1}{2}(\cos t - i \sin t).\end{aligned}$$

Zati erreal eta irudikariek, banatuak hartuta, soluzioak osatzen dituzte:

$$\begin{aligned}\bar{x}^{(1)} &= \cos t, & \bar{y}^{(1)} &= \frac{1}{2} \cos t, \\ \bar{x}^{(2)} &= \sin t, & \bar{y}^{(2)} &= \frac{1}{2} \sin t.\end{aligned}$$

Idatz dezagun, azkenik, soluzio orokorra:

$$\begin{aligned}x &= C_1 \cos t + C_2 \sin t + C_3 e^{\sqrt{3}t} + C_4 e^{-\sqrt{3}t}, \\ y &= C_1 \frac{1}{2} \cos t + \frac{1}{2} C_2 \sin t - C_3 \frac{1}{2} e^{\sqrt{3}t} - C_4 \frac{1}{4} e^{-\sqrt{3}t}.\end{aligned}$$

Oharra. Ez dugu hemen ekuazio karakteristikoaren erro anizkoitzen kasua analisatu, liburu honen betebeharra gainditzen bait du.

§ 31. Liapunov-en egonkortasunaren teoriari buruzko nozioak

Ekuazio diferentzial eta ekuazio-sistema gehienek soluzioak funtzio elemental edo koadraturen bidez adierazi ezin direnez, kasu horietan, ekuazio diferentzial konketuak ebazteko integrazio hurbilduen metodoak erabiltzen dira. Metodo horien zenbait nozio § 3. atalean eman dugu; beste metodo batzuk § 32-34 ataletan eta XVI. gaian analisatuko ditugu.

Metodo horien hutsunea soluzio partikular bakar bat ematea da, beste soluzio partikularrak lortzeko kalkulu guztiak berriz egin behar direlarik. Soluzio partikular bat ezagutuz ez dago beste soluzioen izaeraz ezer esaterik.

Mekanika eta teknikako problema askotan ez du inportantziarik emandako aldagaiaren balioei dagokien soluzioaren balio konkretuak jakiteak, baizik eta soluzioaren aldakuntzaren izaera, bereziki, aldagaiak infiniturantz jotzen duenean. Esate baterako, emandako baldintzak betetzen dituzten soluzioak periodikoak direnontz edo funtzio ezagun baterantz asintotikoki jotzen dutenontz, e.a. jakiteak inportantziarik dauka. Problema horiek ekuazio diferentzialen teoria kualitatiboari dagozkio.

Soluzio edo higadura baten egonkortasunaren auzia teoria kualitatiboaren oinarritzko problemetakoa dugu; berori, A.M. Liapunov (1857-1918) matematikari errusiar ospetsuak zehatz-mehatz analisatu zuen.

Izan bedi

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= f_1(t, x, y), \\ \frac{dy}{dt} &= f_2(t, x, y) \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

ekuazio diferentzialezko sistema. Izan bitez $x = x(t)$ eta $y = y(t)$

$$\left. \begin{aligned} x_{t=0} &= x_0, \\ y_{t=0} &= y_0 \end{aligned} \right\} \quad (1')$$

hastapen-baldintzak betetzen dituzten sistema horren soluzioak. Izan bitez, bestalde, $\bar{x} = \bar{x}(t)$ eta $\bar{y} = \bar{y}(t)$

$$\left. \begin{aligned} \bar{x}_{t=0} &= \bar{x}_0, \\ \bar{y}_{t=0} &= \bar{y}_0 \end{aligned} \right\} \quad (1'')$$

hastapen-baldintzak betetzen dituzten (1) sistemaren soluzioak.

Definizioa. (1) ekuazioak eta (1') hastapen-baldintzak betetzen dituzten $x = x(t)$ eta $y = y(t)$ soluzioei *egonkor* deitzen zaie, Liapunov-en arabera, $t \rightarrow \infty$ denean, $\varepsilon > 0$ bakoitzerako, txikia izan arren, $\delta > 0$ bat existitzen bada, non $t > 0$ balio guztietarako

$$\left. \begin{aligned} |\bar{x}(t) - x(t)| &< \varepsilon, \\ |\bar{y}(t) - y(t)| &< \varepsilon \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

desberdintzak betetzen bait dira hastapen-baldintzek

$$\left. \begin{array}{l} |\bar{x}_0 - x_0| < \delta \\ |\bar{y}_0 - y_0| < \delta \end{array} \right\} \quad (3)$$

desberdintzak betez gero.

Azal dezagun definizio horren esanahia. (2) eta (3) desberdintzetatik, hastapen-baldintzen aldakuntzak txikiak badira dagozkien soluzioak gutxi aldatzen direla ondorioztatzen da, t -ren edozein balio positibo izanik ere. Ekuazio diferentzialezko sistemak higidura bat deskribatzen badu, soluzioak egonkorak badira, higiduraren izaera gutxi aldatuko da hasierako baldintzak gutxi aldatuz gero.

Analisa dezagun hori lehen ordenako ekuazio baten adibide batean.

Izan bedi

$$\frac{dy}{dt} = -y + 1 \quad (a)$$

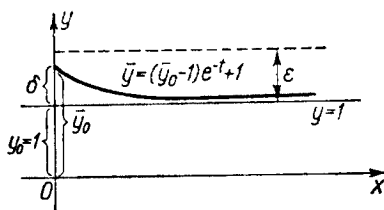
ekuazio diferentziala. Bere, soluzio orokorra

$$y = Ce^{-t} + 1 \quad (b)$$

funtzioa da. Aurki dezagun

$$y_{t=0} = 1 \quad (c)$$

hastapen-baldintza betetzen duen soluzio partikularra.



274. IRUDIA

Bistakoa da soluzio hori, $y = 1$, $C = 0$ denean lortzen dela (274. irudia). Aurki dezagun, orain,

$$\bar{y}_{t=0} = \bar{y}_0$$

hastapen-baldintza betetzen duen soluzio partikularra.

(b) ekuaziotik C -ren balioa bila dezagun:

$$\bar{y}_0 = C + 1,$$

hortik

$$C = \bar{y}_0 - 1.$$

C -ren balio hori (b) ekuazioan ordezkatzuz

$$\bar{y} = (\bar{y}_0 - 1)e^{-t} + 1$$

lortzen dugu. Bistakoa da $y = 1$ soluzioa egonkorra dela. Izan ere,

$$y - \bar{y} = [(\bar{y}_0 - 1)e^{-t} + 1] - 1 = (\bar{y}_0 - 1)e^{-t} \rightarrow 0,$$

$t \rightarrow \infty$ denean.

Hortaz, (2) desberdintza betetzen da, ε edozein izanik ere, baldin eta

$$(\bar{y}_0 - 1) = \delta < \varepsilon$$

desberdintza betetzen bada.

Kontsidera dezagun orain

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= cx + gy, \\ \frac{dy}{dt} &= ax + by \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

ekuazio-sistema, a, b, c, g koefizienteak konstanteak eta $g \neq 0$ suposatuz.

Ikus dezagun zeintzu baldintza bete behar duten koefizienteek sistemaren $x = 0$, $y = 0$ soluzioa egonkorra izan dadin.

Lehenengo ekuazioa deribatuz eta y ezabatuz, bigarren ordenako ekuazio bat,

$$\frac{d^2x}{dt^2} = c \frac{dx}{dt} + g \frac{dy}{dt} = c \frac{dx}{dt} + g(ax + by) = c \frac{dx}{dt} + agx + b \left(\frac{dx}{dt} - cx \right)$$

edo

$$\frac{d^2x}{dt^2} - (b+c) \frac{dx}{dt} - (ag-bc)x = 0 \quad (5)$$

lortzen dugu.

Bere ekuazio karakteristikoak

$$\lambda^2 - (b+c)\lambda - (ag-bc) = 0 \quad (6)$$

itxura dauka.

Izenda ditzagun λ_1 eta λ_2 -z ekuazio karakteristikoaren erroak. Hurrengo kasuak eman daitezke:

1. Ekuazio karakteristikoaren erroak errealak, negatiboak eta desberdinak dira:

$$\lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0, \lambda_1 \neq \lambda_2.$$

Orduan,

$$x = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t},$$

$$y = \left[C_1 (\lambda_1 - c) e^{\lambda_1 t} + C_2 (\lambda_2 - c) e^{\lambda_2 t} \right] \frac{1}{g}.$$

$$x|_{t=0} = x_0, \quad y|_{t=0} = y_0$$

hastapen-baldintzak betetzen dituen soluzioa

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{cx_0 + gy_0 - x_0\lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2} e^{\lambda_1 t} + \frac{x_0\lambda_1 - cx_0 - y_0g}{\lambda_1 - \lambda_2} e^{\lambda_2 t}, \\ y &= \frac{1}{g} \left[\frac{cx_0 + gy_0 - x_0\lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2} (\lambda_1 - c) e^{\lambda_1 t} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{x_0\lambda_1 - cx_0 - y_0g}{\lambda_1 - \lambda_2} (\lambda_2 - c) e^{\lambda_2 t} \right] \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

da.

Azken formuletatik zera ondoriozta daiteke: edozein ε positibotarako x_0 eta y_0 nahiko txikiak aukera daitezkeela, non, $t > 0$ guztietarako, $e^{\lambda_1 t} < 1$ eta $e^{\lambda_2 t} < 1$ denez gero,

$$|x(t)| < \varepsilon, \quad |y(t)| < \varepsilon$$

bait dugu. Hortaz, kasu honetan $x=0, y=0$ soluzioa egonkorra da.

2. Izan bitez $\lambda_1 = 0$ eta $\lambda_2 < 0$. Kasu honetan,

$$x = C_1 + C_2 e^{\lambda_2 t},$$

$$y = \frac{1}{g} [C_2 (\lambda - c) e^{\lambda_2 t} - c C_1]$$

dugu eta, aurreko kasuan bezala, soluzioa egonkorra da.

3. Izan bedi $\lambda_1 = \lambda_2 < 0$. Kasu honetan

$$x = (C_1 + C_2 t) e^{\lambda_1 t},$$

$$y = \frac{1}{g} e^{\lambda_1 t} [C_1 (\lambda_1 - c) + C_2 (1 + \lambda_1 t - ct)]$$

dugu. $t \rightarrow \infty$ denean $t e^{\lambda_1 t} \rightarrow 0$ eta $e^{\lambda_1 t} \rightarrow 0$ direnez gero, C_1 eta C_2 nahiko txikiak badira (hau da, x_0 eta y_0 nahiko txikiak direnean) $|x(t)| < \varepsilon$ eta $|y(t)| < \varepsilon$ izango dugu edozein t positibotarako. Soluzioa egonkorra da.

4. Izan bedi $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. Oraingoan,

$$x = C_1 + C_2 t,$$

$$y = \frac{1}{g} [-c C_1 + C_2 - c C_2 t]$$

daukagu. $C_2 \neq 0$ txikia bada ere, $t \rightarrow \infty$ denean x zein y -k infiniturantz jotzen dutela dakusagu, hau da, soluzioa ezegonkorra da.

5. Demagun λ_1 eta λ_2 erroetako bat gutxienez positiboa dela, adibidez, $\lambda_1 > 0$.

(7) formulatik, x_0 eta y_0 txikiak badira ere, baldin $c x_0 + g y_0 - x_0 \lambda_2 \neq 0$ bada, hots, baldin $C_1 \neq 0$ bada, $|x(t)| \rightarrow \infty$ betetzen da, $t \rightarrow \infty$ denean.

Hortaz, kasu honetan ere soluzioa ezegonkorra da.

6. Ekuazio karakteristikoaren erroak konplexuak dira eta zati erreal negatiboa daukate:

$$\left. \begin{array}{l} \lambda_1 = \alpha + i\beta \\ \lambda_2 = \alpha - i\beta \end{array} \right\} \quad \alpha < 0.$$

Kasu honetan

$$\left. \begin{array}{l} x = Ce^{\alpha t} \sin(\beta t + \delta), \\ y = \frac{1}{g} Ce^{\alpha t} [(\alpha - c) \sin(\beta t + \delta) + \beta \cos(\beta t + \delta)] \end{array} \right\} \quad (8)$$

dugu. Bistakoa da, $\varepsilon > 0$ guztietarako x_0 eta y_0 aukera daitezkeela $|C| < \varepsilon$ eta

$$\frac{|\alpha - c| + |\beta|}{|d|} < \varepsilon \text{ izan daitezen, eta, ondorioz,}$$

$$|x(t)| < \varepsilon \quad \text{eta} \quad |y(t)| < \varepsilon.$$

Soluzioa egonkorra da.

7. Ekuazio karakteristikoaren erroak zenbaki irudikari puruak dira:

$$\lambda_1 = \beta i, \quad \lambda_2 = -\beta i.$$

Kasu honetan,

$$x = C \sin(\beta t + \delta),$$

$$y = \frac{1}{g} C [\beta \cos(\beta t + \delta) - c \sin(\beta t + \delta)],$$

hau da, $x(t)$ eta $y(t)$ t -ren funtzio periodikoak dira. Aurreko kasuan bezala soluzioa egonkorra da.

8. Ekuazio karakteristikoaren erroak konplexuak dira eta zati erreal positiboa daukate ($\alpha > 0$).

(8) formuletatik, x_0 eta y_0 txikiak izan arren (hau da, hautazko $C \neq 0$ txikietarako), $|x(t)|$ eta $|y(t)|$ magnitudeek edonolako balio handia har dezakete t hazten denean, $t \rightarrow \infty$ denean $e^{\alpha t} \rightarrow \infty$ bait da. Soluzioa ezegonkorra da.

(4) sistemaren soluzioaren egonkortasun-irizpide orokorra emateko, ondoko erara ihardun dezagun:

Ekuazio karakteristikoaren erroak zenbaki konplexu bezala idatz ditzagun:

$$\lambda_1 = \lambda_1^* + i\lambda_1^{**}, \quad \lambda_2 = \lambda_2^* + i\lambda_2^{**}$$

(erro errealak balira: $\lambda_1^{**} = 0$ eta $\lambda_2^{**} = 0$).

Adieraz ditzagun ekuazio karakteristikoaren erroak $\lambda^* \lambda^{**}$ aldagai konplexuaren planoko puntuen bidez. Orduan, aztertutako zortzi kasuak laburbilduz, (4) sistemaren soluzioaren egonkortasun-baldintza ondoko eran formula liteke.

(6) ekuazio karakteristikoaren λ_1 eta λ_2 erroetatik bat ere ez badago ardatz irudikariaren eskuinean, eta gutxienez erro bat nulua ez bada, soluzioa egonkorra da; bi erroak nuluak badira edo erroetako bat ardatz irudikariaren eskuinaldean badago, soluzioa ezegonkorra da.

Kontsidera dezagun orain

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= cx + gy + P(x, y), \\ \frac{dy}{dt} &= ax + by + Q(x, y) \end{aligned} \right\} \quad (4')$$

ekuazio-sistema orokorragoa. Kasu partikularrak salbu, halako sistemaren soluzioa ez da funtzio elementalen edo koardaturen bidez adierazgarri.

Sistema horren soluzioak egonkorak ala ezegonkorak diren determinatzeko, sistema lineal baten soluzioekin konparatzen dira. Demagun $x \rightarrow 0$ eta $y \rightarrow 0$ denean $P(x, y)$ eta $Q(x, y)$ funtzioek ere zerorantz ρ baino azkarrago jotzen dutela, $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ izanik; beste hitzetan,

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{P(x, y)}{\rho} = 0; \quad \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{Q(x, y)}{\rho} = 0.$$

Orduan, froga liteke, aparteko kasu bat ezik, (4') sistemaren soluzioa egonkorra dela baldin eta

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= cx + gy, \\ \frac{dy}{dt} &= ax + by \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

sistemarena egonkorra bada eta ezegonkorra dela baldin eta (4) sistemaren soluzioa ezegonkorra bada. Aparteko kasua, ekuazio karakteristikoaren erroak ardatz irudikarian daudeneko kasua dugu. Orduan, askoz zailagoa da (4') sistemaren soluzioaren egonkortasun edo ezegonkortasunaren problema ebaztea.

A.M. Liapunov-ek¹⁵⁾ ekuazio-sistemen soluzioen egonkortasunaren problema ekuazioen itxurari buruzko baldintza nahikoa orokorretatik abiatuz analisatu zuen.

§ 32. Lehen ordenako ekuazio diferentzialen soluzio hurbildua Euler-en metodoa erabiliz

Lehen ordenako ekuazio diferentzialaren zenbakizko ebazpenaren bi metodo aztertuko ditugu. Atal honetan Euler-en metodoa analisatuko dugu.

Aurki dezagun

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \quad (1)$$

ekuazioaren soluzio hurbildua $[x_0, b]$ tartean, $x = x_0$ denean $y = y_0$ hastapen-baldintza betetzen duena alegia. Zati dezagun $[x_0, b]$ tartea n zati berdinetan $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n = b$ puntuen bidez (hemen, $x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n$). Izenda ditzagun $x_1 - x_0 = x_2 - x_1 = \dots = b - x_{n-1} = \Delta x = h$, hortaz,

$$h = \frac{b - x_0}{n}.$$

Izan bitez $y = \varphi(x)$ (1) ekuazioaren soluzio hurbildu bat eta $y_0 = \varphi(x_0)$, $y_1 = \varphi(x_1)$, ..., $y_n = \varphi(x_n)$.

Sar ditzagun

$$\Delta y_0 = y_1 - y_0, \quad \Delta y_1 = y_2 - y_1, \quad \dots, \quad \Delta y_{n-1} = y_n - y_{n-1}$$

15) A.M. Liapunov, "Higiduraren egonkortasunaren problema orokorra", 1935.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f(x, u), \quad (2)$$

$x = x_0$ denean

edo

daukagu. Azken berdintzan x_0, y_0, h ezagunak dira. Hortaz,

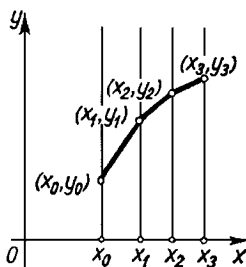
aurkitzen dugu. $x = x_1$ denean, (2') ekuazioak

edo

itxura hartzen du. Hor ezagunak x_1, y_1, h ditugu eta y_2 determinatzen dugu. Era antzekoan

daukagu. Beraz, $x_0, x_1, \dots, x_n$ puntuetako soluzioaren balio hurbilduak aurkitu ditugu. Koordenatu-planoan $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$ puntuak zuzenkien bidez

bilduz lerro hautsi bat lortzen dugu, linea integralaren adierazpen hurbildua hain zuzen (275. irudia). Linea horrek *Euler-en poligonal* izena du.



275. IRUDIA

Oharra. Izenda dezagun $y = \varphi_h(x)$, $\Delta x = h$ denean Euler-en poligonalari dagokion (1) ekuazioaren soluzio hurbildua. Froga liteke, hastapen-baldintzak betetzen dituen eta $[x_0, b]$ tartean definiturik dagoen (1) ekuazioaren $y = \varphi^*(x)$ soluzio bakarra existitzen bada $\lim_{h \rightarrow 0} |\varphi_h(x) - \varphi^*(x)| = 0$ betetzen dela $[x_0, b]$ tarteko x orotarako.

Adibidea. Aurkitu $y' = y + x$ ekuazioaren soluzioaren balio hurbildua $x = 1$ baliorako, $x_0 = 0$ denean $y_0 = 1$ hastapen-baldintzaren menpean.

Ebazpena. Zati dezagun $[0, 1]$ tartea 10 zatitan $x_0 = 0; 0,1; 0,2; \dots; 1,0$ puntuen bidez. Hortaz, $h = 0,1$. Determina ditzagun $y_1, y_2, \dots, y_n$ balioak (2') formularen bitartez:

$$\Delta y_k = (y_k + x_k)h$$

edo

$$y_{k+1} = y_k + (y_k + x_k)h.$$

Honela,

$$y_1 = 1 + (1 + 0) \cdot 0,1 = 1 + 0,1 = 1,1;$$

$$y_2 = 1,1 + (1,1 + 0,1) \cdot 0,1 = 1,21;$$

.....

erdiesten ditugu.

Era dezagun ondoko taula:

x_k	y_k	$y_k + x_k$	$\Delta y_k = (y_k + x_k)h$
$x_0 = 0$	1,000	1,000	0,100
$x_1 = 0,1$	1,100	1,200	0,120
$x_2 = 0,2$	1,220	1,420	0,142
$x_3 = 0,3$	1,362	1,620	0,162
$x_4 = 0,4$	1,524	1,924	0,1924
$x_5 = 0,5$	1,7164	2,2164	0,2216
$x_6 = 0,6$	1,9380	2,5380	0,2538
$x_7 = 0,7$	2,1918	2,8918	0,2812
$x_8 = 0,8$	2,4730	3,2730	0,3273
$x_9 = 0,9$	2,8003	3,7003	0,3700
$x_{10} = 1,0$	3,1703		

$y|_{x=1} = 3,1703$ balio hurbildua aurkitu dugu. Hastapen-baldintzak betetzen dituen emandako ekuazioaren soluzio zehatza

$$y = 2e^x - x - 1$$

da. Hortaz,

$$y|_{x=1} = 2(e - 1) = 3,4365$$

daukagu. Errore absolutua 0,2662 da, errore erlatiboa, aldiz, $\frac{0,2662}{3,4365} = 0,077 \approx \%8$ da.

§ 33. Ekuazio diferentzialen diferentzien metodoaren bidezko soluzio hurbildua, Taylor-en formularen erabileran oinarriturik. Adams-en metodoa

Bila dezagun berriro

$$y' = f(x, y) \quad (1)$$

ekuazioaren soluzioa $[x_0, b]$ tartean, $x = x_0$ denean $y = y_0$ hastapen-baldintza betetzen delarik. Sar ditzagun hurrengo idazkerak, datorrenerako beharrezkoak:

$$x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$$

puntuetako soluzioaren balio hurbilduak

$$y_0, y_1, y_2, \dots, y_n$$

izango dira. Lehenengo diferentziak, edo lehen ordenakoak,

$$\Delta y_0 = y_1 - y_0, \quad \Delta y_1 = y_2 - y_1, \quad \dots, \quad \Delta y_{n-1} = y_n - y_{n-1}$$

dira. Bigarren diferentziak edo bigarren ordenakoak

$$\Delta^2 y_0 = \Delta y_1 - \Delta y_0 = y_2 - 2y_1 + y_0,$$

$$\Delta^2 y_1 = \Delta y_2 - \Delta y_1 = y_3 - 2y_2 + y_1,$$

$$\dots\dots\dots$$

$$\Delta^2 y_{n-2} = \Delta y_{n-1} - \Delta y_{n-2} = y_n - 2y_{n-1} + y_{n-2}$$

dira. Bigarren diferentzien arteko diferentziak hirugarren ordenako diferentziak dira, e.a. Izenda ditzagun deribatuen balio hurbilduak $y'_0, y'_1, \dots, y'_n$; bigarren deribatuen balio hurbilduak $y''_0, y''_1, \dots, y''_n$, e.a. Era antzekoan determina ditzagun deribatuen arteko lehenengo diferentziak,

$$\Delta y'_0 = y'_1 - y'_0, \quad \Delta y'_1 = y'_2 - y'_1, \quad \dots, \quad \Delta y'_{n-1} = y'_n - y'_{n-1};$$

deribatuen arteko bigarren diferentziak,

$$\Delta^2 y'_0 = \Delta y'_1 - \Delta y'_0, \quad \Delta^2 y'_1 = \Delta y'_2 - \Delta y'_1, \quad \dots, \quad \Delta^2 y'_{n-2} = \Delta y'_{n-1} - \Delta y'_{n-2}, \quad \text{etab.}$$

Idatz dezagun, orain, Taylor-en formula, ekuazioa $\bar{x} = x_0$ puntuaren ingurunean ebazteko [IV. gaiko § 6, (6) formula]:

$$y = y_0 + \frac{x - x_0}{1} y'_0 + \frac{(x - x_0)^2}{1 \cdot 2} y''_0 + \dots + \frac{(x - x_0)^m}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot m} y^{(m)}_0 + R_m. \quad (2)$$

Formula horretan y_0 ezaguna da; deribatuen $y_0', y_0'', \dots$ balioak (1) ekuaziotik honelaxe lortzen dira. x_0 eta y_0 hasierako balioak (1) ekuazioaren bigarren atalean ordezkatzuz, y_0' aurkitzen dugu:

$$y_0' = f(x_0, y_0).$$

(1) ekuazioaren bi atalak x -rekiko deribatuz

$$y'' = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} y' \quad (3)$$

lortzen dugu. Bigarren atalean x_0, y_0, y_0' balioak sartuz

$$y_0'' = \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} y' \right)_{x=x_0, y=y_0, y'=y_0'}$$

aurkitzen dugu. (3) berdintza x -rekiko behin gehiago deribatuz eta x_0, y_0, y_0', y_0'' balioak ordezkatzuz y_0''' ateratzen dugu. Era berean¹⁶⁾ jarraituz gero edozein ordenatako deribatuen balio partikularrak, $x=x_0$ denean, erdiets ditzakegu. (2) formularen bigarren atalean gai guztiak, R_m gai osagarria salbu, ezagunak dira. Honela, gai osagarria mesprezatzuz, x -ren edozein baliotarako soluzioaren balio hurbilduak lor ditzakegu; berorien zehaztasuna $|x-x_0|$ magnitude eta garapenaren gai-kopuruaren menpean dago.

Emandako metodoan, determina ditzagun, $|x-x_0|$ txikia denean, y -ren lehenengo gai batzuk soilik, (2) formularen bidez. Determina ditzagun y_1 eta y_2 -ren balioak $x_1 = x_0 + h$ eta $x_2 = x_0 + 2h$ balioetarako, garapenaren lau gai hartuz (y_0 ezaguna da hastapen-baldintzengatik):

$$y_1 = y_0 + \frac{h}{1} y_0' + \frac{h^2}{1 \cdot 2} y_0'' + \frac{h^3}{3!} y_0''', \quad (4)$$

$$y_2 = y_0 + \frac{2h}{1} y_0' + \frac{(2h)^2}{1 \cdot 2} y_0'' + \frac{(2h)^3}{3!} y_0'''. \quad (4')$$

¹⁶⁾ Aurrerantzean, $f(x,y)$ funtzioa x eta y -rekiko, gure arrazonaketetarako behar adina bider deribagarria dela suposatuko dugu.

Kontsidera dezagun, beraz, funtzioaren y_0, y_1, y_2 hiru balioak¹⁷⁾ ezagunak direla. Balio horietan oinarrituz eta (1) ekuazioa erabiliz

$$y'_0 = f(x_0, y_0), \quad y'_1 = f(x_2, y_2), \quad y'_2 = f(x_2, y_2)$$

determinatzen ditugu. y'_0, y'_1, y'_2 ezagutuz $\Delta y'_0, \Delta y'_1, \Delta^2 y'_0$ determina ditzakegu. Kalkuluaren emaitzak ondoko taulan aurkezten dira:

x	y	y'	$\Delta y'$	$\Delta^2 y'$
x_0	y_0	y'_0		
			$\Delta y'_0$	
$x_1 = x_0 + h$	y_1	y'_1		$\Delta^2 y'_0$
			$\Delta y'_1$	
$x_2 = x_0 + 2h$	y_2	y'_2		
...	...	...	...	...
$x_{k-2} = x_0 + (k-2)h$	y_{k-2}	y'_{k-2}		
			$\Delta y'_{k-2}$	
$x_{k-1} = x_0 + (k-1)h$	y_{k-1}	y'_{k-1}		$\Delta^2 y'_{k-2}$
			$\Delta y'_{k-1}$	
$x_k = x_0 + kh$	y_k	y'_k		

Demagun, orain, soluzioaren

$$y_0, y_1, y_2, \dots, y_k$$

balioak ezagunak direla. Balio horietaz baliatuz eta (1) ekuazioa erabiliz deribatuen

$$y'_0, y'_1, y'_2, \dots, y'_k$$

17) Soluzioa zehaztasun handiagoz aurkitzen saiatzen bagara y -ren lehenengo hiru balioez gain balio gehiago kalkulatu beharra dago.

balioak kalkula ditzakegu eta, ondorioz,

$$\Delta y_0', \Delta y_1', \dots, \Delta y_{k-1}'$$

eta

$$\Delta^2 y_0', \Delta^2 y_1', \dots, \Delta^2 y_{k-2}'.$$

Determina dezagun y_{k+1} -en balioa Taylor-en formularen bidez, $a = x_k$, $x = x_{k+1} = x_k + h$ eginez:

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{1} y_k' + \frac{h^2}{1 \cdot 2} y_k'' + \frac{h^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} y_k''' + \dots + \frac{h^m}{m!} y_k^{(m)} + R_m$$

daukagu. Muga dezagun garapena lau gaitara:

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{1} y_k' + \frac{h^2}{1 \cdot 2} y_k'' + \frac{h^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} y_k''' . \quad (5)$$

Formula horretan y_k'' eta y_k''' ezezagunak dira. Saia gaitezen bilatzen lehen eta bigarren ordenetako diferentzia ezagunen bitartez.

Adieraz ditzagun lehendabizi, y_{k-1}' Taylor-en formularen bidez, $a = x_k$, $x - a = -h$ eginez:

$$y_{k-1}' = y_k' + \frac{(-h)}{1} y_k'' + \frac{(-h)^2}{1 \cdot 2} y_k''' \quad (6)$$

eta y_{k-2}' , $a = x_k$, $x - a = -2h$ eginez:

$$y_{k-2}' = y_k' + \frac{(-2h)}{1} y_k'' + \frac{(-2h)^2}{1 \cdot 2} y_k''' . \quad (7)$$

(6) berdintzatik

$$y_k' - y_{k-1}' = \Delta y_{k-1}' = \frac{h}{1} y_k'' - \frac{h^2}{1 \cdot 2} y_k''' \quad (8)$$

ateratzen dugu. (6) berdintzako atalei (7) berdintzakoak kenduz gero

$$y'_{k-1} - y'_{k-2} = \Delta y'_{k-2} = \frac{h}{1} y''_k - \frac{3h^2}{2} y'''_k \quad (9)$$

erdiesten dugu. (8) eta (9) berdintzetatik

$$\Delta y'_{k-1} - \Delta y'_{k-2} = \Delta^2 y'_{k-2} = h^2 y'''_k$$

edo

$$y'''_k = \frac{1}{h^2} \Delta^2 y'_{k-1} \quad (10)$$

lortzen dugu. y'''_k -ren adierazpena (8) ekuazioan sartuz,

$$y''_k = \frac{\Delta y'_{k-1}}{h} + \frac{\Delta^2 y'_{k-1}}{2h} \quad (11)$$

daukagu.

Horrela, y''_k eta y'''_k kalkulatu ditugu. (10) eta (11) adierazpenak (5) garapenean sartuz gero

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{1} y'_k + \frac{h}{2} \Delta y'_{k-1} + \frac{5h}{12} \Delta^2 y'_{k-2} \quad (12)$$

erdiesten dugu. Hori da, hain zuzen, lau gaitako *Adams-en formula*. (12) formulak y_{k+1} determinatzen uzten du, y_k , y_{k-1} , y_{k-2} ezagutuz gero. Honela, y_0 , y_1 eta y_2 ezagutuz kalkula dezakegu y_3 , eta, gero y_4 , y_5 , ...

1. Oharra. Esan, frogapenik gabe, $[x_0, b]$ tartean hastapen-baldintzak betetzen dituen (1) ekuazioaren soluzio bakar bat badago, (12) formulaz determinatutako balio hurbilduen erroreak, balio absolutuan, ez duela Mh^4 gainditzen, non M tartearen luzeraren eta $f(x, y)$ funtzioaren itxuraren menpeko baina ez h magnitudearen menpeko konstante bat bait da.

2. Oharra. Kalkuluan zehaztasun handiagoa lortu nahi badugu, (5) garapenean baino gai-kopuru handiagoa hartu behar dugu; orduan (12) formula aldatuko da. Adibidez,

(5) formularen ordeaz bigarren ataleko bost gairi dagokiona hartzen badugu, hau da, h^4 ordenako gai bat gehitzen badugu, (12) formularen lekuan, antzeko eran,

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{1} y'_k + \frac{h}{2} \Delta y'_{k-1} + \frac{5h}{12} \Delta^2 y'_{k-2} + \frac{3h}{8} \Delta^3 y'_{k-3}$$

lortzen dugu.

Hor y_{k+1} balioa y_k , y_{k-1} , y_{k-2} eta y_{k-3} balioetatik abiatuz determinatzen da. Hortaz, formula hori erabiliz kalkuluak hasteko lehenengo lau balioak, y_0 , y_1 , y_2 , y_3 , ezagutu beharra dago. Balio horiek (4) itxurako formulen bidez kalkulatzeko garapeneko lehenengo bost gaiak hartu behar ditugu.

1. Adibidea. Bilatu $x_0 = 0$ baliorako $y_0 = 1$ hastapen-baldintza betetzen duen

$$y' = y + x$$

ekuazioaren soluzioaren balio hurbilduak. Determinatu soluzioaren balioak $x = 0, 1; 0, 2; 0, 3; 0, 4$ balioetarako.

Ebazpena. (4) eta (4') formulak erabiliz, kalkula ditzagun, lehendabizi, y_1 eta y_2 . Ekuaziotik eta hasierako datuetatik

$$y'_0 = (y + x)_{x=0} = y_0 + 0 = 1 + 0 = 1$$

erdiesten dugu. Emandako ekuazioa deribatuz

$$y'' = y' + 1$$

daukagu. Hortaz,

$$y''_0 = (y' + 1)_{x=0} = 1 + 1 = 2.$$

Behin gehiago deribatuz:

$$y''' = y''.$$

Beraz:

$$y'''_0 = y''_0 = 2.$$

(4) ekuazioan y_0 , y_0' , y_0'' eta $h = 0,1$ balioak sartuz gero

$$y_1 = 1 + \frac{0,1}{1} \cdot 1 + \frac{(0,1)^2}{1 \cdot 2} \cdot 2 + \frac{(0,1)^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot 2 = 1,1103$$

lortzen dugu. Era antzekoan, $h = 0,2$ baliorako,

$$y_2 = 1 + \frac{0,2}{1} \cdot 1 + \frac{(0,2)^2}{1 \cdot 2} \cdot 2 + \frac{(0,2)^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot 2 = 1,2426$$

lortzen dugu.

y_0, y_1, y_2 ezagutuz, ekuaziotik abiatuz

$$y_0' = y_0 + 0 = 1;$$

$$y_1' = y_1 + 0,1 = 1,1103 + 0,1 = 1,2103;$$

$$y_2' = y_2 + 0,2 = 1,2426 + 0,2 = 1,4426;$$

$$\Delta y_0' = 0,2103;$$

$$\Delta y_1' = 0,2323;$$

$$\Delta^2 y_0' = 0,0220$$

aurkitzen ditugu.

Lortutako balioekin ondoko taula osatzen dugu:

x	y	y'	$\Delta y'$	$\Delta^2 y'$
$x_0 = 0$	$y_0 = 1,0000$	$y_0' = 1$		
			$\Delta y_0' = 0,2103$	
$x_1 = 0,1$	$y_1 = 1,1103$	$y_1' = 1,2103$		$\Delta^2 y_0' = 0,0220$
			$\Delta y_1' = 0,2323$	
$x_2 = 0,2$	$y_2 = 1,2426$	$y_2' = 1,4426$		$\Delta^2 y_1' = 0,0228$
			$\Delta y_2' = 0,2551$	
$x_3 = 0,3$	$y_3 = 1,3977$	$y_3' = 1,6977$		
$x_4 = 0,4$	$y_4 = 1,5812$			

(12) formularen bitartez y_3 ,

$$y_3 = 1,2426 + \frac{0,1}{1} \cdot 1,4426 + \frac{0,1}{2} \cdot 0,2323 + \frac{5 \cdot (0,1)}{12} \cdot 0,0220 = 1,3977$$

aurkitzen dugu. Aurki ditzagun orain, y_3' , $\Delta y_2'$, $\Delta^2 y_1'$ balioak. (1) formula berriro erabiliz y_4 ateratzen dugu:

$$y_4 = 1,3977 + \frac{0,1}{1} \cdot 1,6977 + \frac{0,1}{2} \cdot 0,2551 + \frac{5}{12} \cdot 0,1 \cdot 0,0228 = 1,5812.$$

Emandako ekuazioaren soluzioaren adierazpen zehatza

$$y = 2e^x - x - 1$$

da. Hortaz, $y_{x=0,4} = 2e^{0,4} - 0,4 - 1 = 1,5836$. Errore absolutua 0,0024 da; errore

erlatiboa $\frac{0,0024}{1,5836} = 0,0015 \approx \%0,15$. (y_4 -ren errore absolutua, Euler-en metodoaren bidez kalkulatua, 0,06 da; errore erlatiboa $0,038 \approx \%3,8$).

2. Adibidea. Aurkitu, $x_0 = 0$ baliorako $y_0 = 0$ hastapen-baldintza betetzen duen eta

$$y' = y^2 + x^2$$

ekuazioaren soluzio den funtzioaren balio hurbilduak. Determinatu soluzioaren balioak $x = 0,1; 0,2; 0,3; 0,4$ balioetarako.

Ebazpena. Aurki ditzagun

$$\begin{aligned} y_0' &= 0^2 + 0^2 = 0, \\ y_{x=0}'' &= (2yy' + 2x)_{x=0} = 0, \\ y_{x=0}''' &= (2y'^2 + 2yy'' + 2)_{x=0} = 2. \end{aligned}$$

(4) eta (4') formulen arabera,

$$y_1 = \frac{(0,1)^3}{3!} \cdot 2 = 0,0003, \quad y_2 = \frac{(0,2)^3}{3!} \cdot 2 = 0,0026$$

lortzen ditugu. Ekuaziotik

$$y_0' = 0, \quad y_1' = 0,0100, \quad y_2' = 0,0400$$

aurkitzen ditugu.

Datu horietan oinarrituz hasiko gara taula eraikitzen; gero, (12) formula erabiliz, y_3 eta y_4 -ren balioak determinatuko ditugu.

x	y	y'	$\Delta y'$	$\Delta^2 y'$
$x_0 = 0$	$y_0 = 0$	$y_0' = 0$		
			$\Delta y_0' = 0,0100$	
$x_1 = 0,1$	$y_1 = 0,0003$	$y_1' = 0,0100$		$\Delta^2 y_0' = 0,0200$
			$\Delta y_1' = 0,0300$	
$x_2 = 0,2$	$y_2 = 0,0026$	$y_2' = 0,0400$		$\Delta^2 y_1' = 0,0201$
			$\Delta y_2' = 0,0501$	
$x_3 = 0,3$	$y_3 = 0,0089$	$y_3' = 0,0901$		
$x_4 = 0,4$	$y_4 = 0,0212$			

Horrela,

$$y_3 = 0,0026 + \frac{0,1}{1} \cdot 0,0400 + \frac{0,1}{2} \cdot 0,0300 + \frac{5}{12} \cdot 0,1 \cdot 0,0200 = 0,0089,$$

$$y_4 = 0,0089 + \frac{0,1}{1} \cdot 0,0901 + \frac{0,1}{2} \cdot 0,0501 + \frac{5}{12} \cdot 0,1 \cdot 0,0201 = 0,0212$$

dauzkagu. Ohar gaitezen y_4 -ren lehenengo lau zifra zehatzak $y_4 = 0,0212$ direla. (Emaizta hori beste metodo zehatzagoak eta errorearen balioztapena erabiliz erdiets dezakegu).

§ 34. Lehen ordenako ekuazio diferentzialezko sistemen integrazio-metodo hurbildua

§ 32 eta § 33 ataletan analisaturiko ekuazio diferentzialen integrazio hurbilduen metodoak lehen ordenako ekuazio diferentzialezko sistemak ebazteko ere aplika ditzakegu. Azter dezagun hemen ekuazio-sistemak ebazteko erabiltzen diren diferentzien metodoa. Analisa dezagun ondoren bi funtzio ezezagunetako bi ekuaziozko sistema bat.

Bilatu

$$\frac{dy}{dx} = f_1(x, y, z), \quad (1)$$

$$\frac{dz}{dx} = f_2(x, y, z) \quad (2)$$

ekuazio-sistemaren soluzio diren eta $x = x_0$ denean $y = y_0$, $z = z_0$ hastapen-baldintzak betetzen dituzten funtzioak.

Determina ditzagun argumentuaren $x_0, x_1, x_2, \dots, x_k, x_{k+1}, \dots, x_n$ balioei dagozkien y eta z funtzioen balioak. Izan bedi, berriro,

$$x_{k+1} - x_k = \Delta x = h \quad (k = 0, 1, 2, \dots, n-1). \quad (3)$$

Izenda ditzagun funtzioen balio hurbilduak

$$y_0, y_1, \dots, y_k, y_{k+1}, \dots, y_n$$

eta

$$z_0, z_1, \dots, z_k, z_{k+1}, \dots, z_n,$$

hurrenez hurren. Idatz ditzagun § 33 ataleko (12) itxurako formula errekurienteak:

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{1} y'_k + \frac{h}{2} \Delta y'_{k-1} + \frac{5}{12} h \Delta^2 y'_{k-2}, \quad (4)$$

$$z_{k+1} = z_k + \frac{h}{1} z'_k + \frac{h}{2} \Delta z'_{k-1} + \frac{5}{12} h \Delta^2 z'_{k-2}. \quad (5)$$

Formula horiek erabiltzeko, emandako y_0 eta z_0 balioez gain y_1, y_2, z_1, z_2 balioak ere ezagutu behar dira. Balio horiek § 33 ataleko (4) eta (4') formulen bitartez kalkulatu ditugu:

$$y_1 = y_0 + \frac{h}{1} y_0' + \frac{h^2}{2} y_0'' + \frac{h^3}{3!} y_0''',$$

$$y_2 = y_0 + \frac{2h}{1} y_0' + \frac{(2h)^2}{2} y_0'' + \frac{(2h)^3}{3!} y_0''',$$

$$z_1 = z_0 + \frac{h}{1} z_0' + \frac{h^2}{2} z_0'' + \frac{h^3}{3!} z_0''',$$

$$z_2 = z_0 + \frac{2h}{1} z_0' + \frac{(2h)^2}{2} z_0'' + \frac{(2h)^3}{3!} z_0''.$$

Formula horiek aplika ditzakegu y_0' , y_0'' , y_0''' , z_0' , z_0'' , z_0''' balioak ezagutuz gero. (1) eta (2) ekuazioetatik

$$y_0' = f_1(x_0, y_0, z_0), \quad z_0' = f_2(x_0, y_0, z_0)$$

aterako ditugu. (1) eta (2) ekuazioak deribatuz eta x_0 , y_0 , z_0 , y_0' , z_0' balioak sartuz gero

$$y_0'' = (y'')_{x=x_0} = \left(\frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_1}{\partial y} y' + \frac{\partial f_1}{\partial z} z' \right)_{x=x_0},$$

$$z_0'' = (z'')_{x=x_0} = \left(\frac{\partial f_2}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} y' + \frac{\partial f_2}{\partial z} z' \right)_{x=x_0}$$

lortuko ditugu. Behin gehiago deribatuz gero y_0''' eta z_0''' erdietsiko ditugu. y_1, y_2, z_1, z_2 ezagutuz emandako (1) eta (2) ekuazioetatik

$$y_1', y_2', z_1', z_2', \Delta y_0', \Delta y_1', \Delta^2 y_0', \Delta z_0', \Delta z_1', \Delta^2 z_0'$$

aterako ditugu, ondoren taula eraikitzen has gaitezke.

x	y	y'	$\Delta y'$	$\Delta^2 y'$	z	z'	$\Delta z'$	$\Delta^2 z'$
x_0	y_0	y'_0			z_0	z'_0		
			$\Delta y'_0$				$\Delta z'_0$	
x_1	y_1	y'_1		$\Delta^2 y'_0$	z_1	z'_1		$\Delta^2 z'_0$
			$\Delta y'_1$				$\Delta z'_1$	
x_2	y_2	y'_2		$\Delta^2 y'_1$	z_2	z'_2		$\Delta^2 z'_1$
			$\Delta y'_2$				$\Delta z'_2$	
x_3	y_3	y'_3			z_3	z'_3		

(4) eta (5) formulen bitartez y_3 eta z_3 aurkitzen ditugu, eta (1) eta (2) ekuazioetatik y'_3 eta z'_3 aterako ditugu. $\Delta y'_2$, $\Delta^2 y'_1$, $\Delta z'_2$, $\Delta^2 z'_1$ determinatu eta gero, (4) eta (5) formulek, berriro, y_4 eta z_5 kalkulatzeko lagunduko digute, e.a.,

Adibidea. Bilatu

$$y' = z, \quad z' = y$$

sistemaren soluzioen balio hurbilduak, hastapen-baldintzen arabera $x_0 = 0$ denean $z_0 = 1$ eta $y_0 = 0$ badira. Kalkulatu soluzioen balioak $x = 0; 0,1; 0,2; 0,3; 0,4$ balioetarako.

Ebazpena. Emandako ekuazioetatik

$$y'_0 = z_{x=0} = 1,$$

$$z'_0 = y_{x=0} = 0$$

aterako ditugu. Ekuazio horiek deribatuz

$$y''_0 = (y'')_{x=0} = (z')_{x=0} = 0,$$

$$z''_0 = (z'')_{x=0} = (y')_{x=0} = 1,$$

$$y'''_0 = (y''')_{x=0} = (z'')_{x=0} = 1,$$

$$z'''_0 = (z''')_{x=0} = (y'')_{x=0} = 0$$

aurkitzen ditugu. (4) eta (5) itxurako formulak erabiliz

$$y_1 = 0 + \frac{0,1}{1} \cdot 1 + \frac{(0,1)^2}{1 \cdot 2} \cdot 0 + \frac{(0,1)^3}{3!} \cdot 1 = 0,1002,$$

$$y_2 = 0 + \frac{0,2}{1} \cdot 1 + \frac{(0,2)^2}{1 \cdot 2} \cdot 0 + \frac{(0,2)^3}{3!} \cdot 1 = 0,2016,$$

$$z_1 = 1 + \frac{0,1}{1} \cdot 0 + \frac{(0,1)^2}{1 \cdot 2} \cdot 1 + \frac{(0,1)^3}{3!} \cdot 0 = 1,0050,$$

$$z_2 = 1 + \frac{0,2}{1} \cdot 0 + \frac{(0,2)^2}{1 \cdot 2} \cdot 1 + \frac{(0,2)^3}{3!} \cdot 0 = 1,0200$$

lortzen ditugu. Emandako ekuazioen arabera

$$\begin{aligned} y_1' &= 1,0050, & y_2' &= 1,0200, \\ z_1' &= 0,1002, & z_2' &= 0,2016, \\ \Delta y_0' &= 0,0050, & \Delta z_0' &= 0,1002, \\ \Delta y_1' &= 0,0150, & \Delta z_1' &= 0,1014, \\ \Delta^2 y_0' &= 0,0100, & \Delta^2 z_0' &= 0,0012 \end{aligned}$$

daukagu.

Orain, taularen lehenengo bost zutabeak beteko ditugu:

x	y	y'	$\Delta y'$	$\Delta^2 y'$
$x_0 = 0$	$y_0 = 0$	$y_0' = 1$		
			$\Delta y_0' = 0,0050$	
$x_1 = 0,1$	$y_1 = 0,1002$	$y_1' = 1,0050$		$\Delta^2 y_0' = 0,0100$
			$\Delta y_1' = 0,0150$	
$x_2 = 0,2$	$y_2 = 0,2016$	$y_2' = 1,0200$		$\Delta^2 y_1' = 0,0109$
			$\Delta y_2' = 0,0259$	
$x_3 = 0,3$	$y_3 = 0,3049$	$y_3' = 1,0459$		
$x_4 = 0,4$	$y_4 = 0,4117$			

x	z	z'	$\Delta z'$	$\Delta^2 z'$
$x_0 = 0$	$z_0 = 1$	$z'_0 = 0$		
			$\Delta z'_0 = 0,1002$	
$x_1 = 0,1$	$z_1 = 1,0050$	$z'_1 = 0,1002$		$\Delta^2 z'_0 = 0,0012$
			$\Delta z'_1 = 0,1014$	
$x_2 = 0,2$	$z_2 = 1,0200$	$z'_2 = 0,2016$		$\Delta^2 z'_1 = 0,0019$
			$\Delta z'_2 = 0,1033$	
$x_3 = 0,3$	$z_3 = 1,0459$	$z'_3 = 0,3049$		
$x_4 = 0,4$	$z_4 = 1,0817$			

(4) eta (5) formulen bidez

$$y_3 = 0,2016 + \frac{0,1}{1} \cdot 1,0200 + \frac{0,1}{2!} \cdot 0,0150 + \frac{5}{12} \cdot 0,1 \cdot 0,0100 = 0,3049,$$

$$z_3 = 1,0200 + \frac{0,1}{1} \cdot 1,2016 + \frac{0,1}{2} \cdot 0,1014 + \frac{5}{12} \cdot 0,1 \cdot 0,0012 = 1,0459$$

kalkulatzeko, eta, analogoki

$$y_4 = 0,3049 + \frac{0,1}{1} \cdot 1,0459 + \frac{0,1}{2} \cdot 0,0259 + \frac{5}{12} \cdot 0,1 \cdot 0,0109 = 0,4117,$$

$$z_4 = 1,0459 + \frac{0,1}{1} \cdot 0,3049 + \frac{0,1}{2} \cdot 0,1033 + \frac{5}{12} \cdot 0,1 \cdot 0,0019 = 1,0817.$$

Nabaria da, hastapen-baldintzak betetzen dituzten emandako ekuazio-sistemaren soluzio zehatzak

$$y = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}), \quad z = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$$

direla. Horrexegatik, soluzioen lehenengo lau zifra zehatzak

$$y_4 = \frac{1}{2}(e^{0,4} - e^{-0,4}) = 0,4107, \quad z_4 = \frac{1}{2}(e^{0,4} + e^{-0,4}) = 1,0811$$

dira.

Oharra. Ordena handiagoko ekuazioak eta horietaz osatutako sistemak, sarritan, lehen ordenako ekuazio-sistema bilakatzen direnez gero, azaldutako metodoa esandako problemen ebazpenari ere aplikatu lekioko.

Ariketak

Frogatu hautazko konstanteen menpe dauden ondoko funtzioek dagokien ekuazio diferentziala betetzen dutela:

Funtzioak

Ekuazio diferentzialak

1. $y = \sin x - 1 + Ce^{-\sin x},$

$$\frac{dy}{dx} + y \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x.$$

2. $y = Cx + C - C^2,$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - \frac{dy}{dx} - x \frac{dy}{dx} + y = 0.$$

3. $y^2 = 2Cx + C^2,$

$$y \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 2x \frac{dy}{dx} - y = 0.$$

4. $y^2 = Cx^2 - \frac{a^2 C}{1 + C},$

$$xy \left[1 - \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 \right] = (x^2 - y^2 - a^2) \frac{dy}{dx}.$$

5. $y = C_1 x + \frac{C_2}{x} + C_3,$

$$\frac{d^3 y}{dx^3} + \frac{3}{x} \frac{d^2 y}{dx^2} = 0.$$

6. $y = (C_1 + C_2 x) e^{kx} + \frac{e^x}{(k-1)^2},$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} - 2k \frac{dy}{dx} + k^2 y = e^x.$$

7. $y = C_1 e^{a \arcsin x} + C_2 e^{-a \arcsin x},$

$$(1 - x^2) \frac{d^2 y}{dx^2} - x \frac{dy}{dx} - a^2 y = 0.$$

$$8. \quad y = \frac{C_1}{x} + C_2, \quad \frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{2}{x} \frac{dy}{dx} = 0.$$

Integratu ondorengo aldagai banangarrietako ekuazio diferentzialak:

$$9. \quad y \, dx - x \, dy = 0. \quad \text{Emaitza: } y = Cx.$$

$$10. \quad (1+u)v \, du + (1-v)u \, dv = 0. \quad \text{Em.: } \ln uv + u - v = C.$$

$$11. \quad (1+y) \, dx - (1-x) \, dy = 0. \quad \text{Em.: } (1+y)(1-x) = C.$$

$$12. \quad (t^2 - xt^2) \frac{dx}{dt} + x^2 + tx^2 = 0. \quad \text{Em.: } \frac{t+x}{tx} + \ln \frac{x}{t} = C.$$

$$13. \quad (y-a) \, dx + x^2 \, dy = 0. \quad \text{Em.: } (y-a) = Ce^{\frac{1}{x}}.$$

$$14. \quad z \, dt - (t^2 - a^2) \, dz = 0. \quad \text{Em.: } z^{2a} = C \frac{t-a}{t+a}.$$

$$15. \quad \frac{dx}{dy} = \frac{1+x^2}{1+y^2}. \quad \text{Em.: } x = \frac{y+C}{1-Cy}.$$

$$16. \quad (1+s^2) \, dt - \sqrt{t} \, ds = 0. \quad \text{Em.: } 2\sqrt{t} - \arctan s = C.$$

$$17. \quad d\rho + \rho \tan \theta \, d\theta = 0. \quad \text{Em.: } \rho = C \cos \theta.$$

$$18. \quad \sin \theta \cos \varphi \, d\theta - \cos \theta \sin \varphi \, d\varphi = 0. \quad \text{Em.: } \cos \varphi = C \cos \theta.$$

$$19. \quad \sec^2 \theta \tan \varphi \, d\theta + \sec^2 \varphi \tan \theta \, d\varphi = 0. \quad \text{Em.: } \tan \theta \tan \varphi = C.$$

$$20. \quad \sec^2 \theta \tan \varphi \, d\theta + \sec^2 \varphi \tan \theta \, d\theta = 0. \quad \text{Em.: } \sin^2 \theta + \sin^2 \varphi = C.$$

$$21. \quad (1+x^2) \, dy - \sqrt{1-y^2} \, dx = 0. \quad \text{Em.: } \arcsin y - \arctan x = C.$$

$$22. \quad \sqrt{1-x^2} \, dy - \sqrt{1-y^2} \, dx = 0. \quad \text{Em.: } y\sqrt{1-x^2} - x\sqrt{1-y^2} = C.$$

$$23. \quad 3e^x \tan y \, dx + (1-e^x) \sec^2 y \, dy = 0. \quad \text{Em.: } \tan y = C(1-e^x)^3.$$

24. $(x - y^2x) dx + (y - x^2y) dy = 0$. Em.: $x^2 + y^2 = x^2y^2 + C$.

Ekuazio diferentzialen eraikuntzari buruzko problemak:

25. Frogatu, puntu bakoitzeko ukitzailearen malda ukitze-puntuaren abzisaren proportzionala duen kurba parabola dela. Em.: $y = ax^2 + C$.

26. Bilatu $(0, -2)$ puntutik igarotzen den eta puntu bakoitzeko ukitzailearen koefiziente angeluartzat puntuaren ordenatua hiru unitatetan handitua duen kurba. Em.: $y = e^x - 3$.

27. Bilatu $(1, 1)$ puntutik igarotzen den eta puntu bakoitzeko ukitzailearen koefiziente angeluarra, puntu horren ordenatuaren karratuaren proportzionala daukan kurba. Em.: $k(x - 1)y - y + 1 = 0$.

28. Bilatu, puntu bakoitzeko ukitzailearen koefiziente angeluarra, puntu hori koordenatu-jatorriarekin lotzen duen zuzenaren malda baino n aldiz handiagoa daukan kurba. Em.: $y = Cx^n$.

29. Marratu $(2, 1)$ puntutik kurba bat, edozein puntutako ukitzailea puntu hori eta koordenatu-jatorria lotzen dituen zuzenaren norabidearekin bat etor dadin. Em.: $y = \frac{1}{2}x$.

30. Bilatu, koordenatu polarretan, kurba baten ekuazioa, bere puntu bakoitzean, erradio bektoreak eta kurbarekiko ukitzaileak osatutako angeluaren tangentea erradio bektorearen alderantzizkoa eta zeinuz aldatua izan dadin. Em.: $r(\theta + C) = 1$.

31. Bilatu, koordenatu polarretan, kurba baten ekuazioa, bere puntu bakoitzean, erradio bektoreak eta kurbarekiko ukitzaileak osatutako angeluaren tangentea erradio bektorearen karratua izan dadin. Em.: $r^2 = (\theta + C)^2$.

32. Frogatu bere normal guztiak puntu finko batetik pasatzen direneko propietatea betetzen duen kurba zirkunferentzia dela.

33. Bilatu bere puntu bakoitzean, azpiukitzailearen luzera abzisaren bikoitza daukan kurba. Em.: $y = C\sqrt{x}$.

34. Bilatu erradio bektorea ukitze-puntu eta Ox ardatzaren artean dagoen ukitzailearen luzeraren berdina daukan kurba.

Ebazpena. Problemaren hipotesiaren arabera $\frac{y}{y'}\sqrt{1+y'^2} = \sqrt{x^2+y^2}$ dugu, nondik

$$\frac{dy}{y} = \pm \frac{dx}{x} \text{ ateratzen bait da.}$$

Integratuz, bi kurba-familia lortzen ditugu: $y = Cx$ eta $y = \frac{C}{x}$.

35. Newton-en legearen arabera aire librean dagoen gorputz baten hozte-abiadura gorputzaren eta ingurugiroaren temperaturen arteko diferentziaren proportzionala da. Izan bedi 20°C airearen tenperatura; gorputza 100°C -tik 60°C -ra hozten da 20 minututan. Zenbat denbora beharko da gorputzaren tenperatura 30°C -raino jaitsi arte?

Ebazpena. Problemaren ekuazio diferentziala $\frac{dT}{dt} = k(T - 20)$ da. Integratuz,

$T - 20 = Ce^{kt}$ aurkitzen dugu; $T = 100$ da $t = 0$ denean eta $T = 60$ $t = 20$ denean;

orduan $C = 80$; $40 = Ce^{20k}$, $e^k = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{20}}$, hortaz $T = 20 + 80 + \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{20}}$. $T = 30$ eginez $t = 60$ min lortzen dugu.

36. Zenbat denbora, T , behar da erpineko angelua $d = 60^\circ$ eta 10 cm-ko altuera dituen onil koniko bat, bere hondoan dagoen $0,5 \text{ cm}^2$ -ko zilo batetik isuritzeko.

Ebazpena. Kalkula dezagun bi metodo desberdinen bidez t eta $t + \Delta t$ aldiuneren tartean isuritako ur-bolumena. Txorroaren v abiadura konstante izanik, segundu batean $0,5 \text{ cm}^2$ oinarriko eta v altuerako ur-zilindro bat isuriko da. Δt denboran dv bolumeneko ura isuriko da, $-dv = -0,5v dt = -0,3\sqrt{2gh} dt$ ¹⁸⁾ izanik.

¹⁸⁾ Gainazal libre batetik h distantziara dagoen zilo batean zeharko ur-txorroaren v abiadura $v = 0,6\sqrt{2gh}$ formulak ematen digu, non g grabitatearen azelerazioa bait da.

Beste aldetik, irteera dela eta, uraren altuerak dh gehikuntza negatiboa hartzen du, eta

isuritako ur-bolumenaren diferentziala $-dv = \pi r^2 dh = \frac{\pi}{3}(h+0,7)^2 dh$ da. Horrela,

$$\frac{\pi}{3}(h+0,7)^2 dh = -0,3\sqrt{2gh} dt \text{ daukagu, nondik}$$

$$t = 0,0315(10^{5/2} - h^{5/2}) + 0,0732(10^{3/2} - h^{3/2}) + 0,078(\sqrt{10} - \sqrt{h})$$

lortzen baitugu.

$h=0$ eginez, huste-denbora $T=12,5$ s. lortzen dugu.

37. Likido baten barruan biratzen den disko baten gaineko marruskaduraren eragina ω errotazio-abiadura angeluarraren proportzionala da. Bilatu denbora eta abiadura angeluarraren arteko menpekotasuna, diskoaren abiadura minutu batean 100 bira minutuko izatetik 60 bira minutuko izatera jeisten dela jakinik.

$$\text{Em.: } \omega = 100\left(\frac{3}{5}\right)^t \text{ r.p.m..}$$

38. Demagun maila batean, aire-zutabe baten presioa eguratsaren goi-geruzen presioak baldintzatua dagoela. Bilatu presio eta altueraren arteko menpekotasuna, itsas mailan 1 kg/cm^2 -ko presioa dagoen bitartean, 500 m -ko atueran $0,92 \text{ kg/cm}^2$ -koa dagoela badakigu.

Oharra: Erabil dezagun Boyle-Mariotte-ren legea, zeinaren arabera, gas baten dentsitatea bere presioaren proportzionala bait da. Problemaren ekuazio diferentziala $dp = -kp dh$ da, nondik $p = e^{-0,00017h}$ aurkitzen baitugu. Em.: $p = e^{-0,00017h}$.

Integratu ondorengo ekuazio diferentzial homogenoak:

39. $(y-x)dx + (y+x)dy = 0$. Em.: $y^2 + 2xy - x^2 = C$.
40. $(x+y)dx + xdy = 0$. Em.: $x^2 + 2xy = C$.
41. $(x+y)dx + (y-x)dy = 0$. Em.: $\ln(x^2 + y^2)^{1/2} - \arctan \frac{y}{x} = C$.
42. $x dy - y dx = \sqrt{x^2 + y^2} dx$. Em.: $1 + 2Cy - C^2x^2 = 0$.
43. $(8y+10x)dx + (5y+7x)dy = 0$. Em.: $(x+y)^2(2x+y)^3 = C$.

44. $(2\sqrt{st} - s)dt + tds = 0$. Em.: $te^{\sqrt{s/t}} = C$ edo $s = t \ln^2 \frac{C}{t}$.

45. $(t - s)dt + tds = 0$. Em.: $te^{s/t} = C$ edo $s = t \ln \frac{C}{t}$.

46. $xy^2 dy = (x^3 + y^3)dx$. Em.: $y = x \sqrt[3]{3 \ln Cx}$.

47. $x \cos \frac{y}{x} (y dx + x dy) = y \sin \frac{y}{x} (x dy - y dx)$. Em.: $xy \cos \frac{y}{x} = C$.

Integratu ondoko ekuazio diferentzial homogenoak:

48. $(3y - 7x + 7)dx - (3x - 7y - 3)dy = 0$. Em.: $(x + y - 1)^5 (x - y - 1)^2 = C$.

49. $(x + 2y + 1)dx - (2x + 4y + 3)dy = 0$. Em.: $\ln(4x + 8y + 5) + 8y - 4x = C$.

50. $(x + 2y + 1)dx - (2x - 3)dy = 0$. Em.: $\ln(2x - 3) - \frac{4y + 5}{2x - 3} = C$.

51. Determinatu kurba bat, zeinen azpinormala kontsideratutako puntuaren abzisa eta ordenatuaren batezbesteko aritmetikoa bait da. Em.: $(x - y)^2 (x + 2y) = C$.

52. Determinatu ukitzaileak, Oy ardatzaren gainean, tartean hartutako zuzenkiaren eta erradio bektorearen arteko arrazioa konstante daukan kurba.

Ebazpena. Problemaren hipotesiaren arabera

$$\frac{y - x \frac{dy}{dx}}{\sqrt{x^2 + y^2}} = m$$

dugu, nondik $\left(\frac{x}{C}\right)^m - \left(\frac{C}{x}\right)^m = \frac{2y}{x}$ ateratzen bait da.

53. Determinatu normalak, Ox ardatzaren gainean, tartean hartutako zuzenkiaren eta erradio bektorearen arteko arrazioa konstante daukan kurba.

Ebazpena. Hipotesiaren arabera

$$\frac{x + y \frac{dy}{dx}}{\sqrt{x^2 + y^2}} = m$$

betetzen da, hortik $x^2 + y^2 = m^2(x - C)^2$ ateratzen da.

54. Determinatu ukitzailak, Oy ardatzaren gainean, tartean hartutako zuzenkia $a \sec \theta$ duen kurba, non θ erradio bektoreak eta Ox ardatzak osatutako angelua bait da.

Ebazpena. $\tan \theta = \frac{y}{x}$ denez eta, hipotesiaren arabera,

$$y - x \frac{dy}{dx} = a \sec \theta$$

dugunez

$$y - x \frac{dy}{dx} = a \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{x}$$

topatuko dugu eta hortik

$$y = \frac{x}{2} \left[e^{\frac{a}{x} + b} - e^{-\left(\frac{a}{x} + b\right)} \right].$$

55. Determinatu kurba bat, zeinen puntu batetik marratutako normalak, ordenatu-ardatzaren gainean, tartean hartutako zuzenkia, puntua eta koordinatu-jatorriaren arteko distantziaren berdina bait da.

Ebazpena. Oy ardatzaren gainean, normalak tartean hartzen duen zuzenkia $y + \frac{x}{y'}$ da; hipotesiz

$$y + \frac{x}{y'} = \sqrt{x^2 + y^2}$$

daukagu, nondik $x^2 = C(2y + C)$ aterako bait dugu.

56. Bilatu izpilu baten itxura, O puntu batetik ateratzen diren izpi guztiak emandako norabide batekiko paraleloki islada ditzan.

Ebazpena. Egoki dezagun emandako norabidea Ox ardatzarekin eta izan bedi O jatorria. Izan bitez OM izpi erasotzailea, MP izpi isladatua eta MQ bilatzen dugun kurbarekiko normala:

$$\alpha = \beta; \quad OM = OQ, \quad NM = y,$$

$$NQ = NO + OQ = -x + \sqrt{x^2 + y^2} = y \cot \beta = y \frac{dy}{dx},$$

nondik $y dy = (-x + \sqrt{x^2 + y^2}) dx$ lortzen dugun eta integratuz $y^2 = C^2 + 2Cx$ izango dugu.

Integratu ondoko ekuazio diferentzial linealak:

$$57. \quad y' - \frac{2y}{x+1} = (x+1)^3. \quad \text{Em.: } 2y = (x+1)^4 + C(x+1)^2.$$

$$58. \quad y' - a \frac{y}{x} = \frac{x+1}{x}. \quad \text{Em.: } y = Cx^a + \frac{x}{1-a} - \frac{1}{a}.$$

$$59. \quad (x-x^2)y' + (2x^2-1)y - ax^3 = 0. \quad \text{Em.: } y = ax + Cx\sqrt{1-x^2}.$$

$$60. \quad \frac{ds}{dt} \cos t + s \sin t = 1. \quad \text{Em.: } s = \sin t + C \cos t.$$

$$61. \quad \frac{ds}{dt} + s \cos t = \frac{1}{2} \sin 2t. \quad \text{Em.: } s = \sin t - 1 + C e^{-\sin t}.$$

$$62. \quad y' - \frac{n}{x} y = e^x x^n. \quad \text{Em.: } y = x^n (e^x + C).$$

$$63. \quad y' + \frac{n}{x} y = \frac{a}{x^n}. \quad \text{Em.: } x^n y = ax + C.$$

$$64. \quad y' + y = \frac{1}{e^x}. \quad \text{Em.: } e^x y = x + C.$$

$$65. y' + \frac{1-2x}{x^2}y - 1 = 0. \text{ Em.: } y = x^2(1 + Ce^{\frac{1}{x}}).$$

Integratu Bernoulli-ren ekuazioak:

$$66. y' + xy = x^3y^3. \text{ Em.: } y^2(x^2 + 1 + Ce^{x^2}) = 1.$$

$$67. (1-x^2)y' - xy - axy^2 = 0. \text{ Em.: } (C\sqrt{1-x^2} - a)y = 1.$$

$$68. 3y^2y' - ay^3 - x - 1 = 0. \text{ Em.: } a^2y^3 = Ce^{ax} - a(x+1) - 1.$$

$$69. y'(x^2y^3 + xy) = 1. \text{ Em.: } x \left[(2-y^2)e^{\frac{1}{2}y^2} + C \right] = e^{\frac{1}{2}y^2}.$$

$$70. (y \ln x - 2)y dx = x dy. \text{ Em.: } y(Cx + \ln x + 1) = 1.$$

$$71. y - y' \cos x = y^2 \cos x (1 - \sin x). \text{ Em.: } y = \frac{\tan x + \sec x}{\sin x + C}.$$

Integratu ondorengo ekuazio diferentzial totalak:

$$72. (x^2 + y)dx + (x - 2y)dy = 0. \text{ Em.: } \frac{x^3}{3} + yx - y^2 = C.$$

$$73. (y - 3x^2)dx - (4y - x)dy = 0. \text{ Em.: } 2y^2 - xy + x^3 = C.$$

$$74. (y^3 - x)y' = y. \text{ Em.: } y^4 = 4xy + C.$$

$$75. \left[\frac{y^2}{(x-y)^2} - \frac{1}{x} \right] dx + \left[\frac{1}{y} - \frac{x^2}{(x-y^2)} \right] dy = 0. \text{ Em.: } \ln \frac{y}{x} - \frac{xy}{x-y} = C.$$

$$76. 2(3xy^2 + 2x^3)dx + 3(2x^2y + y^2)dy = 0. \text{ Em.: } x^4 + 3x^2y^2 + y^3 = C.$$

$$77. \frac{x dx + (2x + y)dy}{(x + y)^2} = 0. \text{ Em.: } \ln(x + y) - \frac{x}{x + y} = C.$$

$$78. \left(\frac{1}{x^2} + \frac{3y^2}{x^4} \right) dx = \frac{2y dy}{x^3}. \text{ Em.: } x^2 + y^2 = Cx^3.$$

$$79. \frac{x^2 dy - y^2 dx}{(x - y)^2} = 0. \text{ Em.: } \frac{xy}{x - y} = C.$$

$$80. x dx + y dy = \frac{y dx - x dy}{x^2 + y^2}. \text{ Em.: } x^2 + y^2 - 2 \arctan \frac{x}{y} = C.$$

81. Aurkitu ondoko propietatea betetzen duen kurba: bere edozein puntu eta koordenatu-jatorriaren arteko distantziaren karratuaren eta aipatutako puntuko normalak abzisen ardatzaren gainean tartean hartzen duen zuzenkiaren arteko biderkadura puntu horren abzisaren kubo da. Em.: $y^2(2x^2 + y^2) = C$.

82. Aurkitu ondoko kurben inguratzailea:

$$a) y = Cx + C^2. \text{ Em.: } x^2 + 4y = 0.$$

$$b) y = \frac{x}{C} + C^2. \text{ Em.: } 27x^2 = 4y^3.$$

$$c) \frac{x}{C} - \frac{y}{C^3} = 2. \text{ Em.: } 27y = x^3.$$

$$d) C^2x + Cy - 1 = 0. \text{ Em.: } y^2 + 4x = 0.$$

$$e) (x - C)^3 + (y - C)^2 = C^2. \text{ Em.: } x = 0; y = 0.$$

$$f) (x - C)^2 + y^2 = 4C. \text{ Em.: } y^2 = 4x + 4.$$

$$g) (x - C)^2 + (y - C)^2 = 4. \text{ Em.: } (x - y)^2 = 8.$$

$$h) Cx^2 + C^2y = 1. \text{ Em.: } x^4 + 4y = 0.$$

83. Zuzen bat desplazatzen denean koordenatu-ardatzen gainean tartean hartzen dituen zuzenkien batura a konstante mantentzen da. Idatzi zuzen-sorta horren inguratzailearen ekuazioa. Em.: $x^{1/2} + y^{1/2} = a^{1/2}$ (parabola).

84. Aurkitu zuzen-sorta baten inguratzailea, zuzenen gainean koordenatu-ardatzek a luzera konstanteko zuzenki bat hartzen badute tartean. Em.: $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$.

85. Aurkitu diametrotzat $y^2 = 2px$ parabolaren ordenatuen bikoitza duten

zirkunferentzien sortaren ingurutzalea. Em.: $y^2 = 2p \left(x + \frac{p}{2} \right)$.

86. Aurkitu, zentruak $y^2 = 2px$ parabolaren gainean dituzten eta parabola horren erpinetik pasatzen diren zirkunferentzien sortaren ingurutzalea.

Em.: $x^3 + y^2(x + 2p) = 0$ zisoidea.

87. Aurkitu zirkunferentzien sortaren ingurutzalea, zirkunferentzien diametroak Ox ardatzarekiko elkartut diren $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ elipsearen kordak badira.

Em.: $\frac{x^2}{a^2 + b^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

88. Aurkitu $x^2b^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ elipsearen eboluta, bere normalen ingurutzale bezala.

Em.: $(ax)^{2/3} + (by)^{2/3} = (a^2 - b^2)^{2/3}$.

Integratu ondorengo (Lagrange-ren) ekuazioak:

89. $y = 2xy' + y'^2$. Em.: $x = \frac{C}{3p^2} - \frac{2}{3}p$; $y = \frac{2C - p^3}{3p}$.

90. $y = xy'^2 + y'^2$. Em.: $y = (\sqrt{x+1} + C)^2$. Soluzio singularra: $y = 0$.

91. $y = x(1 + y') + (y')^2$. Em.: $x = Ce^{-p} - 2p + 2$; $y = C(p+1)e^{-p} - p^2 + 2$.

92. $y = yy'^2 + 2xy'$. Em.: $4Cx = 4C^2 - y^2$.

93. Aurkitu normal konstantedun kurba. Em.: $(x - C)^2 + y^2 = a^2$.

Soluzio singularra: $y = \pm a$.

Integratu Clairaut-en ekuazioak:

94. $y = xy' + y' - y'^2$. Em.: $y = Cx + C - C^2$. Soluzio singularra: $4y = (x+1)^2$.

95. $y = xy' + \sqrt{1 - y'^2}$. Em.: $y = Cx + \sqrt{1 - C^2}$. Soluzio singularra: $y^2 - x^2 = 1$.

96. $x = xy' + y'$. Em.: $y = Cx + C$.

97. $y = xy' + \frac{1}{y'}$. Em.: $y = Cx + \frac{1}{C}$. Soluzio singularra: $y^2 = 4x$.

98. $y = xy' - \frac{1}{y'^2}$. Em.: $y = Cx - \frac{1}{C^2}$. Soluzio singularra: $y^3 = -\frac{27}{4}x^2$.

99. Bilatzen den kurba baten ukitzaileak eta koordinatu-ardatzek osatutako triangelu baten azalera magnitude konstantea da. Aurkitu kurba hori. Em.: $4xy = \pm a^2$ hiperbola aldeberdinak. Horrez gain, $y = Cx \pm a\sqrt{C}$ sortako edozein zuzen.

100. Aurkitu kurba bat, non koordinatu-ardatzen artean mugatutako ukitzaile-zuzenkiak a

luzera konstante bait dauka. Em.: $y = Cx \pm \frac{aC}{\sqrt{1 + C^2}}$.

Soluzio singularra: $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$.

101. Aurkitu kurba bat, non bere ukitzaileek koordinatu-ardatzen gainean, tartean hartzen

dituzten zuzenkien batura $2a$ bait da. Em.: $y = Cx - \frac{2aC}{1 - C}$.

Soluzio singularra: $(y - x - 2a)^2 = 8ax$.

102. Aurkitu kurba batzu, non edozein ukitzailearen eta emandako bi punturen arteko distantzien biderkadura konstante bait da. Em.: elipseak eta hiperbolak (ibilbide ortogonalak eta isogonalak).

103. Aurkitu $y = ax^n$ kurben sortaren ibilbide ortogonalak. Em.: $x^2 + ny^2 = C$.

104. Aurkitu $y^2 = 2p(x - \alpha)$ parabola-sortaren ibilbide ortogonalak, (α sortaren parametroa da). Em.: $y = Ce^{-\frac{x}{p}}$.

105. Aurkitu $x^2 - y^2 = \alpha$ kurba-sortaren ibilbide ortogonalak (α parametroa da).

Em.: $y = \frac{C}{x}$.

106. Aurkitu $x^2 + y^2 = 2ax$ zirkunferentzi sortaren ibilbide ortogonalak. Em.:
 $y = C(x^2 + y^2)$ zirkunferentziak.

107. Erpinak emandako zuzen batean dituzten parabola berdinen ibilbide ortogonalak aurkitu. Em.: parabolaren parametroa $2p$ bada eta emandako zuzena Oy bada,

ibilbideen ekuazioa $y + C = \frac{2}{3} \sqrt{\frac{2}{p}} x^{3/2}$ izango da.

108. Aurkitu $y^2 = \frac{x^3}{2a - x}$ zisoiden ibilbide ortogonalak.

Em.: $(x^2 + y^2)^2 = C(y^2 + 2x^2)$.

109. Aurkitu $(x^2 + y^2)^2 = (x^2 - y^2)a^2$ lemniskaten ibilbide ortogonalak.

Em.: $(x^2 + y^2)^2 = Cxy$.

110. Aurkitu $x^2 = 2a(y - x\sqrt{3})$ kurba-sortaren ibilbide isogonalak, non a parametro aldakorra bait da, sortaren kurbek eta bere ibilbideek osatzen duten ω angelu konstantea 60° -koa bada.

Ebazpena. Lor dezagun sortaren ekuazio diferentziala, $y' = \frac{2y}{x} - \sqrt{3}$, eta ordezka

dezagun y' , $q = \frac{y' - \tan \omega}{1 + y' \tan \omega}$ adierazpenaz. $\omega = 60^\circ$ bada, $q = \frac{y' - \sqrt{3}}{1 + \sqrt{3}y'}$ daukagu,

eta $\frac{y' - \sqrt{3}}{1 + y' \sqrt{3}} = \frac{2y}{x} - \sqrt{3}$ ekuazio diferentziala lortzen dugu. $y^2 = C(x - y\sqrt{3})$

integral orokorrak bilatutako ibilbide-sorta ematen du.

111. Aurkitu $y^2 = 4Cx$ parabola-sortaren ibilbide isogonalak, $\omega = 45^\circ$ denean.

$$\text{Em.: } y^2 - xy + 2x^2 = Ce^{\frac{6}{\sqrt{7}} \arctan \frac{2y-x}{x\sqrt{7}}}.$$

112. Aurkitu $y = Cx$ zuzen-sortaren ibilbide isogonalak, $\omega = 30^\circ, 45^\circ$ denean.

$$\text{Em.: } \begin{cases} x^2 + y^2 = e^{2\sqrt{3} \arctan \frac{y}{x}} \\ x^2 + y^2 = e^{2 \arctan \frac{y}{x}} \end{cases} \quad \text{kiribil logaritmikoak.}$$

113. $y = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$. Ezabatu C_1 eta C_2 . Em.: $y'' - y = 0$.

114. Idatzi plano bereko zirkunferentzia guztien ekuazio diferentziala.

$$\text{Em.: } (1 + y'^2)y''' - 3y'y''^2 = 0.$$

115. Idatzi kurba zentrudun guztien ekuazio diferentziala, beren ardatz nagusiak Ox eta

$$Oy \text{ ardatzekin bat datozelarik. Em.: } x(yy'' + y'^2) - y'y = 0.$$

116. Izan bitez $y''' - 2y'' - y' + 2y = 0$ ekuazio diferentziala eta $y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_3 e^{2x}$ bere soluzio orokorra:

1) egiaztatu emandako familia benetan soluzio orokorra dena;

2) aurkitu soluzio partikularra, $x = 0$ denean $y = 1$, $y' = 0$, $y'' = -1$ badugu.

$$\text{Em.: } y = \frac{1}{6}(9e^x + e^{-x} - 4e^{2x}).$$

117. Izan bitez $y'' = \frac{1}{2y'}$ ekuazio diferentziala eta $y = \pm \frac{2}{3}(x + C_1)^{3/2} + C_2$ bere soluzio

orokorra:

1) egiaztatu emandako familia benetako soluzio orokorra dena;

2) aurkitu (1,2) puntutik igarotzen den kurba integrala, puntu horretako ukitzaileak Ox ardatzaren norantza positiboarekin 45° ko angelua osatzen badu.

$$\text{Em.: } y = \frac{2}{3}\sqrt{x^3} + \frac{4}{3}.$$

Integratu bigarren ordenako ondorengo ekuazioak, lehen ordenako ekuazio bihur daitezkeenak:

118. $xy''' = 2$. Em.: $y = x^2 \ln x + C_1 x^2 + C_2 x + C_3$; idatzi $x = 1$; $y = 1$; $y' = 1$; $y'' = 3$ hastapen-baldintzak betetzen dituen soluzio partikularra.

119. $y^{(n)} = x^m$. Em.: $y = \frac{m! x^{m+n}}{(m+n)!} + C_1 x^{n-1} + \dots + C_{n-1} x + C_n$.

120. $y'' = a^2 y$. Em.: $ax = \ln(ay + \sqrt{a^2 y^2 + C_1}) + C_2$ edo $y = C_1 e^{ax} + C_2 e^{-ax}$.

121. $y'' = \frac{a}{y^3}$. Em.: $(C_1 x + C_2)^2 = C_1 y^2 - a$.

122-125 ariketetan, $x = 0$, $y = -1$, $y' = 0$ hastapen-baldintzak betetzen dituen soluzio partikularra idatzi:

122. $xy'' - y' = x^2 e^x$. Em.: $y = e^x(x-1) + C_1 x^2 + C_2$.

Soluzio partikularra: $y = e^x(x-1)$.

123. $yy'' - (y')^2 + (y')^3 = 0$. Em.: $y + C_1 \ln y = x + C_2$. Soluzio partikularra: $y = -1$.

124. $y'' + y' \tan x = \sin 2x$. Em.: $y = C_2 + C_1 \sin x - x - \frac{1}{2} \sin 2x$.

Soluzio partikularra: $y = 2 \sin x - \sin x \cos x - x - 1$.

125. $(y'')^2 + (y')^2 = a^2$. Em.: $y = C_2 - a \cos(x + C_1)$.

Soluzio partikularrak: $y = a - 1 - a \cos x$; $y = a \cos x - (a + 1)$.

(Oharra: Era parametrikotan $y'' = a \cos t$, $y' = a \sin t$).

126. $y'' = \frac{1}{2y'}$. Em.: $y = \pm \frac{2}{3} (x + C_1)^{3/2} + C_2$.

127. $y''' = y''^2$. Em.: $y = (C_1 - x)[\ln(C_1 - x) - 1] + C_2 x + C_3$.

128. $y' y''' - 3y''^2 = 0$. Em.: $x = C_1 y^2 + C_2 y + C_3$.

Integratu ondoko koefiziente konstantedun ekuazio diferentzial linealak:

129. $y'' = 9y$. Em.: $y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-3x}$.

130. $y'' + y = 0$. Em.: $y = A \cos x + B \sin x$.

131. $y'' - y' = 0$. Em.: $y = C_1 + C_2 e^x$.

132. $y'' + 12y = 7y'$. Em.: $y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{4x}$.

133. $y'' - 4y' + 4y = 0$. Em.: $y = (C_1 + C_2 x) e^{2x}$.

134. $y'' + 2y' + 10y = 0$. Em.: $y = e^{-x} (A \cos 3x + B \sin 3x)$.

135. $y'' + 3y' - 2y = 0$. Em.: $y = C_1 e^{\frac{-3+\sqrt{17}}{2}x} + C_2 e^{\frac{-3-\sqrt{17}}{2}x}$.

136. $4y'' - 12y' + 9y = 0$. Em.: $y = (C_1 + C_2 x) e^{3x/2}$.

137. $y'' + y' + y = 0$. Em.: $y = e^{-\frac{1}{2}x} \left[A \cos \left(\frac{\sqrt{3}}{2} x \right) + B \sin \left(\frac{\sqrt{3}}{2} x \right) \right]$.

138. Bi karga berdin malguki baten muturretik esegita daude. Aurkitu karga batek hartzen

duen mugimendua bestea askatzen bada. Em.: $x = a \cos \left(\sqrt{\frac{g}{a}} t \right)$, non a orekan dagoen karga baten eraginaren menpeko malgukiaren luzapena bait da.

139. m masako puntu material bat, indarrak distantziarekiko proportzionalak dituzten bi zentruak erakartzen dute. Proportzionaltasun-faktorea k da. Bi zentruen arteko distantzia $2c$ da. Hasierako aldiunean, puntua bi zentruak lotzen dituen lerroan dago, bere erdiko puntutik a distantziara. Hasierako abiadura zero da. Aurkitu

puntuaren mugimenduaren legea. Em.: $x = a \cos \left(\sqrt{\frac{2k}{m}} t \right)$.

140. $y^{IV} - 5y'' + 4y = 0$. Em.: $y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_3 e^{2x} + C_4 e^{-2x}$.

141. $y''' - 2y'' - y' + 2y = 0$. Em.: $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^x + C_3 e^{-x}$.

142. $y''' - 3ay'' + 3a^2 y' - a^3 y = 0$. Em.: $y = (C_1 + C_2 x + C_3 x^2) e^{ax}$.

143. $y^V - 4y''' = 0$. Em.: $y = C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + C_4 e^{2x} + C_5 e^{-2x}$.

144. $y^{IV} + 2y'' + 9y = 0$. Em.: $y = (C_1 \cos \sqrt{2}x + C_2 \sin \sqrt{2}x) e^{-x} + (C_3 \cos \sqrt{2}x + C_4 \sin \sqrt{2}x) e^x$.

145. $y^{IV} - 8y'' + 16y = 0$. Em.: $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x} + C_3 x e^{2x} + C_4 x e^{-2x}$.

146. $y^{IV} + y = 0$. Em.: $y = e^{\frac{x}{\sqrt{2}}} \left(C_1 \cos \frac{x}{\sqrt{2}} + C_2 \sin \frac{x}{\sqrt{2}} \right) + e^{-\frac{x}{\sqrt{2}}} \left(C_3 \cos \frac{x}{\sqrt{2}} + C_4 \sin \frac{x}{\sqrt{2}} \right)$.

147. $y^{IV} - a^4 y = 0$. Aurkitu soluzio orokorra eta $x_0 = 0$, $y = 1$, $y' = 0$, $y'' = -a^2$, $y''' = 0$ hastapen-baldintzak betetzen dituen soluzio partikularra.

Em.: Soluzio orokorra: $y = C_1 e^{ax} + C_2 e^{-ax} + C_3 \cos ax + C_4 \sin ax$.

Soluzio partikularra: $y_0 = \cos ax$.

Integratu ondorengo ekuazio diferentzial lineal ez-homogenoak (aurkitu soluzio orokorra):

148. $y'' - 7y' + 12y = x$. Em.: $y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{4x} + \frac{12x + 7}{144}$.

149. $s'' - a^2 s = t + 1$. Em.: $s = C_1 e^{at} + C_2 e^{-at} - \frac{t + 1}{a^2}$.

150. $y'' + y' - 2y = 8 \sin 2x$. Em.: $y = C_1 e^x + C_2 e^{-2x} - \frac{1}{5} (6 \sin 2x + 2 \cos 2x)$.

151. $y'' - y = 5x + 2$. Em.: $y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} - 5x - 2$.

152. $s'' - 2as' + a^2s = e^t$ ($a \neq 1$). Em.: $s = C_1 e^{at} + C_2 t e^{at} + \frac{e^t}{(a-1)^2}$.

153. $y'' + 6y' + 5y = e^{2x}$. Em.: $y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-5x} + \frac{1}{21} e^{2x}$.

154. $y'' + 9y = 6e^{3x}$. Em.: $y = C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x + \frac{1}{3} e^{3x}$.

155. $y'' - 3y' = 2 - 6x$. Em.: $y = C_1 + C_2 e^{3x} + x^2$.

156. $y'' - 2y' + 3y = e^{-x} \cos x$. Em.: $y = e^x (A \cos \sqrt{2}x + B \sin \sqrt{2}x) + \frac{e^{-x}}{41} (5 \cos x - 4 \sin x)$.

157. $y'' + 4y = 2 \sin 2x$. Em.: $y = A \sin 2x + B \cos 2x - \frac{x}{2} \cos 2x$.

158. $y'''' - 4y'' + 5y' - 2y = 2x + 3$. Em.: $y = (C_1 + C_2 x) e^x + C_3 e^{2x} - x - 4$.

159. $y^{IV} - a^4 y = 5a^4 e^{ax} \sin ax$. Em.: $y = (C_1 - \sin ax) e^{ax} + C_2 e^{-ax} + C_3 \cos ax + C_4 \sin ax$.

160. $y^{IV} + 2a^2 y'' + a^4 y = 8 \cos ax$. Em.: $y = (C_1 + C_2 x) \cos ax + (C_3 + C_4 x) \sin ax - \frac{x^2}{a^2} \cos ax$.

161. Aurkitu $M(x_0, y_0)$ puntutik igarotzen den eta puntu horretan $y = ax$ zuzenarekiko ukitaile den $y'' + k^2 y = 0$ ekuazioaren kurba integrala.

Em.: $y = y_0 \cos k(x - x_0) + \frac{a}{k} \sin k(x - x_0)$.

162. Aurkitu, $x = 0$ denean $y = a$, $y' = C$ hastapen-baldintzak betetzen dituen $y'' + 2hy' + n^2 y = 0$ ekuazioaren soluzioa.

$$\text{Em.: } h < n \text{ denean, } y = e^{-hx} \left(a \cos \sqrt{n^2 - h^2} x + \frac{C + ah}{\sqrt{n^2 - h^2}} \sin \sqrt{n^2 - h^2} x \right);$$

$$h = n \text{ denean, } y = e^{-hx} [(C + ah)x + a];$$

$h > n$ denean,

$$y = \frac{C + a(h + \sqrt{h^2 - n^2})}{2\sqrt{h^2 - n^2}} e^{-(h - \sqrt{h^2 - n^2})x} - \frac{C + a(h - \sqrt{h^2 - n^2})}{2\sqrt{h^2 - n^2}} e^{-(h + \sqrt{h^2 - n^2})x}.$$

163. Aurkitu $x = 0, y = a, y' = C$ hastapen-baldintzak betetzen dituzten $y'' + n^2 y = h \sin px$ ($p \neq n$) ekuazioaren soluzioak.

$$\text{Em.: } y = a \cos nx + \frac{C(n^2 - p^2) - hp}{n(n^2 - p^2)} \sin nx + \frac{h}{n^2 - p^2} \sin px.$$

164. 4 kg-ko pisu bat malguki batetik esegita dago, horren luzera zentimetro batez luzatuz. Aurkitu pisu horren higiduraren legea, malgukiaren goiko muturrak $y = \sin \sqrt{100g} t$, y luzapen bertikala izanik, legearen arabera oszilazio harmonikoak egiten dituela suposatuz.

Ebazpena. Izan bedi x pisuaren koordinatu bertikala, pausagunetik neurtua;

$$\frac{4}{g} \frac{d^2 x}{dt^2} = -k(x - y - l) \text{ daukagu, } l \text{ pausaguneko malgukiaren luzera izanik; } k = 400$$

da, hasierako baldintzetatik erraz ondoriozta daitekeen legez.

$$\text{Hortik, } \frac{d^2 x}{dt^2} + 100gx = 100g \sin \sqrt{100g} t + 100l g \text{ dugu. Bila dezagun ekuazio}$$

horren $t(C_1 \cos \sqrt{100g} t + C_2 \sin \sqrt{100g} t) + g$ itxurako integral partikular bat, ekuazioaren bigarren ataleko lehenengo gaia ekuazio homogenoaren soluzioan sartzen bait da.

165. 139. ariketaren hipotesiaren arabera, hasierako abiadura v_0 da eta bere norabidea zentruak loten dituen zuzenarekiko elkartzut da. Aurkitu ibilbideak.

Ebazpena. Koordinatu-jatorritzat zentruak lotzen dituen zuzenkiaren erdiko puntua hartuz, higiduraren ekuazio diferentzialak

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = k(C - x) - k(C + x) = -2kx, \quad m \frac{d^2 y}{dt^2} = -2ky$$

idatziko dira. Hastapen-baldintzak, $t = 0$ denean,

$$x = a; \quad \frac{dx}{dt} = 0; \quad y = 0; \quad \frac{dy}{dt} = v_0$$

dira.

Integratuz

$$x = a \cos \left(\sqrt{\frac{2k}{m}} t \right), \quad y = v_0 \sqrt{\frac{m}{2k}} \sin \left(\sqrt{\frac{2k}{m}} t \right)$$

topatzen dugu, nondik $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2 2k}{mv_0^2} = 1$ (elipsea) aterako bait dugu.

166. Hodi horizontal bat ardatz bertikalarekiko ω abiadura angeluar konstantez biratzen da. Hodiaren barruan marruzkadurarik gabe deslizatzen den bola bat dago. Aurkitu bolaren higiduraren legea, hasierako aldiunean, errotazio-ardatzean badago eta hasierako abiadura (hodian zehar) v_0 badauka.

Oharra. Higiduraren ekuazio diferentziala $\frac{d^2 r}{dt^2} = \omega^2 r$ da. Hastapen-baldintzak:

$t = 0$ denean, $r = 0$, $\frac{dr}{dt} = v_0$ dira.

Integratuz $r = \frac{v_0}{2\omega} [e^{\omega t} + e^{-\omega t}]$ aurkitzen dugu.

Konstanteen aldakuntzaren metodoa erabiliz integratu ondoko ekuazio diferentzialak:

167. $y'' - 7y' + 6y = \sin x$. Em.: $y = C_1 e^x + C_2 e^{6x} + \frac{5 \sin x + 7 \cos x}{74}$.

168. $y'' + y = \sec x$. Em.: $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + x \sin x + \cos x \ln \cos x$.

169. $y'' + y = \frac{1}{\cos 2x \sqrt{\cos 2x}}$. Em.: $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x - \sqrt{\cos 2x}$.

Integratu ondorengo ekuazio diferentzialak:

$$170. \quad yy'' = y'^2 + 1. \quad \text{Em.: } y = \frac{1}{2C_1} [e^{C_1(x-C_2)} + e^{-C_1(x-C_2)}].$$

$$171. \quad \frac{x^2 dy - y^2 dx}{(x-y)^2} = 0. \quad \text{Em.: } \frac{xy}{x-y} = C.$$

$$172. \quad y = xy'^2 + y'^2. \quad \text{Em.: } y = (\sqrt{x+1} + C)^2. \quad \text{Soluzio singularrak: } y = 0; \quad x+1 = 0.$$

$$173. \quad y'' + y = \sec x. \quad \text{Em.: } y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + x \sin x + \cos x \ln \cos x.$$

$$174. \quad (1+x^2)y' - xy - a = 0. \quad \text{Em.: } y = ax + C\sqrt{1+x^2}.$$

$$175. \quad x \cos \frac{y}{x} \frac{dy}{dx} = y \cos \frac{y}{x} - x. \quad \text{Em.: } x e^{\frac{\sin y}{x}} = C.$$

$$176. \quad y'' - 4y = e^{2x} \sin 2x. \quad \text{Em.: } y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{2x} - \frac{e^{2x}}{20} (\sin 2x + 2 \cos 2x).$$

$$177. \quad xy' + y - y^2 \ln x = 0. \quad \text{Em.: } (\ln x + 1 + Cx)y = 1.$$

$$178. \quad (2x + 2y - 1)dx + (x + y - 2)dy = 0. \quad \text{Em.: } 2x + y - 3 \ln(x + y + 1) = C.$$

$$179. \quad 3e^x \tan y dx + (1 - e^x) \sec^2 y dy. \quad \text{Em.: } \tan y = C(1 - e^x)^3.$$

Integratu hurrengo ekuazio diferentzialezko sistemak:

$$180. \quad \frac{dx}{dt} = y + 1, \quad \frac{dy}{dt} = x + 1. \quad t=0 \text{ denean } x=-2, y=0 \text{ hastapen-baldintzak betetzen dituzten soluzio partikularrak bilatu.}$$

$$\text{Em.: } y = C_1 e^t + C_2 e^{-t} - 1, \quad x = C_1 e^t - C_2 e^{-t} - 1.$$

$$\text{Soluzio partikularra: } y^* = e^{-t} - 1, \quad x^* = -e^{-t} - 1.$$

$$181. \quad \frac{dx}{dt} = x - 2y, \quad \frac{dy}{dt} = x - y. \quad t=0 \text{ denean, } x=1, y=1 \text{ hastapen-baldintzak betetzen dituzten soluzio partikularrak bilatu.}$$

$$\text{Em.: } y = C_1 \cos t + C_2 \sin t, \quad x = (C_1 + C_2) \cos t + (C_2 - C_1) \sin t.$$

$$\text{Soluzio partikularra: } x^* = \cos t - \sin t, \quad y^* = \cos t.$$

$$182. \begin{cases} 4 \frac{dx}{dt} - \frac{dy}{dt} + 3x = \sin t, \\ \frac{dx}{dt} + y = \cos t. \end{cases} \quad \text{Em.: } \begin{aligned} x &= C_1 e^{-t} + C_2 e^{-3t}, \\ y &= C_1 e^{-t} + 3C_2 e^{-3t} + \cos t. \end{aligned}$$

$$183. \begin{cases} \frac{d^2 y}{dt^2} = x, \\ \frac{d^2 x}{dt^2} = y. \end{cases} \quad \text{Em.: } \begin{aligned} x &= C_1 e^t + C_2 e^{-t} + C_3 \cos t + C_4 \sin t, \\ y &= C_1 e^t + C_2 e^{-t} - C_3 \cos t - C_4 \sin t. \end{aligned}$$

$$184. \begin{cases} \frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{dy}{dt} + x = e^t, \\ \frac{dx}{dt} + \frac{d^2 y}{dt^2} = 1. \end{cases} \quad \begin{aligned} \text{Em.: } x &= C_1 + C_2 t + C_3 t^2 - \frac{1}{6} t^3 + e^t, \\ y &= C_4 - (C_1 + 2C_3)t - \frac{1}{2}(C_2 - 1)t^2 - \frac{1}{3}C_3 t^3 + \frac{1}{24}t^4 - e^t. \end{aligned}$$

$$185. \begin{cases} \frac{dy}{dx} = z - y, \\ \frac{dz}{dx} = -y - 3z. \end{cases} \quad \begin{aligned} \text{Em.: } y &= (C_1 + C_2 x)e^{-2x}, \\ z &= (C_2 - C_1 - C_2 x)e^{-2x}. \end{aligned}$$

$$186. \begin{cases} \frac{dy}{dx} + z = 0, \\ \frac{dz}{dx} + 4y = 0. \end{cases} \quad \begin{aligned} \text{Em.: } y &= C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x}, \\ z &= -2(C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x}). \end{aligned}$$

$$187. \begin{cases} \frac{dy}{dx} + 2y + z = \sin x, \\ \frac{dz}{dx} - 4y - 2z = \cos x \end{cases} \quad \begin{aligned} \text{Em.: } y &= C_1 + C_2 x + 2 \sin x, \\ z &= -2C_1 - C_2(2x + 1) - 3 \sin x - 2 \cos x. \end{aligned}$$

$$188. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = y + z, \\ \frac{dy}{dt} = x + z, \\ \frac{dz}{dt} = x + y \end{cases} \quad \begin{aligned} \text{Em.: } x &= C_1 e^{-t} + C_2 e^{2t}, \\ y &= C_3 e^{-t} + C_2 e^{2t}, \\ z &= -(C_1 + C_3)e^{-t} + C_2 e^{2t}. \end{aligned}$$

$$189. \begin{cases} \frac{dy}{dx} = 1 - \frac{1}{z}, \\ \frac{dz}{dx} = \frac{1}{y - x}. \end{cases} \quad \begin{aligned} \text{Em.: } z &= C_2 e^{C_1 x}, \\ y &= x + \frac{1}{C_1 C_2} e^{-C_1 x}. \end{aligned}$$

$$190. \begin{cases} \frac{dy}{dx} = \frac{x}{yz}, \\ \frac{dz}{dx} = \frac{x}{y^2}. \end{cases} \quad \text{Em.: } \begin{aligned} \frac{z}{y} &= C_1, \\ zy^2 - \frac{3}{2}x^2 &= C_2. \end{aligned}$$

Analisatu $x=0, y=0$ soluzioaren egonkortasuna ondoko ekuazio diferentzialezko sistemetarako:

$$191. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x - 3y \\ \frac{dy}{dt} = 5x + 6y \end{cases}. \quad \text{Em.: ezegonkorra.}$$

$$192. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = -4x - 10y \\ \frac{dy}{dt} = x - 2y \end{cases}. \quad \text{Em.: egonkorra.}$$

$$193. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 12x + 18y \\ \frac{dy}{dt} = -8x - 12y \end{cases}. \quad \text{Em.: ezegonkorra.}$$

194. $x=0$ denean $y=1$ hastapen-baldintza betetzen duen eta $y' = y^2 + x$ ekuazioaren soluzioa den funtzioaren balio hurbilduak kalkulatu. Aurkitu soluzioaren balioak $x=0,1; 0,2; 0,3; 0,4; 0,5$ balioetarako. Em.: $y_{x=0,5} = 2,114$

195. $x=1$ denean $y=1$ hastapen-baldintza betetzen duen $y' + \frac{1}{x}y = e^x$ ekuazioaren soluzioaren $y_{x=1,4}$ balio hurbildua bilatu. Konparatu lortutako emaitza soluzio zehatzarekin.

196. $t=1$ denean $x=0$ eta $y=1$ hastapen-baldintzak betetzen dituzten

$\frac{dx}{dt} = y - x, \frac{dy}{dt} = -x - 3y$ ekuazioen sistemaren soluzioen $x_{t=1,4}, y_{t=1,4}$ balio hurbilduak bilatu. Konparatu lortutako balioak zehatzekin.

XIV. GAIA

INTEGRAL ANIZKOITZAK

§ 1. Integral bikoitza

Kontsidera dezagun Oxy planoko D eremu itxi¹⁾ bat, L kurbak mugatua. Izan bedi

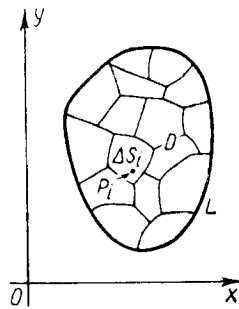
$$z = f(x, y)$$

D eremuan emandako funtzio jarraia.

Bana dezagun D eremua, hautazko kurben bidez, n zatitan:

$$\Delta s_1, \Delta s_2, \Delta s_3, \dots, \Delta s_n$$

(276. irudia), eremu partzial edo elementu deituko ditugunak. Ikur berririk ez sartzeko, $\Delta s_1, \dots, \Delta s_n$ ikurrez elementuak berak ezezik beren azalerak ere adieraziko ditugu.



276. IRUDIA

Δs_i bakoitzean (bere barnealdean edo mugan) P_i puntu bat aukera dezagun; orduan, n puntu,

$$P_1, P_2, \dots, P_n$$

izango dugu.

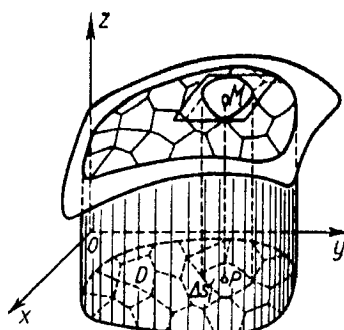
1) D eremu bat itxi deitzen da kurba itxi batez mugaturik badago eta mugako puntuak eremukoak kontsideratzen badira.

Izan bitez $f(P_1), f(P_2), \dots, f(P_n)$ funtzioaren balioak aukeratutako puntuetan eta osa dezagun $f(P_i)\Delta s_i$ itxurako biderkaduren batura:

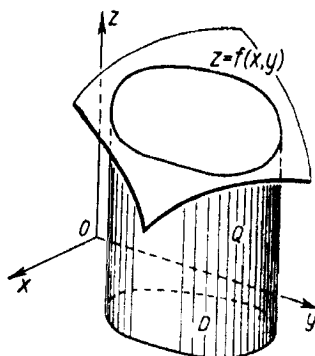
$$V_n = f(P_1)\Delta s_1 + f(P_2)\Delta s_2 + \dots + f(P_n)\Delta s_n = \sum_{i=1}^n f(P_i)\Delta s_i \quad (1)$$

D eremuari dagokion $f(x,y)$ funtzioaren *batura integral* deiturikoa.

$f \geq 0$ bada D eremuan, $f(P_i)\Delta s_i$ batugai bakoitza, geometrikoki, Δs_i oinarriko eta $f(P_i)$ altuerako zilindro elemental baten bolumena bezala adieraz daiteke.



277. IRUDIA



278. IRUDIA

Horrela, V_n aipatutako zilindro elementalen bolumenen arteko batura da, hau da, gorputz mailakatu baten bolumena (277. irudia).

Iker dezagun batura integralen hautazko segida bat, emandako D eremuan $f(x,y)$ funtzioarekin osatua:

$$V_{n_1}, V_{n_2}, \dots, V_{n_k}, \dots \quad (2)$$

D eremuan Δs_i zatikako banaketa desberdinetarako. Demagun Δs_i elementuen diametrorik handienak zerorantz jotzen duela, $n_k \rightarrow \infty$ denean. Kasu honetan, frogapenik gabe ondoan aipatzen dugun teorema betetzen da.

1. Teorema. $f(x,y)$ funtzioa D eremu itxian jarraia bada eta batura integralen (2) segidak badauka limiterik, Δs_i -en diametro handienak zerorantz jotzen badu $n \rightarrow \infty$ denean. Limite hori berbera da beti (2) itxurako edozein segidatarako, hau da, ez dago D eremuaren Δs_i elementuetako banaketa-eraren menpe, ez eta Δs_i eremu partzialeko P_i puntuaren hautaketaren menpe ere.

Limite horri D eremuan zabalduko $f(x,y)$ funtzioaren *integral bikoitz* deritzo eta

$$\iint_D f(P) ds \quad \text{edo} \quad \iint_D f(x,y) dx dy$$

idazten da, hau da,

$$\lim_{\text{diam} \Delta s_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(P_i) \Delta s_i = \iint_D f(x,y) dx dy.$$

Hemen, D *integratio-eremu* deitzen da.

$f(x,y) \geq 0$ bada, D eremuan zabalduko $f(x,y)$ funtzioaren integral bikoitza hiru gainazalek mugatzen duten gorputz baten Q bolumenaren berdina da, hiru gainazalak $z = f(x,y)$ gainazala, $z = 0$ plano eta sortzailea Oz ardatzarekiko paralelo eta zuzentzailea D eremuaren muga dituen gainazal zilindrikoa dira (278. irudia).

Formula ditzagun orain integral bikoitzari buruzko ondorengo teorema.

2. Teorema. D eremuan zabalduko $\varphi(x,y) + \psi(x,y)$ bi funtzioaren arteko baturaren integral bikoitza, D eremuan zabalduko funtzio bakoitzaren integral bikoitzen arteko baturaren berdina da:

$$\iint_D [\varphi(x,y) + \psi(x,y)] ds = \iint_D \varphi(x,y) ds + \iint_D \psi(x,y) ds.$$

3. Teorema. Faktore konstante oro integral bikoitzaren ikurretik kanpo atera daiteke: $a = \text{ktea.}$ bada,

$$\iint_D a \varphi(x,y) ds = a \iint_D \varphi(x,y) ds.$$

Teorema bi horien frogapena, dagozkien integral mugatuaren teorema frogatzeko egin den antzeko eran egiten da (ikus XII. gaiko § 3).

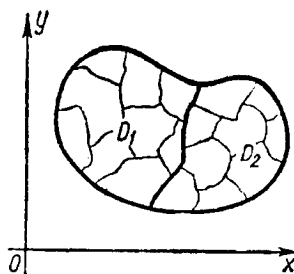
4. Teorema. D eremua barne-puntu komun gabeko D_1 eta D_2 bi eremu partzialez osatuta badago eta $f(x,y)$ funtzioa D eremuko puntu guztietan jarraia bada

$$\iint_D f(x,y) dx dy = \iint_{D_1} f(x,y) dx dy + \iint_{D_2} f(x,y) dx dy. \quad (3)$$

Frogapena. D eremuan batura integrala

$$\sum_D f(P_i) \Delta s_i = \sum_{D_1} f(P_i) \Delta s_i + \sum_{D_2} f(P_i) \Delta s_i \quad (4)$$

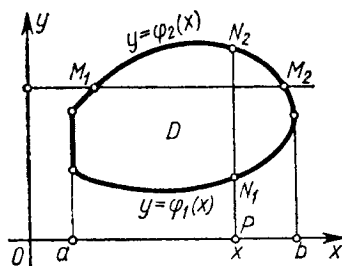
itxuran idatz daiteke (279. irudia), non lehenengo batuketak D_1 eremuko elementuei dagozkien gaiak dauzkan, eta bigarrenak D_2 eremuko elementuei dagozkienak. Izan ere, integral bikoitza D eremua zatitzeko eraren menpe ez dagoenez, zati dezagun D_1 eta D_2 -ren muga amankomuna Δs_i elementuen muga ere izan dadin. (4) berdintzan limitea, $\Delta s_i \rightarrow 0$ denean, kalkulatu, (3) berdintza lortuko dugu. Bistakoa da teorema horrek batugaien edozein kopurutarako balio duela.



279. IRUDIA

§ 2. Integral bikoitzaren kalkulua

Izan bedi Oxy planoko D eremu bat, non koordenatu-ardatzaren batekiko (esaterako, Oy ardatzarekiko) paralelo orok, eremuaren barne-puntu²⁾ batetik pasatzen bada, bere muga N_1 eta N_2 bi puntutan ebakitzen bait du (280. irudia).



280. IRUDIA

2) Barne-puntu bat mugan ez dagoen eremuaren puntu bat da.

Demagun aztertutako kasuan D eremua $y = \varphi_1(x)$, $y = \varphi_2(x)$ kurbez eta $x=a$, $x=b$ zuzenez mugatuta dagoela eta

$$\varphi_1(x) \leq \varphi_2(x), \quad a < b$$

direla; horrez gain φ_1 eta φ_2 funtzioak jarraiak dira $[a,b]$ tartean. Horrelako eremuari Oy ardatzaren norabidean *erregular* deituko diogu. Antzeko eran definitzen da eremu *erregularra* Ox ardatzaren norabidean.

Bi koordinatu-ardatzaren norabideetan eremu erregularrari *eremu erregular*, soilik, deituko diogu. 280. irudiak eremu erregularraren adibide bat ematen du.

Izan bedi $f(x,y)$ funtzio jarraia D eremuan.

Kontsidera dezagun

$$I_D = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y) dy \right) dx$$

adierazpena, D eremuan zabaldutako $f(x,y)$ funtzioaren *bigarren ordenako integral berritu* deituko duguna. Adierazpen horretan lehenengoz parentesien arteko integrala kalkulatzen da. Integrazioa y -rekiko egiten da, x konstantetzat hartuz. Integrazioaren emaitzatzat x -ren funtzio jarrai bat³⁾ lortzen dugu:

$$\Phi(x) = \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y) dy.$$

Azken funtzioa x -rekiko integratzen dugu a eta b limiteen artean:

$$I_D = \int_a^b \Phi(x) dx.$$

Azkenik zenbakizko balio bat erdiesten dugu.

1. Adibidea. Kalkulatu

$$I_D = \int_0^1 \left(\int_0^{x^2} (x^2 + y^2) dy \right) dx.$$

3) Hemen ez da frogatzen $\Phi(x)$ funtzioa jarraia dela.

bigarren ordenako integral berritua.

Ebazpena. Kalkula dezagun lehenbizi barneko integrala (parentesien artean):

$$\Phi(x) = \int_0^{x^2} (x^2 + y^2) dy = \left[x^2 y + \frac{y^3}{3} \right]_0^{x^2} = x^2 x^2 + \frac{(x^2)^3}{3} = x^4 + \frac{x^6}{3}.$$

Lortutako funtzioa 0tik 1era integratuz,

$$\int_0^1 \left(x^4 + \frac{x^6}{3} \right) dx = \left[\frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{3 \cdot 7} \right]_0^1 = \frac{1}{5} + \frac{1}{21} = \frac{26}{105}$$

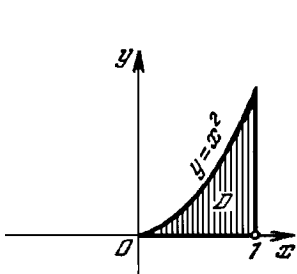
aurkitzen dugu.

Determina dezagun D eremua. Emandako kasuan, D

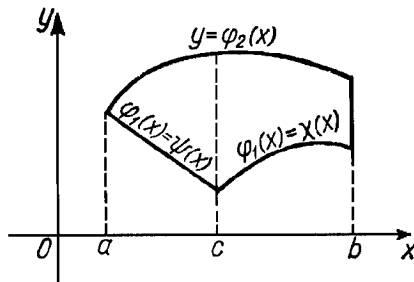
$$y = 0, x = 0, y = x^2, x = 1$$

kurbez mugatutako eremua da (281. irudia).

Batzutan gerta daiteke D eremurako $y = \varphi_1(x)$, $y = \varphi_2(x)$ funtzioetako bat ezin dela adierazi x -ren aldakuntz tartean osoan ($x = a$ baliotik $x = b$ baliora) adierazpen analitiko bakar batez. Izan bedi, adibidez, $a < c < b$



281. IRUDIA



282. IRUDIA

eta

$$\begin{aligned} \varphi_1(x) &= \psi(x) & [a, c] \text{ tartean} \\ \varphi_1(x) &= \chi(x) & [c, b] \text{ tartean,} \end{aligned}$$

non $\psi(x)$ eta $\chi(x)$ analitikoki definituriko funtzioak bait dira (282. irudia). Kasu honetan idatz dezagun integral berritua ondoko eran:

$$\begin{aligned} \int_a^b \left[\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y) dy \right] dx &= \int_a^c \left[\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y) dy \right] dx + \int_c^b \left[\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y) dy \right] dx = \\ &= \int_a^c \left[\int_{\psi(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y) dy \right] dx + \int_c^b \left[\int_{\chi(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y) dy \right] dx. \end{aligned}$$

Berdintza horietako lehenengoa integral mugatuaren propietate ezagunaren arabera dago idatzita eta bigarrena $[a,c]$ tartean $\varphi_1(x) \equiv \psi(x)$ eta $[c,b]$ tartean $\varphi_2(x) \equiv \chi(x)$ bait dauzkagu.

$\varphi_2(x)$ funtzioa bi edo adierazpen analitiko gehiagoren bidez emanik badago $[a,b]$ tartean, bigarren ordenako integral berrituaren adierazpena analogoa izango da.

Determina dezagun bigarren ordenako integral berrituaren zenbait propietate.

1. Propietatea. D eremua, Oy edo Ox ardatzekiko paralelo den zuzen batez D_1 eta D_2 bi eremutan banatzen badugu, D eremuan zabalduko I_D bigarren ordenako integral berritua D_1 eta D_2 eremuetan zabalduko antzeko integralen arteko baturaren berdina izango da, hau da,

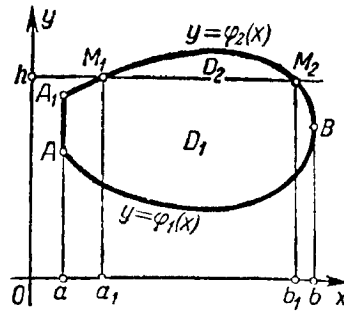
$$I_D = I_{D_1} + I_{D_2}. \quad (1)$$

Frogapena. a) Demagun $x=c$ ($a < c < b$) zuzenak D eremua D_1 eta D_2 , Oy ardatzaren norabidean bi eremu erregularretan, zatitzen duela⁴⁾. Orduan,

$$\begin{aligned} I_D &= \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y) dy \right) dx = \int_a^c \Phi(x) dx + \int_c^b \Phi(x) dx = \\ &= \int_a^c \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y) dy \right) dx + \int_c^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y) dy \right) dx = I_{D_1} + I_{D_2}. \end{aligned}$$

b) Demagun $y=h$ zuzenak D eremua D_1 eta D_2 , Oy ardatzaren norabidean bi eremu erregularretan, zatitzen duela, 283. irudian agertzen den moduan. Izan bitez M_1 eta

4) D_1 -en muga-zati bat (baita D_2 eremuarena ere) zuzen bertikal baten zatia izateak ez du galerazten eremu hori Oy ardatzaren norabidean erregular izatea. Izan ere, eremu bat erregular izan dadin, barne-puntu batetik pasatzen den zuzen bertikal orok mugarekin bi baino puntu komun gehiagorik ez edukitzea soilik nahikoa da.



283. IRUDIA

M_2 , $y=h$ eta D -ren L mugaren arteko ebaki-puntuak. Izan bitez a_1 eta b_1 puntu horien abzisak.

D_1 eremua ondoko kurba jarraiez dago mugatuta:

- 1) $y = \varphi_1(x)$;
- 2) $A_1M_1M_2B$ kurbaz, zeinaren ekuazioa

$$y = \varphi_1^*(x)$$

itxuraz idatziko bait dugu, $a \leq x \leq a_1$ eta $b_1 \leq x \leq b$ kasuetarako $\varphi_1^*(x) = \varphi_2(x)$

eta $a_1 \leq x \leq b_1$ kasurako $\varphi_1^*(x) = h$ direla kontutan hartuz;

3) $x=a$, $x=b$ zuzenak.

D_2 eremua $y = \varphi_1^*(x)$, $y = \varphi_2(x)$, $a_1 \leq x \leq b_1$ izanik, kurbez dago mugatua.

Barruko integralari integrazio-tartearen deskonposizioari dagokion teorema aplikatuz, hurrengo identitatea idatziko dugu:

$$\begin{aligned} I_D &= \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy \right) dx = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_1^*(x)} f(x, y) dy + \int_{\varphi_1^*(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy \right) dx = \\ &= \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_1^*(x)} f(x, y) dy \right) dx + \int_a^b \left(\int_{\varphi_1^*(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy \right) dx. \end{aligned}$$

Azkeneko integrala hiru integraletan deskonposa dezagun, teorema bera kanpoko integralari aplikatuz,

$$\int_a^b \left(\int_{\varphi_1^*(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy \right) dx = \int_a^{a_1} \left(\int_{\varphi_1^*(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy \right) dx + \int_{a_1}^{b_1} \left(\int_{\varphi_1^*(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy \right) dx + \int_{b_1}^b \left(\int_{\varphi_1^*(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy \right) dx;$$

$[a, a_1]$ eta $[b_1, b]$ tarteetan $\varphi_1^*(x) = \varphi_2(x)$ denez gero lehenengo eta hirugarren integralak nuluak dira. Horregatik

$$I_D = \int_a^{b_1} \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_1^*(x)} f(x, y) dy \right) dx + \int_{a_1}^{b_1} \left(\int_{\varphi_1^*(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy \right) dx.$$

Hor lehenengo integrala bigarren ordenako integral berritua da D_1 eremuan eta bigarrena D_2 eremuan. Hortaz,

$$I_D = I_{D_1} + I_{D_2}.$$

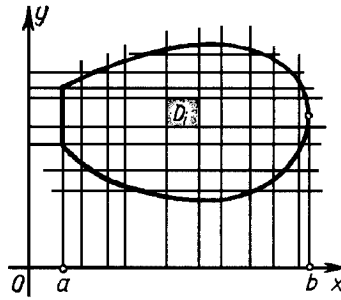
Frogapenak balio izango du $M_1 M_2$ sekantearen posizioa edozein izanik ere. $M_1 M_2$ zuzenak D hiru edo eremu gehiagotan zatitzen badu, (1) antzeko erlazio bat lortuko dugu, dagokion batugai-kopuruarekin bigarren atalean.

Korolaria. Lortutako eremu bakoitza Oy ardatzaren norabidean erregular diren eremutan berriz zati dezakegu, Oy edo Ox -rekiko paralelo baten bidez, eta horiei (1) berdintza aplikatu. Beraz, D eremua eremu erregularren edozein kopurutan zati dezakegu koordenatu-ardatzekiko paraleloen bidez. Izan bitez

$$D_1, D_2, D_3, \dots, D_i$$

eremu partzial horiek, kasu honetan ere balio izango du D eremuan zabaldutako bigarren ordenako integral berritua eremu partzialetan zabaldutako integralen arteko baturaren berdina deneko baieztapenak, hau da (284. irudia),

$$I_D = I_{D_1} + I_{D_2} + I_{D_3} + \dots + I_{D_i}. \quad (2)$$



284. IRUDIA

2. Propietatea. (Bigarren ordenako integral berrituaren ebaluazioa). Izan bitez m eta M $f(x,y)$ funtzioaren balio minimo eta maximoa D eremuan. Izenda dezagun S, D eremuaren azalera. Kasu honetan

$$mS \leq \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y) dy \right) dx \leq MS \quad (3)$$

desberdintzak betetzen dira.

Frogapena. Kalkula dezagun barneko integrala, $\Phi(x)$ izendatuz:

$$\Phi(x) = \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y) dy \leq \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} M dy = M[\varphi_2(x) - \varphi_1(x)].$$

$$I_D = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y) dy \right) dx \leq \int_a^b M[\varphi_2(x) - \varphi_1(x)] dx = MS$$

lortzen dugu, hau da,

$$I_D \leq MS. \quad (3')$$

Analogoki,

$$\begin{aligned} \Phi(x) &= \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y) dy \geq \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} m dx = m[\varphi_2(x) - \varphi_1(x)], \\ I_D &= \int_a^b \Phi(x) dx \geq \int_a^b m[\varphi_2(x) - \varphi_1(x)] dx = mS \end{aligned}$$

daukagu, hau da,

$$I_D \geq mS. \quad (3'')$$

(3') eta (3'') desberdintzetatik (3) ateratzen da:

$$mS \leq I_D \leq MS.$$

Hurrengo atalean propietate horren esanahi geometrikoa argituko dugu.

3. Propietatea. (Batezbestekoaren teorema). S azalerako D eremuan zabaldutako $f(x,y)$ funtzio jarraiaren I_D bigarren ordenako integral berritua, funtzioaren D eremuko P puntu bateko balioa eta S -ren arteko biderkaduraren berdina da, hau da,

$$\int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y) dy \right) dx = f(P)S. \quad (4)$$

Frogapena. (3) formulatik

$$m \leq \frac{1}{S} I_D \leq M$$

ateratzen da. $\frac{1}{S} I_D$ zenbakia $f(x,y)$ funtzioaren balio minimo eta maximoaren artean

dago. $f(x,y)$ funtzioaren jarraitasuna dela eta, horrek $\frac{1}{S} I_D$ balioa D eremuko P puntu batean hartuko du, hots,

$$\frac{1}{S} I_D = f(P),$$

hortik,

$$I_D = f(P)S. \quad (5)$$

§ 3. Integral bikoitzaren kalkulua (jarraipena)

Teorema. D eremu erregularrean zabaldutako $f(x,y)$ funtzio jarraiaren integral bikoitza, D -an zabaldutako funtzioaren bigarren ordenako integral berrituaren berdina da, hots⁵⁾,

$$\iint_D f(x,y) dx dy = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y) dy \right) dx$$

Frogapena. Zati dezagun D eremua koordenatu-ardatzekiko paraleloen bitartez n eremu erregularretan (angeluzuzenak):

$$\Delta s_1, \Delta s_2, \dots, \Delta s_n.$$

Aurreko ataleko 1. propietatearen [(2) formula] arabera

$$I_D = I_{\Delta s_1} + I_{\Delta s_2} + \dots + I_{\Delta s_n} = \sum_{i=1}^n I_{\Delta s_i} \quad (1)$$

dugu.

Alda dezagun bigarren ataleko batugai bakoitza bigarren ordenako integral berrituen batezbestekoaren teorema erabiliz

$$I_{\Delta s_i} = f(P_i) \Delta s_i.$$

Orduan, (1) berdintzak

$$I_D = f(P_1) \Delta s_1 + f(P_2) \Delta s_2 + \dots + f(P_n) \Delta s_n = \sum_{i=1}^n f(P_i) \Delta s_i \quad (2)$$

itxura hartzen du, non P_i Δs_i -ko puntu bat bait da. Eskuinean $f(x,y)$ funtzioaren batura integrala dugu, D eremuan zabaldua. Integral bikoitzaren existentziari buruzko teorematik ondorioztatzen da batura horren limitea existitu eta, D eremuan, $f(x,y)$ funtzioaren integral bikoitzaren berdina dela, $n \rightarrow \infty$ denean eta Δs_i eremu partzialen diametro handienak zerorantz jotzen duenean. (2) berdintzaren lehenengo ataleko I_D bigarren ordenako integral berrituaren zenbakizko balioa ez dago n -ren menpe. Hortaz, (2) berdintzan limitera pasatuz,

5) Berriro, D eremua Oy ardatzaren norabidean erregularra dela eta $y = \varphi_1(x)$, $y = \varphi_2(x)$ kurbez eta $x = a$, $x = b$ zuzenez mugatua dela suposatzen dugu.

$$I_D = \lim_{\text{diam} \Delta s_i \rightarrow 0} \sum f(P_i) \Delta s_i = \iint_D f(x, y) dx dy$$

edo

$$\iint_D f(x, y) dx dy = I_D \quad (3)$$

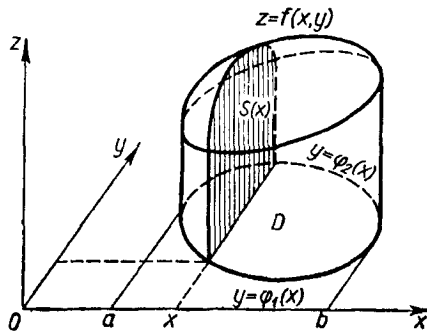
erdiesten dugu.

I_D bigarren ordenako integral berrituaren adierazpena zehatzago idatziz, azkenik,

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b \left[\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy \right] dx \quad (4)$$

lortzen dugu.

1. Oharra. $f(x, y) \geq 0$ denean, (4) formulak adierazpen geometriko argigarria dauka. Kontsidera dezagun $z = f(x, y)$ gainazalak, $z = 0$ planoak eta sortzailea Oz ardatzarekiko paralelo eta zuzentzailea D eremuaren muga dituen gainazal zilindrikoak mugatutako gorputza (285. irudia). Kalkula dezagun gorputz horren V bolumena.



285. IRUDIA

Jadanik esan dugu gorputz horren bolumena D eremuan zabalduko $f(x, y)$ funtzioaren integral bikoitzaren berdina dela:

$$V = \iint_D f(x, y) dx dy. \quad (5)$$

Kalkula dezagun orain bolumena, gorputz baten bolumenaren kalkuluari buruzko XII. gaiko § 4eko emaitzak erabiliz sekzio paraleloen azalaren funtzioan. Marra dezagun

$x = \text{ktea}$. ($a < x < b$) plano sekantea. Kalkula dezagun $x = \text{ktea}$. sekzioan lortutako irudiaren $S(x)$ azalera. Irudi hori, $x = f(x, y)$ ($x = \text{ktea.}$), $z = 0$, $y = \varphi_1(x)$, $y = \varphi_2(x)$ lerroez mugatutako trapezio lerromakurra da. Beraz, azalera hori

$$S(x) = \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy \quad (6)$$

integralaren bidez kalkulatu da. Sekzio paraleloen azalerak ezagutuz erraza da gorputzaren bolumena aurkitzea:

$$V = \int_a^b S(x) dx,$$

edo, formula horretan $S(x)$ bere (6) adierazpenaz ordezkatzuz,

$$V = \int_a^b \left[\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy \right] dx \quad (7)$$

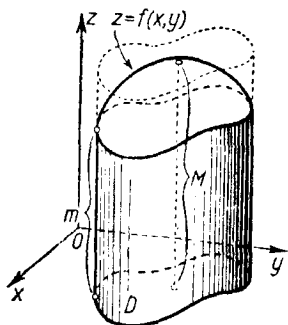
daukagu. (5) eta (7) formulen lehenengo atalak berdinak dira, beraz, beren bigarren atalak ere berdinak dira:

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b \left[\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy \right] dx.$$

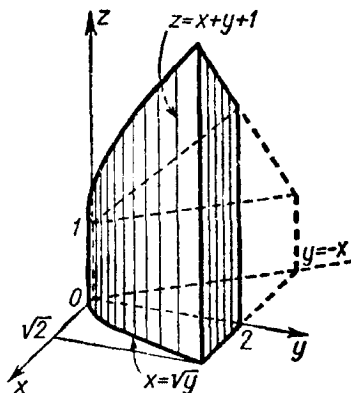
Ez da zaila orain argitzea bigarren ordenako integral berrituen ebaluazioari buruzko teoremaren esanahi geometrikoa (aurreko ataleko 2. propietatea): $z = f(x, y)$ gainazalak, $z = 0$ planoak eta gainazal zilindrikoak, zeinaren zuzentzailea D eremuaren muga den, mugatutako gorputz baten V bolumena, S oinarriko eta m altuerako zilindroaren bolumena baino handiagoa eta S oinarriko eta M altuerako zilindroaren bolumena baino txikiagoa da [m eta M , $z = f(x, y)$ funtzioaren balio minimo eta maximoa dira, D eremuan (286. irudia)]. Hori, I_D bigarren ordenako integral berritua gorputz horren V bolumenaren berdina izatetik ondorioztatzen da.

1. Adibidea. Kalkulatu $\iint_D (4 - x^2 - y^2) dx dy$ integral bikoitza, D eremua

$x = 0$, $x = 1$, $y = 0$, $y = \frac{3}{2}$ zuzenek mugatzen badute.



286. IRUDIA



287. IRUDIA

Ebazpena. Formula erabiliz,

$$\begin{aligned} V &= \int_0^{3/2} \left[\int_0^1 (4 - x^2 - y^2) dx \right] dy = \int_0^{3/2} \left[4x - y^2 x - \frac{x^3}{3} \right]_0^1 dy = \\ &= \int_0^{3/2} \left(4 - y^2 - \frac{1}{3} \right) dy = \left(4y - \frac{y^3}{3} - \frac{1}{3} y \right) \Big|_0^{3/2} = \frac{35}{8}. \end{aligned}$$

2. Adibidea. Kalkulatu $y = -x$, $x = \sqrt{y}$, $y = 2$, $z = 0$ kurbek mugatzen duten eremuan zabaldutako $f(x, y) = 1 + x + y$ funtzioaren integral bikoitza (287. irudia).

Ebazpena.

$$\begin{aligned} V &= \int_0^2 \left[\int_{-y}^{\sqrt{y}} (1 + x + y) dx \right] dy = \int_0^2 \left[x + xy + \frac{x^2}{2} \right]_{-y}^{\sqrt{y}} dy = \\ &= \int_0^2 \left[\left(\sqrt{y} + y\sqrt{y} + \frac{y}{2} \right) - \left(-y - y^2 + \frac{y^2}{2} \right) \right] dy = \\ &= \int_0^2 \left[\sqrt{y} + \frac{3y}{2} + y\sqrt{y} - \frac{y^2}{2} \right] dy = \left[\frac{2y^{\frac{3}{2}}}{3} + \frac{3y^2}{4} + \frac{2y^{\frac{5}{2}}}{5} - \frac{y^3}{6} \right]_0^2 = \frac{44}{15} \sqrt{2} + \frac{5}{3}. \end{aligned}$$

2. Oharra. Demagun D eremua, Ox ardatzaren norabidean erregularra,

$$x = \psi_1(y), \quad x = \psi_2(y), \quad y = c, \quad y = d$$

kurbez mugatuta dagoela, $\psi_1(y) \leq \psi_2(y)$ izanik (288. irudia).

Bistakoa da kasu honetan

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_c^d \left(\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y) dx \right) dy \quad (8)$$

daukagula.

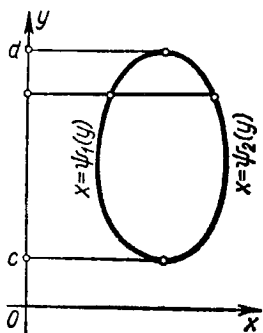
Integral bikoitz bat kalkulatzeko bigarren ordenako integral berritua bezala adierazi behar da. Horretarako, (4) edo (8) formulak erabil daitezke. Kasu konkretu bakoitzean, integral bikoitza kalkulatzeko formula bat edo bestea aukeratu dugu D eremua edo integrakizunaren itxuraren arabera.

3. Adibidea. Trukatu

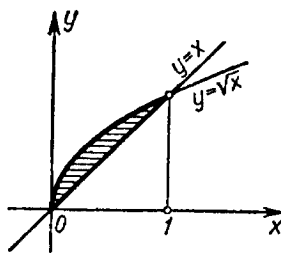
$$I = \int_0^1 \left(\int_x^{\sqrt{x}} f(x, y) dy \right) dx$$

integralaren integrazio-ordena.

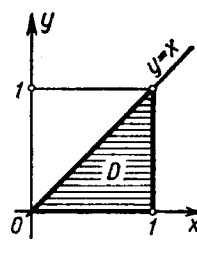
Ebazpena. Integrazio-eremua $y = x$ zuzenaz eta $y = \sqrt{x}$ parabolaz dago mugatua (289. irudia).



288. IRUDIA



289. IRUDIA



290. IRUDIA

Ox ardatzarekiko paralelo orok eremuaren muga gehienez bi puntutan ebakitzen du. Hortaz, (8) integralaren arabera kalkula daiteke,

$$\psi_1(y) = y^2, \quad \psi_2(y) = y, \quad 0 \leq y \leq 1$$

eginez; orduan,

$$I = \int_0^1 \left(\int_{y^2}^y f(x, y) dx \right) dy$$

da.

4. Adibidea. Kalkulatu $\iint_D e^{\frac{y}{x}} ds$, D eremua $y = x$, $y = 0$, $x = 1$ zuzenak

mugatzen duten triangelua bada (290. irudia).

Ebazpena. Ordezka dezagun integral bikoitza bigarren ordenako integral berrituaz

(4) formula aplikatuz. ((8) formula erabiliz gero, $e^{\frac{y}{x}}$ funtzioa x -rekiko integratu beharko genuke; baina integral hori ezin da funtzio elementalen bidez adierazi):

$$\begin{aligned} \iint_D e^{\frac{y}{x}} ds &= \int_0^1 \left[\int_0^x e^{\frac{y}{x}} dy \right] dx = \int_0^1 \left[x e^{\frac{y}{x}} \right]_0^x dx = \\ &= \int_0^1 x(e-1) dx = (e-1) \frac{x^2}{2} \Big|_0^1 = \frac{e-1}{2} = 0,859\dots \end{aligned}$$

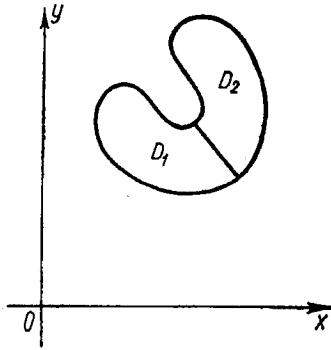
3. Oharra. D eremua Ox ardatzaren norabidean erregular ez bada, ez eta Oy ardatzaren norabidean ere (hau da, zuzen bertikal eta horizontalak badaude, zeinak eremuko barne-puntuetatik pasatzen diren eta eremuaren muga bi baino puntu gehiagotan ebakitzen duten) ezin dugu eremu horretan zabaldutako integral bikoitza bigarren ordenako integral berritu batez adierazi. D eremu irregularra $D_1, D_2, \dots, D_n$ Ox edo Oy ardatzen norabidean eremu erregularren kopuru finitutan zatitzea lortzen badugu, eremu partzial horietako bakoitzean integral bikoitza kalkulatzeko eta lortutako emaitzak batzean, D eremuan zabaldutako integral bilatua lortuko dugu.

291. irudian D eremu irregularra D_1 eta D_2 eremu erregularretan zatitzeko era azaltzen da.

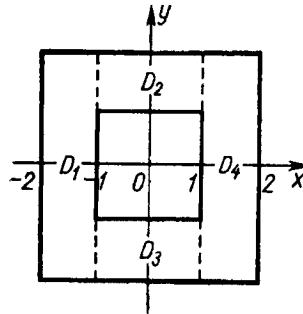
5. Adibidea. Kalkulatu

$$\iint_D e^{x+y} ds$$

integral bikoitza D eremuan zabaldua, zeina zentrua jatorrian eta aldeak koordenatu-ardatzekiko paralelo dituzten bi karratuz mugatua bait da, barneko karratuaren aldea 2 eta kanpokoarena 4 badira (292. irudia).



291. IRUDIA



292. IRUDIA

Ebazpena. D eremua irregularra da. Hala ere, $x = -1$ eta $x = 1$ zuzenak lau eremu erregularretan, D_1, D_2, D_3, D_4 zatitzen dute. Horregatik,

$$\iint_D e^{x+y} ds = \iint_{D_1} e^{x+y} ds + \iint_{D_2} e^{x+y} ds + \iint_{D_3} e^{x+y} ds + \iint_{D_4} e^{x+y} ds.$$

Integral horietako bakoitza bigarren ordenako integral berrituez adieraziz,

$$\begin{aligned} \iint_D e^{x+y} ds &= \int_{-2}^{-1} \left[\int_{-2}^2 e^{x+y} dy \right] dx + \int_{-1}^1 \left[\int_1^2 e^{x+y} dy \right] dx + \int_{-1}^1 \left[\int_{-2}^{-1} e^{x+y} dy \right] dx + \int_1^2 \left[\int_{-2}^2 e^{x+y} dy \right] dx = \\ &= (e^2 - e^{-2})(e^{-1} - e^{-2}) + (e^2 - e)(e - e^{-1}) + (e^{-1} - e^{-2})(e - e^{-1}) + \\ &\quad + (e^2 - e^{-2})(e^2 - e) = (e^3 - e^{-3})(e - e^{-1}) = 4 \sinh 3 \sinh 1 \end{aligned}$$

aurkitzen dugu.

4. Oharra. Aurrerantzean

$$I_D = \int_a^b \left[\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy \right] dx$$

bigarren ordenako integral berritua barneko integralaren parentesi gabe idatziko dugu, hau da,

$$\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy dx$$

itxuraz. Hor (parentesiak erabiltzen direnean bezala), lehenengo integrala bere diferentziala lehenago idatzita daukan aldagaiarekiko egiten da, eta gero beste aldagaiarekiko, zeinaren diferentziala bigarren lekuan idatzita bait dago. Ohar dezagun, hala ere, erregela hori ez dagoela orokorrean onarturik. Lan batzuetan aurkako prozedura onartzen da: lehenengoz, integrazioa bere diferentziala azken lekuan daukan aldagaiarekiko egiten da⁶⁾.

§ 4. Azalera eta bolumenen integral bikoitzen bidezko kalkulua

1. Bolumenak. § 1ean ikusi dugun bezala, $z=f(x,y)$ gainazalak, $f(x,y)$ funtzio ez-negatiboa izanik, $z=0$ planoak eta sortzaileak Oz ardatzarekiko paralelo eta zuzentzailea D eremuaren muga dituen gainazal zilindrikoak mugatutako gorputzaren V bolumena, D eremuan zabalduetako $f(x,y)$ funtzioaren integral bikoitzaren berdina da:

$$V = \iint_D f(x, y) ds.$$

I. Adibidea. Kalkulatu $x=0$, $y=0$, $x+y+z=1$, $z=0$ gainazalek mugatutako gorputzaren bolumena (293. irudia).

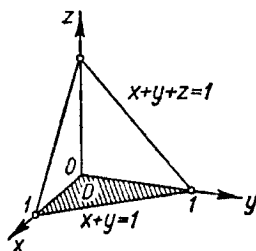
Ebazpena.

$$V = \iint_D (1-x-y) dy dx,$$

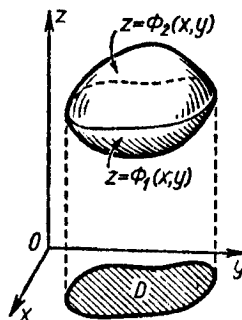
non D (293. irudian marraztua) $x=0$, $y=0$, $x+y=1$ zuzenek mugatzen duten Oxy planoko eremu triangeluarra bait da.

6) Batzutan ondoko idazkera ere erabiltzen da:

$$I_D = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} f(x, y) dy \right) dx = \int_a^b dx \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} f(x, y) dy.$$



293. IRUDIA



294. IRUDIA

Integral bikoitzaren mugak jarritz, kalkula dezagun bolumena:

$$V = \int_0^1 \int_0^{1-x} (1-x-y) dy dx = \int_0^1 \left[(1-x)y - \frac{y^2}{2} \right]_0^{1-x} dx = \int_0^1 \frac{1}{2} (1-x)^2 dx = \frac{1}{6}.$$

Honela, $V = \frac{1}{6}$ unitate kubiko.

1. Oharra. Bolumena bilatzen zaion gorputza goitik eta behetik $z = \Phi_2(x, y) \geq 0$ eta $z = \Phi_1(x, y) \geq 0$ gainazalez, hurrenez hurren, mugatuta badago, D bi gainazalen Oxy planoaren gaineko proiektzioa izanik, gorputz horren V bolumena bi gorputz zilindrikoen bolumenen arteko diferentziaren berdina da, lehenengoak beheko oinarritzat D eta goiko oinarritzat $z = \Phi_2(x, y)$ gainazala du eta bigarrenak beheko oinarritzat D ere eta goiko oinarritzat $z = \Phi_1(x, y)$ gainazala (294. irudia).

Horregatik, V bolumena bi integral bikoitzen arteko kendura da,

$$V = \iint_D \Phi_2(x, y) ds - \iint_D \Phi_1(x, y) ds$$

edo

$$V = \iint_D [\Phi_2(x, y) - \Phi_1(x, y)] ds. \quad (1)$$

Erraza da frogatzea (1) formulak $\Phi_1(x, y)$ eta $\Phi_2(x, y)$ funtzioak ez-negatiboak direnean ezezik $\Phi_2(x, y) \geq \Phi_1(x, y)$ erlazioa betetzen duten hautazko funtzio jarraiak direnean ere balio duela.

2. Oharra. $f(x,y)$ funtzioak D eremuan zeinuz aldatzen badu, zati dezagun hori bi eremutan: 1) D_1 eremua, non $f(x,y) \geq 0$ den; 2) D_2 eremua, non $f(x,y) \leq 0$ den. Jo dezagun D_1 eta D_2 eremuetan dagozkien integral bikoitzak existitzen direla. Kasu honetan D_1 eremuan integrala positiboa eta Oxy planoaren gainean dagoen gorputzaren bolumenaren berdina da. D_2 -an zabaldutako integrala negatiboa eta, balio absolutuan, Oxy plano azpian dagoen gorputzaren bolumenaren berdina izango da. Hortaz, D eremuan zabaldutako integralak bolumenaren arteko kendura adieraziko du.

II. Eremu launaren azaleraren kalkulua. D eremuan definitutako $f(x,y) \equiv 1$ funtzioaren batura integral bat eraikitzen badugu,

$$S = \sum_{i=1}^n 1 \cdot \Delta s_i$$

azalera lortzen dugu, partiketa edozein dela ere. Berdintzaren bigarren atalean limitera pasatuz,

$$S = \iint_D dx \, dy$$

erdiesten dugu. D eremua erregularra bada (ikus, adibidez, 280. irudia), S azalera

$$S = \int_a^b \left[\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} dy \right] dx$$

bigarren ordenako integral berrituaren bidez adieraziko da. Parentesien arteko integrala integratu eta gero

$$S = \int_a^b [\varphi_2(x) - \varphi_1(x)] dx$$

daukagu (ikus XII. gaiko § 1).

2. Adibidea. Kalkulatu

$$y = 2 - x^2, \quad y = x$$

kurbek mugatutako eremuaren azalera.

Ebazpena. Determina ditzagun emandako kurben arteko ebaki-puntuak (295. irudia). Bi kurben ordenatuak berdinak dira ebaki-puntuetan, hau da,

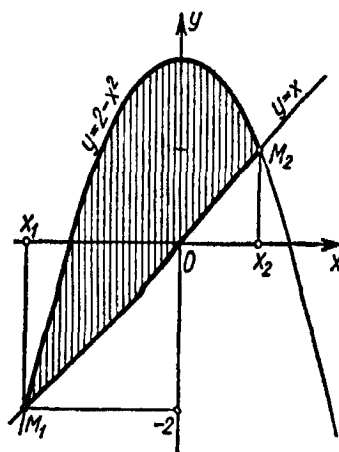
$$x = 2 - x^2,$$

nondik

$$x^2 + x - 2 = 0, \quad x_1 = -2, \quad x_2 = 1$$

ateratzen dugun. Bi ebaki-puntu lortu ditugu:

$$M_1(-2, -2), \quad M_2(1, 1).$$



295. IRUDIA

Beraz, bilatutako azalera

$$S = \int_{-2}^1 \left(\int_x^{2-x^2} dy \right) dx = \int_{-2}^1 (2 - x^2 - x) dx = \left[2x - \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} \right]_{-2}^1 = \frac{27}{6}$$

da.

§ 5. Integral bikoitzak koordenatu polarretan

Izan bedi D eremu bat, θ , ρ koordenatu polarren sisteman, non D -ren barne-puntu batetik pasatzen den izpi⁷⁾ orok muga gehienez bi puntutan ebakitzen duen. Demagun ere D eremua $\rho = \Phi_1(\theta)$, $\rho = \Phi_2(\theta)$ kurbek eta $\theta = \alpha$ eta $\theta = \beta$ izpiek mugatua

7) Izpi deitzen diogu koordenatu-jatorritik, hau da, P polotik, abiatzen den zuzenerdi orori.

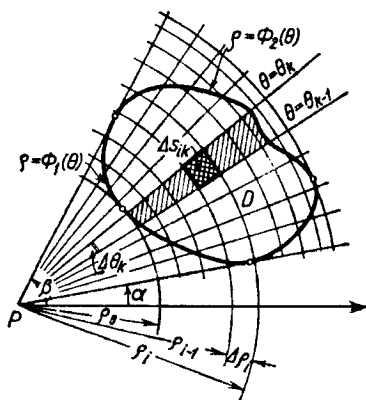
dagoela, $\Phi_1(\theta) \leq \Phi_2(\theta)$ eta $\alpha < \beta$ izanik (296. irudia). Horrelako eremua *erregularra* dela esango dugu.

Izan bedi

$$z = F(\theta, \rho)$$

D eremuan emandako θ eta ρ koordenatuen funtzio jarraia.

Zati dezagun edonola D eremua $\Delta s_1, \Delta s_2, \dots, \Delta s_n$ eremu partzialetan.



296. IRUDIA

Era dezagun

$$V_n = \sum_{k=1}^n F(P_k) \Delta s_k \quad (1)$$

batura integrala, non P_k Δs_k -ko puntua den.

Integral bikoitzaren existentziari buruzko teorematik ondorioztatzen da Δs_k eremuen diametro maximoak zerorantz jotzen duenean (1) batura integralak V limite baterantz jotzen duela. Definizioaren arabera, V bolumen hori D eremuan zabalduetako $F(\theta, \rho)$ funtzioaren integral bikoitza da:

$$V = \iint_D F(\theta, \rho) ds. \quad (2)$$

Kalkula dezagun hemen integral bikoitz hori.

Batura integralaren limitea, D Δs_k eremu partzialetan zatitzeko eraren menpe ez dagoenez, erosotasunez, zati dezakegu $\theta = \theta_0, \theta = \theta_1, \theta = \theta_2, \dots, \theta = \theta_n$ izpi (non $\theta_0 = \alpha, \theta_n = \beta, \theta_0 < \theta_1 < \theta_2 < \dots < \theta_n$ d e n) eta $\rho = \rho_0, \rho = \rho_1, \dots, \rho = \rho_m$

zirkunferentzia zentrukideen bidez [non $\rho_0, \Phi_1(\theta)$ funtzioaren minimoa eta $\rho_m, \Phi_2(\theta)$ funtzioaren maximoa bait dira, $\alpha \leq \theta \leq \beta$ tartean; $\rho_0 < \rho_1 < \dots < \rho_m$].

Izenda dezagun Δs_{ik} , $\rho = \rho_{i-1}$, $\rho = \rho_i$, $\theta = \theta_{k-1}$, $\theta = \theta_k$ lerroek mugatutako eremu partziala.

Kontsidera dezagun Δs_{ik} eremu partzialen hiru mota:

- 1) mugak ebakitzen ez dituenak eta D eremuaren barnealdekoak direnak;
- 2) mugak ebakitzen ez dituenak eta D eremuaren kanpoaldekoak direnak;
- 3) D eremuaren mugak ebakitzen dituenak.

Mugak ebakitako eremu partzialei dagozkien gaien arteko baturak zero du limitetzat, $\Delta \theta_k \rightarrow 0$ eta $\Delta \rho_i \rightarrow 0$ denean, hori dela eta ez ditugu batugai horiek kontutan hartuko. D -tik kanpo dauden Δs_{ik} eremu partzialak ez dira sartzen batuketa integralean eta ez zaizkigu axola. Hortaz, batuketa integrala

$$V_n = \sum_{k=1}^n \left[\sum_i F(P_{ik}) \Delta s_{ik} \right]$$

eran idatz daiteke, non P_{ik} Δs_{ik} -ko hautazko puntua bait da.

Batuketa bikoitzaren ikurak lehenago i indizearen arabera batzen dugula, k konstante kontsideratuz, esan nahi du, [hau da, ondoz ondoko bi izpien artean dauden eremu partzialei dagozkien gai guztiak batuz⁸⁾]. Kanpoko batuketa-ikurrak, lehenengo batuketan lortutako batura guztiak batzen ditugula esan nahi du (hau da, k indizearen arabera batzen dugu).

Aurki dezagun D -ren mugak ebakitzen ez duen Δs_{ik} eremu partzialaren azaleraren adierazpena. Azalera bi sektoreren azalaren arteko kendura da:

$$\Delta s_{ik} = \frac{1}{2}(\rho_i + \Delta \rho_i)^2 \Delta \theta_k - \frac{1}{2}\rho_i^2 \Delta \theta_k = \left(\rho_i + \frac{\Delta \rho_i}{2} \right) \Delta \rho_i \Delta \theta_k$$

edo

$$\Delta s_{ik} = \rho_i^* \Delta \rho_i \Delta \theta_k,$$

non

$$\rho_i < \rho_i^* < \rho_i + \Delta \rho_i.$$

Honela batuketa integralak

8) Ohar gaitzen, i indizearen arabera batzean, honek ez dituela derrigorrez letik m -rako balio guztiak hartuko, $\theta = \theta_k$ eta $\theta = \theta_{k+1}$ izpien artean dauden eremu partzial guztiak ez bait daude D eremuan.

$$V_n = \sum_{k=1}^n \left[\sum_i F(\theta_k^*, \rho_i^*) \rho_i^* \Delta \rho_i \Delta \theta_k \right]$$

itxura⁹⁾ dauka, $P(\theta_k^*, \rho_i^*)$ Δs_{ik} -ko puntua izanik. Atera dezagun $\Delta \theta_k$ faktorea barneko batuketa-ikurretik kanpo (hau egin daiteke, batuketa horren gai guztien faktore komuna bait da):

$$V_n = \sum_{k=1}^n \left[\sum_i F(\theta_k^*, \rho_i^*) \rho_i^* \Delta \rho_i \right] \Delta \theta_k.$$

Demagun $\Delta \rho_i \rightarrow 0$ eta $\Delta \theta_k$ konstante dela. Kasu honetan, parentesien arteko adierazpenak

$$\int_{\Phi_1(\theta_k^*)}^{\Phi_2(\theta_k^*)} F(\theta_k^*, \rho) \rho \, d\rho$$

integralerantz joko du.

Oraingoan $\Delta \theta_k \rightarrow 0$ suposatuz, azkenik

$$V = \int_{\alpha}^{\beta} \left(\int_{\Phi_1(\theta)}^{\Phi_2(\theta)} F(\theta, \rho) \rho \, d\rho \right) d\theta \quad (3)$$

lortzen dugu¹⁰⁾.

(3) formulak integral bikoitzak koordinatu polarretan kalkulatzeko balio du.

Lehenbizi, θ -ren arabera integratzen badugu, eta gero ρ -ren arabera,

9) Batuketa integrala horrela har dezakegu baturaren limitea ez bait dago eremu partzialean aukeratutako puntuaren menpe.

10) (3) fórmularen dedukzioa ez da zorrotza; lortzerakoan, lehenbizi $\Delta \rho_i$ zerorantz joerazi dugu, $\Delta \theta_k$ aldaezina mantenduz, eta geroago soilik joerazi dugu $\Delta \theta_k$ zerorantz. Hori ez dator osorik integral bikoitzaren definizioarekin bat, zeina batura integral baten limitetzat hartu dugun, eremu partzialen diametro maximoek zerorantz jotzen zutenean (hots, $\Delta \theta_k$ eta $\Delta \rho_i$ zerorantz aldi berean hurbiltzen direnean). Hala eta guztiz ere, frogapenaren zorrotasun falta bada ere, emaitza zuzena da (hau da, (3) formulak balio du). Frogapen zorrotza egin liteke integral bikoitzerako koordinatu angeluzuzenetan erabilitako metodoaren bidez. Esan formula hori § 6an ere aterako dela, beste abiapuntu batzuetatik abiatuz (integral bikoitzean koordinatu-aldaketaren formula orokorraren kasu partikular bezala).

$$V = \int_{\rho_1}^{\rho_2} \left(\int_{\omega_1(\rho)}^{\omega_2(\rho)} F(\theta, \rho) d\theta \right) \rho d\rho \quad (3')$$

formula lortzen dugu (297. irudia).

Demagun kalkulatu behar dela koordenatu angeluzuzenetan emandako eta D eremuan zabaldutako $f(x,y)$ funtzioaren integral bikoitza:

$$\iint_D f(x,y) dx dy.$$

D θ, ρ koordenatu polarretan eremu erregularra bada, emandako integralaren kalkulua koordenatu polarretako bigarren ordenako integral berritu bat determinatzera labur daiteke.

Izan ere,

$$x = \rho \cos \theta, \quad y = \rho \sin \theta,$$

$$f(x,y) = f[\rho \cos \theta, \rho \sin \theta] = F(\theta, \rho)$$

direnez gero,

$$\iint_D f(x,y) dx dy = \int_{\alpha}^{\beta} \left(\int_{\Phi_1(\theta)}^{\Phi_2(\theta)} f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \rho d\rho \right) d\theta \quad (4)$$

daukagu.

1. Adibidea. Kalkulatu

$$x^2 + y^2 + z^2 = 4a^2$$

gainazal esferikoak eta

$$x^2 + y^2 - 2ay = 0$$

zilindroak mugatzen duten gorputzaren V bolumena.

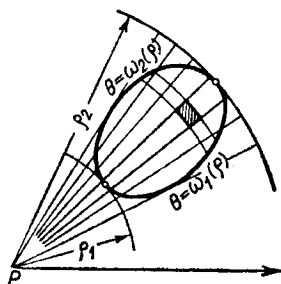
Ebazpena. Integrazio-eremu bezala, kasu honetan $x^2 + y^2 - 2ay = 0$ zilindroaren oinarria, hau da, a erradioko eta $(0,1)$ zentruko zirkulua, har daiteke. Ekuazioa $x^2 + (y-a)^2 = a^2$ eran idatz daiteke (298. irudia). Kalkula dezagun V bolumenaren

laurdena, hots, lehenengo oktantean dagoen zatia. Orduan, integrazio-eremutzat zirkuluerdia hartu behar da, zeinaren muga

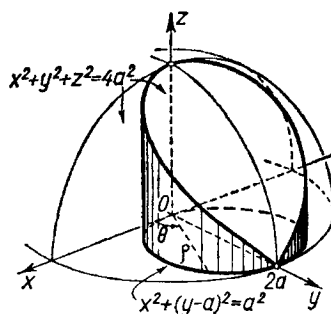
$$x = \varphi_1(y) = 0, \quad x = \varphi_2(y) = \sqrt{2ay - y^2},$$

$$y = 0, \quad y = 2a$$

ekuazioen bidez dagoen determinatua.



297. IRUDIA



298. IRUDIA

Integrakizuna

$$z = f(x, y) = \sqrt{4a^2 - x^2 - y^2}$$

da. Hortaz,

$$\frac{1}{4}V = \int_0^{2a} \left(\int_0^{\sqrt{2ay-y^2}} \sqrt{4a^2 - x^2 - y^2} dx \right) dy$$

dugu.

Alda dezagun lortutako integrala θ, ρ koordenatu polarretara:

$$x = \rho \cos \theta, \quad y = \rho \sin \theta.$$

Determina ditzagun integrazio-mugak. Horretarako, emandako zirkunferentziaren ekuazioa koordenatu polarretan idatziko dugu:

$$x^2 + y^2 = \rho^2, \quad y = \rho \sin \theta$$

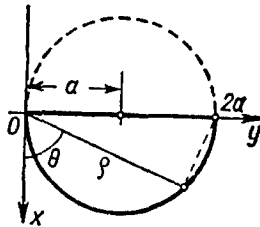
denez gero,

$$\rho^2 - 2a\rho \sin \theta = 0$$

edo

$$\rho = 2a \sin \theta$$

dugu.



299. IRUDIA

Horregatik, eremuaren mugak koordenatu polarretan

$$\rho = \Phi_1(\theta) = 0, \quad \rho = \Phi_2(\theta) = 2a \sin \theta, \quad \alpha = 0, \quad \beta = \frac{\pi}{2}$$

ekuazioen bidez determinatzen dira (299. irudia), eta integrakizunak

$$F(\theta, \rho) = \sqrt{4a^2 - \rho^2}$$

itxura dauka. Hortaz,

$$\begin{aligned} \frac{V}{4} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{2a \sin \theta} \sqrt{4a^2 - \rho^2} \rho \, d\rho \right) d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[-\frac{(4a^2 - \rho^2)^{3/2}}{3} \right]_0^{2a \sin \theta} d\theta = \\ &= -\frac{1}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} [(4a^2 - 4a^2 \sin^2 \theta)^{3/2} - (4a^2)^{3/2}] d\theta = \frac{8a^3}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos^2 \theta) d\theta = \frac{4}{9} a^3 (3\pi - 4) \end{aligned}$$

lortzen dugu.

2. Adibidea. Kalkulatu

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx$$

Poisson-en integrala.

Ebazpena. Kalkula dezagun, lehenik, $I_R = \iint_D e^{-x^2-y^2} dx dy$ integrala, D

integrazio-eremua

$$x^2 + y^2 = R^2$$

zirkulua delarik (300. irudia).

θ, ρ koordenatu polarretara pasatuz,

$$I_R = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^R e^{-\rho^2} \rho d\rho \right) d\theta = -\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} e^{-\rho^2} \left|_0^R d\theta = \pi(1 - e^{-R^2})\right.$$

daukagu.

R erradioa infiniturantz joerazten badugu (hau da, integrazio-eremua mugagabeki zabaltzen badugu) integral anizkoitz inpropioa lortzen dugu:

$$\int_0^{2\pi} \left(\int_0^\infty e^{-\rho^2} \rho d\rho \right) d\theta = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} \left(\int_0^R e^{-\rho^2} \rho d\rho \right) d\theta = \lim_{R \rightarrow \infty} \pi(1 - e^{-R^2}) = \pi.$$

Froga dezagun $\iint_{D'} e^{-x^2-y^2} dx dy$ integralak π limiterantz jotzen duela, D'

eremua edonola zabaltzen denean planoko puntu oro D' eremuan sartu eta geratzen delarik (D' eremuaren zabalpen hau $D' \rightarrow \infty$ idatziko dugu).

Izan bitez R_1 eta R_2 D' eremuaren mugatik koordenatu-jatorrirako distantziarik txikiena eta handiena (301. irudia).

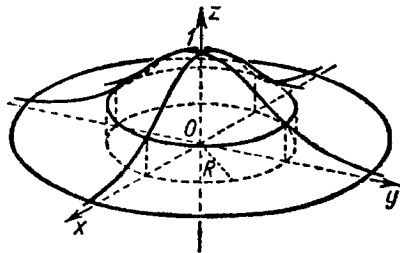
Edozein puntutan $e^{-x^2-y^2} > 0$ denez,

$$I_{R_1} \leq \iint_{D'} e^{-x^2-y^2} dx dy \leq I_{R_2}$$

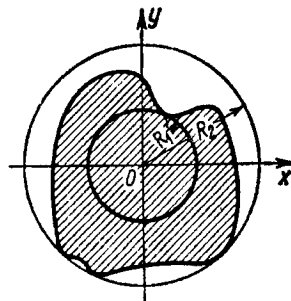
edo

$$\pi(1 - e^{-R_1^2}) \leq \iint_{D'} e^{-y^2-x^2} dx dy \leq \pi(1 - e^{-R_2^2})$$

desberdintzek balio dute.



300. IRUDIA



301. IRUDIA

$D' \rightarrow \infty$ denez, bistakoa da $R_1 \rightarrow \infty$ eta $R_2 \rightarrow \infty$ direla eta desberdintzetako muturrek π limite berbererantz jotzen dutela. Hortaz, limite horretarantz ere jotzen du tarteko atalak, hau da,

$$\lim_{D' \rightarrow \infty} \iint_{D'} e^{-x^2-y^2} dx dy = \pi. \quad (5)$$

Jo dezagun, kasu partikulartzat, D' eremua $2a$ aldeko eta zentrua koordenatu-jatorrian duen karratua dela; orduan:

$$\iint_{D'} e^{-x^2-y^2} dx dy = \int_{-a}^a \int_{-a}^a e^{-x^2-y^2} dx dy = \int_{-a}^a \int_{-a}^a e^{-x^2} e^{-y^2} dx dy = \int_{-a}^a \left[\int_{-a}^a e^{-x^2} e^{-y^2} dx \right] dy.$$

Atera dezagun orain e^{-y^2} faktorea barneko integral ikurretik kanpo (hori egin dezakegu, e^{-y^2} ez bait dago x integrazio-aldagaiaren menpe). Orduan,

$$\iint_{D'} e^{-x^2-y^2} dx dy = \int_{-a}^a e^{-y^2} \left[\int_{-a}^a e^{-x^2} dx \right] dy$$

da.

Egin dezagun $\int_{-a}^a e^{-x^2} dx = B_a$. Hori zenbaki konstantea da (a -ren menpekoea

soilik); horregatik,

$$\iint_{D'} e^{-x^2-y^2} dx dy = \int_{-a}^a e^{-y^2} B_a dy = B_a \int_{-a}^a e^{-y^2} dy.$$

Baina azkeneko integrala B_a -ren berdina da ($\int_{-a}^a e^{-x^2} dx = \int_{-a}^a e^{-y^2} dy$ bait da); beraz,

$$\iint_{D'} e^{-x^2-y^2} dx dy = B_a B_a = B_a^2.$$

Pasa gaitezen limitera ekuazio horretan, a infiniturantz joeraziz (kasu honetan D' mugagabeki zabaltzen da):

$$\lim_{D' \rightarrow \infty} \iint_{D'} e^{-x^2-y^2} dx dy = \lim_{a \rightarrow \infty} B_a^2 = \lim_{a \rightarrow \infty} \left[\int_{-a}^a e^{-x^2} dx \right]^2 = \left[\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx \right]^2.$$

Baina, frogatuaren arabera [ikus (5)],

$$\lim_{D' \rightarrow \infty} \iint_{D'} e^{-x^2-y^2} dx dy = \pi.$$

Hortaz:

$$\left[\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx \right]^2 = \pi$$

edo

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}.$$

Integral hori Probabilitate-Teorian eta Estatistikan maiz aurkitzen da. Ohar gaitezen ezinezkoa dela integral hori zuzenean (integral mugagabearen bidez) kalkulatzeari, e^{-x^2} funtzioaren jatorrizko funtzioa ez bait da funtzio elementalen bidez adierazgarri.

§ 6. Aldagai-aldaketa integral bikoitzean (kasu orokorra)

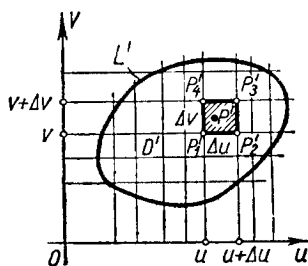
Izan bedi L kurbak mugatutako Oxy planoko D eremua. Jo dezagun ere x eta y koordenatuak u eta v aldagai berrien funtzioak direla:

$$x = \varphi(u, v), \quad y = \psi(u, v), \quad (1)$$

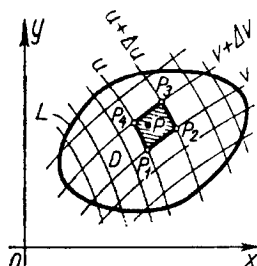
non $\varphi(u, v)$ eta $\psi(u, v)$ funtzioak beherago definituko den D' eremu batean uniformeak, jarraiak eta deribatu jarraidunak bait dira. Kasu honetan, (1) formulen arabera, u eta v balioen bikote bakoitzari x eta y balioen bikote bakar bat dagokio. Demagun ere, φ eta ψ funtzioekin x eta y -ri D eremuko balio determinatu batzuk ematen badizkiegu (1) formulen arabera u eta v -ren balio ondo definituak lortzen ditugula.

Analisa dezagun Ouv koordenatu angeluzuzenen sistema (302. irudia). Goian azaldutakotik ondorioztatzen da Oxy planoko $P(x, y)$ puntu orori (303. irudia) (1) formulek definituriko u, v koordenatuetakako Ouv planoko $P'(u, v)$ puntu bat unibokoki dagokiola. u eta v balioak P puntuaren *koordinatu lerromakur* deitzen dira.

Oxy planoan puntu batek L kurba itxia, D eremua mugatzen duena, deskribatzen badu, Ouv planoan dagokion puntuak D' eremua mugatzen duen L' kurba itxia deskribatuko du; horrez gain, D' -eko puntu bakoitzari D -ko puntu bat dagokio.



302. IRUDIA



303. IRUDIA

Hortaz, (1) formulek korrespondentzia biunibokoa ezartzen dute D eta D' eremuetako puntuen artean, edo, esaten den bezala D unibokoki D' eremuan adierazten dute.

Analisa dezagun D' -eko $u=k$ tea. zuzena. Oro har, (1) formulen bidez Oxy planoan kurba bat dagokiola aurkituko dugu. Era berean, Ouv planoko $v=k$ tea. zuzen orori Oxy planoko kurba bat dagokio.

$u=k$ tea. eta $v=k$ tea. zuzenen bidez bana dezagun D' eremu partzial angeluzuzenetan (ez ditugu aintzakotzat hartuko D' -aren muga ebakitzen duten laukizuzenak). Dagozkien kurbek D eremua lauki lerromakurretan banatuko dute (303. irudia).

Kontsidera ditzagun Ouv planoko $\Delta s'$ laukizuzen bat, $u=k$ tea., $u+\Delta u=k$ tea., $v=k$ tea., $v+\Delta v=k$ tea. zuzenek mugatua, eta dagokion Oxy planoko Δs lauki lerromakurra. Eremu partzial horien azalerak $\Delta s'$ eta Δs izendatuko ditugu. Jakina,

$$\Delta s' = \Delta u \Delta v.$$

Orokorrean Δs eta $\Delta s'$ azalerak desberdinak dira.

Izan bedi D eremuan emandako

$$z = f(x, y)$$

funtzio jarraia.

D eremuan $z = f(x, y)$ funtzioaren balio orori, D' eremuan, $z = F(u, v)$ funtzioaren balio bera dagokio, non

$$F(u, v) = f[\varphi(u, v), \psi(u, v)]$$

den.

Kontsidera ditzagun D eremuan zabaldutako z funtzioaren batura integralak.

Bistan denez,

$$\sum f(x, y) \Delta s = \sum F(u, v) \Delta s \quad (2)$$

berdintza betetzen da.

Kalkula dezagun Δs , hots, Oxy planoko $P_1P_2P_3P_4$ laukiaren azalera (ikus 303. irudia).

Determina ditzagun bere erpinen koordinatuak:

$$\left. \begin{array}{lll} P_1(x_1, y_1), & x_1 = \varphi(u, v), & y_1 = \psi(u, v), \\ P_2(x_2, y_2), & x_2 = \varphi(u + \Delta u, v), & y_2 = \psi(u + \Delta u, v), \\ P_3(x_3, y_3), & x_3 = \varphi(u + \Delta u, v + \Delta v), & y_3 = \psi(u + \Delta u, v + \Delta v), \\ P_4(x_4, y_4), & x_4 = \varphi(u, v + \Delta v), & y_4 = \psi(u, v + \Delta v). \end{array} \right\} \quad (3)$$

$P_1P_2P_3P_4$ lauki lerromakurraren azalera kalkulatzeko $P_1P_2, P_2P_3, P_3P_4, P_4P_1$ lerroak, binaka, zuzen paraleloak direla kontsideratuko dugu; horrez gain, funtzioen gehikuntzak dagozkien diferentzialez ordezkia ditzagun. Honela, $\Delta u, \Delta v$ baino ordena handiagoko infinitesimoak mespreza ditzagun. Kasu honetan, (3) formulek

$$\left. \begin{array}{ll} x_1 = \varphi(u, v), & y_1 = \psi(u, v), \\ x_2 = \varphi(u, v) + \frac{\partial \varphi}{\partial u} \Delta u, & y_2 = \psi(u, v) + \frac{\partial \psi}{\partial u} \Delta u, \\ x_3 = \varphi(u, v) + \frac{\partial \varphi}{\partial u} \Delta u + \frac{\partial \varphi}{\partial v} \Delta v, & y_3 = \psi(u, v) + \frac{\partial \psi}{\partial u} \Delta u + \frac{\partial \psi}{\partial v} \Delta v, \\ x_4 = \varphi(u, v) + \frac{\partial \varphi}{\partial v} \Delta v, & y_4 = \psi(u, v) + \frac{\partial \psi}{\partial v} \Delta v \end{array} \right\} \quad (3')$$

itxura hartzen dute.

Aipatu suposizioak eginik, $P_1P_2P_3P_4$ lauki lerromakurra paralelogramotzat har dezakegu. Bere azalera Δs , gutxi gorabehera $P_1P_2P_3$ triangeluaren azaleraren bikoitza da, eta geometria analitikoko dagokion formularen bidez kalkulatu da:

$$\begin{aligned}\Delta s &\approx |(x_3 - x_1)(y_3 - y_2) - (x_3 - x_2)(y_3 - y_1)| = \\ &= \left| \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u} \Delta u + \frac{\partial \varphi}{\partial v} \Delta v \right) \frac{\partial \psi}{\partial v} \Delta v - \frac{\partial \varphi}{\partial v} \Delta v \left(\frac{\partial \psi}{\partial u} \Delta u + \frac{\partial \psi}{\partial v} \Delta v \right) \right| = \\ &= \left| \frac{\partial \varphi}{\partial u} \frac{\partial \psi}{\partial v} \Delta u \Delta v - \frac{\partial \varphi}{\partial v} \frac{\partial \psi}{\partial u} \Delta u \Delta v \right| = \left| \frac{\partial \varphi}{\partial u} \frac{\partial \psi}{\partial v} - \frac{\partial \varphi}{\partial v} \frac{\partial \psi}{\partial u} \right| \Delta u \Delta v = \left\| \begin{array}{cc} \frac{\partial \varphi}{\partial u} & \frac{\partial \varphi}{\partial v} \\ \frac{\partial \psi}{\partial u} & \frac{\partial \psi}{\partial v} \end{array} \right\| \Delta u \Delta v.\end{aligned}$$

Determinantearen bi marra bertikalek berori balio absolutuan hartzen dela adierazten dute. Ezar dezagun

$$\left| \begin{array}{cc} \frac{\partial \varphi}{\partial u} & \frac{\partial \varphi}{\partial v} \\ \frac{\partial \psi}{\partial u} & \frac{\partial \psi}{\partial v} \end{array} \right| = I$$

idazkera.

Hortaz,

$$\Delta s \approx |I| \Delta s'. \quad (4)$$

I determinantea $\varphi(u, v)$ eta $\psi(u, v)$ funtzioen *determinante funtzional* edo *Jacobi* (Jacobi matematikari alemaniarren izenez) deitzen da.

(4) ekuazioa hurbildua da soilik, Δs azalera kalkulatzeko ordena handiagoko infinitesimoak mesprezatu bait ditugu. Hala ere, Δs eta $\Delta s'$ eremu partzialen dimentsioak zenbat eta txikiagoak izan gero eta zehatzagoa izango da berdintza. Limitera pasatuz, berdintzak balio du Δs eta $\Delta s'$ eremu partzialen diametroek zerorantz jotzen dutenean:

$$|I| = \lim_{\text{diam } \Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta s'}.$$

Aplika diezaigun lorturiko formula integral bikoitzaren kalkuluari. (2) berdintzaren arabera,

$$\sum f(x, y) \Delta s \approx \sum F(u, v) |I| \Delta s'$$

idatz dezakegu (eskuin aldean dagoen batuketa integrala D' eremuan zabaltzen da). Limitera pasatuz, $\text{diam } \Delta s' \rightarrow 0$ denean, berdintza zehatza lortzen dugu:

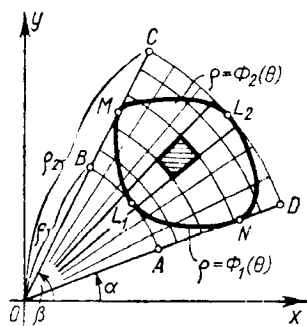
$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{D'} F(u, v) |I| du dv. \quad (5)$$

Hori da koordinatu-aldaketaren formula integral bikoitzean. Berak D eremuan zabalduetako integral bikoitz baten kalkuluak, D' eremuan zabalduetako integral bikoitz baten kalkulura laburtzen uzten digu, problema erraztu ahal duena.

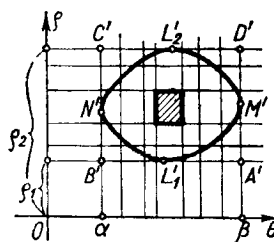
Formula horren lehenengo frogapen zorrotza M.V. Ostrogradski matematikari ukrainiarrena da.

Oharra. Aurreko atalean kontsideratutako koordinatu angeluzuzenetik polarretarako urratsa, integral bikoitzean, aldagai-aldaketaren kasu partikularra da. $u = \theta, v = \rho$ dauzkagu:

$$x = \rho \cos \theta, \quad y = \rho \sin \theta.$$



304. IRUDIA



305. IRUDIA

Oxy planoko AB arkua, $(\rho = \rho_1)$ (304. irudia) $O\theta\rho$ planoko $A'B'$ zuzenaz dago adierazita (305. irudia); Oxy planoko DC arkua, $(\rho = \rho_2)$ $O\theta\rho$ planoko $D'C'$ zuzenaz.

Oxy planoko AD eta BC zuzenak, $O\theta\rho$ planoko $A'D'$ eta $B'C'$ zuzenak adieraziak dira. L_1 eta L_2 kurbak L'_1 eta L'_2 kurbez adierazten dira.

Kalkula dezagun x eta y koordinatu cartesianetatik θ eta ρ polarretarako aldaketaren jacobiarra:

$$I = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial \rho} \\ \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \rho} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\rho \sin \theta & \cos \theta \\ \rho \cos \theta & \sin \theta \end{vmatrix} = -\rho \sin^2 \theta - \rho \cos^2 \theta = -\rho.$$

Hortaz, $|I| = \rho$; orduan,

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_{\alpha(\Phi_1(\theta))}^{\beta(\Phi_2(\theta))} \int_{\Phi_1(\theta)}^{\Phi_2(\theta)} F(\theta, \rho) \rho d\rho d\theta.$$

Hori da aurreko atalean lortutako formula.

Adibidea. Kalkulatu

$$\iint_D (y - x) dx dy$$

integral bikoitza, non D

$$y = x + 1, y = x - 3, y = -\frac{1}{3}x + \frac{7}{3}, y = -\frac{1}{3}x + 5$$

zuzenak mugatutako Oxy planoko eremua bait da.

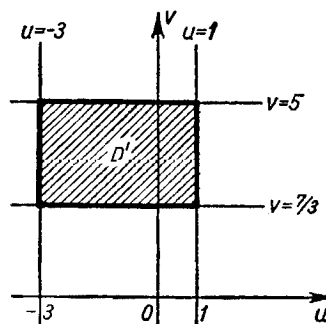
Integral bikoitz horren kalkulu zuzena lan neketsua da, baina aldagai-aldaketa simple batek, aldeak koordinatu-ardatzekiko paralelo dituen laukizuzen bateko integralera pasatzen du.

Egin ditzagun

$$u = y - x, \quad v = y + \frac{1}{3}x. \quad (6)$$

Orduan, $y = x + 1, y = x - 3$ zuzenak Ouv planoan $u = 1, u = -3$ zuzenez, hurrenez

hurren, adierazten dira; $y = -\frac{1}{3}x + \frac{7}{3}, y = -\frac{1}{3}x + 5$ zuzenak $v = \frac{7}{3}, v = 5$ zuzenez.



Hortaz, emandako D eremua 306. irudiko D' eremu angeluzuzenez dago adierazita. Aldaketaren jacobiarra besterik ez dugu kalkulatu behar, horretarako adieraz ditzagun x eta y u eta v -ren funtzioan. (6) ekuazio-sistema ebartziz,

$$x = -\frac{3}{4}u + \frac{3}{4}v; \quad y = \frac{1}{4}u + \frac{3}{4}v$$

lortzen dugu.

Beraz,

$$I = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\frac{3}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{vmatrix} = -\frac{9}{16} - \frac{3}{16} = -\frac{3}{4}$$

eta jacobiarren balio absolutua $|I| = \frac{3}{4}$ da. Horregatik,

$$\begin{aligned} \iint_D (y-x) dx dy &= \iint_{D'} \left[\left(\frac{1}{4}u + \frac{3}{4}v \right) - \left(-\frac{3}{4}u + \frac{3}{4}v \right) \right] \frac{3}{4} du dv = \\ &= \iint_{D'} \frac{3}{4} u du dv = \int_{\frac{7}{3}}^5 \int_{-3}^1 \frac{3}{4} u du dv = -18. \end{aligned}$$

§ 7. Gainazalen azalaren kalkulua

Jo dezagun Γ kurba batek mugatutako gainazal baten azalera kalkulatu behar dela (307. irudia); gainazala $z=f(x,y)$ ekuazioz emana dago, non $f(x,y)$ funtzio jarraia eta deribatu partzial jarraiduna bait da.

Izan bedi L , Γ kurbaren Oxy planoaren gaineko proiektzioa. Izenda dezagun D , L -k mugatzen duen Oxy planoko eremua.

Bana dezagun edonola D eremua $\Delta s_1, \Delta s_2, \dots, \Delta s_n$ n eremu partzial edo elementaletan. Δs_i eremu partzialetan hautazko $P_i(\xi_i, \eta_i)$ puntu bana aukeratuko dugu. P_i puntuari gainazalaren

$$M_i[\xi_i, \eta_i, f(\xi_i, \eta_i)]$$

puntu bat egokituko zaio. M_i puntutik gainazalarekiko plano ukitzailea marra dezagun. Bere ekuazioa

$$z - z_i = f'_x(\xi_i, \eta_i)(x - \xi_i) + f'_y(\xi_i, \eta_i)(y - \eta_i) \quad (1)$$

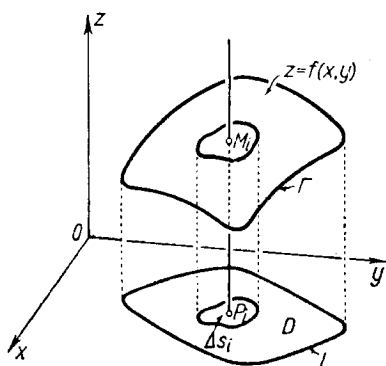
izango da (ikus IX. gaiko § 6). Plano horretan $\Delta\sigma_i$ eremu partzial bat aukera dezagun, zeinaren Oxy planoaren gaineko proiektzioa Δs_i eremu elementala bait da. Kotsidera dezagun $\Delta\sigma_i$ eremu elemental guztien arteko batura:

$$\sum_{i=1}^n \Delta\sigma_i.$$

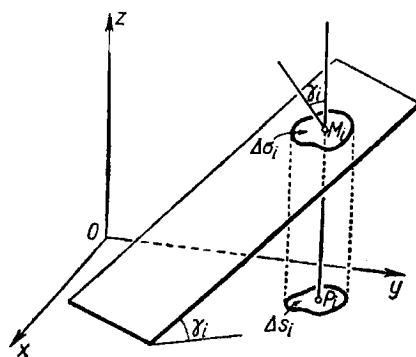
Batura horren σ limiteari, $\Delta\sigma_i$ -ren diamentrorik handienak zerorantz jotzen duenean, gainazalaren azalera deituko diogu, hau da, definizioz,

$$\sigma = \lim_{\text{diam } \Delta\sigma_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \Delta\sigma_i \quad (2)$$

idatziko dugu.



307. IRUDIA



308. IRUDIA

Kalkula dezagun orain gainazalaren azalera. Izan bedi γ_i plano ukitzaileak eta Oxy planoak osatzen duten angelua. Geometria analitikoko formula ezagun batean oinarriturik,

$$\Delta s_i = \Delta\sigma_i \cos \gamma_i$$

edo

$$\Delta\sigma_i = \frac{\Delta s_i}{\cos \gamma_i} \quad (3)$$

idatz dezakegu (308. irudia).

γ_i angelua Oz ardatzak eta (1) planoarekiko normalak osatutakoa da ere. Horregatik, (1) ekuazio eta dagokion geometria analitikoko formularen arabera

$$\cos \gamma_i = \frac{1}{\sqrt{1 + f_x'^2(\xi_i, \eta_i) + f_y'^2(\xi_i, \eta_i)}}$$

daukagu. Hortaz,

$$\Delta \sigma_i = \sqrt{1 + f_x'^2(\xi_i, \eta_i) + f_y'^2(\xi_i, \eta_i)} \Delta s_i.$$

Adierazpen hori (2) formula sartuz,

$$\sigma = \lim_{\text{diam } \Delta s_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \sqrt{1 + f_x'^2(\xi_i, \eta_i) + f_y'^2(\xi_i, \eta_i)} \Delta s_i$$

erdiesten dugu. Azkeneko berdintza horren bigarren ataleko batura integralaren limitea, definizioaren arabera,

$$\iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dx dy$$

integral bikoitza denez, azkenik

$$\sigma = \iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dx dy \quad (4)$$

daukagu. Hori da $z=f(x,y)$ gainazalaren azalera kalkulatzeko uzten digun formula.

Gainazalaren ekuazioa $x=\mu(y,z)$ edo $y=\chi(x,z)$ eran badator, azalera kalkulatzeko dagozkien formulek

$$\sigma = \iint_{D'} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2} dy dz, \quad (4')$$

$$\sigma = \iint_{D''} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2} dx dz \quad (4'')$$

itxura daukate, non D' eta D'' gainazalaren Oyz eta Oxz planoen gaineko proiektzioak bait dira.

1. Adibidea. Kalkulatu

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2$$

esferaren σ azalera.

Ebazpena. Kalkula dezagun esferaren goiko erdiaren azalera,

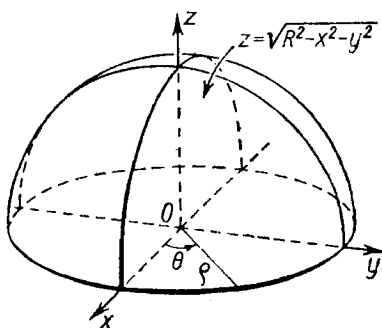
$$z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$$

(309. irudia). Kasu honetan

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{x}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{y}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}$$

daukagu. Hortaz,

$$\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} = \sqrt{\frac{R^2}{R^2 - x^2 - y^2}} = \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}.$$



309. IRUDIA

Integrazio-eremua

$$x^2 + y^2 \leq R^2$$

baldintzak determinatuta dago. Honela, (4) formularen arabera,

$$\frac{1}{2}\sigma = \int_{-R}^R \left(\int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} \frac{R}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} dy \right) dx$$

daukagu.

Lortutako integral bikoitza kalkulatzeko koordenatu polarretara pasa gaitezen. Koordenatu hauetan integrazio-eremuaren mugaren ekuazioa $\sigma = R$ da. Beraz,

$$\sigma = 2 \int_0^{2\pi} \left(\int_0^R \frac{R}{\sqrt{R^2 - \rho^2}} \rho \, d\rho \right) d\theta = 2R \int_0^{2\pi} \left[-\sqrt{R^2 - \rho^2} \right]_0^R d\theta = 2R \int_0^{2\pi} R \, d\theta = 4\pi R^2.$$

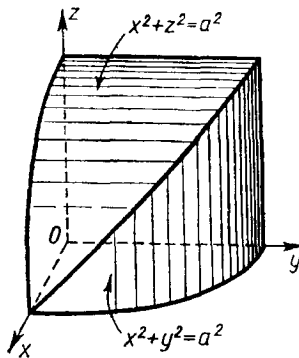
2. Adibidea. Aurkitu

$$x^2 + z^2 = a^2$$

zilindroak

$$x^2 + y^2 = a^2$$

zilindroan mugatzen duen zatiaren azalera.



310. IRUDIA

Ebazpena. 310. irudian bilatzen dugun azaleraren zortzirena dago irudikatuta. Gainazalaren ekuazioa

$$y = \sqrt{a^2 - x^2}$$

da; horregatik,

$$\frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}; \quad \frac{\partial y}{\partial z} = 0;$$

$$\sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2} = \sqrt{1 + \frac{x^2}{a^2 - x^2}} = \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2}}.$$

Integrazio-eremua zirkuluaren laurdena da, hots,

$$x^2 + z^2 \leq a^2; \quad x \geq 0, \quad z \geq 0$$

baldintzen bidez definitzen da. Hortaz,

$$\frac{1}{8}\sigma = \int_0^a \left(\int_0^{\sqrt{a^2 - x^2}} \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2}} dz \right) dx = a \int_0^a \frac{z}{\sqrt{a^2 - x^2}} \Big|_0^{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = a \int_0^a dx = a^2, \quad \sigma = 8a^2.$$

§ 8. Materiaren banaketaren dentsitatea eta integral bikoitza

Demagun D eremuan materia bat banaturik dagoela, D -ren azalera-unitate bakoitzak horren kantitate determinatu bat daukalarik. Hemen, masa baten banaketaz ari bagara ere, gure arrazonamenduek karga elektriko, bero-kantitatea, eta abarren banaketen kasuan ere balio izango dute.

Kontsidera dezagun D -ren Δs hautazko eremu partziala. Izan bedi Δm eremu partzial horretan banaturiko materiaren masa. Orduan, $\frac{\Delta m}{\Delta s}$ arrazoia materiaren batezbesteko gainazal-dentsitatea da Δs eremu partzialean.

Jo dezagun orain Δs eremu partziala txikiagotzen dela, azkenik $P(x,y)$ puntua bakarrik izanik. Kontsidera dezagun $\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta m}{\Delta s}$ limitea. Limite hori existitzen bada, orokorrean, P puntuaren menpe egongo da, hau da, x eta y bere koordinatuen menpe; beraz, P puntuaren funtzioa, $f(P)$, da. Limite horri P puntuko materiaren *gainazal-dentsitate* deitzen zaio:

$$\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta m}{\Delta s} = f(P) = f(x, y). \quad (1)$$

Honela, gainazal-dentsitatea eremuan hartzen den puntuaren koordinatuen $f(x,y)$ funtzioa da.

Demagun orain, alderantziz, D eremuan materia baten gainazal-dentsitatea $f(P)=f(x,y)$ funtzio jarraia bezala emana dagoela; D barnean dagoen M materiaren kantitate osoa determinatu nahi da. Bana dezagun eremua Δs_i ($i=1,2,\dots,n$) eremu partzialetan, eta bakoitzean P_i puntu bat har dezagun. Orduan, $f(P_i)$ P_i puntuko gainazal-dentsitatea da.

$f(P_i) \Delta s_i$ biderkadurak Δs_i -an dagoen materiaren kantitatea ematen digu (errore infinitesimoa ordena handiagokoa izanik), bestalde,

$$\sum_{i=1}^n f(P_i) \Delta s_i$$

baturak, gutxi gorabehera, D eremuan banaturiko materiaren kantitate osoa adierazten du. Baina, hori $f(P)$ funtzioaren batura integrala da, D eremuan. Balio zehatza limitera pasatuz, $\Delta s_i \rightarrow 0$ denean, lortuko dugu.

Hortaz¹¹⁾,

$$M = \lim_{\Delta s_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(P_i) \Delta s_i = \iint_D f(P) ds = \iint_D f(x,y) dx dy, \quad (2)$$

hau da, D eremuko materiaren kantitate osoa substantzia horren $f(P)=f(x,y)$ dentsitatearen integral bikoitza da D eremuan.

Adibidea. Determinatu R erradioko plaka biribil baten masa, materialaren $P(x,y)$ puntu bakoitzeko $f(x,y)$ gainazal-dentsitatea (x,y) puntutik plakaren zentrurainoko distantziaren proportzionala bada, hau da,

$$f(x,y) = k\sqrt{x^2 + y^2}$$

bada.

Ebazpena. (2) formularen arabera,

$$M = \iint_D k\sqrt{x^2 + y^2} dx dy$$

dugu, non D integrazio-eremua $x^2 + y^2 \leq R^2$ zirkulua bait da.

¹¹⁾ $\Delta s_i \rightarrow 0$ adierazpenak Δs_i -ren diametroak zerorantz jotzen duela esan nahi du hor.

Koordenatu polarretara pasatuz

$$M = k \int_0^{2\pi} \left(\int_0^R \rho \rho d\rho \right) d\theta = k 2\pi \frac{\rho^3}{3} \Big|_0^R = \frac{2}{3} k \pi R^3$$

erdiesten dugu.

§ 9. Irudi laun baten inertzi momentua

m masako M puntu material baten O puntu batekiko I inertzi momentu M puntutik O punturainoko r distantziaren karratuaren eta m masaren arteko biderkadurari deitzen zaio:

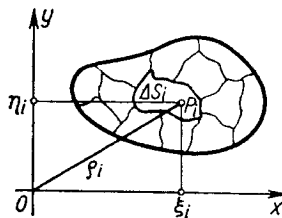
$$I = mr^2.$$

$m_1, m_2, \dots, m_n$ puntu materialen sistema baten O puntu batekiko inertzi momentua sistemaren puntuen inertzi momentuen arteko batura da:

$$I = \sum_{i=1}^n m_i r_i^2.$$

Determina dezagun, orain, D irudi material laun baten inertzi momentua.

Demagun D irudia Oxy koordenatu-planoan dagoela. Determina dezagun irudi horren koordenatu-jatorriarekiko inertzi momentua, gainazal-dentsitatea konstante eta



311. IRUDIA

unitatea dela suposatuz. Zati dezagun D ΔS_i ($i=1,2,\dots,n$) eremu partzialetan (311. irudia). Eremu partzial bakoitzean ξ_i, η_i koordenatuak P_i puntu bat har dezagun. ΔS_i eremu partzialaren masa eta $r_i^2 = \xi_i^2 + \eta_i^2$ distantziaren karratuaren arteko biderkadura,

$$\Delta I_i = (\xi_i^2 + \eta_i^2) \Delta S_i,$$

ΔS_i -ren ΔI_i *inertzi momentu elemental* deitzen da. Era dezagun momentu horien batura:

$$\sum_{i=1}^n (\xi_i^2 + \eta_i^2) \Delta S_i,$$

zeina, aldi berean, $f(x, y) = x^2 + y^2$ funtzioaren batura integrala den D eremuan.

Determina dezagun D irudiaren inertzi momentua batura integral horren limite bezala, ΔS_i bakoitzaren diametroak zerorantz jotzen duenean:

$$I_O = \lim_{\text{diam } \Delta S_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n (\xi_i^2 + \eta_i^2) \Delta S_i.$$

Baina, batura horren limiteta $\iint_D (x^2 + y^2) dx dy$ integral bikoitza da. Hortaz, D irudiaren

koordinatu-jatorriarekiko inertzi momentua

$$I_O = \iint_D (x^2 + y^2) dx dy \quad (1)$$

da, non D emandako irudi launak definitzen duen eremua bait da.

$$I_{xx} = \iint_D y^2 dx dy, \quad (2)$$

$$I_{yy} = \iint_D x^2 dx dy \quad (3)$$

integralak, hurrenez hurren, D irudiaren Ox eta Oy ardatzekiko inertzi momentu deitzen dira.

1. Adibidea. Kalkulatu R erradioko D zirkuluaren O zentruarekiko inertzi momentua.

Ebazpena. (1) formularen arabera

$$I_O = \iint_D (x^2 + y^2) dx dy$$

daukagu. Integral hori kalkulatzeko θ, ρ koordinatu polarretara pasa gaitezen.

Zirkunferentziaren koordenatu polarretako ekuazioa

$$\rho = R$$

da. Horrexegatik,

$$I_O = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^R \rho^2 \rho \, d\rho \right) d\theta = \frac{\pi R^4}{2}.$$

Oharra. γ gainazal-dentsitatea 1 ez bada, eta x eta y -ren $\gamma = \gamma(x, y)$ funtzio bat bada, ΔS_i eremu partzialaren masa $\gamma(\xi_i + \eta_i) \Delta S_i$ izango da (errorea ordena handiagoko infinitesimoa izanik) eta horregatik, irudi laun baten koordenatu-jatorriarekiko inertzia momentua

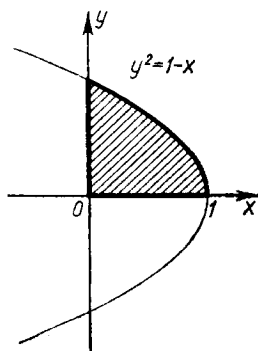
$$\iint_D \gamma(x, y)(x^2 + y^2) \, dx \, dy \quad (1')$$

izango da.

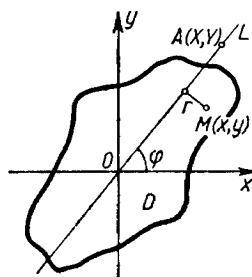
2. Adibidea. Kalkulatu $y^2 = 1 - x$, $x = 0$, $y = 0$ kurbez mugatutako D irudi launaren Oy ardatzarekiko inertzia momentua, puntu bakoitzeko gainazal-dentsitatea y bada (312. irudia).

Ebazpena.

$$I_{yy} = \int_0^1 \left(\int_0^{\sqrt{1-x}} yx^2 \, dy \right) dx = \int_0^1 \frac{x^2 y^2}{2} \Big|_0^{\sqrt{1-x}} dx = \frac{1}{2} \int_0^1 x^2 (1-x) \, dx = \frac{1}{24}.$$



312. IRUDIA



313. IRUDIA

Inertzi elipsea. Determina dezagun D irudi laun baten inertzi momentua koordenatu-jatorritzat hartzen dugun O puntutik pasatzen den OL ardatz batekiko.

Izan bedi φ , OL zuzenak Ox ardatzaren norantza positiboarekin osatzen duen angelua (313. irudia).

OL zuzenaren ekuazio normala

$$x \sin \varphi - y \cos \varphi = 0$$

da,

$M(x,y)$ puntu batetik zuzen horretarako r distantzia

$$r = |x \sin \varphi - y \cos \varphi|$$

da,

D gainazalaren OL zuzenarekiko I inertzi momentua, definizioaren arabera,

$$\begin{aligned} I &= \iint_D r^2 dx dy = \iint_D (x \sin \varphi - y \cos \varphi)^2 dx dy = \\ &= \sin^2 \varphi \iint_D x^2 dx dy - 2 \sin \varphi \cos \varphi \iint_D xy dx dy + \cos^2 \varphi \iint_D y^2 dx dy \end{aligned}$$

integralaren bidez kalkulatzen da. Hortaz,

$$I = I_{yy} \sin^2 \varphi - 2I_{xy} \sin \varphi \cos \varphi + I_{xx} \cos^2 \varphi, \quad (4)$$

non $I_{yy} = \iint_D x^2 dx dy$ irudiaren Oy ardatzarekiko inertzi momentua, $I_{xx} = \iint_D y^2 dx dy$

Ox ardatzarekiko inertzi momentua eta, horrez gain,

$$I_{xy} = \iint_D xy dx dy$$

bait dira.

(4) azkeneko ekuazioaren gai guztiak zati I eginez

$$1 = I_{xx} \left(\frac{\cos \varphi}{\sqrt{I}} \right)^2 - 2I_{xy} \left(\frac{\sin \varphi}{\sqrt{I}} \right) \left(\frac{\cos \varphi}{\sqrt{I}} \right) + I_{yy} \left(\frac{\sin \varphi}{\sqrt{I}} \right)^2 \quad (5)$$

erdiesten dugu.

Har dezagun OL zuzeneko $A(X,Y)$ puntu bat,

$$OA = \frac{1}{\sqrt{I}}$$

delarik. I -ren balio desberdinak eta A puntu desberdinak izango ditugu OL norabide desberdinetarako, hots, φ angeluaren balio desberdinetarako. Bila dezagun A puntuen leku geometrikoa. Bistakoa dira

$$X = \frac{1}{\sqrt{I}} \cos \varphi \quad Y = \frac{1}{\sqrt{I}} \sin \varphi.$$

(5) berdintzaren arabera, X eta Y magnitudeak

$$1 = I_{xx}X^2 - 2I_{xy}XY + I_{yy}Y^2 \quad (6)$$

erlazioaren bidez daude loturik. Horrela, $A(X, Y)$ puntuen leku geometrikoa (6) bigarren mailako kurba da. Froga dezagun kurba hori elipsea dela.

Ondoko desberdintza daukagu, Buniakovski-rena deiturikoa¹²⁾ (matematikari errusiarra):

12) Buniakovski-ren desberdintza frogatzeko

$$\iint_D [f(x, y) - \lambda \varphi(x, y)]^2 dx dy \geq 0$$

desberdintza nabaria kontsidera dezagun, non λ konstantea den. Berdintza $f(x, y) - \lambda \varphi(x, y) \equiv 0$ kasuan soilik ematen da, hau da, $f(x, y) = \lambda \varphi(x, y)$ denean.

$\frac{f(x, y)}{\varphi(x, y)} \neq \text{ktea} = \lambda$ suposatzen badugu, beti beteko da desberdintza. Horrela, integral-

-ikurraren azpiko parentesiak garatuz

$$\iint_D f^2(x, y) dx dy - 2\lambda \iint_D f(x, y)\varphi(x, y) dx dy + \lambda^2 \iint_D \varphi^2(x, y) dx dy > 0$$

lortzen dugu. Kontsidera dezagun lehenengo ataleko adierazpena λ -ren funtzio bezala. Inoiz anulatzan ez den bigarren mailako polinomioa da. Hortaz, bere erroak konplexuak dira, horrek inplikatzan du, bigarren mailako polinomioaren koefiziente osatutako diskriminatzailea negatiboa dela, hau da,

$$\left(\iint_D f\varphi dx dy \right)^2 - \iint_D f^2 dx dy \iint_D \varphi^2 dx dy < 0$$

edo

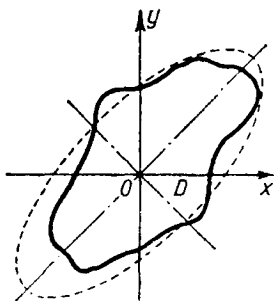
$$\left(\iint_D f\varphi dx dy \right)^2 < \iint_D f^2 dx dy \iint_D \varphi^2 dx dy.$$

$$\left(\iint_D xy \, dx \, dy \right)^2 < \left(\iint_D x^2 \, dx \, dy \right) \left(\iint_D y^2 \, dx \, dy \right)$$

edo

$$I_{xx}I_{yy} - I_{xy}^2 > 0.$$

Honela, (6) kurbaren diskriminatzailea positiboa da; beraz elipsea da (314. irudia). Elipse hori *inertzi elipse* deitzen da. Inertzi elipsearen nozioak garrantzi handia dauka mekanikan.



314. IRUDIA

Ohar gaitezen inertzi elipsearen ardatzen luzerak eta bere posizioa planoan emandako irudi launaren itxuraren menpe daudela. Koordenatu-jatorria eta elipseko

hautazko A puntu baten arteko distantzia $\frac{1}{\sqrt{I}}$ denez, non I irudiaren $O A$ ardatzarekiko inertzi momentua bait da, elipsea eraikitzerakoan erraza da kalkulatzeko koordenatu-jatorritik igarotzen den edozein zuzenekiko D irudiaren inertzi momentua. Bereziki, erraz ikusten da irudiaren inertzi momentua maximo dela elipse horren ardatz txikienarekiko, eta minimoa, ardatz handienarekiko.

Hori da Buniakovski-ren desberdintza. Gure kasuan, $f(x, y) = x$, $\varphi(x, y) = y$, $\frac{x}{y} \neq$ ktea.

Buniakovski-ren desberdintza matematikaren adar desberdinetan erabiltzen da. Zenbait lanetan desberdintza honi Schwarz-en desberdintza okerki deitzen zaio. Buniakovski-k (beste desberdintza batzuekin batera) 1859 urtean argitaratu zuen, aldiz, Schwarz-ek 16 urte beranduago egin zuen.

§ 10. Irudi laun baten grabitate-zentruaren koordinatuak

XII. gaiko § 8an esan dugu $m_1, m_2, \dots, m_n$ masetako, hurrenez hurren, $P_1, P_2, \dots, P_n$ puntu materialen sistemaren grabitate-zentruaren koordinatuak

$$x_c = \frac{\sum x_i m_i}{\sum m_i}; \quad y_c = \frac{\sum y_i m_i}{\sum m_i} \quad (1)$$

formulen bidez determinatzen direla.

Determina ditzagun orain D irudi laun baten grabitate-zentruaren koordinatuak. Bana dezagun irudi hori ΔS_i eremu partzialetan. Gainazal-dentsitatea 1 dela suposatzen badugu eremu partzialaren masa bere azaleraren berdina izango da. Konbentzioz ΔS_i -ren masa osoa bere $P_i(\xi_i, \eta_i)$ punturen batean kontzentratu dagoela suposatzen badugu, D irudia puntu materialen sistematzat jo dezakegu. Kasu horretan, (1) formulen arabera, irudi horren grabitate-zentruaren koordinatuak, gutxi gorabehera,

$$x_c \approx \frac{\sum_{i=1}^n \xi_i \Delta S_i}{\sum_{i=1}^n \Delta S_i}; \quad y_c \approx \frac{\sum_{i=1}^n \eta_i \Delta S_i}{\sum_{i=1}^n \Delta S_i}$$

formulen bitartez lortuko dira.

Limitera pasatuz, $\Delta S_i \rightarrow 0$ denean, frakzioen zenbakitzaile eta izendatzaileetako batura integralak integral bikoitz bihurtuko dira, irudi laun baten grabitate-zentrua kalkulatzeko formula zehatzak lortzen direlarik:

$$x_c = \frac{\iint_D x \, dx \, dy}{\iint_D dx \, dy}; \quad y_c = \frac{\iint_D y \, dx \, dy}{\iint_D dx \, dy} \quad (2)$$

Formula horiek, gainazal dentsitatea 1 duen irudi laun baterako lortuak, bere puntu guztietan γ beste dentsitate konstante bat daukan irudirako ere balio dute,

$$\gamma = \gamma(x, y)$$

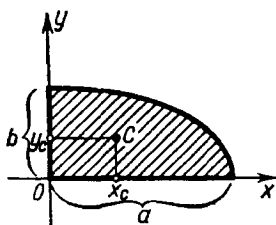
gainazal-dentsitatea aldakorra bada, dagozkion formulek

$$x_c = \frac{\iint_D \gamma(x, y) x \, dx \, dy}{\iint_D \gamma(x, y) \, dx \, dy}; \quad y_c = \frac{\iint_D \gamma(x, y) y \, dx \, dy}{\iint_D \gamma(x, y) \, dx \, dy}$$

itxura hartzen dute.

$$M_y = \iint_D \gamma(x, y) x \, dx \, dy \quad \text{eta} \quad M_x = \iint_D \gamma(x, y) y \, dx \, dy$$

adierazpenak D irudi launaren Oy eta Ox , hurrenez hurren, ardatzekiko *momentu estatiko* deitzen dira.



315. IRUDIA

$\iint_D \gamma(x, y) \, dx \, dy$ integralak kontsideratutako irudiaren masa adierazten du.

Adibidea. Determinatu

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

elipsearen koadrantearen grabitate-zentruaren koordenatuak, puntu guztietako gainazal-dentsitatea 1 dela suposatuz (315. irudia).

Ebazpena. (2) formulen arabera

$$x_c = \frac{\int_0^a \left(\int_0^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}} x \, dy \right) dx}{\int_0^a \left(\int_0^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}} dy \right) dx} = \frac{\frac{b}{a} \int_0^a \sqrt{a^2-x^2} x \, dx}{\frac{1}{4} \pi ab} = \frac{-\frac{b}{a} \frac{1}{3} (a^2-x^2)^{3/2} \Big|_0^a}{\frac{1}{4} \pi ab} = \frac{4a}{3\pi},$$

$$y_c = \frac{\int_0^a \left(\int_0^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}} y \, dy \right) dx}{\frac{1}{4} \pi ab} = \frac{4b}{3\pi}$$

lortzen dugu.

§ 11. Integral hirukoitza

Kontsidera dezagun espazioan S gainazal itxi batek mugatutako V eremu bat. Demagun V eremuan eta bere mugan $f(x,y,z)$ funtzio jarrai bat dagoela definiturik, x,y,z eremuko puntu baten koordinatu angeluzuzenak direlarik. $f(x,y,z) \geq 0$ deneko kasuan ideiak zehazteko asmoz, suposa dezakegu funtzio horrek V eremuan materia baten banaketa-dentsitatea adierazten duela.

Bana dezagun edonola V eremua Δv_i eremu partzialetan, Δv_i ikurraz eremu elementala ezezik bere bolumena ere adierazten delarik. Δv_i bakoitzean P_i hautazko puntu bat har dezagun eta izan bedi $f(P_i)$ funtzioaren balioa P_i puntuan. Era dezagun

$$\sum f(P_i) \Delta v_i \quad (1)$$

batura integrala eta Δv_i eremu partzialen kopurua mugagabeki handi dezagun, Δv_i -ren diametro handienak zerorantz jo dezan eran¹³⁾. $f(x,y,z)$ funtzioa jarraia bada (1) itxurako batura integralen limitea existitzen da, non limiteari integral bikoitzaren azterketan

¹³⁾ Δv_i eremu partzialen diametroa, bere mugako bi punturen arteko distantziarik handiena da.

emandako esanahi bera ematen bait zaio¹⁴⁾. Limite hori, V eremua zatitzeko eraren menpe,

ezta puntuen aukeraketaren menpe ez dagoena, $\iiint_V f(P) dv$ ikurraz adierazten da eta

integral hirukoitz deitzen da. Honela, definizioz,

$$\lim_{\text{diam } \Delta v_i \rightarrow 0} \sum f(P_i) \Delta v_i = \iiint_V f(P) dv$$

edo

$$\iiint_V f(P) dv = \iiint_V f(x, y, z) dx dy dz \quad (2)$$

daukagu.

$f(x, y, z)$ funtzioa V eremuan materia baten banaketaren dentsitate bolumetrikoa bezala kontsideratzen badugu, (2) integralak V bolumenean dagoen substantzia osoaren masa emango digu.

§ 12. Integral hirukoitzen kalkulua

Jo dezagun V eremu espazial batek (hirudimentsiokoa), S gainazal itxiak mugatua, ondoko propietateak dauzkala:

1) V eremuaren barneko (hau da, S mugan ez dagoen) puntu batetik marratutako Oz ardatzarekiko paralelo orok, S gainazala bi puntutan ebakitzen du;

2) V eremu osoa Oxy planoaren gainean D eremu erregular batean (bidimentsiokoa) projektatzen da;

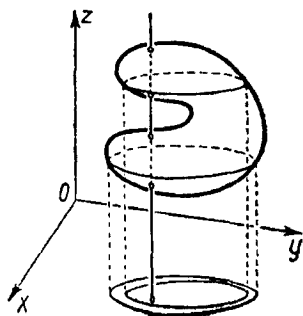
3) koordenatu-plano batekiko (Oxy, Oxz, Oyz) paralelo den plano batez ebakitzean lortutako V eremuaren zati orok ere 1) eta 2) propietateak baditu.

Gorago aipatutako propietateak dituen V eremuari hirudimentsioko eremu *erregular* deritzo.

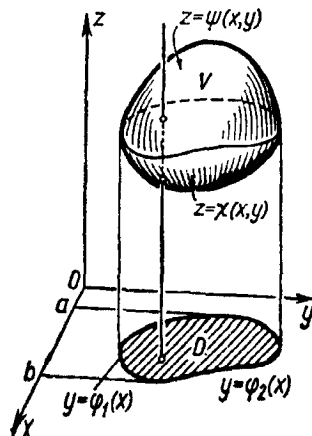
Hirudimentsioko eremu erregular horiek dira, esaterako, elipsoidea, paralelepipedo angeluzuzena, tetraedroa, e.a. 316. irudian hirudimentsioko eremu irregular baten adibidea ematen da. Atal honetan eremu erregularrak soilik hartuko ditugu kontutan.

14) Onar dezagun frogapenik gabe batura integralen limitearen existentziari buruzko teorema hori (integral hirukoitzen existentzi teorema), zeina V eremu itxi batean (muga barru) jarraia den funtzio orotarako betetzen bait da.

Izan bitez $z = \psi(x, y)$ V eremua goitik mugatzen duen gainazalaren ekuazioa eta $z = \chi(x, y)$ V behetik mugatzen duen gainazalarena (317. irudia).



316. IRUDIA



317. IRUDIA

Eman dezagun V eremuan zabalduko $f(x, y, z)$ hiru aldagaiko funtzioaren, V -n definitua eta jarraia, I_V hirugarren ordenako integral berrituaren nozioa. Demagun V eremuaren Oxy planoaren gaineko proiektzioa

$$y = \varphi_1(x), \quad y = \varphi_2(x), \quad x = a, \quad x = b$$

lerroek mugatutako D eremua dela. Kasu horretan, $f(x, y, z)$ funtzioaren hirugarren ordenako integral berritua V eremuan honela kalkulatzen da:

$$I_V = \int_a^b \left[\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \left\{ \int_{\chi(x, y)}^{\psi(x, y)} f(x, y, z) dz \right\} dy \right] dx. \quad (1)$$

Ohar dezagun, z -rekiko integrazioaren emaitza bezala, eta giltzetan mugak ordezkatzuz, x eta y -ren funtzio bat lortzen dugula. Gero, funtzio horren integral bikoitza kalkula daiteke D eremuan, lehenago egin dugun bezala.

Eman dezagun hirugarren ordenako integral berrituaren kalkuluaren adibidea.

1 Adibidea. Kalkulatu

$$x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0, \quad x + y + z = 1$$

planoek mugatutako V eremuan, $f(x, y, z) = xyz$ funtzioaren hirugarren ordenako integral berritua.

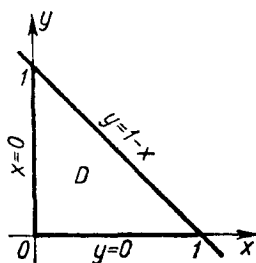
Ebazpena. Eredu hori erregularra da goitik eta behetik $z=0$, $z=1-x-y$ planoez mugatuta bait dago, eta, horrez gain, bere Oxy planoaren gaineko proiektzioa D eremu erregular laun bat delako, $x=0$, $y=0$, $y=1-x$ zuzenak mugatutako triangelua alegia (318. irudia). Horregatik,

$$I_V = \iint_D \left[\int_0^{1-x-y} xyz \, dz \right] d\sigma$$

eran kalkulatu da hirugarren ordenako integral berritua. D eremuan zabalduko bigarren ordenako integral berrituan mugak jarritz,

$$\begin{aligned} I_V &= \int_0^1 \left\{ \int_0^{1-x} \left[\int_0^{1-x-y} xyz \, dz \right] dy \right\} dx = \int_0^1 \left\{ \int_0^{1-x} \frac{xyz^2}{2} \Big|_{z=0}^{z=1-x-y} dy \right\} dx = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 \left[\int_0^{1-x} xy(1-x-y)^2 dy \right] dx = \int_0^1 \frac{x}{24} (1-x)^4 dx = \frac{1}{720} \end{aligned}$$

lortzen dugu.



318. IRUDIA

Kontsidera dezagun orain hirugarren ordenako integral berrituaren zenbait propietate.

1. Propietatea. V eremua V_1 eta V_2 bi eremutan banatzen bada, koordenatu-planoren batekiko paralelo den plano baten bitartez, V eremuan zabalduko hirugarren ordenako integral berritua V_1 eta V_2 eremuetan zabalduko hirugarren ordenako integral berrituen arteko baturaren berdina da.

Ez da hemen propietate horren frogapena errepikatu behar, bigarren ordenako integral berrituaren kasuan garatutakoaren berdina bait da.

Korolarioa. V eremua $V_1, \dots, V_n$ eremu-kopuru finitutan, koordenatu-planoekiko plano paraleloen bidez zatitzeko era edozein dela ere

$$I_V = I_{V_1} + I_{V_2} + \dots + I_{V_n}$$

berdintza betetzen da.

2. Propietatea. (Hirugarren ordenako integral berrituen ebaluazioari buruzko teorema). m eta M , hurrenez hurren, $f(x, y, z)$ funtzioak V eremuan lortzen dituen balio minimo eta maximoa badira,

$$mV \leq I_V \leq MV$$

desberdintzak betetzen dira, V eremuaren bolumena eta I_V V -n zabaldutako $f(x, y, z)$ funtzioaren hirugarren ordenako integral berritua direlarik.

Frogapena. Ebalua dezagun, lehenbizi, hirugarren ordenako integral berrituaren

$$\text{barneko integrala, } I_V = \iint_D \left[\int_{\chi(x,y)}^{\psi(x,y)} f(x, y, z) dz \right] d\sigma:$$

$$\int_{\chi(x,y)}^{\psi(x,y)} f(x, y, z) dz \leq \int_{\chi(x,y)}^{\psi(x,y)} M dz = M \int_{\chi(x,y)}^{\psi(x,y)} dz = Mz \Big|_{\chi(x,y)}^{\psi(x,y)} = M[\psi(x, y) - \chi(x, y)].$$

Honela, barneko integralak ez du $M[\psi(x, y) - \chi(x, y)]$ adierazpena gainditzen. Hortaz, integral bikoitzei buruzko § 1eko teoremaren arabera, V eremuaren Oxy planoaren gaineko projekzioa D izendatuz,

$$\begin{aligned} I_V &= \iint_D \left[\int_{\chi(x,y)}^{\psi(x,y)} f(x, y, z) dz \right] d\sigma \leq \iint_D M[\psi(x, y) - \chi(x, y)] d\sigma = \\ &= M \iint_D [\psi(x, y) - \chi(x, y)] d\sigma \end{aligned}$$

daukagu. Baina azkeneko bigarren ordenako integral berritua $\psi(x, y) - \chi(x, y)$ funtzioaren integral bikoitza da eta, beraz, $z = \psi(x, y)$ eta $z = \chi(x, y)$ gainazalek mugatutako eremuaren bolumena, hots, V eremuaren bolumena. Ondorioz,

$$I_V \leq MV.$$

Antzeko eran frogatuko genuke $I_V \geq mV$ dela. 2. propietatea frogatua da.

3. Propietatea (Batezbestekoaren teorema). V eremuan zabaldutako $f(x,y,z)$ funtzio jarraiaren I_V hirugarren ordenako integral berritua, V eremuko P puntu batean funtzioak hartzen duen balioa eta V bolumenaren arteko biderkaduraren berdina da, hau da,

$$I_V = \int_a^b \left\{ \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \left[\int_{\chi(x,y)}^{\psi(x,y)} f(x,y,z) dz \right] dy \right\} dx = f(P)V. \quad (2)$$

Propietate horren frogapena integral bikoitzari dagokion propietatearen frogapenaren analogoa da [ikus § 2, 3. propietatea, (4) formula].

Orain froga dezakegu integral hirukoitzen kalkuluari buruzko teorema.

Teorema. V eremu erregularrean zabaldutako $f(x,y,z)$ funtzioaren integral hirukoitza eremu berean zabaldutako hirugarren ordenako integral berrituaren berdina da, hau da,

$$\iiint_V f(x,y,z) dv = \int_a^b \left\{ \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \left[\int_{\chi(x,y)}^{\psi(x,y)} f(x,y,z) dz \right] dy \right\} dx.$$

Frogapena. Bana dezagun V eremua koordinatu-planoekiko plano paraleloen bidez n eremu erregularretan,

$$\Delta v_1 + \Delta v_2 + \dots + \Delta v_n.$$

Izan bitez I_V , lehenago egin dugun bezala, V eremuan zabaldutako $f(x,y,z)$ funtzioaren hirugarren ordenako integral berritua eta $I_{\Delta v_i}$, Δv_i -an zabaldutako hirugarren ordenako integral berritua. 1. propietatearen korolarioaren arabera

$$I_V = I_{\Delta v_1} + I_{\Delta v_2} + \dots + I_{\Delta v_n} \quad (3)$$

berdintza idatz daiteke. Transforma dezagun ekuazio horren bigarren ataleko batugai bakoitza (2) formularen bidez:

$$I_V = f(P_1)\Delta v_1 + f(P_2)\Delta v_2 + \dots + f(P_n)\Delta v_n, \quad (4)$$

P_i Δv_i -ko puntua izanik.

(4) berdintzaren bigarren atalean batura integrala daukagu. Hipotesiaren arabera, $f(x,y,z)$ V eremuan jarraia denez, Δv_i -en diametro handienak zerorantz jotzen duenean, batura horren limitea existitu eta V eremuan zabalduko $f(x,y,z)$ funtzioaren integral hirukoitzaren berdina da. Honela, (4) berdintzan limitera pasatuz, diam $\Delta v_i \rightarrow 0$ denean,

$$I_V = \iiint_V f(x,y,z) \, dv$$

erdiesten dugu, edo, azkenik,

$$\iiint_V f(x,y,z) \, dv = \int_a^b \left\{ \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \left[\int_{\chi(x,y)}^{\psi(x,y)} f(x,y,z) \, dz \right] dy \right\} dx.$$

Bada, teorema frogatua dago.

Hor, $z = \chi(x,y)$ eta $z = \psi(x,y)$ V eremu erregularra azpitik eta goitik mugatzen duten gainazalen ekuazioak dira. $y = \varphi_1(x)$, $y = \varphi_2(x)$, $x = a$, $x = b$ lerroek D eremua, V -ren Oxy planoaren gaineko proiektzioa alegia, mugatzen dute.

Oharra. Bigarren ordenako integral berrituaren kasuan bezala, V eremuaren formak utziz gero hirugarren ordenako integral berritua integrazio-aldagaien beste ordena eta beste limiteekin era daiteke.

Gorputz baten bolumenaren hirugarren ordenako integral berrituen bidezko kalkulua. Integrazioa $f(x,y,z) = 1$ bada, V eremuan zabalduko hirugarren ordenako integral berritua eremu horren V bolumena adierazten du:

$$V = \iiint_V dx \, dy \, dz. \quad (5)$$

2. Adibidea. Kalkulatu

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

elipsoidearen bolumena.

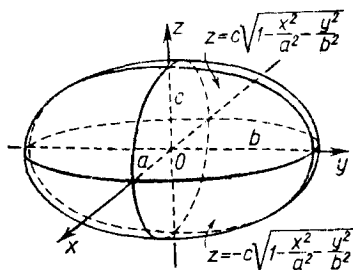
Ebazpena. Elipsoidea (319. irudia) azpitik $z = -c\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}$ gainazalak

mugutzen du, eta gainetik $z = c\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}$ gainazalak. Elipsoide horren Oxy

planoaren gaineko projekzioa (D eremua) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ elipsea da. Hortaz, dagokion hirugarren ordenako integral berritua idatziz,

$$V = \int_{-a}^a \left[\int_{-b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}^{b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}} \left(\int_{-c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}}^{c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}} dz \right) dy \right] dx = 2c \int_{-a}^a \left[\int_{-b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}^{b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}} \sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}} dy \right] dx$$

lortzen dugu.



319. IRUDIA

Barneko integralaren kalkulurako har dezagun x konstantetzat. Egin dezagun

$$y = b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} \sin t, \quad dy = b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} \cos t \, dt$$

aldaketa. y aldagaia $-b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$ eta $b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$ bitartean aldatzen da, beraz $t, -\frac{\pi}{2}$ eta

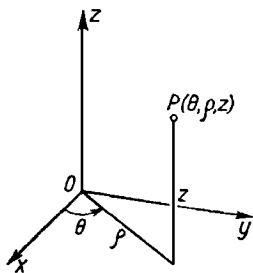
$\frac{\pi}{2}$ bitartean. Muga berriak integralean jarritz gero

$$\begin{aligned}
 V &= 2c \int_{-a}^a \left[\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) - \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) \sin^2 t} b \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} \cos t \, dt \right] dx = \\
 &= 2cb \int_{-a}^a \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t \, dt \, dx = \frac{cb\pi}{a^2} \int_{-a}^a (a^2 - x^2) \, dx = \frac{4\pi abc}{3}
 \end{aligned}$$

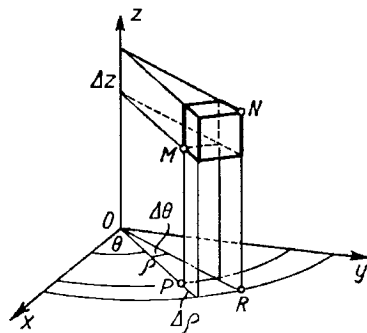
lortzen dugu. Honela, $V = \frac{4}{3} \pi abc$. $a = b = c$ badira, esfera baten bolumena, $V = \frac{4}{3} \pi a^3$ erdiesten dugu.

§ 13. Aldagai-aldaketa integral hirukoitzean

1. Koordinatu zilindrikoetako integral hirukoitza. Koordinatu zilindriko direlakoetan, espazioko P puntuaren posizioa hiru zenbakien bidez, θ, ρ, z determinatzen da, non θ eta ρ P puntuaren Oxy planoaren gaineko proiektzioaren



320. IRUDIA



321. IRUDIA

koordinatu polarrak eta z puntu horren kota, hots Oxy planorainoko distantzia, bait dira; azkenak «plus» zeinua dauka Oxy planoaren gainean badago eta «minus» zeinua kontrako kasuan (320. irudia).

Bana dezagun emandako V hirudimentsioko eremua bolumen elementaletan $\theta = \theta_i$, $\rho = \rho_j$, $z = z_k$ koordinatuetakoa gainazalen bidez, zeinak hurrenez hurren, Oz ardatza daukaten planoerdiak; zilindro zirkularrak, zeinen ardatzak Oz ardatzarekin bat datozen; eta Oz ardatzarekiko plano elkartutak bait dira. Bolumen elementala, bada, 321.

irudian adierazitako prisma lerromakurra da. Prisma horren oinarriaren azalera, ordena handiagoko infinitesimoa mespreziatuz, $\rho \Delta\theta \Delta\rho$ da eta bere altuera Δz ; errazteko asmoz, i, j, k indizeen idazkera utziko dugu. Hortaz, $\Delta v = \rho \Delta\theta \Delta\rho \Delta z$. $F(\theta, \rho, z)$ funtzioaren integral hirukoitza, emandako V eremuan,

$$I = \iiint_V F(\theta, \rho, z) \rho \, d\theta \, d\rho \, dz \quad (1)$$

da.

Integrazio-mugak V eremuaren itxuraren arabera determinatzen dira.

$f(x, y, z)$ funtzioaren integral hirukoitza koordenatu angeluzuzenetan badator erraza da koordenatu zilindrikoetako integral hirukoitzera aldatzea. Izan ere,

$$x = \rho \cos \theta; \quad y = \rho \sin \theta; \quad z = z$$

direnez,

$$\iiint_V f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz = \iiint_V F(\theta, \rho, z) \rho \, d\theta \, d\rho \, dz$$

erdiesten dugu,

$$f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta, z) = F(\theta, \rho, z) \quad \text{izanik.}$$

Adibidea. Determinatu R erradioa eta zentrua koordenatu-jatorrian dituen esferaerdi baten M masa, (x, y, z) puntu bakoitzean F dentsitatea puntua eta oinarriaren arteko distantziaren proportzionala bada, hots, $F = kz$.

Ebazpena. Goiko esferaerdiaren

$$z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$$

ekuazioa, koordenatu zilindrikoetan

$$z = \sqrt{R^2 - \rho^2}$$

da.

Hortaz,

$$\begin{aligned}
 M &= \iiint_V kz \rho \, d\theta \, d\rho \, dz = \int_0^{2\pi} \left[\int_0^R \left(\int_0^{\sqrt{R^2 - \rho^2}} kz \, dz \right) \rho \, d\rho \right] d\theta = \int_0^{2\pi} \left[\int_0^R \left. \frac{kz^2}{2} \right|_0^{\sqrt{R^2 - \rho^2}} \rho \, d\rho \right] d\theta = \\
 &= \int_0^{2\pi} \left[\int_0^R \frac{k}{2} (R^2 - \rho^2) \rho \, d\rho \right] d\theta = \frac{k}{2} \int_0^{2\pi} \left[\frac{R^4}{2} - \frac{R^4}{4} \right] d\theta = \frac{k}{2} \frac{R^4}{4} 2\pi = \frac{k\pi R^4}{4}.
 \end{aligned}$$

2. Koordenatu esferikoetako integral hirukoitza. Koordenatu esferikoetan, espazioko P puntu baten posizioa θ, r, φ hiru zenbakiak determinatzen dute, non r puntuaren koordenatu-jatorrirainoko distantzia, puntuaren erradio bektore deiturikoa; φ erradio bektorea eta Oz ardatzaren arteko angelua; θ erradio bektorearen Oxy planoaren gaineko proiektzioa eta Ox ardatzaren arteko angelua bait dira. Azkeneko angelua Ox ardatzaren norantza positibotik abiatuz hartzen dugu (hau da, erloju-orratzen aurkako norantzan) (322. irudia). Espazioko puntu guztietarako

$$0 \leq r < \infty, \quad 0 \leq \varphi \leq \pi, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

daukagu.

Bana dezagun emandako V eremua Δv bolumen elementaletan, r =ktea. (esferak), φ =ktea. (erpinak koordenatu-jatorrian dituzten gainazal konikoak), θ =ktea. (Oz ardatzetik pasatzen diren planoerdiak) koordenatuetakoa gainazalen bidez. Ordena handiagoko infinitesimoa mesprezatuz, Δv bolumen elementala $\Delta r, r\Delta\varphi, r \sin \varphi \Delta\theta$ luzeretako ertzak dituen paralelepipedo bezala har dezakegu. Orduan, bolumen elementala

$$\Delta v = r^2 \sin \varphi \Delta r \Delta \theta \Delta \varphi$$

da (ikus 323. irudia). $F(\theta, r, \varphi)$ funtzioaren integral hirukoitzak, V eremuan,

$$I = \iiint_V F(\theta, r, \varphi) r^2 \sin \varphi \, dr \, d\theta \, d\varphi \quad (1')$$

itxura dauka.

Integrazio-mugak V eremuaren itxuraren arabera determinatzen dira. 322. iruditik erraz lor daitezke koordenatu kartesiarren adierazpenak esferikoen funtzioan:

$$x = r \sin \varphi \cos \theta,$$

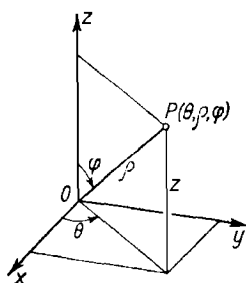
$$y = r \sin \varphi \sin \theta,$$

$$z = r \cos \varphi.$$

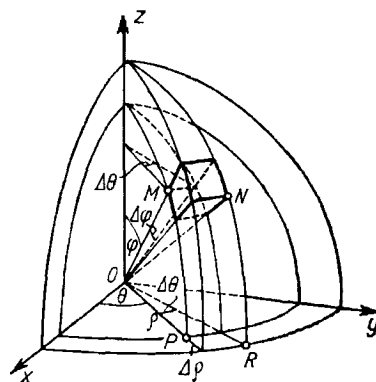
Horregatik, koordenatu cartesianetako integral hirukoitzaren koordenatu esferikoetarako aldaketaren formulak

$$\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_V f[r \sin \varphi \cos \theta, r \sin \varphi \sin \theta, r \cos \varphi] r^2 \sin \varphi dr d\theta d\varphi$$

itxura dauka.



322. IRUDIA



323. IRUDIA

3. Aldagai-aldaketa orokorra integral hirukoitzean. Koordenatu cartesianen koordenatu zilindriko eta esferikoetarako aldaketak, integral hirukoitzean, espazioko koordenatu-aldaketa orokorraren kasu partikularrak dira.

Demagun

$$\begin{aligned} x &= \varphi(u, t, w), \\ y &= \psi(u, t, w), \\ z &= \chi(u, t, w) \end{aligned}$$

funtzioek (x, y, z) koordenatu cartesianetako V eremua (u, t, w) koordenatu lerromakurretako V' eremuan adierazten dutela biunibokoki. Demagun ere V -ren Δv eremu elementala edo bolumen-elementua V' eremuaren $\Delta v'$ elementu bihurtzen dela eta

$$\lim_{\Delta v' \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta v'} = |J|$$

dela. Orduan:

$$\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{V'} f[\varphi(u, t, w), \psi(u, t, w), \chi(u, t, w)] |J| du dt dw.$$

Integral bikoitzaren kasuan bezala, hemen ere I aldaketaren *jacobi*ar deitzen da. Integral bikoitzetarako egin dugun bezala, froga daiteke jacobiarra, zenbakiz,

$$I = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial t} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial t} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial t} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix}$$

hirugarren ordenako determinantearen berdina dela. Honela, koordenatu zilindrikoen kasuan

$$x = \rho \cos \theta, \quad y = \rho \sin \theta, \quad z = z \quad (\rho = u, \quad \theta = t, \quad z = w);$$

$$I = \begin{vmatrix} \cos \theta & -\rho \sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \rho \sin \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \rho$$

daukagu. Koordenatu esferikoaren kasuan,

$$x = r \sin \varphi \cos \theta, \quad y = r \sin \varphi \sin \theta, \quad z = r \cos \varphi \quad (r = u, \quad \varphi = t, \quad \theta = w);$$

$$I = \begin{vmatrix} \sin \varphi \cos \theta & r \cos \varphi \cos \theta & -r \sin \varphi \sin \theta \\ \sin \varphi \sin \theta & r \cos \varphi \sin \theta & r \sin \varphi \cos \theta \\ \cos \varphi & -r \sin \varphi & 0 \end{vmatrix} = r^2 \sin \varphi$$

dugu.

§ 14. Gorputz baten inertzia momentua eta grabitate-zentruaren koordenatuak

1. Gorputz baten inertzia momentua. m masako $M(x,y,z)$ puntu material baten inertzia momentuak Ox, Oy, Oz koordenatu-ardatzekiko,

$$I_{xx} = (y^2 + z^2)m,$$

$$I_{yy} = (x^2 + z^2)m, \quad I_{zz} = (x^2 + y^2)m$$

formulen bidez, hurrenez hurren, adierazten dira (324. irudia).

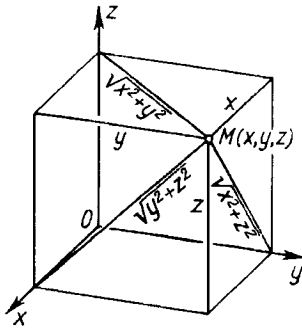
Gorputz baten inertzi momentuak dagozkion integralen bidez adierazten dira. Honela, adibidez, gorputz baten Oz ardatzarekiko inertzi momentua,

$$I_{zz} = \iiint_V (x^2 + y^2) \gamma(x, y, z) \, dx \, dy \, dz$$

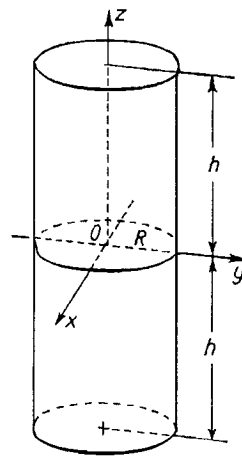
integralaren bidez adierazten da, non $\gamma(x, y, z)$ materiaren dentsitatea bait da.

1. Adibidea. Kalkulatu R erradio eta $2h$ altuerako zilindro zuzen zirkular baten inertzi momentua bere erdiko sekzioaren diametroarekiko; dentsitatea konstantea eta γ_0 izanik.

Ebazpena. Aukera dezagun koordinatu-sistema ondoko eran: Oz ardatza zilindroaren ardatzean zehar zuzen dezagun eta koordinatu-jatorria bere simetri zentruan koka dezagun (325. irudia).



324. IRUDIA



325. IRUDIA

Problema zilindroaren Ox ardatzarekiko inertzi momentuaren kalkulatzeari datza:

$$I_{xx} = \iiint_V (y^2 + z^2) \gamma_0 \, dx \, dy \, dz.$$

Koordenatu zilindrikoetara pasatuz,

$$\begin{aligned}
I_{xx} &= \gamma_0 \int_0^{2\pi} \left\{ \int_0^R \left[\int_{-h}^h (z^2 + \rho^2 \sin^2 \theta) dz \right] \rho d\rho \right\} d\theta = \\
&= \gamma_0 \int_0^{2\pi} \left\{ \int_0^R \left[\frac{2h^3}{3} + 2h\rho^2 \sin^2 \theta \right] \rho d\rho \right\} d\theta = \gamma_0 \int_0^{2\pi} \left\{ \frac{2h^3}{3} \frac{R^2}{2} + \frac{2hR^4}{4} \sin^2 \theta \right\} d\theta = \\
&= \gamma_0 \left[\frac{2h^3 R^2}{6} 2\pi + \frac{2hR^4}{4} \pi \right] = \gamma_0 \pi h R^2 \left[\frac{2}{3} h^2 + \frac{R^2}{2} \right]
\end{aligned}$$

lortzen dugu.

2. Gorputz baten grabitate-zentruaren koordenatuak. XII. gaiko § 8an irudi launetarako azaldutakoaren antzeko eran, gorputz baten grabitate-zentruaren koordenatuak

$$\begin{aligned}
x_c &= \frac{\iiint_V x \gamma(x, y, z) dx dy dz}{\iiint_V \gamma(x, y, z) dx dy dz}; \\
y_c &= \frac{\iiint_V y \gamma(x, y, z) dx dy dz}{\iiint_V \gamma(x, y, z) dx dy dz}; \\
z_c &= \frac{\iiint_V z \gamma(x, y, z) dx dy dz}{\iiint_V \gamma(x, y, z) dx dy dz}
\end{aligned}$$

formulez adierazten dira, $\gamma(x, y, z)$ dentsitatea delarik.

2. Adibidea. Determinatu R erradioa eta zentrua koordenatu-jatorrian dituen esfera baten goiko erdiaren grabitate-zentruaren koordenatuak; dentsitatea γ_0 konstantea da.

Ebazpena. Esferaerdia

$$z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}, \quad z = 0.$$

gainazalek mugatzen dute.

Bere grabitate-zentruaren kota

$$z_c = \frac{\iiint_V z \gamma_0 \, dx \, dy \, dz}{\iiint_V \gamma_0 \, dx \, dy \, dz}$$

formulaz determinatzen da.

Koordenatu esferikoetara pasatuz

$$z_c = \frac{\gamma_0 \int_0^{2\pi} \left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^R r \cos \varphi \, r^2 \sin \varphi \, dr \right) d\varphi \right] d\theta}{\gamma_0 \int_0^{2\pi} \left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^R r^2 \sin \varphi \, dr \right) d\varphi \right] d\theta} = \frac{2\pi \frac{R^4}{4} \frac{1}{2}}{\frac{4}{6} \pi R^3} = \frac{3}{8} R$$

erdiesten dugu.

Esferaerdiaren simetria dela eta $x_c = y_c = 0$ dauzkagu argi eta garbi.

§ 15. Parametro baten menpeko integralen kalkulua

Kontsidera dezagun α parametro baten menpeko integral bat:

$$I(\alpha) = \int_a^b f(x, \alpha) \, dx.$$

(Mota honetako integralak jadanik aztertu ditugu XI. gaiko § 10ean). Esan dezagun, frogapenik gabe, $f(x, \alpha)$ funtzioa x -rekiko jarraia bada $[a, b]$ tartean eta α -rekiko $[\alpha_1, \alpha_2]$ tartean

$$I(\alpha) = \int_a^b f(x, \alpha) \, dx$$

funtzioa jarraia dela $[\alpha_1, \alpha_2]$ tartean. Hortaz, $I(\alpha)$ funtzioa integra dezakegu α -rekiko aipatu tartean:

$$\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} I(\alpha) d\alpha = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \left[\int_a^b f(x, \alpha) dx \right] d\alpha.$$

Bigarren ataleko adierazpena $f(x, \alpha)$ funtzioaren bigarren ordenako integral berritua da, dagokion $Ox\alpha$ planoko laukizuzenean. Integral horretan integrazio-ordena alda daiteke:

$$\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \left[\int_a^b f(x, \alpha) dx \right] d\alpha = \int_a^b \left[\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} f(x, \alpha) d\alpha \right] dx.$$

Formula horrek adierazten du, α parametro baten menpeko integral baten integrazioarako nahikoa dela integrakizuna α parametroarekiko integratzea. Formula hori baliagarria izaten da ere zenbait integral mugatu kalkulatzeko.

Adibidea. Kalkulatu

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} dx$$

integrala. Ezin da zuzenean integral mugagabea kalkulatu. Problema ebazteko kontsidera dezagun erraz kalkulatzeko beste integral bat:

$$\int_0^{\infty} e^{-\alpha x} dx = \frac{1}{\alpha} \quad (\alpha > 0).$$

Berdintza hori $\alpha = a$ eta $\alpha = b$ mugen artean integratuz

$$\int_a^b \left(\int_0^{\infty} e^{-\alpha x} dx \right) d\alpha = \int_a^b \frac{d\alpha}{\alpha} = \ln \frac{b}{a}$$

lortzen dugu. Lehenengo integralaren integrazio-ordena aldatuz

$$\int_0^{\infty} \left[\int_a^b e^{-\alpha x} d\alpha \right] dx = \ln \frac{b}{a}$$

eran idatz dezakegu berdintza, nondik, barneko integrala kalkulatu,

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} dx = \ln \frac{b}{a}$$

lortzen bait dugu.

Ariketak

Kalkulatu ondoko integralak¹⁵⁾:

$$1. \int_0^1 \int_1^2 (x^2 + y^2) dx dy. \text{ Eraitza: } \frac{8}{3}.$$

$$2. \int_3^4 \int_1^2 \frac{dy dx}{(x+y)^2}. \text{ Em.: } \ln \frac{25}{24}.$$

$$3. \int_1^2 \int_x^{\sqrt{3}} xy dy dx. \text{ Em.: } \frac{15}{4}.$$

$$4. \int_0^{2\pi} \int_{a \sin \theta}^a r dr d\theta. \text{ Em.: } \frac{1}{2} \pi a^2.$$

$$5. \int_0^a \int_{\frac{x}{a}}^x \frac{xy dy dx}{x^2 + y^2}. \text{ Em.: } \frac{\pi a}{4} - a \arctan \frac{1}{a}.$$

15) Lehenago aipatu dugun bezala integrala $\int_M^N \int_K^L f(x,y) dx dy$ eran idatzita badago, lehenengo

integrazioa bere diferentziala lehenengo lekuan daukan aldagaiarekiko egingo dela kontsideratuko dugu, hau da,

$$\int_M^N \int_K^L f(x,y) dx dy = \int_M^N \left(\int_K^L f(x,y) dy \right) dx.$$

$$6. \int_0^a \int_{y-a}^{2y} xy \, dx \, dy. \text{ Em.: } \ln \frac{11a^4}{24}.$$

$$7. \int_{\frac{b}{2}}^b \int_0^{\frac{\pi}{2}} \rho \, d\theta \, d\rho. \text{ Em.: } \frac{3}{16} \pi b^2.$$

Determinatu $\iint_D f(x,y) \, dx \, dy$ integralaren integrazio-mugak, integrazio-eremua ondoko lerroek mugatuta badago:

$$8. \, x=2, \, x=3, \, y=-1, \, y=5. \text{ Em.: } \int_{-1}^5 \int_2^3 f(x,y) \, dy \, dx.$$

$$9. \, y=0, \, y=1-x^2. \text{ Em.: } \int_{-1}^1 \int_0^{1-x^2} f(x,y) \, dy \, dx.$$

$$10. \, x^2 + y^2 = a^2. \text{ Em.: } \int_{-a}^a \int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} f(x,y) \, dy \, dx.$$

$$11. \, y = \frac{2}{1+x^2}, \, y=x^2. \text{ Em.: } \int_{-1}^1 \int_{x^2}^{\frac{2}{1+x^2}} f(x,y) \, dy \, dx.$$

$$12. \, y=0, \, y=a, \, y=x, \, y=x-2a. \text{ Em.: } \int_0^a \int_y^{y+2a} f(x,y) \, dx \, dy.$$

Aldatu integrazio-ordena ondorengo integraletan:

$$13. \int_1^2 \int_3^4 f(x,y) \, dy \, dx. \text{ Em.: } \int_3^4 \int_1^2 f(x,y) \, dx \, dy.$$

$$14. \int_0^1 \int_{x^3}^{\sqrt{x}} f(x, y) dy dx. \text{ Em.: } \int_0^1 \int_{y^2}^{\sqrt[3]{y}} f(x, y) dx dy.$$

$$15. \int_0^a \int_0^{\sqrt{2ay-y^2}} f(x, y) dx dy. \text{ Em.: } \int_0^a \int_{a-\sqrt{a^2-x^2}}^a f(x, y) dy dx.$$

$$16. \int_{-1}^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy dx. \text{ Em.: } \int_0^1 \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} f(x, y) dx dy.$$

$$17. \int_0^1 \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{1-y} f(x, y) dx dy. \text{ Em.: } \int_{-1}^0 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy dx + \int_0^1 \int_0^{1-x} f(x, y) dy dx.$$

Koordenatu polarretara pasatuz, kalkulatu hurrengo integralak:

$$18. \int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} \sqrt{a^2-x^2-y^2} dy dx. \text{ Em.: } \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^a \sqrt{a^2-\rho^2} \rho d\rho d\theta = \frac{\pi}{6} a^3.$$

$$19. \int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2-y^2}} (x^2+y^2) dx dy. \text{ Em.: } \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^a \rho^3 d\rho d\theta = \frac{\pi a^4}{8}.$$

$$20. \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(x^2+y^2)} dy dx. \text{ Em.: } \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^\infty e^{-\rho^2} \rho d\rho d\theta = \frac{\pi}{4}.$$

$$21. \int_0^{2a} \int_0^{\sqrt{2ax-x^2}} dy dx. \text{ Em.: } \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2a \cos \theta} \rho d\rho d\theta = \frac{\pi a^2}{2}.$$

Transformatu ondoko integral bikoitzak, x eta y -ri $x = u - uv$, $y = uv$ formulen bidez lotutako u eta v aldagai berriak sartuz:

$$22. \int_0^{\frac{e}{\alpha}} \int_{\frac{\beta}{1+\beta}}^{\frac{e}{1-\beta}} f(x, y) dy dx. \text{ Em.: } \int_{\frac{\alpha}{1+\alpha}}^{\frac{\beta}{1+\beta}} \int_0^{\frac{e}{1-\beta}} f(u - uv, uv) u du dv.$$

$$23. \int_0^{\frac{c}{b+c}} \int_0^{\frac{b}{b+c}} f(x, y) dy dx. \text{ Em.: } \int_0^{\frac{b}{b+c}} \int_0^{\frac{c}{1-\frac{b}{b+c}}} f(u - uv, uv) u du dv + \int_{\frac{b}{b+c}}^1 \int_0^{\frac{c}{b+c}} f(u - uv, uv) u du dv.$$

Integral bikoitzen aplikazioa azalera-kalkuluan

24. Kalkulatu $y^2 = 2x$ parabolak eta $y = x$ zuzenak mugatutako irudiaren azalera. Em.:

$$\frac{2}{3}.$$

25. Kalkulatu $y^2 = 4ax$, $x + y = 3a$, $y = 0$ kurbek mugatzen duten irudiaren azalera.

$$\text{Em.: } \frac{10}{3} a^2.$$

26. Kalkulatu $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = \frac{1}{a^2}$, $x + y = a$ kurbek mugatutako irudiaren azalera.

$$\text{Em.: } \frac{a^2}{3}.$$

27. Kalkulatu $y = \sin x$, $y = \cos x$, $x = 0$ kurbek mugatutako irudiaren azalera.

$$\text{Em.: } \sqrt{2} - 1.$$

28. Kalkulatu $\rho = a \sin 2\theta$ kurbaren bigizta baten azalera: Em.: $\frac{\pi a^2}{8}$.

29. Kalkulatu $\rho^2 = a^2 \cos 2\phi$ lemniskatak mugatzen duen azalera: Em.: a^2 .

30. Kalkulatu $\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \right)^2 = \frac{2xy}{c^2}$ kurbaren bigizta baten azalera.

Oharra. $x = \rho a \cos \theta$ eta $y = \rho b \sin \theta$ aldaketa egin. Em.: $\frac{a^2 b^2}{c^2}$.

Bolumen-kalkulua

Kalkulatu ondoko gainazalek mugatzen dituzten gorputzen bolumenak:

31. $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$. Em.: $\frac{abc}{6}$.

32. $z = 0$, $x^2 + y^2 = 1$, $x + y + z = 3$. Em.: 3π .

33. $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$, $xy = z$, $z = 0$. Em.: π .

34. $x^2 + y^2 - 2ax = 0$, $z = 0$, $x^2 + y^2 = z^2$. Em.: $\frac{32}{9}a^3$.

35. $y = x^2$, $x = y^2$, $z = 0$, $z = 12 + y - x^2$. Em.: $\frac{549}{140}$.

36. Koordinatu-planoek, $2x + 3y - 12 = 0$ planoak eta $z = \frac{1}{2}y^2$ zilindroak mugatua.
Em.: 16.

37. a erradioa eta ardatza Oz ardatzarekin bat daukan zilindroak, koordinatu-planoek eta

$\frac{x}{a} + \frac{z}{a} = 1$ planoak mugatua. Em.: $a^3 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{3} \right)$.

38. $x^2 + y^2 = a^2$, $x^2 + z^2 = a^2$ zilindroek mugatutakoarena. Em.: $\frac{16}{3}a^3$.

39. $y^2 + z^2 = x$, $x = y$, $z = 0$. Em.: $\frac{\pi}{64}$.

40. $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $x^2 + y^2 = R^2$, $a > R$. Em.: $\frac{4}{3}\pi[a^3 - (\sqrt{a^2 - R^2})^3]$.

41. $az = x^2 + y^2$, $z = 0$, $x^2 + y^2 = 2ax$. Em.: $\frac{3}{2}\pi a^3$.

42. $\rho^2 = a^2 \cos 2\theta$, $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $z = 0$. (Zilindroarekiko barne-bolumena

kalkulatu). Em.: $\frac{1}{9}a^3(3\pi + 20 - 16\sqrt{2})$.

Gainazal baten azaleraren kalkulua

43. Kalkulatu $x^2 + y^2 = 2ax$ zilindroak ebakitako $x^2 + y^2 = z^2$ konoaren gainazal-zatiaren azalera. Em.: $2\pi a^2 \sqrt{2}$.

44. Kalkulatu lehenengo oktantean dagoen eta $x^2 + y^2 = a^2$ zilindroak mugatzen duen $x + y + z = 2a$ planoaren zatiaren azalera. Em.: $\frac{\pi a^2}{4} \sqrt{3}$.

45. Kalkulatu esfera-segmentuaren gainazalaren azalera (txikiena), esferaren erradioa a eta segmentuaren oinarriarena b badira. Em.: $2\pi(a^2 - a\sqrt{a^2 - b^2})$.

46. Bilatu $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b$) zilindroak ebakitzen duen $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ esferaren gainazal-zatiaren azalera. Em.: $4\pi a^2 - 8a^2 - \arcsin \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$.

47. Bilatu $x^2 + y^2 = a^2$, $y^2 + z^2 = a^2$ zilindroen arteko ebakidurak osatzen duen gorputzaren gainazalaren azalera. Em.: $16a^2$.

48. Kalkulatu $z = 0$ plano eta $x^2 + y^2 = z^2$ konoaren artean dagoen $x^2 + y^2 = 2ax$ gainazal zilindrikoaren zatiaren azalera. Em.: $8a^2$.

49. Kalkulatu $z = mx$ eta $z = 0$ planoen artean dagoen $x^2 + y^2 = a^2$ gainazal zilindrikoaren zatiaren azalera. Em.: $2ma^2$.

50. Kalkulatu $y^2 = ax$ zilindro paraboliko eta $x = a$ planoaren artean dagoen $y^2 + z^2 = 2ax$ paraboloidearen gainazal-zatiaren azalera. Em.: $\frac{1}{3} \pi a^2 (3\sqrt{3} - 1)$.

Irudi launen masa, grabitate-zentruaren koordinatu eta inertzia momentuaren kalkulua

(51-62 eta 64 ariketetan gainazal-dentsitatea konstante eta 1 dela suposatuko dugu).

51. Determinatu a erradioko disko zirkular baten masa, edozein P puntutako masa P eta zentruaren arteko distantziarekiko alderantziz proportzionala bada (proportzionaltasun-koefizientea K izanik). Em.: $\pi a K$.

52. Kalkulatu triangelu aldeakide baten grabitate-zentruaren koordenatuak, Ox ardatza bere altueraren norabidean eta koordenatu-jatorria bere erpinean hartuz.

$$\text{Em.: } x_c = \frac{a\sqrt{3}}{3}, y_c = 0.$$

53. Determinatu a erradioko zirkulu-sektore baten grabitate-zentruaren koordenatuak, Ox ardatza bere angeluaren erdikariaren norabidean hartuz. Sektorearen angelua 2α da.

$$\text{Em.: } x_c = \frac{2a \sin \alpha}{3\alpha}, y_c = 0.$$

54. Bilatu $x^2 + y^2 = a^2$ zirkuluaren goiko erdiaren grabitate-zentruaren koordenatuak.

$$\text{Em.: } x_c = 0, y_c = \frac{4a}{3\pi}.$$

55. Bilatu $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ zikloidearen arku baten gainazalaren

$$\text{grabitate-zentruaren koordenatuak. Em.: } x_c = a\pi, y_c = \frac{5a}{6}.$$

56. Aurkitu $\rho^2 = a^2 \cos 2\theta$ kurbaren bigizta batek mugatutako gainazalaren grabitate-

$$\text{-zentruaren koordenatuak. Em.: } x_c = \frac{\pi a \sqrt{2}}{8}, y_c = 0.$$

57. Aurkitu $\rho = a(1 + \cos \theta)$ kordioidearen gainazalaren grabitate-zentruaren

$$\text{koordenatuak. Em.: } x_c = \frac{5a}{6}, y_c = 0.$$

58. Kalkulatu $x = 0$, $x = a$, $y = 0$, $y = b$ zuzenek mugatutako laukizuzenaren

$$\text{koordenatu-jatorriarekiko inertzia momentua. Em.: } \frac{ab(a^2 + b^2)}{3}.$$

59. Kalkulatu $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ elipsearen inerti momentua: a) Oy ardatzarekiko; b)

koordinatu-jatorriarekiko. Em.: a) $\frac{\pi a^3 b}{4}$; b) $\frac{\pi ab}{4}(a^2 + b^2)$.

60. Kalkulatu $\rho = 2a \cos \theta$ zirkuluaren gainazalaren poloarekiko inerti momentua.

Em.: $\frac{3}{2}\pi a^4$.

61. Kalkulatu $\rho = a(1 - \cos \theta)$ kardioidearen gainazalaren poloarekiko inerti

momentua. Em.: $\frac{35\pi a^4}{16}$.

62. Kalkulatu $(x - a)^2 + (y - b)^2 = 2a^2$ zirkuluaren gainazalaren inerti momentua, Oy ardatzarekiko. Em.: $3\pi a^4$.

63. Izan bedi a aldeko plaka karratua. Plaka horren puntu bakoitzeko dentsitatea puntua eta karratuaren erpinetako baten arteko distantziaren proportzionala da. Kalkulatu plakaren inerti momentua erpin horretatik pasatzen den alde batekiko.

Em.: $\frac{1}{40}ka^5[7\sqrt{2} + 3\ln(\sqrt{2} + 1)]$, k proportzionaltasun-faktorea izanik.

64. Kalkulatu $y^2 = ax$ parabolak eta $x = a$ zuzenak mugatutako irudiaren gainazalaren

inerti momentua, $y = -a$ zuzenarekiko. Em.: $\frac{8}{5}a^4$.

Integral hirukoitzak

65. Kalkulatu $\iiint \frac{dx dy dz}{(x + y + z + 1)^3}$, integrazio-eremua koordinatu-planoek eta

$x + y + z = 1$ planoak mugatutakoa bada. Em.: $\frac{\ln 2}{2} - \frac{5}{16}$.

66. Kalkulatu $\int_0^a \left[\int_0^x \left(\int_0^y xyz \, dz \right) dy \right] dx$. Em.: $\frac{a^6}{48}$.
67. Kalkulatu $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ esferak eta $x^2 + y^2 = 3z$ paraboloidak mugatzen duten gorputzaren bolumena. Em.: $\frac{19}{6}\pi$.
- 68.¹⁶⁾ Aurkitu $x=0$, $y=0$, $z=0$; $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$ planoek mugatutako piramidearen grabitate-zentruaren koordinatuak eta inerti momentuak. Em.: $x_c = \frac{a}{4}$, $y_c = \frac{b}{4}$, $z_c = \frac{c}{4}$; $I_x = \frac{a^3 bc}{60}$, $I_y = \frac{b^3 ac}{60}$, $I_z = \frac{c^3 ab}{60}$, $I_0 = \frac{abc}{60}(a^2 + b^2 + c^2)$.
69. Kalkulatu kono zuzen zirkular baten inerti momentua bere ardatzarekiko.
Em.: $\frac{1}{10} \pi h r^4$, non h konoaren altuera eta r bere oinarriaren erradioa bait dira.
70. Kalkulatu $(x^2 + y^2 + z^2)^2 = a^3 x$ ekuazioa duen gainazalak mugatutako gorputzaren bolumena. Em.: $\frac{1}{3} \pi a^3$.
71. Kalkulatu kono zirkular baten inerti momentua bere oinarriaren diametro batekiko.
Em.: $\frac{\pi h r^2}{60} (2h^2 + 3r^2)$.
72. Kalkulatu a erradioko esferak eta erpinean 2α angelua duen gainazal koniko batek mugatutako gorputzaren grabitate-zentruaren koordinatuak, konoaren erpina esferaren zentruarekin bat badator. Em.: $x_c = 0$, $y_c = 0$, $z_c = \frac{3}{8} a (1 + \cos \alpha)$ (Oz ardatza konoaren ardatzarekin eta erpina koordinatu-jatorriarekin bat datozelarik).

16) 68, 69, 71, 72, 73 ariketetan dentsitatea konstante eta 1 dela suposatuko dugu.

73. Kalkulatu a erradioko esferak eta esferaren zentrutik 60° -ko angelua osatuz pasatzen diren bi planoek mugatutako gorputzaren grabitate-zentruaren koordenatuak.

Em.: $\rho = \frac{9}{16}a$, $\theta = 0$, $\varphi = \frac{\pi}{2}$ (Oz ardaztatzat bi planoen arteko ebakidura-lerroa eta koordenatu-jatorritzat esferaren zentrua hartzen dira; ρ, θ, φ koordenatu esferikoak dira).

74. $\frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-\alpha^2 x} d\alpha$ ($\alpha > 0$) berdintza erabiliz, kalkulatu $\int_0^\infty \frac{\cos x}{\sqrt{x}} dx$ eta

$\int_0^\infty \frac{\sin x}{\sqrt{x}} dx$ integralak. Em.: $\sqrt{\frac{\pi}{2}}$; $\sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

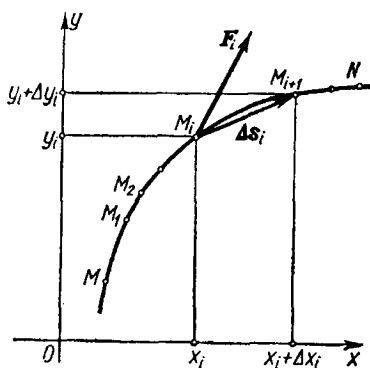
XV. GAIA

LERRO- ETA GAINAZAL-INTEGRALAK

§ 1. Lerro-integrala

Jo dezagun $P(x,y)$ puntua L planoko kurba batean zehar M puntu batetik N beste puntu batera desplazatzen dela. P puntuan $\mathbf{F}$ indarrak eragiten du, zeina P higitu ahala magnitudean zein norabidean aldatzen bait da, hau da, indarra P puntuaren koordinatuen funtzioa da:

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}(P)$$



326. IRUDIA

Kalkula dezagun $\mathbf{F}$ indarraren A lana puntua M -tik N -ra desplazatzen denean (326. irudia). Zati dezagun arkua n zatitan,

$$M_0 = M, M_1, M_2, \dots, M_n = N$$

puntu bidez, M -tik N -rantz abiatuz, eta $\overline{M_i M_{i+1}}$ bektoreari $\Delta \mathbf{s}_i$ izendatuz. Izan bedi $\mathbf{F}_i$ $\mathbf{F}$ indarraren M_i puntuko magnitudea. Kasu honetan $\mathbf{F}_i \Delta \mathbf{s}_i$ biderkadura eskalarra $\mathbf{F}$ -ren $\overbrace{M_i M_{i+1}}$ arkuan zeharreko lanaren adierazpen hurbildua bezala kontsidera dezakegu:

$$A_i \approx \mathbf{F}_i \Delta \mathbf{s}_i$$

Izan bedi $\mathbf{F} = X(x,y)\mathbf{i} + Y(x,y)\mathbf{j}$, non $X(x,y)$ eta $Y(x,y)$ $\mathbf{F}$ bektorearen Ox eta Oy ardatzen gaineko proiektzioak bait dira. x_i eta y_i koordenatuen gehikuntzak, M_i -tik M_{i+1} -era pasatzean, Δx_i eta Δy_i izendatzen baditugu,

$$\Delta \mathbf{s}_i = \Delta x_i \mathbf{i} + \Delta y_i \mathbf{j}$$

lortzen dugu. Ondorioz,

$$\mathbf{F}_i \Delta \mathbf{s}_i = X(x_i, y_i) \Delta x_i + Y(x_i, y_i) \Delta y_i.$$

$\mathbf{F}$ indarraren MN arku osoan zeharreko A lanaren balio hurbildua,

$$A \approx \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i \Delta \mathbf{s}_i = \sum_{i=1}^n [X(x_i, y_i) \Delta x_i + Y(x_i, y_i) \Delta y_i] \quad (1)$$

da.

Arrazonaketa hertsirik gabe, esan dezagun, berdintzaren bigarren ataleko adierazpenaren limitea, $\Delta s_i \rightarrow 0$ denean (argi dago orduan $\Delta x_i \rightarrow 0$ eta $\Delta y_i \rightarrow 0$ direla), existitzen bada limite horrek $\mathbf{F}$ indarraren L kurbako M eta N puntuen arteko arkuaren gaineko lana adierazten duela:

$$A = \lim_{\substack{\Delta x_i \rightarrow 0 \\ \Delta y_i \rightarrow 0}} \sum_{i=1}^n [X(x_i, y_i) \Delta x_i + Y(x_i, y_i) \Delta y_i] \quad (2)$$

Bigarren ataleko limitea¹⁾ $X(x,y)$ eta $Y(x,y)$ -ren L kurban zeharreko *lerro-integral* deitzen da eta,

$$A = \int_L X(x, y) dx + Y(x, y) dy \quad (3)$$

edo

$$A = \int_{(M)}^{(N)} X(x, y) dx + Y(x, y) dy \quad (3')$$

1) Hor batura integralaren limitea integral mugatuaren kasuaren zentzu berean ulertzen da (ikus XI. gaiko § 2).

idazten da. (2) itxurako baturen limiteak sarritan aurkitzen dira matematika eta fisikan; $X(x,y)$ eta $Y(x,y)$ D eremu batean definituriko bi aldagaiko funtzio bezala kontsideratzen dira.

(3') integralaren integrazio-mugak, M eta N , parentesien artean idatzi ditugu zenbakiak gabe kurbako muturren adierazpenak direla ohartarazteko, zeinen artean lerro-integrala hedatzen den. M -tik N -ranzko norantza integrazio-norantza deitzen da.

L kurba espazioan badago

$$X(x, y, z), \quad Y(x, y, z), \quad Z(x, y, z)$$

funtzioen lerro-integrala antzeko eran definitzen da:

$$\begin{aligned} A &= \int_L X(x, y, z) \, dx + Y(x, y, z) \, dy + Z(x, y, z) \, dz = \\ &= \lim_{\substack{\Delta x_k \rightarrow 0 \\ \Delta y_k \rightarrow 0 \\ \Delta z_k \rightarrow 0}} \sum_{k=1}^n X(x_k, y_k, z_k) \Delta x_k + Y(x_k, y_k, z_k) \Delta y_k + Z(x_k, y_k, z_k) \Delta z_k. \end{aligned}$$

Integral-ikurraren azpiko L letrak integrala L kurban zehar egiten dela adierazten du.

Eman dezagun lerro-integralen bi propietate.

1. Propietatea. Integraziorik gabeko kurbaren itxurak eta integrazio-norantzak definitzen dute lerro-integrala.

Lerro-integrala zeinuz aldatzen da integrazio-norantzaren aldaketarekin batera, Δs bektorea eta, hortaz, bere projekzioak Δx eta Δy ere, zeinuz aldatzen bait dira.

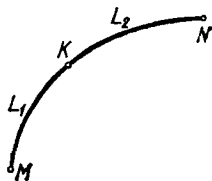
2. Propietatea. Zati dezagun L kurba bi zatitan, L_1 eta L_2 , K puntuaren bidez,

$$\bigcap MN = \bigcap MK + \bigcap KN$$

izanik (327. irudia). Orduan, (1) formulatik zuzenean,

$$\int_{(M)}^{(N)} X \, dx + Y \, dy = \int_{(M)}^{(K)} X \, dx + Y \, dy + \int_{(K)}^{(N)} X \, dx + Y \, dy$$

ondorioztatzen da.



327. IRUDIA

Erlazio horrek batugaiei kopurua edozein izanik ere balio du. Esan ere, lerro-integralaren definizioak L kurba itxia denean ere balio duela.

Kasu honetan kurbaren jatorria eta muturra bat datoz.

Horregatik, kurba itxi bat daukagunean ezin dugu

$$\int_{(M)}^{(N)} X dx + Y dy$$

idatzi,

$$\int_L X dx + Y dy$$

baizik, L kurba itxian zeharreko ibilbidearen norantza derrigorrez aipatuz. L mugalde itxi batean zeharreko lerro-integrala adierazteko,

$$\oint_L X dx + Y dy$$

ikurra ere maiz erabiltzen da.

Oharra. $\mathbf{F}$ indarraren L kurban zeharreko lanaren problema kontsideratuz lerro-integralaren noziora ailegatu gara.

Kasu honetan, L kurbako puntu guztietan $\mathbf{F}$ indarra aplikatzen den (x,y) puntuaren koordinatuen funtzio bektorial bezala definiturik dagoela suposa dezagun; $\mathbf{F}$ bektore aldakorren koordinatu-ardatzaren gaineko projekzioak $X(x,y)$ eta $Y(x,y)$ funtzio eskalarren (hots, zenbakizkoen) berdinak dira. Horregatik,

$$\int_L X dx + Y dy$$

itxurako lerro-integrala X eta Y projekzioek emandako $\mathbf{F}$ funtzio bektorialaren integral bezala kontsidera dezakegu.

Azter dezagun kurba horren MN arkua (328. irudia). Izan bitez α eta β M eta N puntuei dagozkien parametroaren balioak. Zati dezagun MN arkua Δs_i elementu partzialetan

$$M_1(x_1, y_1), M_2(x_2, y_2), \dots, M_n(x_n, y_n)$$

puntuen bitartez,

$$x_i = \varphi(t_i), \quad y_i = \psi(t_i)$$

eginez.

Har dezagun

$$\int_L X(x, y) dx + Y(x, y) dy \quad (1)$$

lerro-integrala, aurreko atalean definitua. Eman dezagun hemen, frogapenik gabe, lerro-integralaren existentziari buruzko teorema bat. $\varphi(t)$ eta $\psi(t)$ funtzioak jarraiak badira eta $[\alpha, \beta]$ tartearen barnealdean $\varphi'(t)$ eta $\psi'(t)$ deribatu jarraiak badituzte eta, horrez gain,

$$X[\varphi(t), \psi(t)]$$

eta

$$Y[\varphi(t), \psi(t)]$$

t -ren funtzioak tarte horretan jarraiak badira

$$\left. \begin{aligned} \lim_{\Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n X(\bar{x}_i, \bar{y}_i) \Delta x_i &= \int X(x, y) dx, \\ \lim_{\Delta y_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n Y(\bar{x}_i, \bar{y}_i) \Delta y_i &= \int Y(x, y) dy \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

limiteak existituko dira, non $\bar{x}_i$ eta $\bar{y}_i$ Δs_i arkuko puntu baten koordinatuak bait dira. Limite horiek ez daude L kurbaren arku partzialetako zatiketaren menpe, $\Delta s_i \rightarrow 0$ denean, ez eta Δs_i arkuko $M_i(\bar{x}_i, \bar{y}_i)$ puntuaren hautaketaren menpe ere. Limite horiek *lerro-integral* deitzen dira eta

$$\lim_{\Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n X(\bar{x}_i, \bar{y}_i) \Delta x_i = \int_L X(x, y) dx$$

$$\lim_{\Delta y_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n Y(\bar{x}_i, \bar{y}_i) \Delta y_i = \int_L Y(x, y) dy$$

adierazten dira.

Oharra. Aipatu teorematik aurreko atalean definituriko baturek limite berberarantz (hau da, lerro-integralerantz) jotzen dutela ondorioztatzen da, $M_i(\bar{x}_i, \bar{y}_i)$ puntuak Δs_i arkuaren muturrak direnean, L -ren Δs_i arku partzialetako banaketa-sistema edozein izanik.

Formulatutako teorema lerro-integralak kalkulatzeko metodoa lortzeko aukera ematen digu.

Honela, definizioaren arabera,

$$\int_{(M)}^{(N)} X(x, y) dx = \lim_{\Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n X(\bar{x}_i, \bar{y}_i) \Delta x_i \quad (3)$$

daukagu, non

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1} = \varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1}).$$

Transforma dezagun azken diferentzia Lagrange-ren formularen bidez:

$$\Delta x_i = \varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1}) = \varphi'(\tau_i)(t_i - t_{i-1}) = \varphi'(\tau_i) \Delta t_i,$$

non τ_i t_i eta t_{i-1} -en bitarteko t -ren balio bat den. Δs_i arkuko $\bar{x}_i, \bar{y}_i$ puntua hautazkoa denez gero, aukera dezagun bere koordenatuak parametroaren τ_i balioari egoki dakizkion:

$$\bar{x}_i = \varphi(\tau_i), \quad \bar{y}_i = \psi(\tau_i).$$

(3) formularen lortutako $\bar{x}_i, \bar{y}_i$ eta Δx_i -ren balioak sartuz

$$\int_{(M)}^{(N)} X(x, y) dx = \lim_{\Delta t_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n X[\varphi(\tau_i), \psi(\tau_i)] \varphi'(\tau_i) \Delta t_i$$

ateratzen dugu. Bigarren atala

$$X[\varphi(t), \psi(t)]\varphi'(t)$$

aldagai bateko funtzioaren batura integralaren limitea da, $[\alpha, \beta]$ tartean.

Ondorioz, limite hori funtzio horren integral mugatuaren berdina da:

$$\int_{(M)}^{(N)} X(x, y) \, dx = \int_{\alpha}^{\beta} X[\varphi(t), \psi(t)]\varphi'(t) \, dt.$$

Antzeko eran,

$$\int_{(M)}^{(N)} Y(x, y) \, dy = \int_{\alpha}^{\beta} Y[\varphi(t), \psi(t)]\psi'(t) \, dt$$

formula erdiesten dugu. Berdintza horiek atalez atal batuz gero,

$$\int_{(M)}^{(N)} X(x, y) \, dx + Y(x, y) \, dy = \int_{\alpha}^{\beta} \{X[\varphi(t), \psi(t)]\varphi'(t) + Y[\varphi(t), \psi(t)]\psi'(t)\} \, dt \quad (4)$$

lortzen dugu. Hori da lerro-integrala kalkulatzeko uzten digun formula.

Era berdintsuan kalkulatzeko da $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $z = \chi(t)$ ekuazioek emandako espazioko kurban zeharreko

$$\int X \, dx + Y \, dy + Z \, dz$$

lerro-integrala.

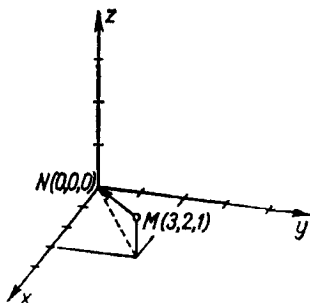
1. Adibidea. Kalkulatu, x^3 , $3zy^2$, $-x^2y$ funtzioen (edo, gauza bera dena, $x^3\mathbf{i} + 3zy^2\mathbf{j} - x^2y\mathbf{k}$ funtzio bektorialaren) lerro-integrala $M(3,2,1)$ puntutik abiatuz $N(0,0,0)$ -ra doan zuzenkian zehar (329. irudia).

Ebazpena. MN lerroaren ekuazio parametrikokoak aurkitzeko idatz dezagun emandako bi puntuetatik pasatzen den zuzenaren ekuazioa:

$$\frac{x}{3} = \frac{y}{2} = \frac{z}{1};$$

arrazoi horien balio komuna t bada, zuzenaren ekuazioak era parametrikokan lortzen ditugu:

$$x = 3t, \quad y = 2t, \quad z = t.$$



329. IRUDIA

Jakina, MN zuzenkiaren jatorriari $t = 1$ parametroaren balioa dagokio eta muturrari $t = 0$ balioa. Ez da zaila x, y eta z -ren t parametroarekiko deribatuak bilatzea (lerro-integrala kalkulatzeko behar ditugunak):

$$x'_t = 3, \quad y'_t = 2, \quad z'_t = 1.$$

Orain (4) formularen laguntzaz lerro-integrala kalkula dezakegu:

$$\begin{aligned} \int_{(M)}^{(N)} x^3 dx + 3zy^2 dy - x^2 y dz &= \int_1^0 \left[(3t)^3 \cdot 3 + 3t(2t)^2 \cdot 2 - (3t)^2 \cdot 2t \cdot 1 \right] dt = \\ &= \int_1^0 87t^3 dt = -\frac{87}{4}. \end{aligned}$$

2. Adibidea. Kalkulatu $6x^2y, 10xy^2$ funtzioen lerro-integrala planoko $y = x^3$ kurban zehar, $M(1,1)$ eta $N(2,8)$ puntuen artean (330. irudia).

Ebazpena.

$$\int_{(M)}^{(N)} 6x^2y dx + 10xy^2 dy$$

bilatutako integrala kalkulatzeko emandako kurbaren ekuazio parametrikokoak behar dira. Baina esplizituki eman diguten $y = x^3$ kurbaren ekuazioa ekuazio parametrikokoaren kasu partikularra da: hor, kurbako puntuaren x abzisak parametro bezala balio du eta kurbaren

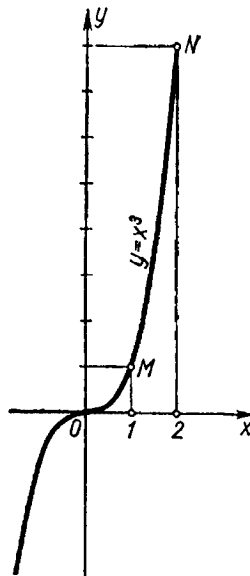
ekuazio parametrikokoak $x = x$, $y = x^3$ dira. x parametroa $x_1 = 1$ baliotik $x_2 = 2$ baliora aldatzen da. Erraz kalkulatzeko dira parametroarekiko deribatuak:

$$x'_x = 1, \quad y'_x = 3x^2$$

Ondorioz,

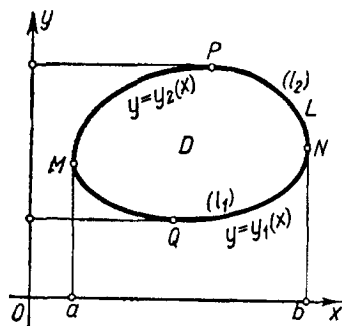
$$\begin{aligned} \int_{(M)}^{(N)} 6x^2 y \, dx + 10xy^2 \, dy &= \int_1^2 \left[6x^2 x^3 \cdot 1 + 10xx^6 \cdot 3x^2 \right] dx = \\ &= \int_1^2 (6x^5 + 30x^9) \, dx = \left[x^6 + 3x^{10} \right]_1^2 = 1084. \end{aligned}$$

Ikus dezagun orain lerro-integralaren zenbait aplikazio.



330. IRUDIA

1. Kurba itxi batek mugatutako eremu baten azaleraren adierazpena, lerro-integral baten bidez. Izan bedi D L mugaldeak mugatutako Oxy planoko eremua, non koordenatu-ardatzekiko edozein paralelok, eremuaren barnealdeko puntu batetik pasatzen bada, L muga gehienez bi puntutan ebakiten bait du. (hau da, D eremua erregularra da) (331. irudia).



331. IRUDIA

Demagun $[a,b]$ tartea D eremuaren Ox ardatzaren gaineko projekzioa dela; eremuaren gaineko muga (l_2) , $y=y_2(x)$, eta beheko muga (l_1) , $y=y_1(x)$, $[y_1(x) \leq y_2(x)]$, kurbak direlarik. Orduan, D eremuaren azalera,

$$S = \int_a^b y_2(x) dx - \int_a^b y_1(x) dx$$

izango da.

Baina lehenengo integrala $l_2 \left(\widehat{MPN} \right)$ kurban zeharreko lerro-integrala da, $y=y_2(x)$ kurba horren ekuazioa bait da; hortaz,

$$\int_a^b y_2(x) dx = \int_{MPN} y dx.$$

Bigarren integrala ordea, $l_1 \left(\widehat{MQN} \right)$ kurban zeharreko lerro-integrala da, hau da,

$$\int_a^b y_1(x) dx = \int_{MQN} y dx.$$

Lerro-integralaren 1. propietatearen arabera,

$$\int_{MPN} y dx = - \int_{NPM} y dx$$

daukagu. Ondorioz,

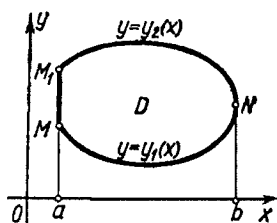
$$S = - \int_{NPM} y dx - \int_{MQN} y dx = - \int_L y dx. \quad (5)$$

L kurba erloju-orratzen zentzuaren kontra korritu dela har dezagun kontutan.

L mugaren zati bat Oy ardatzarekiko paralelo den M_1M zuzenkia bada

$$\int_{(M_1)}^{(M)} y dx = 0$$

dugu, eta (5) berdintzak kasu honetan ere balio du (332. irudia).



332. IRUDIA

Antzeko eran,

$$S = \int_L x dy \quad (6)$$

froga dezakegu.

(5) eta (6) berdintzak atalez atal batuz eta 2z zatituz gero S azalera kalkulatzeko beste formula bat erdietsiko dugu:

$$S = \frac{1}{2} \int_L x dy - y dx. \quad (7)$$

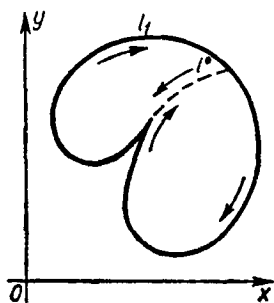
3. Adibidea. Kalkulatu, $x = a \cos t$, $y = b \sin t$ elipsearen azalera.

Ebazpena. (7) formularen arabera

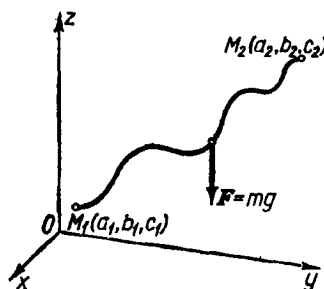
$$S = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} [a \cos t \, b \cos t - b \sin t (-a \sin t)] dt = \pi ab$$

aurkitzen dugu.

Ohar gaitezen (7) formulak, (5) eta (6) formulek bezala, eremuen azalerak kalkulatzeko balio dutela, eremu horien mugak koordenatu-ardatzekiko paraleloek bi baino puntu gehiagotan ebakitzen badituzte ere (333. irudia). Frogatzeko, emandako eremua (334. irudia) l^* lerroaren bidez bi eremu erregularretan zati dezagun. (7) formulak eremu bakoitzean balio du.



333. IRUDIA



334. IRUDIA

Atalez atal batuz, lehenengo atalean eremuaren azalera eta bigarrenean muga osoan zehar zabaldutako lerro-integrala ($1/2$ koefizientearekin) lortuko dugu, l^* lerro zatitzailean zeharreko integrala bi aldiz hartzen bait da, behin norantza batean eta bestean kontrako norantzan, beraz zero izango da.

2. F indar aldakor batek L ibilbidean zehar egindako lana. § lean esan dugu,

$$\mathbf{F} = X(x, y, z)\mathbf{i} + Y(x, y, z)\mathbf{j} + Z(x, y, z)\mathbf{k}$$

indar baten $L = MN$ kurba batean zeharreko lana,

$$A = \int_{(M)}^{(N)} X(x, y, z) dx + Y(x, y, z) dy + Z(x, y, z) dz$$

lerro-integralaren berdina dena.

Azter dezagun indar baten lanaren kalkuluaren adibide zehatz bat.

4. Adibidea. Kalkulatu $\mathbf{F}$ grabitate-indarraren A lana, m masa $M_1(a_1, b_1, c_1)$ puntutik $M_2(a_2, b_2, c_2)$ puntura mugitzen bada L hautazko ibilbidean zehar (334. irudia).

Ebazpena. $\mathbf{F}$ grabitate-indarraren koordenatu-ardatzen gaineko proiektzioak

$$X = 0, \quad Y = 0, \quad Z = -mg$$

dira. Hortaz, bilatzen dugun lana,

$$A = \int_{(M_1)}^{(M_2)} X dx + Y dy + Z dz = \int_{c_1}^{c_2} (-mg) dz = mg(c_1 - c_2)$$

da.

Ikusten denez, kasu honetan lerro-integrala ez dago integrazio-ibilbidearen menpe, hasiera eta amaierako puntuen posizioen menpe soilik baizik. Zehazkiago esateko, grabitate-indarraren lana hasierako eta amaierako puntuen altueren arteko diferentzien menpe soilik dago.

§ 3. Green-en formula

Determina dezagun planoko D eremura hedatutako integral bikoitza eta eremuaren L mugan zeharreko lerro-integralaren arteko erlazioa.

Demagun Oxy planoan bai Ox norabidean bai Oy norabidean erregular den eta L mugalde itxiak mugatzen duen D eremua daukagula (331. irudia). Izan bedi eremu hori behetik $y = y_1(x)$ kurbak eta goitik $y = y_2(x)$ kurbak mugatua,

$$y_1(x) \leq y_2(x) \quad (a \leq x \leq b)$$

izanik.

Oro har, bi kurba horiek L mugalde itxia osatzen dute. Demagun D eremuan $X(x, y)$ eta $Y(x, y)$ funtzio jarraiak ditugula eta deribatu partzial jarraiak dituztela. Azter dezagun

$$\iint_D \frac{\partial X(x, y)}{\partial y} dx dy$$

integrala. Bigarren ordenako integral berritua bezala adieraziz gero

$$\begin{aligned} \iint_D \frac{\partial X}{\partial y} dx dy &= \int_a^b \left[\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \frac{\partial X}{\partial y} dy \right] dx = \int_a^b X(x, y) \Big|_{y_1(x)}^{y_2(x)} dx = \\ &= \int_a^b [X(x, y_2(x)) - X(x, y_1(x))] dx \end{aligned} \quad (1)$$

daukagu. Ohar gaitezen,

$$\int_a^b X(x, y_2(x)) dx$$

integrala, zenbakiz,

$$\int_{(MPN)} X(x, y) dx$$

lerro-integralaren berdina dela MPN arkuan zehar, zeinaren ekuazio parametrikoak $x = x$, $y = y_2(x)$, parametroa x izanik, bait dira.

Honela,

$$\int_a^b X(x, y_2(x)) dx = \int_{MPN} X(x, y) dx. \quad (2)$$

Analogoki,

$$\int_a^b X(x, y_1(x)) dx$$

integrala, zenbakiz, MQN arkuan zeharreko lerro-integralaren berdina da,

$$\int_a^b X(x, y_1(x)) dx = \int_{(MQN)} X(x, y) dx. \quad (3)$$

(2) eta (3) adierazpenak (1) formularen ordezkatzuz,

$$\iint_D \frac{\partial X}{\partial y} dx dy = \int_{MPN} X(x, y) dx - \int_{MQN} X(x, y) dx \quad (4)$$

lortzen dugu. Baina,

$$\int_{MQN} X(x, y) dx = - \int_{NQM} X(x, y) dx$$

(ikus § 1, 1. propietatea). Ondorioz, (4) formula,

$$\iint_D \frac{\partial X}{\partial y} dx dy = \int_{MPN} X(x, y) dx + \int_{NQM} X(x, y) dx$$

eran idatz dezakegu. Baina, bigarren ataleko lerro-integralen batura L kurba itxi osoan zehar, erloju-orratzen norantzan, hedatutako lerro-integralaren berdina da. Hortaz, azkeneko berdintza

$$\iint_D \frac{\partial X}{\partial y} dx dy = \int_L X(x, y) dx \quad (5)$$

itxurara labur daiteke (L erloju-orratzen arabera).

Mugaren zati bat Oy ardatzarekiko paralelo den l_3 zuzenki batez adierazita badago,

$$\int_{l_3} X(x, y) dx = 0$$

daukagu eta (5) ekuazioak kasu horretarako ere balio du.

Era berdinean aurkitzen dugu

$$\iint_D \frac{\partial Y}{\partial x} dx dy = - \int_L Y(x, y) dy \quad (6)$$

(L erloju-orratzen arabera). (5)etik (6) kenduz gero,

$$\iint_D \left(\frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x} \right) dx dy = \int_L X dx + Y dy$$

lortzen dugu (L erloju-orratzen arabera).

L mugaldearen ibilbidearen norantza erloju-orratzenaren aurkakoa bada,

$$\iint_D \left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} \right) dx dy = \int_L X dx + Y dy$$

daukagu²⁾. Hori da *Green-en formula* deiturikoa, D. Green (1793-1841)³⁾ matematikari eta fisikari ingelesaren oroimenez.

D eremua erregularra dela suposatu dugu. Baina, azaleraren problemaren bezala (ikus § 2) formula horrek eremu erregularretan deskonposa daitekeen edozein eremutarako balio duela frogatu daiteke.

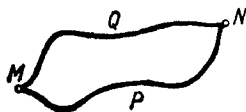
§ 4. Lerro-integrala integrazio-bidearen menpe ez egoteko baldintzak

Har dezagun

$$\int_{(M)}^{(N)} X dx + Y dy$$

lerro-integrala, M eta N puntuak lotzen dituen planoko L kurba-arkuan zehar hedatua. Demagun $X(x,y)$ eta $Y(x,y)$ funtzioek kontsideratutako D eremuan deribatu partzial jarraiak dauzkatela.

Ikus dezagun zer baldintzatan lerro-integrala ez dagoen L kurbaren itxuraren menpe, M eta N puntuen posizioen menpe soilik baizik. Izan bitez MPN eta MQN hautazko bi kurba, D eremukoak eta M eta N puntuak lotzen dituztenak (335. irudia).



335. IRUDIA

- 2) L mugalde itxi batean zeharreko lerro-integral batean ibilbidearen norantza adierazi ez bada, berori erloju-orratzenaren aurkako norantza egiten dela suposatzen da. Ibilbidea erloju-orratzen arabera bada bereziki adierazi behar da.
- 3) Formula hori M.V. Ostrogradski matematikari ukrainiarak lortutako beste formula orokorraren kasu partikularra da.

Izan bedi,

$$\int_{MPN} X dx + Y dy = \int_{MQN} X dx + Y dy, \quad (1)$$

hau da,

$$\int_{MPN} X dx + Y dy - \int_{MQN} X dx + Y dy = 0.$$

Beraz, lerro-integralen 1. eta 2. propietateen arabera (§ 1),

$$\int_{MPN} X dx + Y dy + \int_{NQM} X dx + Y dy = 0$$

daukagu, hots, L mugalde itxian zeharreko lerro-integrala

$$\int_L X dx + Y dy = 0$$

da.

Azkeneko formula horretan lerro-integrala, MPN eta MQN arkuek osaten duten L mugalde itxian zehar dago hedatua. Bistakoa da mugalde hori hautazkotzat har dezakegula.

Hortaz, baldin lerro-integrala M eta N hautazko puntuak lotzen dituen kurbaren itxuraren menpean ez badago, puntuen posizioen menpe baizik, mugalde itxian zeharreko integrala nulua dela ondorioztatzen dugu.

Elkarrekiko ondorioa ere egiazkoa da: edozein mugalde itxitan zeharreko lerro-integrala nulua bada, hori ez dago hautazko bi puntu lotzen dituen kurbaren itxuraren menpe, bi puntu horien posizioen menpe soilik baizik. Izan ere, (2) berdintzatik (1) erdiesten da.

§ 2, 4. adibidean, lerro-integrala ez dago integrazio-ibilbidearen menpe. Aldiz, 3. adibidean lerro-integrala integrazio-ibilbidearen menpe dago, mugalde itxian zeharreko integrala nulua ez bait da, mugalde horrek mugatutako azalera ematen duelarik.

1. eta 2. adibideetan ere lerro-integralak integrazio-bidearen menpe daude.

Jakina, ondoko galdera sortzen da: Zer baldintza bete behar dute $X(x,y)$ eta $Y(x,y)$ funtzioek $\int X dx + Y dy$ lerro-integrala edozein mugalde itxitan zehar nulu izan dadin?. Ondorengo teorema emango digu erantzuna.

Teorema. Izan bitez $X(x,y)$ eta $Y(x,y)$ eremuko puntu guztietan jarraiak diren bi funtzio,

$$\frac{\partial X(x,y)}{\partial y} \quad \text{eta} \quad \frac{\partial Y(x,y)}{\partial x}$$

beren deribatu partzialak ere D eremuan jarraiak direlarik. Lerro-integrala D eremuko L edozein mugalde itxitan zehar nulu izan dadin, hau da,

$$\int_L X(x,y) dx + Y(x,y) dy = 0 \quad (2)$$

izan dadin, beharrezko eta nahikoa da

$$\frac{\partial X}{\partial y} = \frac{\partial Y}{\partial x} \quad (3)$$

berdintza D eremuko puntu guztietan bete dadila.

Frogapena: Har dezagun D eremuko hautazko L mugalde itxi bat eta idatz dezagun mugalde horri dagokion Green-en formula:

$$\iint_D \left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} \right) dx dy = \int_L X dx + Y dy.$$

(3) baldintza betez gero, lehenengo ataleko integral bikoitza zeroren berdina da eta, hortaz,

$$\int_L X dx + Y dy = 0.$$

Horrela, (3) baldintza nahikoa dena frogaturik dago.

Froga dezagun orain baldintza hori beharrezkoa dela ere, hau da, (2) berdintza D -ko L edozein kurba itxitarako betetzen bada (3) baldintza eremu horretako puntu bakoitzean nahitaez betetzen dela.

Suposa dezagun kontrakoa: (2) baldintza betetzen dela,

$$\int_L X dx + Y dy = 0$$

eta (3) baldintza ez dela betetzen,

$$\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} \neq 0,$$

puntu bakar batean bada ere. Izan bedi, adibidez,

$$\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} > 0$$

$P(x_0, y_0)$ puntu bateko desberdintza.

Lehenengo ataleko funtzioa, jarraia denez gero, $P(x_0, y_0)$ puntua daukan eta aski txikia den D' eremuko puntu guztietan positiboa eta $\delta > 0$ zenbaki bat baino handiagoa

izango da. Har dezagun, D' eremu horretan, $\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}$ kenduraren integral bikoitza.

Jakina, integral hori positiboa da. Izan ere,

$$\iint_D \left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} \right) dx dy > \iint_{D'} \delta dx dy = \delta \iint_{D'} dx dy = \delta D' > 0.$$

Baina, Green-en formularen arabera, azkeneko desberdintzaren lehenengo atala D' eremuaren L' mugaren zeharreko lerro-integralaren berdina da, zeina, hipotesiaren arabera, nulua bait da. Hortaz, azkeneko desberdintzak (2) baldintzaren kontra jotzen du eta

$$\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}$$

kendura zeroren desberdina dena, puntu bakar batean bada ere, faltsua da. Hortik D eremuko puntu guztietan,

$$\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} = 0$$

dela ondorioztatzen da.

Beraz, teorema guztiz frogatu dugu.

XIII. gaiko § 9an frogatu dugu

$$\frac{\partial Y(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial X(x, y)}{\partial y}$$

baldintza betetzeak $X dx + Y dy$ adierazpena $U(x, y)$ funtzio baten diferentzial totala dela esan nahi duela, hau da,

$$X dx + Y dy = dU(x, y), \quad X(x, y) = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad Y(x, y) = \frac{\partial U}{\partial y}$$

izanik.

Baina, kasu honetan,

$$\mathbf{F} = X\mathbf{i} + Y\mathbf{j} = \frac{\partial U}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\mathbf{j}$$

bektorea $U(x, y)$ funtzioaren gradientea da; $U(x, y)$ funtzioa, zeinaren gradientea $X\mathbf{i} + Y\mathbf{j}$ bektorearen berdina den, bektore horren *potentzial* deitzen da.

Froga dezagun kasu honetan,

$$I = \int_{(M)}^{(N)} X dx + Y dy$$

M eta N lotzen dituen edozein kurbatan zeharreko lerro-integrala, U funtzioaren puntu horietako balioen arteko kendura dela:

$$\int_{(M)}^{(N)} X dx + Y dy = \int_{(M)}^{(N)} dU(x, y) = U(N) - U(M).$$

Frogapena. Baldin $X dx + Y dy$, $U(x, y)$ funtzioaren diferentzial totala bada,

$$X = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad Y = \frac{\partial U}{\partial y}$$

dira eta lerro-integralak,

$$I = \int_{(M)}^{(N)} \frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy$$

itxura hartzen du.

Integral hori kalkulatzeko idatz ditzagun M eta N lotzen dituen L kurbaren ekuazio parametrikak:

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t).$$

Demagun parametroaren $t = t_0$ balioari M puntua eta $t = T$ balioari N puntua dagozkiela. Beraz, lerro-integrala,

$$I = \int_{t_0}^T \left[\frac{\partial U}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial U}{\partial y} \frac{dy}{dt} \right] dt$$

integralera laburtzen da. Kortxeteen arteko adierazpena t -ren funtzioa da, $U[\varphi(t), \psi(t)]$ funtzioaren t -rekiko deribatu totala. Hortaz,

$$I = \int_{t_0}^T \frac{dU}{dt} dt = U[\varphi(t), \psi(t)] \Big|_{t_0}^T = U[\varphi(T), \psi(T)] - U[\varphi(t_0), \psi(t_0)] = U(N) - U(M).$$

Dakusagunez, diferentzial total baten lerro-integrala ez dago aztertzen ari den kurbaren itxuraren menpe.

Espazioko kurba batean zeharreko lerro-integralak propietate berberak ditu (ikus gai honetako § 7).

Oharra. Batzutan, $X(x,y)$ funtzio baten lerro-integrala L arkuaren luzeran zehar kalkulatu behar da,

$$\int_L X(x,y) ds = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n X(x_i, y_i) \Delta s_i, \quad (4)$$

non ds arkuaren diferentziala den. Holako integralak lehenago aztertutako lerro-integralekin egin den antzeko eran kalkulatzeko dira. Demagun

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t)$$

ekuazio parametrikoei ematen digutela L kurba, non

$$\varphi(t), \psi(t), \varphi'(t), \psi'(t)$$

t -ren funtzio jarraiak bait dira.

Izan bitez α eta β , arkuaren jatorriari eta muturrari dagozkien t parametroaren balioak.

$$ds = \sqrt{\varphi'(t)^2 + \psi'(t)^2} dt$$

denez, (4) integrala kalkulatzeko formula,

$$\int_L X(x, y) ds = \int_{\alpha}^{\beta} X[\varphi(t), \psi(t)] \sqrt{\varphi'(t)^2 + \psi'(t)^2} dt$$

lortzen dugu.

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad z = \chi(t)$$

espazioko kurba baten arkuan zeharreko lerro-integrala kontsidera dezakegu:

$$\int_L X(x, y, z) ds = \int_{\alpha}^{\beta} X[\varphi(t), \psi(t), \chi(t)] \sqrt{\varphi'(t)^2 + \psi'(t)^2 + \chi'(t)^2} dt.$$

Arkuan zeharreko lerro-integralen laguntzaz, adibidez, lerro desberdinen grabitate-zentruen koordenatuak determina ditzakegu.

XII. gaiko § 8an antzera arrazoituz, espazioko kurba baten grabitate-zentruaren koordenatuak kalkulatzeko formula lortuko dugu:

$$x_c = \frac{\int_L x ds}{\int_L ds}, \quad y_c = \frac{\int_L y ds}{\int_L ds}, \quad z_c = \frac{\int_L z ds}{\int_L ds}. \quad (5)$$

Adibidea. Bilatu,

$$x = a \cos t, \quad y = a \sin t, \quad z = bt \quad (0 \leq t \leq 2\pi)$$

helizearen espira baten grabitate-zentruaren koordenatuak, bere dentsitate lineala konstante bada.

Ebazpena. (5) formula aplikatuz,

$$\begin{aligned}
 x_c &= \frac{\int_0^{2\pi} a \cos t \sqrt{a^2 \sin^2 t + a^2 \cos^2 t + b^2} dt}{\int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 \sin^2 t + a^2 \cos^2 t + b^2} dt} = \\
 &= \frac{\int_0^{2\pi} a \cos t \sqrt{a^2 + b^2} dt}{\int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 + b^2} dt} = \frac{a \sqrt{a^2 + b^2} \cdot 0}{2\pi \sqrt{a^2 + b^2}} = 0
 \end{aligned}$$

aurkitzen dugu. Analogoki, $y_c = 0$,

$$z_c = \frac{\int_0^{2\pi} bt \sqrt{a^2 \sin^2 t + a^2 \cos^2 t + b^2} dt}{\int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 + b^2} dt} = \frac{b \cdot 2\pi^2 \sqrt{a^2 + b^2}}{2\pi \sqrt{a^2 + b^2}} = \pi b.$$

Honela, helizearen espiraren grabitate-zentruaren koordenatuak

$$x_c = 0, \quad y_c = 0, \quad z_c = \pi b$$

dira.

§ 5. Gainazal-integrala

Izan bitez V $Oxyz$ koordenatu angeluzuzenen sisteman emandako eremua eta σ λ kurbak espazioan mugatutako gainazala.

σ gainazalari dagokionez, demagun P puntu bakoitzean, normalaren norantza positiboa $\mathbf{n}(P)$ unitate bektorearen bidez determinatzen dela, zeinaren kosinu zuzentzaileak gainazaleko puntuen koordenatuen funtzio jarraiak bait dira.

Demagun gainazaleko puntu bakoitzean,

$$\mathbf{F} = X(x, y, z)\mathbf{i} + Y(x, y, z)\mathbf{j} + Z(x, y, z)\mathbf{k}$$

bektore bat determinaturik dagoela, non X, Y, Z koordenatuen funtzio jarraiak bait dira.

Zati dezagun gainazala, edonola, $\Delta\sigma_i$ eremu edo gainazal elementaletan. Har dezagun gainazal horietan hautazko puntu bana, P_i , eta osa dezagun

$$\sum_i (\mathbf{F}(P_i) \mathbf{n}(P_i)) \Delta\sigma_i \quad (1)$$

batura, non $\mathbf{F}(P_i)$ $\mathbf{F}$ bektorearen $\Delta\sigma_i$ gainazal elementaleko P_i puntuko balioa, $\mathbf{n}(P_i)$ puntu horretako normalaren unitate bektorea eta $\mathbf{F} \mathbf{n}$ bi bektore horien arteko biderkadura eskalarra bait dira.

(1) baturaren limitea, $\Delta\sigma_i$ gainazal guztietara hedaturik, gainazal horien diametroek zerorantz jotzen dutenean, *gainazal-integral* deitzen da eta,

$$\iint_{\sigma} \mathbf{F} \mathbf{n} d\sigma$$

idazten da. Honela bada, definizioz⁴⁾,

$$\lim_{diam \Delta\sigma_i \rightarrow 0} \sum \mathbf{F}_i \mathbf{n}_i \Delta\sigma_i = \iint_{\sigma} \mathbf{F} \mathbf{n} d\sigma \quad (2)$$

daukagu.

(1) batuketaren gai bakoitzak,

$$\mathbf{F}_i \mathbf{n}_i \Delta\sigma_i = \mathbf{F}_i \Delta\sigma_i \cos(\mathbf{n}_i, \mathbf{F}_i), \quad (3)$$

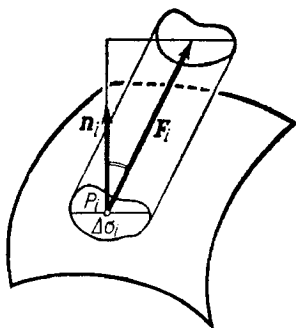
ondorengo adierazpen mekanikoa dauka: biderkadura hori $\Delta\sigma_i$ oinarria eta $\mathbf{F}_i \cos(\mathbf{n}_i, \mathbf{F}_i)$ altuera duen zilindroaren bolumenaren berdina da. $\mathbf{F}$ bektoreak σ gainazala zeharkatzen duen likido baten abiadura adierazten badu, (3) biderkadura $\Delta\sigma_i$ -an zehar, $\mathbf{n}_i$ bektorearen norabidean, pasatzen den denbora-unitateko likido-kantitatearen berdina da (336. irudia).

$\mathbf{F}$ likidoaren puntu bateko abiadura-bektorea bada,

$$\iint_{\sigma} \mathbf{F} \mathbf{n} d\sigma$$

4) σ gainazaleko puntu bakoitzeko plano ukitzailea P puntuaren gainazalaren gaineko desplazamenduaren funtzioan, era jarraian, aldatzen bada, eta $\mathbf{F}$ funtzio bektoriala jarraia bada gainazal horretan, limite hori existiten da (onar dezagun, frogapenik gabe, gainazal-integralen existentziaren teorema hori).

adierazpenak σ gainazala, norantza positiboan, zeharkatzen duen denbora-unitateko likido-kantitate osoa adierazten du. Horrexegatik, (2) gainazal-integralari $\mathbf{F}$ eremu bektorialaren σ gainazalean zeharreko fluxu ere deitzen zaio.



336. IRUDIA

Gainazal-integralaren definiziotik ondorioztatzen da σ gainazala $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_k$ zatitan banatzen badugu

$$\iint_{\sigma} \mathbf{F} \mathbf{n} d\sigma = \iint_{\sigma_1} \mathbf{F} \mathbf{n} d\sigma + \iint_{\sigma_2} \mathbf{F} \mathbf{n} d\sigma + \dots + \iint_{\sigma_k} \mathbf{F} \mathbf{n} d\sigma$$

erdiesten dugula.

$\mathbf{n}$ unitate bektorea, koordenatu-ardatzen gaineko proiektzioen bidez,

$$\mathbf{n} = \cos(\mathbf{n}, x) \mathbf{i} + \cos(\mathbf{n}, y) \mathbf{j} + \cos(\mathbf{n}, z) \mathbf{k}$$

adierazten da.

(2) integralean $\mathbf{F}$ eta $\mathbf{n}$ bektoreen adierazpenak beraien proiektzioen funtzioan ordezkatzuz,

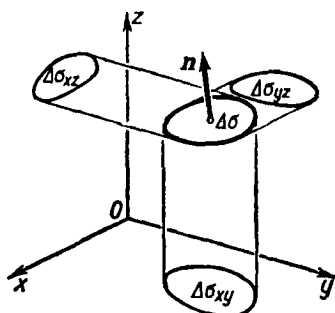
$$\iint_{\sigma} \mathbf{F} \mathbf{n} d\sigma = \iint_{\sigma} [X \cos(\mathbf{n}, x) + Y \cos(\mathbf{n}, y) + Z \cos(\mathbf{n}, z)] d\sigma \quad (2')$$

lortzen dugu.

$\Delta\sigma \cos(\mathbf{n}, z)$ biderkadura $\Delta\sigma$ gainazal elementalaren Oxy planoaren gaineko proiektzioa da (337. irudia); antzeko baieztapenek balio dute beste biderkaduretarako:

$$\Delta\sigma \cos(\mathbf{n}, x) = \Delta\sigma_{yz}, \quad \Delta\sigma \cos(\mathbf{n}, y) = \Delta\sigma_{xz}, \quad \Delta\sigma \cos(\mathbf{n}, z) = \Delta\sigma_{xy}, \quad (4)$$

non $\Delta\sigma_{yz}, \Delta\sigma_{xz}, \Delta\sigma_{xy}$ $\Delta\sigma$ gainazal elementalaren dagozkien koordinatu-planoen gaineko projekzioak bait dira.



337. IRUDIA

Azaldutakoaren arabera, (2') integrala

$$\begin{aligned} \iint_{\sigma} \mathbf{F} \mathbf{n} \, d\sigma &= \iint_{\sigma} [X \cos(\mathbf{n}, x) + Y \cos(\mathbf{n}, y) + Z \cos(\mathbf{n}, z)] \, d\sigma = \\ &= \iint_{\sigma} X \, dy \, dz + Y \, dz \, dx + Z \, dx \, dy \end{aligned} \quad (2'')$$

itxuraz ere idatz dezakegu.

§ 6. Gainazal-integralaren kalkulua

Gainazal abaildu baten gaineko integralaren kalkulua planoko eremu baten gaineko integral bikoitzaren kalkulura labur daiteke.

Aipa dezagun, esate baterako,

$$\iint_{\sigma} Z \cos(\mathbf{n}, z) \, d\sigma$$

integralaren kalkulu-prozedura bat.

Demagun Oz ardatzarekiko paralelo orok σ gainazala gehienez puntu batean ebakitzen duela. Hortaz gainazalaren ekuazioa,

$$z = f(x, y)$$

itxuraz idatz dezakegu.

σ gainazalaren Oxy planoaren gaineko proiektzioa D bada (gainazal-integralaren definizioaren arabera),

$$\iint_{\sigma} Z(x, y, z) \cos(n, z) d\sigma = \lim_{\text{diam } \Delta\sigma_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n Z(x_i, y_i, z_i) \cos(n_i, z) \Delta\sigma_i$$

erdiesten dugu.

§ 5, (4) formuletakoa azkena kontutan hartuz,

$$\begin{aligned} \iint_{\sigma} Z \cos(n, z) d\sigma &= \lim_{\text{diam } (\Delta\sigma_{xy})_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n Z(x_i, y_i, f(x_i, y_i)) (\Delta\sigma_{xy})_i = \\ &= \pm \lim_{\text{diam } (\Delta\sigma_{xy})_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n Z(x_i, y_i, f(x_i, y_i)) |\Delta\sigma_{xy}|_i \end{aligned}$$

lortzen dugu, azkeneko adierazpena,

$$Z(x, y, f(x, y))$$

funtzioaren D eremuko integral bikoitzaren batura integral bat da. Ondorioz,

$$\iint_{\sigma} Z \cos(n, z) d\sigma = \pm \iint_D Z(x, y, f(x, y)) dx dy.$$

"Plus" zeinua integral bikoitzaren aurretik jartzen da, $\cos(n, z) \geq 0$ denean eta "minus" zeinua $\cos(n, z) \leq 0$ denean.

σ gainazalak atal honen hasieran aipatutako baldintza betetzen ez badu, baldintza hori betetzen duten zatitan banatu beharko da eta zati bakoitzeko integrala, bereizturik, kalkulatu.

Antzeko eran kalkulatuko ditugu,

$$\iint_{\sigma} X \cos(n, x) d\sigma \quad \iint_{\sigma} Y \cos(n, y) d\sigma$$

integralak.

Lehenago frogatutakoak gainazal-integral bat § 5, (2'') itxuraz adieraztea justifikatzen du. (2'') berdintzako bigarren atala σ gainazalaren dagozkion proiektzioen gaineko integral bikoitzen baturatzat har daiteke. Integral bikoitz horien zeinuak (hots, $dy dz$, $dx dz$, $dx dy$ biderkaduren zeinuak) gorago aipatutako erregelaren arabera hartzen dira.

1. Adibidea. Izan bedi σ gainazal itxia, non Oz ardatzarekiko paralelo orok gehienez bi puntutan ebakitzen bait du.

Azter dezagun

$$\iint_{\sigma} z \cos(n, z) d\sigma$$

integrala.

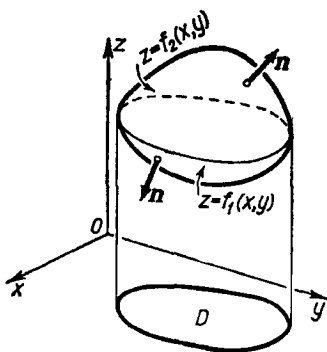
Har dezagun kanpo-normala normalaren norantza positibotzat. Gainazala bi zatitan bana dezakegu, goikoa eta behekoa,

$$z = f_2(x, y) \quad \text{eta} \quad z = f_1(x, y)$$

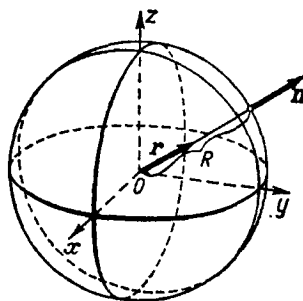
ekuaziodunak.

Izan bedi D σ -ren Oxy planoaren gaineko proiektzioa (338. irudia); orduan,

$$\iint_{\sigma} z \cos(n, z) d\sigma = \iint_D f_2(x, y) dx dy - \iint_D f_1(x, y) dx dy.$$



338. IRUDIA



339. IRUDIA

Bigarren integralak "minus" zeinua dauka gainazal-integralean, $dx dy$ biderkaduraren zeinua $z = f_1(x, y)$ gainazalean negatibotzat hartu behar bait da, gainazal horretarako $\cos(n, z)$ negatibo delako.

Baina, azkeneko formularen bigarren ataleko integralen arteko kendurak σ gainazalak mugatutako bolumena adierazten du. Orduan, σ gainazal itxiak mugatutako gorputzaren bolumena,

$$V = \iint_{\sigma} z \cos(n, z) d\sigma$$

gainazal-integralaren berdina da.

2. Adibidea. e karga elektriko positiboak, koordenatu jatorrian kokaturik, eremu bektorial bat sortzen du, zeinak Coulomb-en legearen arabera, espazioko puntu bakoitzean $\mathbf{F}$,

$$\mathbf{F} = k \frac{e}{r^2} \mathbf{r},$$

bektorea definitzen bait du, non r aztertutako puntu eta jatorriaren arteko distantzia; $\mathbf{r}$ puntuko erradio bektorean zehar zuzendutako unitate bektorea; k faktore konstantea bait dira.

Determinatu eremu bektorialaren fluxua R erradioa eta zentrua koordenatu-jatorrian dauzkan esfera batean zehar.

Ebazpena. $r = R = \text{ktea.}$ direla kontutan hartuz,

$$\iint_{\sigma} k \frac{e}{r^2} \mathbf{r} \mathbf{n} d\sigma = \frac{ke}{R^2} \iint_{\sigma} \mathbf{r} \mathbf{n} d\sigma$$

daukagu. Baina azkeneko integrala σ gainazalaren azalera da. Izan ere, integralaren definizioaren arabera ($\mathbf{r} \mathbf{n} = 1$ dela kontutan hartuz),

$$\iint_{\sigma} \mathbf{r} \mathbf{n} d\sigma = \lim_{\Delta\sigma_k \rightarrow 0} \sum \mathbf{r}_k \mathbf{n}_k \Delta\sigma_k = \lim_{\Delta\sigma_k \rightarrow 0} \sum \Delta\sigma_k = \sigma$$

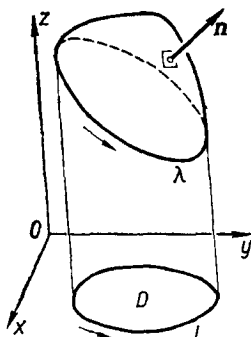
lortzen dugu. Hortaz, bilatutako fluxua,

$$\frac{ke}{R^2} \sigma = \frac{ke}{R^2} \cdot 4\pi R^2 = 4\pi ke$$

da.

§ 7. Stokes-en formula

Demagun σ gainazala daukagula, zeina Oz ardatzarekiko paralelo orok gehienez puntu batean ebakitzen duen. Izenda dezagun λ σ -ren muga. $\mathbf{n}$ normalaren norantza positiboa aukeratuko dugu Oz ardatzaren norantza positiboarekin angelu zorrotza osatzeko moduan (340. irudia).



340. IRUDIA

Izan bedi $z = f(x, y)$ gainazalaren ekuazioa. Normalaren kosinu zuzentzaileak

$$\left. \begin{aligned} \cos(n, x) &= \frac{-\frac{\partial f}{\partial x}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}}; \\ \cos(n, y) &= \frac{-\frac{\partial f}{\partial y}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}}; \\ \cos(n, z) &= \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}} \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

formulen bitartez adierazten dira (ikus IX. gaiko § 6).

Jo dezagun σ -ko puntu guztiak V eremu batean daudela. Eman dezagun V eremuan $X(x, y, z)$ funtzio jarraia, bere lehenengo ordenako deribatu partzialak ere jarraiak direlarik. Kontsidera dezagun λ kurban zeharreko lerro-integrala:

$$\int_{\lambda} X(x, y, z) dx$$

λ kurbaren gain $z = f(x, y)$ berdintza betetzen da, non x eta y L , λ -ren Oxy planoaren gaineko proiektzioa, lerroko puntuen koordinatuak bait dira (340. irudia). Beraz,

$$\int_{\lambda} X(x, y, z) dx = \int_L X(x, y, f(x, y)) dx \quad (2)$$

berdintza idaz dezakegu. Azken integrala L -an zeharreko lerro-integrala da. Transforma dezagun Green-en formularen bidez,

$$X(x, y, f(x, y)) = \bar{X}(x, y), \quad 0 = \bar{Y}(x, y)$$

eginez.

Green-en formulari $\bar{X}$ eta $\bar{Y}$ bere adierazpenez ordezkatzuz,

$$-\iint_D \frac{\partial X(x, y, f(x, y))}{\partial y} dx dy = \int_L X(x, y, f(x, y)) dx \quad (3)$$

lortzen dugu, non D eremua L kurbak mugatua da.

$$X(x, y, f(x, y))$$

funtzio konposatua, zeinean y -k zuzenean zein $z = f(x, y)$ funtzioaren bidez parte hartzen bait du, deribatuz gero,

$$\frac{\partial X(x, y, f(x, y))}{\partial y} = \frac{\partial X(x, y, z)}{\partial y} + \frac{\partial X(x, y, z)}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial y} \quad (4)$$

aurkituko dugu. (4) adierazpena (3)ko lehenengo atalean sartuz,

$$-\iint_D \left[\frac{\partial X(x, y, z)}{\partial y} + \frac{\partial X(x, y, z)}{\partial z} \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \right] dx dy = \int_L X(x, y, f(x, y)) dx$$

erdiesten dugu. (2) berdintza kontutan hartuz, azken ekuazioa

$$\int_{\lambda} X(x, y, z) dx = - \iint_D \frac{\partial X}{\partial y} dx dy - \iint_D \frac{\partial X}{\partial z} \frac{\partial f}{\partial y} dx dy \quad (5)$$

eran idatz daiteke. Azkeneko bi integralak gainazal-integral bihurtzen dira. Izan ere, § 5 (2") formulatik ondorioztatzen da $A(x, y, z)$ funtzio bat badaukagu,

$$\iint_{\sigma} A(x, y, z) \cos(n, z) d\sigma = \iint_D A dx dy$$

berdintza betetzen dela. Berdintza horren arabera, (5) berdintzaren bigarren ataleko integralak

$$\left. \begin{aligned} \iint_D \frac{\partial X}{\partial y} dx dy &= \iint_{\sigma} \frac{\partial X}{\partial y} \cos(n, z) d\sigma, \\ \iint_D \frac{\partial X}{\partial z} \frac{\partial f}{\partial y} dx dy &= \iint_{\sigma} \frac{\partial X}{\partial z} \frac{\partial f}{\partial y} \cos(n, z) d\sigma \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

eran transformitzen dira. Transforma dezagun azken integrala atal honetako (1) formulak aplikatuz: berdintza horietako bigarrena hirugarrenaz, atalez atal, zatituz gero,

$$\frac{\cos(n, y)}{\cos(n, z)} = - \frac{\partial f}{\partial y}$$

edo

$$\frac{\partial f}{\partial y} \cos(n, z) = - \cos(n, y)$$

aurkitzen dugu. Ondorioz,

$$\iint_D \frac{\partial X}{\partial z} \frac{\partial f}{\partial y} dx dy = - \iint_D \frac{\partial X}{\partial z} \cos(n, y) d\sigma. \quad (7)$$

(6) eta (7) adierazpenak (5) ekuazioan sartuz,

$$\int_{\lambda} X(x, y, z) dx = - \iint_D \frac{\partial X}{\partial y} \cos(n, z) d\sigma + \iint_D \frac{\partial X}{\partial z} \cos(n, y) d\sigma \quad (8)$$

ateratzen dugu.

λ mugaldearen ibilbidearen norantza n normal positiboaren norantzarekin bat aukeratu behar da. Hau da, normalean zutik dagoen behatzaile batek λ -an zeharreko ibilbidea erloju-orratzen norantzaren kontra egiten dela ikusiko du.

(8) formulak gainazal orotarako balio du, baldin eta $z = f(x, y)$ itxurako ekuazioak dituzten zatitan bana badaiteke.

Analogoki,

$$\int_{\lambda} Y(x, y, z) dy = \iint_{\sigma} \left[-\frac{\partial Y}{\partial z} \cos(n, x) + \frac{\partial Y}{\partial x} \cos(n, z) \right] d\sigma, \quad (8')$$

$$\int_{\lambda} Z(x, y, z) dz = \iint_{\sigma} \left[-\frac{\partial Z}{\partial x} \cos(n, y) + \frac{\partial Z}{\partial y} \cos(n, x) \right] d\sigma \quad (8'')$$

formulak idatz ditzakegu.

(8), (8') eta (8'') berdintzak, atalez atal, batuz,

$$\int_{\lambda} X dx + Y dy + Z dz = \iint_{\sigma} \left[\left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} \right) \cos(n, z) + \left(\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z} \right) \cos(n, x) + \left(\frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x} \right) \cos(n, y) \right] d\sigma \quad (9)$$

formula erdiesten dugu. Hori da, hain zuzen, *Stokes-en formula* [G.G. Stokes (1819-1903) fisikari eta matematikari irlandarra].

Formula horrek gainazal-integrala σ -n eta σ -ren λ mugan zeharreko lerro-integralaren arteko menpekotasuna ezartzen du, λ gorago aipatutako erregelaren arabera korritzen delarik.

$$B_x = \frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z}; \quad B_y = \frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x}; \quad B_z = \frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}$$

projekzioek determinatutako B bektorea,

$$\mathbf{F} = X\mathbf{i} + Y\mathbf{j} + Z\mathbf{k}$$

funtzio bektorialaren *errotazional* deitzen da eta $\text{rot } \mathbf{F}$ idazten da.

Hortaz, era bektorialean (9) formula,

$$\int_{\lambda} \mathbf{F} ds = \iint_{\sigma} \mathbf{n} \operatorname{rot} \mathbf{F} d\sigma \quad (9')$$

idazten da, eta Stokes-en teorema honela enuntzia dezakegu:

Bektore baten zirkulazioa gainazal bat mugatzen duen mugalde itxi batean zehar, bere errotazionalaren fluxuaren berdina da gainazal horretan zehar.

Oharra. σ gainazala Oxy planoarekiko paralelo den plano baten zatia bada, $\Delta z = 0$ dugu eta Green-en formula Stokes-enaren kasu partikular bezala lortzen dugu.

(9) formulatik aterako da,

$$\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x} = 0 \quad (10)$$

badira, espazioko λ kurba itxi orotan zeharreko lerro-integrala nulu dela:

$$\int_{\lambda} X dx + Y dy + Z dz = 0. \quad (11)$$

Orduan, esan dezakegu hemen lerro-integrala ez dagoela integrazio-kurbaren itxuraren menpe.

Planoko kurba baten kasuan bezala frogatzen da, (11) berdintza betetzeko, (10) baldintzak nahikoak ezezik beharrezkoak ere badirela.

Baldintza horiek betetakoan, integrakizuna $U(x,y,z)$ funtzio baten diferentzial totala da:

$$X dx + Y dy + Z dz = dU(x, y, z)$$

eta beraz,

$$\int_{(M)}^{(N)} X dx + Y dy + Z dz = \int_{(M)}^{(N)} dU = U(N) - U(M).$$

Hori frogatzen da bi aldagaiko funtzio bati dagokion formula bezala (ikus § 4).

1. Adibidea. Idatz ditzagun puntu material baten dinamikaren oinarritzko ekuazioak:

$$m \frac{dv_x}{dt} = X; \quad m \frac{dv_y}{dt} = Y; \quad m \frac{dv_z}{dt} = Z.$$

Hemen, m puntuaren masa da; X, Y, Z puntuan eragindako indarraren koordenatu-ardatzen gaineko proiektzioak dira;

$$v_x = \frac{dx}{dt}, \quad v_y = \frac{dy}{dt}, \quad v_z = \frac{dz}{dt}$$

v abiaduraren koordenatu-ardatzen gaineko proiektzioak dira. Biderka ditzagun aurreko ekuazioen bi atalak

$$v_x dt = dx, \quad v_y dt = dy, \quad v_z dt = dz$$

adierazpenez.

Berdintzak, atalez atal, batzean,

$$m(v_x dv_x + v_y dv_y + v_z dv_z) = X dx + Y dy + Z dz;$$

$$m \frac{1}{2} d(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2) = X dx + Y dy + Z dz$$

lortzen dugu.

$$v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 = v^2 \text{ denez gero,}$$

$$d\left(\frac{1}{2}mv^2\right) = X dx + Y dy + Z dz$$

idatz dezakegu.

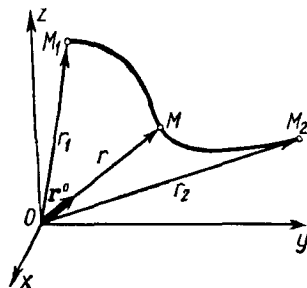
Kalkula dezagun integrala M_1 eta M_2 puntuak lortzen dituen ibilbidean zehar:

$$\frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 = \int_{(M_1)}^{(M_2)} X dx + Y dy + Z dz,$$

non v_1 eta v_2 M_1 eta M_2 puntuen abiadurak bait dira.

Azken berdintzak indar bizien teorema adierazten du: puntu batetik bestera pasatzean energia zinetikoaren gehikuntza m masan eragiten duen indarraren lanaren berdina da.

2. Adibidea. Determinatu m masa baten zentru mugiezineranzko erakarpen-indar newtoniar baten lana masa unitario baten $M_1(a_1, b_1, c_1)$ posiziotik $M_2(a_2, b_2, c_2)$ -rako desplazamenduan.



341. IRUDIA

Ebazpena. Demagun koordenatu-jatorria erakarpen-zentru mugiezinean dagoela. Izan bitez $\mathbf{r}$ masa unitarioaren hautazko posizio bati dagokion M puntuaren erradio bektorea eta $\mathbf{r}^0$ $\mathbf{r}$ bektorean zehar norabidatutako unitate bektorea. Orduan,

$$\mathbf{F} = -\frac{km}{r^2} \mathbf{r}^0,$$

non k grabitazio unibertsaleko konstantea bait da. $\mathbf{F}$ indarraren koordenatu-ardatzen gaineko proiektzioak

$$X = -km \frac{1}{r^2} \frac{x}{r}; \quad Y = -km \frac{1}{r^2} \frac{y}{r}; \quad Z = -km \frac{1}{r^2} \frac{z}{r}$$

dira. Beraz, $\mathbf{F}$ indarraren lana, $M_1 M_2$ ibilbidean,

$$A = -km \int_{(M_1)}^{(M_2)} \frac{x dx + y dy + z dz}{r^3} = -km \int_{(M_1)}^{(M_2)} \frac{r dr}{r^3} = km \int_{(M_1)}^{(M_2)} d\left(\frac{1}{r}\right)$$

izango da ($r^2 = x^2 + y^2 + z^2$; $r dr = x dx + y dy + z dz$ dira eta). M_1 eta M_2 puntuen erradio bektoreen luzerak r_1 eta r_2 izendatuz

$$A = km \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right)$$

ateratzen dugu.

Honelatan, kasu honetan ere lerro-integrala ez dago integrazio-kurbaren menpe,

baizik eta hasierako eta amaierako puntuen posizioen menpe. $u = \frac{km}{r}$ funtzioari m masak sortutako erakarpen-eremuaren *potenzial* deritzo. Emandako kasuan,

$$X = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad Y = \frac{\partial u}{\partial y}, \quad Z = \frac{\partial u}{\partial z},$$

$$A = u(M_2) - u(M_1)$$

ditugu, hau da, masa unitarioa desplazatzeko lana hasiera eta amaierako puntuetako potentzialen balioen arteko diferentzia da.

§ 8. Ostrogradski-ren formula

Izan bedi σ gainazal itxiak espazioan mugatutako hirudimentsioko eremu erregularra V ; V -ren Oxy planoaren gaineko projekzioa bidimentsioko D eremu erregularra da. Demagun σ gainazala hiru zatitan $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$, bana daitekeela, lehenengo bien ekuazioek $z = f_1(x, y)$ eta $z = f_2(x, y)$ itxurak dituztelarik, non $f_1(x, y)$ eta $f_2(x, y)$ D eremuan funtzio jarraiak bait dira, eta hirugarren zatia, σ_3 , sortzailea Oz ardatzarekiko paralelo duen gainazal zilindrikoa delarik.

Kontsidera dezagun

$$I = \iiint_V \frac{\partial Z(x, y, z)}{\partial z} dx dy dz$$

integrala.

Lehendabiziz, integra dezagun z -rekiko:

$$I = \iint_D \left(\int_{f_1(x, y)}^{f_2(x, y)} \frac{\partial Z}{\partial z} dz \right) dx dy =$$

$$= \iint_D Z(x, y, f_2(x, y)) dx dy - \iint_D Z(x, y, f_1(x, y)) dx dy \quad (1)$$

Aukera dezagun gainazalarekiko normalean norantza, σ gainazalarekiko kanpo-normalarenarekin bat datorren norantza, alegia. Orduan, $\cos(n, z)$ σ_2 gainazalean positibo, σ_1 -ean negatibo eta σ_3 gainazalean nulu da.

(1) berdintzaren bigarren ataleko integral bikoitzak dagozkien gainazal-integralen berdinak dira:

$$\begin{aligned} \iint_D Z(x, y, f_2(x, y)) dx dy &= \iint_{\sigma_2} Z(x, y, z) \cos(n, z) d\sigma, \\ \iint_D Z(x, y, f_1(x, y)) dx dy &= \iint_{\sigma_1} Z(x, y, z) (-\cos(n, z)) d\sigma. \end{aligned} \quad (2')$$

Azkeneko integralean $(-\cos(n, z))$ idatzi dugu, σ_1 eta σ_2 gainazalen elementuak eta D eremuaren azalera-elementua $\Delta s = \Delta\sigma_1[-\cos(n, z)]$ erlazioz loturik bait daude, (n, z) angelua kamutsa da eta.

Honela,

$$\iint_D Z(x, y, f_1(x, y)) dx dy = - \iint_{\sigma_1} Z(x, y, z) \cos(n, z) d\sigma. \quad (2'')$$

(2') eta (2'') (1) berdintzan ordezkatzuz,

$$\iiint_V \frac{\partial Z(x, y, z)}{\partial z} dx dy dz = \iint_{\sigma_2} Z(x, y, z) \cos(n, z) d\sigma + \iint_{\sigma_1} Z(x, y, z) \cos(n, z) d\sigma$$

daukagu.

Hurrengo kalkuluak errazteko, idatz dezagun azkeneko ekuazioa

($\iint_{\sigma_3} Z(x, y, z) \cos nz d\sigma = 0$ batuz, σ_3 gainazalean $\cos nz = 0$ berdintza betetzen da eta)

$$\iiint_V \frac{\partial Z(x, y, z)}{\partial z} dx dy dz = \iint_{\sigma_2} Z \cos(n, z) d\sigma + \iint_{\sigma_1} Z \cos(n, z) d\sigma + \iint_{\sigma_3} Z \cos(n, z) d\sigma$$

eran.

Baina azken berdintzaren bigarren ataleko integralen arteko batura σ gainazal itxi osora zabaldutako integralaren berdina da, hortaz:

$$\iiint_V \frac{\partial Z}{\partial z} dx dy dz = \iint_{\sigma} Z(x, y, z) \cos(n, z) d\sigma.$$

Antzeko moduan,

$$\iiint_V \frac{\partial Y}{\partial y} dx dy dz = \iint_{\sigma} Y(x, y, z) \cos(n, y) d\sigma,$$

$$\iiint_V \frac{\partial X}{\partial x} dx dy dz = \iint_{\sigma} X(x, y, z) \cos(n, x) d\sigma$$

erlazioak lortuko ditugu.

Azkeneko hiru ekuazioak gaiz gai batuz gero *Ostrogradski-ren formula* erdiesten dugu⁵⁾:

$$\iiint_V \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} \right) dx dy dz = \iint_{\sigma} (X \cos(n, x) + Y \cos(n, y) + Z \cos(n, z)) d\sigma. \quad (2)$$

$\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z}$ adierazpenari $\mathbf{F} = X\mathbf{i} + Y\mathbf{j} + Z\mathbf{k}$ bektorearen *dibergentzia* deitzen zaio

(hau da, funtzio bektorialaren dibertentzia) eta $\operatorname{div} \mathbf{F}$ izendatzen da:

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z}.$$

Esan dezagun, formula horrek atal honen hasieran ezarritako baldintzak betetzen dituzten eremu partzialetan banagarri den eremu orotarako balio duela.

Eman dezagun lortutako formularen adierazpide hidromekanikoa.

Demagun $\mathbf{F} = X\mathbf{i} + Y\mathbf{j} + Z\mathbf{k}$ V eremuan zehar jariatzen den likido baten abiadura-bektorea dela. Kasu honetan, (2) formulako gainazal-integrala $\mathbf{F}$ bektorearen $\mathbf{n}$ kanpo-normalaren gaineko proiektzioaren integrala da; integral horrek V -tik σ gainazalean zehar, denbora unitateko, ateratzen den (edo integrala negatiboa bada, V eremuan sartzen den) likido-kantitatea ematen du. Kantitate hori $\mathbf{F}$ -ren dibertentziaren integral hirukoitzaren bitartez adierazten da.

Baldin $\operatorname{div} \mathbf{F} \equiv 0$ bada, gainazal itxi osora zabaldutako integral bikoitza nulua da, hau da, σ gainazal itxi orotan zehar atera (edo sartzen) den likido-kantitatea zero da (ez dago iturririk). Zehaztasun handiagoz mintzatuz, eremuaren barnealdean sartzen den likido-kantitatea eta bertatik ateratzen dena berdinak dira.

Era bektorialean, Ostrogradski-ren formula,

5) Formula hori, Ostrogradski-Gauss-ena ere deiturikoa, M.V. Ostrogradski (1801-1861) matematikari ukrainiar ospetsuak lortua da eta berak argitaratua 1828an "Bero-teoriari buruzko oharra" artikuluan.

$$\iiint_V \operatorname{div} \mathbf{F} \, dv = \iint_{\sigma} \mathbf{F} \mathbf{n} \, ds \quad (1')$$

idazten da eta honela adierazten da: $\mathbf{F}$ eremu bektorial baten dibergentziaren integrala, bolumen batera zabaldua, bolumen hori mugatzen duen gainazalean zeharreko bektorearen fluxuaren berdina da.

§ 9. Hamilton-en eragilea eta zenbait aplikazio

Izan bedi $u = u(x, y, z)$ funtzio bat. Definituta dagoen eta deribagarria den eremuko puntu bakoitzean,

$$\operatorname{grad} u = \mathbf{i} \frac{\partial u}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial u}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial u}{\partial z} \quad (1)$$

gradientearen determinatzen da. $u(x, y, z)$ funtzioaren gradientearen batzutan,

$$\nabla u = \mathbf{i} \frac{\partial u}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial u}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial u}{\partial z} \quad (2)$$

erabiltzen da; ∇ ikurra, delta adieraztu baten antzekoa, "nabla" deitzen da.

1) Eroso da (2) ekuazioa,

$$\nabla u = \left(\mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z} \right) u \quad (2')$$

era sinbolikoan idaztea eta

$$\nabla = \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z} \quad (3)$$

ikurra bektore sinbolikotzat hartzea. Bektore sinboliko horri *hamiltondar* edo *Hamilton-en eragile* edo nabla (∇ eragile) bakarrik deritzo. (2) eta (2') formuletatik, ∇ bektore sinbolikoa u funtzio eskalarrez "biderkatzean" funtzio horren gradientearen lortzen dela ondorioztatzen da:

$$\nabla u = \operatorname{grad} u. \quad (4)$$

2) Era dezakegu ∇ bektore sinboliko eta $\mathbf{F} = iX + jY + kZ$ bektorearen arteko biderkadura eskalarra:

$$\begin{aligned}\nabla \mathbf{F} &= \left(\mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z} \right) (iX + jY + kZ) = \\ &= \frac{\partial}{\partial x} X + \frac{\partial}{\partial y} Y + \frac{\partial}{\partial z} Z = \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} = \text{div } \mathbf{F}\end{aligned}$$

(ikus § 8). Beraz,

$$\nabla \mathbf{F} = \text{div } \mathbf{F}. \quad (5)$$

3) Osa dezagun ∇ bektore sinboliko eta

$$\mathbf{F} = iX + jY + kZ$$

bektorearen arteko biderkadura bektoriala:

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{F} &= \left(\mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z} \right) \times (iX + jY + kZ) = \\ &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ X & Y & Z \end{vmatrix} = \mathbf{i} \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ Y & Z \end{vmatrix} - \mathbf{j} \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial z} \\ X & Z \end{vmatrix} + \mathbf{k} \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ X & Y \end{vmatrix} = \\ &= \mathbf{i} \left(\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z} \right) - \mathbf{j} \left(\frac{\partial Z}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial z} \right) + \mathbf{k} \left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} \right) = \\ &= \mathbf{i} \left(\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z} \right) + \mathbf{j} \left(\frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x} \right) + \mathbf{k} \left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} \right) = \text{rot } \mathbf{F}\end{aligned}$$

(ikus § 7). Honela,

$$\nabla \times \mathbf{F} = \text{rot } \mathbf{F}. \quad (6)$$

Azaldutakotik ateratzen da, ∇ bektore sinbolikoaren erabilerak eragiketa bektorialak era oso laburrean adierazten uzten digula. Ikus dezagun zenbait formula gehiago.

4) $\mathbf{F}(x, y, z) = iX + jY + kZ$ eremu bektorialari *eremu bektorial potentzial* deritzo, $\mathbf{F}$ bektorea $u(x, y, z)$ funtzio eskalar baten gradientea bada: $\mathbf{F} = \text{grad } u$, hau da,

$$\mathbf{F} = i \frac{\partial u}{\partial x} + j \frac{\partial u}{\partial y} + k \frac{\partial u}{\partial z}.$$

Kasu honetan $\mathbf{F}$ bektorearen projekzioak,

$$X = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad Y = \frac{\partial u}{\partial y}, \quad Z = \frac{\partial u}{\partial z}$$

dira. Berdintza horietatik,

$$\frac{\partial X}{\partial y} = \frac{\partial Y}{\partial x}, \quad \frac{\partial Y}{\partial z} = \frac{\partial Z}{\partial y}, \quad \frac{\partial X}{\partial z} = \frac{\partial Z}{\partial x}$$

edo

$$\frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial Y}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x} = 0$$

ateratzen dira (ikus VIII. gaiko § 12). Hortaz, kontsideratutako $\mathbf{F}$ bektorerako $\text{rot } \mathbf{F} = 0$ daukagu. Honela,

$$\text{rot } (\text{grad } u) = 0 \quad (7)$$

lortzen dugu. ∇ eragilea aplikatuz, (4) eta (6) formulen arabera, (7) berdintza,

$$(\nabla \times \nabla u) = 0 \quad (7')$$

eran idatz dezakegu. "Biderkadura bektorial bat eskalare batez biderkatzeko nahikoa da eskalare hori faktoreetako batez biderkatzea" propietatea erabiliz idatz dezagun

$$(\nabla \times \nabla)u = 0. \quad (7'')$$

Hor, ∇ eragileak berriz bektore arrunt baten propietateak dauzka: bektore bat eta bere buruaren arteko biderkadura bektoriala nulua da.

$\text{rot } \mathbf{F} = 0$ betetzen duen $\mathbf{F}(x,y,z)$ eremu bektorialari *irrotazional* deritzo. (7) berdintzatik ondorioztatzen da eremu potentzial oro irrotazionala dela.

Alderantzizko ondorioa ere baliozkoa da: $\mathbf{F}$ eremu bektoriala irrotazional bada potentzial ere izango da. Baieztapen hori zuzena da, § 7ren amaieran emandako arrazoiemenduetatik ondoriozta daitekeen legez.

5) $\mathbf{F}(x,y,z)$ eremu bektoriala, zeinerako $\text{div } \mathbf{F} = 0$ den, hau da, iturririk ez daukan eremu bektoriala (ikus § 8), *solenoidal* deitzen da.

Froga dezagun

$$\text{div } (\text{rot } \mathbf{F}) = 0 \quad (8)$$

dela, hau da, errotazionalen eremuak ez duela iturririk.

Izan ere, $\mathbf{F} = \mathbf{i}X + \mathbf{j}Y + \mathbf{k}Z$ bada,

$$\text{rot } \mathbf{F} = \mathbf{i} \left(\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z} \right) + \mathbf{j} \left(\frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x} \right) + \mathbf{k} \left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} \right)$$

izango da eta horregatik,

$$\text{div}(\text{rot } \mathbf{F}) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} \right) = 0.$$

∇ eragilea aplikatuz idatz dezagun (8) berdintza

$$\nabla(\nabla \times \mathbf{F}) = 0 \quad (8')$$

eran. Berdintza horren lehenengo atala $\nabla, \nabla, \mathbf{F}$ hiru bektoreen, horietako bi berdinak izanik, biderkadura bektorial eta eskalar (nahasia) bezala har dezakegu Bistakoa da biderkadura hori nulu dena.

6) Izan bedi $u = u(x,y,z)$ eremu eskalarra. Determina dezagun gradienteen eremua:

$$\text{grad } u = \mathbf{i} \frac{\partial u}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial u}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial u}{\partial z}.$$

Orain bila dezagun:

$$\text{div } (\text{grad } u) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)$$

edo

$$\operatorname{div}(\operatorname{grad} u) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}. \quad (9)$$

Adierazpen horren bigarren atala u funtzioaren *Laplace-ren eragile* deitzen da eta,

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \quad (10)$$

izendatzen da. Hortaz, (9) berdintza,

$$\operatorname{div}(\operatorname{grad} u) = \Delta u \quad (11)$$

eran idatz dezakegu. ∇ eragilearen laguntzaz (11) ekuazioa idatz dezagun:

$$(\nabla \nabla u) = \Delta u. \quad (11')$$

Esan dezagun,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 \quad (12)$$

edo

$$\Delta u = 0 \quad (12')$$

ekuazioa *Laplace-ren ekuazio* deitzen dela. Ekuazio hori betetzen duen funtzioari *funtzio harmoniko* deritzo.

Ariketak

Kalkula itzazu ondorengo lerro-integralak:

1. $\int y^2 dx + 2xy dy$, $x = a \cos t$, $y = a \sin t$ zirkunferentzian zehar. Eraitza: 0.

2. $\int y dx - x dy$, $x = a \cos t$, $y = b \sin t$ elipsean zehar. Em.: $-2\pi ab$.

3. $\int \frac{x}{x^2 + y^2} dx - \frac{y}{x^2 + y^2} dy$, zentrua koordenatu-jatorrian daukan zirkunferentzia batean zehar. Em.: 0.
4. $\int \frac{y dx + x dy}{x^2 + y^2}$, $y = x$ zuzenaren $x = 1$ puntutik $x = 2$ punturako zuzenkian zehar. Em.: $\ln 2$.
5. $\int yz dx + xz dy + xy dz$, $x = a \cos t$, $y = a \sin t$, $z = kt$ helizearen arkuan zehar, t 0 tik 2π -ra aldatzen denean. Em.: 0.
6. $\int x dy - y dx$, $x = a \cos^3 t$, $y = a \sin^3 t$ hipozikloidean zehar. Em.: $\frac{3}{4}\pi a^2$ (hipozikloidearen azalera bikoiztua).
7. $\int x dy - y dx$, $x = \frac{3at}{1+t^3}$, $y = \frac{3at^2}{1+t^3}$ Descartes-en orriaren bigiztan zehar. Em.: $\frac{3}{2}a^2$ (bigizta horrek mugatutako eremuaren azalera bikoiztua).
8. $\int x dy - y dx$, $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ ($0 \leq t \leq 2\pi$) kurban zehar. Em.: $-6\pi a^2$, (Ox ardatzak eta zikloide-arku batek mugatutako eremuaren azalera bikoiztua).

Frogatu:

9. $\text{grad } (c\varphi) = c \text{ grad } \varphi$, c konstantea izanik.
10. $\text{grad } (c_1\varphi + c_2\psi) = c_1 \text{ grad } \varphi + c_2 \text{ grad } \psi$, c_1 eta c_2 konstateak direlarik.
11. $\text{grad } (\varphi\psi) = \varphi \text{ grad } \psi + \psi \text{ grad } \varphi$.
12. Bilatu $\text{grad } r$, $\text{grad } r^2$, $\text{grad } \frac{1}{r}$, $\text{grad } f(r)$, non $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ den. Em.: $\frac{\mathbf{r}}{r}$; $2\mathbf{r}$; $-\frac{\mathbf{r}}{r^3}$; $f'(r)\frac{\mathbf{r}}{r}$.

13. Frogatu $\operatorname{div}(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \operatorname{div} \mathbf{A} + \operatorname{div} \mathbf{B}$ dela.

14. Kalkulatu $\operatorname{div} \mathbf{r}$, non $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ den. Em.: 3.

15. Kalkulatu $\operatorname{div} (\mathbf{A}\varphi)$, non $\mathbf{A}$ funtzio bektoriala eta φ funtzio eskalarra bait dira.
Em.: $\varphi \operatorname{div} \mathbf{A} + (\operatorname{grad} \varphi \cdot \mathbf{A})$.

16. Kalkulatu $\operatorname{div} (r\mathbf{c})$, $\mathbf{c}$ bektore konstantea izanik. Em.: $\frac{(\mathbf{c} \cdot \mathbf{r})}{r}$.

17. Kalkulatu $\operatorname{div} \mathbf{B}(\mathbf{r} \cdot \mathbf{A})$. Em.: $\mathbf{A} \cdot \nabla \mathbf{B}$.

Frogatu:

18. $\operatorname{rot} (c_1 \mathbf{A}_1 + c_2 \mathbf{A}_2) = c_1 \operatorname{rot} \mathbf{A}_1 + c_2 \operatorname{rot} \mathbf{A}_2$, non c_1 eta c_2 konstanteak bait dira.

19. $\operatorname{rot} (\mathbf{A} \times \mathbf{c}) = \operatorname{grad} \mathbf{A} \times \mathbf{c}$, $\mathbf{c}$ bektore konstantea izanik.

20. $\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{A} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{A} - \Delta \mathbf{A}$.

21. $\mathbf{A} \times \operatorname{grad} \varphi = \operatorname{rot} (\varphi \mathbf{A})$.

Gainazal-integralak:

22. Frogatu $\iint \cos (n\sigma) d\sigma = 0$ dela, σ gainazal itxia bada eta n bere normala.

23. Bilatu $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ ekuazioko esfera $z = H$ planoz ebakitzean lortutako esfera-segmentuaren Oz ardatzarekiko inertzia momentua.

Em.: $\frac{2\pi R}{3}(2R^3 - 3R^2 H + H^3)$.

24. Bilatu $x^2 + y^2 = 2cz$ ekuazioko biraketa-paraboloidea $z = c$ planoz ebakitakoan

lortutako gainazal-zatiaren Oz ardatzarekiko inertzia momentua. Em.: $\frac{16}{3}c^5$.

25. Kalkulatu $x^2 + y^2 = \frac{R^2}{H^2} z^2$ konoaren $z = H$ planoz ebakitako gainazal-zatiaren

grabitate-zentruaren koordinatuak. Em.: $0; 0; \frac{2}{3}H$.

26. Kalkulatu $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ esfera $z = H$ planoz ebakitzean lortzen den esfera-

-segmentuaren grabitate-zentruaren koordinatuak. Em.: $\left(0, 0, \frac{R+H}{2}\right)$.

27. Kalkulatu $\iint_{\sigma} [x \cos(nx) + y \cos(ny) + z \cos(nz)] d\sigma$, non σ gainazal itxia den.

Em.: $3V$, V σ -k mugatutako gorputzaren bolumena izanik.

28. Bilatu $\iint_S z dx dy$, non S , $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ esferaren gainazala bait da.

Em.: $\frac{4}{3}\pi R^3$.

29. Bilatu $\iint_S x^2 dy dz + y^2 dz dx + z^2 dx dy$, non S , $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ esferaren

gainazala bait da. Em.: πR^4 .

30. Bilatu $\iint_S \sqrt{x^2 + y^2} ds$ non S , $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2} = 0$, $0 \leq z \leq b$ konoaren aldeko

gainazala den. Em.: $\frac{2\pi a^2 \sqrt{a^2 + b^2}}{3}$..

31. Transformatu Stokes-en formularen bidez $\int_L y dx + z dy + x dz$ integrala.

Em.: $-\iint_S (\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma) ds$.

Kalkulatu lerro-integralak integrazio zuzenez eta Stokes-en formularen laguntzaz:

32. $\int_L (y+z) dx + (z+x) dy + (x+y) dz$, non L , $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $x+y+z=0$
gainazalen ebakidura bait da. Em.: 0.
33. $\int_L x^2 y^3 dx + dy + z dz$, non L , $x^2 + y^2 = R^2$, $z=0$ gainazalen ebakidura bait da.
Em.: $-\frac{\pi R^6}{8}$.

Bihurtu gainazal-integralak dagozkien bolumen-integral, Ostrogradski-ren formula erabiliz:

34. $\iint_S (x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma) ds$. Em.: $\iiint_V 3 dx dy dz$.
35. $\iint_S (x^2 + y^2 + z^2)(dy dz + dx dz + dx dy)$. Em.: $2 \iiint_V (x+y+z) dx dy dz$.
36. $\iint_S xy dx dy + yz dy dz + zx dz dx$. Em.: 0.
37. $\iint_S \frac{\partial u}{\partial x} dy dz + \frac{\partial u}{\partial y} dx dz + \frac{\partial u}{\partial z} dx dy$. Em.: $\iiint_V \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) dx dy dz$.

Ostrogradski-ren formularen laguntzaz, ondoko integralak kalkulatu:

38. $\iint_S (x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma) ds$, S , $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ elipsoidearen gainazala izanik. Em.: $4\pi abc$.
39. $\iint_S (x^3 \cos \alpha + y^3 \cos \beta + z^3 \cos \gamma) ds$. S , $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ esferaren gainazala izanik. Em.: $\frac{12}{5} \pi R^5$.

40. $\iint_S x^2 dy dz + y^2 dz dx + z^2 dx dy$, S , $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0$ ($0 \leq z \leq b$) konoarean

gainazal-zatia izanik. Em.: $\frac{\pi a^2 b^2}{2}$.

41. $\iint_S x dy dz + y dx dz + z dx dy$, S , $x^2 + y^2 = a^2$, $-H \leq z \leq H$ zilindroaren gainazal-zatia izanik. Em.: $3\pi a^2 H$.

42. Frogatu $\iint_D \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) dx dy = \int_C \frac{\partial u}{\partial n} ds$ identitatea, non C , D eremua

mugatzen duen mugaldea eta $\frac{\partial u}{\partial n}$ kanpo-normalaren norabidearekiko deribatua bait dira.

Ebazpena.

$$\iint_D \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} \right) dx dy = \int_C -Y dx + X dy = \int_C [-Y \cos(s, x) + X \sin(s, x)] ds,$$

non (s, x) C mugaldearekiko ukitzaileak eta Ox ardatzak osatutako angelua bait da. Normalak eta Ox ardatzak osatzen duten angelua (n, x) izendatzen badugu

$$\sin(s, x) = \cos(n, x), \quad \cos(s, x) = -\sin(n, x)$$

dugu. Hortaz,

$$\iint_D \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} \right) dx dy = \int_C [X \cos(n, x) + Y \sin(n, x)] ds.$$

$$X = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad Y = \frac{\partial u}{\partial y} \quad \text{eginez gero}$$

$$\iint_D \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) dx dy = \int_C \left(\frac{\partial u}{\partial x} \cos(n, x) + \frac{\partial u}{\partial y} \sin(n, x) \right) ds$$

edo $\iint_D \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) dx dy = \int_C \frac{\partial u}{\partial n} ds$ erdiesten dugu. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ adierazpena

Laplace-ren eragilea da

$$43. \text{Frogatu } \iiint_V (v\Delta u - u\Delta v) dx dy dz = \iint_{\sigma} \left(v \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial v}{\partial n} \right) d\sigma \text{ (Green-en formula delako)}$$

identitatea, non u eta v funtzioek D eremuan 2. ordenara arteko deribatu partzial

jarraiak bait dauzkate. Δu eta Δv ikurrek $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$,

$\Delta v = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}$ adierazten dituzte. Adierazpen horiek Laplace-ren eragileak dira espazioan.

Ebazpena.

$$\iiint_V \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} \right) dx dy dz = \iint_{\sigma} [X \cos(n, x) + Y \cos(n, y) + Z \cos(n, z)] d\sigma$$

formulan,

$$X = vu'_x - uv'_x,$$

$$Y = vu'_y - uv'_y,$$

$$Z = vu'_z - uv'_z$$

dagigu. Orduan,

$$\begin{aligned} \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} &= v(u''_{xx} + u''_{yy} + u''_{zz}) - u(v''_{xx} + v''_{yy} + v''_{zz}) = v\Delta u - u\Delta v; \\ &X \cos(n, x) + Y \cos(n, y) + Z \cos(n, z) = \\ &= v(u'_x \cos nx + u'_y \cos ny + u'_z \cos nz) - u(v'_x \cos nx + v'_y \cos ny + v'_z \cos nz) = \\ &= v \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial v}{\partial n} \end{aligned}$$

dugu. Hortaz,

$$\iiint_V (v\Delta u - u\Delta v) dx dy dz = \iint_{\sigma} \left(v \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial v}{\partial n} \right) d\sigma.$$

44. Frogatu

$$\iiint_V \Delta u \, dx \, dy \, dz = \iint_{\sigma} \frac{\partial u}{\partial n} \, d\sigma$$

identitatea, non

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

(Laplace-ren eragilea) den .

Ebazpena. Aurreko ariketan lorturiko Green-en formula $v=1$ egin dezagun. Kasu honetan, $\Delta v = 0$ eta identitatea frogatua da.

45. $u(x,y,z)$ funtzio harmonikoa bada eremu batean, hau da, eremu horretako edozein puntutan

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$

Laplace-ren ekuazioa betetzen duen funtzioa, σ gainazal itxi orotan

$$\iint_{\sigma} \frac{\partial u}{\partial n} \, d\sigma = 0$$

izango dugu.

Ebazpena. 44. ariketako formulatik ondorioztatzen da.

46. Izan bedi $u(x,y,z)$ funtzio harmonikoa V eremu batean eta demagun eremu horretan R erradioa eta zentrua $M(x_1, y_1, z_1)$ puntuan dituen $\bar{\sigma}$ esfera dagoela. Frogatu

$$u(x_1, y_1, z_1) = \frac{1}{4\pi R^2} \iint_{\bar{\sigma}} u \, d\sigma$$

dela.

Ebazpena. Kontsidera dezagun Ω eremua, R eta ρ ($\rho < R$) erradioak eta zentruak $M(x_1, y_1, z_1)$ puntuan dituzten $\underline{\sigma}$ eta $\bar{\sigma}$ esferak mugatua. Aplikatu diezaiogun eremu horri 43. ariketan erdietsitako Green-en formula, u -tzat aipatu funtzioa eta v -tzat,

$$v = \frac{1}{r} = \frac{1}{\sqrt{(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2 + (z-z_1)^2}}$$

funtzioa hartuz.

Deribazioz eta dagokion ordezkapenez,

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = 0$$

dela egiaztatzen dugu. Hortaz,

$$\iint_{\underline{\sigma} + \bar{\sigma}} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial \left(\frac{1}{r} \right)}{\partial n} \right) d\sigma = 0$$

edo

$$\iint_{\underline{\sigma}} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial \left(\frac{1}{r} \right)}{\partial n} \right) d\sigma + \iint_{\bar{\sigma}} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial \left(\frac{1}{r} \right)}{\partial n} \right) d\sigma = 0.$$

$\frac{1}{r}$ magnitudea konstante da $\left(\frac{1}{R} \right.$ eta $\left. \frac{1}{\rho} \right)$, $\underline{\sigma}$ eta $\bar{\sigma}$ gainazalen gain, beraz integral

ikurretik atera daiteke.

45. ariketan lortutako emaitzaren arabera

$$\begin{aligned} \frac{1}{R} \iint_{\underline{\sigma}} \frac{\partial u}{\partial n} d\sigma &= 0; \\ \frac{1}{\rho} \iint_{\bar{\sigma}} \frac{\partial u}{\partial n} d\sigma &= 0 \end{aligned}$$

daukagu. Hortaz,

$$-\iint_{\underline{\sigma}} u \frac{\partial \left(\frac{1}{r} \right)}{\partial n} d\sigma + \iint_{\bar{\sigma}} u \frac{\partial \left(\frac{1}{r} \right)}{\partial n} d\sigma = 0,$$

baina

$$\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial n} = \frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{dr} = -\frac{1}{r^2}$$

da. Beraz,

$$+\iint_{\underline{\sigma}} u \frac{1}{r^2} d\sigma - \iint_{\bar{\sigma}} u \frac{1}{r^2} d\sigma = 0$$

edo

$$\frac{1}{\rho^2} \iint_{\underline{\sigma}} u d\sigma = \frac{1}{R^2} \iint_{\bar{\sigma}} u d\sigma. \quad (1)$$

Aplika diezaiogun lehenengo ataleko integralari batezbesteko balioaren teorema:

$$\frac{1}{\rho^2} \iint_{\underline{\sigma}} u d\sigma = \frac{u(\xi, \eta, \zeta)}{\rho^2} \iint_{\bar{\sigma}} d\sigma, \quad (2)$$

non $u(\xi, \eta, \zeta)$ ρ erradioa eta zentrua $M(x_1, y_1, z_1)$ puntuan dituen esferaren gainazaleko puntu bat bait da.

ρ zerorantz joeraziz,

$$u(\xi, \eta, \zeta) \rightarrow u(x_1, y_1, z_1),$$

$$\frac{1}{\rho^2} \iint_{\bar{\sigma}} d\sigma = \frac{4\pi\rho^2}{\rho^2} = 4\pi.$$

Hortaz, $\rho \rightarrow 0$ denean,

$$\frac{1}{\rho^2} \iint_{\bar{\sigma}} d\sigma \rightarrow u(x_1, y_1, z_1) 4\pi$$

lortzen dugu.

(1) ekuazioaren bigarren atala ρ -ren menpe ez dagoenez gero, $\rho \rightarrow 0$ denean, azkenik,

$$\frac{1}{R^2} \iint_{\bar{\sigma}} u \, d\sigma = 4\pi u(x_1, y_1, z_1)$$

edo

$$u(x_1, y_1, z_1) = \frac{1}{4\pi R^2} \iint_{\bar{\sigma}} u \, d\sigma$$

lortzen dugu.

$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n$ ez bada existitzen (adibidez, $s_n \rightarrow \infty$, $n \rightarrow \infty$ denean) (1) seriea *dibergentea* dela eta baturarik ez daukala esan ohi da.

Adibidea. Azter dezagun

$$a + aq + aq^2 + \dots + aq^{n-1} + \dots \quad (2)$$

seriea.

Lehenengo gaia a eta arrazoitzat q dituen progresio geometrikoa da.

Progresio geometrikoaren lehenengo n gaien batura ($q \neq 1$ denerako)

$$s_n = \frac{a - aq^n}{1 - q}$$

edo

$$s_n = \frac{a}{1 - q} - \frac{aq^n}{1 - q}$$

da.

1. $|q| < 1$ bada, $q^n \rightarrow 0$ $n \rightarrow \infty$ denean eta, ondorioz,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a}{1 - q} - \frac{aq^n}{1 - q} \right) = \frac{a}{1 - q}.$$

Horrek esan nahi du $|q| < 1$ bada (2) seriea konbergentea dela eta bere batura

$$s = \frac{a}{1 - q}$$

dela.

2. $|q| > 1$ bada, $q^n \rightarrow \infty$ $n \rightarrow \infty$ denean eta, beraz,

$$\frac{a - aq^n}{1 - q} \rightarrow \pm \infty$$

$n \rightarrow \infty$ denean, hau da, $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n$ ez da existitzen. Honela, $|q| > 1$ denean (2) seriea dibergentea da.

3. $q = 1$ bada, (2) serieak

$$a + a + a + \dots$$

itxura dauka. Kasu honetan,

$$s_n = na, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \infty,$$

hots, seriea dibergentea da.

4. $q = -1$ bada, (2) serieak

$$a - a + a - a + \dots$$

itxura hartzen du. Kasu honetan

$$S_n = \begin{cases} 0 & n \text{ bikoitia denean} \\ a & n \text{ bakoitia denean} \end{cases}$$

Ondorioz, s_n segidak ez du limiterik; seriea dibergentea da.

Honelatan, progresio geometrikoa (lehenengo gaia ez-nulua izanik) konbergentea da progresioaren arrazoiaren balio absolututa 1 baino txikiagoa denean soilik.

1. Teorema. (1) seriean zenbait gai kenduz lortzen den seriea konbergentea bada emandako seriea ere konbergentea izango da.

Alderantziz, emandako seriea konbergentea bada zenbait gai kenduz lortutako seriea ere konbergentea izango da. Beste hitzetan, seriearen konbergentzia ez dauka eraginik gai-kopuru finitua kentzeak.

Frogapena. Izan bitez s_n (1) seriearen lehenengo n gaien batura; c_k kendutako k gaien batura (ohar dezagun n aski handia denean kendutako gai guztiak s_n baturaren barne daudela), σ_{n-k} s_n baturan dauden, baina ez c_k baturan, seriearen gaien batura. Orduan,

$$s_n = c_k + \sigma_{n-k},$$

daukagu, non c_k n -ren menpe ez dagoen zenbaki konstantea den.

Azkeneko erlazioetik haxe ondorioztatzen da: $\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_{n-k}$ existitzen bada $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n$ ere existitzen dela; $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n$ existitzen bada $\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_{n-k}$ ere existituko dela eta horrela teorema frogaturik dago.

Atala bukatuz, serieen bi propietate garrantzitsu eman ditzagun.

2. Teorema.

$$a_1 + a_2 + \dots \quad (3)$$

seriea konbergentea bada eta bere batura s bada,

$$ca_1 + ca_2 + \dots \quad (4)$$

seriea, non c zenbaki finko bat den, konbergentea da eta bere batura cs da.

Frogapena. Izenda ditzagun s_n (3) seriearen n . batura partziala eta σ_n (4) seriearen batura partziala. Orduan,

$$\sigma_n = ca_1 + \dots + ca_n = c(a_1 + \dots + a_n) = cs_n.$$

Hortik ateratzen da (4) seriearen n . batura partzialaren limitea existitzen dela,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (cs_n) = c \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = cs$$

bait da. Hortaz, (4) seriea konbergentea da eta bere batura cs da.

3. Teorema.

$$a_1 + a_2 + \dots \quad (5)$$

eta

$$b_1 + b_2 + \dots \quad (6)$$

serieak konbergenteak badira eta beraien baturak, hurrenez hurren, $\bar{s}$ eta $\bar{\bar{s}}$ badira,

$$(a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) + \dots \quad (7)$$

eta

$$(a_1 - b_1) + (a_2 - b_2) + \dots \quad (8)$$

serieak ere konbergenteak dira eta beraien baturak $\bar{s} + \bar{\bar{s}}$ eta $\bar{s} - \bar{\bar{s}}$ dira, hurrenez hurren:

Frogapena. Froga dezagun (7) seriearen konbergentzia. Izan bitez σ_n bere n . batura partziala, $\bar{s}_n$ eta $\bar{\bar{s}}_n$, hurrenez hurren, (5) eta (6) serieen n . batura partzialak,

$$\sigma_n = (a_1 + b_1) + \dots + (a_n + b_n) = (a_1 + \dots + a_n) + (b_1 + \dots + b_n) = \bar{s}_n + \bar{\bar{s}}_n$$

betetzen da.

Berdintza horretan limitera pasatuz, $n \rightarrow \infty$ denean,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (\bar{s}_n + \bar{\bar{s}}_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \bar{s}_n + \lim_{n \rightarrow \infty} \bar{\bar{s}}_n = \bar{s} + \bar{\bar{s}}$$

lortuko dugu. Honela, (7) seriea konbergentea da eta bere batura $\bar{s} + \bar{\bar{s}}$ da.

Antzeko eran frogatzen da (8) seriea ere konbergentea dela eta bere batura $\bar{s} - \bar{\bar{s}}$ dela.

(7) eta (8) serieak (5) eta (6) serieetatik gaiz gaiko batuketa edo kenketaren bidez, hurrenez hurren, lortzen direla esaten da.

§ 2. Serie baten konbergentziarako baldintza beharrezkoa

Serieen azterketan, problema nagusietako bat emandako seriearen konbergentzia edo dibergentziarena da. Jarraian auzi hori konpontzeko irizpide nahikoak ezarriko ditugu. Lehendabiziz eman dezagun irizpide beharrezko bat serie baten konbergentziarako, hau da, ezar dezagun seriea dibergentea dela inplikatzeko duen irizpidea.

Teorema. Serie bat konbergentea bada bere n . gaiak zerorantz jotzen du n infiniturantz doanean.

Frogapena. Izan bedi

$$u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n + \dots$$

serie konbergentea, hau da,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s$$

berdintza betetzen da, s seriearen batura delarik (hots, zenbaki finitu finkoa); orduan,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_{n-1} = s$$

berdintza dugu, $n \rightarrow \infty$ doanean $(n-1) \rightarrow \infty$ ere bait da. Lehenengo berdintzari bigarrena atalez atal kenduz,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n - \lim_{n \rightarrow \infty} s_{n-1} = 0$$

edo

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (s_n - s_{n-1}) = 0$$

erdiesten dugu. Baina,

$$s_n - s_{n-1} = u_n$$

da. Beraz,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0,$$

frogatu nahi genuen bezala.

Korolarioa. Seriearen n . gaiak ez badu zerorantz jotzen, $n \rightarrow \infty$ doanean, seriea dibergentea da.

Adibidea.

$$\frac{1}{7} + \frac{2}{5} + \frac{3}{7} + \dots + \frac{n}{2n+1} \dots$$

seriea dibergentea da,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{2n+1} \right) = \frac{1}{2} \neq 0$$

bait da.

Azpimarratu behar dugu aipatu irizpidea beharrezkoa dela soilik, baina ez nahikoa, hots, n . gaiak zerorantz jotzen badu, ez da halabeharrez ondorioztatzen seriea konbergentea denik (seriea dibergentea ere izan liteke).

Esate baterako,

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n} + \dots$$

serie harmoniko deiturikoa dibergentea da,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$$

bada ere.

Frogatzeko idatz dezagun serie harmonikoa ondoko eran:

$$\begin{aligned} & 1 + \frac{1}{2} + \underbrace{\frac{1}{3} + \frac{1}{4}} + \underbrace{\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}} + \\ & \underbrace{\frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \frac{1}{13} + \frac{1}{14} + \frac{1}{15} + \frac{1}{16}} + \frac{1}{17} + \dots \end{aligned} \quad (1)$$

Gero,

$$\begin{aligned} & 1 + \frac{1}{2} + \underbrace{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}} + \underbrace{\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}} + \\ & \underbrace{\frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16}} + \\ & \underbrace{\frac{1}{32} + \dots + \frac{1}{32}}_{16 \text{ batugai}} + \dots \end{aligned} \quad (2)$$

serie laguntzailea idatz dezagun.

(2) seriea ondoko eran osatzen da: lehenengo gaia 1 da; bigarrena $1/2$, hirugarrena $1/4$, laugarrena $1/4$, bostgarrenetik zortzigarreneira $1/8$, bederatzigarrenetik 16.era $1/16$; 17.etik 32.era $1/32$; e.a.

Izenda ditzagun $s_n^{(1)}$ (1) serie harmonikoaren lehenengo n gaien batura eta $s_n^{(2)}$ (2) seriearen lehenengo n gaien batura.

(1) seriearen gai bakoitza dagokion (2) seriearen gaia baino handiago edo berdina denez gero, $n > 2$ denerako,

$$s_n^{(1)} > s_n^{(2)} \quad (3)$$

daukagu.

Kalkula ditzagun (2) seriearen batura partzialak n -ren $2^1, 2^2, 2^3, 2^4, 2^5$, balioetarako:

$$s_2 = 1 + \frac{1}{2} = 1 + 1 \cdot \frac{1}{2},$$

$$s_4 = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 + 2 \cdot \frac{1}{2},$$

$$s_8 = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right) = 1 + 3 \cdot \frac{1}{2},$$

$$s_{16} = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \underbrace{\left(\frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{8}\right)}_{4 \text{ batugai}} + \underbrace{\left(\frac{1}{16} + \dots + \frac{1}{16}\right)}_{8 \text{ batugai}} = 1 + 4 \cdot \frac{1}{2},$$

$$s_{32} = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \underbrace{\left(\frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{8}\right)}_{4 \text{ batugai}} + \underbrace{\left(\frac{1}{16} + \dots + \frac{1}{16}\right)}_{8 \text{ batugai}} + \underbrace{\left(\frac{1}{32} + \dots + \frac{1}{32}\right)}_{16 \text{ batugai}} = 1 + 5 \cdot \frac{1}{2};$$

era berean $s_{2^6} = 1 + 6 \cdot 1/2$, $s_{2^7} = 1 + 7 \cdot 1/2$ eta oro har $s_{2^k} = 1 + k \cdot 1/2$ direla kalkulatu da.

Hortaz, (2) seriearen batura partzialak, k nahiko handia denerako, edozein balio positibo baino handiagoak izan daitezke, hau da,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n^{(2)} = \infty,$$

baina, orduan, (3) erlaziotik

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n^{(1)} = \infty$$

ateratzen da, hots, (1) serie harmonikoa dibergentea da.

§ 3. Gai positibotako serieen arteko konparazioa

Izan bitez

$$u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n + \dots, \quad (1)$$

$$v_1 + v_2 + v_3 + \dots + v_n + \dots \quad (2)$$

gai positibotako bi serie. Horietarako hurrengo teorema betetzen dira.

1. Teorema. (1) Seriearen gaiak dagozkien (2) seriearen gaiak baino handiagoak ez badira, hots,

$$u_n \leq v_n \quad (n = 1, 2, \dots), \quad (3)$$

eta (2) seriea konbergentea bada (1) seriea ere konbergentea da.

Frogapena. Izenda ditzagun s_n eta σ_n , hurrenez hurren, lehenengo eta bigarren serieen batura partzialak:

$$s_n = \sum_{i=1}^n u_i, \quad \sigma_n = \sum_{i=1}^n v_i.$$

(3) baldintzatik

$$s_n \leq \sigma_n \quad (4)$$

ateratzen da.

(2) seriea konbergentea denez bere batura partzialen σ limitea existitzen da,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n = \sigma.$$

(1) eta (2) serieen gaiak positiboak direnez gero $\sigma_n < \sigma$ daukagu, (4) desberdintzaren arabera

$$s_n < \sigma.$$

Honela, s_n batura partzialak bornaturik daudela frogatu dugu. Ohar gaitezen, n handitzen denean s_n ere handitzen dela; aldi berean, batura partzialen segida bornatua eta gorakorra izatearik limite daukala,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s,$$

ondorioztatzen da²⁾ eta bistakoa da

$$s \leq \sigma.$$

dela.

1. teoreman oinarriturik, serie batzuen konbergentzia determina daiteke.

1. Adibidea.

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^4} + \dots + \frac{1}{n^n} + \dots$$

seriea konbergentea da, bere gaiak dagozkien

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \dots + \frac{1}{2^n} + \dots$$

seriearen gaiak baino txikiagoak bait dira. Azkeneko seriea konbergentea da, bere gaiek, bigarrenetik hasiz, $1/2$ arrazoidun progresio geometrikoa osatzen bait dute. Serie horren batura $3/2$ da. Hortaz, 1. teoremari esker, emandako seriea konbergentea da eta bere baturak ez du $3/2$ gainditzen.

2. Teorema. (1) seriearen gaiak dagozkien (2) seriearen gaiak baino txikiagoak ez badira, hots,

$$u_n \geq v_n \quad (5)$$

eta (2) seriea dibergentea bada, (1) seriea ere dibergentea da.

Frogapena. (5) baldintzatik

$$s_n \geq \sigma_n \quad (6)$$

ateratzen da.

(2) seriearen gaiak positiboak direnez beren σ_n batura partziala hazten da n handitzean, eta, seriea dibergentea denez,

2) s_n aldagaiak limiterik duela ulertzeko gogora dezagun segida baten limitearen existentziarako irizpidea (ikus II. gaiko § 5): "aldagai bat bornatua eta gorakorra bada limitea dauka". Emandako kasuan, s_n batura partzialen segida bornatua eta gorakorra da; beraz, limiterik dauka, hots, konbergentea da.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n = \infty$$

dugu. Baina, (6) desberdintzaren arabera

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \infty,$$

hots, (1) dibergentea da.

2. Adibidea.

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} + \dots$$

seriea dibergentea da, bere gaiak (bigarrenetik) dagozkien

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \dots$$

serie harmonikoaren gaiak baino handiagoak bait dira eta hori, dakigunez, dibergentea da.

Oharra. Frogaturiko bi irizpideak (1. eta 2. teoremak) gai positiborako serietarako soilik balio dute. Lehenengo edo bigarren seriearen zenbait gai zero deneko kasuan ere aplikatu daitezke. Aitzitik ez dute balio serieren batek gai negatiborik badauka.

§ 4. D'Alembert-en irizpidea

Teorema. (D'Alembert-en irizpidea). Gai positibotako

$$u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n + \dots \quad (1)$$

serie batean $(n+1)$. eta n . gaien arteko arrazoiak l limite (finitu)rik badauka, hots,

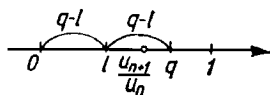
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l, \quad (2)$$

1) $l < 1$ bada seriea konbergentea da;

2) $l > 1$ bada seriea dibergentea da.

($l = 1$ denean, teorema ez du erantzunik ematen seriearen konbergentzia edo dibergentziaz)

Frogapena. 1) Bedi $l < 1$. Har dezagun $l < q < 1$ betetzen duen q zenbaki bat (342. irudia).



342. IRUDIA

Limitearen definiziotik eta (2) erlaziotik ondorioztatzen da, N zenbaki batetik aurrera n balio guztietarako, hau da $n \geq N$ denerako,

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} < q \quad (n \geq N) \quad (2')$$

desberdintza betetzen dela.

Izan ere, $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ magnitudeak l limiterantz jotzen duenez $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ magnitudea eta l zenbakiaren arteko diferentzia (N zenbaki batetik aurrera), balio absolutuan, edozein zenbaki positibo baino txikiagoa egin daiteke, bereziki $q - l$ baino txikiagoa, hots,

$$\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} - l \right| < q - l.$$

Azken desberdintzatik (2') desberdintza ateratzen da. Desberdintza hori n -ren balio desberdinetarako, N zenbakitik aurrera, idatziz

$$\left. \begin{aligned} u_{N+1} &< qu_N, \\ u_{N+2} &< qu_{N+1} < q^2 u_N, \\ u_{N+3} &< qu_{N+2} < q^3 u_N, \\ &\dots \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

lortzen dugu.

Azter dezagun orain bi serie:

$$u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_N + u_{N+1} + u_{N+2} + \dots, \quad (1)$$

$$u_N + qu_N + q^2 u_N + \dots \quad (1')$$

(1') seriea $q < 1$ arrazoi positiboa daukan progresio geometrikoa da. Hortaz, seriea konbergentea da. (1) seriearen gaiak, u_{N+1} gaitik aurrera, (1') seriearen gaiak baino txikiagoak dira. § 3ko 1. teorema eta § 1eko 1. teoremaren arabera (1) seriea konbergentea dela ateratzen dugu.

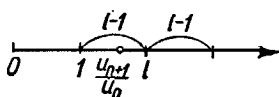
2) Bedi $l > 1$.

Orduan, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l$ berdintzatik ($l > 1$ delarik) ondorioztatzen da N zenbaki

batetik aurrera, hau da $n \geq N$ denerako,

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1 \quad (n \geq N)$$

desberdintza betetzen dela (343. irudia), edo $u_{n+1} > u_n$ $n \geq N$ guztietarako. Baina horrek seriearen gaiak $(N+1)$.etik aurrera hazten direla esan nahi du, eta, horregatik, seriearen gai orokorrak ez du zerorantz jotzen. Ondorioz, seriea dibergentea da.



343. IRUDIA

1. Oharra. Seriea

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \infty$$

denean ere dibergentea izango da. Hori ondorioztatzen da,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \infty$$

bada, $n = N$ zenbaki batetik aurrera $\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$, edo $u_{n+1} > u_n$ desberdintza beteko bait da.

1. Adibidea. Aztertu

$$1 + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n} + \dots$$

seriearen konbergentzia.

Ebazpena. Hemen,

$$u_n = \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n} = \frac{1}{n!}, \quad u_{n+1} = \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n \cdot (n+1)} = \frac{1}{(n+1)!}; \quad \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n!}{(n+1)!} = \frac{1}{n+1}$$

daukagu. Hortaz,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = 0 < 1.$$

Seriea konbergentea da.

2. Adibidea. Aztertu

$$\frac{2}{1} + \frac{2^2}{2} + \frac{2^3}{3} + \dots + \frac{2^n}{n} + \dots$$

seriearen konbergentzia

Ebazpena. Hemen,

$$u_n = \frac{2^n}{n}; \quad u_{n+1} = \frac{2^{n+1}}{n+1}; \quad \frac{u_{n+1}}{u_n} = 2 \frac{n}{n+1}; \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} 2 \frac{n}{n+1} = 2 > 1$$

dugu. Seriea dibergentea da eta bere u_n gai orokorrak infiniturantz jotzen du.

2. Oharra. D' Alembert-en irizpideak emandako serie positibo bat konbergentea denentz galderari erantzuten dio

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n}$$

existitu eta 1 ez deneko kasuan soilik. Limite hori ez bada existitzen edo

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1$$

bada, D'Alembert-en irizpideak ez digu esaten seriea konbergentea edo dibergentea den, kasu honetan seriea konbergentea zein dibergentea izan daiteke eta. Horretarako serieen konbergentziaren auzia ebazteko beste irizpide bat aplikatu behar da.

Ohar gaitezen, hala ere, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1$ bada eta $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ arrazoia, zenbaki batetik aurrera, n zenbaki guztietarako 1 baino handiagoa bada seriea dibergentea izango dela.

Izan ere, $\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$ bada $u_{n+1} > u_n$ izango da eta gai orokorrak ez du zerorantz joko $n \rightarrow \infty$ denean.

Azter ditzagun gorago enuntziatutakoa azaltzen duten adibide batzuk.

3. Adibidea. Aztertu

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \dots + \frac{n}{n+1} + \dots$$

seriearen konbergentzia.

Ebazpena. Hemen

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{n+1}{n+2}}{\frac{n}{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + 2n + 1}{n^2 + 2n} = 1.$$

Emandako kasuan seriea dibergentea da, n orotarako $\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$ bait da:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n^2 + 2n + 1}{n^2 + 2n} > 1$$

4. Adibidea. D'Alembert-en irizpidea

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \dots$$

serie harmonikoari aplikatuz,

$$u_n = \frac{1}{n}, \quad u_{n+1} = \frac{1}{n+1}$$

daukagu, eta, beraz,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = 1.$$

Beraz, D'Alembert-en irizpidean oinarriturik ezin dugu emandako seriea konbergentzia ala dibergentzia den determinatu. Baina, lehenago beste erabide batez serie harmonikoa dibergentzia dena lortu dugu.

5. Adibidea. Analisisatu

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} + \dots$$

seriearen konbergentzia.

Ebazpena. Hemen,

$$u_n = \frac{1}{n(n+1)}, \quad u_{n+1} = \frac{1}{(n+1)(n+2)},$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n+1)}{(n+1)(n+2)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+2} = 1$$

da.

D'Alembert-en irizpidean oinarrituz ezin dugu serie honen konbergentziari buruz ezer determinatu, baina, beste kontsiderazioetatik abiatuz jakin dezakegu seriea konbergentzia dela. Izan ere,

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

dela kontutan hartuz, emandako seriea

$$\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) + \dots$$

eran idatz dezakegu.

Eragiketak egin ondoren, lehenengo n gaien batura partziala

$$s_n = 1 - \frac{1}{n+1}$$

izango da. Hortaz,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) = 1,$$

hau da, seriea konbergentea da eta bere batura 1 da.

§ 5. Cauchy-ren irizpidea

Teorema (Cauchy-ren irizpidea).

$$u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n + \dots \quad (1)$$

gai positibotako seriean $\sqrt[n]{u_n}$ magnitudeak l limite finitua badauka, $n \rightarrow \infty$ denean, hau da,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = l,$$

1) $l < 1$ bada seriea konbergentea da;

2) $l > 1$ bada seriea dibergentea da.

Frogapena. 1) Bedi $l < 1$. Kotsidera dezagun $l < q < 1$ desberdintza betetzen duen q zenbakia.

$n = N$ zenbaki batetik aurrera,

$$\left| \sqrt[n]{u_n} - l \right| < q - l$$

erlazioa beteko da; nondik

$$\sqrt[n]{u_n} < q$$

edo

$$u_n < q^n$$

ondorioztatzen den, $n \geq N$ guztietarako.

Orain,

$$u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_N + u_{N+1} + u_{N+2} + \dots, \quad (1)$$

$$q^N + q^{N+1} + q^{N+2} + \dots \quad (1')$$

bi serieak hartuko ditugu.

(1') seriea konbergentea da bere gaiak progresio geometriko beherakorra osatzen bait dute. (1) seriearen gaiak, u_N gaitik aurrera, dagozkien (1') seriearen gaiak baino txikiagoak dira. Hortaz, (1) seriea konbergentea da.

2) Bedi $l > 1$. Orduan, $n = N$ zenbaki batetik aurrera,

$$\sqrt[l]{u_n} > 1$$

edo

$$u_n > 1$$

daukagu. Baina, u_N gai batetik aurrera, kontsideratutako seriearen gai guztiak 1 baino handiagoak badira, seriea dibergentea izango da bere gai orokorrak ez bait du zerorantz jotzen.

Adibidea. Aztertu

$$\frac{1}{3} + \left(\frac{2}{5}\right)^2 + \left(\frac{3}{7}\right)^3 + \dots + \left(\frac{n}{2n+1}\right)^n + \dots$$

seriearen konbergentzia.

Ebazpena. Aplika dezagun Cauchy-ren irizpidea:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2} < 1.$$

Seriea konbergentea da.

Oharra. D'Alembert-en irizpideak bezala,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = l = 1$$

deneko kasuak aparteko azterketa behar du. Baldintza hori betetzen duten serieak konbergente edo dibergenteak izan daitezke. Honela, serie harmonikoarekin (dakigunez dibergentea dena)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = 1$$

daukagu.

Hori ziurtatzeko froga dezagun $\lim_{n \rightarrow \infty} \ln \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = 0$ dela. Izan ere,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \ln \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-\ln n}{n}$$

da. Hemen frakzioaren zenbakitzaile eta izendatzaileak infiniturantz jotzen dute. L'Hôpital-en erregela aplikatuz,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \ln \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-\ln n}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-\frac{1}{n}}{1} = 0$$

aurkitzen dugu. Horrela bada, $\ln \sqrt[n]{\frac{1}{n}} \rightarrow 0$, beraz $\sqrt[n]{\frac{1}{n}} \rightarrow 1$, hau da

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = 1.$$

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} + \dots$$

seriearekin ere

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n}} \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = 1$$

berdintza dugu; baina hau konbergentea da, lehenengo gaia kentzen badugu, lortutako seriearen gaiak dagozkien

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} + \dots$$

serie konbergentearen gaiak baino txikiagoak izango bait dira (ikus § 4ko 5. adibidea).

§ 6. Konbergentzi irizpide integrala

Teorema. Izan bedi

$$u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n + \dots, \quad (1)$$

gai positibo eta ez-gorakorretako seriea, hau da,

$$u_1 \geq u_2 \geq u_3 \geq \dots,$$

eta bedi $f(x)$ funtzio jarrai ez-gorakorra, non

$$f(1) = u_1; \quad f(2) = u_2; \quad \dots; \quad f(n) = u_n \quad (2)$$

den. Kasu honetan hurrengo baieztapenak betetzen dira:

1)

$$\int_1^{\infty} f(x) dx$$

integral inpropioa konbergentea bada (ikus XI. gaiko § 7) (1) seriea ere konbergentea da;

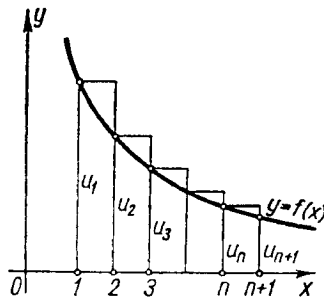
2) integral hori dibergentea bada (1) seriea ere dibergentea da.

Frogapena. Adieraz ditzagun geometrikoki seriearen gaiak, abzisa-ardatzean 1, 2, 3, ..., n , $n+1$ zenbakiak markatuz eta ordenatu-ardatzean dagozkien seriearen $u_1, u_2, \dots, u_n, \dots$ gaiak (344. irudia).

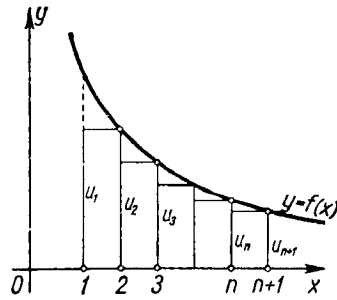
Irudi berean (2) baldintza betetzen duen

$$y = f(x)$$

funtzio jarrai ez-gorakorra marra dezagun.



344. IRUDIA



345. IRUDIA

344. irudia aztertuz, eraikitako lehenengo laukizuzenak oinarritzat 1 eta altueratzat $f(1)=u_1$ dituela ohartzen dugu. Beraz laukizuzen horren azalera u_1 da. Bigarren laukizuzenaren azalera u_2 da; e.a.. Azkenik, eraikitako azkeneko (n .) laukizuzenaren azalera u_n da. Hortaz, eraikitako laukizuzen guztien azalaren batura seriearen lehenengo n gaien s_n baturaren berdina da. Bestalde, laukizuzenak osatzen duten irudi mailakatu horren barnean $y=f(x)$ kurbak eta $x=1$, $x=n+1$, $y=0$ zuzenek mugatutako

eremua dago; eremu horren azalera $\int_1^{n+1} f(x) dx$ da. Hortaz,

$$s_n > \int_1^{n+1} f(x) dx. \quad (3)$$

Ikus dezagun orain 345. irudia. Hemen, (ezkerretik) eraikitako lehenengo laukizuzenak u_2 altuera dauka; beraz, bere azalera ere u_2 da. Bigarren laukizuzenaren azalera u_3 da; e.a.. Eraikitako azken laukizuzenaren azalera u_{n+1} da. Hortaz, eraikitako laukizuzen guztien azalaren batura seriearen bigarren gaitik ($n+1$). erainoko gai guztien baturaren berdina da, hots, $s_{n+1} - u_1$ da. Bestalde, erraz ikus daitekeenez, laukizuzen horiek osatutako irudi mailakatua, $y=f(x)$ kurbak eta $x=1$, $x=n+1$, $y=0$ zuzenek mugatzen duten irudi lerromakurraren barnean dago. Irudi lerromakur horren azalera

$$\int_1^{n+1} f(x) dx$$

da. Beraz,

$$s_{n+1} - u_1 < \int_1^{n+1} f(x) dx,$$

nondik

$$s_{n+1} < \int_1^{n+1} f(x) dx + u_1 \quad (4)$$

den.

Orain analisa ditzagun bi kasuak.

1. Demagun

$$\int_1^{\infty} f(x) dx$$

integrala konbergentea dela, hots, balio finitua duela.

$$\int_1^{n+1} f(x) dx < \int_1^{\infty} f(x) dx$$

denez gero (4) desberdintzaren arabera

$$s_n < s_{n+1} < \int_1^{\infty} f(x) dx + u_1$$

dugu, hau da, s_n batura partziala n -ren balio guztietarako dago bornaturik. Baina, n handitzean hazten da, u_n gai guztiak positiboak bait dira. Hortaz, $n \rightarrow \infty$ denean s_n baturak limite finiturik dauka:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s,$$

hots, seriea konbergentea da.

2. Demagun ere

$$\int_1^{\infty} f(x) dx = \infty$$

dela. Horrek esan nahi du

$$\int_1^{n+1} f(x) dx$$

mugagabeki hazten dela n handitzean. Baina orduan, (3) desberdintzaren arabera, s_n ere mugagabeki hazten da n handitzean, hau da, seriea dibergentea da.

Horrela, teorema erabat frogaturik dago.

Adibidea. Analisatu

$$\frac{1}{1^p} + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \dots + \frac{1}{n^p} + \dots$$

seriearen konbergentzia.

Ebazpena. Aplika dezagun irizpide integrala

$$f(x) = \frac{1}{x^p}$$

eginez. Funtzio horrek teoremaren baldintza guztiak betetzen ditu. Kontsidera dezagun ondoko integrala:

$$\int_1^N \frac{dx}{x^p} = \begin{cases} \left. \frac{1}{1-p} x^{1-p} \right|_1^N = \frac{1}{1-p} (N^{1-p} - 1) & p \neq 1 \text{ denerako,} \\ \ln x \Big|_1^N = \ln N & p = 1 \text{ denerako.} \end{cases}$$

N infiniturantz joeraziko dugu eta integral inpropioaren konbergentzia aztertuko dugu kasu desberdinetan. Horrela seriearen konbergentzia edo dibergentzia determina dezakegu p -ren balio desberdinetarako.

$p > 1$ bada

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^p} = \frac{1}{p-1},$$

hots, integral finitua da eta, ondorioz, seriea konbergentea da.

$p < 1$ bada

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^p} = \infty,$$

integrala infinitua da eta seriea dibergentea da.

$p = 1$ bada

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x} = \infty,$$

integrala infinitua da eta seriea dibergentea da.

Esan dezagun D'Alembert-en irizpideak ez, eta Cauchy-renak ere, ez dutela serie horren konbergentziari buruzko auzia ebazten,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^p = 1,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^p}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt[n]{\frac{1}{n}} \right)^p = 1^p = 1$$

bait dira.

§ 7. Serie alternatuak. Leibniz-en teorema

Orain arte gai guztiak positiboak zituzten serieak aztertu izan ditugu. Atal honetan gaiak, txandaka, positiboak eta negatiboak dituzten serieak aztertuko ditugu, hau da,

$$u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \dots \quad (1)$$

itxurako serieak, non $u_1, u_2, \dots, u_n, \dots$ positiboak diren.

Leibniz-en teorema.

$$u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \dots \quad (u_n > 0) \quad (1)$$

serie alternatu batean gaiak

$$u_1 > u_2 > u_3 > \dots \quad (2)$$

eta

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0 \quad (3)$$

betetzen badituzte, (1) seriea konbergentea da, bere batura positiboa da eta ez du lehenengo gaia gainditzen.

Frogapena. Analisa dezagun (1) seriearen lehenengo $n = 2m$ gaien batura:

$$s_{2m} = (u_1 - u_2) + (u_3 - u_4) + \dots + (u_{2m-1} - u_{2m}).$$

(2) baldintzatik ondorioztatzen da parentesien arteko adierazpenak positiboak direla. Beraz, s_{2m} batura positiboa da,

$$s_{2m} > 0,$$

eta m handitzean hazten da.

Idatz dezagun orain batura bera beste era honetan:

$$s_{2m} = u_1 - (u_2 - u_3) - (u_4 - u_5) - \dots - (u_{2m-2} - u_{2m-1}) - u_{2m}.$$

(2) baldintzaren arabera, parentesien arteko adierazpen bakoitza positiboa da. Horregatik, u_1 gaiari parentesien arteko magnitudeak kentzean u_1 baino txikiagoa den zenbaki bat lortzen dugu, hots,

$$s_{2m} < u_1.$$

Hortaz, m handitzean s_{2m} hazten dela eta goitik bornaturik dagoela determinatu dugu. Hortik, s_{2m} segidak limiterik duela ateratzen dugu:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} s_{2m} = s,$$

$$0 < s < u_1$$

izanik. Hala ere, seriearen konbergentzia ez dago oraindik frogaturik; batura partzial "bikoitiek" s limitea dutela soilik frogatu dugu. Froga dezagun batura partzial "bakoitiek" ere s limiterantz jotzen dutela.

2. Oharra. Serie alternatu batek Leibniz-en teoremaren baldintzak betetzen baditu ez da zaila balioztatzea bere s batura s_n batura partzial batez ordezkatzean egiten den errorea. Ordezkapena egitean u_{n+1} gaitik aurrera seriearen gai guztiak ezabatzen ditugu. Baina, zenbaki horiek serie alternatu bat osatzen dute, zeinaren batura, balio absolutuan, serie horren lehenengo gaia baino txikiagoa bait da (hots, u_{n+1} baino txikiagoa da). Hortaz, s , s_n -z ordezkatzean egiten den erroreak ez du gainditzen, balio absolutuan, ezabatutako lehenengo gaia.

1. Adibidea.

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$$

seriea konbergentea da,

$$1 > \frac{1}{2} > \frac{1}{3} > \dots,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$$

bait dira.

Serie horren lehenengo n gaien batura,

$$s_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + (-1)^n \frac{1}{n},$$

s baturatik

$$\frac{1}{n+1}$$

baino magnitude txikiagora dago.

2. Adibidea.

$$1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \frac{1}{4!} + \dots$$

seriea konbergentea da, Leibniz-en teoremaren arabera.

§ 8. Gai positibo eta negatibotako serieak. Konbergentzia absolutua eta baldintzatua

Gaiak positiboak zein negatiboak dituen seriea *gai positibo eta negatibotako serie* deitzen da.

Serie alternatuek, aurreko atalean aztertuak, dudarik gabe gai positibo eta negatibotako serieen kasu partikularra osatzen dute.

Analisa dezagun gai positibo eta negatibotako serieen zenbait propietate.

Baina, aurreko atalean onartutakoa ez bezala, demagun orain $u_1, u_2, \dots, u_n, \dots$ zenbakiak positiboak edo negatiboak izan daitezkeela.

Eman dezagun, aurretik, irizpide nahikoa oso garrantzitsua, gai positibo eta negatibotako serieen konbergentziarako.

1. Teorema.

$$u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots \quad (1)$$

gai positibo eta negatibotako serieak bere gaien balio absolutuez osatutako

$$|u_1| + |u_2| + \dots + |u_n| + \dots \quad (2)$$

seriea konbergentzia dela betetzen badu, emandako seriea, gai positibo eta negatibotakoa, ere konbergentzia da.

Frogapena. Izan bitez s_n eta σ_n (1) eta (2) serieen lehenengo n gaien baturak. Izan bitez, ere, s'_n eta s''_n emandako seriearen lehenengo n gaien artean dauden gai positiboen batura eta gai negatiboen balio absolutuen batura, hurrunez hurren, orduan:

$$s_n = s'_n - s''_n; \quad \sigma_n = s'_n + s''_n,$$

Hipotesiaren arabera, σ_n baturak σ limitea dauka; s'_n eta s''_n magnitude positibo gorakorak eta σ baino txikiagoak dira. Hortaz, hurrenez hurren, s' eta s'' limiteak dituzte. $s_n = s'_n - s''_n$ erlaziotik s_n baturak ere limiterik duela eta $s' - s''$ dela ondorioztatzen da, hots, gai positibo eta negatibotako (1) seriea konbergentzia da.

Frogatutako teorema uztzen digu gai positibo eta negatibotako serie batzuen konbergentzia determinatzen. Gai positibo eta negatibotako serie baten konbergentziari

buruzko problemaren azterketa, kasu honetan, gai positibotako serie baten azterketara laburtzen da.

Ikus dezagun bi adibide.

1. Adibidea. Aztertu

$$\frac{\sin \alpha}{1^2} + \frac{\sin 2\alpha}{2^2} + \frac{\sin 3\alpha}{3^2} + \dots + \frac{\sin n\alpha}{n^2} + \dots \quad (3)$$

seriearen konbergentzia, α edozein zenbaki izanik.

Ebazpena. Emandako seriearekin batera, kontsidera ditzagun

$$\left| \frac{\sin \alpha}{1^2} \right| + \left| \frac{\sin 2\alpha}{2^2} \right| + \left| \frac{\sin 3\alpha}{3^2} \right| + \dots + \left| \frac{\sin n\alpha}{n^2} \right| + \dots \quad (4)$$

eta

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} + \dots \quad (5)$$

serieak.

(5) seriea konbergentea da (ikus § 6). (4) seriearen gaiak ez dira dagozkien (5) seriearen gaiak baino handiagoak; hortaz, (4) seriea ere konbergentea da. Baina, orduan, frogatutako teoremaren arabera, gai positibo eta negatibotako (3) seriea ere konbergentea da.

2. Adibidea. Aztertu

$$\frac{\cos \frac{\pi}{4}}{3} + \frac{\cos 3 \frac{\pi}{4}}{3^2} + \frac{\cos 5 \frac{\pi}{4}}{3^3} + \dots + \frac{\cos(2n-1) \frac{\pi}{4}}{3^n} + \dots \quad (6)$$

seriearen konbergentzia.

Ebazpena. Emandako seriez gain kontsidera dezagun

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \dots + \frac{1}{3^n} + \dots \quad (7)$$

seriea.

Serie hori konbergentea da $\frac{1}{3}$ arrazoiko progresio geometriko beherakorra delako.

Beraz, kasu honetan, emandako (6) seriea ere konbergentea da, bere gaiak, balio absolutuan, dagozkien (7) seriearen gaiak baino txikiagoak bait dira.

Ohar gaitzen gorago frogatutako konbergentzi irizpidea nahikoa dela edonolako gaitako serie baterako, baina ez dela beharrezkoa: badaude gai positibo eta negatibotako serie konbergenteak, beren gaien balio absolutuez osatutako serieak dibergenteak diren bitartean. Horregatik, baliogarria da gai positibo eta negatibotako serieen konbergentzia absolutu eta baldintzatuaren nozioak sartzea, eta, nozio horietan oinarriturik, serie horiek sailkatzea.

Definizioa. Gai positibo eta negatibotako

$$u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n + \dots \quad (1)$$

seriea *absolutuki konbergente* deitzen da bere gaien balio absolutuez osatutako

$$|u_1| + |u_2| + |u_3| + \dots + |u_n| + \dots \quad (2)$$

seriea konbergentea bada.

Gai positibo eta negatibotako (1) seriea konbergentea bada eta (2) seriea, bere gaien balio absolutuez osatua, dibergentea bada, emandako (1) seriea *baldintzazko konbergente* deitzen da.

3. Adibidea. Gai positibo eta negatibotako

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$$

seriea baldintzazko konbergentea da, bere gaien balio absolutuez osatutako seriea,

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots,$$

serie harmonikoa bait da, eta hori dibergentea da. Baina, emandako seriea konbergentea da, Leibniz-en irizpidearen laguntzaz erraz froga daitekeenez.

4. Adibidea. Gai positibo eta negatibotako

$$1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \frac{1}{4!} + \dots$$

seriea absolutuki konbergentea da, bere gaien balio absolutuez osatutako seriea,

$$1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \frac{1}{4!} + \dots,$$

konbergentea bait da, § 4an ezarri den legez.

Konbergentzia absolutuaren nozioa erabiliz, 1. teorema ondoko eran azal daiteke: serie absolutuki konbergente oro serie konbergentea da.

Bukatzeko eman ditzagun (frogapenik gabe) serie absolutuki eta baldintzazko konbergenteen hurrengo propietateak:

2. Teorema. Serie bat absolutuki konbergentea bada, bere gaien ordena edonola aldatuz ere absolutuki konbergentea da. Kasu honetan serie horren batura ez dago bere gaien ordenaren menpe.

Propietate horrek ez du balio, oro har, serie baldintzazko konbergenteetarako.

3. Teorema. Serie bat baldintzazko konbergentea bada, serie horren gaien ordena truka daiteke lortutako serie berriaren batura aurretik finkatutako hautazko A balioaren berdina izan dadin. Are gehiago, serie baldintzazko konbergente baten gaien ordena alda daiteke serie berria dibergentea izan dadin.

Teorema horien frogapenak liburu honen helburua gainditzen du.

Serie baldintzazko konbergente baten batura bere gaien ordena trukatzean alda daitekeeneko baieztapenaren adibide gisa, ondorengo adibidea hartuko dugu.

5. Adibidea. Gai positibo eta negatibotako

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots \quad (8)$$

seriea ez da absolutuki konbergentea. Bedi s bere batura. Nabaria da $s > 0$ dela. Alda dezagun (8) seriearen gaien ordena, gai positibo baten ondoren bi gai negatibo egon daitezen:

$$\underbrace{1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4}} + \underbrace{\frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8}} + \dots + \underbrace{\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{4k-2} - \frac{1}{4k}} + \dots \quad (9)$$

Froga dezagun lortutako seriea konbergentea dela, baina bere s' batura (8) seriearen batura baino bi aldiz txikiagoa dela, hots, $\frac{1}{2}s$ dela. Izan bitez s_n eta s'_n (8) eta (9) serieen batura partzialak. Kontsidera dezagun (9) seriearen $3k$ gaien batura:

$$\begin{aligned} s'_{3k} &= \left(1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8}\right) + \dots + \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{4k-2} - \frac{1}{4k}\right) = \\ &= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{8}\right) + \dots + \left(\frac{1}{4k-2} - \frac{1}{4k}\right) = \\ &= \frac{1}{2} \left[\left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \dots + \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k}\right) \right] = \\ &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k}\right) = \frac{1}{2} s_{2k}. \end{aligned}$$

Hortaz,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} s'_{3k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{2} s_{2k} = \frac{1}{2} s.$$

Beraz,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} s'_{3k+1} = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(s'_{3k} + \frac{1}{2k+1} \right) = \frac{1}{2} s,$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} s'_{3k+2} = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(s'_{3k} + \frac{1}{2k+1} - \frac{1}{4k+2} \right) = \frac{1}{2} s.$$

Horrela,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s'_n = s' = \frac{1}{2} s$$

erdiesten dugu.

Honelatan, bada, kasu honetan seriearen batura aldatu da bere gaien ordena trukatu ondoren (erdira txikitu da).

§ 9. Funtzio-serieak

$$u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots$$

seriea *funtzio-serie* deitzen da bere gaiak funtzioak badira.

Azter dezagun funtzio-serie bat:

$$u_1(x) + u_2(x) + u_3(x) + \dots + u_n(x) + \dots \quad (1)$$

x -ri zenbakizko baliorik emanez, zenbakizko serie desberdinak lortzen ditugu, konbergente zein dibergente izan daitezkeenak.

Funtzio-seriea konbergentea deneko x -ren balioen multzoa serie horren *konbergentzi eremu* deitzen da.

Bistakoa da funtzio-serie baten konbergentzi eremuan bere batura x -ren funtzioa dela. Horrexegatik, funtzio-serie baten batura $s(x)$ idazten da.

Adibidea. Kontsidera dezagun

$$1 + x + x^2 + \dots + x^n + \dots$$

funtzio-seriea.

Serie hori konbergentea da $(-1,1)$ tartean dauden x -ren balio guztietarako, hau da, $|x| < 1$ baldintza betetzen duten x -ren balio guztietarako. $(-1,1)$ tarteko x -ren balio orotarako seriearen batura

$$\frac{1}{1-x}$$

da (x arrazoidun progresio geometriko beherakor baten batura). Hortaz, $(-1,1)$ tartean emandako serieak

$$s(x) = \frac{1}{1-x}$$

funtzioa definitzen du, seriearen batura dena, hots,

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots$$

Izenda dezagun $s_n(x)$ (1) seriearen lehenengo n gaien batura. Serie hori konbergentea bada eta bere batura $s(x)$ bada

$$s(x) = s_n(x) + r_n(x)$$

izango da, non $r_n(x)$

$$u_{n+1}(x) + u_{n+2}(x) + \dots$$

seriearen batura den, hots,

$$r_n(x) = u_{n+1}(x) + u_{n+2}(x) + \dots$$

Kasu honetan $r_n(x)$ magnitudea (1) *seriearen hondar* deitzen da. Seriearen konbergentzi eremuko x -ren balio guztietarako

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n(x) = s(x)$$

erlazioa betetzen da; horregatik,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} r_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} [s(x) - s_n(x)] = 0$$

hau da, serie konbergente baten $r_n(x)$ hondarrak zerorantz jotzen du, $n \rightarrow \infty$ denean.

§ 10. Serie majoragarriak

Definizioa.

$$u_1(x) + u_2(x) + u_3(x) + \dots + u_n(x) + \dots \quad (1)$$

funtzio-seriea *majoragarri* deitzen da, x -ren aldakuntz eremu batean, gai positibotako zenbaki-serie konbergente bat,

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \dots + \alpha_n + \dots, \quad (2)$$

existitzen bada, non emandako eremuko x -ren balio guztietarako

$$|u_1(x)| \leq \alpha_1, |u_2(x)| \leq \alpha_2, \dots, |u_n(x)| \leq \alpha_n, \dots \quad (3)$$

erlazioak betetzen bait dira. Beste hitzetan, serie bat majoragarri deitzen da bere gai bakoitza, balio absolutuan, dagokion gai positibotako zenbaki-serie konbergentearen gaia baino handiagoa ez bada.

Esate baterako,

$$\frac{\cos x}{1} + \frac{\cos 2x}{2^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} + \dots + \frac{\cos nx}{n^2} + \dots$$

seriea majoragarria da Ox ardatz osoan. Izan ere, x -ren balio guztietarako

$$\left| \frac{\cos nx}{n^2} \right| \leq \frac{1}{n^2} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

betetzen da eta

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots$$

seriea, dakigunez, konbergentea da.

Definizioetik zuzenean ondorioztatzen da, eremu batean majoragarri den serie bat absolutuki konbergentea dela bertako puntu guztietan (ikus § 8). Horrez gain, serie majoragarri batek ondoko propietate garrantzitsua betetzen du.

Teorema. Demagun

$$u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x) + \dots$$

funtzio-seriea majoragarria dela $[a, b]$ tartean. Izan bitez $s(x)$ serie horren batura eta $s_n(x)$ serie horren lehenengo n gaien batura. Orduan, nahi bezain txikia den $\varepsilon > 0$ zenbaki bakoitzari N zenbaki positibo bat dagokio, non $n \geq N$ guztietarako

$$|s(x) - s_n(x)| < \varepsilon$$

desberdintza betetzen den, $[a, b]$ tarteko x -ren balioa edozein dela ere.

Frogapena. Izenda dezagun σ (2) seriearen batura:

$$\sigma = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \dots + \alpha_n + \alpha_{n+1} + \dots,$$

orduan,

$$\sigma = \sigma_n + \varepsilon_n,$$

non σ_n (2) seriearen lehenengo n gaien batura eta ε_n seriearen gainontzeko gaien batura bait dira, hau da,

$$\varepsilon_n = \alpha_{n+1} + \alpha_{n+2} + \dots$$

Serie hori konbergentea denez

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n = \sigma$$

dugu eta, hortaz,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n = 0.$$

Adieraz dezagun orain (1) funtzio-seriearen batura

$$s(x) = s_n(x) + r_n(x)$$

eran, non

$$s_n(x) = u_1(x) + \dots + u_n(x),$$

$$r_n(x) = u_{n+1}(x) + u_{n+2}(x) + u_{n+3}(x) + \dots$$

diren.

(3) baldintzatik

$$|u_{n+1}(x)| \leq \alpha_{n+1}, \quad |u_{n+2}(x)| \leq \alpha_{n+2}, \quad \dots$$

direla ateratzen da, eta horregatik

$$|r_n(x)| \leq \varepsilon_n$$

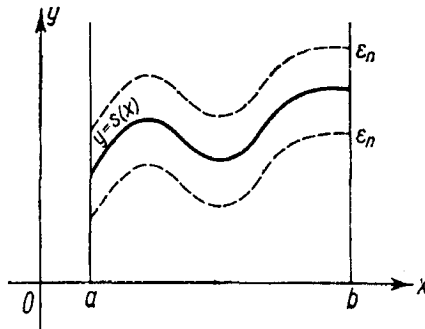
aztertutako eremuko x -ren balio guztietarako.

Honela,

$$|s(x) - s_n(x)| < \varepsilon_n$$

$[a, b]$ tarteko x -ren balio guztietarako, non $\varepsilon_n \rightarrow 0$ bait da $n \rightarrow \infty$ denean.

1. Oharra. Lortutako emaitza ondoko eran irudika dezakegu geometrikoki.



347. IRUDIA

Azter dezagun $y = s(x)$ funtzioaren grafikoa. Marra dezagun kurba horren gainean $2\varepsilon_n$ zabalerako faxa bat, hots, marra ditzagun

$$y = s(x) + \varepsilon_n, \text{ eta } y = s(x) - \varepsilon_n$$

kurbak (347. irudia). Kasu honetan, ε_n orotarako $s_n(x)$ funtzioaren grafiko osoa hartutako faxaren barnean egongo da. Faxa horren barnean hurrengo batura partzial guztien grafikoak ere egongo dira.

2. Oharra. $[a, b]$ tartean konbergente diren funtzio-serie guztiek ez dute halabezarrez aurreko teoreman frogatutako propietatea. Baita aurreko propietatea duten serie ez-majoragarriak ere badago. Aipatu propietatea duen serie oro $[a, b]$ tartean *uniformeki konbergente* deitzen da.

Honela,

$$u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x) + \dots$$

funtzio-seriea $[a, b]$ tartean uniformeki konbergentea dela esaten da, nahi bezain txikia den $\varepsilon > 0$ zenbaki positibo bakoitzari N zenbaki bat badagokio, non $n \geq N$ guztietarako

$$|s(x) - s_n(x)| < \varepsilon$$

desberdintza betetzen bait da, $[a, b]$ tarteko x puntua edozein delarik ere.

Frogatutako teorematik ondorioztatzen da, serie majoragarri bat serie uniformeki konbergentea dela.

§ 11. Serie baten baturaren jarraitasuna

Izan bedi

$$u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x) + \dots$$

funtzio jarraien serie konbergentea $[a,b]$ tartean.

II. gailan frogatu dugu funtzio jarraien kopuru finitu baten batura funtzio jarraia dela. Propietate hori ez da betetzen serie baten baturarako (batugai-kopuru infinituz osaturik bait dago). Funtzio jarraien zenbait seriek baturatzat funtzio jarraia dauka, funtzio jarraien beste serie batzuk, aldiz, baturatzat funtzio etena dute.

Adibidea. Kontsidera dezagun

$$\left(x^{\frac{1}{3}} - x\right) + \left(x^{\frac{1}{5}} - x^{\frac{1}{3}}\right) + \left(x^{\frac{1}{7}} - x^{\frac{1}{5}}\right) + \dots + \left(x^{\frac{1}{2n+1}} - x^{\frac{1}{2n-1}}\right) + \dots$$

seriea. Serie horren gaiak [parentesien artekoak] funtzio jarraiak dira x -ren balio guztietarako. Froga dezagun serie hori konbergentea dela eta bere batura funtzio eten bat dela.

Aurki dezagun serie horren lehenengo n gaien batura:

$$s_n = x^{\frac{1}{2n+1}} - x.$$

Bila dezagun seriearen batura: $x > 0$ bada,

$$s = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(x^{\frac{1}{2n+1}} - x\right) = 1 - x$$

daukagu; $x < 0$ bada,

$$s = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(-|x|^{\frac{1}{2n+1}} - x\right) = -1 - x$$

dugu; $x = 0$ bada, $s_n = 0$ da; hori dela eta, $s = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = 0$. Era horretan,

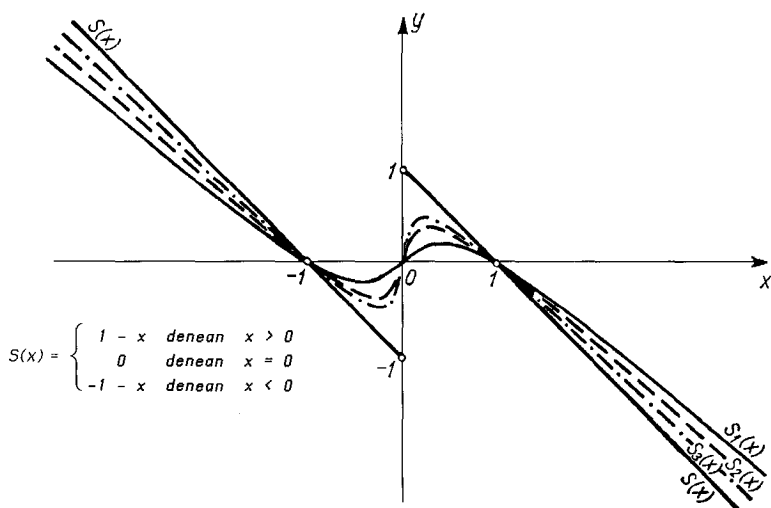
$$\begin{aligned} s(x) &= 1 - x & x > 0 & \text{ denerako} \\ s(x) &= -1 - x & x < 0 & \text{ denerako} \\ s(x) &= 0 & x = 0 & \text{ denerako} \end{aligned}$$

daukagu. Honela, aztertutako seriearen batura funtzio etena da; bere grafikoa 348. irudian adierazita dago, bertan $s_1(x)$, $s_2(x)$, $s_3(x)$ batura partzialen grafikoa ere ematen dira. Serie majoragarrietarako ondoko teorema betetzen da.

Teorema. $[a, b]$ tartean majoragarri diren funtzio jarraien serie baten batura, funtzio jarraia da aipatutako tartean.

Frogapena. Demagun funtzio jarraien serie bat daukagula, $[a, b]$ tartean majoragarria:

$$u_1(x) + u_2(x) + u_3(x) + \dots \quad (1)$$



348. IRUDIA

Idatz dezagun bere batura

$$s(x) = s_n(x) + r_n(x)$$

eran, non

$$s_n(x) = u_1(x) + \dots + u_n(x)$$

eta

$$r_n(x) = u_{n+1}(x) + u_{n+2}(x) + \dots$$

diren. Har dezagun $[a, b]$ tartean x -ren hautazko balio bat eta egoki diezaioگون Δx gehikuntza, $x + \Delta x$ puntua ere $[a, b]$ tartean egon dadin.

Sar ditzagun

$$\Delta s = s(x + \Delta x) - s(x),$$

$$\Delta s_n = s_n(x + \Delta x) - s_n(x)$$

idazkerak; orduan,

$$\Delta s = \Delta s_n + r_n(x + \Delta x) - r_n(x),$$

hortik,

$$|\Delta s| \leq |\Delta s_n| + |r_n(x + \Delta x)| + |r_n(x)|. \quad (2)$$

Desberdintza horrek balio du edozein n zenbakitarako.

$s(x)$ -ren jarraitasuna frogatzeko frogatu behar da aurretik emandako $\varepsilon > 0$ edozein zenbakitarako, nahi bezain txikia, $\delta > 0$ zenbaki bat existitzen dela, non $|\Delta x| < \delta$ guztietarako $|\Delta s| < \varepsilon$ betetzen bait da.

Emandako (1) seriea majoragarri denez gero, aurretik finkatutako edozein $\varepsilon > 0$ baliori N zenbaki bat dagokio, non $n \geq N$ guztietarako, eta bereziki, $n = N$ denerako,

$$|r_N(x)| < \frac{\varepsilon}{3} \quad (3)$$

desberdintza betetzen den, $[a, b]$ tarteko x edozein dela ere. $x + \Delta x$ balioa $[a, b]$ tartean dago eta horregatik

$$|r_N(x + \Delta x)| < \frac{\varepsilon}{3} \quad (3')$$

desberdintza betetzen da.

Beraz, aukeratutako N -rako, $s_N(x)$ batura partziala funtzio jarraia da (funtzio jarraien kopuru finitu baten batura), eta, hortaz, δ zenbaki positibo bat aukera daiteke, non $|\Delta x| < \delta$ baldintza betetzen duen Δx orotarako

$$|\Delta s_N| < \frac{\varepsilon}{3} \quad (4)$$

desberdintza betetzen bait da.

(2), (3), (3') eta (4) desberdintzei esker

$$|\Delta s| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

daukagu, hots, $|\Delta s| < \varepsilon$ da $|\Delta x| < \delta$ bada, horrek esan nahi du $s(x)$ x puntuan (eta, ondorioz, $[a, b]$ tarteko puntu guztietan) funtzio jarraia dela.

Oharra. Frogatutako teorematik ondorioztatzen da $[a, b]$ tarte batean serie baten batura etena bada seriea ez dela majoragarri tarte horretan. Bereziki, adibidean aztertutako seriea ez da majoragarri $x = 0$ puntua daukan edozein tartetan, seriearen baturaren etengune bat da eta.

Ohar gaitezen, azkenik, elkarrekikoa ez dela zuzena: badaude tarte batean majoragarri ez diren serieak, eta, aldiz, tarte horretan funtzio jarrai baterantz konbergitzen dutenak. Bereziki, $[a, b]$ tartean uniformeki konbergente den serie orok (majoragarri ez bada ere) baturatzat funtzio jarrai bat dauka (jakina, seriearen gai guztiak jarraiak badira).

§ 12. Serieen deribazioa eta integrazioa

1. Teorema. Izan bedi

$$u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x) + \dots \quad (1)$$

funtzio jarraien serie majoragarri bat $[a, b]$ tartean eta bedi $s(x)$ serie horren batura. Orduan, $[a, b]$ tartean dauden α eta x mugen arteko $s(x)$ -ren integrala emandako seriearen gaien integralen arteko batura da, hau da,

$$\int_{\alpha}^x s(t) dt = \int_{\alpha}^x u_1(t) dt + \int_{\alpha}^x u_2(t) dt + \dots + \int_{\alpha}^x u_n(t) dt + \dots$$

Frogapena. $s(x)$ funtzioa

$$s(x) = s_n(x) + r_n(x)$$

edo

$$s(x) = u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x) + r_n(x)$$

eran adieraz dezakegu. Orduan,

$$\int_{\alpha}^x s(t) dt = \int_{\alpha}^x u_1(t) dt + \int_{\alpha}^x u_2(t) dt + \dots + \int_{\alpha}^x u_n(t) dt + \int_{\alpha}^x r_n(t) dt \quad (2)$$

(batugai-kopuru finitu baten baturaren integrala gai horien integralen batura da).

Hasierako (1) seriea majoragarria denez, edozein x -tarako $|r_n(x)| < \varepsilon_n$ dugu, non $\varepsilon_n \rightarrow 0$ den, $n \rightarrow \infty$ denean; hori dela eta,

$$\left| \int_{\alpha}^x r_n(t) dt \right| \leq \int_{\alpha}^x |r_n(t)| dt < \int_{\alpha}^x \varepsilon_n dt = \varepsilon_n (x - \alpha) \leq \varepsilon_n (b - a).$$

$\varepsilon_n \rightarrow 0$ denez gero,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\alpha}^x r_n(t) dt = 0.$$

Baina (2) berdintzatik

$$\int_{\alpha}^x r_n(t) dt = \int_{\alpha}^x s(t) dt - \left[\int_{\alpha}^x u_1(t) dt + \dots + \int_{\alpha}^x u_n(t) dt \right]$$

erdiesten dugu. Hortaz,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \int_{\alpha}^x s(t) dt - \left[\int_{\alpha}^x u_1(t) dt + \dots + \int_{\alpha}^x u_n(t) dt \right] \right\} = 0$$

edo

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\int_{\alpha}^x u_1(t) dt + \dots + \int_{\alpha}^x u_n(t) dt \right] = \int_{\alpha}^x s(t) dt \quad (3)$$

dugu. Kortxeteen arteko batura

$$\int_{\alpha}^x u_1(t) dt + \dots + \int_{\alpha}^x u_n(t) dt + \dots \quad (4)$$

seriearen batura partziala da. Serie horren batura partzialek limiterik dutenez, aipatu seriea konbergentea da eta bere batura, (3) berdintzaren arabera,

$$\int_{\alpha}^x s(t) dt$$

da, hau da,

$$\int_{\alpha}^x s(t) dt = \int_{\alpha}^x u_1(t) dt + \int_{\alpha}^x u_2(t) dt + \dots + \int_{\alpha}^x u_n(t) dt + \dots$$

Hori da frogatu nahi zen berdintza.

1. Oharra. Seriea ez bada majoragarri beti ez dago seriea gaiz gai integratzerik, hau da, (1) seriearen baturaren

$$\int_{\alpha}^x s(t) dt$$

integrala ez da beti bere gaien integralen arteko batura [hots, (4) seriearen batura] izango.

2. Teorema. $[a, b]$ tartean deribatu jarraidun funtzio jarraiez osatutako

$$u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x) + \dots \quad (5)$$

seriea konbergentea bada tarte horretan $s(x)$ baturarantz eta bere gaien deribatuez osatutako

$$u_1'(x) + u_2'(x) + \dots + u_n'(x) + \dots \quad (6)$$

seriea majoragarria bada tarte horretan, deribatuen seriearen batura hasierako seriearen baturaren deribatua da, hau da,

$$s'(x) = u_1'(x) + u_2'(x) + u_3'(x) + \dots + u_n'(x) + \dots$$

Frogapena. Izenda dezagun $F(x)$ (6) seriearen batura:

$$F(x) = u_1'(x) + u_2'(x) + u_3'(x) + \dots + u_n'(x) + \dots,$$

eta frogat dezagun

$$F(x) = s'(x).$$

(6) seriea majoragarria denez, aurreko teoremaz baliatuz,

$$\int_{\alpha}^x F(t) dt = \int_{\alpha}^x u_1'(t) dt + \int_{\alpha}^x u_2'(t) dt + \dots + \int_{\alpha}^x u_n'(t) dt + \dots$$

daukagu. Bigarren atalean integratuz

$$\int_{\alpha}^x F(t) dt = [u_1(x) - u_1(\alpha)] + [u_2(x) - u_2(\alpha)] + \dots + [u_n(x) - u_n(\alpha)] + \dots$$

erdiesten dugu. Baina,

$$\begin{aligned} s(x) &= u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x) + \dots, \\ s(\alpha) &= u_1(\alpha) + u_2(\alpha) + \dots + u_n(\alpha) + \dots, \end{aligned}$$

x eta α $[a, b]$ tarteko edozein zenbaki izanik. Horregatik,

$$\int_{\alpha}^x F(t) dt = s(x) - s(\alpha).$$

Azken berdintzaren bi atalak x -rekiko deribatuz

$$F(x) = s'(x)$$

lortzen dugu. Era horretan, teoremaren baldintzak betez gero, serie baten baturaren deribatua seriearen gaien deribatuen arteko batura dela frogatu dugu.

2. Oharra. Oso garrantzitsua da deribatuen seriea majoragarri izatea, hori ez betetzeak seriearen gaiz gaiko deribazioa galeraz bait dezake. Baieztatzeko, gaiz gaiko deribazioa onartzen ez duen serie majoragarriaren adibidea aipatuko dugu.

Kontsidera dezagun

$$\frac{\sin 1^4 x}{1^2} + \frac{\sin 2^4 x}{2^2} + \frac{\sin 3^4 x}{3^2} + \dots + \frac{\sin n^4 x}{n^2} + \dots$$

seriea. Serie honek funtzio jarrai baterantz konbergitzen du, majoragarria bait da. Izan ere, edozein x -tarako, bere gaiak balio absolutuan

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} + \dots$$

zenbaki-serie konbergentearen gai positiboak baino txikiagoak dira. Idatz dezagun hasierako seriearen gaien deribatuez osatutako seriea:

$$\cos x + 2^2 \cos 2^4 x + \dots + n^2 \cos n^4 x + \dots$$

Hori dibergentea da. Honela, adibidez, $x=0$ denean,

$$1 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 + \dots$$

serie bihurtzen da, (froga daiteke $x=0$ puntuaz gain beste puntutan dibergentea dela).

§ 13. Berredura-serieak. Konbergentzi tarteak

1. Definizioa. Berredura-serie deituko diogu

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots \quad (1)$$

itxurako funtzio-serie bati, non $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ zenbaki konstanteak diren, seriearen koefiziente deiturikoak.

Berredura-seriearen konbergentzi eremua beti da tarte bat, puntu bakar bat izan daitekeena. Hori egiaztatzeko, froga dezagun lehenago berredura-serieen teorian garrantzi handia duen ondoko teorema.

1. Teorema. (Abel-en teorema). 1) Berredura-seriea x_0 balio ez-nulu baterako konbergentea bada absolutuki konbergentea da

$$|x| < |x_0|$$

betetzen duen x -ren balio orotarako;

2) Seriea dibergentea bada x_0' balio baterako, dibergentea da

$$|x| > |x_0'|$$

betetzen duen x -ren balio orotarako.

Frogapena. Hipotesiaren arabera

$$a_0 + a_1x_0 + a_2x_0^2 + \dots + ax_0^n + \dots \quad (1')$$

zenbaki-seriea konbergentea denez, bere gai orokorra $a_n x_0^n \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$ denean; horrek esan nahi du M zenbaki positibo bat existitzen dela, non seriearen gai guztiak balio absolutuan M baino txikiagoak diren.

Idatz dezagun (1) seriea

$$a_0 + a_1x_0\left(\frac{x}{x_0}\right) + a_2x_0^2\left(\frac{x}{x_0}\right)^2 + \dots + a_nx_0^n\left(\frac{x}{x_0}\right)^n + \dots \quad (1a)$$

eran eta kontsidera dezagun bere gaien balio absolutuen seriea:

$$|a_0| + |a_1x_0|\left|\frac{x}{x_0}\right| + |a_2x_0^2|\left|\frac{x}{x_0}\right|^2 + \dots + |a_nx_0^n|\left|\frac{x}{x_0}\right|^n + \dots \quad (2)$$

Serie horren gaiak dagozkien

$$M + M\left|\frac{x}{x_0}\right| + M\left|\frac{x}{x_0}\right|^2 + \dots + M\left|\frac{x}{x_0}\right|^n + \dots \quad (3)$$

seriearen gaiak baino txikiagoak dira. $|x| < |x_0|$ denean, azkeneko seriea $\left|\frac{x}{x_0}\right| < 1$

arrazoiko progresio geometrikoa da, eta beraz konbergentea. (2) seriearen gaiak dagozkien

(3) seriearen gaiak baino txikiagoak direnez gero (2) seriea ere konbergentea da; horrek esan nahi du (1a) edo (1) seriea absolutuki konbergentea dela.

2) Orain ez da zaila izango teoremaren bigarren zatia frogatzea: demagun (1) seriea dibergentea dela x_0' puntu batean. Orduan, serie hori dibergentea da $|x| > |x_0'|$ baldintza betetzen duen edozein x puntutan. Izan ere, seriea konbergentea balitz baldintza hori betetzen duen x puntu batean, teoremaren lehenengo zatiaren arabera x_0' puntuan ere konbergente izan beharko luke, $|x_0'| < |x|$ bait da. Baina, horrek seriea x_0' puntuan dibergentea deneko hipotesiaren kontra jotzen du. Hortaz, seriea x puntuan ere dibergentea da. Era horretan, teorema guztiz frogaturik dago.

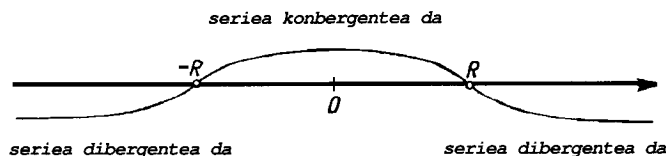
Abel-en teorema uzten digu berredura-serie baten konbergentzi eta dibergentzi puntuak determinatzen. Izan ere, x_0 konbergentzi puntu bat bada, $(-|x_0|, |x_0|)$ tarteko puntu guztiak konbergentzia absolutuko puntuak dira. x_0' dibergentzi puntua bada, $|x_0'|$ puntuaren eskuin aldeko zuzenerdi osoa eta $-|x_0'|$ puntuaren ezkerraldeko zuzenerdi osoa dibergentzi puntuez daude osaturik.

Horrek esaten digu R zenbaki erreal bat existitzen dela, non $|x| < R$ denerako konbergentzia absolutuko puntuak ditugun eta $|x| > R$ denerako dibergentzi puntuak.

Eman dezakegu, beraz, berredura-serie baten konbergentzi eremuaren egiturari buruzko ondoko teorema.

2. Teorema. Berredura-serie baten konbergentzi eremua koordenatu-jatorrian zentratutako tarte bat da.

2. Definizioa. $-R$ -tik $+R$ -ra doan tarte, non tarte horren mugen artean dagoen x orotarako seriea absolutuki konbergentea den eta bertatik kanpo dauden x puntuetarako seriea dibergentea den, berredura-serie baten *konbergentzi tarte* deitzen da (349. irudia). R zenbakia berredura-seriearen *konbergentzi erradio* deitzen da.



349. IRUDIA

Tarteko muturretan (hau da, $x=R$ eta $x=-R$ puntuetan) emandako serie konkretu bakoitzaren konbergentzia edo dibergentziaren auzia banan-banan ebatzi behar da.

Ohar dezagun serie batzuetan konbergentzi tartea puntu bakar bat dela ($R=0$) eta, beste batzuetan, Ox ardatz osoa hartzen duela ($R=\infty$).

Eman dezagun berredura-serie baten konbergentzi erradioa determinatzeko era.

Izan bedi

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n + \dots \quad (1)$$

seriea.

Konsidera dezagun bere gaien balio absolutuez osatutako seriea:

$$|a_0| + |a_1||x| + |a_2||x|^2 + |a_3||x|^3 + |a_4||x|^4 + \dots + |a_n||x|^n + \dots \quad (4)$$

(Gai positibotako) azken serie horren konbergentzia determinatzeko aplika dezagun D'Alembert-en irizpidea.

Demagun

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_nx^n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| |x| = L|x|$$

limitea existitzen dela.

Orduan, D'Alembert-en irizpidearen arabera, (4) serie konbergentea da $L|x| < 1$

bada, hau da, $|x| < \frac{1}{L}$ bada, eta dibergentea $L|x| > 1$ bada, hau da, $|x| > \frac{1}{L}$.

Hortaz, (1) seriea absolutuki konbergentea da $|x| < \frac{1}{L}$ denerako. Baina, $|x| > \frac{1}{L}$

bada,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = |x|L > 1$$

da, eta (4) seriea dibergentea da, bere gai orokorrak ez bait du zerorantz jotzen³⁾. Kasu honetan emandako berredura-seriearen gai orokorrak ere ez du zerorantz jotzen, eta horrek

3) Gogora dezagun D'Alembert-en irizpidea frogatzean (ikus § 4) esan dugula, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$ bada seriearen gai orokorra hazten dela eta, beraz, ez duela zerorantz jotzen.

esan nahi du, konbergentzi irizpide beharrezkoaren arabera, berredura-serie hori dibergentea

dela $\left(|x| > \frac{1}{L} \text{ denean}\right)$.

Arestian azaldutakotik ondorioztatzen da

$$\left(-\frac{1}{L}, \frac{1}{L}\right)$$

tartea (1) berredura-seriearen konbergentzi tartea dela, hots,

$$R = \frac{1}{L} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|.$$

Antzeko eran aplikatu daiteke Cauchy-ren irizpidea konbergentzi tartea determinatzeko, eta orduan:

$$R = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}}.$$

1. Adibidea. Determinatu

$$1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^n + \dots$$

seriearen konbergentzi tartea.

Ebazpena. Zuzenean D'Alembert-en irizpidea aplikatuz

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{x^{n+1}}{x^n} \right| = |x|$$

lortzen dugu.

Hortaz, seriea konbergentea da $|x| < 1$ denerako, eta dibergentea $|x| > 1$ denerako.

$(-1, 1)$ tarteko muturretan seriearen azterketak, D'Alembert-en irizpidearen bidez, ez gaitu inongo emaitzara eramango. Hala ere, zuzenean ikus daiteke seriea dibergentea dela $x = -1$ eta $x = 1$ denean.

2. Adibidea. Determinatu

$$\frac{2x}{1} - \frac{(2x)^2}{2} + \frac{(2x)^3}{3} - \dots$$

seriearen konbergentzi tarte.

Ebazpena. D'Alembert-en irizpidea aplikatzen dugu:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{(2x)^{n+1}}{n+1}}{\frac{(2x)^n}{n}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{n}{n+1} \right| |2x| = |2x|.$$

Seriea konbergentea da $|2x| < 1$ denean, hau da, $|x| < \frac{1}{2}$ bada; $x = \frac{1}{2}$ seriea konbergentea da; $x = \frac{-1}{2}$ bada seriea dibergentea da.

3. Adibidea. Determinatu

$$x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots$$

seriearen konbergentzi tarte.

Ebazpena. D'Alembert-en irizpidea aplikatuz

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{x^{n+1} n!}{x^n (n+1)!} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{x}{n+1} \right| = 0 < 1$$

erdiesten dugu. Limitea x -ren menpe ez dagoenez eta 1 baino txikiagoa denez, seriea konbergentea da x -ren balio guztietarako.

4. Adibidea.

$$1 + x + (2x)^2 + (3x)^3 + \dots + (nx)^n + \dots$$

seriea dibergentea da x -ren balio guztietarako, $x=0$ izan ezik, $(nx)^n \rightarrow \infty$ delako $n \rightarrow \infty$ denean, x -ren balioa edozein dela ere, zero izan ezik.

3. Teorema.

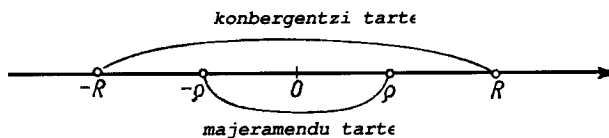
$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots \quad (1)$$

berredura-serie bat majoragarria da konbergentzi tartearen barnean dagoen $[-\rho, \rho]$ tarte orotan.

Frogapena. Hipotesiz, $\rho < R$; hori dela eta

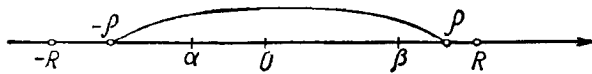
$$|a_0| + |a_1|\rho + |a_2|\rho^2 + \dots + |a_n|\rho^n + \dots \quad (5)$$

(gai positibotako) zenbaki-seriea konbergentea da. Baina $|x| < \rho$ denean, (1) seriearen gaiak ez dira balio absolutuan (5) seriearen gaiak baino handiagoak. Hortaz, (1) seriea majoragarria da $[-\rho, \rho]$ tartean.



350. IRUDIA

1. Korolaria. Berredura-serie baten batura funtzio jarraia da konbergentzi tartean barneko tarte orotan. Izan ere, seriea majoragarria da tarte horretan eta bere gaiak x -ren funtzio jarraiak dira. Hortaz, § 11ko 1. teoremaren arabera, serie horren batura jarraia da.



351. IRUDIA

2. Korolaria. α, β integrazio-mugak berredura-serie baten konbergentzi tartean badaude seriearen baturaren integrala seriearen gaien integralen arteko batura da. Izan ere, integrazio-eremua sar daiteke seriea majoragarri deneko $[-\rho, \rho]$ tartean (351. irudia) (ikus § 12ko 2. teorema, serie majoragarrien gaiz gaiko integrazioari buruzkoa).

§ 14. Berredura-serieen deribazioa

1. Teorema.

$$s(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + \dots + a_nx^n + \dots \quad (1)$$

berredura-serieak $(-R, R)$ konbergentzi tartea badauka,

$$\varphi(x) = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \dots + na_nx^{n-1} + \dots \quad (2)$$

serieak, (1) serietik gaiz gaiko deribazioz lortuta, $(-R, R)$ konbergentzi tarte bera dauka; horrez gain, $\varphi(x) = s'(x)$, $|x| < R$ denean, hau da, konbergentzi tartean (1) berredura-seriearen baturaren deribatua (1) serietik gaiz gaiko deribazioz lortutako seriearen baturaren berdina da.

Frogapena. Froga dezagun (2) seriea majoragarri dela konbergentzi tartearen barneko $[-\rho, \rho]$ tarte orotan.



352. IRUDIA

Har dezagun $\rho < \xi < R$ betetzen duen ξ puntu bat (352. irudia). Puntu horretan (1) seriea konbergentea da; hortaz, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \xi^n = 0$ da, eta, horregatik, M zenbaki konstante bat aurki daiteke, non

$$|a_n \xi^n| < M \quad (n = 1, 2, \dots)$$

bait da. $|x| \leq \rho$ bada,

$$|na_n x^{n-1}| \leq |na_n \rho^{n-1}| = n |a_n \xi^{n-1}| \left| \frac{\rho}{\xi} \right|^{n-1} < n \frac{M}{\xi} q^{n-1}$$

dugu, non

$$q = \frac{\rho}{\xi} < 1$$

den.

Era honetan, $|x| \leq \rho$ denean, (2) seriearen gaiak, balio absolutuan,

$$\frac{M}{\xi} (1 + 2q + 3q^2 + \dots + nq^{n-1} + \dots)$$

zenbaki-serie positiboaren gaiak baino txikiagoak dira.

Baina, D'Alembert-en irizpideak frogatzen duen legez, azkeneko seriea konbergentea da:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{nq^{n-1}}{(n-1)q^{n-2}} = q < 1.$$

Hortaz, (2) seriea majoragarria da $[-\rho, \rho]$ tartean, eta, § 12ko 2. teoremaren arabera, bere batura emandako seriearen baturaren deribatua da $[-\rho, \rho]$ tartean, hau da,

$$\varphi(x) = s'(x).$$

$(-R, R)$ tartearen barne-puntu oro $[-\rho, \rho]$ tarte batean sar daitekeenez gero, (2) seriea $(-R, R)$ tartearen edozein barne-puntutan konbergentea dela atera daiteke.

Froga dezagun (2) seriea, $(-R, R)$ tartearen kanpoaldean dibergentea dela. Demagun (2) seriea, $x_1 > R$ puntuan konbergentea dela. Gaiz gai integratuz $(0, x_2)$ tartean, non $R < x_2 < x_1$ den, (1) seriea lortzen dugu, zeina x_2 puntuan konbergentea den, baina horrek teoremaren baldintzen kontra jotzen du. Honela, $(-R, R)$ tarte (2) seriearen konbergentzi tarte da. Teorema, beraz, zeharo frogaturik dago.

(2) seriea berriz deriba daiteke gaiz gai eta prozesu hau segi daiteke nahi adina alditan. Era horretan, zera lortzen da:

2. Teorema. Berredura-serie bat $(-R, R)$ tarte batean konbergentea bada, bere baturak funtzio bat adierazten du, zeinak konbergentzi tartean edozein ordenatuko deribatuak bait ditu, horietako bakoitza emandako seriea gaiz gai deribatuz lortutako serieen batura izanik; kasu honetan, deribazioz lortutako serie bakoitzaren konbergentzi tarte $(-R, R)$ tarte bera delarik.

§ 15. $(x - a)$ -ren berreduratako serieak

$$a_0 + a_1(x - a) + a_2(x - a)^2 + \dots + a_n(x - a)^n + \dots \quad (1)$$

itxurako funtzio-serieari ere *berredura-serie* deritzo.

Hor, $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ konstanteak ere seriearen koefiziente deitzen dira.

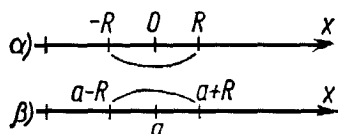
Serie hori $x - a$ binomioaren berredura gorakorren arabera dago ordenaturik.

$a = 0$ denean, x -ren berreduratako serie bat erdiesten dugu, beraz, (1) seriearen kasu partikularra da.

(1) seriearen konbergentzi eremua determinatzeko, egin dezagun $x - a = X$ aldagai-aldaketa. Ordezkatutakoan (1) serieak

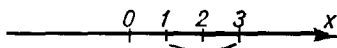
$$a_0 + a_1X + a_2X^2 + \dots + a_nX^n + \dots \quad (2)$$

itxura hartzen du, hau da, X -ren berreduratako seriea lortu dugu.



353. IRUDIA

Izan bedi $-R < X < R$ (2) seriearen konbergentzi tartea (353. irudia, α). Hortik, (1) seriea $-R < x - a < R$, edota $a - R < x < a + R$, desberdintza betetzen duten x balioetarako konbergentzia dela ateratzen da. (2) seriea $|X| > R$ balioetarako dibergentzia denez gero (1) seriea dibergentzia izango da $|x - a| > R$ denerako, hau da, dibergentzia izango da $a - R < x < a + R$ tartetik at (353. irudia, β).



354. IRUDIA

Hortaz, (1) seriearen konbergentzi tartea a puntuan zentratutako $(a - R, a + R)$ tartea da. x -ren berreduratako serieak $(-R, R)$ konbergentzi tartearen barnean dituen propietate guztiek irauten dute $(x - a)$ -ren berreduratako serie baterako $(a - R, a + R)$ konbergentzi tartearen barnean. Honela, adibidez, (1) seriea gaiz gai integratutakoan, integrazio-mugak konbergentzi tartearen barnean badaude, serie bat lortuko dugu, zeinaren batura dagokien (1) seriearen baturaren integrala den. (1) berredura-seriearen gaiz gaiko deribazioaren bitartez, $(a - R, a + R)$ konbergentzi tartearen barnean dauden x balio guztietarako, bere baturatzat emandako (1) seriearen baturaren deribatua duen serie bat erdietsiko dugu.

Adibidea. Bilatu

$$(x - 2) + (x - 2)^2 + (x - 2)^3 + \dots + (x - 2)^n + \dots$$

seriearen konbergentzi eremua.

Ebazpena. $x - 2 = X$ eginez

$$X + X^2 + X^3 + \dots + X^n + \dots$$

seriea lortzen dugu. Serie hori konbergentzia da $-1 < X < +1$ puntuetan. Hortaz, emandako seriea konbergentzia izango da $-1 < x - 2 < 1$ betetzen duten x balio guztietarako, hau da, $1 < x < 3$ denean (354. irudia).

§ 16. Taylor eta Maclaurin-en serieak

IV. gaiko § 6an frogatu dugu $(n+1)$. ordenaraino barne deribagarri den $f(x)$ funtzio baterako, $x=a$ puntuaren ingurune batean (hots, $x=a$ puntua daukan tarte batean) Taylor-en formulak balio duela:

$$f(x) = f(a) + \frac{x-a}{1} f'(a) + \frac{(x-a)^2}{1 \cdot 2} f''(a) + \dots + \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + R_n(x), \quad (1)$$

non gai osagarri deituriko $R_n(x)$

$$R_n(x) = \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}[a + \theta(x-a)], \quad 0 < \theta < 1,$$

formularen bidez kalkulatzen den.

$f(x)$ funtzioak $x=a$ puntuaren ingurunean infinitu deribatu badauka, Taylor-en formularen n nahi bezain handia har dezakegu.

Demagun, kontsideratutako ingurunean, $R_n(x)$ gai osagarriak zerorantz jotzen duela, $n \rightarrow \infty$ denean:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0.$$

Orduan, (1) formularen limitera pasatuz, $n \rightarrow \infty$ denean, eskuineko atalean serie infinitua lortzen dugu, *Taylor-en seriea* alegia:

$$f(x) = f(a) + \frac{x-a}{1} f'(a) + \dots + \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + \dots \quad (2)$$

Azkeneko berdintza $n \rightarrow \infty$ denean $R_n \rightarrow 0$ deneko kasuan soilik betetzen da. Kasu horretan bigarren ataleko seriea konbergentea da eta bere batura emandako $f(x)$ funtzioaren berdina da. Froga dezagun hola dela:

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x),$$

$$P_n(x) = f(a) + \frac{x-a}{1!} f'(a) + \dots + \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a)$$

izanik.

Hipotesiz,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$$

denez gero,

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} P_n(x)$$

dugu. Baina $P_n(x)$ (2) seriearen n . batura partziala da; bere limitea (2) berdintzaren bigarren ataleko seriearen batura da. Hortaz, (2) berdintzak balio du:

$$f(x) = f(a) + \frac{x-a}{1} f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2} f''(a) + \dots + \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + \dots$$

Azaldutakotik ondorioztatzen da Taylor-en serieak emandako $f(x)$ funtzioa

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$$

denean soilik adierazten duela.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) \neq 0$$

bada, serieak ez du emandako funtzioa adierazten, konbergentea izan badaiteke ere (beste funtzio baterantz).

Taylor-en seriean $a=0$ egiten badugu, horren kasu partikular bat erdiesten dugu, *Maclaurin-en serie* delakoa:

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1} f'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \dots + \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0) + \dots \quad (3)$$

Funtzio baten Taylor-en seriea formalki idazten badugu, idatzitako serieak emandako funtzioa benetan adierazten duela frogatzeko, gai osagarriak zerorantz jotzen duela frogatu behar da edo idatzitako seriea emandako funtziorantz konbergentea dela, hala edo nola, egiaztatu.

Ohar dezagun, I. gaiko § 8an determinatutako funtzio elemental bakoitzerako a eta R existitzen direla, non $(a-R, a+R)$ tartean Taylor-en, edo ($a=0$ bada) Maclaurin-en, seriez garagarriak bait dira.

§ 17. Funtzioen seriezko garapenen adibideak

1. $f(x) = \sin x$ funtzioaren Maclaurin-en seriezko garapena.

IV. gaiko § 7an

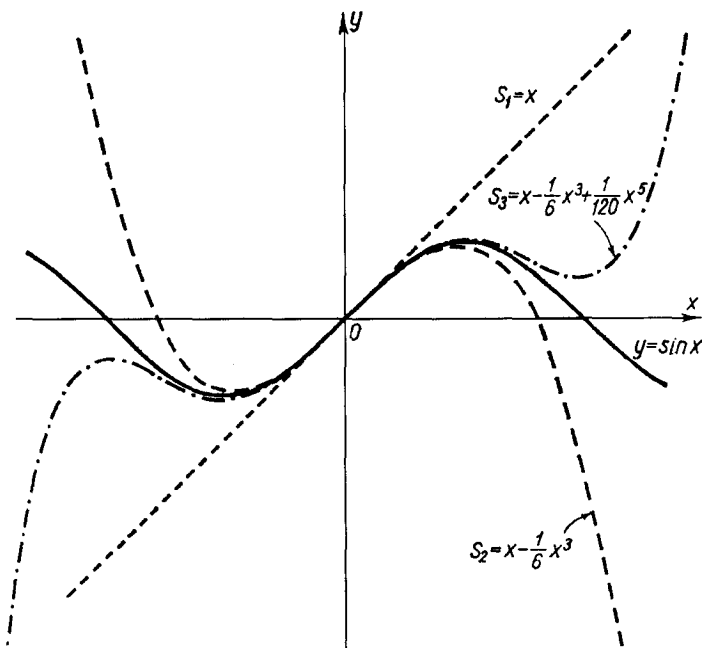
$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + R_{2n}(x)$$

formula lortu dugu.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_{2n}(x) = 0$$

dela frogatu dugunez, aurreko atalean azaldutakoaren arabera, $\sin x$ funtzioaren Maclaurin-en seriezko garapena lortzen dugu:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \dots \quad (1)$$



355. IRUDIA

Gai osagarriak edozein x -tarako zerorantz jotzen duenez gero, emandako seriea konbergentea da eta edozein x -tarako baturatzat $\sin x$ funtzioa dauka.

355. irudian $\sin x$ funtzioa eta (1) seriearen lehenengo hiru batura partzialen grafikoak adierazten dira.

Serie hori erabiltzen da $\sin x$ funtzioaren balioak kalkulatzeko x -ren balio desberdinetarako.

Kalkula dezagun, esaterako, $\sin 10^\circ$, 10^{-5} baino errore txikiagoa eginez.

$$10^\circ = \frac{\pi}{18} = 0'174533 \text{ denez,}$$

$$\sin 10^\circ = \frac{\pi}{18} - \frac{1}{3!} \left(\frac{\pi}{18} \right)^3 + \frac{1}{5!} \left(\frac{\pi}{18} \right)^5 - \frac{1}{7!} \left(\frac{\pi}{18} \right)^7 + \dots$$

da. Muga dezagun garapena lehenengo bi gaitara eta ondoko berdintza hurbildua lortuko dugu:

$$\sin \frac{\pi}{18} \approx \frac{\pi}{18} - \frac{1}{6} \left(\frac{\pi}{18} \right)^3;$$

δ errorea, balio absolutuan, ezabatutako lehenengo gaia baino txikiagoa da, hots

$$\delta < \frac{1}{5!} \left(\frac{\pi}{18} \right)^5 < \frac{1}{120} (0,2)^5 < 4 \cdot 10^{-6}.$$

$\sin \frac{\pi}{18}$ -ren adierazpeneko batugai bakoitza sei zifra hamartarrekin kalkulatzeko badugu,

$$\sin \frac{\pi}{18} = 0,173647$$

lortzen dugu.

Ziurta daiteke lehenengo lau zifrak zehatzak direla.

2. $f(x) = e^x$ funtzioaren Maclaurin-en setiezko garapena.

IV. gaiko § 7aren arabera

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots \quad (2)$$

daukagu, edozein x -tarako $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$ dela frogatu bait dugu. Hortaz, seriea

konbergentea da x -ren balio guztietarako eta e^x funtzioa adierazten du.

3. $f(x) = \cos x$ funtzioaren Maclaurin-en seriezko garapena.

IV. gaiko § 7aren arabera

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots \quad (3)$$

daukagu, x -ren balio guztietarako seriea konbergentea da eta $\cos x$ funtzioa adierazten du.

§ 18. Euler-en formula

Orain arte gai errealetako serieak kontsideratu ditugu, gai konplexutako serieak ikertu gabe. Gai konplexutako serieen teoria osoa azaldu gabe, lan honetatik at geratzen dena, adibide garrantzitsu bat ikusiko dugu.

VII. gaian e^{x+iy} funtzioa

$$e^{x+iy} = e^x (\cos y + i \sin y)$$

berdintzaren bidez definitu dugu. $x=0$ baliorako Euler-en formula lortzen dugu:

$$e^{iy} = \cos y + i \sin y.$$

Berretzaile irudikariko e^{iy} funtzio esponontziala e^x funtzioa berredura seriez garatzen duen § 17ko (2) formularen bidez definitzen badugu, Euler-en berdintza bera erdiesten dugu. Izan ere, determina dezagun e^{iy} , §17ko (2) berdintzan x, iy adierazpenaz ordezkatzuz:

$$e^{iy} = 1 + \frac{iy}{1!} + \frac{(iy)^2}{2!} + \frac{(iy)^3}{3!} + \dots + \frac{(iy)^n}{n!} + \dots \quad (1)$$

$$i^2 = -1, \quad i^3 = -i, \quad i^4 = 1, \quad i^5 = i, \quad i^6 = -1,$$

e.a. kontutan hartuz alda dezagun (1) formula honela:

$$e^{iy} = 1 + \frac{iy}{1!} - \frac{y^2}{2!} - \frac{iy^3}{3!} + \frac{y^4}{4!} + \frac{iy^5}{5!} + \dots$$

Serie horretan zati erreal eta irudikariak bereiztuz

$$e^{iy} = \left(1 - \frac{y^2}{2!} + \frac{y^4}{4!} - \dots \right) + i \left(\frac{y}{1!} - \frac{y^3}{3!} + \frac{y^5}{5!} - \dots \right)$$

aurkitzen dugu. Parentesien arteko adierazpenak baturatzen $\cos y$ eta $\sin y$, hurrenez hurren, daukaten berredura-serieak dira [ikus aurreko ataleko (3) eta (1) formulak]. Hortaz,

$$e^{iy} = \cos y + i \sin y.$$

Horrela, berriro ailegatu gara Euler-en formula.

§ 19. Serie binomikoa

1. Gara dezagun Maclaurin-en seriez

$$f(x) = (1+x)^m$$

funtzioa, non m hautazko zenbaki konstante bat den.

Hemen gai osagarriaren balioztapenak zenbait zailtasun dauka; hori dela eta, emandako funtzioa garatzeko, beste era batean egingo dugu.

Ohar gaitezen

$$f(x) = (1+x)^m$$

funtzioak

$$(1+x)f'(x) = mf(x) \tag{1}$$

ekuazio diferentziala eta $f(0) = 1$ baldintza betetzen dituela; bila dezagun (1) ekuazioa eta $s(0) = 1$ baldintza betetzen dituen berredura-serie bat:

$$s(x) = 1 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n + \dots \tag{2}$$

(1) ekuazioan sartuz,

4) Gai independentea unitatearen berdina dela onartu dugu $s(0) = 1$ hastapen-baldintzagatik.

$$(1+x)(a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \dots + na_nx^{n-1} + \dots) = m(1 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n + \dots)$$

daukagu. Berdintzaren bi ataletan x -ren potentzia bereko koefizienteak berdinuz

$$a_1 = m; \quad a_1 + 2a_2 = ma; \quad \dots; \quad na_n + (n+1)a_{n+1} = ma_n; \dots$$

aurkitzen dugu. Hortik, seriearen koefizienteetarako

$$a_0 = 1; \quad a_1 = m; \quad a_2 = \frac{a_1(m-1)}{2} = \frac{m(m-1)}{2};$$

$$a_3 = \frac{a_2(m-2)}{3} = \frac{m(m-1)(m-2)}{2 \cdot 3}; \quad \dots;$$

$$a_n = \frac{m(m-1)\dots[m-n+1]}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n}$$

adierazpenak lortzen ditugu. Horiek dira binomioaren koefizienteak.

(2) formula ordezkatuz

$$s(x) = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{1}x^2 + \dots + \frac{m(m-1)\dots[m-(n-1)]}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n}x^n + \dots \quad (3)$$

erdiesten dugu.

m zenbaki oso positiboa bada, x^{m+1} daukan gaitik aurrera koefiziente guztiak zeroren berdinak dira, eta seriea polinomio bihurtzen da. m zatikiarra edo zenbaki oso negatiboa bada serie infinitua daukagu.

Determina dezagun (3) seriearen konbergentzi erradioa:

$$u_{n+1} = \frac{m(m-1)\dots[m-n+1]}{n!}x^n,$$

$$u_n = \frac{m(m-1)\dots[m-n+2]}{(n-1)!}x^{n-1},$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{m(m-1)\dots(m-n+1)(n-1)!}{m(m-1)\dots(m-n+2)n!}x \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{m-n+1}{n} \right| |x| = |x|.$$

Era horretan, (3) seriea konbergentea da $|x| < 1$ denean.

$(-1,1)$ tartean (3) serieak (1) ekuazio diferentziala eta $s(0)=1$ baldintza betetzen dituen $s(x)$ funtzio bat adierazten du.

(1) ekuazio diferentziala eta $s(0)=1$ hasierako baldintza betetzen dituen funtzio bakar bat existitzen denez gero, (3) seriearen batura $(1+x)^m$ funtzioaren zeharo berdina da eta

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} x^3 + \dots \quad (3')$$

garapena lortzen dugu. Bereziki, $m=-1$ denerako

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots \quad (4)$$

daukagu. $m = \frac{1}{2}$ bada

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2 \cdot 4}x^2 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6}x^3 - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8}x^4 + \dots \quad (5)$$

izango da. $m = -\frac{1}{2}$ denean

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}x^2 - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}x^3 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8}x^4 - \dots \quad (6)$$

izango da.

2. Aplika dezagun binomioaren garapena beste funtzio batzuk garatzeko. Gara dezagun Maclaurin-en seriez

$$f(x) = \arcsin x$$

funtzioa. (6) berdintzan x , $-x^2$ adierazpenaz ordezkatzuz

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}x^4 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}x^6 + \dots + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot 2n}x^{2n} + \dots$$

lortzen dugu.

Berredura-serieen integrazioari buruzko teoreman oinarrituz, $|x| < 1$ denean,

$$\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \arcsin x = x + \frac{1}{2} \frac{x^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \frac{x^5}{5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \frac{x^7}{7} + \dots$$

$$\dots + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2n} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \dots$$

lortzen dugu.

Serie hori $(-1,1)$ tartean da konbergente. $x = \pm 1$ denean ere seriea konbergentea dela eta balio horiei dagokien seriearen batura ere $\arcsin x$ dela frogatu dezakegu. Orduan, $x = 1$ eginez, π kalkulatzeko formula lortzen dugu:

$$\arcsin 1 = \frac{\pi}{2} = 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{1}{5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{1}{7} + \dots$$

§ 20. $\ln(1+x)$ funtzioaren berredura-seriezeko garapena. Logaritmoen kalkulua

§ 19ko (4) berdintza 0 eta x mugen artean integratuz ($|x| < 1$ denerako)

$$\int_0^x \frac{dt}{1+t} = \int_0^x (1 - t + t^2 - t^3 + \dots) dt$$

edo

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} + \dots \quad (1)$$

daukagu.

Berdintza horrek $(-1,1)$ tartean balio du.

Aipatu formulan x -ren lekuan $-x$ idatziz gero

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \dots \quad (2)$$

seriea lortzen dugu, $(-1,1)$ tartean konbergentea dena.

(1) eta (2) serieen bidez zero eta biren arteko zenbakien logaritmoak kalkula ditzakegu. Esan dezagun, frogapenik gabe, (1) garapenak $x=1$ denerako ere balio duela.

Eman dezagun formula bat zenbaki osoen logaritmo arruntak kalkulatzeko.

Bi serie konbergenteen arteko gaiz gaiko kenketan serie konbergentea lortzen dugunez gero (ikus §1eko 3. teorema), (1) berdintzari (2)a atalez atal kenduz

$$\ln(1+x) - \ln(1-x) = \ln \frac{1+x}{1-x} = 2 \left[x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots \right]$$

aurkitzen dugu.

Horrez gain,

$$\frac{1+x}{1-x} = \frac{n+1}{n}$$

jartzen badugu,

$$x = \frac{1}{2n+1}$$

da. $n > 0$ orotarako $0 < x < 1$ daukagu, horregatik

$$\ln \frac{1+x}{1-x} = \ln \frac{n+1}{n} = 2 \left[\frac{1}{2n+1} + \frac{1}{3(2n+1)^3} + \frac{1}{5(2n+1)^5} + \dots \right],$$

nondik

$$\ln(n+1) - \ln n = 2 \left[\frac{1}{2n+1} + \frac{1}{3(2n+1)^3} + \frac{1}{5(2n+1)^5} + \dots \right] \quad (3)$$

den. $n=1$ denean,

$$\ln 2 = 2 \left[\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 3^3} + \frac{1}{5 \cdot 3^5} + \dots \right]$$

erdiesten dugu.

$\ln 2$ kalkulatzeko, emandako δ doitasun-maila batez, s_p batura partziala kalkulatu behar da, p gai-kopurua, ezabatutako gaien batura (hau da, s batura s_p

batura partzialez ordezkatzean egindako R_p errorea) δ errore onargarria baino txikiagoa izan dadin aukeratuz. Horretarako baliozta dezagun R_p

$$R_p = 2 \left[\frac{1}{(2p+1)3^{2p+1}} + \frac{1}{(2p+3)3^{2p+3}} + \frac{1}{(2p+5)3^{2p+5}} + \dots \right]$$

errorea. $2p+3, 2p+5, \dots$ zenbakiak $2p+1$ baino handiagoak direnez gero, $2p+1$ zenbakiaz ordezkatzean zatiki bakoitza handitzen dugu. Hori dela eta,

$$R_p < 2 \left[\frac{1}{(2p+1)3^{2p+1}} + \frac{1}{(2p+1)3^{2p+3}} + \frac{1}{(2p+1)3^{2p+5}} + \dots \right]$$

edo

$$R_p < \frac{2}{2p+1} \left[\frac{1}{3^{2p+1}} + \frac{1}{3^{2p+3}} + \frac{1}{3^{2p+5}} + \dots \right].$$

Kortxeteen arteko seriea $\frac{1}{9}$ arazoiko progresio geometrikoa da. Progresio horren batura kalkulatz

$$R_p < \frac{2}{2p+1} \frac{\frac{1}{3^{2p+1}}}{1 - \frac{1}{9}} = \frac{1}{(2p+1)3^{2p-1}4} \quad (4)$$

topatzen dugu. Orain, $\ln 2$ kalkulatu nahi badugu, adibidez, 0'0000001erainoko doitasunez, p aukeratu behar da $R_p < 0'0000001$ izan dadin. Hori lor daiteke p aukeratzen bada (4) berdintzaren bigarren atala 0'0000001 baino txikiagoa izan dadin. Haztamu arrunt baten bidez, $p=8$ nahikoa dela aurkitzen dugu. Honelatan, bada, 0'0000001erainoko doitasunez

$$\begin{aligned} \ln 2 \approx s_8 = 2 \left[\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 3^3} + \frac{1}{5 \cdot 3^5} + \frac{1}{7 \cdot 3^7} + \frac{1}{9 \cdot 3^9} + \right. \\ \left. + \frac{1}{11 \cdot 3^{11}} + \frac{1}{13 \cdot 3^{13}} + \frac{1}{15 \cdot 3^{15}} \right] = 0,6931471 \end{aligned}$$

daukagu. Eraitza, zazpi zifra zehatzez, $\ln 2 = 0,6931471$ da.

(3) formulan $n=2$ eginez,

$$\ln 3 = \ln 2 + 2 \left[\frac{1}{5} + \frac{1}{3 \cdot 5^3} + \frac{1}{5 \cdot 5^5} + \dots \right] = 1,098612, \text{ etab.}$$

daukagu. Horrela, edozein zenbaki osoren logaritmo arrunta lor dezakegu.

Zenbakien logaritmo hamartarrak lortzeko

$$\log N = M \ln N$$

berdintza erabili behar da (ikus II. gaiko § 8), non $M = 0,434294$ den. Orduan, esaterako,

$$\ln 2 = 0,6931472, \log 2 = 0,30103$$

daukagu.

§ 21. Serieen aplikazioa integral mugatuen kalkuluan

X. eta XI. gaietan esan dugu badaudela funtzio elementalen bitartez adieraezinak diren integral mugatuak, goi-mugaren funtzio bezala kontsideratuak. Batzutan horrelako integralak serieen laguntzaz kalkulatzeko eroso da.

Azter dezagun hemen zenbait adibide.

1. Jo dezagun

$$\int_0^a e^{-x^2} dx$$

integrala kalkulatu nahi dela. Hemen, e^{-x^2} integrakizunaren jatorrizko funtzioa ez da funtzio elementala. Integral hori kalkulatzeko gara dezagun seriez integrakizuna, e^x funtzioaren garapenean x , $-x^2$ adierazpenaz ordezkatzuz [ikus § 17ko (2) formula]:

$$e^{-x^2} = 1 - \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{n!} + \dots$$

Berdintza horren bi atalak 0 eta a mugen artean integratuz

$$\int_0^a e^{-x^2} dx = \left(\frac{x}{1} - \frac{x^3}{1! \cdot 3} + \frac{x^5}{2! \cdot 5} - \frac{x^7}{3! \cdot 7} + \dots \right) \Big|_0^a = \frac{a}{1} - \frac{a^3}{1! \cdot 3} + \frac{a^5}{2! \cdot 5} - \frac{a^7}{3! \cdot 7} + \dots$$

lortzen dugu. Berdintza horrek uzten digu emandako integrala a orotarako kalkulatzeko, nahi den doitasun-mailaz.

2.

$$\int_0^a \frac{\sin x}{x} dx$$

integrala kalkulatu. Gara dezagun integrakizuna seriez:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$$

berdintzatik

$$\frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \dots$$

ateratzen dugu. Azken serie hori x -ren balio guztietarako da konbergente. Gaiz gai integratuz,

$$\int_0^a \frac{\sin x}{x} dx = a - \frac{a^3}{3! \cdot 3} + \frac{a^5}{5! \cdot 5} - \frac{a^7}{7! \cdot 7} + \dots$$

lortzen dugu. Erraz kalkulatzeko da edozein doitasun-mailaz seriearen batura a orotarako.

3. Kalkulatu

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi} d\varphi \quad (k < 1)$$

integral eliptikoa.

Gara dezagun serie binomikoz integrakizuna,

$$m = \frac{1}{2}, \quad x = -k^2 \sin^2 \varphi$$

eginez [ikus § 19ko (5) formula]:

$$\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi} = 1 - \frac{1}{2} k^2 \sin^2 \varphi - \frac{1}{2} \frac{1}{4} k^4 \sin^4 \varphi - \frac{1}{2} \frac{1}{4} \frac{3}{6} k^6 \sin^6 \varphi - \dots$$

Serie hori konbergentea da φ -ren balio guztietarako eta gaiz gaiko integrazioa onartzen du, tarte osoan majoragarri da eta. Horregatik,

$$\begin{aligned} \int_0^\varphi \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \vartheta} \, d\vartheta &= \varphi - \frac{1}{2} k^2 \int_0^\varphi \sin^2 \vartheta \, d\vartheta - \\ &- \frac{1}{2} \frac{1}{4} k^4 \int_0^\varphi \sin^4 \vartheta \, d\vartheta - \frac{1}{2} \frac{1}{4} \frac{3}{6} k^6 \int_0^\varphi \sin^6 \vartheta \, d\vartheta - \dots \end{aligned}$$

Bigarren ataleko integralak oinarrizko metodoen bidez kalkulatzen dira. $\varphi = \frac{\pi}{2}$

denerako

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} \varphi \, d\varphi = \frac{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 2n} \frac{\pi}{2}$$

dugu (ikus XI. gaiko § 6) eta, hortaz,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - k^2 \sin^{2n} \varphi} \, d\varphi = \frac{\pi}{2} \left[1 - \left(\frac{1}{2} \right)^2 k^2 - \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \right)^2 \frac{k^4}{3} - \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \right)^2 \frac{k^6}{5} - \dots \right]$$

§ 22. Serieen aplikazioa ekuazio diferentzialen integrazioan

Ekuazio diferentzial baten integrazioa ezin bada koadraturetara laburtu, ekuazioaren integrazio-metodo hurbilduetara jo daiteke. Metodo horietako bat ekuazioaren soluzioa Taylor-en seriez adieraztean datza; serie horren gai-kopuru finitu baten batura, gutxi gorabehera, bilatutako soluzio partikularren berdina izango da.

Esate baterako,

$$y'' = F(x, y, y') \quad (1)$$

bigarren ordenako ekuazio diferentzial baten soluzioa bilatu nahi da,

$$(y)_{x=x_0} = y_0, \quad (y')_{x=x_0} = y'_0 \quad (2)$$

hastapen-baldintzak betetzen dituen.

Demagun $y=f(x)$ soluzioa existitzen dela eta Taylor-en seriez gara daitekeela (ez gara geldituko hori zer baldintzatan gertatzen den analisatzen):

$$y = f(x) = f(x_0) + \frac{x - x_0}{1} f'(x_0) + \frac{(x - x_0)^2}{1 \cdot 2} f''(x_0) + \dots \quad (3)$$

$f(x_0)$, $f'(x_0)$, $f''(x_0)$, ..., bilatu behar ditugu, hots, soluzio partikularren deribatuen balioak $x=x_0$ denerako. Hori egin daiteke (1) ekuazioa eta (2) baldintzen bidez.

Izan ere, (2) baldintzetatik

$$f(x_0) = y_0, \quad f'(x_0) = y'_0$$

ateratzen da; (1) ekuaziotik

$$f''(x_0) = (y'')_{x=x_0} = F(x_0, y_0, y'_0)$$

lortzen dugu.

(1) ekuazioaren bi atalak x -rekiko deribatuz

$$y''' = F_x(x, y, y') + F_y'(x, y, y') + F_{y'}'(x, y, y')y'' \quad (4)$$

daukagu eta $x=x_0$ bigarren atalean ordezkatzuz gero

$$f'''(x_0) = (y''')_{x=x_0}$$

aurkitzen dugu.

(4) erlazioa behin berriro deribatuz

$$f^{IV}(x_0) = (y^{IV})_{x=x_0}$$

topatzen dugu, eta horrela elkarren segidan.

Ordezka ditzagun bilatutako deribatuen balioak (3) berdintzan. Serie horrek emandako ekuazioaren soluzioa adierazten du, seriea konbergente deneko x -ren balio guztietan.

1. Adibidea. Bilatu

$$(y)_{x=0} = 1, \quad (y')_{x=0} = 0$$

hastapen-baldintzak betetzen dituen

$$y'' = -yx^2$$

ekuazioaren soluzioa.

Ebazpena.

$$f(0) = y_0 = 1; \quad f'(0) = y'_0 = 0$$

dauzkagu. Emandako ekuaziotik $(y'')_{x=0} = f''(0) = 0$ ateratzen dugu; beraz,

$$y''' = -y'x^2 - 2xy, \quad (y''')_{x=0} = f'''(0) = 0,$$

$$y^{IV} = -x^2y'' - 4xy' - 2y, \quad (y^{IV})_{x=0} = -2,$$

eta, orokorrean, ekuazioaren bi atalak Leibniz-en formularen bidez k aldiz deribatuz (III. gaiko § 22)

$$y^{(k+2)} = -y^{(k)}x^2 - 2ky^{(k-1)}x - k(k-1)y^{(k-2)}$$

aurkitzen dugu. $x=0$ eginez,

$$y_0^{(k+2)} = -k(k-1)y_0^{(k-2)}$$

lortzen dugu, edo $k+2=n$ eginez gero

$$y_0^{(n)} = -(n-3)(n-2)y_0^{(n-4)}.$$

Hortik,

$$y_0^{IV} = -1 \cdot 2, \quad y_0^{(8)} = -5 \cdot 6 y_0^{IV} = (-1)^2 (1 \cdot 2)(5 \cdot 6),$$

$$y_0^{(12)} = -9 \cdot 10 y_0^{(8)} = (-1)^3 (1 \cdot 2)(5 \cdot 6)(9 \cdot 10),$$

$$y_0^{(4k)} = (-1)^k (1 \cdot 2)(5 \cdot 6)(9 \cdot 10) \dots [(4k-3)(4k-2)].$$

Horrez gain,

$$y_0^{(5)} = 0, \quad y_0^{(9)} = 0, \quad \dots, \quad y_0^{(4k+1)} = 0,$$

$$y_0^{(6)} = 0, \quad y_0^{(10)} = 0, \quad \dots, \quad y_0^{(4k+2)} = 0,$$

$$y_0^{(7)} = 0, \quad y_0^{(11)} = 0, \quad \dots, \quad y_0^{(4k+3)} = 0.$$

Era horretan, ordena 4ren anizkoitza duten deribatuak soilik ez dira nuluak.

Bilatutako deribatuen balioak Maclaurin-en seriean ordezkatzuz, ekuazioaren soluzioa erdiesten dugu:

$$y = 1 - \frac{x^4}{4!} 1 \cdot 2 + \frac{x^8}{8!} (1 \cdot 2)(5 \cdot 6) - \frac{x^{12}}{12!} (1 \cdot 2)(5 \cdot 6)(9 \cdot 10) + \dots$$

$$\dots + (-1)^k \frac{x^{4k}}{(4k)!} (1 \cdot 2)(5 \cdot 6) \dots [(4k-3)(4k-2)] + \dots$$

D'Alembert-en irizpidearen bidez egiazta daiteke serie hori x -ren balio guztietarako konbergentea dela; hori dela eta, ekuazioaren soluzioa da.

Ekuazio lineala bada erosoagoa da soluzio partikular baten garapeneko koefizienteak koefiziente determinatugabeen metodoaren bidez bilatzea. Horretarako,

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots$$

seriea ekuazio diferentzialean zuzenean ordezkatzun dugu eta x -ren potentzia bereko koefizienteak berdintzen ditugu ekuazioaren bi ataletan.

2. Adibidea. Bilatu

$$(y)_{x=0} = 0, \quad (y')_{x=0} = 1$$

hastapen-baldintzak betetzen dituen

$$y'' = 2xy' + 4y$$

ekuazioaren soluzioa.

Ebazpena. Egin dezagun

$$y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots + a_nx^n + \dots$$

Hastapen-baldintzen arabera

$$a_0 = 0, \quad a_1 = 1$$

aurkitzen dugu.

Hortaz,

$$y = x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots + a_nx^n + \dots$$

$$y' = 1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \dots + na_nx^{n-1} + \dots$$

$$y'' = 2a_2 + 3 \cdot 2a_3x + \dots + n(n-1)a_nx^{n-2} + \dots$$

Adierazpen horiek emandako ekuazioan sartuz eta x -ren potentzia bereko koefizienteak berdinduz gero, zera lortzen dugu:

$$2a_2 = 0, \text{ nondik } a_2 = 0 \text{ den.}$$

$$3 \cdot 2a_3 = 2 + 4, \text{ nondik } a_3 = 1 \text{ den.}$$

$$4 \cdot 3a_4 = 4a_2 + 4a_2, \text{ nondik } a_4 = 0 \text{ den.}$$

$$\dots \dots \dots$$

$$n(n-1)a_n = (n-2)2a_{n-2} + 4a_{n-2}, \text{ nondik } a_n = \frac{2a_{n-2}}{n-1} \text{ den.}$$

Beraz,

$$a_5 = \frac{2 \cdot 1}{4} = \frac{1}{2!}; \quad a_7 = \frac{2 \cdot \frac{1}{2}}{6} = \frac{1}{3!}; \quad a_9 = \frac{1}{4!}; \quad a_{2k+1} = \frac{2 \cdot \frac{1}{(k-1)!}}{2k} = \frac{1}{k!};$$

$$a_4 = 0; \quad a_6 = 0; \quad a_{2k} = 0.$$

Aurkitutako koefizienteak ordezkatzuz,

$$y = x + \frac{x^3}{1} + \frac{x^5}{2!} + \frac{x^7}{3!} + \dots + \frac{x^{2k+1}}{k!} + \dots$$

soluzioa lortzen dugu.

Lortutako seriea x -ren balio guztietarako da konbergente.

Ohar dezagun bilatutako soluzio partikularra funtzio elementalen bidez adieraz daitekeela: x faktore komuna ateraz e^{x^2} funtzioaren garapena lortzen da.

Hortaz,

$$y = xe^{x^2}.$$

§ 23. Bessel-en ekuazioa

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - p^2)y = 0 \quad (1)$$

($p = \text{ktea.}$) itxurako ekuazio diferentziala *Bessel-en ekuazio* deitzen da.

Ekuazio horren soluzioa, koefiziente aldakorreko beste zenbait ekuazioen soluzioak bezala, ez da komeni berredura-serieen itxuraz bilatzea, x -ren potentzia bat eta berredura-serie baten arteko biderkadura bezala baizik:

$$y = x^r \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k. \quad (2)$$

a_0 koefizientea ez-nulutzat har dezakegu, r berretzailearen indeterminazioa dela eta.

Idatz dezagun (2) adierazpena

$$y = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{r+k}$$

eran, eta kalkula ditzagun bere deribatuak:

$$y' = \sum_{k=0}^{\infty} (r+k) a_k x^{r+k-1};$$

$$y'' = \sum_{k=0}^{\infty} (r+k)(r+k-1) a_k x^{r+k-2}.$$

Sar ditzagun adierazpen horiek (1) ekuazioan:

$$x^2 \sum_{k=0}^{\infty} (r+k)(r+k-1)a_k x^{r+k-2} + x \sum_{k=0}^{\infty} (r+k)a_k x^{r+k-1} + (x^2 - p^2) \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{r+k} = 0.$$

x -ren

$$r, r+1, r+2, \dots, r+k$$

potentzien koefizienteak zerorekin berdinduz gero

$$\left. \begin{array}{ll} [r(r-1) + r - p^2]a_0 = 0 & \text{edo} \quad [r^2 - p^2]a_0 = 0, \\ [(r+1)r + (r+1) - p^2]a_1 = 0 & \text{edo} \quad [(r+1)^2 - p^2]a_1 = 0, \\ [(r+2)(r+1) + (r+2) - p^2]a_2 + a_0 = 0 & \text{edo} \quad [(r+2)^2 - p^2]a_2 + a_0 = 0, \\ \dots & \dots \\ [(r+k)(r+k-1) + (r+k) - p^2]a_k + a_{k-2} = 0 & \text{edo} \quad [(r+k)^2 - p^2]a_k + a_{k-2} = 0 \end{array} \right\} \quad (3)$$

ekuazio-sistema erdiesten dugu.

Analisa dezagun azkeneko berdintza:

$$[(r+k)^2 - p^2]a_k + a_{k-2} = 0. \quad (3')$$

Ondoko eran idatz dezakegu:

$$[(r+k-p)(r+k+p)]a_k + a_{k-2} = 0.$$

Hipotesiaren arabera, $a_0 \neq 0$, hortaz, lehenengotik

$$r^2 - p^2 = 0,$$

horregatik $r_1 = p$ edo $r_2 = -p$.

Kontsidera dezagun lehendabizi $r_1 = p > 0$ balioari dagokion soluzioa.

(3) ekuazio-sistematik elkarren segidan ateratzen dira $a_1, a_2, \dots$ koefiziente guztiak; a_0 hautazkoa delarik. Egin dezagun, adibidez, $a_0 = 1$. Orduan,

$$a_k = -\frac{a_{k-2}}{k(2p+k)}.$$

k -ri balio desberdinak emanez, $a_1 = 0, a_3 = 0$ eta oro har $a_{2n-1} = 0$;

$$\left. \begin{aligned} a_2 &= -\frac{1}{2(2p+2)}; \quad a_4 = \frac{1}{2 \cdot 4(2p+2)(2p+4)}; \quad \dots; \\ a_{2v} &= (-1)^{v+1} \frac{1}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2v(2p+2)(2p+4) \dots (2p+2v)} \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

aurkitzen ditugu. Aurkitutako koefizienteak (2) formulatan ordezkatzuz

$$y_1 = x^p \left[1 - \frac{x^2}{2(2p+2)} + \frac{x^4}{2 \cdot 4(2p+2)(2p+4)} - \frac{x^6}{2 \cdot 4 \cdot 6(2p+2)(2p+4)(2p+6)} + \dots \right] \quad (5)$$

lortzen dugu.

a_{2v} koefiziente guztiak determinatzen dira, k orotarako (3) ekuazioko a_k -ren koefizienteak,

$$(r_1 + k)^2 - p^2,$$

ez bait da zero.

Era horretan, y_1 (1) ekuazioaren soluzio partikular bat da.

Ezar dezagun orain zer baldintzapetan determina daitezkeen a_k koefiziente guztiak, $r_2 = -p$ bigarren erroarekin. Hori k edozein zenbaki oso bikoiti eta positibotarako gertatzen da

$$(r_2 + k)^2 - p^2 \neq 0 \quad (6)$$

edo

$$r_2 + k \neq p$$

desberdintzak betetzen badira. Baina, $p = r_1$, beraz,

$$r_2 + k \neq r_1.$$

Horrela, emandako kasuan, (6) baldintza

$$r_1 - r_2 \neq k$$

baldintzaren baliokidea da, non k zenbaki oso bikoiti eta positiboa den. Baina,

$$r_1 = p, \quad r_2 = -p,$$

hortaz

$$r_1 - r_2 = 2p.$$

Beraz, p zenbaki osoa ez bada, bigarren soluzio partikular bat idatz daiteke, (5) adierazpenetik, p -ren lekuan $-p$ ordezkatzuz lortzen dena, alegia:

$$y_2 = x^{-p} \left[1 - \frac{x^2}{2(-2p+2)} + \frac{x^4}{2 \cdot 4(-2p+2)(-2p+4)} - \frac{x^6}{2 \cdot 4 \cdot 6(-2p+2)(-2p+4)(-2p+6)} + \dots \right]. \quad (5')$$

(5) eta (5') berredura-serieak konbergenteak dira x -ren balio guztietarako, erraz froga daitekeena D'Alembert-en irizpidea aplikatuz. y_1 eta y_2 linealki independenteak direla ere nabaria da⁵⁾.

y_1 soluzioa, faktore konstante batez biderkatua, p ordenako lehen mailako Bessel-en funtzio deitzen da eta J_p izendatzen da. y_2 soluzioa J_{-p} ikurraz izendatzen da.

Horrela, p zenbaki osoa ez bada, (1) ekuazioaren soluzio orokorrak

$$y = C_1 J_p + C_2 J_{-p}$$

itxura dauka. Adibidez, $p = 1/2$ denean, (5) seriea honela idazten da:

5) Funtzioen independentzia lineala ondoko eran egiaztatzen da. Kontsidera dezagun

$$\frac{y_2}{y_1} = x^{-2p} \frac{1 - \frac{x^2}{2(-2p+2)} + \frac{x^4}{2 \cdot 4(-2p+2)(-2p+4)} - \dots}{1 - \frac{x^2}{2(2p+2)} + \frac{x^4}{2 \cdot 4(2p+2)(2p+4)} - \dots}$$

zatidura.

Arrazoi hori ez da konstante, $x \rightarrow 0$ denean infiniturantz jotzen bait du. Hortaz, y_1 eta y_2 funtzioak linealki independenteak dira.

$$x^{\frac{1}{2}} \left[1 - \frac{x^2}{2 \cdot 3} + \frac{x^4}{2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 5} - \frac{x^6}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7} + \dots \right] = \frac{1}{\sqrt{x}} \left[x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots \right].$$

Soluzio hori $\sqrt{\frac{2}{\pi}}$ faktore konstantez biderkatua Bessel-en $J_{1/2}$ funtzio deitzen da; ohar gaitezen parentesien arteko adierazpena baturatzeat $\sin x$ daukan seriea dela. Hortaz,

$$J_{\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin x.$$

Berdin, (5') formula aplikatuz,

$$J_{-\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos x$$

erdiesten dugu. (1) ekuazioaren integral orokorra, $p = 1/2$ denerako,

$$y = C_1 J_{\frac{1}{2}}(x) + C_2 J_{-\frac{1}{2}}(x)$$

da.

Izan bedi orain p zenbaki oso bat, $n (n \geq 0)$ izendatuko duguna, (5) soluzioak, kasu honetan, zentzurik dauka eta (1) ekuazioaren lehenengo soluzio partikularra da.

Baina (5') soluzioak ez du zentzurik, bere garapeneko izendatzaile baten faktore bat anulatzen bait da.

$p = n$ oso positiborako, Bessel-en J_n funtzioa (5) seriea eta $\frac{1}{2^n n!}$ faktore konstantearen arteko biderkaduraz definitzen da (eta $n=0$ denean bider 1 eginez):

$$J_n(x) = \frac{x^n}{2^n n!} \left[1 - \frac{x^2}{2(2n+2)} + \frac{x^4}{2 \cdot 4(2n+2)(2n+4)} - \dots \right. \\ \left. \dots - \frac{x^6}{2 \cdot 4 \cdot 6(2n+2)(2n+4)(2n+6)} + \dots \right]$$

edo

$$J_n(x) = \sum_{v=0}^{\infty} \frac{(-1)^v}{v!(n+v)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2v} \quad (7)$$

Froga daiteke, kasu honetan, bigarren soluzio partikularra

$$K_n(x) = J_n(x) \ln x + x^{-n} \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k$$

eran bila daitekeela.

Adierazpen hori (1) ekuazioan sartuz, b_k koefizienteak determinatzen ditugu.

$K_n(x)$ funtzioa, horrela determinatutako koefizienteekin, faktore konstante batez biderkatua, n ordenako bigarren mailako Bessel-en funtzio deitzen da.

Hori da (1) ekuazioaren bigarren soluzioa, lehenengoarekin batera, sistema linealki independentea osatzen duena.

Integral orokorrak

$$y = C_1 J_n(x) + C_2 K_n(x) \quad (8)$$

itxura hartzen du.

Nabari dezagun

$$\lim_{x \rightarrow 0} K_n(x) = \infty$$

dela.

Hortaz, $x=0$ denerako soluzio finituak lortu nahi baditugu, (8) formularen $C_2=0$ egin behar dugu.

Adibidea. Bilatu $x=0$ denerako

$$y = 2, \quad y' = 0$$

hastapen-baldintzak betetzen dituen

$$y'' + \frac{1}{x} y' + y = 0$$

Bessel-en ekuazioaren soluzioa, $p=0$ izanik.

Ebazpena. (7) formularen oinarriturik, soluzio partikular bat bila dezagun:

$$J_0(x) = \sum_{v=0}^{\infty} \frac{(-1)^v}{(v!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^{2v} = 1 - \frac{1}{(1!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^2 + \frac{1}{(2!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^4 - \frac{1}{(3!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^6 + \dots$$

Soluzio hori erabiliz emandako hastapen-baldintzak betetzen dituen soluzioa idatz dezakegu, hots:

$$y = 2J_0(x)$$

Oharra. Emandako ekuazioaren integral orokorra bilatu behar badugu, bigarren soluzio partikularra

$$K_0(x) = J_0 \ln x + \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k$$

eran bilatu behar dugu.

Kalkulu guztiak aipatu gabe, esan dezagun $K_0(x)$ izendatuko dugun bigarren soluzio partikularrak

$$K_0(x) = J_0 \ln x + \frac{x^2}{2^2} - \frac{1}{(2!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^4 \left(1 + \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{(3!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^6 \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) - \dots$$

itxura daukala.

Funtzio hori, faktore konstante batez biderkatua, *zero ordenako bigarren mailako Bessel-en funtzio* deitzen da.

Ariketak

Idatzi gai orokorra emanik duten serieen lehenengo gaiak:

1. $u_n = \frac{1}{n(n+1)}.$
2. $u_n = \frac{n^3}{n+1}.$
3. $u_n = \frac{(n!)^2}{(2n)!}.$
4. $u_n = (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n^k}.$
5. $u_n = \sqrt[3]{n^3 + 1} - \sqrt{n^2 + 1}.$

Aztertu hurrengo serieen konbergentzia:

6. $\frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \dots + \frac{n}{2^n} + \dots$ Em.: Konbergentea da.
7. $\frac{1}{\sqrt{10}} + \frac{1}{\sqrt{20}} + \frac{1}{\sqrt{30}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{10n}} + \dots$ Em.: Dibergentea da.
8. $2 + \frac{3}{2} + \frac{4}{3} + \dots + \frac{n+1}{n} + \dots$ Em.: Dibergentea da.
9. $\frac{1}{\sqrt[3]{7}} + \frac{1}{\sqrt[3]{8}} + \dots + \frac{1}{\sqrt[3]{n+6}} + \dots$ Em.: Dibergentea da.
10. $\frac{1}{2} + \left(\frac{2}{3}\right)^4 + \left(\frac{3}{4}\right)^9 + \dots + \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2} + \dots$ Em.: Konbergentea da.
11. $\frac{1}{2} + \frac{2}{5} + \frac{3}{10} + \frac{4}{17} + \dots + \frac{n}{n^2+1} + \dots$ Em.: Dibergentea da.
12. $\frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{10} + \frac{1}{17} + \dots + \frac{1}{1+n^2} + \dots$ Em.: Konbergentea da.

Ikertu ondoko gai orokorrak dituzten serieen konbergentzia:

13. $u_n = \frac{1}{n^3}$. Em.: Konbergentea da.
14. $u_n = \frac{1}{\sqrt[3]{n^2}}$. Em.: Dibergentea da.
15. $u_n = \frac{2}{5n+1}$. Em.: Dibergentea da.
16. $u_n = \frac{1+n}{3+n^2}$. Em.: Dibergentea da.
17. $u_n = \frac{1}{n^2+2n+3}$. Em.: Konbergentea da.

18. $u_{n-1} = \frac{1}{n \ln n}$. Em.: Dibergentea da.

19. Frogatu $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} > \ln(n+1) > \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n+1}$ desberdintza.

20. Aplika dakioke $\frac{1}{\sqrt{2}-1} - \frac{1}{\sqrt{2}+1} + \frac{1}{\sqrt{3}-1} - \frac{1}{\sqrt{3}+1} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}-1} - \frac{1}{\sqrt{n}+1} + \dots$

sericari Leibniz-en teorema?

Em.: Ez, ezin zaio aplikatu, seriearen gaiak balio absolututan ez bait dira beheratzen monotonoki. Seriea dibergentea da.

Zenbat gai hartu behar da hurrengo serieetan, beraien batura dagokien seriearen baturatik $1/10^6$ baino gutxiago urrun dadin .

21. $\frac{1}{2} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} - \frac{1}{2^4} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{1}{2^n} + \dots$ Em.: $n = 20$.

22. $\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \dots + (-1)^n \frac{1}{n} + \dots$ Em.: $n = 10^6$.

23. $\frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} - \frac{1}{5^2} + \dots + (-1)^n \frac{1}{n^2} + \dots$ Em.: $n = 10^3$.

24. $\frac{1}{2} - \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} - \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} + \dots + (-1)^n \frac{1}{n!} + \dots$ Em.: $n = 10$.

Determinatu hurrengo serieetatik zeintzu diren absolutuki konbergenteak:

25. $1 - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} - \frac{1}{7^2} + \frac{1}{9^2} - \dots + (-1)^{n+1} \frac{1}{(2n-1)^2} + \dots$ Em.: Absolutuki konbergentea da.

26. $\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2^3} - \dots + (-1)^{n+1} \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{2^n} + \dots$ Em.: Absolutuki konbergentea da.

27. $\frac{1}{\ln 2} - \frac{1}{\ln 3} + \frac{1}{\ln 4} - \frac{1}{\ln 5} + \dots + (-1)^n \frac{1}{\ln n} + \dots$ Em.: Baldintzazko konbergentea da.

28. $-1 + \frac{1}{\sqrt[3]{2}} - \frac{1}{\sqrt[3]{3}} + \frac{1}{\sqrt[3]{4}} - \dots + (-1)^n \frac{1}{\sqrt[3]{n}} + \dots$ Em.: Baldintzazko konbergentea da.

29. Aurkitu $\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)(n+2)} + \dots$ seriearen batura. Em.: $\frac{1}{4}$.

x -ren zer baliotarako dira konbergente hurrengo serieak?:

30. $1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} + \dots + \frac{x^n}{2^n} + \dots$ Em.: $-2 < x < 2$.

31. $x - \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^3}{3^2} - \frac{x^4}{4^2} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n^2} + \dots$ Em.: $-1 \leq x \leq 1$.

32. $3x + 3^4 x^4 + 3^9 x^9 + \dots + 3^{n^2} x^{n^2} + \dots$ Em.: $|x| < \frac{1}{3}$.

33. $1 + \frac{100x}{1 \cdot 3} + \frac{10000x^2}{1 \cdot 3 \cdot 5} + \frac{1000000x^3}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7} + \dots$ Em.: $-\infty < x < \infty$.

34. $\sin x + 2 \sin \frac{x}{3} + 4 \sin \frac{x}{9} + \dots + 2^n \sin \frac{x}{3^n} + \dots$ Em.: $-\infty < x < \infty$.

35. $\frac{x}{1 + \sqrt{1}} + \frac{x^2}{2 + \sqrt{2}} + \dots + \frac{x^n}{n + \sqrt{n}} + \dots$ Em.: $-1 \leq x < 1$.

36. $x + \frac{2^k}{2!} x^2 + \frac{3^k}{3!} x^3 + \dots + \frac{n^k}{n!} x^n + \dots$ Em.: $-\infty < x < \infty$.

37. $x + \frac{2!}{2^2} x^2 + \frac{3!}{3^3} x^3 + \dots + \frac{n!}{n^n} x^n + \dots$ Em.: $-e < x < e$.

38. $x + \frac{2^2}{4!} x^2 + \frac{(1 \cdot 2 \cdot 3)^2}{6!} x^3 + \dots + \frac{(n!)^2}{(2n)!} x^n + \dots$ Em.: $-4 < x < 4$.

39. Aurkitu $x + 2x^2 + \dots + nx^n + \dots$ ($|x| < 1$) seriearen batura.

Oharra. Idatzi seriea

$$\begin{array}{r} x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots \\ x^2 + x^3 + x^4 + \dots \\ x^3 + x^4 + \dots \\ x^4 + \dots \\ \dots \end{array}$$

eran. Em.: $\frac{x}{(1-x)^2}$.

Determinatu hurrengo serieetatik zeintzu diren majoragarri emandako tartetean:

40. $1 + \frac{x}{1^2} + \frac{x^2}{2^2} + \dots + \frac{x^n}{n^2} + \dots$ ($0 \leq x \leq 1$). Em.: Majoragarria da.

41. $1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots + \frac{x^n}{n} + \dots$ ($0 \leq x \leq 1$). Em.: Ez da majoragarri.

42. $\frac{\sin x}{1^2} + \frac{\sin 2x}{2^2} + \frac{\sin 3x}{3^2} + \dots + \frac{\sin nx}{n^2} + \dots$ $[0, 2\pi]$. Em.: Majoragarria da.

Funtzioen seriezko garapena

43. Garatu $\frac{1}{10+x}$ x -ren berreduratako seriez eta determinatu konbergentzi tartea.

Em.: $-10 < x < 10$ denean da konbergente.

44. Garatu $\cos x$, $\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ -ren berreduratako seriez.

Em.: $\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2 + \frac{1}{6\sqrt{2}}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^3 + \dots$

45. Garatu e^{-x} , x -ren berreduratako seriez. Em.: $1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \dots$

46. Garatu e^x , $(x-2)$ -ren berreduratako seriez.

$$\text{Em.: } e^2 + e^2(x-2) + \frac{e^2}{2!}(x-2)^2 + \frac{e^2}{3!}(x-2)^3 + \dots$$

47. Garatu $x^3 - 2x^2 + 5x - 7$, $(x-1)$ -en berreduratako seriez.

$$\text{Em.: } -3 + 4(x-1) + (x-1)^2 + (x-1)^3.$$

48. Garatu $x^{10} + 2x^9 - 3x^7 - 6x^6 + 3x^4 + 6x^3 - x - 2$ polinomia $(x-1)$ -en berreduratako Taylor-en seriez; egiaztatu 1 zenbakia polinomio horren erro hirukoitza dela.

$$\text{Em.: } f(x) = 81(x-1)^3 + 270(x-1)^4 + 342(x-1)^5 + 330(x-1)^6 + 186(x-1)^7 + 63(x-1)^8 + 12(x-1)^9 + (x-1)^{10}.$$

49. Garatu $\cos(x+a)$, x -ren berreduratako seriez.

$$\text{Em.: } \cos a - x \sin a - \frac{x^2}{2!} \cos a + \frac{x^3}{3!} \sin a + \frac{x^4}{4!} \cos a - \dots$$

50. Garatu $\ln x$, $(x-1)$ -en berreduratako seriez.

$$\text{Em.: } (x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{3}(x-1)^3 - \frac{1}{4}(x-1)^4 + \dots$$

51. Garatu e^x , $(x+2)$ -ren berreduratako seriez.

$$\text{Em.: } e^{-2} \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{n!} \right]$$

52. Garatu $\cos^2 x$, $\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ -en berreduratako seriez.

$$\text{Em.: } \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{4^{n-1} \left(x - \frac{\pi}{4}\right)^{2n-1}}{(2n-1)!} \quad (|x| < \infty).$$

53. Garatu $\frac{1}{x^2}$, $(x+1)$ -en berreduratako seriez.

$$\text{Em.: } \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(x+1)^n \quad (-2 < x < 0).$$

54. Garatu $\tan x$, $\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ -en berreduratako seriez.

$$\text{Em.: } 1 + 2\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + 2\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2 + \dots$$

Idatzi ondorengo funtzioen x -ren berredura-serieen lehenengo lau gaiak:

55. $\tan x$. Em.: $x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{17x^7}{315} + \dots$

56. $e^{\cos x}$. Em.: $e\left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{4x^4}{4!} - \frac{31x^6}{720} - \dots\right)$

57. $e^{\arctan x}$. Em.: $1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} - \frac{7x^4}{24} + \dots$

58. $\ln(1 + e^x)$. Em.: $\ln 2 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{7x^4}{384} + \dots$

59. $e^{\sin x}$. Em.: $1 + x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8} + \dots$

60. $(1+x)^x$. Em.: $1 + x^2 - \frac{x^3}{2} + \frac{5}{6}x^4 - \dots$

61. $\sec x$. Em.: $1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5x^4}{24} + \dots$

62. $\ln \cos x$. Em.: $-\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} - \frac{x^6}{45} - \dots$

63. Garatu $\sin kx$, x -ren berreduratako seriez. Em.: $kx - \frac{(kx)^3}{3!} + \frac{(kx)^5}{5!} - \frac{(kx)^7}{7!} + \dots$

64. Garatu $\sin^2 x$, x -ren berreduratako seriez eta konbergentzi tartea determinatu.

$$\text{Em.: } \frac{2x^2}{2!} - \frac{2^3 x^4}{4!} + \frac{2^5 x^6}{6!} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{2^{2n-1} x^{2n}}{(2n)!} + \dots$$

Seriea x -ren balio guztietarako da konbergente.

65. Garatu $\frac{1}{1+x^2}$, x -ren berreduratako seriez. Em.: $1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots$

66. Garatu $\arctan x$, x -ren berreduratako seriez.

Oharra. $\arctan x = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2}$ formula erabili.

Em.: $x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots$ ($-1 \leq x \leq 1$)

67. Garatu $\frac{1}{(1+x)^2}$, x -ren berreduratako seriez.

Em.: $1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + \dots$ ($-1 < x < 1$).

e^x , $\sin x$, $\cos x$, $\ln(1+x)$, $(1+x)^m$ funtzioen berredura-seriezko garapenen formulak erabiliz eta prozedura desberdinak aplikatuz, garatu hurrengo funtzioak berredura-seriez eta konbergentzi tarteak determinatu:

68. $\sinh x$. Em.: $x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots$ ($-\infty < x < \infty$).

69. $\cosh x$. Em.: $1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$ ($-\infty < x < \infty$).

70. $\cos^2 x$. Em.: $1 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (2x)^{2n}}{(2n)!}$ ($-\infty < x < \infty$).

71. $(1+x)\ln(1+x)$. Em.: $x + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{(n-1)n}$ ($|x| \leq 1$).

72. $(1+x)e^{-x}$. Em.: $1 + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n-1}{n!} x^n$ ($-\infty < x < \infty$).

$$73. \frac{1}{4-x^4}. \text{ Em.: } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{4n}}{4^{n+1}} \quad (|x| < \sqrt{2}).$$

$$74. \frac{e^x - 1}{x}. \text{ Em.: } 1 + \frac{x}{2!} + \frac{x^2}{3!} + \dots + \frac{x^{n-1}}{n!} + \dots \quad (-\infty < x < \infty).$$

$$75. \frac{1}{(1-x)^2}. \text{ Em.: } \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n \quad (|x| < 1).$$

$$76. e^x \sin x. \text{ Em.: } x + x^2 + \frac{2x^3}{3!} - \frac{4x^5}{5!} + \dots + \sqrt{2^n} \sin \frac{n\pi}{4} \frac{x^n}{n!} + \dots \quad (-\infty < x < \infty).$$

$$77. x + \sqrt{1+x^2}.$$

$$\text{Em.: } x - \frac{1}{2} \frac{x^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \frac{x^5}{5} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2^n \cdot n!} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \dots \quad (-1 \leq x \leq 1).$$

$$78. \int_0^x \frac{\ln(1+t)}{t} dt. \text{ Em.: } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n^2} \quad (|x| \leq 1).$$

$$79. \int_0^x \frac{\arctan t}{t} dt. \text{ Em.: } \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)^2} \quad (-1 \leq x \leq 1).$$

$$80. \int \frac{\cos x}{x} dx. \text{ Em.: } C + \ln |x| + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)(2n)!} \quad (-\infty < x < 0 \text{ eta } 0 < x < \infty).$$

$$81. \int_0^x \frac{dt}{1-t^9}. \text{ Em.: } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{9n-8}}{9n-8}.$$

82. Frogatu

$$\sin(a+x) = \sin a \cos x + \cos a \sin x,$$

$$\cos(a+x) = \cos a \cos x - \sin a \sin x,$$

berdintzak, lehenengo gaiak x -ren berreduratako seriez garatuz.

Dagozkien serieak erabiliz, kalkulatu:

83. $\cos 10^\circ$, 0,0001erainoko doitasunez. Em.: 0,9848.

84. $\sin 1^\circ$, 0,0001erainoko doitasunez. Em.: 0,0175.

85. $\sin 18^\circ$, 0,001erainoko doitasunez. Em.: 0,3090.

86. $\sin \frac{\pi}{4}$, 0,0001erainoko doitasunez. Em.: 0,7071.

87. $\arctan \frac{1}{5}$, 0,0001erainoko doitasunez. Em.: 0,1973.

88. $\ln 5$, 0,001erainoko doitasunez. Em.: 1,609.

89. $\log_{10} 5$, 0,001erainoko doitasunez. Em.: 0,699.

90. $\arcsin 1$, 0,0001erainoko doitasunez. Em.: 1,5708.

91. $\sqrt{e}$, 0,0001erainoko doitasunez. Em.: 1,6487.

92. $\log_{10} e$, 0,00001erainoko doitasunez. Em.: 0,43429.

93. $\cos 1$, 0,00001erainoko doitasunez. Em.: 0,5403.

$f(x) = \sqrt[n]{a^n + x}$, funtzioa Maclaurin-en seriez garatuz, kalkulatu 0,001erainoko doitasunez:

94. $\sqrt[3]{30}$. Em.: 3,107.

95. $\sqrt{70}$. Em.: 4,121.

96. $\sqrt[3]{500}$. Em.: 7,937.

97. $\sqrt[5]{250}$. Em.: 3,017.

98. $\sqrt{84}$. Em.: 9,165.

99. $\sqrt[3]{2}$. Em.: 1,2598.

Integrakizuna seriez garatuz kalkulatu hurrengo integralak:

100. $\int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx$, 10^{-5} -erainoko doitasunez. Em.: 0,94608.

101. $\int_0^1 e^{-x^2} dx$, 0,0001erainoko doitasunez. Em.: 0,7468.

102. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin(x^2) dx$, 0,0001erainoko doitasunez. Em.: 0,1571.

103. $\int_0^{\frac{1}{2}} e^{\sqrt{x}} dx$, 0,01erainoko doitasunez. Em.: 0,81.

104. $\int_0^{0,5} \frac{\arctan x}{x} dx$, 0,001erainoko doitasunez. Em.: 0,487.

105. $\int_0^1 \cos \sqrt{x} dx$, 0,001erainoko doitasunez. Em.: 0,764.

106. $\int_0^{\frac{1}{4}} \ln(1 + \sqrt{x}) dx$, 0,001erainoko doitasunez. Em.: 0,071.

107. $\int_0^1 e^{-\frac{x^2}{4}} dx$, 0,0001erainoko doitasunez. Em.: 0,9226.

$$108. \int_0^{\frac{1}{5}} \frac{\sin x}{\sqrt{1-x}} dx, \text{ 0,0001erainoko doitasunez. Em.: 0,0214.}$$

$$109. \int_0^{0,5} \frac{dx}{1+x^4}, \text{ 0,001erainoko doitasunez. Em.: 0,494.}$$

$$110. \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x} dx. \text{ Em.: } \frac{\pi^2}{12}.$$

Oharra. Ariketa hau eta hurrengo biak ebazterakoan

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

berdintzak kontutan hartzea komeni da, XVII. gaiko § 2an lortuko dira.

$$111. \int_0^1 \frac{\ln(1-x)}{x} dx. \text{ Em.: } \frac{\pi^2}{6}.$$

$$112. \int_0^1 \ln \frac{1+x}{1-x} \frac{dx}{x}. \text{ Em.: } \frac{\pi^2}{4}.$$

Ekuazio diferentzialen serieen bidezko integrazioa.

113. Bilatu $x=0$ denerako $y=1, y'=0$ hastapen-baldintzak betetzen dituen $y''=xy$ ekuazioaren soluzioa.

Oharra. Bilatu soluzioa serie gisa.

$$\text{Em.: } 1 + \frac{x^3}{2 \cdot 3} + \frac{x^6}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6} + \dots + \frac{x^{3k}}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6 \cdot \dots \cdot (3k-1)3k} + \dots$$

114. Aurkitu $x=0$ denerako $y=0, y'=1$ hastapen-baldintzak betetzen dituen $y''+xy'+y=0$ ekuazioaren soluzioa.

$$\text{Em.: } x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{1 \cdot 3 \cdot 5} - \dots + \frac{(-1)^{n+1} x^{2n-1}}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)} + \dots$$

115. Aurkitu $x^2 y'' + xy' + \left(x^2 - \frac{1}{4}\right)y = 0$ ekuazioaren soluzio orokorra.

Oharra. Bilatu soluzioa $y = x^p (A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \dots)$ itxuraz.

$$\begin{aligned} \text{Em.: } C_1 x^{\frac{1}{2}} \left[1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \dots \right] + C_2 x^{-\frac{1}{2}} \left[1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots \right] = \\ = C_1 \frac{\sin x}{\sqrt{x}} + C_2 \frac{\cos x}{\sqrt{x}}. \end{aligned}$$

116. Aurkitu $x = 0$ denerako $y = 1$, $y' = 0$ hastapen-baldintzak betetzen dituen $xy'' + y' + xy = 0$ ekuazioaren soluzioa.

$$\text{Em.: } 1 - \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^4}{(1 \cdot 2)^2 2^4} - \frac{x^6}{(1 \cdot 2 \cdot 3)^2 2^6} + \dots + (-1)^k \frac{x^{2k}}{(k!)^2 2^{2k}} + \dots$$

Oharra. Azkeneko bi ekuazio diferentzialak Bessel-en $x^2 y'' + xy' + (x^2 - n^2)y = 0$ ekuazioaren kasu partikularrak dira, $n = 1/2$ eta $n = 0$ balioetarako.

117. Aurkitu $4xy'' + 2y' + y = 0$ ekuazioaren soluzio orokorra.

Oharra. Bilatu soluzioa $x^p (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots)$ seriearen itxuraz.

$$\text{Em.: } C_1 \cos \sqrt{x} + C_2 \sin \sqrt{x}.$$

118. Aurkitu $x = 0$ denerako $y = 0$, $y' = 1$ hastapen-baldintzak betetzen dituen $(1 - x^2)y'' - xy' = 0$ ekuazioaren soluzioa.

$$\text{Em.: } x + \frac{1}{2} \frac{x^3}{3} + \frac{1}{2} \frac{3}{4} \frac{x^5}{5} + \frac{1}{2} \frac{3}{4} \frac{5}{6} \frac{x^7}{7} + \dots$$

119. Aurkitu $x = 0$ denerako $y = 0$, $y' = 1$ hastapen-baldintzak betetzen dituen $(1 + x^2)y'' + 2xy' = 0$ ekuazioaren soluzioa.

$$\text{Em.: } x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots$$

120. Aurkitu $x = 0$ denerako $y = 1$, $y' = 1$ hastapen-baldintzak betetzen dituen $y'' = xyy'$ ekuazioaren soluzioa.

$$\text{Em.: } 1 + x + \frac{x^3}{3!} + \frac{2x^4}{4!} + \frac{3x^5}{5!} + \dots$$

121. Aurkitu $x=0$ denerako $y=0$ hastapen-baldintza betetzen duen $(1-x)y'=1+x-y$ ekuazioaren soluzioa, lortutako seriearen konbergentzi tartea emanez.

$$\text{Em.: } x + \frac{x^2}{1 \cdot 2} + \frac{x^3}{2 \cdot 3} + \frac{x^4}{3 \cdot 4} + \dots \quad (-1 \leq x \leq 1).$$

122. Aurkitu $x=0$ denerako $y=0, y'=1$ hastapen-baldintzak betetzen dituen $xy''+y=0$ ekuazioaren soluzioa, konbergentzi tartea emanez.

$$\text{Em.: } x - \frac{x^2}{(1!)^2 2} + \frac{x^3}{(2!)^3 3} - \frac{x^4}{(3!)^4 4} + \dots \quad (-\infty < x < \infty).$$

123. Aurkitu $x=0$ denerako $y=1, y'=0$ hastapen-baldintzak betetzen dituen

$$y'' + \frac{2}{x} y' + y = 0 \text{ ekuazioaren soluzioa. Em.: } \frac{\sin x}{x}.$$

124. Aurkitu $x=0$ denerako $y=1, y'=0$ hastapen-baldintzak betetzen dituen

$$y'' + \frac{1}{x} y' + y = 0 \text{ ekuazioaren soluzioa, lortutako seriearen konbergentzi tartea}$$

$$\text{emanez. Em.: } 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{2^2 \cdot 4^2} - \frac{x^6}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2} + \dots \quad (|x| < \infty).$$

Aurkitu hurrengo ekuazio diferentzialen soluzioen berredura-seriezko garapenen lehenengo hiru gaiak, emandako hastapen-baldintzapetan:

125. $y' = x^2 + y^2$; $x=0$ eta $y=1$ denerako. Em.: $1 + x + x^2 + \frac{4x^3}{3} + \dots$

126. $y'' = e^y + x$; $x=0$ eta $y=1, y'=0$ denerako. Em.: $1 + \frac{ex^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \dots$

127. $y' = \sin y - \sin x$; $x=0$ eta $y=0$ denerako. Em.: $-\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} - \dots$

Aurkitu hurrengo ekuazio diferentzialen soluzioen berredura-seriezko garapenen gai batzuk, emandako hastapen-baldintzekin:

128. $y'' = yy' - x^2$; $x=0, y=0, y'=0$ denerako.

$$\text{Em.: } 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{2x^3}{3!} + \frac{8x^4}{4!} + \frac{14x^5}{5!} + \dots$$

129. $y' = y^2 + x^3$; $x = 0$, $y = 1/2$ denerako.

Em.: $\frac{1}{2} + \frac{1}{4}x + \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 + \frac{9}{32}x^4 + \dots$

130. $y' = x^2 - y^2$; $x = 0$, $y = 0$ denerako. Em.: $\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{7 \cdot 9}x^7 + \frac{2}{7 \cdot 11 \cdot 27}x^{11} - \dots$

131. $y' = x^2y^2 - 1$; $x = 0$, $y = 1$ denerako. Em.: $1 - x + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{2} + \frac{x^5}{5} - \dots$

132. $y' = e^y + xy$; $x = 0$, $y = 0$ denerako. Em.: $x + \frac{x^2}{2} + \frac{2x^3}{3} + \frac{11x^4}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \dots$

XVII. GAIA

FOURIER-EN SERIEAK

§ 1. Definizioa. Problemaren planteamendua

$$\frac{a_0}{2} + a_1 \cos x + b_1 \sin x + a_2 \cos 2x + b_2 \sin 2x + \dots$$

itxurako funtzioen seriea edo, era trinkoagoan,

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \quad (1)$$

itxurako seriea, *serie trigonometriko* deitzen da. a_0, a_n eta b_n ($n = 1, 2, \dots$) zenbaki konstanteek *serie trigonometrikoaren koefiziente* izena dute.

(1) seriea konbergentea bada, bere batura 2π periodoko $f(x)$ funtzio periodikoa da, $\sin nx$ eta $\cos nx$ 2π periodoko funtzio periodikoak bait dira.

Honelatan,

$$f(x) = f(x + 2\pi).$$

Plantea dezagun hurrengo problema.

Izan bedi $f(x)$ 2π periodoko funtzio periodikoa. Zer baldintzatan kalkula daiteke emandako $f(x)$ funtziorantz jotzen duen serie trigonometrikoa?

Gai honetan problema hori ebatziko dugu.

Seriearen koefizienteen kalkulua Fourier-en formulen bidez.

Suposa dezagun 2π periodoko $f(x)$ funtzio periodikoa irudika daitekeela serie trigonometrikoa bezala, zeinek $(-\pi, \pi)$ tartean emandako funtziorantz jotzen duen, hau da, serie horren batura dela:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx). \quad (2)$$

Demagun, berdintza horren lehenengo ataleko funtzioaren integrala (2) seriearen gaien integralen arteko batura dela. Hori gertatuko da, adibidez, suposatzen badugu emandako serie trigonometrikoa absolutuki konbergentea dela, hau da, hurrengo zenbakizko serie positiboa konbergentea bada:

$$\left| \frac{a_0}{2} \right| + |a_1| + |b_1| + |a_2| + |b_2| + \dots + |a_n| + |b_n| + \dots \quad (3)$$

Orduan, (1) seriea majoragarria da eta, beraz, $(-\pi, \pi)$ tartean gaiz gai integra dezakegu. Balia gaitzen horretaz a_0 koefizientea kalkulatzeko.

Integra ditzagun $-\pi$ eta π limiteen artean (2) berdintzaren bi atalak:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2} dx + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_{-\pi}^{\pi} a_n \cos nx dx + \int_{-\pi}^{\pi} b_n \sin nx dx \right).$$

Kalkula dezagun banaturik bigarren ataleko integral bakoitza:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2} dx = \pi a_0;$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} a_n \cos nx dx = a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx dx = \frac{a_n \sin nx}{n} \Big|_{-\pi}^{\pi} = 0;$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} b_n \sin nx dx = b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx dx = \frac{-b_n \cos nx}{n} \Big|_{-\pi}^{\pi} = 0.$$

Beraz,

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \pi a_0,$$

nondik

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx. \quad (4)$$

Seriearen beste koefizienteak kalkulatzeko, aurretik aztertuko ditugun integral definitu batzuk kalkulatu behar ditugu.

n eta k zenbaki osoak badira hurrengo berdintzak betetzen dira:

$n \neq k$ bada:

$$\left. \begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos kx \, dx &= 0; \\ \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \sin kx \, dx &= 0; \\ \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \sin kx \, dx &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (\text{I})$$

dugu.

Baina, $n = k$ bada,

$$\left. \begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 kx \, dx &= \pi; \\ \int_{-\pi}^{\pi} \sin kx \cos kx \, dx &= 0; \\ \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 kx \, dx &= \pi. \end{aligned} \right\} \quad (\text{II})$$

Kalkula dezagun, adibidez, (I) taldeko lehenengo integrala.

$$\cos nx \cos kx = \frac{1}{2} [\cos(n+k)x + \cos(n-k)x]$$

betetzen denez,

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos kx \, dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(n+k)x \, dx + \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(n-k)x \, dx = 0$$

dugu. Antzeko eran (I) beste formulak ere lor daitezke¹⁾. (II) taldeko integralak zuzenki kalkulatu dira (ikus X. gaia).

Orain kalkula ditzakegu (2) seriearen a_k eta b_k koefizienteak.

a_k koefizientea kalkulatzeko, $k \neq 0$ denean, biderka ditzagun (2) berdintzaren bi atalak $\cos kx$ faktoreaz:

$$f(x) \cos kx = \frac{a_0}{2} \cos kx + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx \cos kx + b_n \sin nx \cos kx). \quad (2')$$

Berdintzaren bigarren ataleko seriea majoragarria da, bere gaiak ez bait dituzte balio absolutuan (3) serie konbergente positiboaren gaiak gainditzen. Horregatik edozein tartetan gaiz gai integra dezakegu.

Integra dezagun (2') berdintza $-\pi$ eta π limiteen artean:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx \, dx = \frac{a_0}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \, dx + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos kx \, dx + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cos kx \, dx \right).$$

(II) eta (I) formulak kontsideratuz, nabarituko dugu bigarren ataleko integral guztiak anulatu direla, a_k koefizientea duen integrala ezik.

Beraz,

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx \, dx = a_k \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 kx \, dx = a_k \pi,$$

nondik

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx \, dx. \quad (5)$$

(2) berdintzaren bi atalak $\sin kx$ faktoreaz biderkatuz eta $-\pi$ eta π artean berriro integratuz,

$$\begin{aligned} 1) \quad \cos nx \sin kx &= \frac{1}{2} [\sin(n+k)x - \sin(n-k)x], \\ \sin nx \sin kx &= \frac{1}{2} [-\cos(n+k)x + \cos(n-k)x] \end{aligned}$$

formuleen laguntzaz.

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx \, dx = b_k \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 kx \, dx = b_k \pi$$

kalkulatzeko, ondik

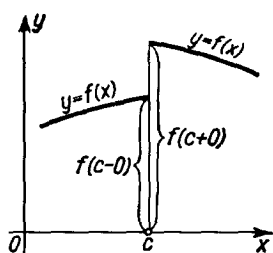
$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx \, dx. \quad (6)$$

(4), (5) eta (6) formuleen bidez determinatutako koefizienteak $f(x)$ funtzioaren *Fourier-en koefiziente* deitzen dira eta, koefiziente horiekin osatutako (1) serie trigonometrikoak $f(x)$ funtzioaren *Fourier-en serie* izena du.

Orain, buelta gaitzen atal honen hasieran planteatutako problemara: zer propietate bete behar du $f(x)$ funtzioak, bere Fourier-en seriea konbergentea izan dadin eta osatutako Fourier-en seriearen batura emandako funtzioaren dagozkion puntuetako balioen berdina izateko?

Eman dezagun baldintza nahikoak ematen dizkigun teorema $f(x)$ funtzioa Fourier-en seriearen bidez adierazi ahal izateko.

Definizioa. $f(x)$ funtzioa *zatika monotono* deitzen da $[a, b]$ tartean, baldin eta azken hori $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$ puntuen bidez zati badaiteke $(a, x_1), (x_1, x_2), \dots, (x_{n-1}, b)$ tarteen kopuru finituan, zeinetan funtzioa monotonoa den, hau da, gorakorra edo beherakorra.



356. IRUDIA

Definiziotik ondorioztatzen da $f(x)$ $[a, b]$ tartean zatikako monotonoa eta bornatua bada, lehen mailako etenguneak soilik izan ditzakeela. Izan ere, $x = c$ $f(x)$ funtzioaren etengunea bada, funtzioaren monotoniaren arabera

$$\lim_{x \rightarrow c-0} f(x) = f(c-0), \quad \lim_{x \rightarrow c+0} f(x) = f(c+0)$$

limiteak existitzen dira, hau da, c puntua lehen mailako etengunea da (356. irudia).

Eman dezagun orain hurrengo teorema.

Teorema. 2π periodoko $f(x)$ funtzio periodikoa $(-\pi, \pi)$ tartean zatikako monotonoa eta bornatua bada, funtzio horri dagokion Fourier-en seriea puntu guztietan konbergentea da. Lortutako seriearen $s(x)$ batura funtzioaren jarraitasun-puntuetan funtzioak hartzen dituen balioen berdina da. $f(x)$ funtzioaren etengunetan, seriearen batura funtzioaren eskuin-limite eta ezker-limiteen arteko batezbesteko aritmetikoaren berdina da; hau da, $x = c$ $f(x)$ funtzioaren etengunea bada,

$$s(x)_{x=c} = \frac{f(c-0) + f(c+0)}{2}$$

dugu.

Teorema horretatik ondorioztatzen da Fourier-en serieen bidez adieraz daitezkeen funtzioen klasea nahikoa zabala dela. Horregatik Fourier-en serieak askotan aplikatzen dira matematikaren arlo desberdinetan. Fourier-en serieak fisika matematikoan arrakasta handiz aplikatzen dira, baita fisika eta mekanikari buruzko problema konkretuetako aplikazioetan ere (ikus XVIII. gaia).

Aurreko teorema frogapenik gabe utziko dugu. § 8-10 ataletan funtzio bat Fourier-en serien bidez garatu ahal izateko beste irizpide nahikoa frogatuko dugu. Irizpide hori, nolabait, funtzio-klase murriztuago bati dagokio.

§ 2. Funtzioen Fourier-en seriezko garapenen adibideak

Eman ditzagun funtzioen Fourier-en seriezko garapenen adibide batzuk.

1. Adibidea. Izan bedi hurrengo eran definitutako 2π periodoko $f(x)$ funtzio periodikoa:

$$f(x) = x, \quad -\pi < x \leq \pi.$$

Funtzioa zatikako monotonoa eta bornatua da (357. irudia). Beraz, Fourier-en seriezko garapena onartzen du.

§ 1eko (4) formularen bidez

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \, dx = \frac{1}{\pi} \left. \frac{x^2}{2} \right|_{-\pi}^{\pi} = 0$$

kalkulatzen dugu.

§ 1eko (5) formula aplikatuz eta zatika integratuz,

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \cos kx \, dx = \frac{1}{\pi} \left[x \frac{\sin kx}{k} \Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{k} \int_{-\pi}^{\pi} \sin kx \, dx \right] = 0$$

lortzen dugu.

§ 1eko (6) formularen bidez,

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \sin kx \, dx = \frac{1}{\pi} \left[-x \frac{\cos kx}{k} \Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{k} \int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \, dx \right] = (-1)^{k+1} \frac{2}{k}$$

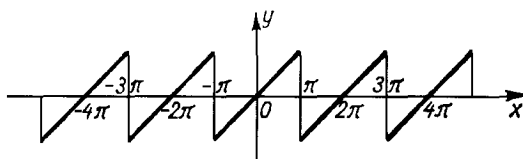
kalkulatzen dugu.

Era horretan,

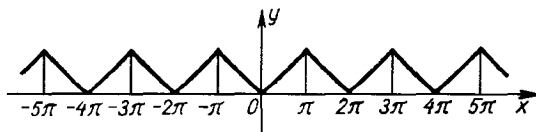
$$f(x) = 2 \left[\frac{\sin x}{1} - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \dots + (-1)^{k+1} \frac{\sin kx}{k} + \dots \right]$$

seriea lortzen dugu.

Berdintza hori puntu guztietan gertatzen da, etengunetan ezik. Etengune bakoitzean seriearen batura eskuin-limite eta ezker-limiteen arteko batezbesteko aritmetikoaren berdina da, zero alegia.



357. IRUDIA



358. IRUDIA

2. Adibidea. Izan bedi 2π periodoko $f(x)$ funtzio periodikoa, hurrengo eran definitua:

$$f(x) = -x \quad -\pi \leq x \leq 0 \quad \text{denerako}$$

$$f(x) = x \quad 0 < x \leq \pi \quad \text{denerako}$$

(hau da, $f(x) = |x|$) (358. irudia). Funtzio hori ere, $-\pi \leq x \leq \pi$ tartean zatikako monotonoa eta bornatua da.

Kalkula ditzagun bere Fourier-en koefizienteak:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{1}{\pi} \left[\int_{-\pi}^0 (-x) dx + \int_0^{\pi} (x) dx \right] = \pi; \\ a_k &= \frac{1}{\pi} \left[\int_{-\pi}^0 (-x) \cos kx dx + \int_0^{\pi} x \cos kx dx \right] = \\ &= \frac{1}{\pi} \left[-\frac{x \sin kx}{k} \Big|_{-\pi}^0 + \frac{1}{k} \int_{-\pi}^0 \sin kx dx + \frac{x \sin kx}{k} \Big|_0^{\pi} - \frac{1}{k} \int_0^{\pi} \sin kx dx \right] = \\ &= \frac{1}{\pi k} \left[-\frac{\cos kx}{k} \Big|_{-\pi}^0 + \frac{\cos kx}{k} \Big|_0^{\pi} \right] = \\ &= \frac{2}{\pi k^2} (\cos k\pi - 1) = \begin{cases} 0 & k \text{ bikoitia denean,} \\ -\frac{4}{\pi k^2} & k \text{ bakoitia denean;} \end{cases} \\ b_k &= \frac{1}{\pi} \left[\int_{-\pi}^0 (-x) \sin kx dx + \int_0^{\pi} x \sin kx dx \right] = 0. \end{aligned}$$

Honelatan,

$$f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \left[\frac{\cos kx}{1^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \dots + \frac{\cos(2p+1)x}{(2p+1)^2} + \dots \right]$$

seriea lortzen dugu.

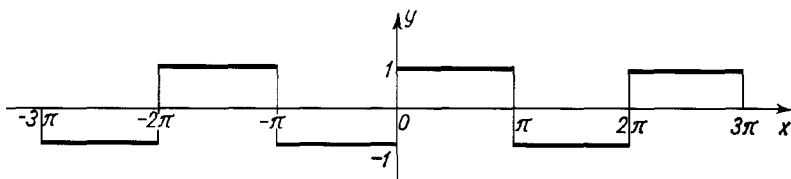
Serie hori puntu guztietan konbergentea da eta bere batura emandako funtzioaren berdina da.

3. Adibidea. Izan bedi 2π periodoko $f(x)$ funtzio periodikoa, hurrengo eran definitua:

$$f(x) = -1 \quad -\pi < x < 0 \quad \text{denerako,}$$

$$f(x) = 1 \quad 0 \leq x \leq \pi \quad \text{denerako.}$$

Funtzio hori (359. irudia) $-\pi \leq x \leq \pi$ tartean, zatikako monotonoa eta bornatua da.



359. IRUDIA

Kalkula ditzagun bere Fourier-en koefizienteak:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{1}{\pi} \left[\int_{-\pi}^0 (-1) dx + \int_0^{\pi} (1) dx \right] = 0;$$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \left[\int_{-\pi}^0 (-1) \cos kx dx + \int_0^{\pi} \cos kx dx \right] = -1 \frac{\sin kx}{k} \Big|_{-\pi}^0 + \frac{\sin kx}{k} \Big|_0^{\pi} = 0;$$

$$\begin{aligned} b_k &= \frac{1}{\pi} \left[\int_{-\pi}^0 (-1) \sin kx dx + \int_0^{\pi} \sin kx dx \right] = \frac{1}{\pi} \left[\frac{\cos kx}{k} \Big|_{-\pi}^0 - \frac{\cos kx}{k} \Big|_0^{\pi} \right] = \\ &= \frac{2}{\pi k} [1 - \cos \pi k] = \begin{cases} 0 & k \text{ bikoitia denerako,} \\ \frac{4}{\pi k} & k \text{ bakoitia denerako.} \end{cases} \end{aligned}$$

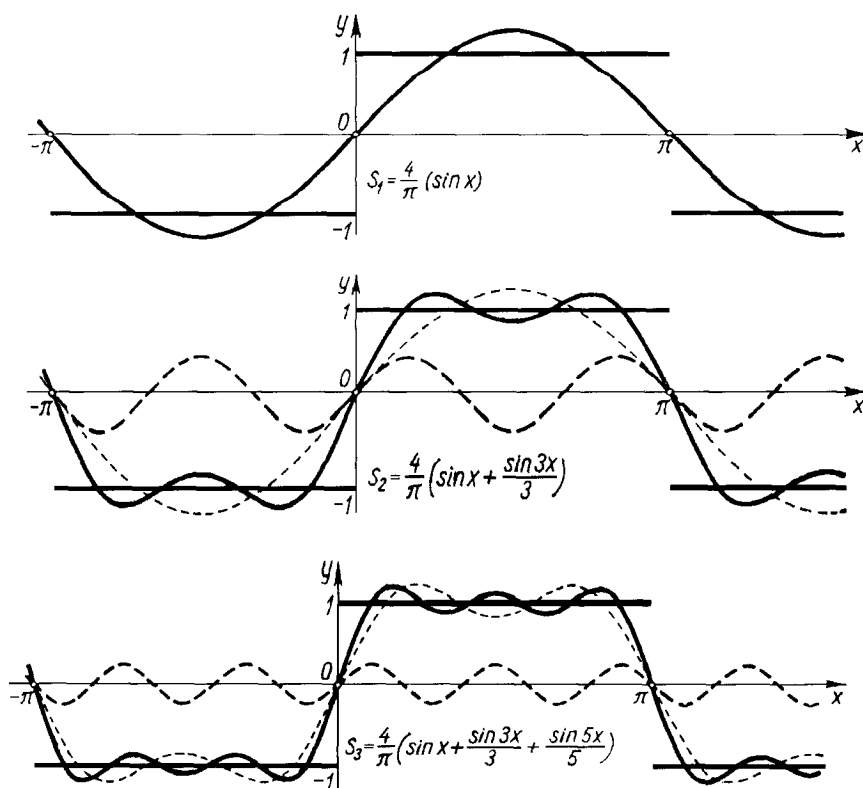
Beraz, kontsideratutako funtzioaren Fourier-en seriea

$$f(x) = \frac{4}{\pi} \left[\frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \dots + \frac{\sin(2p+1)x}{2p+1} + \dots \right]$$

itxurakoa da.

Berdintza horrek puntu guztietan balio du, etengunetan ezik.

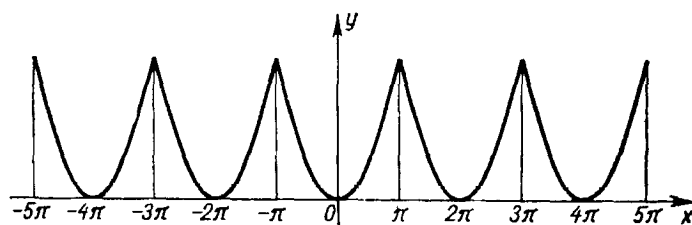
360. irudian argi ohareratzen da nola n handitzen denean seriearen s_n batura partzialek gero eta zehatzago adierazten duten $f(x)$ funtzioa.



360. IRUDIA

4. Adibidea. Izan bedi hurrengo eran definitutako 2π periodoko $f(x)$ funtzio periodikoa:

$$f(x) = x^2, \quad -\pi \leq x \leq \pi \quad (361. \text{ irudia}).$$



361. IRUDIA

Kalkula ditzagun bere Fourier-en koefizienteak:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 dx = \frac{1}{\pi} \left. \frac{x^3}{3} \right|_{-\pi}^{\pi} = \frac{2\pi^2}{3};$$

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 \cos kx dx = \frac{1}{\pi} \left[\frac{x^2 \sin kx}{k} \right]_{-\pi}^{\pi} - \frac{2}{k} \int_{-\pi}^{\pi} x \sin kx dx = \\ &= -\frac{2}{\pi k} \left[-\frac{x \cos kx}{k} \right]_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{k} \int_{-\pi}^{\pi} \cos kx dx = \frac{4}{\pi k^2} [\pi \cos k\pi] = \\ &= \begin{cases} \frac{4}{k^2} & k \text{ bikoitia denerako,} \\ -\frac{4}{k^2} & k \text{ bakoitia denerako;} \end{cases} \\ b_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 \sin kx dx = +\frac{1}{\pi} \left[-\frac{x^2 \cos kx}{k} \right]_{-\pi}^{\pi} + \frac{2}{k} \int_{-\pi}^{\pi} x \cos kx dx = \\ &= \frac{2}{\pi k} \left[\frac{x \sin kx}{k} \right]_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{k} \int_{-\pi}^{\pi} \sin kx dx = 0. \end{aligned}$$

Beraz, emandako $f(x)$ funtzioaren Fourier-en serieak

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} - 4 \left(\frac{\cos x}{1} - \frac{\cos 2x}{2^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} - \dots \right)$$

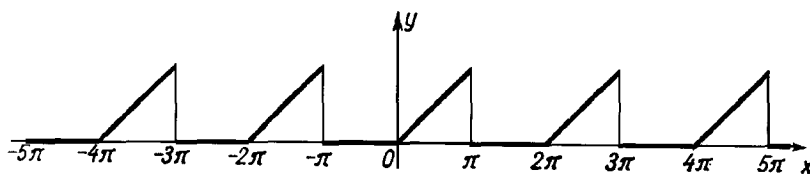
itxura du.

Funtzioa zatikako monotonoa, bornatua eta jarraia denez gero, berdintza hori puntu guztietan betetzen da.

Lortutako berdintzan $x = \pi$ eginez,

$$\frac{\pi^2}{6} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

lortzen dugu.



5. Adibidea. Izan bedi 2π periodoko $f(x)$ funtzio periodikoa, hurrengo eran definitua:

$$\begin{aligned} f(x) &= 0 & -\pi \leq x \leq 0 & \text{denerako} \\ f(x) &= x & 0 < x \leq \pi & \text{denerako (362. irudia).} \end{aligned}$$

Determina ditzagun Fourier-en koefizienteak:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{1}{\pi} \left[\int_{-\pi}^0 0 dx + \int_0^{\pi} x dx \right] = \frac{1}{\pi} \frac{\pi^2}{2} = \frac{\pi}{2}; \\ a_k &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos kx dx = \frac{1}{\pi} \left[\frac{x \sin kx}{k} \Big|_0^{\pi} - \frac{1}{k} \int_0^{\pi} \sin kx dx \right] = \\ &= \frac{1}{\pi k} \frac{\cos kx}{k} \Big|_0^{\pi} = \begin{cases} -\frac{2}{\pi k^2} & k \text{ bakoitia denean,} \\ 0 & k \text{ bikoitia denean;} \end{cases} \\ b_k &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} x \sin kx dx = \frac{1}{\pi} \left[-\frac{x \cos kx}{k} \Big|_0^{\pi} + \frac{1}{k} \int_0^{\pi} \cos kx dx \right] = \\ &= -\frac{\pi}{\pi k} \cos k\pi = \begin{cases} \frac{1}{k} & k \text{ bakoitia denean,} \\ -\frac{1}{k} & k \text{ bikoitia denean.} \end{cases} \end{aligned}$$

Honela, Fourier-en serieak

$$f(x) = \frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi} \left(\frac{\cos x}{1^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \dots \right) + \left(\frac{\sin x}{1} - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \dots \right)$$

itxura hartzen du.

$f(x)$ funtzioaren etengunetan, seriearen batura funtzioaren eskuin-limite eta ezker-

-limitearen arteko batezbesteko aritmetikoaren berdina da (hau da, emandako kasuan $\frac{\pi}{2}$ zenbakia).

Lortutako berdintzan, $x=0$ eginez,

$$\frac{\pi^2}{8} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}$$

lortzen dugu.

§ 3. Funtzio periodikoen Fourier-en seriezko garapenari buruzko oharra

Adieraz dezagun 2π periodoko $\psi(x)$ funtzio periodiko baten hurrengo propietatea:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \psi(x) dx = \int_{\lambda}^{\lambda+2\pi} \psi(x) dx,$$

λ edozein izanik.

Izan ere,

$$\psi(\xi - 2\pi) = \psi(\xi)$$

betetzen denez, $x = \xi - 2\pi$ eginez, edozein c eta d baliotarako

$$\int_c^d \psi(x) dx = \int_{c+2\pi}^{d+2\pi} \psi(\xi - 2\pi) d\xi = \int_{c+2\pi}^{d+2\pi} \psi(\xi) d\xi = \int_{c+2\pi}^{d+2\pi} \psi(x) dx$$

idatz dezakegu. Bereziki, $c = -\pi$ eta $d = \lambda$ eginez,

$$\int_{-\pi}^{\lambda} \psi(x) dx = \int_{\pi}^{\lambda+2\pi} \psi(x) dx$$

lortzen dugu. Horregatik,

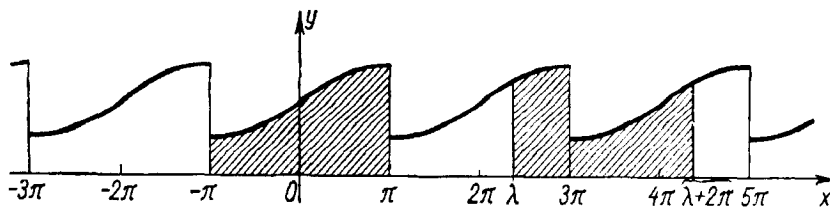
$$\begin{aligned} \int_{\lambda}^{\lambda+2\pi} \psi(x) dx &= \int_{\lambda}^{-\pi} \psi(x) dx + \int_{-\pi}^{\pi} \psi(x) dx + \int_{\pi}^{\lambda+2\pi} \psi(x) dx = \\ &= \int_{\lambda}^{-\pi} \psi(x) dx + \int_{-\pi}^{\pi} \psi(x) dx + \int_{-\pi}^{\lambda} \psi(x) dx = \int_{-\pi}^{\pi} \psi(x) dx. \end{aligned}$$

Adierazitako propietateak, periodoaren luzera duen hautazko tarte batean, funtzio periodiko baten integralak beti balio bera hartzen duela esan nahi du. Irudiz hornitzea erraza da: 363. irudian marraztutako azalerak berdinak dira.

Frogatutako propietatetik, Fourier-en koefizienteak kalkulatzekoan, $(-\pi, \pi)$ integrazio tarteak $(\lambda, \lambda + 2\pi)$ beste batez ordezkatu dezakegula ondorioztatzen da, hau da,

$$\left. \begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_{\lambda}^{\lambda+2\pi} f(x) dx, & a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{\lambda}^{\lambda+2\pi} f(x) \cos nx dx, \\ b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{\lambda}^{\lambda+2\pi} f(x) \sin nx dx \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

jar dezakegu, non λ hautazko zenbakia den.

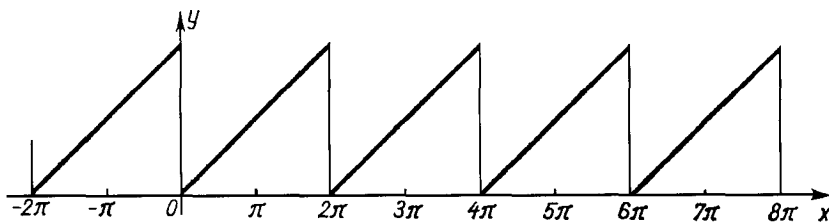


363. IRUDIA

Hori, $f(x)$ funtzioa, hipotesiz, 2π periodoko funtzio periodikoa denetik ondorioztatzen da; beraz, $f(x) \cos nx$ eta $f(x) \sin nx$ funtzioak ere 2π periodoko funtzio periodikoak dira. Erakuts dezagun adibide batekin nola kasu batzuetan frogatutako propietateak koefizienteen kalkuluaren prozedura errazten duen.

Adibidea. Suposa dezagun Fourier-en seriez garatu nahi dela 2π periodoko $f(x)$ funtzio periodikoa, zeina $0 \leq x \leq 2\pi$ tartean $f(x) = x$ berdintzaren bidez definitzen den.

$f(x)$ funtzioaren grafikoa 364. irudian adierazten da. Funtzio hori $[-\pi, \pi]$ tartean bi formulen bidez definituta dago: $f(x) = x + 2\pi$ $[-\pi, 0]$ tartean, eta $f(x) = x$ $[0, \pi]$ tartean. Bestalde, $[0, 2\pi]$ tartean, funtzio hori era oso sinplean definituta dago, formula bakar batez, $f(x) = x$. Horregatik, funtzio hori Fourier-en seriez garatzeko komenigarriagoa da (1) formulak erabiltzea, $\lambda = 0$ eginez.



364. IRUDIA

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x dx = 2\pi;$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos nx \, dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x \cos nx \, dx = \frac{1}{\pi} \left[\frac{x \sin nx}{n} + \frac{\cos nx}{n^2} \right]_0^{2\pi} = 0;$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin nx \, dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x \sin nx \, dx = \frac{1}{\pi} \left[-\frac{x \cos nx}{n} + \frac{\sin nx}{n^2} \right]_0^{2\pi} = -\frac{2}{n}.$$

Beraz,

$$f(x) = \pi - 2 \sin x - \frac{2}{2} \sin 2x - \frac{2}{3} \sin 3x - \frac{2}{4} \sin 4x - \frac{2}{5} \sin 5x - \dots$$

Serie horrek funtzioa puntu guztietan adierazten du, etengunetan ezik (hau da, $x = 0, 2\pi, 4\pi, \dots$ puntuetan ezik). Puntu horietan seriearen batura funtzioaren eskuin- eta ezker-limiteen arteko baturaerdiaren berdina da (hau da, emandako kasuan, π zenbakia).

§ 4. Funtzio bikoiti eta bakoitien Fourier-en serieak

Funtzio bakoiti eta bakoitien definiziotik ondorioztatzen da $\psi(x)$ funtzio bikoitia bada,

$$\int_{-\pi}^{\pi} \psi(x) \, dx = 2 \int_0^{\pi} \psi(x) \, dx$$

betetzen dela. Izan ere,

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \psi(x) \, dx &= \int_{-\pi}^0 \psi(x) \, dx + \int_0^{\pi} \psi(x) \, dx = \int_0^{\pi} \psi(-x) \, dx + \int_0^{\pi} \psi(x) \, dx = \\ &= \int_0^{\pi} \psi(x) \, dx + \int_0^{\pi} \psi(x) \, dx = 2 \int_0^{\pi} \psi(x) \, dx, \end{aligned}$$

funtzio bikoitiaren definizioaren arabera $\psi(-x) = \psi(x)$ betetzen bait da.

Analogoki frogatu daiteke $\varphi(x)$ funtzio bakoitia bada,

$$\int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x) \, dx = \int_{-\pi}^0 \varphi(-x) \, dx + \int_0^{\pi} \varphi(x) \, dx = - \int_0^{\pi} \varphi(x) \, dx + \int_0^{\pi} \varphi(x) \, dx = 0$$

betetzen dela.

$f(x)$ funtzio bakoitia Fourier-en seriez garatzen bada, $f(x)\cos kx$ biderkadura ere funtzio bakoitia da eta $f(x)\sin kx$ funtzio bikoitia; beraz,

$$\left. \begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = 0, \\ a_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx dx = 0, \\ b_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin kx dx, \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

hau da, funtzio bakoiti baten Fourier-en serieak sinuak besterik ez ditu (ikus § 2ko 1. adibidea).

Funtzio bikoiti bat Fourier-en seriez garatzen bada, $f(x)\sin kx$ biderkadura funtzio bakoitia da eta $f(x)\cos kx$ funtzio bikoitia, beraz,

$$\left. \begin{aligned} a_0 &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) dx, \\ a_k &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos kx dx, \\ b_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx dx = 0, \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

hau da, funtzio bikoiti baten Fourier-en serieak kosinuak besterik ez ditu (ikus § 2ko 2. adibidea).

Lortutako formulak Fourier-en koefizienteen kalkuluak errazten dituzte, emandako funtzioa bikoitia edo bakoitia denean. Nabaria da funtzio periodiko oro ez dela halabeharrez bakoitia edo bikoitia. (ikus § 2ko 5. adibidea).

Adibidea. Suposa dezagun, $[0, \pi]$ tartean $y = x$ berdintzaz definituriko, 2π periodoko $f(x)$ funtzio periodikoa Fourier-en seriez garatu behar dela.

§ 2ko 2. adibidean jadanik garatu dugu funtzio hori Fourier-en seriez (ikus 358. irudia). Kalkula ditzagun berriro funtzio horren Fourier-en koefizienteak funtzio horren bikoititasunaz baliatuz.

(2) formulen arabera, $b_k = 0$, k edozein izanik;

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \, dx = \pi;$$

$$a_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos kx \, dx =$$

$$= \frac{2}{\pi} \left[\frac{x \sin kx}{k} + \frac{\cos kx}{k^2} \right]_0^{\pi} = \frac{2}{\pi k^2} [(-1)^k - 1] = \begin{cases} 0 & k \text{ bikoitia denerako,} \\ -\frac{4}{\pi k^2} & k \text{ bakoitia denerako.} \end{cases}$$

§ 2ko 2. adibideko koefiziente berak lortu ditugu, baina era laburragoan.

§ 5. $2l$ periodoko funtzioen Fourier-en seriea

Izan bedi $f(x)$ orokorrean 2π -ren desberdina den $2l$ periodoko funtzio periodikoa. Gara dezagun Fourier-en seriez.

Egin dezagun aldagai-aldaketa,

$$x = \frac{l}{\pi} t$$

formularen arabera. Orduan, $f\left(\frac{l}{\pi} t\right)$ funtzioa t -rekiko 2π periodoko funtzio periodikoa da. Gara dezakegu, $-\pi \leq x \leq \pi$ tartean, Fourier-en seriez:

$$f\left(\frac{l}{\pi} t\right) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kt + b_k \sin kt), \quad (1)$$

non

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{l}{\pi} t\right) dt, \quad a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{l}{\pi} t\right) \cos kt \, dt,$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{l}{\pi} t\right) \sin kt \, dt.$$

Orain itzul dezagun x aurreko aldagaia:

$$x = \frac{l}{\pi} t, \quad t = x \frac{\pi}{l}, \quad dt = \frac{\pi}{l} dx.$$

Orduan,

$$\left. \begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) dx, & a_k &= \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos k \frac{\pi}{l} x dx, \\ b_k &= \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin k \frac{\pi}{l} x dx \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

izango dugu. (1) formulak

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos \frac{k\pi}{l} x + b_k \sin \frac{k\pi}{l} x \right) \quad (3)$$

itxura hartzen du, non a_0, a_k, b_k koefizienteak (2) formulen arabera kalkulatzeko diren. Hori da, hain zuzen ere, $2l$ periodoko funtzio periodiko baten Fourier-en seriea.

Nabari dezagun 2π periodoko funtzio periodikoen Fourier-en serietarako formulatutako teorema guztiek balio dutela $2l$ beste edozein periodotako funtzio periodikoen Fourier-en serietarako. Bereziki, funtzio baten Fourier-en seriezko garapenerako irizpide nahikoak (ikus § 1); seriearen koefizienteak kalkulatzeko posibilitateari buruzko oharra, periodoaren luzera duen hautazko tarte batean integratuz (ikus § 3); baita ere seriearen koefizienteen kalkuluak errazteko posibilitateari buruzko oharra, funtzioa bikoitia edo bakoitia denean (§ 4), irauten dute.

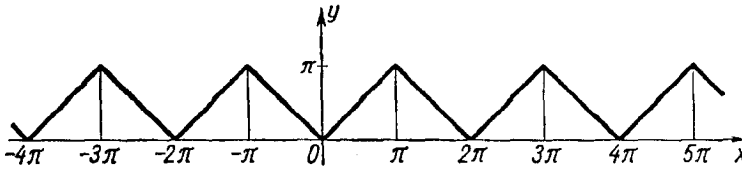
Adibidea. Kalkulatu, $[-l, l]$ tartean $f(x) = |x|$ berdintzaz definitutako $2l$ periodoko $f(x)$ funtzio periodikoaren Fourier-en seriezko garapena (365. irudia).

Ebazpena. Kotsideratutako funtzioa bikoitia denez gero,

$$b_k = 0; \quad a_0 = \frac{2}{l} \int_0^l x dx = l;$$

$$a_k = \frac{2}{l} \int_0^l x \cos \frac{k\pi x}{l} dx = \frac{2l}{\pi^2} \int_0^{\pi} x \cos kx dx = \begin{cases} 0 & k \text{ bikoitia denerako,} \\ -\frac{4l}{\pi^2 k^2} & k \text{ bakoitia denerako} \end{cases}$$

dugu.



365. IRUDIA

Beraz, garapenak

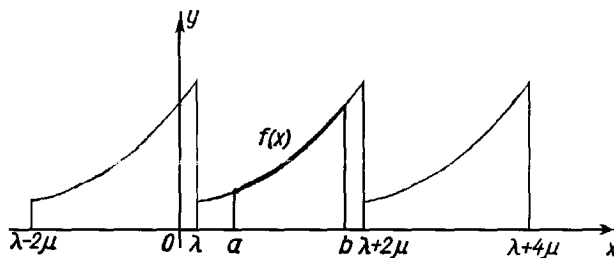
$$|x| = \frac{1}{2} - \frac{4l}{\pi^2} \left[\frac{\cos \frac{\pi}{l} x}{1} + \frac{\cos \frac{3\pi}{l} x}{3^2} + \dots + \frac{\cos \frac{(2p+1)\pi}{l} x}{(2p+1)^2} + \dots \right]$$

itxura du.

§ 6. Funtzio ez-periodiko baten Fourier-en seriezko garapena

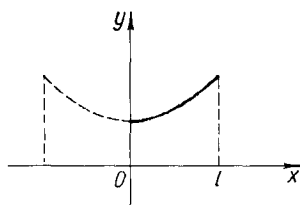
Suposa dezagun $[a, b]$ tarte batean zatikako monotonoa den $f(x)$ funtzioa definituta dagoela (366. irudia). Froga dezagun jarraitasun-puntuetan $f(x)$ funtzio hori Fourier-en serie baten bidez adieraz dezakegula. Horretarako kontsidera dezagun zatikako monotonoa eta periodikoa den hautazko funtzio bat, $|b - a| \leq 2\mu$ periodoko $f_1(x)$ funtzioa, $[a, b]$ tartean $f(x)$ funtzioaren berdina dena. ($f(x)$ funtzioaren definizioa osatu dugu).

Gara dezagun $f_1(x)$ funtzioa Fourier-en seriez. Seriearen batura, $[a, b]$ tarteko puntu guztietan (etengunetan ezik) emandako $f(x)$ funtzioaren berdina da, $f(x)$ funtzioa $[a, b]$ tartean Fourier-en seriez garatu dugula esan nahi duena.

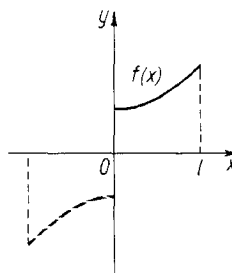


366. IRUDIA

Azter dezagun orain ondorengo kasu garrantzitsua. Izan bedi $[0, l]$ tartean definitutako $f(x)$ funtzioa. Funtzio horren definizioa $[-l, 0]$ tartean hautazko era batean osatuz (zatikako monotonía mantenduz) funtzio hori Fourier-en seriez gara dezakegu. Bereziki, emandako funtzioaren definizioa osatzen badugu, $-l \leq x < 0$ tartean $f(x) = f(-x)$ izan dadin, funtzio bikoiti bat lortzen dugu (367. irudia). (Kasu honetan $f(x)$ funtzioa era bikoitian hedatua izan dela esaten da). Funtzio hori kosinuak bakarrik dituen Fourier-en seriez garatzen da. Horrela, $[0, l]$ tartean definitutako $f(x)$ funtzioa kosinutako seriez garatu dugu.



367. IRUDIA



368. IRUDIA

$f(x)$ funtzioaren definizioa osatzen badugu $-l \leq x < 0$ tartean, non $f(x) = -f(-x)$ den, funtzio bakoiti bat lortzen dugu, zeina sinutako seriez garatzen den (368. irudia). ($f(x)$ funtzioa era bakoitian hedatua da). Horrela, $[0, l]$ zuzenki zatikako monotonía den $f(x)$ funtzioa definituta badago, kosinu zein sinutako Fourier-en seriez gara dezakegu.

1. Adibidea. Garatu sinutako seriez $[0, \pi]$ tartean $f(x) = x$ funtzioa.

Ebazpena. Funtzio hori bakoiti eran hedatuz (357. irudia)

$$x = 2 \left[\frac{\sin x}{1} - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \dots \right]$$

seriea lortzen dugu (ikus § 2ko 1. adibidea).

2. Adibidea. Garatu kosinutako seriez $[0, \pi]$ tartean $f(x) = x$ funtzioa.

Ebazpena. Funtzio hori era bikoitian hedatuz,

$$f(x) = |x|, \quad -\pi < x \leq \pi$$

dugu (358. irudia). Seriez garatuz,

$$f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \left[\frac{\cos x}{1} + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \dots \right]$$

kalkulatzen dugu (ikus § 2ko 2. adibidea). Beraz, $[0, \pi]$ tartean

$$x = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \left[\frac{\cos x}{1} + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \dots \right]$$

berdintza betetzen da.

§ 7. Funtzio baten batezbesteko hurbilketa polinomio trigonometrikoen bidez

Funtzio baten serie infinituaren bidezko adierazpenak (Fourier-ena, Taylor-ena, eta abarrena) praktikan duen erabilgarritasuna, n -garren gaian ebakiz lortzen den batura finitua, garatzen den funtzioaren adierazpen hurbildua dela da; adierazpen hurbildu hori lor daiteke edozein doitasun-mailarekin n -ren balioa nahikoa handia aukeratuz. Hala ere, adierazpen hurbilduak izaera desberdinak izan ditzake.

Honela, adibidez, Taylor-en seriearen lehenengo n gaien s_n batura kontsideratutako funtzioaren berdina da puntu batean eta, azken horretan, n -garren ordenarainoko deribatuak aztertutako funtzioaren deribatuekin bat datoz. n mailako Lagrange-ren polinomioak aztertutako funtzioarekin bat egiten du $n+1$ puntutan (ikus VII. gaiko § 9).

Azter dezagun $f(x)$ funtzio periodiko baten

$$s_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n a_k \cos kx + b_k \sin kx$$

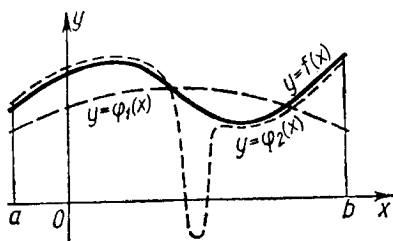
iturako polinomio trigonometrikoen bidezko adierazpen hurbilduak daukan izaera, non $a_0, a_1, b_1, a_2, b_2, \dots, a_n, b_n$ Fourier-en koefizienteak diren, hau da, Fourier-en seriearen lehenengo n gaien baturaren bidez hurbiltzen dugu. Lehenik egin ditzagun oharpen batzuk.

Suposa dezagun $[a, b]$ tartean $y = f(x)$ funtzioa dugula eta $\varphi(x)$ beste funtzio batez ordezkatzearn egiten den errorea ebaluatu nahi dugula. Errorearen neurritzat, adibidez, $[a, b]$ tartean $\max |f(x) - \varphi(x)|$ har daiteke, hau da, $\varphi(x)$ eta $f(x)$ funtzioen arteko *desbidazio maximo* deitutakoa. Baina batzutan naturalagoa da errorearen neurritzat, δ *batezbesteko desbidazio kuadratikoa* hartzea,

$$\delta^2 = \frac{1}{(b-a)} \int_a^b [f(x) - \varphi(x)]^2 dx$$

berdintzaren arabera determinatzen dena.

369. irudian azalduko dugu batezbesteko desbidazio kuadratikoa eta maximoaren arteko diferentzia.



369. IRUDIA

Demagun lerro jarraiak $y = f(x)$ funtzioa adierazten duela eta etenek $\varphi_1(x)$ eta $\varphi_2(x)$ hurbilketak. $y = \varphi_1(x)$ kurbaren desbidazio maximoa $y = \varphi_2(x)$ kurbarena baino txikiagoa da, baina lehenengo kurbaren batezbesteko desbidazio kuadratikoa bigarrenarena baino handiagoa da, $y = \varphi_2(x)$ kurba $y = f(x)$ kurbatik nabariro urruntzen bait da oso tarte estu batean soilik eta, horrexegatik, lehenengoak baino hobeto karakterizatzen du $y = f(x)$ kurba.

Itzul gaitezen orain gure problemara.

Izan bedi 2π periodoko $f(x)$ funtzio periodikoa. n . ordenako polinomio trigonometrikoko guztien artean,

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (\alpha_k \cos kx + \beta_k \sin kx),$$

α_k eta β_k koefizienteen aukerapenaren bidez kalkulatu behar da polinomio bat, zeinerako

$$\delta_n^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left[f(x) - \frac{a_0}{2} - \sum_{k=1}^n (\alpha_k \cos kx + \beta_k \sin kx) \right]^2 dx$$

berdintzaz determinatutako batezbesteko desbidazio kuadratikoa balio minimoa izango duen.

Problema $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n, 2n+1$ aldagaiko funtzio baten minimoa determinatzean datza.

Integral barnean dagoen karratua garatuz eta gaiz gai integratuz,

$$\begin{aligned} \delta_n^2 = & \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left\{ f^2(x) - 2f(x) \left[\frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^n (\alpha_k \cos kx + \beta_k \sin kx) \right] + \right. \\ & \left. + \left[\frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^n (\alpha_k \cos kx + \beta_k \sin kx) \right]^2 \right\} dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx - \frac{\alpha_0}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx - \\ & - \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^n \alpha_k \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx dx - \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^n \beta_k \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx dx + \frac{1}{2\pi} \frac{\alpha_0^2}{4} \int_{-\pi}^{\pi} dx + \\ & + \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^n \alpha_k^2 \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 kx dx + \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^n \beta_k^2 \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 kx dx + \frac{1}{2\pi} \alpha_0 \sum_{k=1}^n \alpha_k \int_{-\pi}^{\pi} \cos kx dx + \\ & + \frac{1}{2\pi} \alpha_0 \sum_{k=1}^n \beta_k \int_{-\pi}^{\pi} \sin kx dx + \frac{1}{\pi} \sum_{k \neq j} \sum_{j=1}^n \alpha_k \alpha_j \int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \cos jx dx + \\ & + \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_k \beta_j \int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \sin jx dx + \frac{1}{\pi} \sum_{k \neq j} \sum_{j=1}^n \beta_k \beta_j \int_{-\pi}^{\pi} \sin kx \sin jx dx \end{aligned}$$

lortzen dugu.

Ohar dezagun

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = a_0; \quad \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx dx = a_k; \quad \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx dx = b_k$$

$f(x)$ funtzioaren Fourier-en koefizienteak direla.

Beraz § 1eko (I) eta (II) formulen arabera haxe daukagu: $k=j$ denerako,

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 kx dx = \pi, \quad \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 kx dx = \pi, \quad \int_{-\pi}^{\pi} \sin kx \cos jx dx = 0$$

eta $k \neq j$ denean,

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \cos jx \, dx = 0, \quad \int_{-\pi}^{\pi} \sin kx \sin jx \, dx = 0.$$

Honelatan,

$$\delta_n^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) \, dx - \frac{\alpha_0 a_0}{2} - \sum_{k=1}^n (\alpha_k a_k + \beta_k b_k) + \frac{\alpha_0^2}{4} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (\alpha_k^2 + \beta_k^2)$$

lortzen dugu.

$$\frac{a_0^2}{4} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (a_k^2 + b_k^2)$$

kantitatea batuz eta kenduz

$$\begin{aligned} \delta_n^2 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) \, dx - \frac{a_0^2}{4} - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (a_k^2 + b_k^2) + \\ &+ \frac{1}{4} (\alpha_0 - a_0)^2 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n [(\alpha_k - a_k)^2 + (\beta_k - b_k)^2] \end{aligned} \quad (1)$$

dugu.

Batura horren lehenengo hiru gaiak ez daude $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta_1, \dots, \beta_n$ koefizienteen aukerapenaren menpe. Gainontzeko batugaiak,

$$\frac{1}{4} (\alpha_0 - a_0)^2 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n [(\alpha_k - a_k)^2 + (\beta_k - b_k)^2],$$

ez dira negatiboak. Beraien baturak balio minimoa (zeroren berdina) hartzen du

$$\alpha_0 = a_0, \quad \alpha_1 = a_1, \quad \dots, \quad \alpha_n = a_n, \quad \beta_1 = b_1, \quad \dots, \quad \beta_n = b_n$$

egiten badugu.

$\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta_1, \dots, \beta_n$ koefizienteen aukerapen horrekin

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (\alpha_k \cos kx + \beta_k \sin kx)$$

polinomio trigonometrikoa $f(x)$ funtziotik ahalik eta gutxien urruntzen da, δ_n^2 batezbesteko desbidazio kuadratikoa minimoa deneko zentzuan. Frogatuta geratzen da, beraz, hurrengo teorema:

n . ordenako polinomio trigonometriko guztien artean funtzioaren Fourier-en koefizienteak dituen polinomioa da funtzio horretatik batezbesteko desbidazio kuadratikoa minimoa ematen duena.

Batezbesteko desbidazio kuadratikoko horren balio minimoa

$$\delta_n^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx - \frac{a_0^2}{4} - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (a_k^2 + b_k^2) \quad (2)$$

da.

$\delta_n^2 \geq 0$ denez, n orotarako,

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx \geq \frac{a_0^2}{4} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (a_k^2 + b_k^2)$$

daukagu.

Beraz, bigarren ataleko seriea konbergentea da, $n \rightarrow \infty$ denean eta

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx \geq \frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) \quad (3)$$

idatz dezakegu.

Erlazio hori *Bessel-en desberdintza* deitzen da.

Aipa dezagun, frogapenik gabe, funtzio bornatu eta zatikako monotono orotarako, emandako funtzioa Fourier-en seriearen n . batura partzialarekin ordezkatzean, lortutako batezbesteko desbidazio kuadratikoa zerorantz jotzen duela, $n \rightarrow \infty$ denean, hau da, $\delta_n^2 \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$ denean. Baina, orduan, (2) formulatik

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx \quad (3')$$

berdintza ondorioztatzen da, *Liapunov-en berdintza* izena duena. (Nabari dezagun A.M. Liapunov-ek berdintza hori frogatu zuela hemen aztertzen den baino funtzio-klase zabalago baterako).

Frogatutakotik, Liapunov-en berdintza betetzen duen funtzio bati (bereziki funtzio bornatu eta zatikako monotono orori) dagokion Fourier-en serieak zeroren berdina den batezbesteko desbidazio kuadratikoa ematen duela ondorioztatzen da.

Oharra. Finka dezagun gero beharrezkoa izango den Fourier-en koefizienteen propietate bat. Hasteko sar dezagun hurrengo definizioa.

$f(x)$ funtzioa $[a, b]$ tartean *zatika jarrai* deitzen da baldin eta lehen mailako etengune-kopuru finitua badauka tarte horretan (edo puntu guztietan jarraia bada).

Froga dezagun ondoko baieztapena.

$f(x)$ funtzioa zatikako jarraia bada $[-\pi, \pi]$ tartean, bere Fourier-en koefizienteek zerorantz jotzen dute $n \rightarrow \infty$ denean, hau da,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0. \quad (4)$$

Frogapena. $f(x)$ funtzioa zatikako jarraia bada $[-\pi, \pi]$ tartean, $f^2(x)$ funtzioa

ere zatikako jarraia da tarte horretan. Orduan, $\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx$ existitzen da eta zenbaki finitua

da²⁾. Kasu honetan, (3) Bessel-en desberdintzatik ondorioztatzen da $\sum_{k=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2)$ seriea

konbergentea dela. Baina, seriea konbergentea bada, bere gai orokorrak zerorantz jotzen du,

hau da, emandako kasuan $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n^2 + b_n^2) = 0$ betetzen da. Hortik zuzenean (4) berdintzak

lortzen ditugu. Beraz, funtzio bornatu eta zatikako jarraia baterako

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx = 0$$

berdintzak baliogarriak dira.

2) Integral hori zatikako funtzio jarraien integral mugatuen batura bezala adieraz dezakegu $[-\pi, \pi]$ zuzenkia zatitzen den tarteetan.

$f(x)$ 2π periodoko funtzio periodikoa baldin bada, azken berdintzak ondoko eran idatz ditzakegu (a orotarako):

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^{a+2\pi} f(x) \cos nx \, dx = 0; \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^{a+2\pi} f(x) \sin nx \, dx = 0.$$

Nabari dezagun berdintza horiek baliogarriak izaten segitzen dutela $[a, b]$ edozein tartetan integratzen badugu, hau da,

$$\int_a^b f(x) \cos nx \, dx \quad \text{eta} \quad \int_a^b f(x) \sin nx \, dx$$

integralek zerorantz jotzen dute, n mugagabeki handitzen denean, $f(x)$ bornatu eta zatikako jarraia bada.

Izan ere, ideiak zehazteko, $b - a < 2\pi$ dela suposatuz, kontsidera dezagun hurrengo eran definitutako 2π periodoko $\varphi(x)$ funtzio laguntzailea:

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= f(x) & a \leq x \leq b & \quad \text{denean,} \\ \varphi(x) &= 0 & b < x \leq a + 2\pi & \quad \text{denean.} \end{aligned}$$

Orduan:

$$\int_a^b f(x) \cos nx \, dx = \int_a^{a+2\pi} \varphi(x) \cos nx \, dx,$$

$$\int_a^b f(x) \sin nx \, dx = \int_a^{a+2\pi} \varphi(x) \sin nx \, dx.$$

$\varphi(x)$ funtzioa bornatua eta zatikako jarraia denez, bigarren ataletako integralek zerorantz jotzen dute $n \rightarrow \infty$ denean. Beraz, lehenengo ataletako integralek ere zerorantz jotzen dute. Honelatan, baieztapena frogatuta geratzen da, hau da,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) \cos nx \, dx = 0; \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) \sin nx \, dx = 0 \quad (5)$$

a eta b edozein zenbaki izanik, eta $f(x)$ funtzioa zatikako jarraia eta bornatua $[a, b]$ tartean.

§ 8. Dirichlet-en integrala

Atal honetan Fourier-en serie baten n . batura partziala integral baten bitartez adierazten duen formula ondorioztatuko dugu. Formula horren beharra izango dugu hurrengo ataletan.

Kontsidera dezagun 2π periodoko $f(x)$ funtzio periodikoaren Fourier-en seriezko garapenaren n . batura partziala:

$$s_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx),$$

non

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos kt \, dt, \quad b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin kt \, dt.$$

$s_n(x)$ -ren formularen adierazpen horiek ordezkatzuz,

$$s_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \, dt + \sum_{k=1}^n \left[\frac{\cos kx}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos kt \, dt + \frac{\sin kx}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin kt \, dt \right]$$

lortzen dugu, edo $\cos kx$ eta $\sin kx$ integralpean sartuz (egin daitekeena $\cos kx$ eta $\sin kx$ ez bait dira integrazio-aldagaiaren menpekoak eta beraz, konstantetzat har daitezke)

$$s_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \, dt + \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^n \left[\int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos kx \cos kt \, dt + \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin kx \sin kt \, dt \right]$$

lortzen dugu. Orain $\frac{1}{\pi}$ faktore ateraz eta integralen batura baturaren integralaz ordezkatzuz

$$s_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left\{ \frac{f(t)}{2} + \sum_{k=1}^n [f(t) \cos kx \cos kt + f(t) \sin kx \sin kt] \right\} dt$$

dugu, edo

$$\begin{aligned}
 s_n(x) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n (\cos kt \cos kx + \sin kt \sin kx) \right] dt = \\
 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos k(t-x) \right] dt.
 \end{aligned} \tag{1}$$

Transforma dezagun kortxeteen artean dagoen adierazpena. Izan bedi:

$$\sigma_n(z) = \frac{1}{2} + \cos z + \cos 2z + \dots + \cos nz;$$

orduan,

$$\begin{aligned}
 2\sigma_n(z) \cos z &= \cos z + 2 \cos z \cos z + 2 \cos z \cos 2z + \dots + 2 \cos z \cos nz = \\
 &= \cos z + (1 + \cos 2z) + (\cos z + \cos 3z) + \\
 &+ (\cos 2z + \cos 4z) + \dots + [\cos(n-1)z + \cos(n+1)z] = \\
 &= 1 + 2 \cos z + 2 \cos 2z + \dots + 2 \cos(n-1)z + \cos nz + \cos(n+1)z
 \end{aligned}$$

edo

$$2\sigma_n(z) \cos z = 2\sigma_n(z) - \cos nz + \cos(n+1)z,$$

$$\sigma_n(z) = \frac{\cos nz - \cos(n+1)z}{2(1 - \cos z)}.$$

Baina,

$$\cos nz - \cos(n+1)z = 2 \sin(2n+1) \frac{z}{2} \sin \frac{z}{2},$$

$$1 - \cos z = 2 \sin^2 \frac{z}{2}.$$

Beraz,

$$\sigma_n(z) = \frac{\sin(2n+1) \frac{z}{2}}{2 \sin \frac{z}{2}}.$$

Honelatan, (1) berdintza

$$s_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \frac{\sin(2n+1) \frac{t-x}{2}}{2 \sin \frac{t-x}{2}} dt$$

eran idatz daiteke.

Integrakizuna periodikoa denez (2π periododuna), integralak 2π luzerako edozein integrazio-tartetan balio bera mantentzen du. Horregatik,

$$s_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_{x-\pi}^{x+\pi} f(t) \frac{\sin(2n+1) \frac{t-x}{2}}{2 \sin \frac{t-x}{2}} dt$$

idatz dezakegu. Sar dezagun α aldagai berria,

$$t - x = \alpha, \quad t = x + \alpha$$

eginez,

$$s_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x + \alpha) \frac{\sin(2n+1) \frac{\alpha}{2}}{2 \sin \frac{\alpha}{2}} d\alpha \quad (2)$$

formula lortzen dugu. Bigarren ataleko integralak *Dirichlet-en integral* izena du.

Egin dezagun formula horretan $f(x) \equiv 1$, orduan: $a_0 = 2$, $a_k = 0$, $b_k = 0$ $k > 0$ denean; beraz, $s_n(x) = 1$ n orotarako, eta

$$1 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin(2n+1) \frac{\alpha}{2}}{2 \sin \frac{\alpha}{2}} d\alpha \quad (3)$$

identitatea lortzen dugu, aurrerago beharko duguna.

§ 9. Fourier-en seriearen konbergentzia puntu batean

Suposa dezagun $f(x)$ funtzioa zatikako jarraia dela $[-\pi, \pi]$ tartean.

Aurreko ataleko (3) identitatearen bi atalak $f(x)$ faktoreaz biderkatuz eta integralaren barruan $f(x)$ sartuz

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \frac{\sin(2n+1)\frac{\alpha}{2}}{2 \sin \frac{\alpha}{2}} d\alpha$$

berdintza lortzen dugu.

Ken dezagun, atalez atal, berdintza hori aurreko ataleko (2) berdintzatik:

$$s_n(x) - f(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [f(x + \alpha) - f(x)] \frac{\sin(2n+1)\frac{\alpha}{2}}{2 \sin \frac{\alpha}{2}} d\alpha$$

erdiesten dugu.

Honela, Fourier-en seriearen konbergentzia emandako puntuan $f(x)$ funtzioak hartzen duen baliorantz, bigarren ataleko integralaren zeroranzko konbergentziarekiko menpekoa da, $n \rightarrow \infty$ denean.

Deskonposa dezagun azken integrala bi integraletan:

$$\begin{aligned} s_n(x) - f(x) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [f(x + \alpha) - f(x)] \frac{\cos \frac{\alpha}{2}}{2 \sin \frac{\alpha}{2}} \sin n\alpha d\alpha + \\ &+ \frac{1}{2} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [f(x + \alpha) - f(x)] \cos n\alpha d\alpha, \\ \sin(2n+1)\frac{\alpha}{2} &= \sin n\alpha \cos \frac{\alpha}{2} + \cos n\alpha \sin \frac{\alpha}{2} \end{aligned}$$

formula erabiliz.

Deskonposa dezagun azken berdintzaren bigarren ataleko lehenengo integrala hiru integraletan:

$$\begin{aligned}
s_n(x) - f(x) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\delta}^{\delta} [f(x+\alpha) - f(x)] \frac{\cos \frac{\alpha}{2}}{2 \sin \frac{\alpha}{2}} \sin n\alpha \, d\alpha + \\
&+ \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{-\delta} [f(x+\alpha) - f(x)] \frac{\cos \frac{\alpha}{2}}{2 \sin \frac{\alpha}{2}} \sin n\alpha \, d\alpha + \\
&+ \frac{1}{\pi} \int_{\delta}^{\pi} [f(x+\alpha) - f(x)] \frac{\cos \frac{\alpha}{2}}{2 \sin \frac{\alpha}{2}} \sin n\alpha \, d\alpha + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [f(x+\alpha) - f(x)] \frac{1}{2} \cos n\alpha \, d\alpha.
\end{aligned}$$

Egin dezagun:

$$\Phi_1(\alpha) = \frac{f(x+\alpha) - f(x)}{2}.$$

$f(x)$ bornatua eta zatikako jarraia denez, $\Phi_1(\alpha)$ ere α -ren funtzio periodiko, bornatu eta zatikako jarraia da. Hortaz, bigarren ataleko azken integralak zerorantz jotzen du $n \rightarrow \infty$ denean, funtzio horren Fourier-en koefizientea baita.

$$\Phi_2(\alpha) = [f(x+\alpha) - f(x)] \frac{\cos \frac{\alpha}{2}}{2 \sin \frac{\alpha}{2}}$$

funtzioa bornatua dago $-\pi \leq \alpha < -\delta$ eta $\delta \leq \alpha \leq \pi$ betetzen denean, horrez gain,

$$|\Phi_2(\alpha)| \leq [M + M] \frac{1}{2 \sin \frac{\varepsilon}{2}},$$

non $M, |f(x)|$ funtzioaren goi-limitea den.

Gainera, $\Phi_2(\alpha)$ funtzioa ere zatikako jarraia da. Beraz, § 7ko (5) formulen bidez bigarren eta hirugarren integralek zerorantz jotzen dute $n \rightarrow \infty$ denean.

Honela,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [s_n(x) - f(x)] = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_{-\delta}^{\delta} [f(x+\alpha) - f(x)] \frac{\cos \frac{\alpha}{2}}{2 \sin \frac{\alpha}{2}} \sin n\alpha \, d\alpha \quad (1)$$

Frogapena. Azter dezagun aurreko atalean definitutako $\Phi_2(\alpha)$ funtzioa:

$$\Phi_2(\alpha) = [f(x_0 + \alpha) - f(x_0)] \frac{\cos \frac{\alpha}{2}}{2 \sin \frac{\alpha}{2}};$$

$f(x)$ funtzioa $[-\pi, \pi]$ tartean zatikako jarraia eta x_0 puntuan jarraia denez, jarraia da x_0 puntuaren $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ ingurune batean. Horregatik, $\Phi_2(\alpha)$ funtzioa jarraia da $\alpha \neq 0$ eta $|\alpha| \leq \delta$ deneko puntu guztietan. $\alpha = 0$ denean, $\Phi_2(\alpha)$ funtzioa ez dago definiturik.

Kalkula ditzagun $\lim_{\alpha \rightarrow 0-0} \Phi_2(\alpha)$ eta $\lim_{\alpha \rightarrow 0+0} \Phi_2(\alpha)$ limiteak (1) eta (2) baldintzak erabiliz:

$$\begin{aligned} \lim_{\alpha \rightarrow 0-0} \Phi_2(\alpha) &= \lim_{\alpha \rightarrow 0-0} [f(x_0 + \alpha) - f(x_0)] \frac{\cos \frac{\alpha}{2}}{2 \sin \frac{\alpha}{2}} = \\ &= \lim_{\alpha \rightarrow 0-0} \frac{f(x_0 + \alpha) - f(x_0)}{\alpha} \frac{\alpha}{\sin \frac{\alpha}{2}} \cos \frac{\alpha}{2} = \\ &= \lim_{\alpha \rightarrow 0-0} \frac{f(x_0 + \alpha) - f(x_0)}{\alpha} \cdot \lim_{\alpha \rightarrow 0-0} \frac{\frac{\alpha}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2}} \cdot \lim_{\alpha \rightarrow 0-0} \cos \frac{\alpha}{2} = k_1 \cdot 1 \cdot 1 = k_1. \end{aligned}$$

Horrela, $\Phi_2(\alpha)$ funtzioa definitzen badugu $\Phi_2(0) = k_1$ eginez, jarraia izango da $[-\delta, 0]$ tartean eta, beraz, bornatua ere. Era analogoan,

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0+0} \Phi_2(\alpha) = k_2$$

frogatuko dugu.

Hortaz, $\Phi_2(\alpha)$ funtzioa bornatua dago eta jarraia da $[0, \delta]$ tartean. Beraz, $[-\delta, \delta]$ tartean $\Phi_2(\alpha)$ funtzioa bornatua dago eta zatikako jarraia da. Itzul gaitezen, orain, § 9ko (1) berdintzara ($x = x_0$ -z izendatuz):

$k_1 = \tan \varphi_1$, $k_2 = \tan \varphi_2$; $k_1 \neq k_2$ den. $k_1 = k_2$ bada, hau da eskuin- eta ezker-deribatua berdinak badira, emandako puntuan funtzioa deribagarria da.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [s_n(x_0) - f(x_0)] = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_{-\delta}^{\delta} [f(x_0 + \alpha_0) - f(x_0)] \frac{\cos \frac{\alpha}{2}}{2 \sin \frac{\alpha}{2}} \sin n\alpha \, d\alpha$$

edo

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [s_n(x_0) - f(x_0)] = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_{-\delta}^{\delta} \Phi_2(\alpha) \sin n\alpha \, d\alpha.$$

§ 7ko (5) formuletan oinarrituz ondorioztatzen dugu bigarren ataleko limitea zeroren berdina dela, horregatik

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [s_n(x_0) - f(x_0)] = 0$$

edo

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n(x_0) = f(x_0).$$

Horrela teorema frogatuta geratzen da.

Frogatutako teorema eta § 1ean formulatutakoaren arteko diferentzia hurrengoan datza: dakigunez, § 1eko teoremaren arabera, x_0 puntuan Fourier-en seriearen $f(x_0)$ baliorantzko konbergentziarako $[-\pi, \pi]$ tartean, x_0 jarraitasun-puntua eta funtzioa zatikako monotonoa izan daitezela betetzea beharrezkoa da; arestian frogatutako teoreman beharrezkoa da x_0 puntuan funtzioa jarraia izatea, (1) eta (2) baldintzak bete daitezela eta funtzioa zatikako jarraia eta bornatua izan dadila $[-\pi, \pi]$ tarte osoan. Nabaria da baldintza horiek desberdinak direla.

1. Oharra. Zatikako jarraia den funtzio bat deribagarria bada x_0 puntuan, nabaria da (1) eta (2) baldintzak betetzen direla. Horrekin, $k_1 = k_2$. Beraz, $f(x)$ deribagarria den puntuetan, Fourier-en serieak funtzioaren baliorantz jotzen du dagokion puntuan.

2. Oharra. 1. § 1eko 2. adibidean kontsideratutako funtzioak (358. irudia), (1) eta (2) baldintzak betetzen ditu $0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \dots$ puntuetan. Gainontzeko puntu guztietan funtzioa deribagarria da. Beraz, funtzio horren Fourier-en serieak aipatutako funtzioaren baliorantz jotzen du puntu bakoitzean.

2. § 2ko 4. adibidean (361. irudia) aztertutako funtzioak, (1) eta (2) baldintzak betetzen ditu $\pm\pi, \pm 3\pi, \pm 5\pi$ puntuetan. Puntu guzti horietan funtzioa deribagarria da eta adieraz daiteke Fourier-en serie batez puntu bakoitzean.

3. § 2ko 1. adibidean (357. irudia) ikusi dugun funtzioa etena da $\pm\pi, \pm 3\pi, \pm 5\pi$ puntuetan. Gainontzeko puntu guztietan funtzioa deribagarria da. Hortaz, puntu guztietan, etengunetan ezik, dagokion Fourier-en serieak funtzioaren baliorantz jotzen du dagokion

puntuetan. Etengunetan, Fourier-en seriearen batura funtzioaren eskuin- eta ezker-limiteen arteko batezbesteko aritmetikoaren berdina da; emandako kasuan batura zeroren berdina da.

§ 11. Analisi harmoniko praktikoa

Funtzioen Fourier-en seriezko garapenaren teoriak *analisi harmoniko* izena du. Egin ditzagun orain oharpen batzuk Fourier-en seriearen koefizienteen kalkulu hurbilduari buruz, hau da, analisi harmoniko praktikoaari buruz.

Jakina denez, 2π periodoko $f(x)$ funtzioaren Fourier-en koefizienteak

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx; \quad a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx dx; \quad b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx dx$$

formulen bitartez kalkulatzeko dira. Kasu askotan, praktikan, $f(x)$ funtzioa taularen bidez (menpekotasun funtzionala saiakuntza baten bitartez lortzen denean) zein aparailu batez marraztutako kurba bat bezala ematen da. Kasu horietan, Fourier-en koefizienteen kalkulua integrazio-metodo hurbilduen bidez egiten da (ikus XI. gaiko § 8).

Analisa dezagun 2π luzerako $-\pi \leq x \leq \pi$ tartea. Beti lor daiteke Ox ardatzerako eskalaren hautapen egoki batekin. Zati dezagun $[-\pi, \pi]$ tartea n zati berdinetan

$$x_0 = -\pi, x_1, x_2, \dots, x_n = \pi$$

puntu bidez.

Kasu honetan zuzenki partzial baten luzera

$$\Delta x = \frac{2\pi}{n}$$

izango da.

Izenda ditzagun $y_0, y_1, y_2, \dots, y_n$ $f(x)$ funtzioaren $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$ puntuetako balioak, hurrenez hurren. Balio horiek taularen bidez edo emandako funtzioaren grafikoaren bidez determinatzen ditugu, dagozkien ordenatuak neurtuz.

Orduan, laukizuzenen formula erabiliz (ikus XI. gaiko § 8ko (1) formula), determinatu ditzagun Fourier-en koefizienteak:

$$a_0 = \frac{2}{n} \sum_{i=1}^n y_i, \quad a_k = \frac{2}{n} \sum_{i=1}^n y_i \cos kx_i, \quad b_k = \frac{2}{n} \sum_{i=1}^n y_i \sin kx_i.$$

Fourier-en koefizienteen kalkuluak errazteko eskema landuak badaude. Ezin gara hemen zehazkizunetan gelditu, baina aipa dezagun emandako funtzioaren grafikoaren arabera, Fourier-en koefizienteen balio hurbilduak kalkulatzeko uzten duten tresnak (analizatzaile harmonikoak deitutakoak) existitzen direla.

§ 12. Fourier-en integrala

Izan bedi $(-\infty, \infty)$ tarte infinituan definitutako $f(x)$ funtzioa, eta tarte horretan balio absolutuan integragarria, hau da,

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx = Q \quad (1)$$

integrala existitzen da.

Izan bedi ere $f(x)$ funtzioa, $(-l, l)$ tarte osoan Fourier-en seriez garagarria:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos \frac{k\pi}{l} x + b_k \sin \frac{k\pi}{l} x, \quad (2)$$

non

$$a_k = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(t) \cos \frac{k\pi}{l} t dt, \quad b_k = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(t) \sin \frac{k\pi}{l} t dt. \quad (3)$$

(2) seriean (3) formulako a_k eta b_k koefizienteen adierazpenak sartuz,

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(t) dt + \frac{1}{l} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\int_{-l}^l f(t) \cos \frac{k\pi}{l} t dt \right) \cos \frac{k\pi}{l} x + \left(\int_{-l}^l f(t) \sin \frac{k\pi}{l} t dt \right) \sin \frac{k\pi}{l} x = \\ &= \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(t) dt + \frac{1}{l} \sum_{k=1}^{\infty} \int_{-l}^l f(t) \left[\cos \frac{k\pi}{l} t \cos \frac{k\pi}{l} x + \sin \frac{k\pi}{l} t \sin \frac{k\pi}{l} x \right] dt \end{aligned}$$

idatz daiteke, edo

$$f(x) = \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(t) dt + \frac{1}{l} \sum_{k=1}^{\infty} \int_{-l}^l f(t) \cos \frac{k\pi(t-x)}{l} dt. \quad (4)$$

Azter dezagun (4) garapenak hartzen duen itxura limitera pasatzean, $l \rightarrow \infty$ denean.

Sar ditzagun ondoko notazioak:

$$\alpha_1 = \frac{\pi}{l}, \quad \alpha_2 = \frac{2\pi}{l}, \quad \dots, \quad \alpha_k = \frac{k\pi}{l}, \quad \dots \quad \text{eta} \quad \Delta\alpha_k = \frac{\pi}{l}. \quad (5)$$

(4) formularen ordezkatzuz,

$$f(x) = \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(t) dt + \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\int_{-l}^l f(t) \cos \alpha_k(t-x) dt \right) \Delta\alpha_k \quad (6)$$

lortzen dugu. $l \rightarrow \infty$ denean, bigarren ataleko lehenengo gaiak zerorantz jotzen du. Izan ere,

$$\left| \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(t) dt \right| \leq \frac{1}{2l} \int_{-l}^l |f(t)| dt < \frac{1}{2l} \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt = \frac{1}{2l} Q \rightarrow 0.$$

Finkatutako edozein l baliotarako, parentesi arteko adierazpena α_k -ren funtzioa

da (ikus (5) formulak), zeinak balioak, $\frac{\pi}{l}$ -tik ∞ -raino hartzen dituen. Esan dezagun frogapenik gabe, $f(x)$ funtzioa tarte finitu bakoitzean zatikako monotonoa bada, tarte infinituan bornatua eta (1) baldintza betetzen badu, $l \rightarrow \infty$ denean (6) formulak

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos \alpha(t-x) dt \right) d\alpha \quad (7)$$

itxura hartzen duela.

Bigarren ataleko adierazpenak $f(x)$ funtzioaren *Fourier-en integral* izena hartzen du.

(7) berdintza funtzioa jarraia den puntu guztietan betetzen da. Etengunetan, aldiz,

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos \alpha(t-x) dt \right) d\alpha = \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2} \quad (7')$$

berdintza betetzen da.

Transforma dezagun (7) berdintzaren bigarren ataleko integrala $\cos \alpha(t-x)$ adierazpena garatuz:

$$\cos \alpha(t-x) = \cos \alpha t \cos \alpha x + \sin \alpha t \sin \alpha x.$$

(7) formularen adierazpen hori sartuz eta $\cos \alpha x$ eta $\sin \alpha x$ integraletik ateraz, t aldagaiarekiko integratzen bait dugu,

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos \alpha t dt \right) \cos \alpha x d\alpha + \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin \alpha t dt \right) \sin \alpha x d\alpha \quad (8)$$

lortzen dugu. Parentesi artean dauden t -rekiko integralak existitzen dira, $f(t)$ funtzioa $(-\infty, \infty)$ tartean absolutuki integragarria bait da, eta, beraz, $f(t) \cos \alpha t$ eta $f(t) \sin \alpha t$ ere absolutuki integragarriak dira.

Azter ditzagun (8) formularen kasu bereziak.

1. Izan bedi $f(x)$ bikoitia. Kasu honetan $f(t) \cos \alpha t$ funtzioa bikoitia da eta $f(t) \sin \alpha t$ funtzio bakoitia eta

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos \alpha t dt = 2 \int_0^{\infty} f(t) \cos \alpha t dt,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin \alpha t dt = 0$$

lortzen dugu. Kasu honetan (8) formulak

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \left(\int_0^{\infty} f(t) \cos \alpha t dt \right) \cos \alpha x d\alpha \quad (9)$$

itxura hartzen du.

2. Izan bedi $f(x)$ bakoitia. (8) formulako integralen izaera aztertuz, kasu honetan

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \left(\int_0^{\infty} f(t) \sin \alpha t \, dt \right) \sin \alpha x \, d\alpha \quad (10)$$

erdiesten dugu.

$f(x)$ funtzioa $(0, \infty)$ tartean soilik definituta badago adieraz dezakegu, $x > 0$ denerako (9) zein (10) formularen bidez. Lehenengo kasuan $(-\infty, 0)$ tartean era bikoitian eta bigarrenean era bakoitian hedatzen dugu.

Nabari dezagun berriro etengunetan, (9) eta (10) berdintzen lehenengo ataletan

$$\frac{f(x+0) + f(x-0)}{2}$$

adierazpena $f(x)$ adierazpenaren ordeztu idaztea komenigarria dela.

Itzul gaitezen (8) formulara. Parentesi arteko integralak α -ren funtzioak dira. Sar ditzagun

$$A(\alpha) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos \alpha t \, dt,$$

$$B(\alpha) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin \alpha t \, dt$$

idazkerak. Orduan, (8) formula

$$f(x) = \int_0^{\infty} [A(\alpha) \cos \alpha x + B(\alpha) \sin \alpha x] \, d\alpha \quad (11)$$

eran idatz dezakegu.

(11) formulak $f(x)$ funtzioaren garapena zerotik infinituraino jarraiki aldatzen den α maiztasuneko harmonikoetan ematen duela esaten da. Amplitude eta hasierako faseen banaketa-legea α maiztasunaren funtzioan $A(\alpha)$ eta $B(\alpha)$ funtzioen bidez adierazia da.

Itzul gaitezen (9) formulara. Jar dezagun

$$F(\alpha) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos \alpha t \, dt; \quad (12)$$

orduan, (9) formulak

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(\alpha) \cos \alpha x \, d\alpha \quad (13)$$

itxura hartzen du.

$F(\alpha)$ funtzioak $f(x)$ funtziorako *Fourier-en kosinu-transformazio* izena du.

(12) berdintzan $F(\alpha)$ emandako funtzio bat bezala kontsideratzen badugu eta $f(t)$ ezezagun bezala, berdintza hori $f(t)$ funtziorako ekuazio integral bat da. (13) formulak ekuazio horren soluzioa ematen du.

(10) formulari oinarrituz,

$$\Phi(\alpha) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(t) \sin \alpha t \, dt, \quad (14)$$

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} \Phi(\alpha) \sin \alpha x \, d\alpha \quad (15)$$

berdintzak idatz ditzakegu.

$\Phi(\alpha)$ funtzioa *Fourier-en sinu-transformazio* izena du.

Adibidea. Izan bedi

$$f(x) = e^{-\beta x} \quad (\beta > 0, \, x \geq 0).$$

(12) formularen arabera Fourier-en kosinu-transformazioa aurkitzen dugu:

$$F(\alpha) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-\beta t} \cos \alpha t \, dt = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\beta}{\beta^2 + \alpha^2}.$$

(14) formularen arabera Fourier-en sinu-transformazioa aurkitzen dugu:

$$\Phi(\alpha) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-\beta t} \sin \alpha t \, dt = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\alpha}{\beta^2 + \alpha^2}.$$

(13) eta (15) formulen bidez

$$\frac{2\beta}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\cos \alpha x}{\beta^2 + \alpha^2} d\alpha = e^{-\beta x} \quad (x \geq 0),$$

$$\frac{2\alpha}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin \alpha x}{\beta^2 + \alpha^2} d\alpha = e^{-\beta x} \quad (x > 0)$$

erlazioak aurkitzen ditugu.

§ 13. Fourier-en integrala era konplexuan

Fourier-en integralean (§ 12ko (7) formulan) parentesi artean α -rekiko funtzio bikoitia badago α -ren balio negatiboetarako ere definituta egongo da. Hortik ondorioztatzen da (7) formula

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos \alpha(t-x) \, dt \right) d\alpha \quad (1)$$

eran idatz dezakegula.

Kontsidera dezagun orain zeroren berdina den ondoko adierazpena:

$$\int_{-M}^M \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin \alpha(t-x) \, dt \right) d\alpha = 0.$$

Lehenengo ataleko adierazpenak 0 balio du, parentesi arteko α -ren funtzioa bakoitia bait da eta $-M$ eta $+M$ limiteen arteko funtzio bakoiti baten integrala 0 bait da. Nabaria da

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \int_{-M}^M \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin \alpha(t-x) \, dt \right) d\alpha = 0$$

edo

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin \alpha(t-x) dt \right) d\alpha = 0 \quad (2)$$

betetzen direla.

Oharra. Hemen beharrezkoa da hurrengo kasua azaltzea. Muga infinituak dituen integral konbergentea

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\alpha) d\alpha = \int_{-\infty}^c \varphi(\alpha) d\alpha + \int_c^{\infty} \varphi(\alpha) d\alpha = \lim_{M \rightarrow \infty} \int_{-M}^c \varphi(\alpha) d\alpha + \lim_{M \rightarrow \infty} \int_c^M \varphi(\alpha) d\alpha \quad (*)$$

eran kalkulatzeko, bigarren ataleko limite bakoitza existi dadin baldintzapean (ikus X. gaiko § 7). Baina (2) berdintzan

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\alpha) d\alpha = \lim_{M \rightarrow \infty} \int_{-M}^M \varphi(\alpha) d\alpha \quad (**)$$

idatzi dugu.

Nabaria da gerta daitekeela (**) limitea existitzea baina ez (*) berdintzaren bigarren ataleko limiteak.

(**) berdintzaren bigarren ataleko adierazpena integralaren *balio nagusi* deitzen da. Horrela bada, (2) berdintzan (kanpoko) integral inpropioaren balio nagusia aztertzen da. Zentzu berean hartuko ditugu atal honetako geroako integralak.

(2) berdintzaren gaiak $\frac{i}{2\pi}$ -z biderkatzean eta dagozkien (1) berdintzaren ataleei batzean,

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(t) [\cos \alpha(t-x) + i \sin \alpha(t-x)] dt \right] d\alpha$$

lortzen dugu, edo

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{i\alpha(t-x)} dt \right] d\alpha. \quad (3)$$

Hori da, hain zuzen ere, Fourier-en integrala era konplexuan. Idatz dezakegu (3) formula hurrengo eran:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{i\alpha t} dt \right) e^{-i\alpha x} d\alpha.$$

Azken berdintzaren arabera,

$$F^*(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{i\alpha t} dt, \quad (4)$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F^*(\alpha) e^{-i\alpha x} d\alpha \quad (5)$$

dugu.

$F^*(x)$ funtzioa, (4) formulaz determinatua, $f(x)$ funtzioaren *Fourier-en transformazio* deitzen da. $f(x)$ funtzioa (5) formulaz determinatua, $F^*(\alpha)$ funtzioaren *Fourier-en alderantzizko transformazio* deitzen da. (Transformazioak i -ren zeinuan bereizten dira).

Ariketak

1. Garatu $[-\pi, \pi]$ tartean Fourier-en seriez $f(x)$ funtzioa:

$$\begin{aligned} f(x) &= 2\pi & 0 \leq x \leq \pi & \text{denerako,} \\ f(x) &= x & -\pi < x \leq 0 & \text{denerako.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Emaizta: } f(x) &= \frac{1}{4}\pi - \frac{2}{\pi} \left(\frac{\cos x}{1^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \dots \right) + \\ &+ 3 \left(\frac{\sin x}{1} - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \dots \right). \end{aligned}$$

2. $f(x)=1$ funtzioaren sinutako garapena erabiliz $(0, \pi)$ tartean, kalkulatu

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots \text{ serieraren batura. Em.: } \frac{\pi}{4}.$$

3. $f(x) = x^2$ funtzioaren Fourier-en seriezko garapena aplikatuz, kalkulatu

$$\frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \dots \text{ seriearen batura. Em.: } \frac{\pi^2}{12}.$$

4. Garatu $f(x) = \frac{\pi^2}{12} - \frac{x^2}{4}$ funtzioa Fourier-en seriez $(-\pi, \pi)$ tartean.

$$\text{Em.: } \cos x - \frac{\cos 2x}{2^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} - \frac{\cos 4x}{4^2} + \dots$$

5. Garatu Fourier-en seriez, $(-\pi, \pi)$ tartean $f(x)$ funtzioa,

$$f(x) = -\left(\frac{\pi + x}{2}\right) \quad -\pi \leq x < 0 \quad \text{denerako,}$$

$$f(x) = \frac{1}{2}(\pi - x) \quad 0 \leq x < \pi \quad \text{denerako.}$$

$$\text{Em.: } \sin x + \frac{1}{2} \sin 2x + \frac{1}{3} \sin 3x + \dots$$

6. Garatu Fourier-en seriez, $(-\pi, \pi)$ tartean $f(x)$ funtzioa,

$$f(x) = -x \quad -\pi < x \leq 0 \quad \text{denean,}$$

$$f(x) = 0 \quad 0 < x \leq \pi \quad \text{denean.}$$

$$\text{Em.: } \frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(2n+1)x}{(2n+1)^2} - \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\sin nx}{n}.$$

7. Garatu Fourier-en seriez, $(-\pi, \pi)$ tartean $f(x)$ funtzioa,

$$f(x) = 1 \quad -\pi < x \leq 0 \quad \text{denean,}$$

$$f(x) = -2 \quad 0 < x \leq \pi \quad \text{denean.}$$

$$\text{Em.: } -\frac{1}{2} - \frac{6}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(2n+1)x}{2n+1}.$$

8. Garatu $f(x) = x^2$ funtzioa $(0, \pi)$ tartean sinutako seriez.

$$\text{Em.: } \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \left\{ \frac{\pi^2}{n} + \frac{2}{n^3} [(-1)^n - 1] \right\} \sin nx.$$

9. Garatu $y = \cos 2x$ funtzioa $(0, \pi)$ tartean sinutako seriez.

$$\text{Em.: } -\frac{4}{\pi} \left[\frac{\sin x}{2^2 - 1} + \frac{2 \sin 3x}{2^2 - 3^2} + \frac{5 \sin 5x}{2^2 - 5^2} + \dots \right].$$

10. Garatu $y = \sin x$ funtzioa $(0, \pi)$ tartean kosinutako seriez.

$$\text{Em.: } \frac{4}{\pi} \left[\frac{1}{2} + \frac{\cos 2x}{1 - 2^2} + \frac{\cos 4x}{1 - 4^2} + \dots \right].$$

11. Garatu Fourier-en seriez $y = e^x$ funtzioa $(-l, l)$ tartean.

$$\text{Em.: } \frac{e^l - e^{-l}}{2l} + l(e^l - e^{-l}) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cos \frac{n\pi x}{l}}{l^2 + n^2 \pi^2} + \pi(e^l - e^{-l}) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} n \sin \frac{n\pi x}{l}}{l^2 + n^2 \pi^2}.$$

12. Garatu $f(x) = 2x$ funtzioa sinutako seriez $(0, l)$ tartean.

$$\text{Em.: } 1 - \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2n\pi x}{n}.$$

13. Garatu $f(x) = x$ funtzioa sinutako seriez $(0, l)$ tartean.

$$\text{Em.: } \frac{2l}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \sin \frac{n\pi x}{l}}{n}.$$

14. Garatu

$$f(x) = \begin{cases} x & 0 < x \leq 1 \quad \text{denean,} \\ 2 - x & 1 < x < 2 \quad \text{denean} \end{cases}$$

funtzioa $(0, 2)$ tartean: a) sinutako seriez; b) kosinutako seriez.

$$\text{Em.: a) } \frac{8}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin \frac{(2n+1)\pi x}{2}}{(2n+1)^2};$$

$$\text{b) } \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(2n+1)\pi x}{(2n+1)^2}.$$

XVIII. GAIA

FISIKA MATEMATIKOKO APLIKAZIOAK

§ 1. Fisika matematikoko ekuazioen oinarrizko motak

Fisika matematikoko oinarrizko ekuazio (bi aldagai independenteko funtzioetarako) ondorengo bigarren ordenako deribatu partzialetako ekuazio diferentzialei deritze.

I. Uhin-ekuazioa

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \quad (1)$$

Ekuazio hau ikertzeko beharra soka baten bibrazio zeharkako, hagaska baten luzetarako bibrazio, eroale baten oszilazio elektriko, zuhaitz baten bihurtura-oszilazio, gas baten oszilazio, eta abar, prozesuen azterketatik sortzen da. Mota *hiperbolikoko* ekuaziorik errazena da.

II. Beroaren kondukzioaren edo Fourier-en ekuazioa

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \quad (2)$$

Ekuazio hau ikertzeko beharra beroaren hedapen, gas eta likidoen iragazpena ingurune porotsuetan (esate baterako, petrolio eta gasen iragazpena lurpeko harean), probabilitate-teoriako zenbait problema, eta abar, prozesuen azterketatik dator. Hau da mota *parabolikoko* ekuaziorik errazena.

III. Laplace-ren ekuazioa

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0. \quad (3)$$

Eremu elektriko eta magnetiko, egoera termiko egonkor, hidrodinamikako problemak, difusio eta abarri buruzko problemen ikerketek planteatzen dute ekuazio hau, mota *eliptikoko* errazena, aztertze beharra.

(1), (2) eta (3) ekuazioetan funtzio ezezaguna, u , bi aldagaikoa da. Aldagai-kopuru handiagoko funtzioei dagozkien ekuazioak ere aztertzen dira. Honelatan, hiru aldagai independenteko uhin-ekuazioak

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (1')$$

itxura dauka; hiru aldagai independenteko beroaren kondukzioaren ekuazioak

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (2')$$

itxura dauka; hiru aldagai independenteko Laplace-ren ekuazioak

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 \quad (3')$$

itxura dauka.

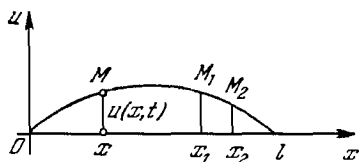
§ 2. Soka baten oszilazioen ekuazioa. Problemaren formulazioa mugalde-baldintzekin. Eroaleetako oszilazio elektrikoaren ekuazioak

Fisika matematikoan, soka hitzaren azpian hari malgu eta elastikoa ulertu behar da. Sokan, edozein unetan, sortzen diren tentsioak bere profilarekiko ukitzailearen arabera daude zuzenduak. Demagun hasierako unean l luzerako soka Ox ardatzeko O tik l -rako zuzenkian zehar zuzendurik dagoela. Demagun ere, sokaren muturrak $x=0$ eta $x=l$ puntuetan finkaturik daudela. Soka bere hasierako posiziotik desbidatzen badugu eta gero aske uzten badugu, edo, soka desbidatu gabe, hasierako unean bere puntuei abiadura bat ematen badiegu, edo soka desbidatu eta bere puntuei abiadura bat ematen badiegu, sokaren puntuak higidura batzuk egiten hasiko dira eta soka bibratzen hasten dela diogu. Problema edozein unetako sokaren itxura eta sokaren puntu bakoitzaren higiduraren legea, denboraren funtzioan, zehatzean datza.

Analisa ditzagun sokaren puntuen desbidazio txikiak hasierako posiziotik. Hortaz, sokaren puntuen higidura Ox ardatzarekiko elkartutik eta plano berean egiten dela suposa dezakegu. Suposizio horretan, sokaren oszilazio-prozesua $u(x,t)$ funtzioz deskribatzen da, zeinak x abzisako sokaren puntu baten desplazamenduaren magnitudea t unean ematen duen (371. irudia).

Sokaren desbidazio txikiak, (x,u) planoan, kontsideratzen ditugunez, demagun sokako $M_1 M_2$ elementuaren luzera bere Ox ardatzaren gaineko projekzioaren berdina

dela, hau da¹⁾, $M_1 M_2 = x_2 - x_1$. Demagun, ere, sokaren puntu guztietan tentsioa berdina dela; izan bedi T tentsio hori.



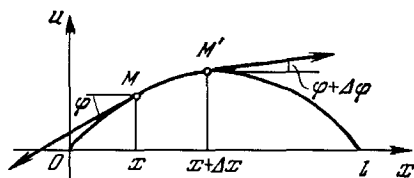
371. IRUDIA

Analisa dezagun sokako MM' elementua (372. irudia). Elementu horren muturretan T indarrek, sokaren ukitzaileen arabera zuzenduta, eragiten dute. Jo dezagun ukitzaileek Ox ardatzarekin φ eta $\varphi + \Delta\varphi$ angeluak osatzen dituztela. Orduan, MM' elementuaren gainean eragiten duten indarren Ou ardatzeko proiektzioa $T \sin(\varphi + \Delta\varphi) - T \sin \varphi$ izango da. φ angelua txikia denez gero, $\tan \varphi \approx \sin \varphi$ idatz dezakegu; orduan,

$$\begin{aligned} T \sin(\varphi + \Delta\varphi) - T \sin \varphi &\approx T \tan(\varphi + \Delta\varphi) - T \tan \varphi = T \left[\frac{\partial u(x + \Delta x, t)}{\partial x} - \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \right] = \\ &= \frac{T \partial^2 u(x + \theta \Delta x, t)}{\partial x^2} \Delta x \approx T \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} \Delta x, \end{aligned}$$

$$0 < \theta < 1$$

(hor kortexteen arteko adierazpenari aplikatu diogu Lagrange-ren teorema).



372. IRUDIA

1) Suposizio horrek $u_x'^2$ magnitudea, lekin alderatuz, mesprezatzen uzten digu. Izan ere,

$$M_1 M_2 = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + u_x'^2} dx = \int_{x_1}^{x_2} \left(1 + \frac{1}{2} u_x'^2 - \dots \right) dx \approx \int_{x_1}^{x_2} dx = x_2 - x_1.$$

Higiduraren ekuazioa lortzeko, elementuari aplikatutako kanpoko indarrak inerti indarrarekin berdindu behar dira. Izan bedi ρ sokaren dentsitate lineala. Orduan, soka-elementuaren masa $\rho\Delta x$ izango da. Elementuaren azelerazioa $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ izango da. Ondorioz, d'Alembert-en printzipioaren arabera,

$$\rho\Delta x \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Delta x$$

izango dugu. Zati Δx eginez eta $\frac{T}{\rho} = a^2$ adieraziz higiduraren ekuazioa lortzen dugu:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \quad (1)$$

Hori *uhin-ekuazioa* da, hots, sokaren bibrazioaren ekuazioa. Sokaren higidura osoa determinatzeko (1) ekuazioa ez da nahikoa. $u(x,t)$ funtzio ezezagunak sokaren muturretan ($x=0$ eta $x=l$) gertatutakoa adierazten duten *mugalde-baldintzak* eta hasierako unean ($t=0$) sokaren egoera deskribatzen duten *hastapen-baldintzak* bete behar ditu. Mugalde-eta hastapen-baldintzen multzoari *mugalde-baliadun baldintza* deritzen.

Izan bitez, esaterako, suposatu dugunez, sokaren muturrak finkoak $x=0$ eta $x=l$ balioetarako. Orduan, t guztietarako

$$u(0,t) = 0, \quad (2')$$

$$u(l,t) = 0 \quad (2'')$$

berdintzak bete behar dira. Berdintza horiek dira mugalde-baldintzak gure problemarako.

Hasierako unean, $t=0$, sokak itxura determinatu ezaguna dauka. Demagun itxura determinatu hori $f(x)$ funtzioak emana dela. Honela,

$$u(x,0) = u_{t=0} = f(x) \quad (3')$$

bete behar da. Beraz, hasierako unean sokaren puntu bakoitzeko abiadura emana egon behar da, $\varphi(x)$ funtzioak determinatua. Honelatan,

$$\left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = \varphi(x) \quad (3'')$$

daukagu. (3') eta (3'') baldintzak dira hastapen-baldintzak.

Oharra. Kasu partikular bezala $f(x) \equiv 0$ edo $\varphi(x) \equiv 0$ izan liteke. Baina, $f(x) \equiv 0$ eta $\varphi(x) \equiv 0$ bada soka pausatuta dago, hortaz, $u(x, t) \equiv 0$.

Lehenago aipatu dugunez, eroaleen oszilazio elektrikoek problemak ere (1) ekuaziora garamatza. Froga dezagun hori. Eroaleen korrante elektrikoa $i(x, t)$ magnitudeak eta $v(x, t)$ tentsioak, eroalearen puntuaren x koordenatu eta t denboraren menpekoek, karakterizatzen dute. Eroalearen Δx elementua kontsideratuz, Δx elementuko tentsio-

-jauskera $v(x, t) - v(x + \Delta x, t) \approx \frac{\partial v}{\partial x} \Delta x$ dela idatz dezakegu. Tentsio-jauskera hori

ohmikoaz, $iR\Delta x$, eta induktiboaz, $\frac{\partial i}{\partial t} L\Delta x$, osatuta dago.

Hortaz,

$$-\frac{\partial v}{\partial x} \Delta x = iR\Delta x + \frac{\partial i}{\partial t} L\Delta x, \quad (4)$$

non R eta L erresistentzia eta autoindukzio-koefizienteak diren, eroalearen luzera-unitateko kalkulatuak. Minus zeinua hartzen da korrantea v -ren gehikuntzaren aurkako norantzan isurtzen delako. Δx sinplifikatuz

$$\frac{\partial v}{\partial x} + iR + L \frac{\partial i}{\partial t} = 0 \quad (5)$$

ekuazioa lortzen dugu. Beraz, Δx elementutik, Δt denboran, ateratzen eta sartzen diren korronteen arteko diferentzia

$$i(x, t) - i(x + \Delta x, t) \approx -\frac{\partial i}{\partial x} \Delta x \Delta t$$

izango da. Diferentzia horren zati bat elementua kargatzeko gastatzen da, $C\Delta x \frac{\partial v}{\partial t} \Delta t$

alegia; bestea isolamenduaren akatsagatik eroalearen aldeko gainazalean zehar galera bezala gastatzen da, $A v \Delta x \Delta t$ delarik (hor, A galera-koefizientea da). Adierazpen horiek berdinduz eta $(\Delta x \Delta t)$ -z sinplifikatuz,

$$\frac{\partial i}{\partial x} + C \frac{\partial v}{\partial t} + Av = 0 \quad (6)$$

ekuazioa lortzen dugu. (5) eta (6) ekuazioei *ekuazio telegrafiko* deitu ohi zaie.

(5) eta (6) ekuaziozko sistematik $i(x,t)$ funtzio ezezaguna soilik daukan ekuazioa eta baita $v(x,t)$ funtzio ezezaguna soilik daukana ere atera daitezke. Deriba ditzagun (6) ekuazioaren gaiak, x -rekiko eta (5) ekuazioarenak t -rekiko, eta C faktoreaz biderka ditzagun. Kenketa burutu ondoren

$$\frac{\partial^2 i}{\partial x^2} + A \frac{\partial v}{\partial x} - CR \frac{\partial i}{\partial x} - CL \frac{\partial^2 i}{\partial t^2} = 0$$

lortzen dugu. Azken ekuazioan, (5) ekuazioaren $\frac{\partial v}{\partial x}$ adierazpena sartuz,

$$\frac{\partial^2 i}{\partial x^2} + A \left(-iR - L \frac{\partial i}{\partial t} \right) - CR \frac{\partial i}{\partial x} - CL \frac{\partial^2 i}{\partial t^2} = 0$$

edo

$$\frac{\partial^2 i}{\partial x^2} = CL \frac{\partial^2 i}{\partial t^2} + (CR + AL) \frac{\partial i}{\partial t} + ARi \quad (7)$$

daukagu. Era berean lortzen da $v(x,t)$ determinatzeko ekuazioa:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = CL \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + (CR + AL) \frac{\partial v}{\partial t} + ARv. \quad (8)$$

Isolamenduan zeharreko ihesa eta erresistentzia mespreza balitezke, ($A = 0$, $R = 0$), (7) eta (8) ekuazioak uhin-ekuazio bihurtzen dira:

$$a^2 \frac{\partial^2 i}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 i}{\partial t^2}; \quad a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial t^2},$$

non $a^2 = \frac{1}{CL}$ bait da. Baldintza fisikoetatik abiatuz problemaren mugalde- eta hastapen-baldintzak formulatzen dira.

§ 3. Soka baten bibrazioen ekuazioaren ebazpena aldagai-banaketaren metodoaren bidez (Fourier-en metodoa)

Orain aztertuko dugun aldagai-banaketaren metodoa (edo Fourier-en metodoa) fisika matematikoko problema ugariaren ebazpenetan ohizkoa da. Demagun

$$u(0, t) = 0, \quad (2)$$

$$u(l, t) = 0, \quad (3)$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad (4)$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = \varphi(x) \quad (5)$$

mugalde-balioudun baldintzak betetzen dituen

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \quad (1)$$

ekuazioaren soluzioa bilatu behar dela.

Bila dezagun (2) eta (3) mugalde-baldintzak betetzen dituen (eta nulua ez den) (1) ekuazioaren soluzio partikularra $X(x)$ eta $T(t)$ bi funtzioaren arteko biderkadura bezala, zeinak lehenengoa x -ren menpe soilik eta bigarrena t -ren menpe soilik dauden:

$$u(x, t) = X(x)T(t). \quad (6)$$

(1) ekuazioan ordezkatuz, $X(x)T''(t) = a^2 X''(x)T(t)$ ateratzen dugu eta, berdintzaren bi atalak ($a^2 XT$)-z zatituz,

$$\frac{T''}{a^2 T} = \frac{X''}{X}. \quad (7)$$

Berdintza horren lehenengo atalean x -ren menpe ez dagoen funtzio bat daukagu; bigarrenean t -ren menpe ez dagoen funtzioa. (7) berdintza soilik beteko da lehenengo eta bigarren atalak x eta t -ren menpe ez daudenean, hau da, konstanteak direnean. ($-\lambda$) izenda dezagun, $\lambda > 0$ izanik (gero $\lambda < 0$ kasua ere aztertuko dugu). Honelatan,

$$\frac{T''}{a^2 T} = \frac{X''}{X} = -\lambda.$$

Berdintza horietatik bi ekuazio lortzen dugu:

$$X'' + \lambda X = 0, \quad (8)$$

$$T'' + a^2 \lambda T = 0. \quad (9)$$

Ekuazio horien soluzio orokorrak (ikus XIII. gaiko § 21)

$$X(x) = A \cos \sqrt{\lambda} x + B \sin \sqrt{\lambda} x, \quad (10)$$

$$T(t) = C \cos a \sqrt{\lambda} t + D \sin \sqrt{\lambda} t \quad (11)$$

izango dira, non A, B, C, D hautazko konstanteak bait dira.

$X(x)$ eta $T(t)$ adierazpenak (6) berdintzan ordezkatzuz,

$$u(x, t) = (A \cos \sqrt{\lambda} x + B \sin \sqrt{\lambda} x) (C \cos a \sqrt{\lambda} t + D \sin \sqrt{\lambda} t)$$

lortzen dugu. Aukera ditzagun orain A eta B konstanteak (2) eta (3) baldintzak bete daitezzen. $T(t) \not\equiv 0$ denez gero (bestela $u(x, t) \equiv 0$ planteatutako baldintzaren aurka doana), $X(x)$ funtzioak (2) eta (3) baldintzak bete beharko ditu, hots, $X(0) = 0$, $X(l) = 0$ izan behar dira. $x = 0$ eta $x = l$ balioak (10) berdintzan sartuz (2) eta (3)-ren arabera

$$0 = A \cdot 1 + B \cdot 0,$$

$$0 = A \cos \sqrt{\lambda} l + B \sin \sqrt{\lambda} l = 0$$

ateratzen dugu. Lehenengo ekuaziotik $A = 0$ aurkitzen dugu. Bigarrenetik

$$B \sin \sqrt{\lambda} l = 0$$

lortzen dugu. $B \neq 0$, bestela, $X \equiv 0$ eta $u \equiv 0$ izango bait ziren, baldintzaren aurkakoa dena. Ondorioz,

$$\sin \sqrt{\lambda} l = 0$$

izan behar da, nondik

$$\sqrt{\lambda} = \frac{n\pi}{l} \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (12)$$

lortzen den (ez dugu $n=0$ balioa hartu $X \equiv 0$ eta $u \equiv 0$ liratekeelako). Beraz,

$$X = B \sin \frac{n}{l} x \quad (13)$$

eskuratu dugu. Aurkitutako λ -ren balioak emandako mugalde-baliodun problemarako balio *propio* deitzen dira. Dagozkien $X(x)$ funtzioak *funtzio propioak* dira.

1. Oharra: $(-\lambda)$ -ren ordeztu $+\lambda = k^2$ adierazpen positiboa hartzen badugu (8) ekuazioak

$$X'' - k^2 X = 0$$

itxura hartuko du. Ekuazio horren soluzio orokorra

$$X = Ae^{kx} + Be^{-kx}$$

da. Antzeko itxura daukan eta zero ez den soluzioak ezin ditu (2) eta (3) mugalde-baldintzak bete.

$\sqrt{\lambda}$ ezagutuz eta (11) berdintzaz baliatuz,

$$T(t) = C \cos \frac{an\pi}{l} t + D \sin \frac{an\pi}{l} t \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (14)$$

idatz dezakegu.

n -ren balio bakoitzerako, eta, beraz, λ bakoitzerako, (13) eta (14) adierazpenak (6) berdintzan ordezkaturako ditugu eta (2) eta (3) mugalde-baldintzak betetzen dituen (1) ekuazioaren soluzioa eskuratuko dugu. Izan bedi $u_n(x, t)$ soluzio hori:

$$u_n(x, t) = \sin \frac{n\pi}{l} x \left(C_n \cos \frac{an\pi}{l} t + D_n \sin \frac{an\pi}{l} t \right). \quad (15)$$

n -ren balio bakoitzerako C eta D konstanteak har ditzakegu, horregatik C_n eta D_n idazten ditugu (B konstantea C_n eta D_n -ren barnean dago). (1) ekuazioa lineal eta homogenoa denez gero, soluzioen arteko batura ere soluzioa da, eta horregatik

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, t)$$

edo

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(C_n \cos \frac{an\pi}{l} t + D_n \sin \frac{an\pi}{l} t \right) \sin \frac{n\pi}{l} x \quad (16)$$

seriez adierazitako funtzioa ere izango da (2) eta (3) mugalde-baldintzak betetzen dituen (1) ekuazioaren soluzioa. Bistakoa da (16) seriea (1) ekuazioaren soluzioa izango dela, C_n eta D_n koefizienteetarako seriea eta x eta t -rekiko gaiz gai bi bider deribatutakoan lortzen diren serieak konbergenteak direnean soilik.

Horretaz gain, (16) soluzioak (4) eta (5) hastapen-baldintzak bete behar ditu. Lor dezagun hori C_n eta D_n konstanteak aukeratuz. (16) berdintzan $t=0$ eginez,

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin \frac{n\pi}{l} x \quad (17)$$

lortzen dugu (ikus (4) baldintza). $f(x)$ funtzioa $(0, l)$ tartean Fourier-en seriez gara badezakegu (ikus XVIII. gaiko § 1),

$$C_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{n\pi}{l} x dx \quad (18)$$

jartzen badugu (17) baldintza beteko da. Gero, (16) berdintzako atalak t -rekiko deribatzen ditugu eta $t=0$ dagigu. (5) baldintzatik

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} D_n \frac{an\pi}{l} \sin \frac{n\pi}{l} x$$

berdintza ateratzen dugu. Determina ditzagun serie horren Fourier-en koefizienteak:

$$D_n \frac{an\pi}{l} = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(x) \sin \frac{n\pi}{l} x dx$$

edo

$$D_n = \frac{2}{an\pi} \int_0^l \varphi(x) \sin \frac{n\pi}{l} x dx. \quad (19)$$

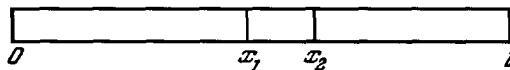
Hortaz, frogatu dugu (16) serieak, non C_n eta D_n koefizienteak (18) eta (19) formulen arabera determinatuak diren, gaiz gai bi bider deribatzea onartzen badu, serie

horrek $u(x,t)$ funtzioa adierazten duela, zeina (2)-(5) mugalde- eta hastapen-baldintzak betetzen dituen (1) ekuazioaren soluzioa bait da.

2. Oharra. Uhin-ekuaziorako aztertutako problema beste prozedura baten bidez ebatztean, (16) serieak, gaiz gaiko deribazioa onartzen ez badu ere, soluzioa adierazten duela froga daiteke. Hor, $f(x)$ funtzioak bi bider eta $\varphi(x)$ funtzioak behin deribagarri izan behar dute.

§ 4. Hagaska baten bero-barreiapenaren ekuazioa. Mugalde-balioudun problemaren planteamendua

Kontsidera dezagun l luzerako hagaska homogeno bat. Demagun hagaskaren aldeko gainazalak ez duela berorik galtzen eta tenperatura hagaskaren zeharkako sekzioko puntu guztietan berdina dela. Azter dezagun beroaren barreiapen-prozesua hagaskan.



373. IRUDIA

Ezar dezagun Ox ardatza hagaskaren mutur bat $x=0$ puntuarekin bat etortzeko moduan, eta bestea $x=l$ puntuarekin (373. irudia). Izan bedi $u(x,t)$ x abzisako hagaskaren sekzioko tenperatura t uneen. Esperientziaren bidez beroaren barreiapen-abiadura, hau da, x abzisako sekzioan zehar jariatzen den bero-kantitatea denbora-unitateko,

$$q = -k \frac{\partial u}{\partial x} S \quad (1)$$

formulak ematen digula ezarri da, non S hagaskaren sekzioaren azalera eta k eroankortasun termikoaren koefizientea bait dira²⁾.

2) Beroaren barreiapen-abiadura edo fluxu termikoaren abiadura ondoko eran determinatzen da:

$$q = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta t},$$

non ΔQ Δt denboran S sekziotik pasatzen den bero-kantitatea den.

Analisa dezagun x_1 eta x_2 abzisetako sekzioen artean dagoen hagaskaren elementu bat ($x_2 - x_1 = \Delta x$). Δt denbora tartean, x_1 abzisako sekzioan zehar pasatzen den bero-kantitatea

$$\Delta Q_1 = k \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=x_1} S \Delta t \quad (2)$$

da; gauza bera x_2 abzisako sekziorako:

$$\Delta Q_2 = -k \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=x_2} S \Delta t. \quad (3)$$

Δt denboran hagaskaren elementuaren bero-fluxua, $\Delta Q_1 - \Delta Q_2$,

$$\Delta Q_1 - \Delta Q_2 = \left[-k \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=x_1} S \Delta t \right] - \left[-k \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=x_2} S \Delta t \right] \approx k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Delta x S \Delta t \quad (4)$$

da.

$$\left(\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=x_1} - \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=x_2} \right)$$

kendurari Lagrange-ren teorema aplikatu diogu). Δt denborako bero-fluxu hori hagaskaren elementuaren tenperatura Δu magnitudea igotzeko erabili zen:

$$\Delta Q_1 - \Delta Q_2 = c \rho \Delta x S \Delta u$$

edo

$$\Delta Q_1 - \Delta Q_2 \approx c \rho \Delta x S \frac{\partial u}{\partial t} \Delta t, \quad (5)$$

non c hagaskaren materiaren bero-ahalmena; ρ bere dentsitatea; $p \Delta x S$ hagaskaren elementuaren masa bait dira.

(4) eta (5) adierazpenak berdinduz,

$$k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Delta x S \Delta t = c \rho \Delta x S \frac{\partial u}{\partial t} \Delta t$$

edo

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{k}{c\rho} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

ateratzen dugu.

$$\frac{k}{c\rho} = a^2 \text{ eginez, azkenik,}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (6)$$

lortzen dugu. Hori da, hain zuzen ere, bero-barreiapenaren ekuazioa (*beroaren kondukzioaren ekuazioa*) hagaska homogeno batean.

(6) ekuazioaren soluzioa ondo determinatuta egon dadin, $u(x,t)$ funtzioak problemaren baldintza fisikoei dagozkien mugalde-baliodun baldintzak bete behar ditu. (6) ekuazioa ebazteko mugalde-baliodun baldintzak desberdinak izan daitezke. *Mugalde-baliodun lehen problema* deiturikoari dagozkion baldintzak, $0 \leq t \leq T$ denerako,

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad (7)$$

$$u(0,t) = \psi_1(t), \quad (8)$$

$$u(l,t) = \psi_2(t) \quad (9)$$

dira.

(7) baldintza (hastapen-baldintza) fisikoki ondoko fenomenoari dagokio: $t=0$ denean, hagaskaren sekzio desberdinetan $\varphi(x)$ tenperatura emana dago. (8) eta (9) baldintzak (mugalde-baldintzak) hagaskaren muturretan, $x=0$ eta $x=l$ balioetarako, hurrenez hurren, tenperaturak $\psi_1(t)$ eta $\psi_2(t)$ direneko egoerari dagozkio.

Froga daiteke (6) ekuazioak $0 \leq x \leq l$, $0 \leq t \leq T$ eremuan, (7), (8) eta (9) baldintzak betetzen dituen soluzio bakarra duela.

§ 5. Bero-barreiapena espazioan

Azter dezagun bero-barreiapenaren prozesua hirudimentsioko espazioan. Izan bedi $u(x,y,z,t)$ (x,y,z) koordinatuetako puntuko tenperatura t unean. Esperientziaren bidez badakigu ΔS gainazalean zeharreko beroaren jarioaren abiadura, hau da, denbora unitateko eroaten den bero-kantitatea

$$\Delta Q = -k \frac{\partial u}{\partial n} \Delta S \quad (1)$$

formulaz determinatzen dela (aurreko ataleko (1) formularen analogoa), non k homogeno eta isotropikotzat hartzen dugun ingurune aztertuaren eroankortasun termikoaren koefizientea bait da, eta $\mathbf{n}$, ΔS gainazalarekiko normalaren arabera, beroaren higiduraren norantzan, unitate bektorea bait da. VIII. gaiko § 14ari jarraituz,

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial u}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial u}{\partial z} \cos \gamma$$

idatz daiteke, non $\cos \alpha$, $\cos \beta$, $\cos \gamma$ $\mathbf{n}$ bektorearen kosinu zuzentzaileak diren, edo

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \mathbf{n} \text{ grad } u.$$

$\frac{\partial u}{\partial n}$ adierazpena (1) formulan sartuz,

$$\Delta Q = k \mathbf{n} \text{ grad } u \Delta S$$

eskuratzen dugu. Δt denboran ΔS gainazalean zehar eroaten den bero-kantitatea

$$\Delta Q \Delta t = -k \mathbf{n} \text{ grad } u \Delta t \Delta S$$

da.

Itzul gaitezen atalaren hasieran planteatutako problemara. Kontsideratu dugun ingurunean, isola dezagun S gainazalak mugatutako V bolumen txikia. S gainazalean zehar eroaten den bero-kantitatea

$$Q = -\Delta t \iint_S k \mathbf{n} \text{ grad } u \, ds \quad (2)$$

izango da, non $\mathbf{n}$, S gainazalarekiko kanpo-normalaren arabera unitate bektorea den. Bistakoa da (2) formulak V bolumenean Δt denboran sartu (edo atera) egiten den bero-kantitatea ematen duena. V bolumenean sartzen den bero-kantitateak bolumen horretako substantziaren tenperatura igotzeko balio du.

Har dezagun Δv bolumen elementala. Demagun Δt denboran bere tenperaturak Δu igotzen duela. Bistakoa da Δv elementuaren tenperatura igotzeko erabili den bero-kantitatea

$$c \Delta v \rho \Delta u \approx c \Delta v \rho \frac{\partial u}{\partial t} \Delta t$$

dena, non c substantziaren bero-ahalmena eta ρ bere dentsitatea bait dira. Δt denboran V bolumenaren tenperaturaren igoeran erabilitako bero-kantitate osoa

$$\Delta t \iiint_V c \rho \frac{\partial u}{\partial t} dv$$

izango da.

Baina, hori V bolumenean Δt denboran sartu den beroa da, (2) formulak determinatua. Honela,

$$\Delta t \iint_S k \mathbf{n} \text{ grad } u \, ds = \Delta t \iiint_V c \rho \frac{\partial u}{\partial t} dv$$

berdintza beteko da. Zati Δt eginez

$$\iint_S k \mathbf{n} \text{ grad } u \, ds = \iiint_V c \rho \frac{\partial u}{\partial t} dv \quad (3)$$

ateratzen dugu.

Transforma dezagun Ostrogradski-ren formularen arabera (ikus XV. gaiko § 8) berdintza horretako lehenengo atalean dagoen gainazal-integrala, $\mathbf{F} = k \text{ grad } u$ eginez:

$$\iint_S (k \text{ grad } u) \mathbf{n} \, ds = \iiint_V \text{div} (k \text{ grad } u) \, dv.$$

(3) berdintzako lehenengo ataleko integral bikoitza integral hirukoitzaz ordezkatzuz

$$\iiint_V \text{div} (k \text{ grad } u) \, dv = \iiint_V c \rho \frac{\partial u}{\partial t} dv$$

edo

$$\iiint_V \left[\operatorname{div}(k \operatorname{grad} u) dv - c\rho \frac{\partial u}{\partial t} \right] dv = 0 \quad (4)$$

lortzen dugu. Lehenengo ataleko integral hirukoitzari batezbesteko balioaren teorema aplikatuz (ikus XIV. gaiko § 12),

$$\left[\operatorname{div}(k \operatorname{grad} u) dv - c\rho \frac{\partial u}{\partial t} \right]_{x=x_1, y=y_1, z=z_1} = 0 \quad (5)$$

daukagu, non $P(x_1, y_1, z_1)$ V bolumeneko edozein puntu den.

Beroa barreiatzen den hirudimentsioko espazioan V hautazko bolumen bat bereiz dezakegunez gero, eta (4) berdintzako integrakizuna jarraia dela suposatuz, (5) berdintza espazioko puntu orotan betetzen da. Hortaz,

$$c\rho \frac{\partial u}{\partial t} = \operatorname{div}(k \operatorname{grad} u). \quad (6)$$

Baina,

$$k \operatorname{grad} u = k \frac{\partial u}{\partial x} \mathbf{i} + k \frac{\partial u}{\partial y} \mathbf{j} + k \frac{\partial u}{\partial z} \mathbf{k}$$

(ikus VIII. gaiko § 14) eta

$$\operatorname{div}(k \operatorname{grad} u) = \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial u}{\partial z} \right)$$

(ikus XV. gaiko § 9). (6) ekuazioan ordezkatzuz gero,

$$c\rho \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial u}{\partial z} \right) \quad (7)$$

lortuko dugu. k konstante bada,

$$\operatorname{div}(k \operatorname{grad} u) = k \operatorname{div}(\operatorname{grad} u) = k \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right)$$

daukagu eta kasu honetan (6) ekuazioak

$$c\rho \frac{\partial u}{\partial t} = k \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right)$$

emango digu edo, $\frac{k}{c\rho} = a^2$ jarritz,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right). \quad (8)$$

(8) ekuazioa

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \Delta u$$

idazten da, non $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$ Laplace-ren eragilea den. (8) ekuazioa da, hain

zuzen ere, *beroaren kondukzioaren ekuazioa* espazioan. Planteatutako problema ebazten duen soluzio bakarra aurkitzeko mugalde-baliodun baldintzak eman behar dira.

Demagun σ gainazaleko Ω gorputz bat daukagula. Gorputz honetan beroaren barreiapen-prozesu bat kontsideratzen da. Hasierako aldiunean gorputzaren tenperatura emana da, hau da, $t=0$ baliorako soluzioaren balioa ezaguna da, hots, hastapen-baldintza:

$$u(x, y, z, 0) = \varphi(x, y, z). \quad (9)$$

Horrez gain, gorputzaren σ gainazaleko M puntu orotan, eta t edozein unetan, ezaguna izan behar du tenperaturak, hau da, mugalde-baldintza:

$$u(M, t) = \psi(M, t). \quad (10)$$

(Jakina, beste mugalde-baldintza batzuk ere posibleak dira).

$u(x, y, z, t)$ funtzio ezezaguna z -ren menpe ez badago, tenperatura z -ren menpekoea ez izateari dagokiona,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (11)$$

ekuazioa lortzen dugu, hau da, *beroaren barreiapenaren ekuazioa planoan*. C muga duen planoko D eremuan beroaren barreiapena analisatzen bada mugalde-baldintzak, (9) eta (10)-ekin bezala,

$$u(x, y, 0) = \varphi(x, y), \quad u(M, t) = \psi(M, t)$$

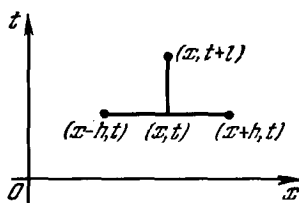
eran idatz daitezke, non φ eta ψ funtzio ezagunak diren eta $M \in C$ mugako puntua den.
 u funtzioa ez badago z eta y -ren menpe

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

ekuazioa lortzen dugu, *hagaska bateko beroaren barreiapenaren ekuazioa* alegia.

§ 6. Mugalde-baliodun lehen problemaren soluzioa beroaren kondukzioaren ekuaziorako, diferentzia finituen metodoaren bidez

Ekuazio diferentzial arruntan kasuan bezala, deribatu partzialetako ekuazioak



374. IRUDIA

diferentzia finituen bidez ebaztean, deribatuak dagozkien diferentziez ordezkatzeko dira (ikus 374. irudia):

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \approx \frac{u(x + h, t) - u(x, t)}{h}, \quad (1)$$

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} \approx \frac{1}{h} \left[\frac{u(x + h, t) - u(x, t)}{h} - \frac{u(x, t) - u(x - h, t)}{h} \right]$$

edo

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} \approx \frac{u(x + h, t) - 2u(x, t) + u(x - h, t)}{h^2}; \quad (2)$$

analogoki,

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} \approx \frac{u(x,t+l) - u(x,t)}{l}. \quad (3)$$

Beroaren kondukzioaren ekuaziorako mugalde-baliodun lehen problema ondoko eran formulatzen da (ikus § 4):

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq L, \quad (5)$$

$$u(0,t) = \psi_1(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (6)$$

$$u(L,t) = \psi_2(t), \quad 0 \leq t \leq T \quad (7)$$

mugalde-baliodun baldintzak betetzen dituen

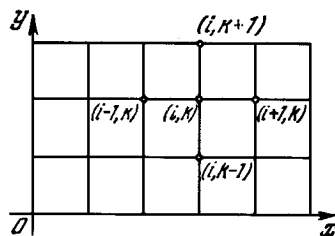
$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (4)$$

ekuazioaren soluzioa bilatu behar da, hau da, $u(x,t)$ soluzioa $t=0$, $t=T$, $x=0$, $x=L$ zuzenek mugatutako laukizuzenean bilatu behar da, $t=0$, $x=0$, $x=L$ hiru aldeetan funtzio ezezagun baten balioak emanak badira (375. irudia). Estal dezagun gure eremua

$$x = ih, \quad i = 1, 2, \dots,$$

$$t = kl, \quad k = 1, 2, \dots,$$

zuzenez osatutako saretxoz eta determina ditzagun soluzioaren balio hurbilduak sareko



375. IRUDIA

korapiloetan, hau da, zuzen horien arteko ebaki-puntuetan. Sar ditzagun $u(ih,kl) = u_{i,k}$ idazkerak. (4) ekuazioaren ordeztatzeko idatz dezagun dagokion diferentzia finituetakoa, (ih,kl) punturako. (3) eta (2) formulen arabera,

$$\frac{u_{i,k+1} - u_{i,k}}{l} = a^2 \frac{u_{i+1,k} - 2u_{i,k} + u_{i-1,k}}{h^2} \quad (8)$$

lortzen dugu. Determina dezagun $u_{i,k+1}$:

$$u_{i,k+1} = \left(1 - \frac{2a^2l}{h^2}\right)u_{i,k} + a^2 \frac{l}{h^2}(u_{i+1,k} + u_{i-1,k}). \quad (9)$$

(9) formulatik, k . lerroan hiru balio, $u_{i,k}$, $u_{i+1,k}$, $u_{i-1,k}$ ezagunak badira, $(k+1)$. lerroan $u_{i,k+1}$ balioa determinaturik dagoela ondorioztatzen da. $t=0$ zuzenean balio guztiak dazaguzkigu ((5) formularen arabera). $t=l$ zuzenkiaren barne-puntu guztietako balioak (9) formularen bidez determinatuko ditugu. (6) eta (7) formulen arabera zuzenki horren muturretako balioak dazaguzkigu. Honela, lerro batetik bestera pasatuz, soluzio ezezagunaren balioak determinatuko ditugu sareko korapilo guztietan.

(9) formularen bitartez soluzioaren balio hurbildua $l \leq \frac{h^2}{2a^2}$ denean soilik, eta ez h eta l maila-luzeren arteko hautazko erlaziorako, lor daitekeela frogatu dugu. Formula nabariro sinplifika daiteke t ardatzaren araberako saretxoaren l maila-luzera

$$1 - \frac{2a^2l}{h^2} = 0$$

edo

$$l = \frac{h^2}{2a^2}$$

betetzeko moduan aukeratzen bada. Kasu honetan (9) ekuazioak

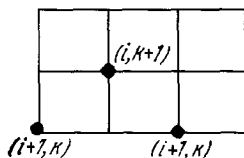
$$u_{i,k+1} = \frac{1}{2}(u_{i+1,k} + u_{i-1,k}) \quad (10)$$

itxura hartuko du. Formula hori bereziki eroso da kalkuluetarako (376. irudia). Soluzioa, sareko korapiloetan, aipatu metodoaren bidez determinatzen da. Sareko korapiloen artean soluzioaren balioak lor daitezke, esate baterako, estrapolazioaren bidez, (x,t,u) espazioko puntuen hirukote bakoitzerako plano bat marratuz.

(10) formularen bidez lortutako soluzio estrapolatua $u_h(x,t)$ izendatuko dugu.

$$\lim_{h \rightarrow 0} u_h(x,t) = u(x,t)$$

frogatzen da, $u(x,t)$ gure problemaren soluzioa izanik.



376. IRUDIA

$$|u_h(x, t) - u(x, t)| < Mh^2$$

ere frogatzen da, non M h -ren menpe ez dagoen konstantea bait da.

§ 7. Beroaren barreiapena mugarik gabeko hagaskan

Demagun tenperatura bat hagaska mugagabearen sekzio desberdinetan hasierako aldiunean. Hagaskaren tenperaturaren banaketa determinatu behar da hurrengo aldiuneetan. (Fisikako problemak hagaska mugagabe bateko beroaren barreiapenaren problemara pasa daitezke, hagaskak, kontsideratutako aldiunetan, barneko puntuen tenperaturen hagaskaren muturretako baldintzekiko menpekotasuna txikia izan dadin adina luzera duenean.

Hagaska Ox ardatzarekin bat badator, problema ondoko era matematikoan planteatu daiteke. Bilatu

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (1)$$

ekuazioaren soluzioa, $-\infty < x < \infty$, $t > 0$ eremuan,

$$u(x, 0) = \varphi(x) \quad (2)$$

hastapen-baldintza betetzen duena.

Soluzioa aurkitzeko, aldagai-banaketaren metodoa aplikatu dezagun (ikus § 3), hau da, bila dezagun (1) ekuazioaren soluzioa bi funtzioen arteko biderkadura bezala:

$$u(x, t) = X(x)T(t) \quad (3)$$

eran. (1) ekuazioan ordezkaturaz, $X(x)T'(t) = a^2 X''(x)T(t)$ edo

$$\frac{T'}{a^2 T} = \frac{X''}{X} = -\lambda^2 \quad (4)$$

daukagu. Erlazio horietako bat ere ezin da x eta t -ren menpe egon, beraz, $-\lambda^2$ konstantearekin berdintzen ditugu³⁾. (4)-tik bi ekuazio lortzen dugu:

$$T' + a^2 \lambda^2 T = 0, \quad (5)$$

$$X'' + \lambda^2 X = 0. \quad (6)$$

Ebatziz gero,

$$T = C e^{-a^2 \lambda^2 t},$$

$$X = A \cos \lambda x + B \sin \lambda x$$

aurkitzen dugu.

(3)-an ordezkatzuz

$$u_\lambda(x, t) = e^{-a^2 \lambda^2 t} [A(\lambda) \cos \lambda x + B(\lambda) \sin \lambda x] \quad (7)$$

lortzen dugu (C konstantea $A(\lambda)$ eta $B(\lambda)$ barne dago).

λ -ren balio bakoitzerako (7) itxurako soluzioa eskuratzen dugu. λ -ren balio bakoitzerako A eta B hautazko konstanteek balio determinatuak dituzte. Horregatik, A eta B λ -ren funtziotzat har daitezke. (7) itxurako soluzioen arteko batura ere da soluzio ((1) ekuazioaren linealtasuna dela eta):

$$\sum_{\lambda} e^{-a^2 \lambda^2 t} [A(\lambda) \cos \lambda x + B(\lambda) \sin \lambda x].$$

(7) adierazpena 0 eta ∞ mugen artean λ parametroarekiko integratuz ere lortzen da

$$u(x, t) = \int_0^\infty e^{-a^2 \lambda^2 t} [A(\lambda) \cos \lambda x + B(\lambda) \sin \lambda x] d\lambda \quad (8)$$

3) Problemaaren esanahiaren arabera, $T(t)$ -k t guztierako bornatuta egon behar duenez, $\varphi(x)$

bornaturik badago, $\frac{T'}{T}$ negatibo izango da. Horregatik idazten dugu $-\lambda^2$.

soluzioa, baldin $A(\lambda)$ eta $B(\lambda)$ koefizienteek integrala, bere t -rekiko deribatua eta bere x -rekiko bigarren deribatua existitu eta integralaren t eta x -rekiko deribatuen bidez lortzen direla betetzen badute. Aukera ditzagun $A(\lambda)$ eta $B(\lambda)$ $u(x, t)$ soluzioak (2) baldintza bete dezan. (8) berdintzan $t = 0$ eginez, (2) baldintzaren arabera,

$$u(x, 0) = \varphi(x) = \int_0^{\infty} [A(\lambda) \cos \lambda x + B(\lambda) \sin \lambda x] d\lambda \quad (9)$$

ateratzen dugu. Jo dezagun $\varphi(x)$ funtzioa

$$\varphi(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\alpha) \cos \lambda(\alpha - x) d\alpha \right) d\lambda$$

edo

$$\varphi(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \left[\left(\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\alpha) \cos \lambda \alpha d\alpha \right) \cos \lambda x + \left(\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\alpha) \sin \lambda \alpha d\alpha \right) \sin \lambda x \right] d\lambda \quad (10)$$

Fourier-en integralez adierazgarria dela (ikus XVII. gaiko § 12). (9) eta (10)-aren bigarren atalak alderatuz,

$$\left. \begin{aligned} A(\lambda) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\alpha) \cos \lambda \alpha d\alpha, \\ B(\lambda) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\alpha) \sin \lambda \alpha d\alpha \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

lortzen dugu. $A(\lambda)$ eta $B(\lambda)$ -ren adierazpenak (8) formulatan ordezkatzuz,

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-a^2 \lambda^2 t} \left[\left(\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\alpha) \cos \lambda \alpha d\alpha \right) \cos \lambda x + \left(\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\alpha) \sin \lambda \alpha d\alpha \right) \sin \lambda x \right] d\lambda = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-a^2 \lambda^2 t} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\alpha) (\cos \lambda \alpha \cos \lambda x + \sin \lambda \alpha \sin \lambda x) d\alpha \right\} d\lambda = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-a^2 \lambda^2 t} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\alpha) \cos \lambda(\alpha - x) d\alpha \right) d\lambda \end{aligned}$$

daukagu, edo azkenik, integrazio-ordena aldatuz,

$$u(x, t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \varphi(\alpha) \left(\int_0^{\infty} e^{-a^2 \lambda^2 t} \cos \lambda(\alpha - x) d\lambda \right) \right\} d\alpha \quad (12)$$

erdiesten dugu, hori da planteatutako problemaren soluzioa.

Transforma dezagun (12) formula. Kalkula dezagun parentesien arteko integrala:

$$\int_0^{\infty} e^{-a^2 \lambda^2 t} \cos \lambda(\alpha - x) d\lambda = \frac{1}{a\sqrt{t}} \int_0^{\infty} e^{-z^2} \cos \beta z dz, \quad (13)$$

$$a\lambda\sqrt{t} = z, \quad \frac{\alpha - x}{a\sqrt{t}} = \beta \quad (14)$$

ordezkapenak erabiliz. Izan bedi

$$K(\beta) = \int_0^{\infty} e^{-z^2} \cos \beta z dz. \quad (15)$$

Deribatuz⁴⁾

$$K'(\beta) = - \int_0^{\infty} e^{-z^2} z \sin \beta z dz$$

lortzen dugu. Zatika integratuz

$$K'(\beta) = \frac{1}{2} \left[e^{-z^2} \sin \beta z \right]_0^{\infty} - \frac{\beta}{2} \int_0^{\infty} e^{-z^2} \cos \beta z dz$$

edo

$$K'(\beta) = -\frac{\beta}{2} K(\beta)$$

aurkitzen dugu. Ekuazio diferentzial hori integratuz,

4) Deribatzerik daukagula erraz froga daiteke.

$$K(\beta) = C e^{-\frac{\beta^2}{4}} \quad (16)$$

aterako dugu. Determina dezagun C konstantea. (15)-etik

$$K(0) = \int_0^{\infty} e^{-z^2} dz = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

ondorioztatzen da (ikus XIV. gaiko § 5). Hortaz, (16) berdintzan

$$C = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

izango da. Ondorioz,

$$K(\beta) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-\frac{\beta^2}{4}}. \quad (17)$$

Sar dezagun (15) integralaren (17) balioa (13)-an:

$$\int_0^{\infty} e^{-a^2 \lambda^2 t} \cos \lambda(\alpha - x) d\lambda = \frac{1}{a\sqrt{t}} \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-\frac{\beta^2}{4}}.$$

β bere (14) adierazpenaz ordezkatzuz (13) integralaren balioa lortzen dugu:

$$\int_0^{\infty} e^{-a^2 \lambda^2 t} \cos \lambda(\alpha - x) d\lambda = \frac{1}{2a} \sqrt{\frac{\pi}{t}} e^{-\frac{(\alpha-x)^2}{4a^2 t}}. \quad (18)$$

Integralaren adierazpen hori (12) soluzioan sartuz,

$$u(x, t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\alpha) e^{-\frac{(\alpha-x)^2}{4a^2 t}} d\alpha \quad (19)$$

eskuratzen dugu behin betiko.

Formula hori *Poisson-en integral* deitzen da eta, hagaska mugagabe batean, beroaren barreiapenari buruz planteatutako problemaren soluzioa da.

Oharra: Froga daiteke $u(x, t)$ funtzioa, (19) integralak determinatua, (1) ekuazioaren soluzioa dela eta (2) baldintza betetzen duela, $\varphi(x)$ funtzioa $(-\infty, \infty)$ tarte infinituan bornatua bada.

Ezar dezagun (19) formularen zentzu fisikoa. Iker dezagun

$$\varphi^*(x) = \begin{cases} 0 & -\infty < x < x_0 & \text{denean,} \\ \varphi(x) & x_0 \leq x \leq x_0 + \Delta x & \text{denean,} \\ 0 & x_0 + \Delta x < x < \infty & \text{denean} \end{cases} \quad (20)$$

funtzioa. Orduan,

$$u^*(x, t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi^*(\alpha) e^{-\frac{(\alpha-x)^2}{4a^2t}} d\alpha \quad (21)$$

funtzioa, $t=0$ baliorako $\varphi^*(x)$ -ren balioa hartzen duen (1) ekuazioaren soluzioa da. (20) kontutan hartuz,

$$u^*(x, t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{x_0}^{x_0+\Delta x} \varphi(\alpha) e^{-\frac{(\alpha-x)^2}{4a^2t}} d\alpha$$

idatz daiteke. Azken integralari batezbesteko balioaren teorema aplikatuz,

$$u^*(x, t) = \frac{\varphi(\xi)\Delta x}{2a\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2t}}, \quad x_0 < \xi < x_0 + \Delta x, \quad (22)$$

lortzen dugu. (22) formulak hagaskaren puntu bateko tenperatura emango du edozein aldiunetan, $t=0$ baliorako hagaska osoan tenperatua $u^*=0$ bada, $[x_0, x_0 + \Delta x]$ zuzenkian ezik, non tenperatura $\varphi(x)$ bait da. (22) itxurako tenperaturen arteko baturak (19) soluzioa ematen du. Ohar gaitezen ρ hagaskaren dentsitate lineala bada, eta c , materialaren bero-ahalmena, $[x_0, x_0 + \Delta x]$ elementuko bero-kantitatea, $t=0$ denerako,

$$\Delta Q \approx \varphi(\xi)\Delta x \rho c \quad (23)$$

dela. Kontsidera dezagun

$$\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2t}} \quad (24)$$

funtzioa. (22) formulako bigarren atalarekin alderatuz, (23) kontutan hartuz, horrek hagaskaren puntu orotako tenperaturaren balioa, t edozein unetan, ematen duela esaten da, baldin $t=0$ zenerako ξ sekzioan (muga kasua, $\Delta x \rightarrow 0$ denean) $Q = c\rho$ bero-kantitatea zuen aldiuneko bero-iturri bat egon bazen.

§ 8. Laplace-ren ekuazioaren soluzioak ikertzera garamatzaten problemak. Mugalde-balioudun problemen planteamendua

Atal honetan

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 \quad (1)$$

Laplace-ren ekuazioaren soluziora garamatzan zenbait problema aztertuko da. Aipatu bezala (1) ekuazioaren lehenengo atala,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \equiv \Delta u,$$

u funtzioari aplikatutako Laplace-ren eragilea da. Laplace-ren ekuazioa betetzen duten u funtzioei funtzio harmoniko deritze.

I. Gorpurtz homogeno baten tenperaturaren banaketa geldikorra. Izan bedi Ω , σ gainazalak mugatutako gorputz homogenoa. § 5.ean frogatu da gorputzaren puntu desberdinetako tenperaturek

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right)$$

(8) ekuazioa betetzen dutela. Prozesua geldikorra bada, hau da, tenperatura ez badago

denboraren menpe, baizik eta gorputzeko puntuen koordinatuen menpe soilik, $\frac{\partial u}{\partial t} = 0$ izango da, eta ondorioz, tenperaturak

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 \quad (1)$$

Laplace-ren ekuazioa beteko du. Gorputzaren tenperatura ekuazio horren bidez unibokoki determina dadin σ gainazalaren tenperatura ezagutu behar da. Honela, (1) ekuaziorako mugalde-baliodun problema ondorengo eran formula daiteke.

Bilatu Ω bolumenaren barnean (1) ekuazioa betetzen duen $u(x, y, z)$ funtzioa, zeinak σ gainazaleko M puntu bakoitzean emandako balioak,

$$u|_{\sigma} = \psi(M), \quad (2)$$

hartzen bait ditu. Problema horri *Dirichlet-en problema* edo (1) ekuaziorako *mugalde-baliodun lehen problema* deritzo.

Tenperatura gorputzaren gainazalean ezezaguna bada, baina gainazaleko puntu orotan ezagutzen badugu fluxu termikoa, $\frac{\partial u}{\partial n}$ -aren proportzionala dena (ikus § 5), (2) mugalde-baliodun baldintzaren ordeztu, σ gainazalean,

$$\left. \frac{\partial u}{\partial n} \right|_{\sigma} = \psi^*(M) \quad (3)$$

baldintza edukiko dugu.

(3) mugalde-baliodun baldintza betetzen duen (1) ekuazioaren soluzioa bilatzearen problema *Neumann-en problema* edo *mugalde-baliodun bigarren problema* deitzen da.

C mugaldeak mugatutako D eremu launeko tenperaturen banaketa aztertzen bada u funtzioa x eta y bi aldagairen menpean egongo da eta

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad (4)$$

ekuazioa beteko du, Laplace-ren ekuazioa planoan. (2) eta (3) mugalde-baliodun baldintzak bete behar dira C mugaldean.

II. Gas edo likido baten korrante potentziala. Jarraitasun-ekuazioa.

Izan bedi σ gainazalak mugatzen duen Ω bolumenaren barneko likido baten fluxua, (kasu partikularizat Ω mugagabea ere izan daiteke). Izan bedi ρ likidoaren dentsitatea. Izenda dezagun

$$\mathbf{v} = v_x \mathbf{i} + v_y \mathbf{j} + v_z \mathbf{k} \quad (5)$$

likidoaren abiadura, non v_x, v_y, v_z $\mathbf{v}$ bektorearen koordenatu-ardatzen gaineko proiektzioak bait dira. Bereiz dezagun Ω gorputzean S gainazalak mugatutako ω bolumen txikia. S gainazalaren Δs elementu bakoitzean zehar, Δt denboran,

$$\Delta Q = \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \Delta s \Delta t$$

likido-kantitatea pasako da, non $\mathbf{n} \cdot S$ gainazalaren kanpo-normalaren arabera zuzendutako unitate bektorea bait da. ω bolumenean sartu (edo atera) egiten den likido-kantitate osoa, Q ,

$$Q = \Delta t \iint_S \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} ds \quad (6)$$

integralaren bidez adierazten da (ikus XV. gaiko § 5 eta § 6). t aldiunean ω bolumenean likido-kantitatea

$$\iiint_{\omega} \rho d\omega$$

da. Δt denbora-tartean, likido-kantitatea, dentsitate-aldakuntzaren arabera,

$$Q = \iiint_{\omega} \Delta \rho \Delta \omega \approx \Delta t \iiint_{\omega} \frac{\partial \rho}{\partial t} d\omega \quad (7)$$

magnituden aldatzen da.

ω bolumenean iturririk ez dagoela suposatuz, aldakuntza hori likidoaren fluxuak, zeinaren kantitatea (6) berdintzak determinatzen duen, eraginda dela ondorioztatzen dugu. (6) eta (7) berdintzetako bigarren atalak berdinduz, eta Δt gaiaz sinplifikatuz,

$$-\iint_S \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} ds = + \iiint_{\omega} \frac{\partial \rho}{\partial t} d\omega \quad (8)$$

lortzen dugu. Transforma dezagun lehenengo ataleko bigarren ordenako integral berritua Ostrogradski-ren formularen bidez (XV. gaiko § 8). Orduan, (8) berdintzak

$$-\iiint_{\omega} \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) d\omega = \iiint_{\omega} \frac{\partial \rho}{\partial t} d\omega$$

edo

$$\iiint_{\omega} \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) \right) d\omega = 0$$

itxura hartzen du. ω bolumena hautazkoa denez eta integrakizuna jarraia,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = 0 \quad (9)$$

edo

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho v_x) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v_y) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho v_z) = 0 \quad (9')$$

ateratzen dugu. Hori da *likido konprimagarri baten korrontearen jarraitasun-ekuazioa*.

Oharra. Zenbait problematan, esate baterako putzu bateko gas edo petrolioaren higidura lurrazpiko ingurune porotsu batean aztertzerakoan,

$$\mathbf{v} = -\frac{k}{\rho} \operatorname{grad} p$$

onar daiteke, p presioa, k iragazkortasun-koefizientea eta

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} \approx \lambda \frac{\partial p}{\partial t},$$

λ =ktea., direlarik. (9) jarraitasun-ekuazioan ordezkatuz,

$$\lambda \frac{\partial p}{\partial t} - \operatorname{div}(k \operatorname{grad} p) = 0$$

edo

$$\lambda \frac{\partial p}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial p}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial p}{\partial z} \right) \quad (10)$$

eskuratzen dugu. k konstantea bada ekuazioak

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{k}{\lambda} \left(\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} \right) \quad (11)$$

itxura hartzen du, beroaren kondukzioaren ekuaziora heltzen garelarik.

Itzul gaitezen (9) ekuaziora. Likidua konprima ezina bada $\rho = \text{ktea.}$, $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ eta (9) ekuazioak

$$\text{div}(\mathbf{v}) = 0 \quad (12)$$

itxura hartuko du. Higidura potentziala bada, hau da, $\mathbf{v}$ bektorea φ funtzio baten gradientea bada,

$$\mathbf{v} = \text{grad } \varphi,$$

(12) ekuazioak

$$\text{div}(\text{grad } \varphi) = 0$$

edo

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0 \quad (13)$$

itxura hartuko du, hau da, abiaduraren φ funtzio potentzialak Laplace-ren ekuazioa bete beharko du.

Problema ugaritan, iragazpen-problemetan bezala, esaterako,

$$\mathbf{v} = -k_1 \text{ grad } p$$

onar daiteke, p presioa eta k_1 konstantea izanik; orduan presioa determinatzeko Laplace-ren ekuazioa eskuratzen dugu,

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} = 0. \quad (13')$$

(13) edo (13') ekuaziorako mugalde-baliodun baldintzak ondorengoak izan daitezke:

1. p funtzio ezezagunaren balioak, hots, presioarenak ((2) baldintza), ematen dira σ gainazalean. Hau da Dirichlet-en problema.

2. $\frac{\partial p}{\partial n}$ deribatu normalaren balioak ematen dira σ gainazalean, hots, gainazalean zeharkako fluxua ((3) baldintza). Hau da Neumann-en problema.

3. σ gainazalaren alde batean p funtzio ezezagunaren balioak, hots, presioarenak, ematen dira eta beste alde batean $\frac{\partial p}{\partial n}$ deribatu normalaren balioak, hots, gainazalean zeharreko fluxuarenak. Hau da Dirichlet-Neumann-en problema.

Higidura launa eta paraleloa bada, hau da, φ (edo p) funtzioa z -ren menpe ez badago, C mugadun D eremu launari dagokion Laplace-ren ekuazioa lortzen dugu:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0. \quad (14)$$

(2) itxurako mugalde-baliodun baldintzak (Dirichlet-en problema) edo (3) itxurakoak (Neumann-en problema) C mugaldean ematen dira.

III. Korrante elektriko geldikor baten potentziala. Jo dezagun V bolumena betetzen duen ingurune homogeno batean zehar korrante elektriko bat pasatzen dela, zeinaren puntu bakoitzeko dentsitatea $\mathbf{J}(x, y, z) = J_x \mathbf{i} + J_y \mathbf{j} + J_z \mathbf{k}$ bektorearen bidez ematen bait da. Demagun korrante-dentsitatea ez dagoela t denboraren menpe. Demagun, ere, kontsideratutako bolumenean ez dagoela korrante-iturririk. Ondorioz, $\mathbf{J}$ bektorearen fluxua V bolumenaren barnealdean dagoen S edozein gainazal itxitan zehar zero izango da,

$$\iint_S \mathbf{J} \mathbf{n} ds = 0,$$

non $\mathbf{n}$ gainazalaren kanpo-normalaren arabera zuzendutako unitate bektorea bait da. Ostrogradski-ren formulatik

$$\operatorname{div} \mathbf{J} = 0 \quad (15)$$

ondorioztatzen dugu.

Ohm-en lege orokortuaren bidez kontsideratutako ingurunean eroaleko $\mathbf{E}$ indar elektroeragilea determinatzen da:

$$E = \frac{J}{\lambda} \quad (16)$$

edo

$$J = \lambda E,$$

λ ingurunearen eroankortasuna izanik, konstantetzat hartzen duguna.

Eremu elektromagnetikoaren ekuazio orokorretatik ondorioztatzen da, prozesu geldikorra bada $\mathbf{E}$ eremu bektoriala irrotazionala dela, hau da, $\text{rot } \mathbf{E} = 0$. Orduan, likido baten abiadura-eremuaren analisisan aztertutako kasuan bezala, eremu bektoriala potentziala da (ikus XV. gaiko § 9). φ funtzio bat badago, non

$$\mathbf{E} = \text{grad } \varphi \quad (17)$$

den.

(16) erabiliz

$$J = \lambda \text{ grad } \varphi \quad (18)$$

lortzen dugu.

(15) eta (18)-tik

$$\lambda \text{ div } (\text{grad } \varphi) = 0$$

edo

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0 \quad (19)$$

ateratzen da. Beraz, Laplace-ren ekuazioa lortzen dugu.

Ekuazio hori ebatziz, dagozkion mugalde-balioidun baldintzetarako, φ funtzioa eta, (18) eta (17) formulen bidez, $\mathbf{J}$ korronea eta $\mathbf{E}$ indar elektroeragilea aurkitzen ditugu.

§ 9. Laplace-ren ekuazioa koordenatu zilindrikoetan. Dirichlet-en problemaren soluzioa eraztun zirkular baterako, funtzio ezezagunak kanpo- eta barne-zirkunferentzietan balio konstanteak dituelarik

Izan bedi $u(x, y, z)$ hiru aldagaiko funtzio harmoniko bat. Orduan,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0. \quad (1)$$

Sar ditzagun koordenatu zilindrikoak, (r, φ, z) ,

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi, \quad z = z,$$

nondik

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \varphi = \arctan \frac{y}{x}, \quad z = z \quad (2)$$

lortzen ditugun.

x , y eta z aldagai independenteak r , φ eta z aldagaietaz ordezkaturaz u^* funtziora,

$$u(x, y, z) = u^*(r, \varphi, z),$$

ailegatzten gara. Bila dezagun $u^*(r, \varphi, z)$ funtzioak, r , φ eta z aldagaien funtzio bezala, beteko duen ekuazioa.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u^*}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial u^*}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial x},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u^*}{\partial r^2} \left(\frac{\partial r}{\partial x} \right)^2 + \frac{\partial u^*}{\partial r} \frac{\partial^2 r}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 u^*}{\partial r \partial \varphi} \frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial^2 u^*}{\partial \varphi^2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \frac{\partial u^*}{\partial \varphi} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \quad (3)$$

daukagu; antzeko eran,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u^*}{\partial r^2} \left(\frac{\partial r}{\partial y} \right)^2 + \frac{\partial u^*}{\partial r} \frac{\partial^2 r}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 u^*}{\partial r \partial \varphi} \frac{\partial r}{\partial y} \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial^2 u^*}{\partial \varphi^2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 + \frac{\partial u^*}{\partial \varphi} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}; \quad (4)$$

horrez gain,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 u^*}{\partial z^2}. \quad (5)$$

$$\frac{\partial r}{\partial x}, \frac{\partial r}{\partial y}, \frac{\partial^2 r}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 r}{\partial y^2}, \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}$$

deribatuetarako adierazpenak (2) berdintzatik aurkituko ditugu. (3), (4) eta (5) berdintzetako bigarren atalak batuz eta batura zerorekin berdinduz (zeren eta berdintza horietako lehenengo atalen batura, (1)-en arabera, zero bait da),

$$\frac{\partial^2 u^*}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u^*}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u^*}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 u^*}{\partial z^2} = 0 \quad (6)$$

eskuratzen dugu. Hori da *Laplace-ren ekuazioa koordenatu zilindrikoetan*.

u funtzioa ez badago z -ren menpe, baina bai x eta y -ren menpe, u^* funtzioak, r eta φ -ren menpe soilik dagoenak,

$$\frac{\partial^2 u^*}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u^*}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u^*}{\partial \varphi^2} = 0 \quad (7)$$

ekuazioa beteko du, r eta φ planoko koordenatu polarrak direlarik.

Orain, Laplace-ren ekuazioaren soluzioa bila dezagun D eremuan (eraztuna), $C_1: x^2 + y^2 = R_1^2$ eta $C_2: x^2 + y^2 = R_2^2$ zirkunferentziek mugatua, ondorengo mugalde-balioekin:

$$u|_{C_1} = u_1, \quad (8)$$

$$u|_{C_2} = u_2, \quad (9)$$

u_1 eta u_2 konstanteak izanik.

Ebatz dezagun problema koordenatu polarretan. Bistakoa da komenigarria dela φ -ren menpe ez dagoen soluzioa bilatzea. Kasu honetan (7) ekuazioak

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} = 0$$

itxura hartuko du. Ekuazio hori integratuz gero

$$u = C_1 \ln r + C_2 \quad (10)$$

aurkitzen dugu. Determina ditzagun C_1 eta C_2 (8) eta (9) baldintzetatik:

$$u_1 = C_1 \ln R_1 + C_2,$$

$$u_2 = C_1 \ln R_2 + C_2.$$

Hortik,

$$C_1 = \frac{u_2 - u_1}{\ln \frac{R_2}{R_1}}, \quad C_2 = u_1 - (u_2 - u_1) \frac{\ln R_1}{\ln \frac{R_2}{R_1}}$$

aurkitzen dugu. Azkenik, aurkitutako C_1 eta C_2 -ren balioak (10) formulan ordezkatzuz,

$$u = u_1 + \frac{\ln \frac{r}{R_1}}{\ln \frac{R_2}{R_1}} (u_2 - u_1) \quad (11)$$

eskuratzzen dugu.

Oharra. Egia esateko ondorengo problema ebatzi dugu:

$$r = R_1, \quad r = R_2, \quad z = 0, \quad z = H,$$

(koordinatu zilindrikoetan) gainazalek mugatutako eremuan eta

$$u|_{r=R_1} = u_1, \quad u|_{r=R_2} = u_2,$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} \Big|_{z=0} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial z} \Big|_{z=H} = 0$$

mugalde-baldintzen menpean Laplace-ren ekuazioa betetzen duen u funtzioa bilatzea (Dirichlet-Neumann-en problema). Bistako da bilatzen dugun soluzioa ez dagoela z -ren menpe, ezta φ -ren menpe ere, eta (11) formulak ematen digula.

§ 10. Dirichlet-en problemaren soluzioa zirkulu baterako

Demagun Oxy planoan, koordinatu-jatorrian zentraturik, R erradioko zirkulu bat dagoela. Izan bedi $f(\varphi)$ bere zirkunferentzian definitutako funtzio bat, non φ angelu polarra bait da. Zirkuluan, muga barne, jarraia den; zirkuluaren barnealdean

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad (1)$$

Laplace-ren ekuazioa betetzen duen eta zirkunferentzian emandako balioak,

$$u|_{r=R} = f(\varphi), \quad (2)$$

hartzen dituen $u(r, \varphi)$ funtzio bat aurkitu behar da. Ebatz dezagun problema koordenatu polarretan. Idatz dezagun (1) ekuazioa koordenatu horietan:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0$$

edo

$$r^2 \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + r \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0. \quad (1')$$

Bila dezagun soluzioa aldagai-banaketaaren metodoaren bidez,

$$u = \Phi(\varphi)R(r) \quad (3)$$

idatziz. (1') ekuazioan ordezkatuz,

$$r^2 \Phi(\varphi) R''(r) + r \Phi(\varphi) R'(r) + \Phi''(\varphi) R(r) = 0$$

edo

$$\frac{\Phi''(\varphi)}{\Phi(\varphi)} = -\frac{r^2 R''(r) + r R'(r)}{R(r)} = -k^2 \quad (4)$$

eskuratzen dugu. Berdintza horren lehenengo atala r -ren menpe ez dagoenez, ez eta bigarrena φ -ren menpe ere, $-k^2$ izendatuko dugun konstante baten berdina izango dira. Honela, (4) berdintzak bi ekuazio ematen digu:

$$\Phi''(\varphi) + k^2 \Phi(\varphi) = 0, \quad (5)$$

$$r^2 R''(r) + r R'(r) - k^2 R(r) = 0. \quad (5')$$

(5) ekuazioaren soluzio orokorra

$$\Phi = A \cos k\varphi + B \sin k\varphi \quad (6)$$

izango da. Bila dezagun (5') ekuazioaren soluzioa $R = r^m$ eran. $R = r^m$ (5')-ean ordezkatzuz gero,

$$r^2 m(m-1)r^{m-2} + r m r^{m-1} - k^2 r^m = 0$$

edo

$$m^2 - k^2 = 0$$

lortzen dugu. Linealki independente diren bi soluzio partikular aurki ditzakegu: r^k eta r^{-k} . Orduan, (5') ekuazioaren soluzio orokorra

$$R = C r^k + D r^{-k} \quad (7)$$

izango da. (6) eta (7) adierazpenak (3)-an ordezkatzuz,

$$u_k = (A_k \cos k\varphi + B_k \sin k\varphi)(C_k r^k + D_k r^{-k}) \quad (8)$$

daukagu. (8) funtzioa (1') ekuazioaren soluzioa izango da, zero ez den k -ren balio orotarako. Baldin $k=0$ bada, (5) eta (5') ekuazioek

$$\Phi'' = 0, \quad rR'' + R' = 0$$

itxurak hartuko dituzte eta, ondorioz,

$$u_0 = (A_0 + B_0 \varphi)(C_0 + D_0 \ln r). \quad (8')$$

Soluzioak φ -ren funtzio periodikoa izan behar du, zeren r -ren balioak φ eta $\varphi + 2\pi$ balioetarako berdinak direnez gero soluzioaren balio bera lortu behar bait dugu, zirkuluko puntu bera kontsideratzen dugu eta. Hortaz, bistakoa da (8') formulan $B_0 = 0$ izan behar dela. Beraz, bila dezagun soluzio jarraia eta finitua zirkuluan. Ondorioz, zirkuluko zentruan, $r=0$ denerako, soluzioak finitua izan behar du, eta horregatik (8') formulan $D_0 = 0$ izan behar du eta (8) formulan $D_k = 0$.

Horrela, (8')-aren bigarren atala $A_0 C_0$ biderkadura bihurtzen da, $\frac{A_0}{2}$ izendatzen duguna, beraz,

$$u_0 = \frac{A_0}{2}. \quad (8'')$$

Era dezagun gure problemaren soluzioa (8) itxurako soluzioen arteko batura bezala, soluzioen arteko batura bilatzen den soluzioa bait da. Baturak φ -ren funtzio periodikoa izan behar du. Baldintza hori beteko da batugai bakoitza φ -ren funtzio periodikoa bada. Horretarako, k balio osoa izan behar da. (Kontura gaitezen (4) berdintzako atalak $+k^2$ zenbakiarekin berdinduz gero ez genukeela soluzio periodikorik lortuko). Balio positiboetara,

$$k = 1, 2, \dots, n, \dots,$$

soilik muga gaitezke, A, B, C, D hautazko konstanteak direnez gero k -ren balio negatiboek ez bait dute soluzio partikular berririk emango. Hortaz,

$$u(r, \varphi) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi) r^n \quad (9)$$

(C_n konstantea A_n eta B_n -ren barne dago). Hauta ditzagun, orain, A_n eta B_n konstanteak (2) mugalde-baliodun baldintza bete dadin. (9) berdintzan $r=R$ eginez, (2) baldintza kontutan hartuz,

$$f(\varphi) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi) R^n \quad (10)$$

aterako dugu. (10) berdintza bete dadin, funtzioak $(-\pi, \pi)$ tartean Fourier-en seriez garagarri izan behar du eta $A_n R^n$ eta $B_n R^n$ Fourier-en koefizienteak izan. Ondorioz, A_n eta B_n

$$\left. \begin{aligned} A_n &= \frac{1}{\pi R^n} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos nt \, dt, \\ B_n &= \frac{1}{\pi R^n} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin nt \, dt \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

formulen bidez determinatu behar dira. (9) seriea, zeinaren koefizienteak (11) formulek determinatzen bait dituzte, gure problemaren soluzioa izango da baldin r eta φ -rekiko gaiz gaiko deribazio bikoitza onartzen badu (hori, frogatu gabe ontzat emango dugu). Transforma dezagun (9) formula. A_n eta B_n bere adierazpenetaz, (11), ordezkatzuz eta transformazio trigonometrikoak burutuz gero,

$$\begin{aligned} u(r, \varphi) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \, dt + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos n(t - \varphi) \, dt \left(\frac{r}{R}\right)^n = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \left[1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{R}\right)^n \cos n(t - \varphi) \right] \, dt \end{aligned} \quad (12)$$

eskuratzzen dugu. Transforma dezagun kortxeteen arteko adierazpena⁵⁾:

$$\begin{aligned} 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{R}\right)^n \cos n(t - \varphi) &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{R}\right)^n [e^{in(t-\varphi)} + e^{-in(t-\varphi)}] = \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(\frac{r}{R} e^{i(t-\varphi)}\right)^n + \left(\frac{r}{R} e^{-i(t-\varphi)}\right)^n \right] = 1 + \frac{\frac{r}{R} e^{i(t-\varphi)}}{1 - \frac{r}{R} e^{i(t-\varphi)}} + \frac{\frac{r}{R} e^{-i(t-\varphi)}}{1 - \frac{r}{R} e^{-i(t-\varphi)}} = \\ &= \frac{1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2}{1 - 2 \frac{r}{R} \cos(t - \varphi) + \left(\frac{r}{R}\right)^2} = \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr \cos(t - \varphi) + r^2}. \end{aligned} \quad (13)$$

5) Dedukzioan, progresio geometriko infinitu baten batura kalkulatzzen dugu, zeinaren izendatzailea 1 baino modulu txikiagoko zenbaki konplexua bait da. Progresio geometrikoaren baturaren formula zenbaki errealeen kasurako bezala lor daiteke. Kontutan hartu behar da aldagai errealeko funtzio konplexu baten limitearen definizioa. Hemen, aldagaia n da (ikus VII. gaiko § 4).

(12) formulako kortxeteen arteko adierazpena (13) adierazpenaz ordezkatzuz gero

$$u(r, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr \cos(t - \varphi) + r^2} dt \quad (14)$$

lortzen dugu. (14) formulari *Poisson-en integral* deritzo. Formula hori analisatuz, $f(\varphi)$ funtzioa jarraia bada $u(r, \varphi)$ funtzioak, (14) integralak determinatuak, (1') ekuazioa betetzen duela, eta $r \rightarrow R$ denean, $u(r, \varphi) \rightarrow f(\varphi)$, hau da, $u(r, \varphi)$ zirkulu baterako planteatutako Dirichlet-en problemaren soluzioa dela frogatzen da.

§ 11. Dirichlet-en problemaren soluzioa diferentzia finituen metodoaren bidez

Izan bedi C mugaldeak mugatutako Oxy planoko D eremua. Jo dezagun C mugaldean f funtzio jarraia dagoela definiturik.

$$u|_C = f \quad (2)$$

mugalde-baldintza betetzen duen

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad (1)$$

Laplace-ren ekuazioaren soluzio hurbildua aurkitu behar da.

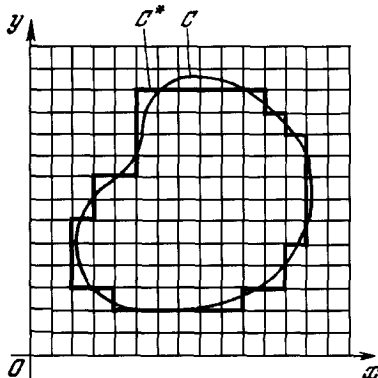
Marra dezagun zuzenen bi familia:

$$x = ih \quad \text{eta} \quad y = kh, \quad (3)$$

non h zenbaki ezaguna, i eta k balioak ondoz ondoko zenbaki osoak bait dira. D eremua sare batez estalia dagoela diogu. Zuzenen arteko ebaki-puntuei *sareko korapilo* deituko diegu.

Funtzio ezezagunaren $x = ih$, $y = kh$ puntuko balio hurbildua $u_{i,k}$ izendatuko dugu, hau da, $u(ih, kh) = u_{i,k}$. Hurbil dezagun D eremua D^* sare-eremuaren bitartez, zeina guztiz D eremuaren barne dauden karratu guztiaz osatuta bait dago, horietako batzuk C mugak zeharkatzen dituelarik (azkeneko horiek mezpresa daitezke). Kasu honetan C mugaldea, (3) itxurako zuzenkiez osatutako C^* mugaldearen bitartez hurbil daiteke. C^*

mugaldeko korapilo bakoitzean f^* balioa, f funtzioak C mugaldeko punturik gertuenean hartzen duena, emango dugu (377. irudia).



377. IRUDIA

Azter ditzagun funtzio ezezagunaren balioak sareko korapiloetan soilik. § 6an aipatu dugun bezala, kontsideratutako hurbiltze-metodo honetan deribatuak diferentzia finituez ordezkatzek dira:

$$\left. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right|_{x=ih, y=kh} = \frac{u_{i+1,k} - 2u_{i,k} + u_{i-1,k}}{h^2},$$

$$\left. \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right|_{x=ih, y=kh} = \frac{u_{i,k+1} - 2u_{i,k} + u_{i,k-1}}{h^2}.$$

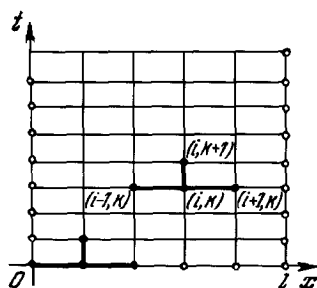
(1) ekuazio diferentziala diferentzien ekuazioaz edo diferentzia finituetako ekuazioaz (h^2 -z sinplifikatu eta gero) ordezkatzek dira:

$$u_{i+1,k} - 2u_{i,k} + u_{i-1,k} + u_{i,k+1} - 2u_{i,k} + u_{i,k-1} = 0$$

edo (378. irudia)

$$u_{i,k} = \frac{1}{4}(u_{i+1,k} + u_{i,k+1} + u_{i-1,k} + u_{i,k-1}). \quad (4)$$

D^* eremuaren barnealdean dagoen sareko korapilo bakoitzerako (C^* mugan ez badago), (4) ekuazioa darabilgu. ($x = ih$, $y = kh$) puntua C^* mugaldeko puntuaren auzoa bada, (4) berdintzan f^* -aren balio ezagunak erabiliko dira. Honela, N ezezaguneko N ekuaziozko sistema lortzen dugu (N D^* eremuaren barnealdean dauden sareko korapiloen kopurua izanik).



378. IRUDIA

Froga dezagun (4) sistemak soluzio bakar bat duela. N ezezaguneko N ekuazio linealezko sistema da; sistemaren determinantea nulua ez denean soluzio bakar bat edukiko du. Sistemaren determinantea ez da nulua sistema homogenoak soluzio nabaria (nulua) bakarrik onartzen badu. Sistema homogeno izango da baldin, C^* mugaldearen mugan, sareko korapiloetan $f^*=0$ bada. Froga dezagun, kasu honetan, sareko barnekorapiloetako $u_{i,k}$ balio guztiak zero direla. Demagun eremuaren barnealdean zero ez diren $u_{i,k}$ baliorik dagoela. Zehaztasun handiagoz demagun balio horietako handiena positibo dela. Izan bedi $\bar{u}_{i,k} > 0$. (4) formularen arabera,

$$\bar{u}_{i,k} = \frac{1}{4}(u_{i+1,k} + u_{i,k+1} + u_{i-1,k} + u_{i,k-1}) \quad (4')$$

idazten dugu.

Berdintza hori beteko da bigarren ataleko u -ren balio guztiak $\bar{u}_{i,k}$ balio maximoaren berdina direnean soilik. Orain bost puntutan funtzio ezezagunaren balioak $\bar{u}_{i,k}$ dira. Puntu horietako bat ere mugakoa ez bada, horietako bat hartu eta dagokion (4) berdintza idatziz, beste puntu batzuetan funtzio ezezagunaren balioa $\bar{u}_{i,k}$ izango dela frogatuko dugu. Honela segituz mugara helduko gara eta mugako puntuan funtzioaren balioa $\bar{u}_{i,k}$ izango dela frogatuko dugu. Hor mugako puntuetan $f^*=0$ denaren aurkakoa da.

Eremuaren barnealdean balio negatibo minimo bat dagoela suposatuz, mugan funtzioaren balioa negatibo dela frogatuko dugu. Horrek emandako baldintzaren kontra jotzen du.

Ondorioz, (4) sistemak soluzio bakar bat dauka.

$u_{i,k}$ balioak, (4) sistemak determinatuak, lehenago formulatutako Dirichlet-en problemaren soluzioaren balio hurbilduak dira. Zera frogatu dugu: emandako D eremu eta

f funtziorako Dirichlet-en problemaren soluzioa existitzen bada (izan bedi hori $u(x, y)$) eta $u_{i,k}$ (4) sistemaren soluzioa bada,

$$|u(x, y) - u_{i,k}| < Ah^2 \quad (5)$$

erlazioa betetzen dela, non A h -ren menpe ez dagoen konstantea den.

Oharra. Zorrozki frogaturik ez badago ere, soluzio hurbilduaren errorea balioztatzeko justifika daiteke hurrengo prozedura. Izan bitez $u_{i,k}^{(2h)}$ soluzio hurbildua $2h$ urratsean eta $u_{i,k}^{(h)}$ soluzio hurbildua h urratsean, $E_h(x, y) = u_{i,k}^{(h)}$ soluzioaren errorea izanik. Orduan,

$$E_h(x, y) \approx \frac{1}{3} \left(u_{i,k}^{(2h)} - u_{i,k}^{(h)} \right)$$

berdintza hurbildua beteko da sareetako korapilo amankomunetan. h urratserako soluzio hurbilduaren errorea behin determinatu eta gero $2h$ kasurako bilatu behar da soluzioa. Soluzio hurbildu horien arteko diferentziaren herena da h urratserako soluzioaren errorearen balioztapena. Ohar hau ere zabal daiteke bero-kondukzioaren ekuazioaren diferentzia finituen metodoaren bidezko soluziora.

Ariketak

1. Deduzitu hagaska zilindriko homogeno baten bihurtura-oszilazioen ekuazioa.

Oharra. x abzisako hagaskaren sekzioko bihurtura-momentua $M = GI \frac{\partial \theta}{\partial x}$ formulaz lortzen da, non $\theta(x, t)$ x abzisako sekzioaren bihurtura-angelua t aldiunean bait da; G desplazamenduaren modulua; I hagaskaren zeharkako sekzioaren inerti momentu polarra bait da.

Emaitza: $\frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2}$, non $a^2 = \frac{GI}{k}$; k hagaskaren unitate-luzeraren inerti momentua bait da.

2. Bilatu $\frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2}$ ekuazioaren soluzioa ondoko baldintzen menpe:

$$\theta(0, t) = 0, \quad \theta(l, t) = 0, \quad \theta(x, 0) = \varphi(x), \quad \frac{\partial \theta(x, 0)}{\partial t} = 0,$$

$$\text{non} \quad \varphi(x) = \frac{2\theta_0 x}{l} \quad 0 \leq x \leq \frac{l}{2} \quad \text{denean,}$$

$$\varphi(x) = -\frac{2\theta_0 x}{l} + 2\theta_0 \quad \frac{l}{2} \leq x \leq l \quad \text{denean.}$$

Eman problemaren adierazpen mekanikoa.

$$\text{Em.: } \theta(x, t) = \frac{8\theta_0}{\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^2} \sin \frac{(2k+1)\pi x}{l} \cos \frac{(2k+1)\pi at}{l}.$$

3. Deduzitu hagaska zilindriko homogeno baten luzetarako oszilazioen ekuazioa.

Oharra: Baldin $u(x, t)$ hagaskaren x abzisako sekzioaren desplazamendua, t

aldiunean, bada T hedadura-tentsioa, x sekzioan, $T = ES \frac{\partial u}{\partial x}$ formulak determinatuko

du, non E materialaren elastizitatearen modulua; S hagaskaren zeharkako sekzioaren azalera bait da.

$$\text{Em.: } \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad \text{non} \quad a^2 = \frac{E}{\rho}; \quad \rho \text{ hagaskaren materialaren dentsitatea bait da.}$$

4. $2l$ luzerako hagaska homogeno bat, bere muturretan aplikatutako indar batzuk eraginda, 2λ magnitudean laburtu egin da. $t=0$ denean kanpo-indarren eragina eteten da. Determinatu t aldiunean x abzisako hagaskaren sekzioaren $u(x, t)$ desplazamendua (hagaskaren ardatzeko erdiguneak $x=0$ abzisa dauka).

$$\text{Em.: } u(x, t) = \frac{8\lambda}{\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(2k+1)^2} \sin \frac{(2k+1)\pi x}{2l} \cos \frac{(2k+1)\pi at}{2l}.$$

5. l luzerako hagaska baten mutur bat finkoa da; bestearen gainean P hedadura-indarrak eragiten du. Bilatu hagaskaren luzetarako oszilazioak, $t=0$ denerako P indarraren eragina eteten bada.

$$\text{Em.: } \frac{8Pl}{ES\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2} \sin \frac{(2n+1)\pi x}{2l} \cos \frac{(2n+1)\pi at}{2l}$$

(E eta S -ren esanahiak 3. ariketan ikus).

6. Ondorengo baldintzak betezen dituen $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ ekuazioaren soluzioa bilatu:

$$u(0, t) = 0, \quad u(l, t) = A \sin \omega t,$$

$$u(x, 0) = 0, \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = 0.$$

Eman problemaren adierazpen mekanikoa.

$$\text{Em.: } u(x, t) = \frac{A \sin \frac{\omega}{a} x \sin \omega t}{\sin \frac{\omega}{a} l} + \frac{2A\omega a}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\omega^2 - \left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2} \sin \frac{n\pi a t}{l} \sin \frac{n\pi x}{l}.$$

Oharra. Bilatu soluzioa bi soluzioren arteko batura bezala: $u = v + w$, non

$$w = \frac{A \sin \frac{\omega}{a} x \sin \omega t}{\sin \frac{\omega}{a} l},$$

$$v(0, t) = 0, \quad v(l, t) = 0,$$

$$v(x, 0) = -w(x, 0), \quad \frac{\partial v(x, 0)}{\partial t} = -\frac{\partial w(x, 0)}{\partial t}$$

baldintzak betetzen dituen soluzioa bait da. ($\sin \frac{\omega}{a} l \neq 0$ suposatzen da).

7. Bilatu hurrengo baldintzak betetzen dituen $\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ ekuazioaren soluzioa:

$$u(0, t) = 0, \quad u(l, t) = 0, \quad t > 0,$$

$$u(x, 0) = \begin{cases} x & 0 \leq x \leq \frac{l}{2} \\ l - x & \frac{l}{2} \leq x \leq l \end{cases} \quad \text{denean.}$$

$$\text{Em.: } h(x, t) = \frac{4l}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2} e^{-\frac{(2n+1)^2 \pi^2 a^2 t}{l^2}} \sin \frac{(2n+1)\pi x}{l}.$$

Oharra: Ebatzi problema aldagai-banaketaren metodoaren bidez.

8. Bilatu $\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ ekuazioaren soluzioa, $u(0, t) = u(0, l) = 0$, $u(x, 0) = \frac{x(l-x)}{l^2}$ baldintzen menpe.

$$\text{Em.: } u(x, t) = \frac{8}{\pi^3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^3} e^{-\frac{(2n+1)^2 \pi^2 a^2 t}{l^2}} \sin \frac{(2n+1)\pi x}{l}.$$

9. Bilatu $\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=0} = 0$, $u(l, t) = u_0$, $u(x, 0) = \varphi(x)$ baldintzak betetzen dituen

$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ ekuazioaren soluzioa. Eman problemaren adierazpen fisikoa.

$$\text{Em.: } u(x, t) = u_0 + \sum_{n=0}^{\infty} A_n e^{-a^2 \lambda_n^2 t} \cos \frac{(2n+1)\pi}{2l} x, \text{ non}$$

$$A_n = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(x) \cos \frac{(2n+1)\pi x}{2l} dx - \frac{(-1)^n 4u_0}{\pi(2n+1)}.$$

Oharra. Bilatu soluzioa $u = u_0 + v(x, t)$ eran.

10. Aurkitu $\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ ekuazioaren soluzioa,

$$u(0, t) = 0, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=l} = -Hu|_{x=l}, \quad u(x, 0) = \varphi(x)$$

baldintzak kontutan hartuz. Eman problemaren adierazpen fisikoa.

$$\text{Em.: } u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \frac{p^2 + \mu_n^2}{p(p+1) + \mu_n^2} e^{-\frac{\mu_n^2 a^2 t}{l^2}} \sin \frac{\mu_n x}{l}, \text{ non}$$

$$A_n = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(x) \sin \frac{\mu_n x}{l} dx; \quad p = Hl; \quad \mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n,$$

$\tan \mu = \frac{-\mu}{p}$ ekuazioaren erro positiboak bait dira.

Oharra. Hagaskaren muturrean, $x=l$ denerako, bero-trukaketa badago ingurugiroarekin, bere tenperatura zero delarik.

11. Aurkitu (§ 6ko (10) formularen arabera $h=0,2$ eginez) $\frac{\partial u}{\partial t} = 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ ekuazioaren soluzio hurbildua,

$$u(x,0) = x\left(\frac{3}{2} - x\right), \quad u(0,t) = 0, \quad u(1,t) = \frac{1}{2}, \quad 0 \leq t \leq 4l$$

baldintzak betetzen dituen.

12. Aurkitu $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ Laplace-ren ekuazioaren soluzioa, $0 \leq x \leq a$, $0 \leq y < \infty$ eremuan,

$$u(0,y) = 0, \quad u(a,y) = 0, \quad u(x,0) = A\left(1 - \frac{x}{a}\right), \quad u(x,\infty) = 0$$

baldintzen menpe.

$$\text{Em.: } u(x,y) = \frac{2A}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} e^{-\frac{n\pi}{a}y} \sin \frac{n\pi x}{a}.$$

Oharra. Bilatu soluzioa aldagai-banaketaren metodoaren bidez.

13. Bila ezazu, $0 \leq x \leq a$, $0 \leq y < b$ eremuan,

$$u(x,0) = 0, \quad u(x,b) = 0, \quad u(0,y) = Ay(b-y), \quad u(a,y) = 0$$

baldintzak betetzen dituen $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ Laplace-ren ekuazioaren soluzioa.

$$\text{Em.: } u(x,y) = \frac{8Ab^2}{\pi^3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sinh \frac{(2n+1)\pi(a-x)}{b}}{(2n+1)^3} \frac{\sin \frac{(2n+1)\pi y}{b}}{\sinh \frac{(2n+1)\pi a}{b}}.$$

14. Bilatu $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ ekuazioaren soluzioa, $x^2 + y^2 = R_1^2$, $x^2 + y^2 = R_2^2$

zirkunferentziek mugatutako eraztunaren barnealdean eta

$$\left. \frac{\partial u}{\partial r} \right|_{r=R_1} = + \frac{Q}{\lambda 2\pi R_1}, \quad u|_{r=R_2} = u_2$$

baldintzen menpe. Eman problemaren adierazpen hidrodinamikoa.

Oharra. Ebatzi problema koordenatu polarretan.

$$\text{Em.: } u = u_2 - \frac{Q}{2\lambda\pi} \ln \frac{R_2}{r}.$$

15. $u(x, y) = e^{-y} \sin x$ funtzioa

$$u(0, y) = 0, \quad u(1, y) = e^{-y} \sin 1, \quad u(x, 0) = \sin x, \quad u(x, 1) = e^{-1} \sin x$$

baldintzak betetzen dituen $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ ekuazioaren soluzioa da $0 \leq x \leq 1$,

$0 \leq y \leq 1$ karratuan.

12-15 ariketetan, ebatzi Laplace-ren ekuazioak, emandako mugalde-baldintzetarako, diferentzia finituen metodoaren bidez, $h = 0,25$ denean. Alderatu soluzio hurbildua zehatzarekin.

XIX. GAIA

ERAGILE-KALKULUA ETA ZENBAIT APLIKAZIO

Gaur egun, eragile-kalkulua analisi matematikoaren zati inportanteenetako bat da. Eragile-kalkuluaren metodoak fisika, mekanika, elektroteknia eta beste zientzietan erabiltzen dira zenbait problemaren ebazpenetan. Eragile-kalkuluak erabilpen bereziki zabala aurkitu du automatika eta telematikan. Gai honetan (aurreko gaietako materialean onarrituz) eragile-kalkuluaren kontzeptu nagusiak eta ekuazio diferentzial arrunten ebazpenerako eragile-metodoak emango ditugu.

§ 1. Hasierako funtzioa eta bere transformazioa (irudia)

Izan bedi t aldagai errealeko funtzio bat, $t \geq 0$ balioetarako definitua (batzutan $f(t)$ funtzioa $-\infty < t < \infty$ tartean definiturik dagoela kontsideratuko dugu, baina $f(t) = 0$ $t < 0$ denean). Demagun $f(t)$ zatika jarraia dela, hau da, funtzioak tarte finitu orotan lehen mailako etengunen kopuru finitua daukala (ikus II. gaiko § 9). $0 \leq t < \infty$ tarte infinituan, zenbait integralen existentzia ziurtatzeko, ezar diezaiogun $f(t)$ funtzioari beste baldintza bat gehiago: demagun M eta s_0 zenbaki positiboak existitzen direla, non

$$|f(t)| < Me^{s_0 t} \quad (1)$$

bait da, $0 \leq t < \infty$ tarteko t -ren balio orotarako.

Kontsidera dezagun $f(t)$ funtzioaren eta t aldagai errealeko¹⁾ e^{-pt} funtzio konplexuaren arteko biderkadura,

$$p = a + ib \quad (a > 0)$$

zenbaki konplexua izanik,

$$e^{-pt} f(t). \quad (2)$$

1) Aldagai errealeko funtzio konplexuetaz ikus VII. gaiko § 4.

(2) funtzioa ere t aldagai errealeko funtzio konplexua da:

$$e^{-pt} f(t) = e^{-(a+ib)t} f(t) = e^{-at} f(t) e^{-ibt} = e^{-at} f(t) \cos bt - i e^{-at} f(t) \sin bt.$$

Kontsidera dezagun orain

$$\int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt = \int_0^{\infty} e^{-at} f(t) \cos bt dt - i \int_0^{\infty} e^{-at} f(t) \sin bt dt \quad (3)$$

integral inpropioa. Froga dezagun $f(t)$ funtzioak (1) baldintza betetzen badu eta $a > s_0$ (3) berdintzaren bigarren ataleko integralak existitu eta integralen konbergentzia absolutua dela. Lehenengo eta behin, borna dezagun, lehenengo integrala:

$$\begin{aligned} \left| \int_0^{\infty} e^{-at} f(t) \cos bt dt \right| &\leq \int_0^{\infty} |e^{-at} f(t) \cos bt| dt < \\ &< M \int_0^{\infty} e^{-at} e^{s_0 t} dt < M \int_0^{\infty} e^{-(a-s_0)t} dt = \frac{M}{a-s_0} \end{aligned}$$

Antzeko eran ere bornatzen da bigarren integrala. Hortaz,

$$\int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt$$

integrala existitzen da. Horrek p -ren funtzio bat definitzen du, $F(p)$ izendatuko duguna²⁾:

$$F(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt \quad (4)$$

$F(p)$ funtzioa Laplace-ren transformatu edo L transformatu, edo $f(t)$ funtzioaren irudi soilik deitzen da. $f(t)$ funtzioari hasierako funtzio edo jatorri deitzen zaio. $F(p)$ $f(t)$ funtzioaren irudia bada,

$$F(p) \xrightarrow{\cdot} f(t), \quad (5)$$

2) $F(p)$ funtzioa, $p \neq 0$ denean, aldagai konplexuko funtzioa da.

edo

$$f(t) \stackrel{\leftarrow}{\leftarrow} F(p), \quad (6)$$

edo

$$L\{f(t)\} = F(p) \quad (7)$$

idazten da.

Ikusiko dugun legez, transformatuak sartzearen arrazoia, bere laguntzarekin, problema ugariren soluzioak sinplifikatzea lortzean datza, esate baterako, ekuazio diferentzialen ebazpena eragiketa algebrako sinpleetara laburtzea. Irudia ezagutuz jatorria bila daiteke, nola aldeaz aurretik osatutako "jatorri-irudi" taulen bitartez, hala jarraian azalduko diren metodoen bitartez. Hala ere, hurrengo galdekizunak sortzen dira.

Izan bedi $F(p)$ funtzioa. Existitzen al da, ala ez, $f(t)$ funtzio bat, zeinaren irudia $F(p)$ bait da?. Existituz gero funtzio hori bakarra al da? $F(p)$ eta $f(t)$ -ri buruzko hipotesi batzuen menpe, bi galderei eman dakieke baiezkotzea. Esaterako, irudiaren bakartasuna frogatu gabe enuntziatzen dugun hurrengo teoremaren bidez ezartzen da.

Bakartasun-teorema. $\varphi(t)$ eta $\Psi(t)$ bi funtzio jarraiek L transformatu berbera badaukate, $F(p)$, bi funtzio horiek zeharo berdinak dira.

Teorema horrek hemendik aurrera paper garrantzitsua beteko du. Izan ere, problema praktikoa bat ebaztean, modu batean, funtzio ezezagunaren irudia determinatu badugu eta gero, irudi horren arabera hasierako funtzioa aurkitu badugu, aipatutako teoreman oinarrituz ondorioztatuko dugu aurkitutako funtzioa planteatutako problemaren soluzioa dela eta ez dagoela beste soluziorik.

§ 2. $\sigma_0(t)$, $\sin t$, $\cos t$ funtzioen irudiak

I. Honela definitutako $f(t)$ funtzioa *Heaviside-ren unitate funtzio* deitzen da eta $\sigma_0(t)$ idatzi:

$$\begin{aligned} f(t) &= 1 & t \geq 0 & \text{denean,} \\ f(t) &= 0 & t < 0 & \text{denean.} \end{aligned}$$

Funtzio honen grafikoa 379. irudian dago adierazita. Bila dezagun Heaviside-ren funtzioaren L irudia:

$$L\{\sigma_0(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-pt} dt = -\frac{e^{-pt}}{p} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{p}.$$

Beraz³⁾,

$$1 \leftarrow \frac{1}{p} \quad (1)$$

edo, zehatzago,

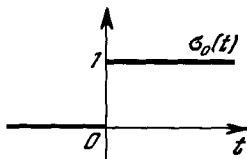
$$\sigma_0(t) \leftarrow \frac{1}{p}.$$

Eragile-kalkuluen tratatu batzuetan,

$$F^*(p) = p \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt$$

adierazpenari $f(t)$ funtzioaren irudi deitzen zaio

Halako definizioarekin $\sigma_0(t) \leftarrow 1$ daukagu eta, ondorioz, $C \leftarrow C$, edo, zehatzago, $C\sigma_0(t) \leftarrow C$.



379. IRUDIA

-
- 3) $\int_0^{\infty} e^{pt} dt$ integrala kalkulatzean, funtzio errealeen integralen arteko batura bezala adieraz daiteke, emaitza berbera lortuko dugu. Ohar hau hurrengo bi integralei ere dagokie.

II. Izan bedi $f(t) = \sin t$; orduan,

$$L\{\sin t\} = \int_0^{\infty} e^{-pt} \sin t \, dt = \frac{e^{-pt}(-p \sin t - \cos t)}{p^2 + 1} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{p^2 + 1}.$$

Hortaz,

$$\sin t \stackrel{L}{\longleftrightarrow} \frac{1}{p^2 + 1}. \quad (2)$$

III. Izan bedi $f(t) = \cos t$; orduan,

$$L\{\cos t\} = \int_0^{\infty} e^{-pt} \cos t \, dt = \frac{e^{-pt}(\sin t - p \cos t)}{p^2 + 1} \Big|_0^{\infty} = \frac{p}{p^2 + 1}.$$

Beraz,

$$\cos t \stackrel{L}{\longleftrightarrow} \frac{p}{p^2 + 1}. \quad (3)$$

§ 3. Aldagai independentearen eskala aldatuta daukan funtzioaren irudia. $\sin at$, $\cos at$ funtzioen irudia

Kontsidera dezagun $f(at)$ funtzioaren irudia, $a > 0$ izanik:

$$L\{f(at)\} = \int_0^{\infty} e^{-pt} f(at) \, dt.$$

Azkeneko integralean alda dezagun aldagaia, $z = at$ eginez; ondorioz, $dz = a \, dt$; orduan,

$$L\{f(at)\} = \frac{1}{a} \int_0^{\infty} e^{-\frac{p}{a}z} f(z) \, dz$$

edo

$$L\{f(at)\} = \frac{1}{a} F\left(\frac{p}{a}\right)$$

daukagu.

Honela, baldin

$$F(p) \rightarrow f(t)$$

bada,

$$\frac{1}{a} F\left(\frac{p}{a}\right) \rightarrow f(at) \quad (1)$$

izango da.

1. Adibidea. § 2 (2) formulatik, (1)-ren arabera, zuzenean

$$\sin at \leftarrow \frac{1}{a} \frac{1}{\left(\frac{p}{a}\right)^2 + 1}$$

edo

$$\sin at \leftarrow \frac{a}{p^2 + a^2} \quad (2)$$

lortzen dugu.

2. Adibidea. § 2 (3) formulatik, (1)-ren arabera,

$$\cos at \leftarrow \frac{1}{a} \frac{\frac{p}{a}}{\left(\frac{p}{a}\right)^2 + 1}$$

edo

$$\cos at \leftarrow \frac{p}{p^2 + a^2} \quad (3)$$

daukagu.

§ 4. Irudiaren linealtasunaren propietatea

Teorema. Konstantez biderkatutako zenbait funtzioen arteko baturaren irudia funtzio horien irudien arteko baturaren berdina da, dagozkien konstantez biderkatutik, hau da,

$$f(t) = \sum_{i=1}^n C_i f_i(t) \quad (1)$$

bada (C_i konstanteak dira) eta

$$F(p) \rightarrow f(t), \quad F_i(p) \rightarrow f_i(t)$$

badira,

$$F(p) = \sum_{i=1}^n C_i F_i(p) \quad (1')$$

izango da.

Frogapena. (1) berdintzako gai guztiak e^{-pt} faktorez biderkatuz eta t -rekiko, 0 eta ∞ mugen artean integratuz (C_i faktoreak integralpetik ateraz) (1') berdintza lortzen dugu.

1. Adibidea. Bilatu

$$f(t) = 3 \sin 4t - 2 \cos 5t$$

funtzioaren irudia.

Ebazpena. § 3 (2), (3) eta § 4 (1') formulen arabera,

$$L\{f(t)\} = 3 \frac{4}{p^2 + 16} - 2 \frac{p}{p^2 + 25} = \frac{12}{p^2 + 16} - \frac{2p}{p^2 + 25}$$

lortzen dugu.

2. Adibidea. Bilatu hasierako funtzioa, zeinaren irudia

$$F(p) = \frac{5}{p^2 + 4} + \frac{20p}{p^2 + 9}$$

formularen bidez adierazten den.

Ebazpena. $F(p)$ ondoko eran interpretatzen dugu:

$$F(p) = \frac{5}{2} \frac{2}{p^2 + (2)^2} + 20 \frac{p}{p^2 + (3)^2}.$$

Hortaz, § 3 (2), (3) eta § 4 (1') formulen arabera,

$$f(t) = \frac{5}{2} \sin 2t + 20 \cos 3t$$

erdiesten dugu. Bakartasun-teorematik, § 1, ondorioztatzen da hori emandako $F(p)$ -ri dagokion hasierako funtzio bakarra dela.

§ 5. Desplazamenduaren teorema

Teorema. $f(t)$ funtzioaren irudia $F(p)$ bada, $e^{-\alpha t} f(t)$ funtzioaren irudia $F(p + \alpha)$ izango da, hau da,

$$F(p) \xrightarrow{\cdot} f(t)$$

bada

$$F(p + \alpha) \xrightarrow{\cdot} e^{-\alpha t} f(t) \quad (1)$$

izango da. (Hor, $Re(p + \alpha) > s_0$ dela suposatzen da).

Frogapena. Aurki dezagun $e^{-\alpha t} f(t)$ funtzioaren irudia:

$$L\{e^{-\alpha t} f(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-pt - \alpha t} f(t) dt = \int_0^{\infty} e^{-(p+\alpha)t} f(t) dt.$$

Honela,

$$L\{e^{-\alpha t} f(t)\} = F(p + \alpha)$$

da.

Frogatutako teorema uzten digu hasierako funtzioa erraz bila dakiekeen irudien familia zabaltzen.

**§ 6. $e^{-\alpha t}$, $\sinh \alpha t$, $\cosh \alpha t$, $e^{-\alpha t} \sinh at$, $e^{-\alpha t} \cosh at$
funtzioen irudiak**

§ 2 (1) formulatik, § 5 (1) formularen arabera, zuzenean

$$\frac{1}{p + \alpha} \xrightarrow{\cdot} e^{-\alpha t} \quad (1)$$

ondorioztatzen da. Analogoki,

$$\frac{1}{p - \alpha} \xrightarrow{\cdot} e^{\alpha t}. \quad (1')$$

Bion arteko kendura 2-z zatituz,

$$\frac{1}{2} \left(\frac{1}{p - \alpha} - \frac{1}{p + \alpha} \right) \xrightarrow{\cdot} \frac{1}{2} (e^{\alpha t} - e^{-\alpha t})$$

edo

$$\frac{\alpha}{p^2 - \alpha^2} \xrightarrow{\cdot} \sinh \alpha t \quad (2)$$

erdiesten dugu. Antzeko eran, (1) eta (1') batuz,

$$\frac{p}{p^2 - \alpha^2} \xrightarrow{\cdot} \cosh \alpha t \quad (3)$$

lortzen dugu. § 5 (1) formularen arabera, § 3 (2) formulatik

$$\frac{a}{(p + \alpha)^2 + a^2} \xrightarrow{\cdot} e^{-\alpha t} \sin at \quad (4)$$

ateratzen da. § 5 (1) formularen arabera, § 3 (3) formulatik

$$\frac{p + \alpha}{(p + \alpha)^2 + a^2} \xrightarrow{\cdot} e^{-\alpha t} \cos at \quad (5)$$

ateratzen da.

1. Adibidea. Bilatu

$$F(p) = \frac{7}{p^2 + 10p + 41}$$

irudia daukan hasierako funtzioa.

Ebazpena. Alda dezagun $F(p)$ (4) formularen lehenengo ataleko adierazpenaren antzera:

$$\frac{7}{p^2 + 10p + 41} = \frac{7}{(p+5)^2 + 16} = \frac{7}{4} \frac{4}{(p+5)^2 + 4^2}.$$

Hortaz,

$$F(p) = \frac{7}{4} \frac{4}{(p+5)^2 + 4^2}.$$

Ondorioz, (4) formularen arabera,

$$F(p) \rightarrow \frac{7}{4} e^{-5t} \sin 4t$$

daukagu.

2. Adibidea. Bilatu

$$F(p) = \frac{p+3}{p^2 + 2p + 10}$$

irudia daukan hasierako funtzioa.

Ebazpena. Alda dezagun $F(p)$ funtzioa:

$$\begin{aligned} \frac{p+3}{p^2 + 2p + 10} &= \frac{(p+1)+2}{(p+1)^2 + 9} = \frac{p+1}{(p+1)^2 + 3^2} + \\ &+ \frac{2}{(p+1)^2 + 3^2} = \frac{p+1}{(p+1)^2 + 3^2} + \frac{2}{3} \frac{3}{(p+1)^2 + 3^2}. \end{aligned}$$

(4) eta (5) formulak erabiliz,

$$F(p) \rightarrow e^{-t} \cos 3t + \frac{2}{3} e^{-t} \sin 3t$$

hasierako funtzioa aurkitzen dugu.

§ 7. Irudiaren deribazioa

Teorema.

$$F(p) \xrightarrow{\cdot} f(t)$$

bada,

$$(-1)^n \frac{d^n}{dp^n} F(p) \xrightarrow{\cdot} t^n f(t) \quad (1)$$

izango da.

Frogapena. Lehendabizi frogatu dezagun $f(t)$ funtzioak § 1 (1) baldintza betetzen badu

$$\int_0^{\infty} e^{-pt} (-t)^n f(t) dt \quad (2)$$

integrala existitzen dela.

Baldintzaren arabera,

$$|f(t)| < M e^{s_0 t}, \quad p = a + ib, \quad a > s_0$$

dugu; horrekin, $a > 0$, $s_0 > 0$. Bistakoa da, $a < s_0 + \varepsilon$ desberdintza beteko duen $\varepsilon > 0$ existitzen dela. § 1.ean bezala

$$\int_0^{\infty} e^{-(p-\varepsilon)t} |f(t)| dt$$

integrala existitzen dela frogatzen da. Borna dezagun orain (2) integrala:

$$\int_0^{\infty} \left| e^{-pt} t^n f(t) \right| dt = \int_0^{\infty} \left| e^{-(p-\varepsilon)t} e^{-\varepsilon t} t^n f(t) \right| dt.$$

$e^{-\varepsilon t} t^n$ funtzioa bornatua dagoenez eta bere balio absolutua N zenbaki bat baino txikiagoa denez, $t > 0$ edozein baliotarako,

$$\int_0^{\infty} \left| e^{-pt} t^n f(t) \right| dt < N \int_0^{\infty} \left| e^{-(p-\varepsilon)t} f(t) \right| dt = N \int_0^{\infty} e^{-(p-\varepsilon)t} |f(t)| dt < \infty$$

idatz dezakegu. Honela, (2) integrala existitzen dela frogaturik dago. Orain integral hori

$$\int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt$$

integralaren p parametroarekiko⁴⁾ n . ordenako deribatu bezala kontsidera dezakegu.

$$F(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt$$

denez gero,

$$\int_0^{\infty} e^{-pt} (-t)^n f(t) dt = \frac{d^n}{dp^n} \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt$$

formula erdiezten dugu. Bi berdintza horietatik

$$(-1)^n \frac{d^n}{dp^n} F(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} t^n f(t) dt$$

lortzen dugu, hots, (1) formula.

Aplika dezagun (2) formula funtzio potentzialaren irudia bilatzeko. Idatz dezagun § 2 (1) formula:

$$\frac{1}{p} \dot{\rightarrow} 1.$$

Formula horretatik, (1) formularen arabera,

$$(-1) \frac{d}{dp} \left(\frac{1}{p} \right) \dot{\rightarrow} t$$

4) Lehenago integral mugatu baten parametro erreal batekiko deribazio-formula determinatu dugu (ikus, XI. gaiko § 10). Hemen parametroa zenbaki konplexua da, hala ere deribazio-formulak balio izaten segitzen du.

edo

$$\frac{1}{p^2} \rightarrow t$$

lortzen dugu.

Antzeko eran,

$$\frac{2}{p^3} \rightarrow t^2.$$

Eta edozein n -tarako,

$$\frac{n!}{p^{n+1}} \rightarrow t^n \quad (3)$$

daukagu.

1. Adibidea. § 3 (2) formulatik

$$\frac{a}{p^2 + a^2} = \int_0^{\infty} e^{-pt} \sin at \, dt,$$

bi atalak p parametroarekiko deribatuz,

$$\frac{2pa}{(p^2 + a^2)^2} \rightarrow t \sin at \quad (4)$$

lortzen dugu.

2. Adibidea. § 3 (3) formulatik, (1) formularen arabera,

$$-\frac{a^2 - p^2}{(p^2 + a^2)^2} \rightarrow t \cos at \quad (5)$$

ateratzen dugu.

3. Adibidea. § 7 (1) eta § 6 (1) formulen arabera,

$$\frac{1}{(p + \alpha)^2} \rightarrow te^{-\alpha t} \quad (6)$$

daukagu.

§ 8. Deribatuen irudia

Teorema.

$$F(p) \xrightarrow{\cdot} f(t)$$

bada,

$$pF(p) - f(0) \xrightarrow{\cdot} f'(t) \quad (1)$$

izango da.

Frogapena. Irudiaren definizioan oinarriturik,

$$L\{f'(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-pt} f'(t) dt \quad (2)$$

idatz dezakegu. Demagun $f'(t), f''(t), \dots, f^{(n)}(t)$ deribatu guztiek § 1 (1) baldintza betetzen dutela, hortaz (2) integrala existitzen da, hala nola hurrengo deribatuen integralak. (2) berdintzaren bigarren ataleko integrala zatika kalkulatu,

$$L\{f'(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-pt} f'(t) dt = e^{-pt} f(t) \Big|_0^{\infty} + p \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt$$

aurkitzen dugu, baina, § 1 (1) hipotesiaren arabera,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-pt} f(t) = 0$$

eta

$$\int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt = F(p)$$

dira. Horregatik,

$$L\{f'(t)\} = -f(0) + pF(p).$$

Teorema, beraz, frogaturik dago. Azter ditzagun orain edozein ordenatako deribatuen irudiak. (1) formularen $F(p)$, $pF(p) - f(0)$ adierazpenaz eta $f(t)$, $f'(t)$ adierazpenaz ordezkatzuz,

$$p[pF(p) - f(0)] - f'(0) \dot{\rightarrow} f''(t)$$

lortzen dugu edo, eraginez,

$$p^2 F(p) - pf(0) - f'(0) \dot{\rightarrow} f'''(t). \quad (3)$$

n . ordenako deribatuaren irudia

$$p^n F(p) - [p^{n-1} f(0) + p^{n-2} f'(0) + \dots + p f^{(n-2)}(0) + f^{(n-1)}(0)] \dot{\rightarrow} f^{(n)}(t) \quad (4)$$

izango da.

Oharra. (1), (3), (4) formulak laburtuko dira

$$f(0) = f'(0) = \dots = f^{(n-1)}(0) = 0$$

badira. Kasu horretan,

$$\begin{aligned} F(p) &\dot{\rightarrow} f(t), \\ pF(p) &\dot{\rightarrow} f'(t), \\ &\dots\dots\dots \\ p^n F(p) &\dot{\rightarrow} f^{(n)}(t) \end{aligned}$$

erdiesten dugu.

§ 9. Zenbait irudiren taula

Lortutako irudien erabilera erosorako bil ditzagun taula batean.

1. Taula

Zenbakia	$F(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt$	$f(t)$
1	$\frac{1}{p}$	1
2	$\frac{a}{p^2 + a^2}$	$\sin at$
3	$\frac{p}{p^2 + a^2}$	$\cos at$
4	$\frac{1}{p + \alpha}$	$e^{-\alpha t}$
5	$\frac{\alpha}{p^2 - \alpha^2}$	$\sinh \alpha t$
6	$\frac{p}{p^2 - \alpha^2}$	$\cosh \alpha t$
7	$\frac{a}{(p + \alpha)^2 + a^2}$	$e^{-\alpha t} \sin at$
8	$\frac{p + \alpha}{(p + \alpha)^2 + a^2}$	$e^{-\alpha t} \cos at$
9	$\frac{n!}{p^{n+1}}$	t^n
10	$\frac{2pa}{(p^2 + a^2)^2}$	$t \sin at$
11	$-\frac{a^2 - p^2}{(p^2 + a^2)^2}$	$t \cos at$
12	$\frac{1}{(p + \alpha)^2}$	$te^{-\alpha t}$
13	$\frac{1}{(p^2 + a^2)^2}$	$\frac{1}{2a^2} (\sin at - at \cos at)$
14	$(-1)^n \frac{d^n}{dp^n} F(p)$	$t^n f(t)$
15	$F_1(p) F_2(p)$	$\int_0^t f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau.$

Oharra. Taula honetako (13) eta (15) formulak gero lortuko ditugu.

Oharra. $f(t)$ funtzioaren iruditzat

$$F^*(p) = p \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt$$

hartzen badugu, taulako 1-13 formuletan, lehenengo zutabean dauden adierazpenak p faktoreaz biderkatu behar dira. 14 eta 15 formulek ondoko itxura hartzen dute. $F^*(p) = p F(p)$ denez gero, 14 formularen lehenengo atalean $F(p)$

$$\frac{F^*(p)}{p}$$

adierazpenaz ordezkatzuz eta p -z biderkatuz,

$$14' \quad (-1)^n p \frac{d^n}{dp^n} \left(\frac{F^*(p)}{p} \right) \rightarrow t^n f(t)$$

erdiesten dugu. 15 formularen lehenengo atala kontsideratuz,

$$F_1(p) = \frac{F_1^*(p)}{p}, \quad F_2(p) = \frac{F_2^*(p)}{p}$$

eta biderkadura hori p -z biderkatuz,

$$15' \quad \frac{1}{p} F_1^*(p) F_2^*(p) \rightarrow \int_0^t f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau$$

daukagu.

§ 10. Ekuazio laguntzailea emandako ekuazio diferentzialerako

Demagun $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, a_n$ koefiziente konstantedun n . ordenako ekuazio diferentzial lineala daukagula:

$$a_0 \frac{d^n x}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \dots + a_{n-1} \frac{dx}{dt} + a_n x(t) = f(t). \quad (1)$$

Hortaz, horrela determinatutako $\bar{x}(p)$, (2) hastapen-baldintzak betetzen dituen (1) ekuazioaren $x(t)$ soluzioaren irudia da. Orain iruditzen (6) berdintzak determinatutako $\bar{x}(p)$ daukan $x^*(t)$ funtzioa bilatzen badugu, § 1. an formulatutako bakartasun-teoremaren arabera, $x^*(t)$ (2) baldintzak betetzen dituen (1) ekuazioaren soluzioa dela ondorioztatzen da, hots,

$$x^*(t) = x(t).$$

Hastapen-baldintzak nuluak direnerako,

$$x_0 = x_0' = x_0'' = \dots = x_0^{(n-1)} = 0,$$

bilatzen badugu (1) ekuazioaren soluzioa, (6) berdintzan $\Psi_{n-1}(p) = 0$ da eta

$$\bar{x}(p) = \frac{F(p)}{\varphi_n(p)}$$

edo

$$\bar{x}(p) = \frac{F(p)}{a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_n} \quad (6')$$

izango da.

1. Adibidea. Bilatu

$$\frac{dx}{dt} + x = 1$$

ekuazioaren soluzioa, $t=0$ denean $x=0$ baldintza bete dezan.

Ebazpena. Era dezagun ekuazio laguntzailea:

$$\bar{x}(p)(p+1) = 0 + \frac{1}{p} \quad \text{edo} \quad \bar{x}(p) = \frac{1}{(p+1)p}.$$

Bigarren ataleko zatikia zatiki sinpletan deskonposatuz,

$$\bar{x}(p) = \frac{1}{p} - \frac{1}{p+1}$$

lortzen dugu. 1. taulako 1 eta 4 formulak erabiliz,

$$x(t) = 1 - e^{-t}$$

soluzioa aurkitzen dugu.

2. Adibidea. Bilatu $t = 0$ denean $x_0 = x'_0 = 0$ hastapen-baldintzak betetzen dituen

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 9x = 1$$

ekuazioaren soluzioa.

Ebazpena. Idatz dezagun (4') ekuazio laguntzailea:

$$\bar{x}(p)(p^2 + 9) = \frac{1}{p} \quad \text{edo} \quad \bar{x}(p) = \frac{1}{p(p^2 + 9)}.$$

Zatiki hori dagozkion zatiki sinpleetan deskonposatuz,

$$\bar{x}(p) = \frac{-\frac{1}{9}p}{p^2 + 9} + \frac{1}{9p}$$

daukagu. 1. taulako 1 eta 3 formuletan oinarrituz aurkitzen dugu soluzioa:

$$x(t) = -\frac{1}{9} \cos 3t + \frac{1}{9}.$$

3. Adibidea. Bilatu $t = 0$ denean $x_0 = x'_0 = 0$ hastapen-baldintzak betetzen dituen

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 3\frac{dx}{dt} + 2x = t$$

ekuazioaren soluzioa.

Ebazpena. Idatz dezagun (4') ekuazio laguntzailea:

$$\bar{x}(p)(p^2 + 3p + 2) = \frac{1}{p^2} \quad \text{edo} \quad \bar{x}(p) = \frac{1}{p^2} \frac{1}{(p^2 + 3p + 2)} = \frac{1}{p^2(p+1)(p+2)}.$$

Zatiki hori zatiki sinpletan koefiziente determinatugabeen metodoaren bidez deskonposatuz,

$$\bar{x}(p) = \frac{1}{2} \frac{1}{p^2} - \frac{3}{4} \frac{1}{p} + \frac{1}{p+1} - \frac{1}{4(p+2)}$$

ateratzen dugu. 1. taulako 9, 1 eta 4 formulen arabera,

$$x(t) = \frac{1}{2}t - \frac{3}{4} + e^{-t} - \frac{1}{4}e^{-2t}$$

soluzioa lortzen dugu.

4. Adibidea. Bilatu $t=0$ denean $x_0=1$, $x'_0=2$, baldintzak betetzen dituen

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\frac{dx}{dt} + 5x = \sin t$$

ekuazioaren soluzioa.

Ebazpena. Idatz dezagun (4') ekuazio laguntzailea:

$$\bar{x}(p)(p^2 + 2p + 5) = p \cdot 1 + 2 + 2 \cdot 1 + L\{\sin t\}$$

edo

$$\bar{x}(p)(p^2 + 2p + 5) = p + 4 + \frac{1}{p^2 + 1},$$

nondik $\bar{x}(p)$ aurkitzen bait dugu:

$$\bar{x}(p) = \frac{p+4}{p^2+2p+5} + \frac{1}{(p^2+1)(p^2+2p+5)}.$$

Bigarren ataleko azken zatikia zatiki sinpletan deskonposatuz,

$$\bar{x}(p) = \frac{\frac{11}{10}p+4}{p^2+2p+5} + \frac{-\frac{1}{10}p+\frac{1}{5}}{p^2+1}$$

edo

$$\bar{x}(p) = \frac{11}{10} \cdot \frac{p+1}{(p+1)^2 + 2^2} + \frac{29}{10 \cdot 2} \cdot \frac{2}{(p+1)^2 + 2^2} - \frac{1}{10} \cdot \frac{p}{p^2 + 1} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{p^2 + 1}$$

idatz dezakegu. 1. taulako 8, 7, 3 eta 2 formulen arabera,

$$x(t) = \frac{11}{10} e^{-t} \cos 2t + \frac{29}{20} e^{-t} \sin 2t - \frac{1}{10} \cos t + \frac{1}{5} \sin t$$

soluzioa erdiesten dugu, edo, azkenik,

$$x(t) = e^{-t} \left(\frac{11}{10} \cos 2t + \frac{29}{20} \sin 2t \right) - \frac{1}{10} \cos t + \frac{1}{5} \sin t.$$

§ 11. Deskonposaketa-teorema

Aurreko ataleko (6) formulatik ondorioztatzen da ekuazio diferentzial linealaren soluzioaren irudia bi gaiz osaturik dagoela: lehenengoa p -ren zatiki razional jatorra da; bigarrena zatiki bat da, zeinaren zenbakitzailea ekuazioaren bigarren atalaren $F(p)$ irudia eta izendatzailea $\varphi_n(p)$ polinomioa bait dira. $F(p)$ zatiki razionala bada bigarren gaia ere zatiki razionala izango da. Honela, komenigarria da iruditzat zatiki razional jatorra duen hasierako funtzioa bilatzen jakitea. Azter dezagun problema hori atal honetan. Izan bedi funtzio baten L irudia, p -ren zatiki razional jator bat:

$$\frac{\Psi^{n-1}(p)}{\varphi_n(p)}.$$

Hasierako funtzioa (jatorria) aurkitu behar da. X . gaiko § 7.ean frogatu dugu zatiki razional jator oro lau motako zatiki elementalen batura bezala adieraz daitekeela:

$$I. \frac{A}{p-a};$$

$$II. \frac{A}{(p-a)^k};$$

$$III. \frac{Ap+B}{p^2+a_1p+a_2}, \text{ non izendatzailearen erroak konplexuak bait dira, hau da,}$$

$$\frac{a_1^2}{4} - a_2 < 0;$$

IV. $\frac{Ap+B}{(p^2+a_1p+a_2)^k}$, non $k \geq 2$ eta izendatzailearen erroak konplexuak bait

dira.

Aurki ditzagun idatzitako zatiki elementalei dagozkien hasierako funtzioak.

I. motako zatikirako, 1. taulako 4 formularen arabera,

$$\frac{A}{p-a} \rightarrow Ae^{at}$$

lortzen dugu. II. motako zatikirako, 1. taulako 9 eta 4 formulen arabera,

$$\frac{A}{(p-a)^k} \rightarrow A \frac{1}{(k-1)!} t^{k-1} e^{at} \quad (1)$$

erdiesten dugu. Iker dezagun orain III. motako zatikia. Egin ditzagun hurrengo aldaketak:

$$\begin{aligned} \frac{Ap+B}{p^2+a_1p+a_2} &= \frac{Ap+B}{\left(p+\frac{a_1}{2}\right)^2 + \left(\sqrt{a_2-\frac{a_1^2}{4}}\right)^2} = \frac{A\left(p+\frac{a_1}{2}\right) + \left(B-\frac{Aa_1}{2}\right)}{\left(p+\frac{a_1}{2}\right)^2 + \left(\sqrt{a_2-\frac{a_1^2}{4}}\right)^2} = \\ &= A \frac{p+\frac{a_1}{2}}{\left(p+\frac{a_1}{2}\right)^2 + \left(\sqrt{a_2-\frac{a_1^2}{4}}\right)^2} + \left(B-\frac{Aa_1}{2}\right) \frac{1}{\left(p+\frac{a_1}{2}\right)^2 + \left(\sqrt{a_2-\frac{a_1^2}{4}}\right)^2}. \end{aligned}$$

Hemen lehenengo eta bigarren batugaiak M eta N , hurrenez hurren, izendatuz, 1. taulako 8 eta 7 formulen arabera,

$$M \rightarrow Ae^{-\frac{a_1}{2}t} \cos t \sqrt{a_2-\frac{a_1^2}{4}},$$

$$N \rightarrow \left(B-\frac{Aa_1}{2}\right) \frac{1}{\sqrt{a_2-\frac{a_1^2}{4}}} e^{-\frac{a_1}{2}t} \sin t \sqrt{a_2-\frac{a_1^2}{4}}$$

lortzen dugu. Honela, azkenik,

$$\frac{Ap + B}{p^2 + a_1 p + a_2} \rightarrow e^{-\frac{a_1}{2}t} \left[A \cos t \sqrt{a_2 - \frac{a_1^2}{4}} + \frac{B - \frac{Aa_1}{2}}{\sqrt{a_2 - \frac{a_1^2}{4}}} \sin t \sqrt{a_2 - \frac{a_1^2}{4}} \right] \quad (2)$$

dugu.

Hemen ez dugu aztertuko IV. motako zatiki elementalaren kasua, bere zailtasun handiagoa dela eta. Problema hori zenbait kasutan aztertuko dugu geroago.

§ 12. Ekuazio diferentzial eta ekuazio diferentzialezko sistemen eragile- -metodoaren bidezko ebazpenen adibideak

1. Adibidea. Bilatu $t = 0$ denean $x_0 = 0$, $\dot{x}_0 = 0$ hastapen-baldintzak betetzen dituen

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 4x = \sin 3x$$

ekuazioaren soluzioa.

Ebazpena. Osa dezagun § 10 (4') ekuazio laguntzailea:

$$\bar{x}(p)(p^2 + 4) = \frac{3}{p^2 + 9}, \quad \bar{x}(p) = \frac{3}{(p^2 + 9)(p^2 + 4)}$$

edo

$$\bar{x}(p) = \frac{-\frac{3}{5}}{p^2 + 9} + \frac{\frac{3}{5}}{p^2 + 4} = -\frac{1}{5} \frac{3}{p^2 + 9} + \frac{3}{10} \frac{2}{p^2 + 4},$$

nondik

$$x(t) = \frac{3}{10} \sin 2t - \frac{1}{5} \sin 3t$$

soluzioa erdiesten bait dugu.

2. Adibidea. Aurkitu

$$\frac{d^3 x}{dt^3} + x = 0$$

ekuazioaren soluzioa, $t=0$ denean

$$x_0 = 1, \quad x'_0 = 3, \quad x''_0 = 8$$

hastapen-baldintzak bete ditzan.

Ebazpena. Era dezagun § 10 (4') ekuazio laguntzailea:

$$\bar{x}(p)(p^3 + 1) = p^2 \cdot 1 + p \cdot 3 + 8,$$

hortik

$$\bar{x}(p) = \frac{p^2 + 3p + 8}{p^3 + 1} = \frac{p^2 + 3p + 8}{(p+1)(p^2 - p + 1)}$$

ateratzen dugu. Deskonposa dezagun lortutako zatiki razional zatiki sinpletan:

$$\begin{aligned} \frac{p^2 + 3p + 8}{(p+1)(p^2 - p + 1)} &= \frac{2}{p+1} + \frac{-p+6}{p^2 - p + 1} = 2 \cdot \frac{1}{p+1} - \\ &- \frac{p - \frac{1}{2}}{\left(p - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\sqrt{\frac{3}{4}}\right)^2} + \frac{11}{\sqrt{3}} \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\left(p - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}. \end{aligned}$$

1. taula erabiliz,

$$x(t) = 2e^{-t} + e^{\frac{1}{2}t} \left(-\cos \frac{\sqrt{3}}{2}t + \frac{11}{\sqrt{3}} \sin \frac{\sqrt{3}}{2}t \right)$$

soluzioa lortzen dugu.

3. Adibidea. Bilatu

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + x = t \cos 2t$$

ekuazioaren soluzioa, $t=0$ denean $x_0 = 0$, $\dot{x}_0 = 0$ hastapen-baldintzak betetzen dituen.

Ebazpena. Idatz dezagun § 10 (4') ekuazio laguntzailea:

$$\bar{x}(p)(p^2 + 1) = \frac{1}{p^2 + 4} - \frac{8}{(p^2 + 4)^2},$$

hortik

$$\bar{x}(p) = -\frac{5}{9} \frac{1}{p^2 + 1} + \frac{5}{9} \frac{1}{p^2 + 4} + \frac{8}{3} \frac{1}{(p^2 + 4)^2}.$$

Beraz,

$$x(t) = -\frac{5}{9} \sin t + \frac{5}{18} \sin 2t + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2} \sin 2t - t \cos 2t \right).$$

Nabaria da eragile-metodoaz baliatuz ekuazio diferentzial linealezko sistemak ere ebatz daitezkeela. Ikus dezagun adibide batez.

4. Adibidea. Bilatu $t=0$ denean $x=0$, $y=0$ hastapen-baldintzak betetzen dituen

$$3 \frac{dx}{dt} + 2x + \frac{dy}{dt} = 1, \quad \frac{dx}{dt} + 4 \frac{dy}{dt} + 3y = 0$$

ekuazioen sistemaren soluzioa.

Ebazpena.

$$x(t) \stackrel{\cdot}{\leftarrow} \bar{x}(p), \quad y(t) \stackrel{\cdot}{\leftarrow} \bar{y}(p)$$

idazkeraz baliatuz ekuazio laguntzailezko sistema idatziko dugu:

$$(3p + 2)\bar{x}(p) + p\bar{y}(p) = \frac{1}{p},$$

$$p\bar{x}(p) + (4p + 3)\bar{y}(p) = 0.$$

Sistema hori ebatziz,

$$\bar{x}(p) = \frac{4p+3}{p(p+1)(11p+6)} = \frac{1}{2p} - \frac{1}{5(p+1)} - \frac{1}{10(11p+6)},$$

$$\bar{y}(p) = -\frac{1}{(11p+6)(p+1)} = \frac{1}{5} \left(\frac{1}{p+1} - \frac{11}{11p+6} \right)$$

aurkitzen ditugu.

Irudien arabera hasierako funtzioak, hau da, bilatutako sistemaren soluzioak lortzen ditugu:

$$x(t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{5}e^{-t} - \frac{3}{10}e^{-\frac{6}{11}t}$$

$$y(t) = \frac{1}{5}e^{-t} - e^{-\frac{6}{11}t}.$$

Antzeko eran ebazten dira ordena handiagoko sistema linealak.

§ 13. Konboluzio-teorema

Ekuazio diferentzialak eragile-metodoaren bidez ebaztean, baliagarri izan daiteke ondoko teorema.

Konboluzio-teorema. $F_1(p)$ eta $F_2(p)$, $f_1(t)$ eta $f_2(t)$ funtzioen irudiak badira, hau da,

$$F_1(p) \xrightarrow{\cdot} f_1(t) \quad \text{eta} \quad F_2(p) \xrightarrow{\cdot} f_2(t),$$

$F_1(p)F_2(p)$ izango da

$$\int_0^t f_1(\tau)f_2(t-\tau) d\tau$$

funtzioaren irudia, hau da,

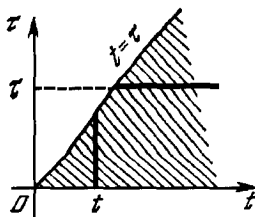
$$F_1(p)F_2(p) \xrightarrow{\cdot} \int_0^t f_1(\tau)f_2(t-\tau) d\tau. \quad (1)$$

Frogapena. Bila dezagun

$$\int_0^t f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau$$

funtzioaren irudia, irudiaren definiziotik abiatuz:

$$L \left\{ \int_0^t f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau \right\} = \int_0^\infty e^{-pt} \left[\int_0^t f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau \right] dt.$$



380. IRUDIA

Bigarren ataleko integrala, $\tau = 0$, $\tau = t$ zuzenek mugatutako eremura zabaldutako bigarren ordenako integral berritua da (380. irudia). Truka dezagun integral horren integrazio-ordena; orduan,

$$L \left\{ \int_0^t f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau \right\} = \int_0^\infty \left[f_1(\tau) \int_\tau^\infty e^{-pt} f_2(t - \tau) dt \right] d\tau$$

lortzen dugu. Barneko integralean $t - \tau = z$ aldagai-aldaketa burutuz,

$$\int_\tau^\infty e^{-pt} f_2(t - \tau) dt = \int_0^\infty e^{-p(z+\tau)} f_2(z) dz = e^{-p\tau} \int_0^\infty e^{-pz} f_2(z) dz = e^{-p\tau} F_2(p)$$

daukagu. Hortaz,

$$L \left\{ \int_0^t f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau \right\} = \int_0^\infty f_1(\tau) e^{-p\tau} F_2(p) d\tau = F_2(p) \int_0^\infty e^{-p\tau} f_1(\tau) d\tau = F_2(p) F_1(p).$$

Beraz,

$$\int_0^t f_1(\tau)f_2(t-\tau)d\tau \leftarrow F_1(p)F_2(p),$$

Hori da 1. taulako 15. formula.

1. Oharra.

$$\int_0^t f_1(\tau)f_2(t-\tau)d\tau$$

adierazpenak $f_1(t)$ eta $f_2(t)$ funtzioen arteko *konboluzio* izena du.

$$\int_0^t f_1(\tau)f_2(t-\tau)d\tau = \int_0^t f_1(t-\tau)f_2(\tau)d\tau$$

betetzen da. Eskuineko integralean $t-\tau = z$ aldagai-aldaketa eginez gero, azkeneko berdintza froga dezakegu.

Adibidea. Bilatu

$$\frac{d^2x}{dt^2} + x = f(t)$$

ekuazioaren soluzioa, $t=0$ denean $x_0 = x'_0 = 0$ hastapen-baldintzak bete daitezen.

Ebazpena. § 10 (4') ekuazio laguntzailea idatz dezagun:

$$\bar{x}(p)(p^2 + 1) = F(p),$$

non $F(p), f(t)$ funtzioaren irudia bait da. Ondorioz,

$$\bar{x}(p) = \frac{1}{p^2 + 1} F(p).$$

Baina,

$$\frac{1}{p^2 + 1} \rightarrow \sin t \quad \text{eta} \quad F(p) \rightarrow f(t)$$

(1) formula aplikatuz eta

$$\frac{1}{p^2 + 1} = F_2(p), \quad F(p) = F_1(p)$$

idazkerarekin,

$$x(t) = \int_0^t f(\tau) \sin(t - \tau) d\tau \quad (2)$$

ateratzen dugu.

2. Oharra. Konboluzio-teoremari esker erraza da emandako funtzioaren integralaren irudia aurkitzea, funtzioaren irudia ezagutuz gero, hau da, $F(p) \dot{\rightarrow} f(t)$ bada,

$$\frac{1}{p} F(p) \dot{\rightarrow} \int_0^t f(\tau) d\tau. \quad (3)$$

Izan ere,

$$f_1(t) = f(t), \quad f_2(t) = 1$$

badira,

$$F_1(p) = F(p), \quad F_2(p) = \frac{1}{p}$$

izango ditugu. Funtzio horiek (1) formularen ordezkatuz lortzen dugu (3) formula.

§ 14. Oszilazio mekanikoen ekuazio diferentzialak. Zirkuitu elektrikoaren teoriako ekuazio diferentzialak

Mekanikagatik badakigu m masako puntu material baten oszilazioek

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{\lambda}{m} \frac{dx}{dt} + \frac{k}{m} x = \frac{1}{m} f_1(t) \quad (1)$$

ekuazioa betetzen dutela⁵⁾; hor x , puntuaren posizio batetik desbidazioa da; k , sistema elastiko baten zurruntasuna, adibidez, malguki edo balezta bat; higiduraren kontrako

5) Ikusi, adibidez, XIII. gaiko § 26, non balezta baten gaineko karga baten oszilazioa aztertzean, antzeko ekuazioa lortu bait dugu.

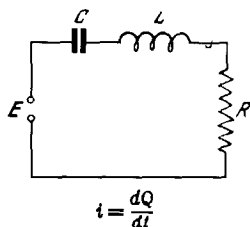
erresistentziaren indarra abiaduraren proportzionala da (proportzionaltasun-koefizientea λ delarik); $f_1(t)$ kanpo-indarra edo perturbazioa da.

(1) motako ekuazioa ebatziz, askatasun-maila bateko beste sistema mekanikoen oszilazio txikiak ere deskribatzen dira, esaterako, zuhaitz elastiko baten gaineko bolante baten bihurdura-oszilazioak, x bolantearen biraketa-angelua; m , bolantearen inertzia momentua; k , zuhaitzaren bihurdura-zurruntasuna eta $m f_1(t)$ kanpo-indarren biraketa-ardatzarekiko momentua badira. (1) motako ekuazioek oszilazio mekanikoak ezezik zirkuitu elektrikoetako fenomenoak ere deskribatzen dituzte.

Demagun zirkuitu elektriko bat daukagula, L induktantzia, R erresistentzia eta C kapazitateaz osatua, zeinari E i.e.e. aplikatzen zaion (381. irudia). Izan bitez i zirkuituko korrontea eta Q kondentsadorearen karga; orduan, elektrotekniagatik dakigunez, i eta Q -k ondorengo ekuazioak betetzen dituzte:

$$L \frac{di}{dt} + Ri + \frac{Q}{C} = E, \quad (2)$$

$$\frac{dQ}{dt} = i. \quad (3)$$



381. IRUDIA

(3) ekuaziotik

$$\frac{d^2Q}{dt^2} = \frac{di}{dt} \quad (3')$$

lortzen dugu. (3) eta (3'), (2) ekuazioan ordezkatuz, Q -rako (1) motako ekuazio bat lortzen dugu:

$$L \frac{d^2Q}{dt^2} + R \frac{dQ}{dt} + \frac{1}{C} Q = E. \quad (4)$$

(2) ekuazioaren bi atalak deribatuz eta (3) ekuazioa erabiliz, i korrontea determinatzeko ekuazioa,

$$L \frac{d^2 i}{dt^2} + R \frac{dQ}{dt} + \frac{1}{C} i = \frac{dE}{dt}, \quad (5)$$

lortzen dugu. (4) eta (5) ekuazioak (1) motakoak dira.

§ 15. Oszilazioen ekuazio diferentzialaren soluzioa

Idatz dezagun oszilazioen ekuazioa

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + a_1 \frac{dx}{dt} + a_2 x = f(t) \quad (1)$$

itxuraz, non x funtzio ezezagunaren zentzu mekaniko edo fisikoa, a_1, a_2 koefizienteak eta $f(t)$ funtzioa erraz determinatzen bait dira, ekuazio hori § 14 (1), (4), (5) ekuazioekin alderatuz. Aurki dezagun $t=0$ denean $x = x_0$, $x' = x'_0$ hastapen-baldintzak betetzen dituen (1) ekuazioaren soluzioa.

Osa dezagun (1)-en ekuazio laguntzailea:

$$\bar{x}(p)(p^2 + a_1 p + a_2) = x_0 p + x'_0 + a_1 x_0 + F(p), \quad (2)$$

$f(t)$ funtzioaren irudia $F(p)$ izanik, (2) berdintzatik

$$\bar{x}(p) = \frac{x_0 p + x'_0 + a_1 x_0}{p^2 + a_1 p + a_2} + \frac{F(p)}{p^2 + a_1 p + a_2} \quad (3)$$

ateratzen dugu. Honela, § 14 (4) ekuazioaren $Q(t)$ soluziorako, $t=0$ denean $Q = Q_0$, $Q' = Q'_0$ hastapen-baldintzak betetzen dituen, irudiak

$$\bar{Q}(p) = \frac{L(Q_0 p + Q'_0) + R Q_0}{L p^2 + R p + \frac{1}{C}} + \frac{\bar{E}(p)}{L p^2 + R p + \frac{1}{C}}$$

itxura izango du.

Soluzioaren izaera, neurri handi batean, $p^2 + a_1 p + a_2$ trinomioaren erroak konplexuak, erreal desberdinak ala erreal berdinak izatearen menpe dago. Azter dezagun xeheki trinomioaren erroak konplexuak direneko kasua, hau da,

$$\left(\frac{a_1}{2}\right)^2 - a_2 < 0$$

denean. Beste kasuak era antzekoan aztertzen dira.

Bi funtzioaren arteko baturaren irudia beren irudien arteko baturaren berdina denez gero, § 11 (2) formularen arabera, § 15 (3)-ren bigarren atalean dagoen lehenengo zatikiaren hasierako funtzioak

$$\frac{x_0 p + x_0' + a_1 x_0}{p^2 + a_1 p + a_2} \rightarrow e^{-\frac{a_1}{2}t} \left[x_0 \cos t \sqrt{a_2 - \frac{a_1^2}{4}} + \frac{x_0' + \frac{x_0 a_1}{2}}{\sqrt{a_2 - \frac{a_1^2}{4}}} \sin t \sqrt{a_2 - \frac{a_1^2}{4}} \right] \quad (4)$$

itxura hartzen du. Aurki dezagun orain

$$\frac{F(p)}{p^2 + a_1 p + a_2}$$

zatikiari dagokion hasierako funtzioa. Hemen konboluzio-teorema aplikatuko dugu,

$$\frac{1}{p^2 + a_1 p + a_2} \rightarrow \frac{e^{-\frac{a_1}{2}t}}{\sqrt{a_2 - \frac{a_1^2}{4}}} \sin t \sqrt{a_2 - \frac{a_1^2}{4}} \quad \text{eta} \quad F(p) \rightarrow f(t)$$

haintzakotzat hartuz. Ondorioz, § 13 (1) formularen arabera,

$$\frac{F(p)}{p^2 + a_1 p + a_2} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{a_2 - \frac{a_1^2}{4}}} \int_0^t f(\tau) e^{-\frac{a_1}{2}(t-\tau)} \sin(t-\tau) \sqrt{a_2 - \frac{a_1^2}{4}} d\tau \quad (5)$$

erdiesten dugu. Honelatan, (4) eta (5) kontutan hartuz, (3)-tik

$$\begin{aligned}
 x(t) = e^{-\frac{a_1}{2}t} & \left[x_0 \cos t \sqrt{a^2 - \frac{a_1^2}{4}} + \frac{x_0' + \frac{x_0 a_1}{2}}{\sqrt{a^2 - \frac{a_1^2}{4}}} \sin t \sqrt{a^2 - \frac{a_1^2}{4}} \right] + \\
 & + \frac{1}{\sqrt{a^2 - \frac{a_1^2}{4}}} \int_0^t f(\tau) e^{-\frac{a_1}{2}(t-\tau)} \sin(t-\tau) \sqrt{a^2 - \frac{a_1^2}{4}} d\tau
 \end{aligned} \quad (6)$$

ateratzen dugu.

Kanpo-indarra $f(x) \equiv 0$ bada, hau da, oszilazio mekaniko edo elektriko askeak baditugu, soluzioa (6) adierazpenaren bigarren ataleko lehenengo batugaiak emango digu. Hasierako datuak zero badira, $x_0 = x_0' = 0$, soluzioa (6) berdintzaren bigarren ataleko bigarren batugaiak emango digu. Azter ditzagun xehekiago kasu horiek.

§ 16. Oszilazio askeen estudioa

Demagun § 15 (1) ekuazioak oszilazio askeak deskribatzen dituela, hau da, $f(t) \equiv 0$. Sar ditzagun, formulen idazkera errazteko,

$$a_1 = 2n, \quad a_2 = k^2, \quad k_1^2 = k^2 - n^2$$

berdintzak. Orduan, § 15 (1) ekuazioak

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2n \frac{dx}{dt} + k^2 x = 0 \quad (1)$$

itxura hartzen du.

$t = 0$ denean, $x = x_0$, $x' = x_0'$ hastapen-baldintzak betetzen dituen ekuazio horren x_{ask} soluzioa, § 15 (4) formulak edo §15 (6) formularen lehenengo batugaiak ematen dute:

$$x_{ask}(t) = e^{-nt} \left[x_0 \cos k_1 t + \frac{x_0' + x_0 n}{k_1} \sin k_1 t \right]. \quad (2)$$

Izan bitez

$$x_0 = a, \quad \frac{x_0' + x_0 n}{k_1} = b.$$

Bistakoa da edozein a eta b -tarako M eta δ aukera daitezkeela, zeinek

$$a = M \sin \delta, \quad b = M \cos \delta$$

betetzen bait dituzte,

$$M^2 = a^2 + b^2, \quad \tan \delta = \frac{a}{b}$$

izanik. Idatz dezagun (2) formula ondoko eran:

$$x_{ask} = e^{-nt} [M \cos k_1 t \sin \delta + M \sin k_1 t \cos \delta],$$

edo, azkenik, soluzioa

$$x_{ask} = \sqrt{a^2 + b^2} e^{-nt} \sin(k_1 t + \delta) \quad (3)$$

itxuraz idatz dezakegu. (3) soluzioa indargetzen diren oszilazioei dagokie.

$2n = a_1 = 0$ badira, hau da, ez badago barne-marruskadurarik, soluzioak $x_{ask} = \sqrt{a^2 + b^2} \sin(k_1 t + \delta)$ itxura izango du. Kasu honetan oszilazio harmonikoak ditugu (XIII. gaiko § 27.ean, 270. eta 271. irudietan, oszilazio harmoniko eta indargetuen grafikoak agertzen dira).

§ 17. Oszilazio mekaniko eta elektrikoaren estudioa, kanpo-indar periodiko bat aplikatzen deneko kasuan

Sistema mekanikoaren oszilazio elastikoak aztertzean, eta bereziki, oszilazio elektrikoak aztertzean, $f(t)$ kanpo-indarren mota desberdinak aztertu behar dira. Iker dezagun xeheki kanpo-indar periodiko baten kasua. Izan bedi § 15 (1) ekuazioa

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2n \frac{dx}{dt} + k^2 x = A \sin \omega t \quad (1)$$

itxurakoa. Higiduraren izaera argitzeko nahikoa da $x_0 = x_0' = 0$ direneko kasua ikertzea. Ekuazioaren soluzioa § 15 (6) formularen bitartez lor dezakegu, baina, ikuspuntu metodologiko batetik, erosoagoa da soluzioa tarteko kalkulu guztiak burutuz lortzea.

Idatz dezagun irudiaren ekuazioa:

$$\bar{x}(p)(p^2 + 2np + k^2) = A \frac{\omega}{p^2 + \omega^2},$$

nondik

$$\bar{x}(p) = \frac{A\omega}{(p^2 + 2np + k^2)(p^2 + \omega^2)} \quad (2)$$

lortzen dugun.

Azter dezagun $2n \neq 0$ ($n^2 < k^2$) kasua. Deskonposa dezagun bigarren ataleko zatikia zatiki sinpletan:

$$\frac{A\omega}{(p^2 + 2np + k^2)(p^2 + \omega^2)} = \frac{Np + B}{p^2 + 2np + k^2} + \frac{Cp + D}{p^2 + \omega^2}. \quad (3)$$

Determina ditzagun N, B, C, D koefizienteak, koefiziente determinatugabeen metodoaren bidez. § 11 (2) formula erabiliz, § 17 (2)-tik hasierako funtzioa bilatuko dugu:

$$x(t) = \frac{A}{(k^2 - \omega^2)^2 + 4n^2\omega^2} \left\{ (k^2 - \omega^2) \sin \omega t - 2n\omega \cos \omega t + \right. \\ \left. + e^{-nt} \left[(2n^2 - k^2 + \omega^2) \frac{\omega}{k_1} \sin k_1 t + 2n\omega \cos k_1 t \right] \right\}; \quad (4)$$

hor, berriro $k_1 = \sqrt{k^2 - n^2}$ da. Hori da (1) ekuazioaren soluzioa, $t = 0$ denean $x_0 = x'_0 = 0$ hastapen-baldintzak betetzen dituen.

Kontsidera dezagun $2n = 0$ kasua. Hau, adibidez, sistema mekaniko batean barne-erresistentziarik ez dagoeneko, hau da, indargetzailerik falta deneko, kasuari dagokio. Zirkuitu elektriko baten kasuan $R = 0$, hau da, zirkuituan barne-erresistentziarik ez dagoeneko, kasuari dagokio. Orduan, (1) ekuazioak

$$\frac{d^2x}{dt^2} + k^2x = A \sin \omega t \quad (5)$$

itxura hartzen du eta $t = 0$ denean $x_0 = x'_0 = 0$ baldintzak betetzen dituen ekuazio horren soluzioa (4) formulan $n = 0$ eginez lortzen da:

$$x(t) = \frac{A}{(k^2 - \omega^2)k} [-\omega \sin kt + k \sin \omega t]. \quad (6)$$

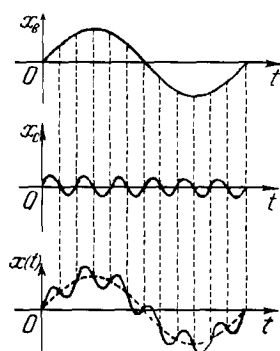
Hor bi oszilazio harmonikoren batura dugu:
propioak, k maiztasunekoak:

$$x_p(t) = -\frac{A}{k^2 - \omega^2} \frac{\omega}{k} \sin kt$$

eta bortxatuak, ω maiztasunekoak:

$$x_b(t) = \frac{A}{k^2 - \omega^2} \sin \omega t.$$

$k \geq \omega$ kasuan oszilazioen izaera 382. irudian adierazia dago.



382. IRUDIA

Itzul gaitezen berriro (4) formulara. $2n > 0$ bada, kontsideratutako sistema mekaniko eta elektrikoetan gertatzen dena, e^{-nt} faktorea daukan gaia, oszilazio indargetu propioak adierazten dituen, azkar txikiagotzen da t handitzen denean. t nahikoa handia denean, oszilazioen izaera e^{-nt} faktorea ez daukan gaiak, hau da,

$$x(t) = \frac{A}{(k^2 - \omega^2) + 4n^2 \omega^2} \left\{ (k^2 - \omega^2) \sin \omega t - 2n\omega \cos \omega t \right\} \quad (7)$$

gaiak definitua geratzen da.

Sar ditzagun

$$\frac{A(k^2 - \omega^2)}{(k^2 - \omega^2)^2 + 4n^2 \omega^2} = M \cos \delta; \quad -\frac{A \cdot 2n\omega}{(k^2 - \omega^2)^2 + 4n^2 \omega^2} = M \sin \delta \quad (8)$$

berdintzak; non

$$M = \frac{A}{\sqrt{(k^2 - \omega^2)^2 + 4n^2\omega^2}}$$

den. (7) soluzioa

$$x(t) = \frac{M}{k^2 \sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{k^2}\right)^2 + 4n^2 \frac{\omega^2}{k^2}}} \sin(\omega t + \delta) \quad (9)$$

eran idatz daiteke. (9) formulatik ondorioztatzen da oszilazio bortxatuen k maiztasuna bat datorrela kanpo-indarraren ω maiztasunarekin. Barne-erresistentzia, n zenbakiz karakterizatzen dena, txikia bada eta ω maiztasuna k maiztasunetik gertu badago, oszilazioen anplitudea nahi bezain handia egin daiteke, izendatzailea edonolako txikia izan daiteke eta. $n=0$ denerako, $\omega^2=k^2$ eta (9) formulak ez digu soluzioa emango.

§ 18. Oszilazioen ekuaziaren soluzioa erresonantzia dagoeneko kasuan

Azter dezagun $a_1 = 2n = 0$ deneko kasua, hau da, erresistentziarik ez dago eta kanpo-indarraren maiztasuna oszilazio propioen maiztasunarekin bat datorrenean, $k = \omega$. Kasu honetan, ekuazioak

$$\frac{d^2x}{dt^2} + k^2x = A \sin kt \quad (1)$$

itxura hartzen du.

Bila dezagun $t=0$ denean $x_0 = 0$, $\dot{x}_0 = 0$ hastapen-baldintzak betetzen dituen ekuazio horren soluzioa. Ekuazio laguntzailea

$$\bar{x}(p)(p^2 + k^2) = A \frac{k}{p^2 + k^2}$$

izango da, nondik

$$\bar{x}(p) = \frac{Ak}{(p^2 + k^2)^2} \quad (2)$$

den. IV. motako zatiki razional propio bat lortu dugu, kasu orokorrean aztertu ez duguna.

(2) irudiari dagokion hasierako funtzioa bilatzeko asmoz erabil dezagun hurrengo prozedura. Idatz dezagun

$$\frac{k}{p^2 + k^2} = \int_0^{\infty} e^{-pt} \sin kt \, dt \quad (3)$$

identitatea (1. taulako 2 formula).

Deriba ditzagun⁶⁾ berdintza horren bi atalak k -rekiko:

$$\frac{1}{p^2 + k^2} - \frac{2k^2}{(p^2 + k^2)^2} = \int_0^{\infty} e^{-pt} t \cos kt \, dt.$$

(3) berdintza erabiliz, aurrekoa

$$-\frac{2k^2}{(p^2 + k^2)^2} = \int_0^{\infty} e^{-pt} \left[t \cos kt - \frac{1}{k} \sin kt \right] dt$$

eran idatz dezakegu. Nondik zuzenean

$$\frac{Ak}{(p^2 + k^2)^2} \rightarrow \frac{A}{2k} \left(\frac{1}{k} \sin kt - t \cos kt \right)$$

ateratzen den (formula horretatik 1. taulako 13a lortzen da). Honelatan, bilatutako (1) ekuazioaren soluzioa

$$x(t) = \frac{A}{2k} \left(\frac{1}{k} \sin kt - t \cos kt \right) \quad (4)$$

da. Iker dezagun soluzio horren bigarren batugaia,

$$x_2(t) = -\frac{A}{2k} t \cos kt; \quad (4')$$

t handitzean aurreko magnitudea ez dago bornaturik. (4') formulari dagozkion oszilazioen amplitudea handitzen da mugagabeki, t mugarik gabe handitzean. Hortaz, (4) formulari

⁶⁾ Bigarren ataleko integrala aldagai errealeko bi integralen arteko batura bezala adieraz daiteke, bakoitza k parametro menpekora delarik.

dagozkion oszilazioen anplitudea mugarik gabe handitzen da. Fenomeno hori, oszilazio propioen maiztasuna kanpo-indarraren maiztasunarekin bat datorrenean gertatzen dena, erresonantzia deitzen da (ikus XIII. gaiko § 29, 273. irudia).

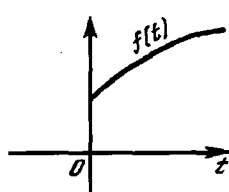
§ 19. Atzerapen-teorema

Izan bedi $f(t)$ funtzioa zeroren berdina $t < 0$ denean (383a. irudia). Orduan, $f(t-t_0)$ funtzioa zeroren berdina izango da $t < t_0$ denean (383b. irudia). Froga dezagun ondoko atzerapen-teorema.

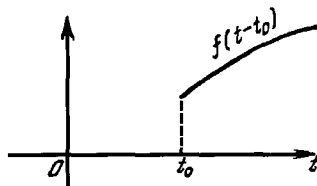
Teorema. $F(p)$ bada $f(t)$ funtzioaren irudia, $e^{-pt_0} F(p)$ izango da $f(t-t_0)$ funtzioaren irudia, hau da, $f(t) \leftarrow F(p)$ bada

$$f(t-t_0) \leftarrow e^{-pt_0} F(p)$$

izango da.



383a. IRUDIA



383b. IRUDIA

Frogapena. Irudiaren definizioaren arabera,

$$L\{f(t-t_0)\} = \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t-t_0) dt = \int_0^{t_0} e^{-pt} f(t-t_0) dt + \int_{t_0}^{\infty} e^{-pt} f(t-t_0) dt$$

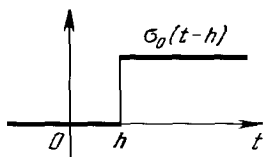
daukagu. Berdintzaren bigarren ataleko lehenengo integrala zeroren berdina da, $t < t_0$ denean $f(t-t_0) = 0$ bait da. Azkeneko integralean aldagaia $t-t_0 = z$ eginez aldatuko dugu:

$$L\{f(t-t_0)\} = \int_0^{\infty} e^{-p(z+t_0)} f(z) dz = e^{-pt_0} \int_0^{\infty} e^{-pz} f(z) dz = e^{-pt_0} F(p).$$

Honela,

$$f(t - t_0) \stackrel{\cdot}{\leftarrow} e^{-pt_0} F(p)$$

da.



384. IRUDIA

Adibidea. § 2.an ezarri dugu Heaviside-ren unitate-funtziorako $\sigma_0(t) \stackrel{\cdot}{\leftarrow} \frac{1}{p}$

dela. Frogatutako teoreman oinarrituz, $\sigma_0(t - h)$ funtziorako L irudia $\frac{1}{p} e^{-ph}$ izango

dela ondorioztatzen da, hau da,

$$\sigma_0(t - h) \stackrel{\cdot}{\leftarrow} \frac{1}{p} e^{-ph}.$$

Ariketak

Bilatu ondoko ekuazioen soluzioak emandako hastapen-baldintzekin :

1. $\frac{d^2x}{dt^2} + 3\frac{dx}{dt} + 2x = 0$; $x = 1$, $x' = 2$, $t = 0$ denean. Eraitza: $x = 4e^{-t} - 3e^{-2t}$.

2. $\frac{d^3x}{dt^3} - \frac{d^2x}{dt^2} = 0$; $x = 2$, $x' = 0$, $x'' = 1$, $t = 0$ denean. Em.: $x = 1 - t + e^t$.

3. $\frac{d^2x}{dt^2} - 2a\frac{dx}{dt} + (a^2 + b^2)x = 0$; $x = x_0$, $x' = x'_0$, $t = 0$ denean.

Em.: $x = \frac{e^{at}}{b} \left[x_0 b \cos bt + (x'_0 - x_0 a) \sin bt \right]$.

4. $\frac{d^2x}{dt^2} - 3\frac{dx}{dt} + 2x = e^{5t}$; $x = 1$, $x' = 2$, $t = 0$ denean. Em.: $x = \frac{1}{12}e^{5t} + \frac{1}{4}e^t + \frac{2}{3}e^{2t}$.

5. $\frac{d^2x}{dt^2} + m^2x = a \cos nt$; $x = x_0$, $x' = x'_0$, $t = 0$ denean.

Em.: $x = \frac{a}{m^2 - n^2}(\cos nt - \cos mt) + x_0 \cos mt + \frac{x'_0}{m} \sin mt$.

6. $\frac{d^2x}{dt^2} - \frac{dx}{dt} = t^2$; $x = 0$, $x' = 0$, $t = 0$ denean. Em.: $x = 2e^t - \frac{1}{3}t^3 - t^2 - 2t - 2$.

7. $\frac{d^3x}{dt^3} + x = \frac{1}{2}t^2e^t$; $x = x' = x'' = 0$, $t = 0$ denean.

Em.: $x = \frac{1}{4}\left(t^2 - 3t + \frac{3}{2}\right) \cdot e^t - \frac{1}{24}e^{-t} - \frac{1}{3}\left\{\cos \frac{t\sqrt{3}}{2} - \sqrt{3} \sin \frac{t\sqrt{3}}{2}\right\}e^{\frac{1}{2}t}$.

8. $\frac{d^3x}{dt^3} + x = 1$; $x_0 = x'_0 = x''_0 = 0$, $t = 0$ denean. Em.: $x = 1 - \frac{1}{3}e^{-t} - \frac{2}{3}e^{\frac{t}{2}} \cos \frac{t\sqrt{3}}{2}$.

9. $\frac{d^4x}{dt^4} - 2\frac{d^2x}{dt^2} + x = \sin t$; $x_0 = x'_0 = x''_0 = x'''_0 = 0$, $t = 0$ denean.

Em.: $x = \frac{1}{8}\left[e^t(t-2) + e^{-t}(t+2) + 2 \sin t\right]$.

10. Bilatu $t = 0$ denean $x_0 = y_0 = x'_0 = y'_0 = 0$ hastapen-baldintzak betetzen dituen,

$$\frac{d^2x}{dt^2} + y = 1, \quad \frac{d^2y}{dt^2} + x = 0$$

ekuazio diferentzialezko sistemaren soluzioa.

Em.: $x(t) = -\frac{1}{2} \cos t + \frac{1}{4}e^t + \frac{1}{4}e^{-t}$, $y(t) = -\frac{1}{2} \cos t - \frac{1}{4}e^t - \frac{1}{4}e^{-t} + 1$.

AURKIBIDE ALFABETIKOA

- Abel-en teorema 385
 (Bigarren) abiadura kosmiko 83-86
 Adams-en formula 174
 Aldagai-aldaketa integral
 bikoitzean 237-243
 Aldagai-aldaketa integral
 hirukoitzean 266-270
 Aldagai-banaketaren
 metodoa 485, 499, 515
 Analisi harmonikoa 486
 Anplitudea 134
 Astroidea 57
 Atzerapen-teorema 568
 Azalera 227
 (Gainazalen) azalera 244

 Balio propioak 487
 (Eremuaren) barne-puntua 210
 Batura integrala 208, 258
 Bernoulli-ren ekuazioa 31-34
 Bero-barreiapena 489-491
 Bero-barreiapenaren ekuazioa 489-499
 Berredura-seriea 384, 392
 Bessel-en desberdintza 457
 Bessel-en ekuazioa 412
 Bessel-en funtzioa 417, 418
 Bolumena 225, 263
 Buniakovski-ren desberdintza 254

 Cauchy-ren irizpidea 356
 Clairaut-en ekuazioa 53-57

 D'Alembert-en irizpidea 350
 Dentsitatea 248
 (Gainazal-)dentsitatea 248
 Deribatu partzialetako ekuazio
 diferentziala 6
 Desbidazio koadratikoa 453, 454, 457
 Desbidazio maximoa 453
 Determinante funtzionala 240
 Dibergentzia 326
 Diferentzia finituen
 metodoa 496-499, 519-522
 Diferentzien ekuazioa 520
 Dirichlet-en integrala 462
 Dirichlet-en problema 506, 510, 511

 Egonkortasun-teoria 158
 Ekuazio diferentziala 1, 5
 (Aldagai banangarrietako) ekuazio
 diferentziala 12-18
 (Deribatu partzialetako) ekuazio
 diferentziala 6
 Ekuazio diferentzialaren integral
 orokorra 7
 Ekuazio diferentzialaren integral
 partikularra 8
 Ekuazio diferentzialaren integral
 singularra 52
 Ekuazio diferentzialaren ordena 6
 Ekuazio diferentzialaren soluzioa 7
 Ekuazio diferentzialaren soluzio orokorra 8
 Ekuazio diferentzialaren soluzio
 partikularra 8
 Ekuazio diferentzialaren soluzio
 singularra 52
 Ekuazio diferentzialezko sistema 156, 163
 Ekuazio diferentzialezko sistema
 arrunta 141
 Ekuazio diferentzial arrunta 6
 Ekuazio diferentzial ez-homogenoa 89
 Ekuazio diferentzial homogenoa 18-21, 89
 Ekuazio diferentzial lineala 26, 89
 Ekuazio diferentzial totala 34-39
 Ekuazio karakteristikoa 89, 166
 Ekuazio telegrafikoa 484
 Eliptiko-motako ekuazioa 479
 Ergale-kalkulua 528-570
 (Integrazio-)eremua 209
 (Konbergentzi) eremua 372, 384, 386
 (Norabide-)eremua 11
 Eremu bektorialaren errotazionala 318
 Eremu bektorialaren fluxua 310, 319, 325
 Eremu erregularra 211, 229, 259
 Eremu irrotazionala 328
 Eremu itxia 207
 Eremu potentziala 327
 Eremu solenoidala 328
 Eremuko barne-puntua 210
 (Serieraren konbergentzi) erradioa 386
 Erresonantzia 567
 (Eremu bektorialaren) errotazionala 318
 Esfera 246

- Euler-en formula 398
- Euler-en metodoa 166-169
- Euler-en poligonalak 168
- (Hasierako) fasea 134
- (Eremu bektorialaren)
 - fluxua 310, 319, 325
- Fourier-en alderantzizko transformazioa 476
- Fourier-en ekuazioa 479
- Fourier-en integrala 469-476
- Fourier-en koefizienteak 437
- Fourier-en kosinu-transformazioa 473
- Fourier-en metodoa 485, 499, 515
- Fourier-en seriea 437
- (Funtzio bakoitiaren) Fourier-en seriezko garapena 447
- (Funtzio bikoitiaren) Fourier-en seriezko garapena 448
- Fourier-en sinu-transformazioa 473
- Fourier-en transformazioa 476
- (Hasierako) funtzioa 529
- (Heaviside-ren unitate) funtzioa
- Funtzioaren irudia 529
- Funtzio bakoitiaren Fourier-en seriezko garapena 447
- Funtzio bikoitiaren Fourier-en seriezko garapena 448
- Funtzio esponentziala 398
- Funtzio esponentzialaren irudia 535
- Funtzio harmonikoa 329, 336, 505
- Funtzio linealki menpeko eta linealki independenteak 105
- Funtzio logaritmikoa 402
- Funtzio propioak 487
- Funtzio zatika jarraia 458
- Funtzio zatika monotonoa 437
- Funtzio-seriea 372
- Gainazalen azalera 244
- Gainazal-dentsitatea 248
- Grabitate-zentrua 256, 272, 307
- Gradienteak 325
- Green-en formula 309-312
- Hamilton-en eragilea 325-329
- Hastapen-baldintza 8, 68, 482, 491, 495
- Heaviside-ren unitate funtzioa 530, 569
- (Mota) hiperbolikoko ekuazioa 479
- Inertzi momentua 250, 270
- Inguratzailea 42
- (Gainazal-)integrala 308-314
- (Koordenatu esferikoetako) integrala 268
- (Parametro baten menpeko) integrala 273
- Integral anizkoitza 207
- (Bigarren ordenako) integral berritua 210-217
- (Hirugarren ordenako) integral berritua 260
- Integral bikoitza 209, 218
- (Koordenatu polarretako) integral bikoitza 228-237, 241
- Integral hirukoitza 258-270
- (Koordenatu zilindrikoetako) integral hirukoitza 266
- Integral lerromakurra 285-298, 301-308
- Integrazioaren metodo grafikoa 86-89
- Integrazio-eremua 209
- Integrazio-faktorea 39
- (Funtzioaren) irudia 529
- Izpia 228
- Jacobiarra 240, 270
- (Serie baten baturaren) jarraitasuna 477
- Jarraitasun-ekuazioa 508
- Katenaria 5
- Kiribil logaritmikoa 67
- (Serieen) konbergentziarako irizpide integrala 359
- Konbergentzi eremua 372, 384, 386
- (Seriearen) konbergentzi erradioa 386
- (Serieen) konbergentzi irizpideak 344, 347-356, 359, 363, 367
- Konbergentzi tartea 386
- Konboluzioa 557
- Konboluzio-teorema 555
- Konstanteen aldakuntzaren metodoa 110
- Koordenatu esferikoak 268-269
- Koordenatu lerromakurrak 238
- Koordenatu zilindrikoak 266-267
- Korrante-lerroa 62
- Kosinua 398
- Kosinu funtzioaren irudia 530-532
- Kurba integrala 9, 69
- Kurba launa 88
- Kurba potentzikidea 62
- Lagrange-ren ekuazioa 57-60
- Lana 285, 286, 297
- Laplace-ren ekuazioa 329, 479, 505
- (Koordenatu zilindrikoetako) Laplace-ren ekuazioa 513

- Laplace-ren eragilea 329, 335, 505
 Laplace-ren funtzioaren irudia 529
 Leibniz-en teorema 363
 Liapunov-en berdintza 458

 Maclaurin-en seriea 396-398
 (Inertzi) momentua 250, 270
 Momentu estatikoa 257
 Mugalde-baldintza 482, 491, 495
 Mugalde-baliiodun baldintza 482
 Mugalde-baliiodun bigarren problema 506
 Mugalde-baliiodun lehen problema 491, 506
 Mugalde-baliiodun problema 480, 491, 506

 Nabla eragilea 325
 Neumann-en problema 506, 510
 Norabide-eremua 11

 Ostrogradski-ren formula 324, 325
 Oszilazioak 130
 (Sokaren) oszilazioen ekuazioa 480
 Oszilazioen maiztasuna 134
 Oszilazioen periodoa 134
 Oszilazio askeak 132-135
 Oszilazio bortxatuak 132, 135-141
 Oszilazio harmonikoak 134
 Oszilazio indargetuak 135

 (Segurtasun-)parabola 49
 (Mota) parabolikoko ekuazioa 479
 Parametro baten menpeko integralak 273
 Pendulu matematikoa 79
 Poisson-en integrala 234, 503, 519
 Potentziala 305, 341
 Progresio geometrikoa 342
 (Eremuaren barne-)puntua 210
 Puntu singularra 45

 Sarea 519
 Sareko korapiloak 519

 Seriea 340
 (Berredura-)seriea 384, 392
 (Funtzio-)seriea 372
 (Gai positibo eta negatibotako) seriea 367
 (Zenbakizko) seriea 340
 Seriearen batura 340
 Seriearen batura partziala 340
 Seriearen gaiak 340
 Seriearen hondarra 373
 Serieen konbergaentziarako irizpide integrala 359
 Seriearen konbergentzi erradioa 386
 Serieen konbergentzi irizpideak 344, 347-356, 359, 363, 367
 Serie absolutuki konbergentea 369
 Serie alternatua 363
 Serie baldintzazko konbergentea 369
 Serie baten baturaren jarraitasuna 377
 Serie binomikoa 399
 Serie dibergentea 340-344, 349
 Serie harmonikoa 346
 Serie konbergentea 340-344
 Serie majoragarria 373-376
 Serie trigonometrikoa 433
 Serie uniformeki konbergentea 376
 Sinu funtzioaren irudia 530-532
 Soluzio linealki menpekoak eta linealki independenteak 90
 Stokes-en formula 318

 Taylor-en seriea 394

 Uhin-ekuazioa 479, 482, 485-489

 Wronski-ren determinantea 91

 Zenbakizko seriea 340
 (Grabitate-)zentrua 256, 272, 307

ISBN 84-86967-48-1

