N. PISKUNOV

KALKULU DIFERENTZIALA ETA INTEGRALA

I

udako euskal unibertsitatea

eman ta zabal zazu
universidad del país vasco
euskal herriko unibertsitatea

N. PISKUNOV

KALKULU DIFERENTZIALA ETA INTEGRALA I

Koordinatzaileak:
Joserra Aizpurua
Patxi Angulo

Euskaratzaileak:
Joserra Aizpurua. Elhuyar
Patxi Angulo. UPV/EHU
Victoria Fernandez. UPV/EHU
Adela Moyua. UPV/EHU
Juanjo Otxoa Diaz. UPV/EHU
Cecilia Sarasola. UPV/EHU
M. Jose Zarate. UPV/EHU
Enrike Zuazua. U.C.Madril

UDAKO EUSKAL UNIBERTSITATEA
Bilbo, 1992

Hezkuntza, Unibertsitate eta Ikerketa Sailaren dirulaguntza jaso du

Liburu hau UEUren eta UPV/EHUren arteko koedizioa da.

© Euskararako Itzulpena. Patxi Angulo eta beste.
© Udako Euskal Unibertsitatea. Matematika Saila.

ISBN: 84-86967-46-5 Lan osorako
ISBN: 84-86967-47-3 1. liburukia
Lege-gordailua: BI-2255-92

Inprimategia: BOAN, S.A. Padre Larramendi 2 BILBO

Azala: UEU

Banatzaileak: UEU. General Concha 25, 6. BILBO
Zabaltzen: Igarabide, 88 DONOSTIA

AURKIBIDEA

AURKIBIDEA V

AINTZINSOLASA XIII

EUSKARATZAILEEN OHARRA XVI

I. Gaia. ZENBAKIA. ALDAGAIA. FUNTZIOA 1

§ 1. *Zenbaki errealak. Zenbakizko ardatzeko puntuen bidezko zenbaki errealen adierazpena* 1
§ 2. *Zenbaki errealen balio absolutua* 3
§ 3. *Magnitude aldakor eta konstanteak* 5
§ 4. *Aldagaiaren definizio-eremua* 5
§ 5. *Aldagai ordenatua. Aldagai gorakorrak eta beherakorrak. Aldagai bornatua* 7
§ 6. *Funtzioa* 8
§ 7. *Funtzioen zenbait adierazpide* 9
§ 8. *Funtzio elemental nagusiak. Funtzio elementalak* 12
§ 9. *Funtzio algebraikoak* 17
§ 10. *Koordenatu polarren sistema* 19
Ariketak 21

II. Gaia. FUNTZIOEN LIMITEAK ETA JARRAITASUNA 25

§ 1. *Aldagaien limiteak. Aldagai mugagabeki handia* 25
§ 2. *Funtzioaren limitea* 28
§ 3. *Infiniturantz jotzen duten funtzioak. Funtzio bornatuak* 32
§ 4. *Infinitesimoak eta berorien oinarrizko propietateak* 37
§ 5. *Limiteei buruzko oinarrizko teoremak* 41
§ 6. $\frac{\sin x}{x}$ *funtzioaren limitea* $x \to 0$ *denean* 47
§ 7. e *zenbakia* 49

§ 8. *Logaritmo arruntak* 55
§ 9. *Funtzioen jarraitasuna* 56
§ 10. *Funtzio jarraien propietateak* 62
§ 11. *Infinitesimoen arteko konparaketa* 64
Ariketak 68

III. Gaia. DERIBATUA ETA DIFERENTZIALA 74

§ 1. *Higiduraren abiadura* 74
§ 2. *Deribatuaren definizioa* 76
§ 3. *Deribatuaren esanahi geometrikoa* 79
§ 4. *Funtzioen deribazioa* 81
§ 5. *Funtzio elementalen deribatuak.* $y = x^n$ *funtzioaren deribatua, n zenbaki osoa eta positiboa denean* 83
§ 6. $y = \sin x$ *eta* $y = \cos x$ *funtzioen deribatuak* 86
§ 7. *Konstantearen deribatua, konstante baten eta funtzio baten arteko biderkaketarena eta bi funtzioren arteko batuketa, biderkaketa eta zatiketarena* 88
§ 8. *Funtzio logaritmikoaren deribatua* 94
§ 9. *Funtzio konposatuaren deribatua* 96
§ 10. $y = \tan x$, $y = \cot x$ *eta* $y = \ln|x|$ *funtzioen deribatuak* 99
§ 11. *Funtzio inplizitua eta bere deribazioa* 102
§ 12. *Edozein berretzaile errealdun funtzio potentzialaren, funtzio esponentzialaren eta funtzio esponentzial konposatuaren deribatuak* 104
§ 13. *Alderantzizko funtzioa eta bere deribazioa* 108
§ 14. *Alderantzizko funtzio trigonometrikoak eta berorien deribazioa* 114
§ 15. *Deribazio-formula nagusien taula* 119
§ 16. *Funtzioen adierazpen parametrikoa* 121
§ 17. *Zenbait kurbaren ekuazio parametrikoak* 123
§ 18. *Parametrikoki emaniko funtzioaren deribatua* 127
§ 19. *Funtzio hiperbolikoak* 130
§ 20. *Diferentziala* 134
§ 21. *Diferentzialaren esanahi geometrikoa* 140
§ 22. *Ordena handiagoko deribatuak* 141
§ 23. *Ordena handiagoko diferentzialak* 144
§ 24. *Funtzio inplizituen eta parametrikoki definituriko funtzioen ordena handiagoko deribatuak* 145
§ 25. *Bigarren deribatuaren esanahi mekanikoa* 149

§ 26. *Ukitzailearen eta normalaren ekuazioak. Azpiukitzailearen eta azpinormalaren luzerak* 151
§ 27. *Angelu polarrarekiko erradio bektorearen deribatuaren esanahi geometrikoa* 156
Ariketak 158

IV. Gaia. FUNTZIO DERIBAGARRIEI BURUZKO TEOREMAK 179

§ 1. *Deribatuaren erroei buruzko teorema (Rolle-ren teorema)* 179
§ 2. *Gehikuntza finituen teorema (Lagrange-ren teorema)* 181
§ 3. *Bi funtzioren gehikuntzen arteko zatidurari buruzko teorema (Cauchy-ren teorema)* 183
§ 4. *Bi infinitesimoren arteko zatiduraren limitea ($\frac{0}{0}$ motako indeterminazioen limiteen kalkulua)* 185
§ 5. *Bi magnitude mugagabeki handiren arteko zatiduraren limitea ($\frac{\infty}{\infty}$ motako indeterminazioen limiteen kalkulua)* 188
§ 6. *Taylor-en formula* 195
§ 7. e^x, $\sin x$ *eta* $\cos x$ *funtzioen Taylor-en formularen bidezko garapena* .. 200
Ariketak 204

V. Gaia. FUNTZIOEN ALDAKUNTZAREN ANALISIA 209

§ 1. *Orokortasunak* 209
§ 2. *Funtzio baten gorapena eta beherapena* 210
§ 3. *Funtzioen maximoa eta minimoa* 212
§ 4. *Funtzio deribagarri baten maximo eta minimoaren analisia lehen deribatuaren bidez* 219
§ 5. *Funtzio baten maximo eta minimoaren analisia bigarren deribatuaren bidez* 222
§ 6. *Funtzio baten balio maximoa eta minimoa tarte batean* 227
§ 7. *Funtzioen maximo eta minimoen teoriaren aplikazioak problemen ebazpenean* 229
§ 8. *Funtzio baten balio maximo eta minimoen analisia Taylor-en formularen bidez* 232
§ 9. *Kurben ganbiltasuna eta ahurtasuna. Inflexio-puntuak* 235
§ 10. *Asintotak* 242

§ 11. *Funtzioen analisiaren eta grafikoen eraikuntzaren eskema orokorra* 248
§ 12. *Era parametrikoan emandako kurben azterketa* 254
Ariketak 260

VI. Gaia. KURBA BATEN KURBADURA 271

§ 1. *Arkuaren luzera eta bere deribatua* 271
§ 2. *Kurbadura* 274
§ 3. *Kurbaduraren kalkulua* 276
§ 4. *Forma parametrikoan emandako kurba baten kurbaduraren kalkulua* 280
§ 5. *Koordenatu polarretan emandako kurba baten kurbaduraren kalkulua* 281
§ 6. *Kurbadur erradioa eta zirkulua. Kurbadur zentrua. Eboluta eta bilkaria* ... 283
§ 7. *Ebolutaren propietateak* 290
§ 8. *Ekuazio baten erro errealen kalkulu hurbildua* 295
Ariketak 300

VII. Gaia. ZENBAKI KONPLEXUAK. POLINOMIOAK 306

§ 1. *Zenbaki konplexuak. Orokortasunak* 306
§ 2. *Zenbaki konplexuen arteko oinarrizko eragiketak* 308
§ 3. *Zenbaki konplexuen arteko berreketa eta erroketa* 312
§ 4. *Berretzaile konplexuko funtzio esponentziala eta bere propietateak* 315
§ 5. *Euler-en formula. Zenbaki konplexu baten forma esponentziala* 319
§ 6. *Polinomio baten faktoretako deskonposaketa* 321
§ 7. *Polinomio baten erro anizkoitzak* 325
§ 8. *Erro konplexutako polinomio baten faktorizazioa* 327
§ 9. *Interpolazioa. Lagrange-ren interpolazio-formula* 328
§ 10. *Newton-en interpolazio-formula* 331
§ 11. *Zenbakizko deribazioa* 333
§ 12. *Funtzioen polinomioen bidezko hurbilketa hoberena. Chebishev-en teoria* 335
Ariketak 336

VIII. Gaia. ALDAGAI ANITZEKO FUNTZIOAK 339

§ 1. *Aldagai anitzeko funtzioen definizioa* 339
§ 2. *Bi aldagaiko funtzioaren adierazpen geometrikoa* 343
§ 3. *Funtzioaren gehikuntza partzial eta totala* 344
§ 4. *Aldagai anitzeko funtzioen jarraitasuna* 345

§ 5. *Aldagai anitzeko funtzioaren deribatu partzialak* 350
§ 6. *Bi aldagaiko funtzioaren deribatu partzialen adierazpen geometrikoa* 351
§ 7. *Gehikuntza totala eta diferentzial totala* 353
§ 8. *Kalkuku hurbilduetan diferentzial totalaren erabilera* 358
§ 9. *Kalkulu-errorearen balioztapenerako diferentzialaren aplikazioa* 360
§ 10. *Funtzio konposatuaren deribatua. Deribatu totala* 365
§ 11. *Funtzio inplizituen deribatua* 368
§ 12. *Ordena goreneko deribatu partzialak* 373
§ 13. *Maila-gainazalak* 379
§ 14. *Norabide batekiko deribatua* 380
§ 15. *Gradientea* 383
§ 16. *Taylor-en formula bi aldagaiko funtziorako* 386
§ 17. *Aldagai anitzeko funtzioaren maximo eta minimoak* 390
§ 18. *Emandako ekuazioen bidez erlazionatutako aldagai anitzeko funtzioaren maximo eta minimoak (maximo eta minimo baldintzatuak)* 402
§ 19. *Datu esperimentalak erabiliz, karratu txikienen metodoaren bidezko funtzioaren lorpena* 409
§ 20. *Kurbaren puntu singularrak* 414
Ariketak 421

IX. Gaia. KALKULU DIFERENTZIALAREN APLIKAZIOAK ESPAZIOKO GEOMETRIAN 429

§ 1. *Espazioko kurba baten ekuazioak* 429
§ 2. *Aldagai eskalar bateko funtzio bektorial baten limitea eta deribatua. Kurba batekiko ukitzailearen ekuazioa. Plano normalaren ekuazioa* 432
§ 3. *Bektoreen (funtzio bektorialen) deribazio-erregelak* 441
§ 4. *Bektore baten lehenengo eta bigarren deribatuak arkuaren luzerarekiko. Kurbaren kurbadura. Normal nagusia. Puntu higikor baten abiadura eta azelerazioa higidura lerromakurrean* 444
§ 5. *Plano oskulatzailea. Binormala. Bihurdura* 456
§ 6. *Gainazal batekiko plano ukitzaile eta normala* 462
Ariketak 468

X. Gaia. INTEGRAL MUGAGABEA 471

§ 1. *Jatorrizko funtzioa eta integral mugagabea* 471
§ 2. *Integralen taula* 474
§ 3. *Integral mugagabearen zenbait propietate* 477

§ 4. *Aldagai-aldaketa edo ordezkapenaren bidezko integrazioa* 480
§ 5. *Bigarren mailako trinomioa duten zenbait funtzioren integralak* 483
§ 6. *Zatikako integrazioa* 487
§ 7. *Frakzio razionalak. Frakzio razional elementalak eta horien integrazioa* . 492
§ 8. *Frakzio razionalen deskonposaketa frakzio sinpletan* 497
§ 9. *Frakzio razionalen integrazioa* 502
§ 10. *Ostrogradski-ren metodoa* 506
§ 11. *Funtzio irrazionalen integralak* 510
§ 12. $\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx$ *motako integralak* 512
§ 13. *Binomio diferentzialen integrazioa* 517
§ 14. *Funtzio trigonometrikoen integrazioa* 521
§ 15. *Zenbait funtzio irrazionalen integrazioa ordezkapen trigonometrikoez baliatuz* 527
§ 16. *Funtzio elementalen bidez adierazi ezin daitezkeen integralak dituzten funtzioak* 529
Ariketak 531

XI. Gaia. INTEGRAL MUGATUA 550

§ 1. *Problemaren planteamendua. Behe- eta goi-baturak* 550
§ 2. *Integral mugatua* 553
§ 3. *Integral mugatuaren oinarrizko propietateak* 561
§ 4. *Integral mugatuaren kalkulua. Newton-Leibniz-en formula* 566
§ 5. *Aldagai-aldaketa integral mugatuan* 572
§ 6. *Zatikako integrazioa* 574
§ 7. *Integral inpropioak* 577
§ 8. *Integral mugatuen kalkulu hurbildua* 589
§ 9. *Chebyshev-en formula* 596
§ 10. *Parametro baten menpeko integralak* 602
§ 11. *Aldagai errealeko funtzio konplexuaren integrazioa* 606
Ariketak 608

XII. Gaia. INTEGRAL MUGATUEN APLIKAZIO GEOMETRIKO ETA MEKANIKOAK 615

§ 1. *Azaleren kalkulua koordenatu (cartesiarretan)* 615
§ 2. *Koordenatu polarretan emandako sektore kurbatu baten azalera* 618

§ 3. *Kurba-arku baten luzera* 621
§ 4. *Gorputz baten bolumenaren kalkulua, sekzio paraleloen azaleren funtzioan* 629
§ 5. *Biraketa-gorputzen bolumena* 631
§ 6. *Biraketa-gorputzen azalera* 632
§ 7. *Lanaren kalkulua integral mugatuaren bidez* 635
§ 8. *Grabitate-zentruaren koordenatuak* 637
§ 9. *Lerro, zirkulu eta zilindroen inertzi momentuen kalkulua integral mugatuaren bidez* 642
Ariketak 644

AURKIBIDE ALFABETIKOA 657

EUSKAL BERTSIORAKO AINTZINSOLASA

Piskunov liburuaren euskal bertsioaren aurkezpenerako aitzinsolasa idazterakoan, interesgarri eritzi izan diot, egunotan unibertsitateko euskal lerroetan lanean dihardugun irakasleen artean eztabaidagai den kezka eta jokatzeko modu bati buruzko gogoeta egiteari, zientziaren arloko eskuliburuen itzulpengintzari buruzkoa hain zuzen. Kezkaren muina honetan datza, alegia, ea buru-belarri abiatu behar dugun horrelako liburuen itzulpengintzara edo ea egokiago ez ote den lehentasuna bestelako eginbeharretan jartzea.

'Eskuliburuak' izenarekin, munduan zehar dauden unibertsitate gehienetan –edo askotan bederen– erabili ohi diren liburuak adierazi nahi ditut, goi-mailako zientzilariek idatziak, urteen joanean irauten dutenak, ongi eginak direlako, noski, eta mundu osoko irakasleek kontsulta-liburu modura darabiltzatenak. Esan gabe doa, holakoak euskara onean idatzirik egotea oso baliagarri gerta daitekeela, eta, esatera ausartu egingo naiz, holakoen argitarapenak gure hizkuntzaren osasuna adieraz dezakeela. Edozertara, horrek ez narama eskuliburu klasikoen berehalako itzulpen hutsa bultzatzera, prozesu hori onuragarria eta egokia izan dadin, aldez aurretik zenbait baldintza bete behar direla uste bait dut.

Itzulpengintzarako baldintzak aipatu ditut, jarraian zehaztuko ditudanak, aldian aldiko arrazoibidea azaltzen saiatuko naizelarik:

- Lehenengo eta behin, liburuari dagokion jakintza-arloan erabili ohi den hizkera berezia, eginda egon behar da itzulpena prestatzen ari deneko unean. Honekin adierazi nahi dudana, ondokoa besterik ez da, itzulpengintzan ezin daitekeela etengabe asmatzen ibil. Hori, gehienera ere, itzultzaileak berak asmaturiko hizkera litzateke, bai hitzei dagokienez, bai sintagma lexikal konplexuei dagokienez, eta bai joskerazko esateko moduei dagokienez ere. Alegia, itzulpenerako helburu edo erreferentzia garbirik gabe, nora hel daitekeen eta nora heldu nahi dugun argiro jakin gabe, inora ez heltzeko arrisku bizia dagoelakoan nago.

- Aurrekoarekin loturik, arloan arloko hizkera berezia erabiltzeko ohitura duen gizataldea behar da. Hau da, hizkera berezi hori erabiliz elkarrekin komunikatzeko eta jakintza-arlo horretan informazioa trukatzeko gai den hiztun-multzoa. Gizatalde hori arlo horretako espezialistek eta ikasleek osotua izan ohi da batzutan. Prezeski, aipaturiko hiztun-multzo horri zuzentzen zaio itzulpena, bere eguneroko praktikan lagungarri gerta dakion. Zer laguntza eta mesede etor dakioke, ordea, berarentzat arrotz suertatzen den hizkeran idatzia den itzulpenetik?

- Baldintzen aipamen honetan azkena datorrena, itzultzaileei buruzkoa da. Labur esanda, edonork ezin dezake edozer itzul, hots, itzultzaileak itzuliko duen liburuko jakintza-gaian aritua izan behar duela uste dut, ez bait da nahikoa hizkuntzaren ezagumendu orokorra, berori zabala izan arren ere. Beste hitz batzutaz esanda, liburu espezializatuen itzulpena jakintza-arlo horretan espezializaturik daudenek egin behar dute, edota bestela itzulpena desegokia izateko arrisku handiegia izango da.

Abiapuntu honekin, aitzinsolasaren irakurleak eritzi ezkorra atera dezake lehenengo begikolpez, izkutuan itzulpenaren aurkako zerbait baineukan, baina ez da horrela. Soilik esan gura nuke, aipaturiko pausoak nolabait eman aurretik, eta era horretako joera bultzatu aurretik, arriskugarria gerta daitekeela. Are gehiago, ene eritzian, orain arte liburu klasiko batzuren itzulpenean egin den lan erraldoiak ez du behar adinako fruiturik eman zenbait kasutan, azaldutako baldintza horietatik urrunegi geundelako. Horrek ez du esan nahi etorkizunerako lan horiek baliagarri izango ez direnik, egokitasunari begira egindako aukeran desegoki gerta daitezkeenik baizik, epe labur eta ertainean behintzat.

Hain zuzen, eztabaida honen gakoa, euskalgintzan ditugun baliabide murritzen erabilpenaren optimizazioan dagoela deritzot. Horregatik, zientziaren arloan euskaraz lan egitean harturiko eskarmentuan oinarriturik, optimoa ez bada ere biderik onenetik hurbil dagoelakoan, bestelako praktika-modua proposatu izan diet neure lankideei. Ene ustez, lehenengo eta behin hizkuntza bera trebatu behar da, horretarako bereziki antolaturiko mintegi eta lantaldeen bidez, bertan hizkuntzak dituen arazoak gainditzeko proposamenak eginez eta mota desberdinetako aukeren arteko eztabaida landuz. Horretan unibertsitateko irakasleek zeresan handia daukate, beren irakasgaiak prestatzeko eskuzkribuen laguntzaz beste irakasleen eta ikasleen eritziak eta kritikak bilduz. Mintegi eta irakastaldien bidez, hizkera espezializatu berezia normaltasunez erabiliko duen gizataldea eginez eta trinkotuz doa. Hori gertatuz doan neurrian, oso egokia da liburu desberdinetako laburpen edo sintesi berriak egitea, horrela egunetik egunera osotuz doan behin-behineko materiala sortuz. Material hori **euskaraz pentsatuz birsortu** behar dela uste dut nik, bestela beste hizkuntzen menpekotasun erabatekoan erortzeko arriskuan gaudela uste bait dut. Gainera, gaur eguneko bitarteko teknikoen laguntzaz –batez ere ordenadoreenaz– prozesu hori inolako arazorik gabe eraman daiteke aurrera, argitarapen txukun eta egokiak prestatuz. Horrela eginez, hizkera berezitua egin-samarra gertatzen den neurrian, orduan izan daiteke hurrengo pausoa emateko garaia, liburu klasikoak itzuliz.

Baina ez pentsa, horrek itzulpengintzan jadanik abiatu behar ez dugunik esan nahi duenik. Prezeski, euskara zientifikoaren arloan, talde batzuk eginiko lanari esker –Elhuyar, UZEI eta unibertsitateko euskara zientifikoan diharduten irakasleen taldeak ezin utz ditzaket aipatu gabe–, gaur egunean zientziaren oinarrizko zenbait arlotan euskara ia erabat

prestaturik dago, normaltasun osoz aritzeko. Holako zerbait da, Piskunov liburuan ageri diren gaiekin gertatzen dena.

Eskuliburu honen itzulpena edo, zehaztasunez hitz egiteko nahiago bada, **euskal bertsioa**, Matematikaren arloan adituak diren irakasleek eta zientzilariek egina izan da, unibertsitate eta talde desberdinetakoak gainera. Matematikari horiek guztiok arituak dira euskarazko irakaskuntzan, dela UPVn dela UEUn, eta, beraz, liburuan ageri den hizkera, praktikan oinarriturik dago, bertan matematikari euskaldunen arteko akordioa bildu delarik. Ikasleek ere ezagun dute hizkera-modu hori, horrela komunikazioaren bidea erabat irekirik geratu delarik. Nola ez, ba, egoki ikusi itzulpen bidez datorkigun liburu klasiko hau? Alde horretatik guztiz egokitzat daukat.

Liburuaren edukinari dagokionez, ez dut ezer berezirik esatekorik, berori darabilten gehienek diotenaz gain. Alegia, kalkulu diferentzialaren eta integralaren arloko bilduma zabal eta praktikoa dela, ez soilik matematikarientzat egokia, baizik eta oso erabilgarria unibertsitateko zientzia eta ingeniaritzako irakasle eta ikasle guztiontzat ere. Eta, zer esanik ez, orain arte hizkuntza desberdinetako itzulpenetan niretzat ere kontsulta-liburu baliagarria izanda, hemendik aurrera askoz gehiago erabiliko dudala euskal bertsioa.

Eskerrik beroenak eta zorionak euskal bertsioa prestatzen aritu izan diren guztiei.

J.R. Etxebarria
Leioan, 1992.eko irailaren 27an

EUSKARATZAILEEN OHARRA

Liburu hau N. Piskunov-en "Kalkulu diferentziala eta integrala" lanaren euskarazko lehenengo bertsioa da. Honetarako errusierazko 7. argitarapenean oinarritu den gaztelanierazko lehenengo bertsioaren 6. argitarapena (1983) erabili da. Gaztelanierazko bertsioa K. Medkov injineruak egin du eta MIR argitaletxeak kaleratu du. Euskarazko bertsioa ere bi liburukitan argitaratuta dago. Lehenengo liburukian I-XII gaiak eta bigarrenean XIII-XIX gaiak daude.

Hizkuntza aldetik x letraren erabilera aipatzekoa. x letraren euskal izena *ixa* da, eta hori izan da liburuan erabili dena. Horregatik, x -k, x -ren, x -rekiko, e.a. egiturak ikusi ahal izango dituzu. Bestalde, baldintzazko esaldietan erabiltzen den "orduan" leloa ez da idatzi. Azkenik esan, adibide eta ariketetako enuntziatuetan aditzaren partizipioa erabili dugula irakurketa errazteko asmoz.

Hiztegiari begira, UZEIren Matematika hiztegian oinarritu da. Hala ere, kontzeptu berri asko sortu behar izan da.

Euskaratze-lanetan zortzi lagun aritu dira. Lan osoa homogenotu da, norberaen estiloa eta ekarpena ahalik eta gehien errespetatuz.

I. GAIA

ZENBAKIA. ALDAGAIA. FUNTZIOA

§ 1. Zenbaki errealak. Zenbakizko ardatzeko puntuen bidezko zenbaki errealen adierazpena

Matematikaren oinarrizko kontzeptuetariko bat zenbakia da. Zenbakiaren kontzeptua aintzinean sortu zen eta denboran zehar hedatu eta orokortu da.

Zenbaki oso eta zatikiarrei, positibo zein negatiboei, zero zenbakia barne delarik, *zenbaki razional* deritze. Edozein zenbaki razional $\frac{p}{q}$ zatikiaren bidez adieraz daiteke, p eta q bi zenbaki oso izanik. Adibidez:

$$\frac{5}{7}; \quad 1,25 = \frac{5}{4}$$

Batez ere, p zenbaki osoa $\frac{p}{1}$ zatiki bezala idatz daiteke, p eta 1 zenbaki oso direlarik. Adibidez:

$$6 = \frac{6}{1}; \qquad 0 = \frac{0}{1}$$

Zenbaki razionalak, frakzio hamartar finitu edo frakzio periodiko infinituen bidez idatz daitezke. Frakzio hamartar infinitu eta ez-periodikoen bidez idazten diren zenbakiei *zenbaki irrazional* deritze; adibidez: $\sqrt{2}, \sqrt{3}, 5 - \sqrt{2}$, etab..

Zenbaki razional eta irrazionalen bildurari zenbaki *errealen* multzo deritzo. Beraien magnitudearen arabera ordenatuz multzo ordenatua osotuko dute, hau da, edozein x eta y bi zenbaki errealetarako ondoko erlazioetariko bat eta soilik bat betetzen da.

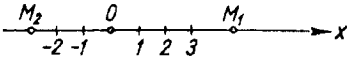
$$x < y, \ x = y, \ x > y$$

Zenbaki errealak zenbakizko ardatzeko puntuen bidez adieraz daitezke. Ondoko ezaugarriak dituen zuzen infinituari *zenbakizko ardatz* deritzo:

- jatorria deritzon O puntua;
- gezi batez adierazten den norantza positiboa;
- eskala edo neurri-unitatea.

Oro har, zenbakizko ardatza horizontalki ipiniko dugu, ezkerretik eskuinerako norantza positibotzat joko dugularik.

x_1 zenbakia positiboa bada, O jatorriaren eskuin aldean dago eta $OM_1 = x_1$ distantziara kokatzen den M_1 puntuaren bidez adierazten da; x_2 zenbakia negatiboa bada, O puntuaren ezker aldean dago eta $OM_2 = -x_2$ distantziara kokatzen den M_2 puntuaren bidez adieraziko dugu (1. irudia). O puntuak zero zenbakia adierazten du. Bistakoa denez, zenbaki erreal bakoitza zenbakizko ardatzeko puntu bakar baten bidez adierazten da. Zenbaki erreal desberdinak



1. IRUDIA

ardatzeko puntu desberdinen bidez adierazten dira. Hots, zenbakizko ardatzeko puntu bakoitzak zenbaki erreal bakar bat adierazten du, razionala zein irrazionala.

Beraz, zenbaki erreal guztien eta zenbakizko ardatzeko puntu guztien artean korrespondentzia biunibokoa existitzen da: zenbaki bakoitzari zenbakizko ardatzean berori adierazten duen puntu bakar bat dagokio, eta, era berean, puntu bakoitzari zenbaki erreal bakar bat dagokio, puntua zenbakiaren irudia delarik. Beraz, «x zenbakia» eta «x puntua» kontzeptuak sinonimoak dira eta horrela erabiliko ditugu liburuan zehar.

Onar dezagun, frogapenik gabe, zenbaki errealen multzoaren hurrengo propietate garrantzitsua: *edozein bi zenbaki errealen artean beti existitzen dira zenbaki razional eta irrazionalak.* Geometrikoki, propietate horren esanahia hauxe da: *zenbakizko ardatzean edozein bi punturen artean beti daude puntu razionalak eta puntu irrazionalak.*

Ondorioz, teoria eta praktikaren arteko nolabaiteko «zubi» gisa erabilgarria izango den hurrengo teorema enuntziatuko dugu.

Teorema. Edozein α zenbaki irrazional, zenbaki razionalen bidez adieraz daiteke nahi bezain zehazki.

Izan ere, α zenbaki irrazionala positiboa izanik, kalkula dezagun α zenbakia $\frac{1}{n}$ baino errore txikiago batez (adibidez, $\frac{1}{10}, \frac{1}{100}$, etab.).

α zenbakia edozein izanik, ondoz ondoko N eta $N+1$ bi zenbaki osoren artean kokatuta egongo da. N eta $N+1$ zenbakien arteko tartea n parte berdinetan zatika dezagun. Orduan, α zenbakia $N+\frac{m}{n}$ eta $N+\frac{m+1}{n}$ bi zenbaki razionalen artean kokatuta egongo da. Zenbaki bi horien kendura $\frac{1}{n}$ denez gero, bakoitzak aldez aurretik finkaturiko zehaztasunaz adierazten du α zenbakia: lehenengoak behetik eta bigarrenak goitik.

Adibidea. $\sqrt{2}$ zenbaki irrazionala zenbaki razionalen bidez honelaxe adierazten da:

1,4 eta 1,5, $\frac{1}{10}$ baino txikiagoa den erroreaz,

1,41 eta 1,42, $\frac{1}{100}$ baino txikiagoa den erroreaz,

1,414 eta 1,415, $\frac{1}{1000}$ baino txikiagoa den erroreaz, etab.

§ 2. Zenbaki errealen balio absolutua

Aurrera jarraitzeko derrigorrezkoa den zenbaki errealen balio absolutuaren kontzeptua landuko dugu.

Definizioa. Hurrengo baldintzak betetzen dituen zenbaki erreal ez negatiboa (beronen notazioa $|x|$ delarik) x zenbaki errealaren *balio absolutua* (edo *modulua*) dela esango dugu:

$|x| = x,\ x \geq 0$ bada;
$|x| = -x,\ x < 0$ bada;

Adibideak. $|2| = 2$; $|-5| = 5$; $|0| = 0$

Definiziotik, edozein x zenbakitarako $x \leq |x|$ betetzen dela ondorioztatzen da.

Balio basolutuen zenbait propietate azter ditzagun:

1. *Zenbaki errealen arteko batura algebraikoaren balio absolutua ez da batugaien balio absolutuen arteko batura baino handiagoa*:

$$|x + y| \leq |x| + |y|$$

Frogapena. Biz $x + y \geq 0$. Orduan, $|x + y| = x + y \leq |x| + |y|$ ($x \leq |x|$ eta $y \leq |y|$ bait dira).

Orain, demagun $x + y < 0$ dela. Orduan: $|x + y| = -(x + y) = (-x) + (-y) \leq |x| + |y|$ frogatu nahi genuen bezala.

Frogapen horrek edozein batugai-kopurutarako ere balio du.

$$|-2 + 3| < |-2| + |3| = 2 + 3 = 5 \text{ edo } 1 < 5;$$
$$|-3 - 5| \leq |-3| + |-5| = 3 + 5 = 8 \text{ edo } 8 = 8$$

2. *Bi zenbaki errealen arteko kenduraren balio absolutua ez da kenkizun eta kentzailearen balio absolutuen arteko kendura baino txikiagoa*:

$$|x - y| \geq |x| - |y|$$

Frogapena. Demagun $x - y = z$ dela. Orduan $x = y + z$, eta aurretik frogaturikoaren arabera hurrengoa dugu:

$$|x| = |y + z| \leq |y| + |z| = |y| + |x - y|,$$

nondik

$$|x| - |y| \leq |x - y|,$$

frogatu behar zen bezala.

3. *Biderkaduraren balio absolutua faktoreen balio absolutuen arteko biderkadura da*:

$$|xyz| = |x|\ |y|\ |z|$$

4. *Zatiduraren balio absolutua, zatikizunaren balio absolutua eta zatitzailearena zatituz lortuko da*:

$$\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}.$$

Azken bi propietateak balio absolutuaren definiziotik zuzenean ateratzen dira.

§ 3. Magnitude aldakor eta konstanteak

Magnitude fisiko batzuk neurtzerakoan, adibidez, denbora, luzera, azalera, bolumena, masa, abiadura, presioa, tenperatura, etab., beraien zenbakizko balioak lortzen dira. Matematikaren bidez magnitudeak aztertzen dira, horien edukin zehatzaren abstrazioa eginez. Horregatik, magnitudeei buruz hitzegitean, beraien zenbakizko balioak kontuan izango ditugu. Badira fenomenoak zeintzuetan magnitude batzuk aldatzen diren, hots, beraien zenbakizko balioa aldatzen da, beste magnitude batzuren balioa konstante mantentzen delarik. Adibidez, puntu baten higidura uniformean denbora eta distantzia aldatzen dira, abiadura konstantea mantentzen delarik.

Balio desberdinak har ditzakeen magnitudeari, *magnitude aldakor* edo hitz bakar batez esanda, *aldagai* deritzo. Bere balioa aldatzen ez duen magnitudeari *konstante* esaten zaio. Hemendik aurrera, aldagaiak $x,y,z,u,...$ etab. letren bidez izendatuko ditugu eta magnitude konstanteak $a,b,c,...$, etab. letren bidez.

Oharra. Matematikan, maiz, konstanteak magnitude aldakor edo aldagaien kasu berezitzat jotzen dira: konstantea balio guztiak berdinak dituen aldagaia da.

Hala ere, fenomeno fisiko desberdinak aztertzerakoan, magnitude bera kasu batzutan aldakorra eta beste batzutan konstantea izan daitekeela kontutan hartzea komeni da. Adibidez, higidura uniformedun gorputzaren abiadura magnitude konstantea da, uniformeki azeleraturiko higiduran magnitude hori aldakorra delarik.

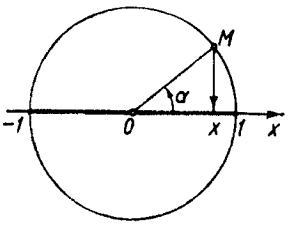
Edozein fenomenotan zenbakizko balioa aldaezin mantentzen duten magnitudeei *konstante absolutu* deritze. Adibidez, zirkunferentziaren luzera eta diametroaren arteko arrazoia magnitude konstantea da, beronen balioa $\pi \approx 3{,}14159$ delarik.

Aurrerago ikusiko dugun bezala, aldagaiaren kontzeptua oinarrizkoa da kalkulu diferentzial eta integralean. Friedrich Engels-ek *Naturaren Dialektikan* idazten duen bezala: «Matematiken bira-puntua Descartes-en magnitude aldakorra izan zen. Hark matematiketan higidura sartu zuen eta, berarekin, dialektika eta baita ere, beraz, eta ezinbestez, kalkulu diferentzial eta integrala».

§ 4. Aldagaiaren definizio-eremua

Magnitude aldakor batek zenbakizko balio desberdinak har ditzake. Aztertzen den problemaren arabera, balio horien multzoa alda daiteke. Adibidez, baldintza normaletan ura berotzean, beronen tenperaturak 15° C-tik 18° C-ra bitarteko ingurugiro-tenperaturatik 100° C-ko irakite-punturaino jo dezake. Beste adibide bat: $x = \cos\alpha$ aldagaiak -1 eta $+1$en arteko edozein balio har dezake.

Magnitude aldakor baten balioak zenbakizko ardatzeko puntuen bidez geometrikoki adierazten dira. Adibidez, $x = \cos\alpha$ aldagaiaren balioak edozein α-tarako, zenbakizko ardatzean -1 eta $+1$ balioen artean kokatzen diren puntuen multzoaren bidez adierazten dira, -1 eta $+1$ barne direlarik (2. irudia).



2. IRUDIA

Definizioa. Aldagai batek har ditzakeen zenbakizko balioen multzoari aldagaiaren *definizio-eremu* deritzo.

Aipa ditzagun orain testuan zehar maiz azalduko diren zenbait aldagairen definizio--eremuak.

a eta b muturdun *tarte irekia* edo *tartea*, a eta b ($a < b$) emaniko bi zenbakiren artean kokaturiko x zenbakizko balio guztien multzoa da, a eta b muturrak kanpoan geratzen direlarik. Hori (a,b) edo $a < x < b$ idazkeren bidez adieraziko dugu.

a eta b muturrak barne direnean, a eta b-ren artean dauden x zenbakien multzoari *tarte itxi* edo *zuzenki* deritzo. Hori $[a,b]$ idazkera edo $a \leq x \leq b$ desberdintzen bidez adieraziko dugu.

a eta b zenbakietariko bat (a adibidez) tartearen barnean dagoenean bestea kanpoan geratzen delarik, tarte erdi irekia dugu (b-n irekia). Berau, $a \leq x < b$ desberdintzen edo $[a,b)$ idazkeraren bidez adieraz daiteke. b zenbakia tartean badago a ez dagoelarik, a-n irekia den $(a,b]$ tarte erdi irekia dugu eta ondoko desberdintzen bidez adieraz dezakegu:

$$a < x \leq b.$$

x aldagaiak a baino handiagoak diren balio guztiak hartzen dituenean, $(a,+\infty)$ tartea izango dugu eta hurrengo ohizko desberdintzen bidez adieraziko dugu:

$$a < x < +\infty$$

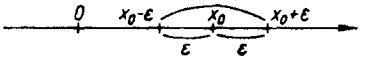
Modu berean, ondoko tarte infinituak aipa ditzakegu:

$$a \leq x < +\infty; \quad -\infty < x < c; \quad -\infty < x \leq c; \quad -\infty < x < +\infty$$

Adibidea. α balioa edozein izanik $x = \cos\alpha$ aldagaiaren definizio-eremua $[-1,1]$ tarte itxia da, $-1 \leq x \leq 1$ desberdintzen bidez adieraz dezakegularik.

Aurreko definizioetan «zenbaki» hitzaren ordez «puntu» hitza erabil dezakegu. Adibidez: a eta b-ren artean kokaturiko puntuen multzoa *tarte itxia* dela esango dugu, a eta b muturrak multzo horren barnean direnean.

x_0 puntua barnean duen edozein (a,b) tarte irekiri *ingurune* deritzo, hau da, $a < x_0 < b$ betetzen duten a eta b muturdun edozein tarte irekiri. Maiz (a,b) tartea, x_0 erdiko puntua delarik aukeratzen da. Honela denean, x_0 puntuari *ingurunearen zentru* deritzo eta $\dfrac{b-a}{2}$ magnitudeari *ingurunearen erradio*. 3. irudian x_0 zentrudun eta ε erradiodun $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ tartea adierazten da.



3. IRUDIA

§ 5. Aldagai ordenatua. Aldagai gorakorrak eta beherakorrak. Aldagai bornatua

Aldagaiaren definizio-eremua ezagutzen denean, berorren balioen edozein bikotetarako zein den «aurrekoa» eta «atzekoa» zehaztu daitekeelarik, aldagai hori *ordenatua* dela esango dugu. Definizio honetan «aurreko» eta «atzeko» kontzeptuak ez daude denborari lotuak, aldagaiaren bi balio horiek ordenaturik dauden modua adierazten dute besterik gabe.

$x_1, x_2, x_3, \ldots, x_k, \ldots$ zenbaki-segida aldagai ordenatutzat jo dezakegu, non $k' < k$ denean, $x_{k'}$ balioa aurrekoa eta x_k atzekoa direlarik eta beraz, bietatik handiagoa zein den jakiteak garrantzirik ez duelarik.

1. Definizioa. Aldagaiaren balio bakoitza aurreko balio guztiak baino handiagoa denean, aldagaia *gorakorra* dela esango dugu. Alderantziz, balio bakoitza aurreko balio guztiak baino txikiagoa denean aldagaia *beherakorra* izango da.

Aldagai gorakorrei eta beherakorrei *monotono* deritze.

Adibidea. Zirkunferentzia batean inskribaturiko poligono erregular baten aldeen kopurua bikoizterakoan, poligonoaren S azalera aldagai gorakorra da. Zirkunferentzia bati zirkunskribaturiko poligono erregular baten aldeen kopurua bikoizterakoan, poligono horren azalera aldagai beherakorra da. Bestalde, gorakorrak edo beherakorrak ez diren

aldagaiak badirela kontuan izango dugu. Adibidez, α zenbakia $[0, 2\pi]$ tartean handituz doanean $x = \sin\alpha$ aldagaia ez da monotonoa. Hasieran 0tik 1era hazten da, ondoren 1etik -1era txikiagotzen da eta azkenik, -1etik 0ra hazten da.

2. Definizioa. x aldagai baten balio guztiek

$$-M \leq x \leq M, \text{ hau da, } |x| \leq M$$

betetzen badute, $M > 0$ konstante baterako, x aldagaia *bornatua* dela esango dugu.

Hau da, aldagaiaren balio guztiak $[-M,M]$ tarte itxi batean kokatzen badira, aldagaia bornatua dela esango dugu. Hala ere, aldagaiak ez du $[-M,M]$ tarteko balio guztiak zertan hartu behar. Adibidez, $[-2,2]$ tarteko balio razionalak har ditzakeen aldagaia bornatua da. Hala ere, ez du zertan tarte horretako balio guztiak hartu behar (balio irrazionalak hain zuzen ere).

§ 6. Funtzioa

Naturako zenbait fenomeno aztertzerakoan eta problema teknikoak, beraz, matematikoak, ebazterakoan magnitude batek beste baten aldakuntzarekiko duen aldakuntza aztertzeko beharra sortzen da. Adibidez, higidura aztertzerakoan, ibilbidea denboraren menpeko den aldagaitzat jotzen da.

Ikus dezagun beste adibide bat. Jakina denez, $Q = \pi R^2$ formula ezagunak zirkuluaren azalera berorren erradioaren funtzio bezala ematen du. R erradioak zenbakizko balio desberdinak hartzen dituenean, Q azalerak ere balio desberdinak hartzen ditu. Ikusten dugunez, magnitude baten aldakuntza beste baten aldakuntzaren kausa da. Aipaturiko adibidean, Q azalera R erradioaren araberako funtzioa da. Eman dezagun «funtzio» kontzeptuaren definizioa.

1. Definizioa. x aldagaiak eremu batetan hartzen duen balio bakoitzari y aldagaiaren balio bat dagokionean, y aldagaia x-ren *funtzio* dela esaten da. Aurrekoa honela adieraz daiteke sinbolikoki:

$$y = f(x), y = \varphi(x), \text{ etab.}$$

x aldagaiari *aldagai independente* edo *argumentu* deritzo. x eta y aldagaien arteko erlazioari *menpekotasun funtzional* deritzo. Menpekotasun funtzionalaren $y = f(x)$ notazio sinbolikoan agertzen den f letrak, y-ri dagokion balioa lortzeko x-rekin zenbait eragiketa egin behar direla esan nahi du. $y = f(x)$, $u = \varphi(x)$, etab. notazioen ordez,

batzutan $y = y(x)$, $u = u(x)$, etab. erabiltzen dira. Horrela denean, y, u, etab. letrek menpeko aldagaiak adierazten dituzte eta bestalde x-rekin egin beharko diren eragiketen multzoaren ikurtzat jo daitezke.

C konstantea denean, $y = C$ notazioaren bidez, x-ren balioa edozein izanik C balio konstantea duen funtzioa adierazten da.

2. Definizioa. y funtzioaren balioak $f(x)$ legearen bidez emanik daudenean x balioen multzoari *funtzioaren definizio-eremu* deritzo.

1. Adibidea. $y = \sin x$ funtzioa x-ren balio guztietarako definituta dago. Beraz, bere definizio-eremua hurrengo tarte infinitua da

$$-\infty < x < +\infty$$

1. Oharra. x eta $y = f(x)$ aldagaien artean menpekotasun funtzionala badago eta beroriek aldagai ordenatutzat jotzen baditugu, $x*$ balioa $x**$-en atzekoa denean $y* = f(x*)$ funtzioaren balioa $y** = f(x**)$-en atzekoa dela esango dugu. Honek, hurrengo definizioa ematera garamatza.

3. Definizioa. Argumentu edo aldagai independentearen balio handiagoei $y = f(x)$ funtzioaren balio handiagoak dagozkienean, $y = f(x)$ funtzioa *gorakorra* dela esaten da. Modu berean, funtzio *beherakorra* definitzen da.

2. Adibidea. $Q = \pi R^2$ funtzioa $0 < R < +\infty$ tartean gorakorra da, R-ren balio handiagoei Q-ren balio handiagoak bait dagozkie.

2. Oharra. Batzutan, «funtzio» kontzeptuaren definizioan, eremu bateko x balioei y-ren balio bat baino gehiago dagozkiela onartzen da, balio horien kopurua infinitua ere izan daitekeelarik. Kasu horretan funtzioa *multiformea* dela esaten da, aurrerago definitu dugun funtzioari *uniforme* deritzolarik. Hemendik aurrera, funtzio uniformeei funtzio deituko diegu besterik gabe, eta nahaste-arazorik sort ez dadin, funtzio multiformeak erabiltzerakoan horrelakoak direla adieraziko dugu.

§ 7. Funtzioen zenbait adierazpide

I. TAULEN BIDEZ EMANIKO FUNTZIOAK

Prozedura honetan, argumentuaren balioak era ordenatuan jartzen dira, $x_1, x_2, \ldots, x_n$, eta modu berean y funtzioari dagozkion $y_1, y_2, \ldots, y_n$ balioak idazten dira.

x	x_1	x_2	...	x_n
y	y_1	y_2	...	y_n

Horrelakoak dira, esate baterako, funtzio trigonometriko eta logaritmikoen taulak.

Neurturiko magnitudeen artean existitzen den menpekotasun funtzionala azaltzen duten taulak, zenbait fenomenoren azterketa esperimentalaren ondorio gisa ager daitezke. Honela, adibidez, egun batean zehar estazio metereologiko batean neurturiko airearen tenperaturaren datuak, hurrengo taulan ematen dira:

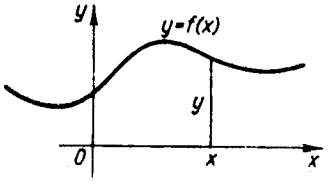
t denborarekiko (ordutan) T tenperaturaren balioa (gradu zentigradutan)

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9
T	0	–1	–2	–2	–0,5	1	3	3,5	4

Taula horrek, T t-ren funtzioan ematen du.

II. FUNTZIOEN ADIERAZPEN GRAFIKOA

Koordenatu angeluzuzen edo kartesiarren sistemaren planoan $M(x,y)$ puntuen multzoa emanik eta Oy ardatzaren paraleloa den edozein zuzenetan gehienez multzoko puntu bat badago, multzo horrek $y = f(x)$ funtzio bat definitzen duela esan dezakegu. Argumentuaren balioak puntu horien abzisak dira, funtzioaren balioak puntu horiei dagozkien ordenatuak direlarik (4. irudia).



4. IRUDIA

Aldagai independentearen balioak abzisak eta funtzioarenak ordenatuak direneko (Oxy) planoko puntuen multzoari funtzioaren *grafiko* deritzo.

III. FUNTZIOAREN ADIERAZPEN ANALITIKOA

Hasteko,«adierazpen analitiko» kontzeptuaren esanahia finkatuko dugu. Magnitude konstante eta aldakorrak adierazten dituzten zifra eta letrekin emaniko ordena batean egin

behar diren eragiketa matematiko batzuen multzoa adierazten duen notazio sinbolikoari *adierazpen analitiko* deritzo. Eragiketa matematikoen multzoan eragiketa elementalak (batuketa, kenketa, erroketa, etab.) ezezik kurtso hau garatu ahala determinatuko direnak ere sartuko dira.

Ondokoak, adierazpen analitikoen adibideak dira:

$$x^4 - 2; \quad \frac{\log x - \sin x}{5x^2 + 1}; \quad 2^x - \sqrt{5 + 3x}, \text{ etab.}$$

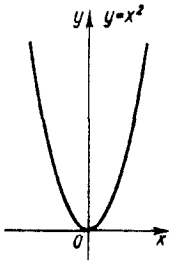
$y = f(x)$ menpekotasun funtzionalean f adierazpen analitikoa bada, x-ren funtzioa den y analitikoki emanik dagoela esango dugu. Hurrengoak, analitikoki emaniko funtzioen adibideak dira:

1) $y = x^4 - 2$; 2) $y = \dfrac{x+1}{x-1}$; 3) $y = \sqrt{1 - x^2}$;

4) $y = \sin x$; 5) $Q = \pi R^2$, etab.

Hor, funtzioak formula bakar baten bidez analitikoki adierazita daude (bi adierazpen analitikoen arteko berdintzari formula deritzo). Kasu hauetan definizio-eremu naturalaz hitzegin dezakegu.

Adierazpen analitikoak, edo berdintzaren bigarren atalak, ondo definituriko balioa duen x balioen multzoari, analitikoki definiturik dagoen *funtzioaren definizio-eremu natural* deritzo. Honela, adibidez, $y = x^4 - 2$ funtzioaren definizio-eremu naturala $-\infty < x < +\infty$ tarte infinitua da, funtzioa x-ren balio guztietarako definituta bait dago.



5. IRUDIA

$y = \dfrac{x+1}{x-1}$ funtzioa, x-ren balio guztietarako definituta dago, izendatzailea ezabatzen duen $x = 1$ balioa izan ezik. $y = \sqrt{1 - x^2}$ funtzioaren definizio-eremu naturala $-1 \le x \le 1$ tarte itxia da, etab..

Oharra. Batzutan, funtzioaren definizio-eremuaren parte bat besterik ez dugu kontutan hartuko. Honela, zirkuluaren Q azalera, $Q = \pi R^2$ formularen bidez R erradioaren funtzio bezala adierazten da. Problema geometriko berezi hori aztertzerakoan funtzio horren definizio-eremua $0 < R < +\infty$ tarte infinitua dela bistakoa da; ordea, funtzioaren definizio-eremu naturala $-\infty < R < +\infty$ tarte infinitua da.

$y = f(x)$ funtzioa analitikoki emanik dagoenean, Oxy koordenatu-planoan grafikoki adieraz daiteke. Honela, adibidez, $y = x^2$ funtzioaren grafikoa 5. irudian agertzen den parabola da.

§ 8. Funtzio elemental nagusiak. Funtzio elementalak

Analitikoki adierazten diren *funtzio elemental nagusiak* hurrengoak dira:

I. *Funtzio potentziala*: $y = x^\alpha$, α zenbaki erreala delarik[1].

II. *Funtzio esponentziala*: $y = a^x$, a zenbaki positiboa eta 1en desberdina delarik ($a > 0, a \neq 1$).

III. *Funtzio logaritmikoa*: $y = \log_a x$, oinarria deritzon a zenbakia positiboa eta 1en desberdina delarik.

IV. *Funtzio trigonometrikoak*:

$$y = \sin x,\ y = \cos x,\ y = \tan x,\ y = \cot x,\ y = \sec x,\ y = \operatorname{cosec} x.$$

V. *Alderantzizko funtzio trigonometrikoak*:

$$y = \arcsin x,\quad y = \arccos x,\quad y = \arctan x,$$
$$y = \operatorname{arccot} x,\quad y = \operatorname{arcsec} x,\quad y = \operatorname{arccosec} x.$$

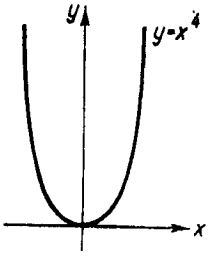
Definizio-eremuak emango ditugu eta funtzio elemental nagusien grafikoak eraikiko ditugu.

FUNTZIO POTENTZIALA, $y = x^\alpha$

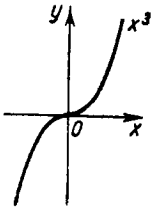
1. α zenbaki positibo osoa da. Funtzioa $-\infty < x < +\infty$ tarte infinituan definituta dago. Kasu honetan, 6. eta 7. irudien bidez α balio desberdinei dagozkien funtzioen grafikoak adierazten dira.

---

1) α zenbaki irrazionala bada, funtzio hori logaritmo eta antilogaritmoaren bidez kalkulatzen da: $\log y = \alpha \log x$, $x > 0$ suposatzen da.

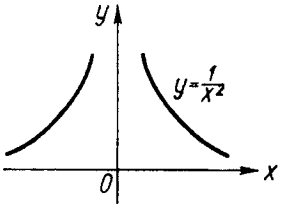


6. IRUDIA

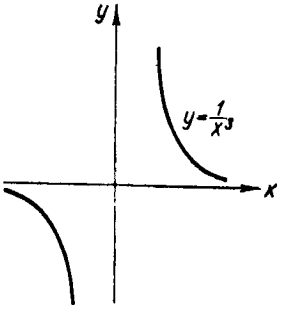


7. IRUDIA

2. α zenbaki negatibo osoa da. Kasu honetan $x = 0$ izan ezik, funtzioa x-ren balio guztietarako definituta dago. 8. eta 9. irudietan funtzio honen grafikoak adierazten dira α-ren balio desberdinetarako.

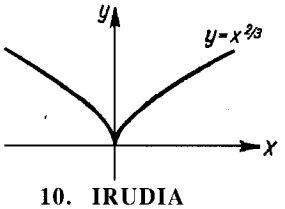


8. IRUDIA

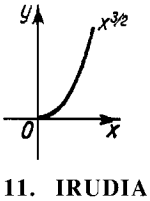


9. IRUDIA

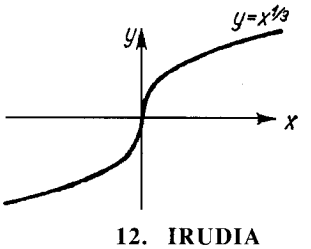
10., 11. eta 12. irudietan funtzio potentzialaren grafikoak adierazten dira α-ren balioak zenbaki razional zatikiarrak direnean.



10. IRUDIA



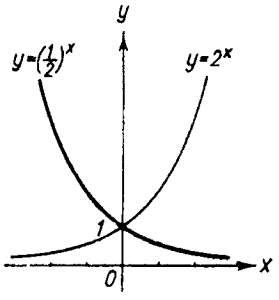
11. IRUDIA



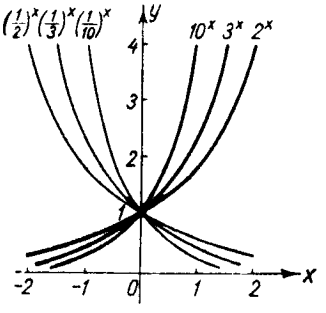
12. IRUDIA

FUNTZIO ESPONENTZIALA, $y = a^x$; $a > 0$; $a \neq 1$

Funtzio hau x aldagaiaren balio guztietarako definituta dago. Beronen grafikoa 13. eta 14. irudietan adierazten da.



13. IRUDIA



14. IRUDIA

FUNTZIO LOGARITMIKOA, $y = \log_a x$; $a > 0$; $a \neq 1$

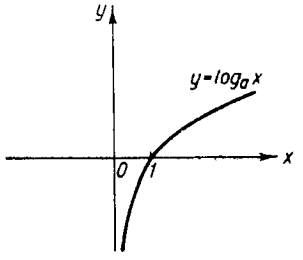
Funtzio hau $x > 0$ balioetarako definituta dago. Beronen grafikoa 15. irudian azaltzen da.

FUNTZIO TRIGONOMETRIKOAK

$y = \sin x$, etab. formuletan x aldagai independentea radianetan adierazten da. Aipaturiko funtzio trigonometriko guztiak periodikoak dira. Beren definizio orokorra hau da:

1. Definizioa. c zenbaki konstante bat existitzen bada, zeinetarako x aldagai independenteari berori batu edo kentzerakoan funtzioaren balioa aldatzen ez den, hots, $f(x+c) = f(x)$, $y = f(x)$ funtzioa *periodikoa* dela esango dugu. Zenbaki konstante horren balio minimoari funtzioaren *periodo* deituko diogu eta berau $2l$ izendatuko dugu hemendik aurrera.

Definizioaren arabera, $y = \sin x$ funtzioa periodikoa da, periodoa 2π delarik: $\sin x = \sin(x + 2\pi)$. $y = \cos x$ funtzioaren periodoa 2π da baita ere. $y = \tan x$ eta $y = \cot x$ funtzioen periodoa π da.



15. IRUDIA

$y = \sin x$ eta $y = \cos x$ funtzioak x-ren balio guztietarako definiturik daude. $y = \tan x$ eta $y = \sec x$ funtzioak, $x = (2k+1)\dfrac{\pi}{2}$ $(k=0,1,2,...)$ balioetan izan ezik, puntu guztietan daude definiturik; $y = \cot x$ eta $y = \operatorname{cosec} x$, $x = k\pi$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$ balioetan izan ezik, x-ren balio guztietarako daude definituta.

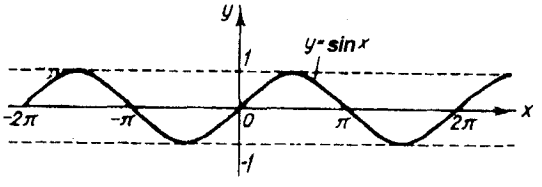
Funtzio trigonometrikoen grafikoak 16-19 irudietan azaltzen dira. Aurrerago, alderantzizko funtzio trigonometrikoak zehaztasunez aztertuko ditugu.

Sar dezagun orain «funtzioaren funtzio» kontzeptua. y aldagaia u-ren funtzioa bada eta u bera x aldagaiaren funtzioa bada, y aldagaia x-ren menpekoa da baita ere, $y = F(u)$ eta $u = \varphi(x)$ badira, y x-ren ondoko funtzioa izango da:

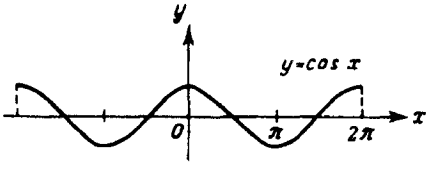
$$y = F[\varphi(x)].$$

Azken horri *funtzioaren funtzio* edo *funtzio konposatu* deritzo.

1. Adibidea. Bira $y = \sin u$ eta $u = x^2$, $y = \sin(x^2)$ x-ren funtzio konposatua da



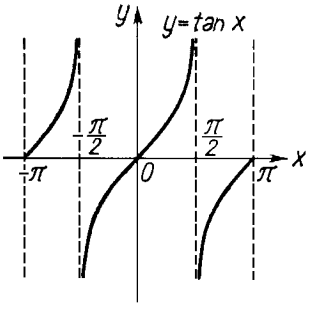
16. IRUDIA



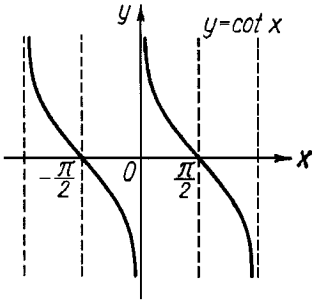
17. IRUDIA

1. Oharra. $y = F[\varphi(x)]$ funtzioaren definizio-eremua $u = \varphi(x)$ funtzioaren eremu osoa edo $\varphi(x)$ balioa F funtzioaren definizio-eremuko puntua deneko x-ren balioen multzoa da.

2. Adibidea. $y = \sqrt{1 - x^2}$ $\left(y = \sqrt{u},\ u = 1 - x^2\right)$ funtzioaren definizio-eremua $[-1,1]$ tarte itxia da, $|x| > 1$ denean $u < 0$ bait da eta beraz $\sqrt{u}$ funtzioa ez dagoelako definiturik (nahiz eta $u = 1 - x^2$ funtzioa x-ren balio guztietarako definituta egon). Funtzio honen grafikoa zentrua koordenatu-jatorrian duen bat erradiodun zirkunferentziaren goi-erdia da.



18. IRUDIA



19. IRUDIA

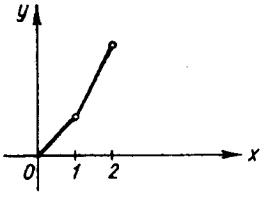
Konposaketa delako eragiketa behin baino gehiagotan egin daiteke, edozein aldi--kopurutan hain zuzen ere. Adibidez, $y = \ln\left[\sin(x^2+1)\right]$ funtzioa honako funtzioek definitzen dituzten ondoz ondoko eragiketak eginez lortzen da:

$$v = x^2 + 1, \quad u = \sin v, \quad y = \ln u.$$

Sar dezagun orain *funtzio elemental* delako kontzeptua.

2. Definizioa. $y = f(x)$ formula bakar baten bidez eman daitekeen funtzioari, non berdintzaren bigarren atala funtzio elemental nagusi eta konstantez osaturik dagoen batuketa, kenketa, biderkaketa, zatiketa eta konposaketen kopuru finituen bidez, *funtzio elemental* deritzo.

Definizio horretatik, funtzio elementalak analitikoki definituriko funtzioen kasu berezia direla ondorioztatzen da.



20. IRUDIA

Honakoak funtzio elementalen adibideak dira:

$$y = \sqrt{1 + 4\sin^2 x}; \quad y = \frac{\log x + 4\sqrt[3]{x} + 2\tan x}{10^x - x + 10}, \text{ etab.}$$

Funtzio ez-elementalaren adibidea:

1. $y = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$ $[y = f(n)]$ ez da funtzio elementala, y kalkulatzeko egin behar diren eragiketen kopurua n balioaz hazten bait da, hots, eragiketen kopurua infinitua da.

2. Oharra. 20. irudian azaltzen den funtzioa elementala da, nahiz eta bi formularen bidez adierazi

$f(x) = x, \qquad 0 \le x \le 1$ denean;
$f(x) = 2x - 1, \quad 1 \le x \le 2$ denean.

Funtzio hori 2. definizioan aipatutako $y = f(x)$ formula bakarraren bidez adieraz daitekeela froga daiteke. (Ikus V. gaiko 139-144 ariketak).

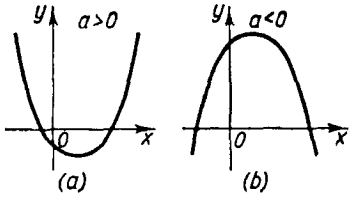
§ 9. Funtzio algebraikoak

Hurrengo funtzio elementalei funtzio algebraiko deritze:
I. FUNTZIO RAZIONAL OSOA EDO POLINOMIKOA

$$y = a_0x^n + a_1x^n + \ldots + a_n,$$

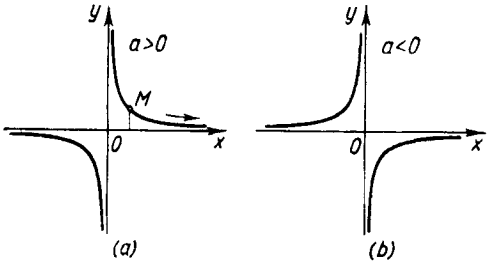
non $a_0, a_1, \ldots, a_n$ koefiziente deituriko zenbaki konstanteak diren, n zenbaki oso eta positiboa polinomioaren maila delarik. Bistakoa denez, aipaturiko funtzio hori, x-ren balio guztietarako definituta dago, hots, tarte infinitu batean.

Adibideak. 1. $y = ax + b$ *funtzio lineala* da. $b = 0$ denean $y = ax$ funtzio linealak, y eta x aldagaiak proportzionalak direneko menpekotasuna adierazten du, $a = 0$ eta $y = b$ badira, funtzioa konstante da.



21. IRUDIA

2. $y = ax^2 + bx + c$ funtzio koadratikoa da. Funtzio honen grafikoa parabola bat da (21. irudia). Funtzio hauek geometria analitikoko kurtsoetan aztertzen dira zehaztasunez.



22. IRUDIA

II. FUNTZIO RAZIONAL ZATIKIARRA. Funtzio hauek polinomio biren arteko zatiketaren bidez adierazten dira:

$$y = \frac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n}{b_0x^m + a_1x^{m-1} + \ldots + a_m}$$

Funtzio razional zatikiarren adibide gisa, menpekotasun alderantziz proportzionala adierazten duen $y = \dfrac{a}{x}$ funtzioa eman dezakegu. Beronen grafikoa 22. irudian azaltzen da. Bistakoa denez, izendatzailea ezabatzen duten balioetarako izan ezik, funtzio razional zatikiarra x-ren balio guztietarako definituta dago.

III. FUNTZIO IRRAZIONALA. $y = f(x)$ berdintzaren bigarren atalean berretzaileak zenbaki razional ez osoak direneko berreketak, batuketak, kenketak, biderkaketak eta zatiketak egiten badira, $y = f(x)$ funtzioari *funtzio irrazional* deritzo. Hurrengo funtzioak irrazionalak dira:

$$y = \frac{2x^2 + \sqrt{x}}{\sqrt{1 + 5x^2}}, \quad y = \sqrt{x}, \text{ etab.}$$

1. Oharra. Funtzio algebraiko guztiak ez dira kokatzen aipaturiko funtzioen hiru mota horietan. $y = f(x)$ funtzioak hurrengo motako ekuazio bat betetzen duenean,

$$P_0(x)y^n + P_1(x)y^{n-1} + \ldots + P_n(x) = 0 \qquad (1)$$

$P_0(x), P_1(x), \ldots, P_n(x)$ polinomioak direlarik, funtzio horri *funtzio algebraiko* deritzo.

Froga daitekeenez, aipaturiko hiru motatako funtzioek (1) moduko ekuazio bat betetzen dute; ostera, ekuazioa betetzen duten funtzio guztiak ez dira izango hiru mota horietakoak.

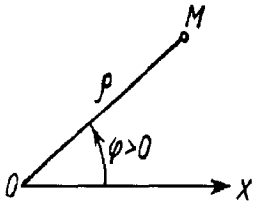
2. Oharra. Algebraikoa ez den funtzioari *transzendente* deritzo. Hurrengoak funtzio transzendenteak dira:

$$y = \cos x; \quad y = 10^x; \quad \text{etab..}$$

§ 10. Koordenatu polarren sistema

Planoko puntuen posizioa *koordenatu polarrak* delakoen bidez adieraz daiteke.

Aukera dezagun planoan *poloa* delako O puntu bat eta O puntuan jatorria duen *ardatz polar* izeneko zuzenerdi bat. M puntu batek planoan duen posizioa ρ eta φ bi zenbakien bidez adierazten da. Lehenengoak, ρ-k , M-tik polorainoko distantzia ematen du, bigarrenak, φ-k, OM zuzenkiak eta ardatz polarrak osotzen duten angelua adierazten duelarik, φ angeluaren norantza positibo bezala erloju-orratzen kontrakoa hartuko dugu. ρ eta φ zenbakiei M puntuaren *koordenatu polar* deritze (23. irudia). ρ erradio bektorea ez-negatiboa kontsideratzen da beti. φ angelu polarraren balioa $0 \le \varphi < 2\pi$ limiteen barnean aldatzen bada, poloa ez den planoko edozein punturi ondo definituriko ρ eta φ balioen bikote bat dagokio. Poloan, $\rho = 0$ da eta φ-k edozein balio har dezake.



23. IRUDIA

Kalkula dezagun koordenatu polarren eta koordenatu cartesiar edo angeluzuzenen artean dagoen erlazioa. Demagun koordenatu angeluzuzenen jatorria eta poloa puntu berbera direla eta Ox ardatzaren norantza positiboa ardatz polarrarena dela. Ikus dezagun zer erlazio dagoen puntu baten koordenatu cartesiarren eta polarren artean.

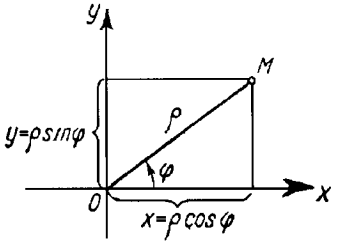
24. iruditik ondokoa ondorioztatzen da:

$$x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi$$

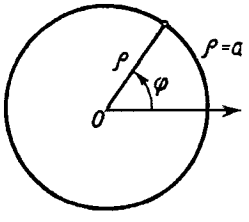
eta alderantziz

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \tan\varphi = \frac{y}{x}$$

Oharra. φ finkatzerakoan puntua dagoeneko koadrantea kontuan izan beharko dugu, φ-ren balio zuzena aukeratuko dugularik. Koordenatu polarren sisteman, $\rho = F(\varphi)$ ekuazioak kurba bat adierazten du.



24. IRUDIA



25. IRUDIA

1. Adibidea. Koordenatu polarretan, $\rho = a$ ekuazioak, a konstantea denean, poloan zentrua duen a erradiodun zirkunferentzia ematen du. Zirkunferentzia horren ekuazioa koordenatu angeluzuzenetan honako hau izango da (25. irudia):

$$\sqrt{x^2 + y^2} = a, \quad \text{edo,} \quad x^2 + y^2 = a^2.$$

2. Adibidea. $\rho = a\varphi$, non a=ktea. bait da.

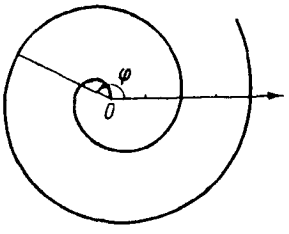
Koka ditzagun taula batean φ-ren araberako ρ-ren balio batzuk:

φ	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3}{4}\pi$	π	$\frac{3}{2}\pi$	2π	3π	4π
ρ	0	$\approx 0{,}78a$	$\approx 1{,}57a$	$\approx 2{,}36a$	$\approx 3{,}14a$	$\approx 4{,}71a$	$\approx 6{,}28a$	$\approx 9{,}42a$	$\approx 12{,}56a$

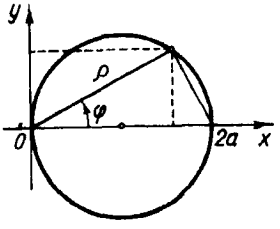
Funtzio horri dagokion kurba 26. irudian adierazten da eta Arkimedes-en kiribil deritzo.

3. Adibidea. $\rho = 2a\cos\varphi$.

Aurreko hori, $\rho_0 = a$ eta $\varphi = 0$ puntuan zentrua duen a erradiodun zirkunferentziaren ekuazioa da (27. irudia). Idatz dezagun zirkunferentzia horren ekuazioa koordenatu angeluzuzenetan.



26. IRUDIA



27. IRUDIA

Ekuazio horretan $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\cos\varphi = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ balioak ordezkatuz,

$$\sqrt{x^2 + y^2} = 2a \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

lortzen dugu, hots,

$$x^2 + y^2 - 2ax = 0.$$

Ariketak

1. $f(x) = x^2 + 6x - 4$ funtzioa emanik, $f(1) = 3$ eta $f(3) = 23$ betetzen direla egiaztatu.

2. $f(x) = x^2 + 1$. Ondoko balioak kalkulatu:

a) $f(4)$. Emaitza: 17.
b) $f(\sqrt{2})$. Em.: 3.
c) $f(a+1)$. Em.: $a^2 + 2a + 2$.
d) $f(a) + 1$. Em.: $a^2 + 2$.
e) $f(a^2)$. Em.: $a^4 + 1$.
f) $[f(a)]^2$. Em.: $a^4 + 2a^2 + 1$.
g) $f(2a)$. Em.: $4a^2 + 1$.

3. $\varphi(x) = \dfrac{x-1}{3x+5}$. Ondoko adierazpenak aurkitu: $\varphi\left(\dfrac{1}{x}\right)$ eta $\dfrac{1}{\varphi(x)}$.

Em.: $\varphi\left(\dfrac{1}{x}\right) = \dfrac{1-x}{3+5x}$; $\dfrac{1}{\varphi(x)} = \dfrac{3x+5}{x-1}$.

4. $\psi(x) = \sqrt{x^2+4}$. $\psi(2x)$ eta $\psi(0)$ adierazpenak aurkitu.

Em.: $\psi(2x) = 2\sqrt{x^2+1}$; $\psi(0) = 2$.

5. $f(\theta) = \tan\theta$. Hurrengo berdintza egiaztatu: $f(2\theta) = \dfrac{2f(\theta)}{1-[f(\theta)]^2}$.

6. $\varphi(x) = \log\dfrac{1-x}{1+x}$. $\varphi(a) + \varphi(b) = \varphi(\dfrac{a+b}{1+ab})$ berdintza egiaztatu.

7. $f(x) = \log x$; $\varphi(x) = x^3$. Hurrengo adierazpenak aurkitu:

a) $f[\varphi(2)]$. Em.: $3 \log 2$. b) $f[\varphi(a)]$. Em.: $3 \log a$.

c) $\varphi[f(a)]$. Em.: $[\log a]^3$.

8. $y = 2x^2 + 1$ funtzioaren definizio-eremu naturala adierazi. Em.: $-\infty < x < +\infty$.

9. Hurrengo funtzioen definizio-eremu naturalak adierazi:

a) $\sqrt{1-x^2}$. Em.: $-1 \le x \le +1$.

b) $\sqrt{3+x} + \sqrt[4]{7-x}$. Em.: $-3 \le x \le 7$.

c) $\sqrt[3]{x+a} - \sqrt[5]{x-b}$. Em.: $-\infty < x < +\infty$.

d) $\dfrac{a+x}{a-x}$. Em.: $x \ne a$.

e) $\arcsin^2 x$. Em.: $-1 \le x \le 1$.

f) $y = \log x$. Em.: $x > 0$.

g) $y = a^x (a > 0)$. Em.: $-\infty < x < +\infty$.

Ondoko funtzioen grafikoak egin:

10. $y = -3x + 5$. 11. $y = \dfrac{1}{2}x^2 + 1$. 12. $y = 3 - 2x^2$.

13. $y = x^2 + 2x - 1$.

14. $y = \dfrac{1}{x-1}$.

15. $y = \sin 2x$.

16. $y = \cos 3x$.

17. $y = x^2 - 4x + 6$.

18. $y = \dfrac{1}{1-x^2}$.

19. $y = \sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)$.

20. $y = \cos\left(x - \dfrac{\pi}{3}\right)$.

21. $y = \tan\dfrac{1}{2}x$.

22. $y = \cot\dfrac{1}{4}x$.

23. $y = 3^x$.

24. $y = 2^{-x^2}$.

25. $y = \log_2\dfrac{1}{x}$.

26. $y = x^3 + 1$.

27. $y = 4 - x^3$.

28. $y = \dfrac{1}{x^2}$.

29. $y = x^4$.

30. $y = x^5$.

31. $y = x^{\frac{1}{2}}$.

32. $y = x^{-\frac{1}{2}}$.

33. $y = x^{\frac{1}{3}}$.

34. $y = |x|$.

35. $y = \log_2|x|$.

36. $y = \log_2|1 - x|$.

37. $y = 3\sin\left(2x + \dfrac{\pi}{3}\right)$.

38. $y = 4\cos\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right)$.

39. [-1,1] tartean honela definiturik dagoen $f(x)$ funtzioa:

$f(x) = 1 + x, \quad -1 \le x < 0$ denean;
$f(x) = 1 - 2x, \quad 0 \le x \le 1$ denean.

40. [0,2] tartean tartean hurrengo moduan definiturik dagoen funtzioa:

$f(x) = x^3, \ 0 \le x \le 1$ denean;
$f(x) = x, \quad 1 \le x \le 2$ denean.

Koordenatu polarren bidez emaniko ondoko kurbak eraiki:

41. $\rho = \dfrac{a}{\varphi}$ (kiribil hiperbolikoa).

42. $\rho = a^{\varphi}$ (kiribil logaritmikoa).

43. $\rho = a\sqrt{\cos 2\varphi}$ (lemniskata).

44. $\rho = a(1 - \cos\varphi)$ (kardioidea).

45. $\rho = a \sin 3\varphi$.

II. GAIA

FUNTZIOEN LIMITEAK ETA JARRAITASUNA

§ 1. Aldagaien limiteak. Aldagai mugagabeki handia

Atal honetan, «aldagaiak limite batera jotzen du» adierazpenaren araberako modu berezian aldatzen diren aldagai ordenatuak aztertuko ditugu. Hemendik aurrera, aldagaiaren limitearen kontzeptua funtsezkoa izango da, analisi matematikoaren oinarrizko kontzeptuak berorri loturik bait daude: deribatua, integrala, etab.

1. Definizioa. Nahi den bezain txikia den $\varepsilon > 0$ zenbakirako x aldagaiaren balio bat aurki daitekeenean, zeinaren atzeko balio guztiek

$$|x - a| < \varepsilon.$$

desberdintza betetzen duten, a zenbaki konstantea x aldagaiaren *limitea* dela esango dugu.

a zenbakia x aldagaiaren limitea denean, x-k a-rantz jotzen duela esango dugu, hurrengo notazioen bidez adieraziko dugularik:

$$x \to a \quad \text{edo} \quad \lim x = a.$$

Geometrikoki mintzatuz, limitearen definizioa honela enuntzia daiteke: a zentrudun eta ε edozein erradiodun emaniko tarterako, x-ren balio bat existitzen bada zeinaren atzeko balioak tarte horretan kokatzen diren (28. irudia), a zenbaki konstantea x aldagaiaren *limitea* dela esango dugu. Azter ditzagun limite baterantz jotzen duten aldagaien adibide batzuk.

1. Adibidea. x aldagaiak hurrengo ondoz ondoko balioak hartzen ditu

$$x_1 = 1 + 1;\ x_2 = 1 + \frac{1}{2};\ x_3 = 1 + \frac{1}{3};\ \ldots;\ x_n = 1 + \frac{1}{n};\ \ldots$$

Aldagai horrek limitetzat unitatea duela frogatuko dugu. Hurrengoa dugu:

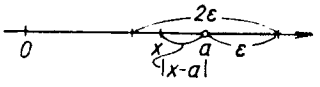
$$|x_n - 1| = \left|\left(1 + \frac{1}{n}\right) - 1\right| = \frac{1}{n}.$$

Edozein ε-etarako, n zenbakiak $\frac{1}{n} < \varepsilon$ edo $n > \frac{1}{\varepsilon}$ betetzen badu, n-tik atzeranzko aldagaiaren balio guztiek $|x_n - 1| < \varepsilon$ betetzen dute, frogatu nahi genuen bezala.

Kasu honetan, aldagaiak limite baterantz jotzen du, beraren balioak beherantz jotzen duelarik.

2. Adibidea. x aldagaiak hurrengo ondoz ondoko balioak hartzen ditu

$$x_1 = 1 - \frac{1}{2};\ x_2 = 1 + \frac{1}{2^2};\ x_3 = 1 - \frac{1}{2^3};\ x_4 = 1 + \frac{1}{2^4};\ \ldots;\ x_n = 1 + (-1)^n \frac{1}{2^n};\ \ldots$$



28. IRUDIA

Aldagai honen limitea unitatea da. Izan ere,

$$|x_n - 1| = \left|\left(1 + (-1)^n \frac{1}{2^n}\right) - 1\right| = \frac{1}{2^n}.$$

Edozein ε-etarako, $\frac{1}{2^n} < \varepsilon$ eta beraz

$$2^n > \frac{1}{\varepsilon},\ n \log 2 > \log \frac{1}{\varepsilon},\ \text{hau da,}\ n > \frac{\log \frac{1}{\varepsilon}}{\log 2}$$

betetzen duen n baten ondokoak diren x-ren balioek hurrengoa beteko dute

$$|x_n - 1| < \varepsilon.$$

Azterturiko kasuan, aldagaiak limite baterantz jotzen du "berorren inguruan oszilatzen duelarik", hau da batzutan limitea baino txikiagoak eta bestetan handiagoak diren balioak hartuz.

1. Oharra. I. gaiko § 3. atalean aipatu genuen bezala, c magnitude konstantea, maiz, beraren balioa beti berbera deneko aldagai bezala kontsideratzen da: $x = c$.

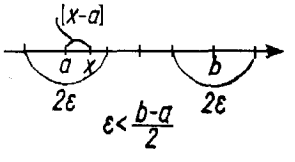
Bistakoa denez, konstantearen limitea konstantea bera izango da, $|x-c| = |c-c| = 0 < \varepsilon$ desberdintza beti beteko bait da, ε-en edozein baliotarako.

2. Oharra. Limitearen definizioaren arabera aldagai batek bi limite ezin ditzakeela eduki ondorioztatzen da. Izan ere, $\lim x = a$ eta $\lim x = b$ $(a < b)$ badira, x-k ondoko bi desberdintzak batera bete behar ditu: $|x-a| < \varepsilon$ eta $|x-b| < \varepsilon$, ε nahi den bezain txikia izanik; baina hori ezinezkoa da $\varepsilon < \dfrac{b-a}{2}$ bada (29. irudia).

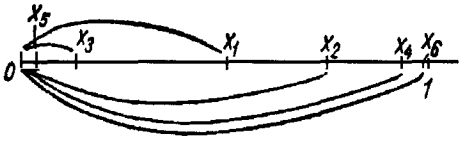
3. Oharra. Edozein aldagaik ez du zertan limiterik eduki behar. Demagun x aldagaiak hurrengo ondoz ondoko balioak hartzen dituela:

$$x_1 = \frac{1}{2};\ x_2 = 1 - \frac{1}{4};\ x_3 = \frac{1}{8};\ \ldots;\ x_{2k} = 1 - \frac{1}{2^{2k}};\ x_{2k+1} = \frac{1}{2^{2k+1}}$$

(30. irudia). k nahiko handia izanik, x_{2k} balioaren eta azpiindize bikoitiei dagozkien atzeko balioen unitatearekiko diferentzia nahi den bezain txikia izango da, ostera, x_{2k+1} eta azpiindize bakoitiei dagozkien atzeko balio guztien 0 balioarekiko diferentzia nahi den bezain txikia izango da. Beraz, x aldagaiak ez du limite baterantz jotzen.



29. IRUDIA



30. IRUDIA

Limitearen definizioaren arabera, aldagai batek a limite baterantz jotzen badu, limitea konstantea dela ondorioztatzen da. Baina hurrengo definizioan ikusiko dugunez, «jo» delako kontzeptua aldagaien beste modu bateko aldakuntza adierazteko erabiltzen da baita ere.

2. Definizioa. Emaniko edozein M zenbaki positibotarako x-ren balio bat hauta badaiteke zeinaren atzeko balio guztiek $|x| > M$ desberdintza betetzen duten, x aldagaiak infiniturantz jotzen duela esango dugu.

Infiniturantz jotzen duen aldagaia mugagabeki handia dela esaten da eta hurrengo notazioaren bidez adierazten da: $x \to \infty$.

3. Adibidea. Hurrengo balioak hartzen dituen aldagaia

$$x_1 = -1;\ x_2 = 2;\ x_3 = -3;\ \ldots;\ x_n = (-1)^n n;\ \ldots$$

mugagabeki handia da, zeren eta $M>0$ guztietarako, aldagaiaren balio baten atzeko balio guztiak M baino handiagoak dira balio absolutuan.

x aldagaiak «plus infiniturantz ($+\infty$-rantz) jotzen du» (hau da, $x \to +\infty$), $M>0$ guztietarako aldagaiaren balio baten atzetiko balio guztiek $M<x$ desberdintza betetzen badute.

Hurrengo balioak hartzen dituen aldagaia $+\infty$-rantz jotzen duen aldagaiaren adibidea da: $x_1 = 1,\ x_2 = 2,\ \ldots,\ x_n = n,\ \ldots$

x aldagaiak «minus infiniturantz ($-\infty$-rantz) jotzen du» ($x \to -\infty$), $M>0$ guztietarako, aldagaiaren balio baten atzeko balio guztiek $x<-M$ betetzen badute.

Adibidez, $x_1 = -1,\ x_2 = -2,\ \ldots,\ x_n = -n,\ \ldots,$ balioak hartzen dituen aldagaiak $-\infty$-rantz jotzen du.

§ 2. Funtzioaren limitea

x argumentuak a limite baterantz edo infiniturantz jotzen dueneko funtzioen aldakuntzen kasu batzuk azter ditzagun.

1. Definizioa. Demagun $y = f(x)$ funtzioa a puntuaren ingurune batean edo ingurune horren zenbait puntutan definituta dagoela. Nahi den bezain txikia den ε zenbaki positibo bakoitzerako, δ zenbaki positibo bat aurki badaiteke, a-ren desberdinak diren eta $|x-a|<\delta$ desberdintza[1)] betetzen duten x balio guztietarako

$$|f(x)-b|<\varepsilon$$

berdintza betetzen delarik, *x-k a-rantz jotzen duenean* ($x \to a$) *$y = f(x)$ funtzioak b limiterantz jotzen duela* ($y \to b$) esango dugu.

$x \to a$ denean, $f(x)$ funtzioaren limitea b bada, honela adieraziko dugu:

$$\lim_{x \to a} f(x) = b,$$

edo $f(x) \to b$, $x \to a$ denean.

---

1) Hor, $|x-a|<\delta$ betetzen duten eta funtzioaren definizio-eremuan kokatzen diren puntuak hartzen dira kontutan. Aurrerago, honelako kontsiderazioak maiz aurkituko ditugu. Honelatan ba, $x \to \infty$ deneko funtzioaren aldakuntza aztertzerakoan, funtzioa x-ren balio oso eta positiboetan soilik definituta egotea gerta daiteke. Hortaz, kasu honetan, x-k infiniturantz jotzen du balio positibo osoak hartzen dituelarik. Aurrerantzean, baldintza hau betetzen dela beti suposatuko dugu.

$x \to a$ denean, $f(x) \to b$ propietatea, $y = f(x)$ funtzioaren grafikoan honela adierazten da (31. irudia): $|x-a| < \delta$ desberdintzatik $|f(x)-b| < \varepsilon$ ondorioztatzen denez, a-rainoko distantzia δ baino txikiagoa deneko x puntu guztiei dagozkien $y = f(x)$ funtzioaren grafikoko M puntuak, $y = b - \varepsilon$ eta $y = b + \varepsilon$ zuzenek mugaturiko 2ε zabalerako tartean kokatuta egongo dira.

1. Oharra. $x \to a$ denean, $f(x)$ funtzioaren limitea honela defini daiteke baita ere:

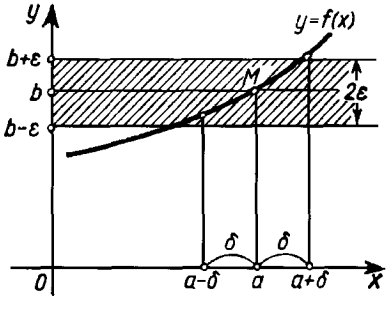
Demagun x aldagaiak balio ordenatuak hartzen dituela,

$$|x^* - a| > |x^{**} - a|$$

betetzen den bakoitzean, x^{**} atzeko eta x^* aurreko balioak direlarik eta bestalde,

$$|\bar{x}^* - a| = |\bar{x}^{**} - a| \quad \text{eta} \quad \bar{x}^* < \bar{x}^{**},$$

betetzen denean, orduan $\bar{x}^{**}$ atzeko eta $\bar{x}^*$ aurrekoa izango direlarik.



31. IRUDIA

Beste hitz batzutan, zenbakizko ardatzeko bi punturen artean, a-tik hurbilago dagoena izango da atzekoa; distantzikideak direnean a-ren eskuinean dagoena izango da atzekoa.

Demagun aipaturiko moduan ordenaturiko x aldagaiak a limiterantz jotzen duela [$x \to a$, hau da, $\lim x = a$].

Azter dezagun orain $y = f(x)$ aldagaia. Onar dezagun bestalde, orain eta aurrerantzean funtzioaren bi balioren artean argumentuaren atzeko balioari dagokiona izango dela funtzioaren atzeko balioa.

Aipatu bezala definituriko y aldagaiak b limiterantz jotzen badu $x \to a$ denean,

$$\lim_{x \to a} f(x) = b$$

idatziko dugu eta $x \to a$ denean $f(x)$ funtzioak b limiterantz jotzen duela esango dugu.

Erraz froga daitekeenez, limitearen definizio bi horiek baliokideak dira.

2. Oharra. x-k a baino txikiagoak diren balioak hartuz a zenbakirantz jotzen duenean, $f(x)$ funtzioak b_1 limiterantz jotzen badu, erabiliko dugun notazioa $\lim\limits_{x\to a-0} f(x) = b_1$ izango da, b_1 a puntuan funtzioaren ezker-limitea izango delarik. x-k a baino handiagoak diren balioak hartzen dituenean soilik, notazioa $\lim\limits_{x\to a+0} f(x) = b_2$ izango da, b_2 zenbakia a puntuan funtzioaren eskuin-limitea izango delarik (32. irudia).

Ezker- eta eskuin-limiteak existitzen direnean eta berdinak direnean, hau da, $b_1 = b_2 = b$, orduan a puntuan funtzioaren limitea, lehenago definituriko zentzuan, b dela froga daiteke. Elkarrekikoki, a puntuan funtzioak b limiterantz jotzen badu, a puntuan funtzioaren eskuin- eta ezker-limiteak existitzen dira eta berdinak dira.

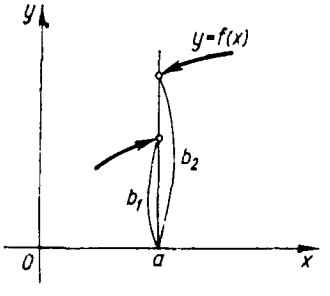
1. Adibidea. Frogatuko dugun bezala,

$$\lim_{x\to 2} (3x+1) = 7.$$

Biz $\varepsilon > 0$ edozein zenbaki positibo. Hurrengo desberdintza bete dadin

$$|(3x+1) - 7| < \varepsilon,$$

ondoko desberdintzak bete behar dira:



32. IRUDIA

$$|3x - 6| < \varepsilon, \quad |x-2| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad -\frac{\varepsilon}{3} < x - 2 < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Honelatan ba, ε edozein izanik eta $|x-2| < \dfrac{\varepsilon}{3} = \delta$ desberdintza betetzen duten x guztietarako, 7 zenbakiaren eta $3x+1$ funtzioaren balioen arteko diferentzia ε baino txikiagoa izango da. Beraz, 7 da funtzioaren limitea, $x \to a$ denean.

3. Oharra. $x \to a$ denean funtzioaren limitea existitzeko, funtzioa $x = a$ puntuan definituta egotea ez da beharrezkoa. Limitea kalkulatzean, funtzioaren balioak a-ren ingurune batean hartu behar dira kontutan, baina ez a puntuan. Hurrengo adibidean, hori ondo ikusten da.

2. Adibidea. Frogatuko dugun bezala: $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-4}{x-2} = 4.$

Hemen, $\dfrac{x^2-4}{x-2}$ funtzioa ez dago $x = 2$ puntuan definituta.

Zera frogatu behar da: ε edozein zenbaki positibo izanik, δ zenbaki positibo bat aurki daitekeela zeinetarako $|x-2|<\delta$ denean

$$\left|\frac{x^2-4}{x-2}-4\right|<\varepsilon \tag{1}$$

betetzen den. Baina, $x\neq 2$ denean, (1) desberdintza ondokoaren baliokidea da

$$\left|\frac{(x-2)(x+2)}{x-2}-4\right|=|x+2-4|<\varepsilon,$$

edo

$$|x-2|<\varepsilon. \tag{2}$$

Honelatan ba, ε edozein izanik, (1) desberdintza betetzen da (2) betetzen denean (hemen, $\delta=\varepsilon$). Beraz, $x\to 2$ denean emaniko funtzioaren limitea 4 da.

Azter ditzagun orain, $x\to\infty$ denean funtzioaren aldakuntzaren kasu batzuk.

2. Definizioa. $f(x)$ funtzioak b limiterantz jotzen du $x\to\infty$ denean, edozein ε zenbaki positibotarako, N zenbaki positibo bat aurki badaiteke, zeinetarako $|x|>N$ denean hurrengo desberdintza betetzen den

$$|f(x)-b|<\varepsilon.$$

3. Adibidea. Hauxe frogatuko dugu

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x}\right)=1, \text{ hau da, } \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)=1.$$

Horretarako, ε guztietarako, $|x|>N$ denean

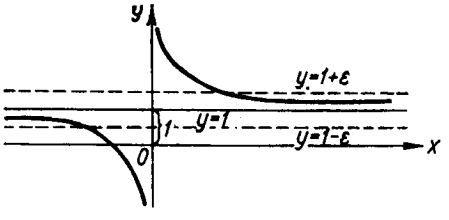
$$\left|\left(1+\frac{1}{x}\right)-1\right|<\varepsilon \tag{3}$$

betetzen dela frogatu behar da, ε-en araberako N-ren aukera egoki baterako. (3) desberdintza $\left|\frac{1}{x}\right| < \varepsilon$ desberdintzaren baliokidea da eta berori

$$|x| > \frac{1}{\varepsilon} = N$$

denean betetzen da.

Beraz, $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right) = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{x+1}{x} = 1$ (33. irudia).



33. IRUDIA

$x \to +\infty$ eta $x \to -\infty$ ikurren esanahia ezaguturik, erraz ulertzen dira ondoko adierazpenak:

«$f(x)$ balioak b-rantz jotzen du $x \to +\infty$ denean» eta
«$f(x)$ balioak b-rantz jotzen du $x \to -\infty$ denean»

eta beroriek honela idatziko ditugu

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = b,$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = b.$$

§ 3. Infiniturantz jotzen duten funtzioak. Funtzio bornatuak

$x \to a$ eta $x \to \infty$ direnean $f(x)$ funtzioak b limite baterantz jotzen dueneko kasuak aztertu ditugu.

Azter dezagun orain, x argumentuaren balioa aldatzerakoan $y=f(x)$ funtzioak infiniturantz jotzen dueneko kasua.

1. Definizioa. $f(x)$ funtzioak infiniturantz jotzen du, hots, mugagabeki handia da, $x \to a$ denean, hurrengo baldintza betetzen bada: nahi den bezain handia den M edozein zenbaki positibotarako, $\delta > 0$ balio bat aurki badaiteke, zeinetarako a-ren desberdinak diren eta $|f(x)| > M$ baldintza betetzen duten x guztietarako $|f(x)| > M$ desberdintza betetzen den.

$f(x)$ funtzioak infiniturantz jotzen badu $x \to a$ denean,

$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty,$$

idazten da, edo $f(x) \to \infty$, $x \to a$ denean.

$f(x)$ funtzioak infiniturantz jotzen badu $x \to a$ denean eta edo balio positiboak edo negatiboak hartzen baditu soilik, hurrengoak idatziko ditugu hurrenez hurren: $\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$ edo $\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$.

1. Adibidea. Frogatuko dugun bezala $\lim_{x \to 1} \frac{1}{(1-x)^2} = +\infty$. Izan ere, $M > 0$ edozein izanik,

$$(1-x)^2 < \frac{1}{M} \text{ , hau da, } |1-x| < \frac{1}{\sqrt{M}} = \delta$$

direnean,

$$\frac{1}{(1-x)^2} > M$$

dugu. Bestalde, $\frac{1}{(1-x)^2}$ funtzioak balio positiboak hartzen ditu soilik (34. irudia).

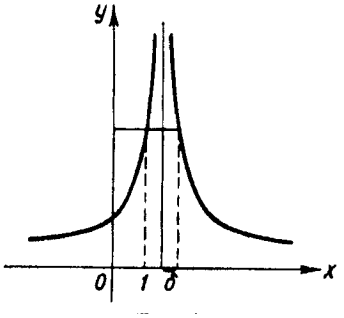
2. Adibidea. Hauxe frogatuko dugu: $\lim_{x \to 0} \left(-\frac{1}{x}\right) = \infty$. Izan ere, $M > 0$ edozein izanik,

$$|x| = |x - 0| < \frac{1}{M} = \delta$$

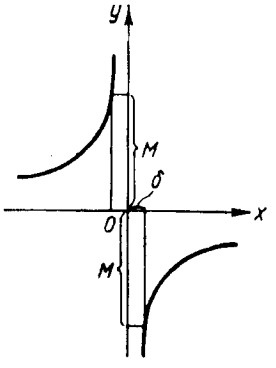
betetzen denean, hurrengoa dugu

$$\left|-\frac{1}{x}\right| > M.$$

Hor, $x<0$ denean, $\left(-\frac{1}{x}\right) > 0$ da eta $x>0$ denean $\left(-\frac{1}{x}\right) < 0$ (35. irudia).



34. IRUDIA



35. IRUDIA

$f(x)$ funtzioak infiniturantz jotzen badu $x \to \infty$ denean, ondokoa idatziko dugu:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty,$$

eta bereziki, hurrengoak izango dira posible:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \infty, \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty, \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty.$$

Adibidez,

$$\lim_{x\to\infty} x^2 = +\infty, \quad \lim_{x\to-\infty} x^3 = -\infty, \text{ etab.}$$

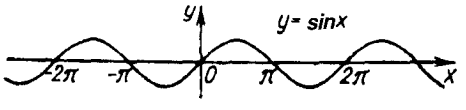
1. Oharra. Edozein $f(x)$ funtziotarako, ezin da ziurtatu $x \to a$ edo $x \to \infty$ direneko limiteak existitzen direnik, ez finituak ez eta infinituak ere.

3. Adibidea. $y = \sin x$ funtzioa, $-\infty < x < +\infty$ tarte infinituan dago definiturik, baina $x \to \infty$ denean, ez du limiterik, ez finitu eta ez infiniturik ere (36. irudia).

4. Adibidea. $y = \sin\frac{1}{x}$ funtzioa, $x = 0$ izan ezik, x-ren balio guztietarako definituta dago. Funtzio honek, $x \to 0$ denean, ez du limiterik, ez finiturik eta ez infiniturik ere. Funtzio horren grafikoa 37. irudian ikus daiteke.

2. Definizioa. $f(x)$ funtzioa x argumentuaren aldakuntz eremuan *bornatua* dela esango dugu hurrengoa betetzen bada: eremu horretako x balio guztietarako $|f(x)| \leq M$ betetzen den M zenbaki positibo bat existitzen da. Zenbaki hori existitzen ez denean, eremu horretan $f(x)$ funtzioa *bornagabea* dela esango dugu.

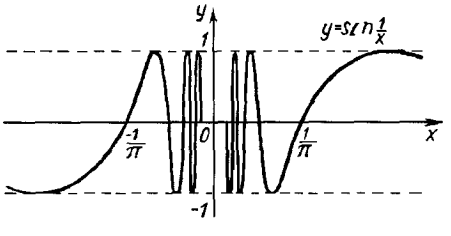
5. Adibidea. $y = \sin x$ funtzioa $-\infty < x < +\infty$ tartean definituta dago eta bertan bornatua da, x-ren balio guztietarako $|\sin x| \leq 1 = M$ betetzen bait da.



36. IRUDIA

3. Definizioa. $f(x)$ funtzioa $x \to a$ denean *bornatua* dela esango dugu, a puntuan zentrua duen ingurune batean bornatua bada.

4. Definizioa. $f(x)$ funtzioa $x \to \infty$ denean *bornatua* da, $N > 0$ zenbaki positibo bat existitzen bada, zeinetarako $|x| > N$ betetzen duten x balio guztietarako $f(x)$ bornatua bait dago.



37. IRUDIA

Limitea duen funtzioa ea bornatua edo bornegabea deneko problemari hurrengo teoreman erantzuten zaio.

1. Teorema. b zenbaki finitua izanik, $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$ bada, $f(x)$ funtzioa bornatua da $x \to a$ denean.

Frogapena. $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$ berdintzatik zera ondorioztatzen da: $\varepsilon > 0$ edozein izanik δ zenbaki bat aurki daiteke zeinetarako

$$|f(x) - b| < \varepsilon,$$

hots,

$$|f(x)| < |b| + \varepsilon$$

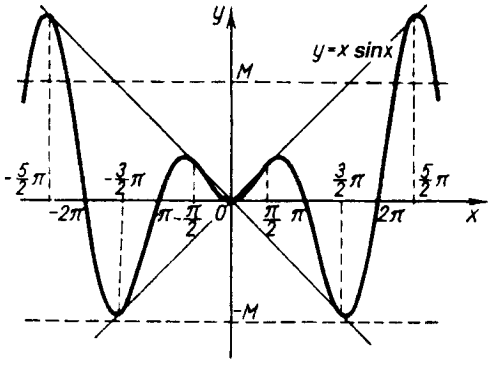
desberdintzak betetzen diren, $a - \delta < x < a + \delta$ denean.

Horren ondorioz, $f(x)$ bornatua da $x \to a$ denean.

2. Oharra. Funtzio bornatuen definizioaren arabera, $f(x)$ funtzioak

$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty \quad \text{edo} \quad \lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$$

betetzen badu, hau da, $f(x)$ mugagabeki handia bada, funtzio hori bornegabea dela ondorioztatzen da. Elkarrekiko propietatea ez da betetzen; funtzio bornegabe batek ez du zertan mugagabeki handia izan behar.



38. IRUDIA

Adibidez, $y = x \sin x$ funtzioa ez da bornatua $x \to \infty$ denean, zeren $M > 0$ guztietarako, $|x \sin x| > M$ betetzen duten x balioak aurki bait daitezke. Ordea, $y = x \sin x$ funtzioa ez da mugagabeki handia, $y = 0, \pi, 2\pi, \ldots$ denean anulatzen bait da. $y = x \sin x$ funtzioaren grafikoa 38. irudian adierazten da.

2. Teorema. $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$ existitzen bada eta $b \neq 0$ bada, $y = \dfrac{1}{f(x)}$ funtzioa bornatua da $x \to a$ denean.

Frogapena. Teoremaren baldintzen arabera, $\varepsilon > 0$ edozein izanik, $x = a$ puntuaren ingurune batean $|f(x) - b| < \varepsilon$, edo $||f(x)| - |b|| < \varepsilon$, edo $-\varepsilon < |f(x)| - |b| < \varepsilon$, edo $|b| - \varepsilon < |f(x)| < |b| + \varepsilon$ dugu.

Azken desberdintza horien ondorioz, honakoa dugu:

$$\frac{1}{|b| - \varepsilon} > \frac{1}{|f(x)|} > \frac{1}{|b| + \varepsilon} .$$

Adibidez, $\varepsilon = \dfrac{1}{10}|b|$ hartzerakoan,

$$\frac{10}{9\,|b|} > \frac{1}{|f(x)|} > \frac{10}{11\,|b|} ,$$

dugu eta beraz $\dfrac{1}{f(x)}$ bornatuta dago.

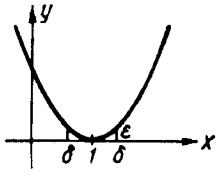
§ 4. Infinitesimoak eta berorien propietate nagusiak

Atal honetan, x argumentua aldatzerakoan zerorantz jotzen duten funtzioak aztertuko ditugu.

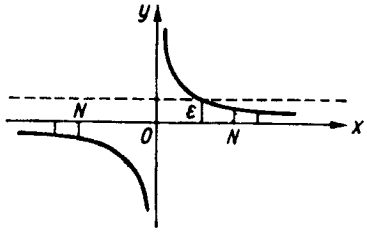
Definizioa. $\alpha = \alpha(x)$ funtzioari $x \to a$ edo $x \to \infty$ denean *infinitesimo* deritzo, $\lim\limits_{x \to a} \alpha(x) = 0$ edo $\lim\limits_{x \to \infty} \alpha(x) = 0$ bada.

Limitearen definizioaren arabera, adibidez $\lim\limits_{x \to a} \alpha(x) = 0$ bada, nahi den bezain txikia den edozein ε positibotarako, $\delta > 0$ aurki daiteke non $|\alpha(x)| < \varepsilon$ den $|x - a| < \delta$ betetzen duten x guztietarako.

1. Adibidea. $\alpha = (x - 1)^2$ funtzioa infinitesimoa da $x \to 1$ denean, $\lim\limits_{x \to 1} \alpha = \lim\limits_{x \to 1} (x - 1)^2 = 0$ (39. irudia) bait da.



39. IRUDIA



40. IRUDIA

2. Adibidea. $\alpha = \dfrac{1}{x}$ funtzioa infinitesimoa da $x \to \infty$ denean (40. irudia) (ikus 3. adibidea § 2. atalean).

Froga ditzagun orain hurrengo teorema garrantzitsuak.

1. Teorema. $y = f(x)$ funtzioa b zenbaki baten eta α infinitesimo baten batura gisa idatz badaiteke:

$$y = b + \alpha, \tag{1}$$

ondokoa dugu:

$$\lim y = b \quad (x \to a \text{ edo } x \to \infty \text{ denean}).$$

Elkarrekikoa, $\lim y = b$ bada, $y = b + \alpha$ idatz daiteke, α infinitesimoa izanik.

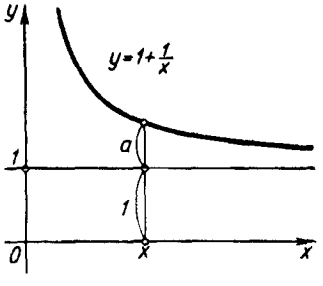
Frogapena. (1) berdintzaren arabera $|y - b| = |\alpha|$ ondorioztatzen da. Baina ε edozein izanik, balio baten ondorengo α balio guztietarako $|\alpha| < \varepsilon$ betetzen da. Hortaz, balio baten ondorengo y-ren balio guztiek $|y - b| < \varepsilon$ betetzen dute, eta beraz $\lim y = b$.

Elkarrekikoa, $\lim y = b$ bada, orduan, ε edozein izanik, balio baten ondorengo y-ren balio guztietarako $|y-b|<\varepsilon$ betetzen da. Hortaz, $y-b=\alpha$ bada, balio baten ondorengo α -ren balio guztietarako, $|\alpha|<\varepsilon$ izango dugu eta α infinitesimoa izango da.

3. Adibidea. $y = 1+\dfrac{1}{x}$ funtzioa emanik (41. irudia), $\lim\limits_{x\to\infty} y=1$ dela bistakoa da.

Elkarrekikoa, $\lim\limits_{x\to\infty} y=1$ bada, y aldagaia 1 limitearen eta α infinitesimo baten batura gisa adieraz daiteke, hots $y=1+\alpha$. Kasu horretan, infinitesimoa $\alpha=\dfrac{1}{x}$ da.

2. Teorema. $\alpha=\alpha(x)$ funtzioak zerorantz jotzen badu $x\to a$ denean (edo $x\to\infty$ denean), zero balioa hartu gabe, $y=\dfrac{1}{\alpha}$ funtzioak infiniturantz jotzen du.



41. IRUDIA

Frogapena. $M>0$ edozein izanik, $\dfrac{1}{|\alpha|}>M$ beti beteko da, $|\alpha|<\dfrac{1}{M}$ betetzen denean, $\alpha(x)\to 0$ denez gero, azken desberdintza hori betetzen dela esan daiteke balio baten ondorengo α-ren balio guztietarako.

3. Teorema. Infinitesimoen kopuru finituen batura algebraikoa infinitesimoa da.

Frogapena. Infinitesimo biren kasua aztertuko dugu soilik, frogapena antzekoa bait da edozein kopuru finitutarako.

Demagun $u(x)=\alpha(x)+\beta(x)$, non $\lim\limits_{x\to a}\alpha(x)=0$ eta $\lim\limits_{x\to a}\beta(x)=0$ diren. Froga dezagun, nahi den bezain txikia den $\varepsilon>0$ edozeinetarako, $\delta>0$ aurki daitekeela,

zeinetarako $|x-a|<\delta$ denean $|u|<\varepsilon$ den. $\alpha(x)$ infinitesimoa denez gero, $\delta_1>0$ aurki daiteke zeinetarako δ_1 erradioa eta a zentrua dituen ingurunean

$$|\alpha(x)|<\frac{\varepsilon}{2}$$

betetzen den.

Era berean, $\beta(x)$ infinitesimoa denez gero, $\delta_2>0$ nahiko txikia aukeratuz, δ_2 erradioa eta a zentrua dituen ingurunean

$$|\beta(x)|<\frac{\varepsilon}{2}$$

betetzen da.

Biz δ bi magnitude horien arteko (hots, δ_1 eta δ_2-ren arteko) txikiena. Orduan, δ erradioa eta a puntuan zentrua dituen ingurunean $|\alpha|<\frac{\varepsilon}{2}$; $|\beta|<\frac{\varepsilon}{2}$ desberdintzak beteko dira. Beraz, ingurune horretan ondokoa izango dugu:

$$|u|=|\alpha(x)+\beta(x)|\leq|\alpha(x)|+|\beta(x)|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon,$$

hots, $|u|<\varepsilon$, frogatu nahi genuen bezala.

Antzeko moduan, azter daiteke

$$\lim_{x\to\infty}\alpha(x)=0,\quad \lim_{x\to\infty}\beta(x)=0$$

direneko kasua.

Oharra. Aurrerantzean, infinitesimoen kopuru infinituen batura azter beharra izango dugu. Kasu horretan, nahiz eta infinitesimoen kopurua hazterakoan berauen balioak txikituz joan, aurreko teoremak ez du zertan egia izan behar. Adibidez, azter dezagun $u=\frac{1}{x}+\frac{1}{x}+\ldots+\frac{1}{x}$, x batugaien batura, non x-k balio oso eta positiboak hartzen dituen soilik ($x=1,2,3,\ldots,n,\ldots$). Bistakoa denez, batugai bakoitza infinitesimoa da $x\to\infty$ denean, ordea, $u=1$ da x guztietarako, eta beraz ez da infinitesimoa.

4. Teorema. $\alpha(x)$ infinitesimoaren eta $z=z(x)$ funtzio bornatuaren arteko $\alpha\ z=\alpha(x)\ z(x)$ biderkadura infinitesimoa da ($x\to a$ edo $x\to\infty$ denean).

Frogapena. Froga dezagun teorema $x \to a$ deneko kasuan. $M > 0$ zenbaki bat aurki daiteke, non $x = a$ puntuaren ingurune batean $|z| < M$ betetzen den. Bestalde, $\varepsilon > 0$ bakoitzerako, $x = a$ puntuaren ingurune bat aurki daiteke non $|\alpha| < \frac{\varepsilon}{M}$ den. Ingurune horien ebakiduran

$$|\alpha z| < \frac{\varepsilon}{M} M = \varepsilon$$

dugu. Beraz, αz infinitesimoa da. $x \to \infty$ deneko kasuan, frogapena antzeko era batean egiten da.

Frogaturiko teorema horren ondorio gisa ondoko korolarioak ditugu.

1. Korolarioa. $\lim \alpha = 0$ eta $\lim \beta = 0$ badira, $\lim \alpha\beta = 0$, zeren eta β funtzioa bornatua bait da. Propietate hau infinitesimoen edozein kopuru finitutara heda daiteke.

2. Korolarioa. $\lim \alpha = 0$ eta $c = $ktea. badira, $\lim c\alpha = 0$.

5. Teorema. $\alpha(x)$ infinitesimoaren eta zeroren desberdina den limitea duen $z(x)$ funtzioaren arteko $\frac{\alpha(x)}{z(x)}$ zatidura infinitesimoa da.

Frogapena. Demagun $\lim \alpha(x) = 0$ eta $\lim z(x) = b \neq 0$ direla. § 3 ataleko 2. teoremaren ondorioz, $\frac{1}{z(x)}$ funtzio bornatua da. Beraz, $\frac{\alpha(x)}{z(x)} = \alpha(x) \frac{1}{z(x)}$ zatikia, infinitesimo baten eta magnitude bornatu baten arteko biderkadura da, eta hortaz, infinitesimoa da.

§ 5. Limiteei buruzko oinarrizko teoremak

Atal honetan, aurrekoan bezala, x argumentu berberaren araberako funtzioak kontsideratuko ditugu, $x \to a$ edo $x \to \infty$ direnean.

Kasu bietan, hau da, bai $x \to a$ edo $x \to \infty$ denean, frogapenak antzekoak dira eta askotan $x \to a$ edo $x \to \infty$ notazioak ez ditugu esplizituki idatziko, hori dela eta kasu bat bakarrik aztertuko dugu.

1. Teorema. Bi, hiru edo orokorrean, aldagaien kopuru finitu baten batura algebraikoaren limitea, aldagai horien limiteen arteko batura algebraikoa da:

$$\lim(u_1 + u_2 + \ldots + u_k) = \lim u_1 + \lim u_2 + \ldots + \lim u_k.$$

Frogapena. Aldagaien edozein kopuru finitutarako frogapena antzekoa denez, bi aldagairen kasua aztertuko dugu.

Demagun $\lim u_1 = a_1$ eta $\lim u_2 = a_2$ direla. § 4. ataleko 1. teoremaren ondorioz ondokoa idatz dezakegu

$$u_1 = a_1 + \alpha_1, \quad u_2 = a_2 + \alpha_2,$$

α_1 eta α_2 infinitesimoak direlarik. Beraz,

$$u_1 + u_2 = (a_1 + a_2) + (\alpha_1 + \alpha_2).$$

$(a_1 + a_2)$ konstantea eta $(\alpha_1 + \alpha_2)$ infinitesimoa direnez gero, § 4. ataleko 1. teoremaren arabera

$$\lim(u_1 + u_2) = a_1 + a_2 = \lim u_1 + \lim u_2$$

izango dugu.

1. Adibidea.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2 + 2x}{x^2} = \lim_{x\to\infty}\left(1 + \frac{2}{x}\right) = \lim_{x\to\infty} 1 + \lim_{x\to\infty} \frac{2}{x} = 1 + \lim_{x\to\infty} \frac{2}{x} = 1 + 0 = 1.$$

2. Teorema. Bi, hiru edo orokorrean, aldagai-kopuru finitu baten biderkaduraren limitea, aldagai horien limiteen arteko biderkadura da.

$$\lim(u_1 \cdot u_2 \cdot \ldots \cdot u_k) = \lim u_1 \cdot \lim u_2 \cdot \ldots \cdot \lim u_k.$$

Frogapena. Frogapen hau gehiegi ez luzatzeko, bi faktoreren kasua aztertuko dugu. Demagun $\lim u_1 = a_1$ eta $\lim u_2 = a_2$ direla. Orduan,

$$u_1 = a_1 + \alpha_1, \quad u_2 = a_2 + \alpha_2,$$

$$u_1 u_2 = (a_1 + \alpha_1)(a_2 + \alpha_2) = a_1 a_2 + a_1\alpha_2 + a_2\alpha_1 + \alpha_1\alpha_2.$$

$a_1 a_2$ biderkadura konstantea da. § 4. ataleko teoremen arabera, $a_1\alpha_2 + a_2\alpha_1 + \alpha_1\alpha_2$ infinitesimoa da. Beraz, $\lim(u_1 u_2) = a_1 a_2 = \lim u_1 \cdot \lim u_2$.

Korolarioa. Faktore konstanteak limite ikurretik kanpo atera daitezke. Izan ere, $\lim u_1 = a_1$ eta $c =$ktea. badira, $\lim c = c$ dugu eta beraz, $\lim(cu_1) = (\lim c).(\lim u_1) = c \lim u_1$, frogatu nahi genuen bezala.

2. Adibidea. $\lim\limits_{x\to 2} 5x^3 = 5 \lim\limits_{x\to 2} x^3 = 5 \cdot 8 = 40.$

3. Teorema. Aldagai biren arteko zatiduraren limitea, aldagai horien limiteen arteko zatidura da, zatitzailearen limitea zero ez bada:

$$\lim \frac{u}{v} = \frac{\lim u}{\lim v}, \quad \lim v \neq 0 \text{ bada.}$$

Frogapena. Demagun $\lim u = a$ eta $\lim v = b \neq 0$. Orduan, $u = a + \alpha$, $v = b + \beta$, α eta β infinitesimoak direlarik.

Idatz ditzagun hurrengo berdintzak:

$$\frac{u}{v} = \frac{a+\alpha}{b+\beta} = \frac{a}{b} + \left(\frac{a+\alpha}{b+\beta} - \frac{a}{b}\right) = \frac{a}{b} + \frac{\alpha b - \beta a}{b(b+\beta)},$$

hau da,

$$\frac{u}{v} = \frac{a}{b} + \frac{\alpha b - \beta a}{b(b+\beta)}.$$

$\frac{a}{b}$ zatikia zenbaki konstantea da eta $\frac{\alpha b - \beta a}{b(b+\beta)}$ (§ 4. ataleko 4. eta 5. teoremen arabera) infinitesimoa da, $\alpha b - \beta a$ infinitesimoa bait da eta $b(b+\beta)$ zatitzailearen limitea $b^2 \neq 0$ bait da. Beraz, $\lim \frac{u}{v} = \frac{a}{b} = \frac{\lim u}{\lim v}$.

3. Adibidea. $\lim\limits_{x\to 1} \frac{3x+5}{4x-2} = \frac{\lim\limits_{x\to 1}(3x+5)}{\lim\limits_{x\to 1}(4x-2)} = \frac{3 \lim\limits_{x\to 1} x + 5}{4 \lim\limits_{x\to 1} x - 2} = \frac{3 \cdot 1 + 5}{4 \cdot 1 - 2} = \frac{8}{2} = 4.$

Adibide horretan, bi funtzioren arteko zatiduraren limitearen teorema erabili dugu, $x \to 1$ deneko zatitzailearen limitea zero ez bait da. Ordea, zatitzailearen limitea zero izan

balitz, ezin izango genukeen aipaturiko teorema aplikatu. Azken kasu horretan azterketa zehatzago bat egitea beharrezkoa da.

4. Adibidea. Kalkula dezagun $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-4}{x-2}$.

Hemen, zatitzaile eta zatikizunaren limiteak zero dira $x \to 2$ denean eta, beraz, ezin dezakegu 3. teorema aplikatu. Egin dezagun hurrengo transformazioa:

$$\frac{x^2-4}{x-2} = \frac{(x-2)(x+2)}{x-2} = x+2.$$

Transformazio hau, $x = 2$ izan ezik, x-ren balio guztietarako egin daiteke. Beraz, limitearen definizioaren arabera, hurrengoa idatz dezakegu:

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x-2} = \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(x+2)}{x-2} = \lim_{x\to 2} (x+2) = 4.$$

5. Adibidea. Kalkula dezagun $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x}{x-1}$. $x \to 1$ denean, zatitzailearen limitea zero da, zatikizunak unitaterantz jotzen duelarik. Beraz, alderantzizko funtzioaren limitea zero da, hots,

$$\lim_{x\to 1} \frac{x-1}{x} = \frac{\lim\limits_{x\to 1}(x-1)}{\lim\limits_{x\to 1} x} = \frac{0}{1} = 0.$$

Hortik, aurreko ataleko 2. teoremaren arabera, ondokoa dugu

$$\lim_{x\to 1} \frac{x}{x-1} = \infty.$$

4. Teorema. $u = u(x)$, $z = z(x)$, $v = v(x)$ hiru funtzioak $u \le z \le v$ desberdintza bikoitzaren bidez erlazionatuta badaude eta $u(x)$ eta $v(x)$ funtzioek b limiterantz jotzen badute $x \to a$ denean (edo $x \to \infty$ denean) $z = z(x)$ funtzioak limite horretarantz jotzen du $x \to a$ denean (edo $x \to \infty$ denean).

Frogapena. Ideiak zehazteko, $x \to a$ deneko kasua aztertuko dugu. $u \le z \le v$ desberdintzetatik

$$u - b \leq z - b \leq v - b$$

dugu. Teoremaren baldintzen arabera,

$$\lim_{x \to a} u = b, \quad \lim_{x \to a} v = b$$

dugu.

Beraz, $\varepsilon < 0$ edozein izanik, a puntuaren ingurune bat aurki daiteke non $|u - b| < \varepsilon$ betetzen den; modu berean, $|v - b| < \varepsilon$ betetzen deneko ingurune bat aurki daiteke baita ere. Bi ingurune horien ebakiduran hurrengo desberdintzak beteko dira

$$-\varepsilon < u - b < \varepsilon \text{ eta } -\varepsilon < v - b < \varepsilon$$

eta beraz, hurrengo desberdintzak ere egiazkoak izango dira

$$-\varepsilon < z - b < \varepsilon,$$

hots,

$$\lim_{x \to a} z = b.$$

5. Teorema. $x \to a$ denean (edo $x \to \infty$ denean), y funtzioak balio negatiboak hartzen ez baditu $(y \geq 0)$ eta b limitea du, limite hori zenbaki ez-negatiboa izango da, hau da, $b \geq 0$.

Frogapena. Demagun b negatiboa dela, $b < 0$, orduan $|y - b| \geq |b|$, hau da, $y - b$ diferentziaren balio absolutua $|b|$ zenbaki positiboa baino handiagoa da eta beraz, ez du zerorantz jotzen $x \to a$ denean. Baina orduan, $x \to a$ denean, y delakoak ezin du b-rantz jo eta hau hipotesiaren kontra doa. Beraz, $b < 0$ hipotesiak kontraesan batera eraman gaitu. Honelatan ba, $b \geq 0$.

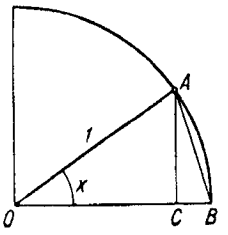
Modu berean, $y \leq 0$, denean, $\lim y \leq 0$ dela frogatzen da.

6. Teorema. $u = u(x)$ eta $v = v(x)$ funtzioek $v \geq u$ desberdintza betetzen badute $x \to a$ denean (edo $x \to \infty$ denean) eta bi funtzio horien limiteak existitzen badira $\lim v \geq \lim u$ ere beteko da.

Frogapena. Hipotesiaren arabera $v - u \geq 0$ eta 5. teoremaren ondorioz, $\lim (v - u) \geq 0$, hau da, $\lim v - \lim u \geq 0$, hots, $\lim v \geq \lim u$.

6. Adibidea. Froga dezagun $\lim_{x \to 0} \sin x = 0$.

42. irudiaren arabera, $OA = 1$ bada eta $x > 0$, $AC = \sin x$, $AB = x$ eta $\sin x < x$ izango dugu. $x < 0$ bada, $|\sin x| < |x|$ dela bistakoa da. 5. eta 6. teoremen arabera, desberdintza bi horien ondorioz $\lim\limits_{x \to 0} \sin x = 0$ dugu.



42. IRUDIA

7. Adibidea. Froga dezagun $\lim\limits_{x \to 0} \sin \frac{x}{2} = 0$ dela.

Izan ere, $\left|\sin \frac{x}{2}\right| < |\sin x|$; beraz, $\lim\limits_{x \to 0} \sin \frac{x}{2} = 0$.

8. Adibidea. Froga dezagun $\lim\limits_{x \to 0} \cos x = 1$.

$\cos x = 1 - 2\sin^2 \frac{x}{2}$ izanik,

$$\lim_{x \to 0} \cos x = \lim_{x \to 0}\left(1 - 2\sin^2 \frac{x}{2}\right) = 1 - 2 \lim_{x \to 0} \sin^2 \frac{x}{2} = 1 - 0 = 1$$

dugu.

Zenbait aldagairen limiteak aztertzerakoan hurrengo problemak ebazteko beharra azaltzen da:

1) Aldagaiaren limitea existitzen dela frogatu eta limite hori kokatzen deneko tarte bat aurkitu.

2) Aldez aurretik emaniko zehaztasun batez limite hori kalkulatu.

Batzutan, lehenengo problema hurrengo teoremaren bidez ebazten da.

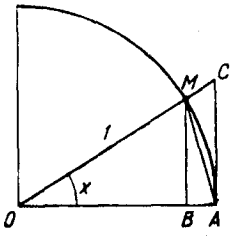
7. Teorema. υ aldagaia gorakorra bada, hots, berorren atzeko balioak aurreko guztiak baino handiagoak badira, eta aldagaia bornatua bada, hau da, $\upsilon < M$, aldagai horrek limitea du, $\lim \upsilon = a$, non $a \leq M$ *den*.

Aldagaia beherakorra eta bornatua denean antzeko teorema bat betetzen da. Hemen ez dugu teorema hori frogatuko, liburu honetan azaldu ez dugun zenbaki errealen teorian bait du oinarria.

Hurrengo ataletan, analisi matematikoan oso aplikagarriak diren bi limite kalkulatuko ditugu.

§ 6. $\frac{\sin x}{x}$ funtzioaren limitea $x \to 0$ denean

$\frac{\sin x}{x}$ funtzioa $x = 0$ puntuan ez dago definituta, zeren eta zatikiaren zenbakitzailea eta izendatzailea $x = 0$ baliorako anulatzen bait dira. Ikus dezagun zein den limitea $x \to 0$ denean



43. IRUDIA

Kontsidera dezagun 1 erradiodun zirkunferentzia (43. irudia); biz x, MOB angelu zentrala, $0 < x < \frac{\pi}{2}$ izanik. 43. irudian ikusten denez:

ΔMOA triangeluaren azalera $<$ MOA sektorearen azalera $<$ ΔCOA triangeluaren azalera (1)

ΔMOA triangeluaren azalera $= \frac{1}{2}\, OA \cdot MB = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \sin x = \frac{1}{2} \sin x.$

MOA sektorearen azalera $= \frac{1}{2}\, OA \cdot \overset{\frown}{AM} = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot x = \frac{1}{2} x.$

ΔCOA triangeluaren azalera $= \frac{1}{2}\, OA \cdot AC = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \tan x = \frac{1}{2} \tan x$ direlarik.

$\frac{1}{2}$ faktorea sinplifikatuz, (1) desberdintza ondoko hau bihurtzen da:

$$\sin x < x < \tan x.$$

Atal guztiak $\sin x$ faktoreaz zatituz hurrengoa izango dugu:

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x},$$

hots,

$$1 > \frac{\sin x}{x} > \cos x.$$

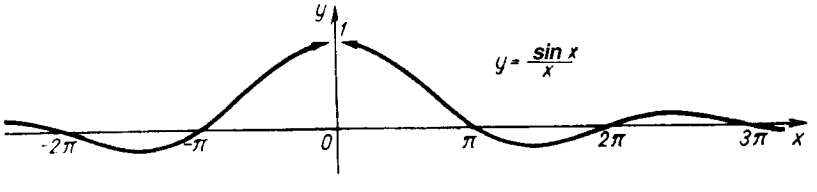
Desberdintza hori $x > 0$ dela suposatuz lortu dugu. $\frac{\sin(-x)}{(-x)} = \frac{\sin x}{x}$ eta $\cos(-x) = \cos x$ dela kontuan izanik, desberdintza hori $x < 0$ denean ere baliagarria dela ondorioztatzen da. Bestalde, $\lim\limits_{x \to 0} \cos x = 1$, $\lim\limits_{x \to 0} 1 = 1$.

Hortaz, $\frac{\sin x}{x}$ aldagaia, 1 limitea duten bi aldagairen artean kokatuta dago. Honelatan, aurreko ataleko 4. teoremaren arabera:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

dugu.

$y = \frac{\sin x}{x}$ funtzioaren grafikoa 44. irudian adierazten da.



44. IRUDIA

Adibideak:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}\cdot\dfrac{1}{\cos x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\cos x}=1\cdot\dfrac{1}{1}=1.$

2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin kx}{x}=\lim\limits_{x\to 0}k\dfrac{\sin kx}{kx}=k\lim\limits_{\substack{x\to 0\\(kx\to 0)}}\dfrac{\sin(kx)}{(kx)}=k\cdot 1=k$ ($k=$ ktea.).

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\sin\dfrac{x}{2}=1\cdot 0=0.$

4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\alpha x}{\sin\beta x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\alpha}{\beta}\cdot\dfrac{\frac{\sin\alpha x}{\alpha x}}{\frac{\sin\beta x}{\beta x}}=\dfrac{\alpha}{\beta}\dfrac{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin\alpha x}{\alpha x}}{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin\beta x}{\beta x}}=$

$=\dfrac{\alpha}{\beta}\cdot\dfrac{1}{1}=\dfrac{\alpha}{\beta}$ ($\alpha=$ konstantea, $\beta=$ konstantea).

§ 7. *e* zenbakia

Kontsidera dezagun ondoko magnitude aldakorra:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

non n 1,2,3,... ondoz ondoko balioak hartzen dituen aldagai gorakorra den.

1. Teorema. $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ aldagaiak, 2 eta 3 zenbakien artean kokaturiko limitea du $n\to\infty$ denean.

Frogapena. Newton-en binomioaren arabera hurrengoa idatz dezakegu:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=1+\frac{n}{1}\cdot\frac{1}{n}+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\left(\frac{1}{n}\right)^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\left(\frac{1}{n}\right)^3+\ldots$$

$$\ldots+\frac{n(n-1)(n-2)\ldots[n-(n-1)]}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n}\left(\frac{1}{n}\right)^n. \qquad (1)$$

Bistakoak diren zenbait transformazio algebraiko egin ondoren:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1+1+\frac{1}{1\cdot 2}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot\left(1-\frac{2}{n}\right)+\ldots$$

$$\ldots+\frac{1}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n}\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{n-1}{n}\right). \qquad (2)$$

Azken berdintzatik n hazterakoan $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ aldagaia gorakorra dela ondorioztatzen da. Izan ere, n-tik $n+1$-era pasatzerakoan batugai bakoitza hazten da, hau da,

$$\frac{1}{1\cdot 2}\left(1-\frac{1}{n}\right)<\frac{1}{1\cdot 2}\left(1-\frac{1}{n+1}\right), \text{ etab.,}$$

eta horretaz gain, batugai bat gehitzen da. Garapeneko gai guztiak positiboak dira.

$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ aldagaia bornatua dagoela frogatuko dugu.

$\left(1-\frac{1}{n}\right)<1$; $\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)<1$, etab., kontuan izanik, (2) adierazpenetik hurrengo desberdintza lortzen da

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<1+1+\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n},$$

eta

$$\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}<\frac{1}{2^2};\quad \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}<\frac{1}{2^3};\quad \frac{1}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n}<\frac{1}{2^{n-1}}$$

dela kontuan izanik,

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<1+\underbrace{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}}}$$

idatz dezakegu.

Desberdintza horretako bigarren atalean azpimarraturiko gaiek, $q = \frac{1}{2}$ arrazoidun progresio geometriko bat osotzen dute, lehen gaia $a = 1$ delarik. Beraz,

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 1 + \left[1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}}\right] =$$

$$= 1 + \frac{a - aq^n}{1-q} = 1 + \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}} = 1 + \left[2 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right] < 3.$$

Hortaz, n guztietarako ondokoa dugu:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 3.$$

(2) berdintzatik hurrengoa ateratzen da

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \geq 2$$

eta, horren ondorio bezala, hurrengo desberdintza dugu

$$2 \leq \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 3. \qquad (3)$$

Honelatan ba, $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ aldagaia bornatua dagoela frogatzen dugu.

Laburtuz, $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ aldagaia gorakorra eta bornatua dela ikusten dugu eta beraz (5. ataleko 7. teoremaren arabera) limitea du. Limite hori e letraren bidez adierazten da.

Definizioa. $n \to \infty$ denean $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ aldagaiaren limiteari[2)] e zenbaki deritzo:

$$e = \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

§ 5. ataleko 6. teoremaren arabera, (3) desberdintzatik, e zenbakiak $2 \le e \le 3$ betetzen duela ondorioztatzen da.

Teorema frogaturik geratzen da.

e zenbakia irrazionala da. Aurrerago adieraziko da nahi den zehaztasunez e zenbakia kalkulatzeko metodoa. Lehen hamar zifra hamartarrekin, berorren balioa hauxe da:

$$e = 2{,}7182818284\ldots$$

2. Teorema. $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ funtzioak e limiterantz jotzen du $x \to \infty$ denean, hau da,

$$\lim_{x\to\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e.$$

Frogapena. $n \to \infty$ denean $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \to e$ dela aurkitu dugu, n delakoak balio oso positiboak hartzen dituenean. Demagun orain x aldagaiak infiniturantz jotzen duela balio zatikiarrak edo negatiboak hartzen dituelarik.

1) Demagun $x \to +\infty$ dela. x aldagaiaren balio bakoitza bi zenbaki oso positiboren artean kokatzen da:

$$n \le x \le n+1.$$

Kasu honetan, hurrengo desberdintzak betetzen dira:

---

2) Nahiz eta n aldagaia gorakorra ez izan, $n \to \infty$ denean $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \to e$ dela froga daiteke.

$$\frac{1}{n} \geq \frac{1}{x} > \frac{1}{n+1},$$

$$1+\frac{1}{n} \geq 1+\frac{1}{x} > 1+\frac{1}{n+1},$$

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} > \left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} > \left(1+\frac{1}{n\pm 1}\right)^{n}.$$

$x \to \infty$ denean, bistakoa da $n \to \infty$ dela. Kalkula ditzagun $\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}$ adierazpena beraien artean duten aldagaien limiteak:

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\left(1+\frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} \cdot \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right) = e\cdot 1 = e,$$

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n} = \lim_{n\to+\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{1+\frac{1}{n+1}} = \frac{\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)} = \frac{e}{1} = e.$$

Beraz, 5. ataleko 4. teoremaren arabera honakoa dugu:

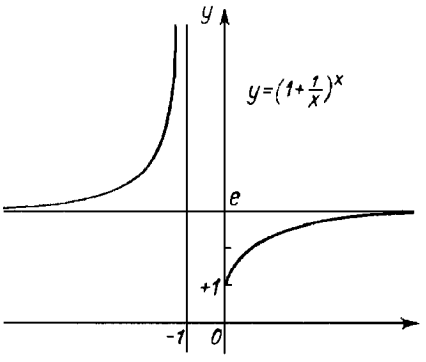
$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = e. \qquad (4)$$

2) Demagun $x \to -\infty$ dela. Defini dezagun $t = -(x+1)$ aldagai berria, hots, $x = -(t+1)$, $t \to +\infty$ denean, $x \to -\infty$ izango dugu. Orduan,

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = \lim_{t\to+\infty}\left(1-\frac{1}{t+1}\right)^{-t-1} = \lim_{t\to+\infty}\left(\frac{t}{t+1}\right)^{-t-1} = \lim_{t\to+\infty}\left(\frac{t+1}{t}\right)^{t+1} =$$

$$= \lim_{t\to+\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t+1} = \lim_{t\to+\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t}\left(1+\frac{1}{t}\right) = e\cdot 1 = e.$$

Teorema frogaturik geratzen da. $y = \left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}$ funtzioaren grafikoa 45. irudian adierazten da.



45. IRUDIA

(4) berdintzan $\frac{1}{x} = \alpha$ jartzen badugu, orduan $\alpha \to 0$ dugu (baina $\alpha \neq 0$), $x \to \infty$ denean, eta orduan:

$$\lim_{\alpha \to 0} (1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = e.$$

Adibideak:

1) $$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+5} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{5} =$$
$$= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} \cdot \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{5} = e\cdot 1 = e.$$

2) $$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{3x} = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} =$$
$$= \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} \cdot \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} \cdot \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = e\cdot e\cdot e = e^3.$$

3) $$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^{x} = \lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^{2y} = e^2.$$

$$4)\ \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+3}{x-1}\right)^{x+3} = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-1+4}{x-1}\right)^{x+3} = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{4}{x-1}\right)^{x+3} =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{4}{x-1}\right)^{(x-1)+4} = \lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{4}{y}\right)^{y+4} =$$

$$= \lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{4}{y}\right)^{y}\cdot\lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{4}{y}\right)^{4} = e^4\cdot 1 = e^4.$$

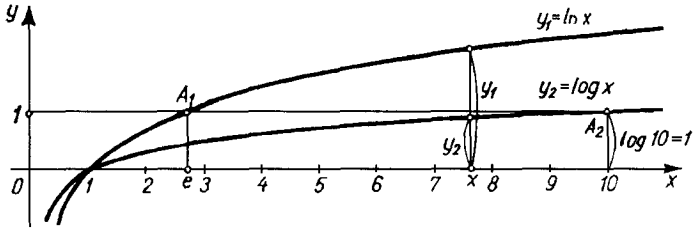
§ 8. Logaritmo arruntak

Lehen gaiko 8. atalean $y = \log_a x$ funtzio logaritmikoa definitu dugu. Ezaguna denez, a zenbakia logaritmoaren oinarria da. $a = 10$ denean, orduan y zenbakia x-ren logaritmo hamartar deitzen da eta $y = \log x$ idazten da. Erdi mailako hezkuntzan logaritmo hamartarren taulak idazten dira, Briggs-enak ere deitzen direlarik, matematikari ingelesaren oroimenez (1556-1630).

e = 2,71828... zenbakia oinarri bezala duen logaritmoari logaritmo *arrunt* edo *nepertar* deritzo, logaritmoen taulen lehenetariko asmatzailea izan zen Neper (1550-1617) matematikariaren oroimenez. Beraz, $e^y = x$ bada, y zenbakia x-ren logaritmo arrunt deitzen da, eta honela idazten da: $y = \ln x$, $y = \log_e x$ azken notazio hori ez dugu erabiliko. $y = \ln x$ eta $y = \log x$ funtzioen grafikoak 46. irudian ikus daitezke.

Determina dezagun x zenbaki beraren logaritmo hamartarren eta arrunten arteko erlazioa. Demagun $y = \log x$, hots, $x = 10^y$. Azken ekuazioko bi ataletan e oinarridun logaritmoa hartuz ondokoa izango dugu: $\ln x = y\ln 10$, beraz $y = \dfrac{1}{\ln 10}\ln x$. y-ren balioa ordezkatuz ondokoa izango dugu:

$$\log x = \frac{1}{\ln 10}\ln x.$$



46. IRUDIA

Horren arabera, x zenbakiaren logaritmo arrunta ezagutzen denean, berori $M = \dfrac{1}{\ln 10} \approx 0,434294$ faktoreaz biderkatuz (faktore hori ez da x-ren araberakoa) logaritmo hamartarra lortzen da. M faktore horri logaritmo arruntetiko logaritmo hamartarrerako *modulu* edo *iragapen-modulu* deritzo:

$$\log x = M \ln x.$$

Berdintza horretan $x = e$ hartzerakoan, M zenbakia lortzen dugu logaritmo hamartarren bidez adierazirik:

$$\log e = M \quad (\ln e = 1).$$

Logaritmo arruntak honela adierazten dira logaritmo hamartarren bidez:

$$\ln x = \frac{1}{M} \log x,$$

non $\dfrac{1}{M} = 2,302585$ den.

Oharra. Logaritmo arruntak kalkulatzeko badaude taula bereziak.

§ 9. Funtzioen jarraitasuna

Demagun $y = f(x)$ funtzioa x_0 puntu batean eta puntu horretan zentrua duen ingurune batean definituta dagoela. Biz $y_0 = f(x_0)$.

x-ri Δx gehikuntza ematen bazaio (positiboa edo negatiboa), aldagaiak $x = x_0 + \Delta x$ balioa hartzen du eta y funtzioak Δy gehikuntza jasango du. Funtzioaren gehituriko balio berria $y_0 + \Delta y = f(x_0 + \Delta x)$ izango da (47. irudia). Funtzioaren gehikuntza hurrengo formularen bidez adierazten da

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0).$$

1. Definizioa. $y = f(x)$ funtzioa $x = x_0$ puntuan (edo $x = x_0$ baliorako) *jarraia* dela esango da, x_0 puntuaren ingurune batean definituta badago (x_0 barne delarik) eta

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0 \tag{1}$$

betetzen bada, edo, guztiz baliokidea dena,

$$\lim_{\Delta x \to 0} \left[f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \right] = 0. \tag{2}$$

(2) baldintza honela idatz daiteke baita ere:

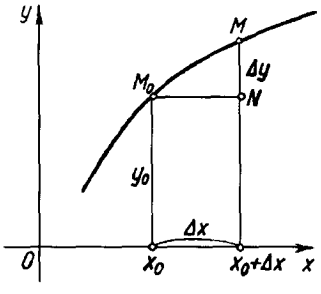
$$\lim_{\Delta x \to 0} f(x_0 + \Delta x) = f(x_0)$$

edo

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0). \tag{2'}$$

Lengoaia geometrikoan, puntu batean funtzioaren jarraitasunaren esanahia hauxe da: $y = f(x)$ grafikoaren ordenatuen diferentzia $x_0 + \Delta x$ eta x_0 puntuetan, balio absolutuan infinituki txikia izango da baldin eta $|\Delta x|$ nahikoa txikia bada.

1. Adibidea. $y = x^2$ funtzioa x_0 edozein puntutan jarraia dela frogatuko dugu.



47. IRUDIA

Izan ere

$$y_0 = x_0^2,\ y_0 + \Delta y = (x_0 + \Delta x)^2,$$

$$\Delta y = (x_0 + \Delta x)^2 - x_0^2 = 2x_0\Delta x + \Delta x^2,$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \to 0} (2x_0\Delta x + \Delta x^2) =$$

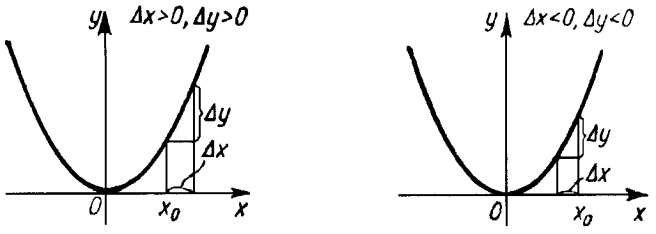
$$= 2x \lim_{\Delta x \to 0} \Delta x + \lim_{\Delta x \to 0} \Delta x \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \Delta x = 0$$

Δx-k zerorantz jotzen duen erarekiko independenteki (48. a eta b irudiak).

2. Adibidea. Froga dezagun $y = \sin x$ funtzioa x_0 puntu guztietan jarraia dela. Izan ere,

$$y_0 = \sin x_0,\ y_0 + \Delta y = \sin(x_0 + \Delta x),$$

$$\Delta y = \sin\,(x_0 + \Delta x) - \sin x_0 = 2\sin\frac{\Delta x}{2} \cdot \cos\left(x_0 + \frac{\Delta x}{2}\right)$$



a) b)

48. IRUDIA

Jadanik ikusi dugu $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \sin\frac{\Delta x}{2} = 0$ (5. ataleko 7. adibidea). $\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)$ funtzioa bornatuta dago. Beraz, $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$.

Era berean, oinarrizko funtzio elemental oro definituta dagoen puntu guztietan jarraia dela froga daiteke.

Froga dezagun hurrengo teorema.

1. Teorema. $f_1(x)$ eta $f_2(x)$ funtzioak x_0 puntuan jarraiak badira, berorien arteko batura, $\psi(x) = f_1(x) + f_2(x)$ jarraia da x_0 puntuan.

Frogapena. $f_1(x)$ eta $f_2(x)$ jarraiak izanik, (2') desberdintzaren arabera, hurrengoa idatz dezakegu:

$$\lim_{x \to x_0} f_1(x) = f_1(x_0)$$

$$\lim_{x \to x_0} f_2(x) = f_2(x_0).$$

Limiteei buruzko 1. teoremaren arabera, ondokoa dugu:

$$\lim_{x \to x_0} \psi(x) = \lim_{x \to x_0} \left[f_1(x) + f_2(x)\right] = \lim_{x \to x_0} f_1(x) + \lim_{x \to x_0} f_2(x) = f_1(x_0) + f_2(x_0) = \psi(x_0),$$

hots, $\psi(x) = f_1(x) + f_2(x)$ batura funtzio jarraia da, frogatu nahi genuen bezala.

Korolario gisa, aipa dezagun aurreko teorema, batugaien edozein kopuru finitutarako ere egia dela.

Limiteen propietateetan oinarrituz, hurrengo teoremak froga daitezke baita ere:

a) Funtzio jarraien arteko biderkadura funtzio jarraia da.

b) Funtzio jarraien arteko zatidura funtzio jarraia da, zatitzaileak ez badu azterturiko puntuan zero balioa hartzen.

c) $u = \psi(x)$ funtzio jarraia bada $x = x_0$ puntuan eta $f(u)$ jarraia bada $u_0 = \psi(x_0)$ puntuan, $f[\psi(x)]$ funtzio konposatua jarraia da x_0 puntuan.

Aurrekoetan oinarriturik hurrengo teorema ere idatz daiteke.

2. Teorema. Funtzio elementalak jarraiak dira definituta dauden puntu guztietan.

Oharra. (2') berdintza

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

non

$$x_0 = \lim_{x \to x_0} x$$

den honela idatz daiteke:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(\lim_{x \to x_0} x). \tag{3}$$

Hau da, $x \to x_0$ deneko funtzio jarrai baten limitea kalkulatzeko, nahikoa da x aldagai independentearen ordez, beraren x_0 balioa hartzea $f(x)$ funtzioaren adierazpenean.

3. Adibidea. $y = x^2$ funtzioa jarraia da x_0 edozein puntutan. Beraz,

$$\lim_{x \to x_0} x^2 = x_0^2,$$

$$\lim_{x \to 3} x^2 = 3^2 = 9.$$

4. Adibidea. $y = \sin x$ funtzioa jarraia da x edozein puntutan. Hortaz,

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \sin x = \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

5. Adibidea. $y = e^x$ funtzioa jarraia da a edozein puntutan. Beraz,

$$\lim_{x \to a} e^x = e^a.$$

6. Adibidea. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}\ln(1+x)=\lim\limits_{x\to 0}\ln\left[(1+x)^{1/x}\right]$. Bestalde, $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{1/x}=e$ eta $\ln z$ funtzioa jarraia da $z>0$ guztietarako eta beraz $z=e$ puntuan. Hortaz, $\lim\limits_{x\to 0}\ln\left[(1+x)^{1/x}\right]=\ln\left[\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{1/x}\right]=\ln e=1$ dugu.

2. Definizioa. $y=f(x)$ funtzioa (a,b) *tartean jarraia* da, $a<b$ izanik, tarteko puntu guztietan jarraia bada.

Funtzioa $x=a$ puntuan ere definituta badago, $\lim\limits_{x\to a+0}f(x)=f(a)$ izanik, $f(x)$ funtzioa $x=a$ puntuan *eskuin-jarraia* dela esaten da. $\lim\limits_{x\to b-0}f(x)=f(b)$ bada, $f(x)$ funtzioa $x=b$ puntuan *ezker-jarraia* dela esaten da.

$f(x)$ funtzioa (a,b) tarteko puntu guztietan jarraia bada eta berorren muturretan ere (eskuinetik eta ezkerretik, hurrenez hurren) $f(x)$ funtzioa $[a,b]$ *tarte itxian jarraia* dela esaten da.

7. Adibidea. $y=x^2$ funtzioa jarraia da edozein $[a,b]$ tarte itxitan, 1. adibidearen arabera ondorioztatzen denez gero.

$x=x_0$ puntuan $y=f(x)$ funtzioak jarraitasunerako baldintzetariko bat betetzen ez badu, hau da, $x=x_0$ puntuan definituta ez badago edo $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ limitea existitzen ez bada edo $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\neq f(x_0)$ bada, nahiz eta berdintzaren ezker eta eskuineko adierazpenak existitu, $y=f(x)$ funtzioa $x=x_0$ puntuan *etena* dela esaten da. $x=x_0$ puntuari funtzioaren *etengune* deritzo.

8. Adibidea. $y=\dfrac{1}{x}$ funtzioa $x=0$ puntuan etena da. Izan ere, $x=0$ denean funtzioa ez dago definiturik.

$$\lim_{x\to 0+0}\frac{1}{x}=+\infty;\quad \lim_{x\to 0-0}\frac{1}{x}=-\infty.$$

Erraz ikus daitekeenez, funtzio hori $x\neq 0$ puntu guztietan jarraia da (ikus 35. irudia).

9. Adibidea. $y=2^{1/x}$ funtzioa $x=0$ puntuan etena da. Izan ere, $\lim\limits_{x\to 0+0} 2^{1/x}=\infty$, $\lim\limits_{x\to 0-0} 2^{1/x}=0$.

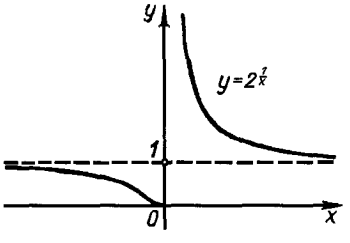
Funtzioa ez dago $x=0$ puntuan definituta (49. irudia).

10. Adibidea. Azter dezagun $f(x)=\dfrac{x}{|x|}$ funtzioa. $x<0$ denean, $\dfrac{x}{|x|}=-1$ da eta $x>0$ denean, $\dfrac{x}{|x|}=1$.

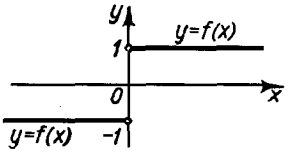
Beraz

$$\lim_{x\to 0-0} f(x)=\lim_{x\to 0-0}\frac{x}{|x|}=-1;\quad \lim_{x\to 0+0} f(x)=\lim_{x\to 0+0}\frac{x}{|x|}=1;$$

baina funtzioa ez dago $x=0$ puntuan definituta. Modu horretan, $f(x)=\dfrac{x}{|x|}$ funtzioa $x=0$ puntuan etena dela frogatu dugu (50. irudia).



49. IRUDIA



50. IRUDIA

11. Adibidea. 3. ataleko 4. adibidean azterturiko $y=\sin\dfrac{1}{x}$ funtzioa $x=0$ puntuan etena da.

3. Definizioa. Demagun $f(x)$ funtzioaren $\lim\limits_{x \to x_0+0} f(x) = f(x_0+0)$ eta $\lim\limits_{x \to x_0-0} f(x) = f(x_0-0)$ limiteak existitzen direla finituak eta desberdinak izanik, hots, $\lim\limits_{x \to x_0+0} f(x) \neq \lim\limits_{x \to x_0-0} f(x)$. Kasu honetan, $x = x_0$ puntuari *lehen mailako etengune* deritzo. (10. adibideko funtziorako, $x = 0$ puntua lehen mailako etengunea da).

§ 10. Funtzio jarraien zenbait propietate

Atal honetan, funtzio jarraiek tarte itxietan dituzten propietate batzu azalduko ditugu. Propietate hauek teorema bezala aurkeztuko ditugu baina frogapenik gabe.

1. Teorema. $y = f(x)$ funtzioa $[a,b]$ tarte itxian $(a \leq x \leq b)$ jarraia bada, tarte horretan gutxienez $x = x_1$ puntu bat existitzen da zeinetarako

$$f(x_1) \geq f(x)$$

desberdintza betetzen den tarteko x edozein puntutarako. Bestalde, gutxienez x_2 puntu bat existitzen da zeinetarako

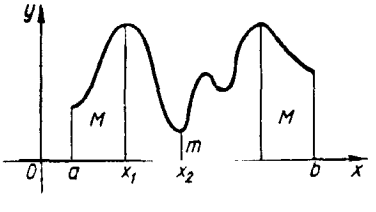
$$f(x_2) < f(x)$$

desberdintza betetzen den tarteko x guztietarako.

$f(x_1)$ balioari $y = f(x)$ funtzioaren $[a,b]$ tarteko *balio maximo* deritzo, $f(x_2)$ balioari tarteko *balio minimo*.

Teorema hori laburki honela enuntzia daiteke: $a \leq x \leq b$ tarte itxi batean jarraiak diren funtzioek gutxienez behin erdiesten dute beraien M balio maximoa eta m balio minimoa.

Teorema horren esanahi geometrikoa 51. irudian adierazten da.



51. IRUDIA

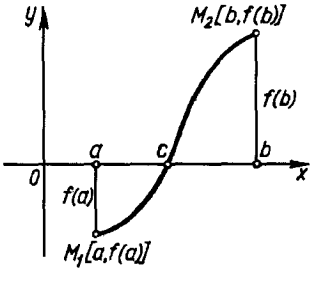
1. Oharra. Funtzioa tarte ireki batean definituta dagoenean, aurreko teoremak ez du zertan egiazkoa izan behar. Adibidez, $y = x$ funtzioak $0 < x < 1$ tarte irekian ez du bere balioen artean balio maximorik ez minimorik ere. Hori horrela da tarteko ezkerreko muturra tartean ez dagoelako. Honela, x^* tarteko edozein puntu izanik, beti aurki daiteke puntu horren ezkerrean kokatzen den tarteko beste puntu bat, adibidez, $\frac{x^*}{2}$. Arrazoi beragatik, eskuineko muturra ere ez dago tartean eta beraz $y = x$ funtzioak ez du ez balio maximoa ez minimoa erdiesten.

2. Teorema. $y = f(x)$ funtzioa $[a,b]$ tarte itxian jarraia bada eta muturretan hartzen dituen balioak zeinu desberdinekoak badira, a eta b puntuen artean gutxienez $x = c$ puntu bat existitzen da non f funtzioak zero balioa hartzen duen:

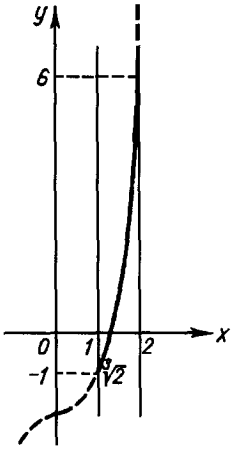
$$f(c) = 0, \quad a < c < b.$$

Teorema horrek esanahi geometriko erraza du. $M_1[a, f(a)]$ eta $M_2[b, f(b)]$ puntuak lotzen dituen grafikoak non $f(a) < 0$ eta $f(b) > 0$ [edo, $f(a) > 0$ eta $f(b) < 0$] diren, Ox ardatza gutxienez puntu batean ebakitzen du (52. irudia).

Adibidea. Biz $y = x^3 - 2$ funtzioa. $y_{x=1} = -1$ eta $y_{x=2} = 6$ ditugu. Funtzio hori [1,2] tartean jarraia da. Beraz, tarte horretan anulatzen deneko puntu bat existitzen da gutxienez. Izan ere, $y = 0$ da $x = \sqrt[3]{2}$ denean (53. irudia).



52. IRUDIA

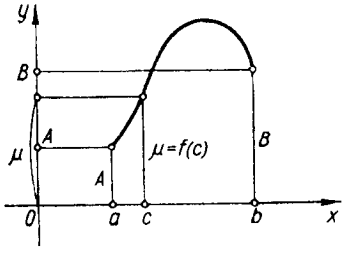


53. IRUDIA

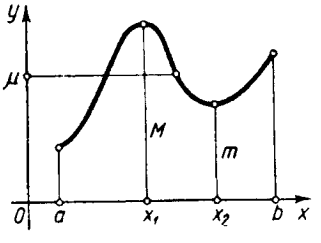
3. Teorema. Biz $y = f(x)$ $[a,b]$ tartean definituriko eta jarraia den funtzioa. Tartearen muturretan $f(a) = A$ eta $f(b) = B$ balio desberdinak hartzen baditu, A eta B arteko μ edozein zenbakitarako, beti existitzen da a eta b-ren artean kokaturiko $x = c$ puntu bat non $f(c) = \mu$ *den*.

Teorema hori 54. irudian argi adierazten da. Emaniko kasuan, $y = \mu$ zuzenak $y = f(x)$ funtzioaren grafikoa ebakiko du.

2. Oharra. 2. teorema, 3. teoremaren kasu berezia dela esan behar da. Izan ere, A eta B zenbakiek zeinu desberdinak badituzte, $\mu = 0$ har dezakegu, 0 balioa A eta B-ren artean kokatuta bait dago.



54. IRUDIA



55. IRUDIA

3. Teoremaren korolarioa. $y = f(x)$ funtzioa tarte batean jarraia bada eta bertan bere balio maximo eta minimoak erdiesten baditu, emaniko tartean, funtzioak gutxienez behin hartzen ditu maximo eta minimoaren arteko balio guztiak.

Izan ere, demagun $f(x_1) = M$ eta $f(x_2) = m$ direla. 3. teoremaren arabera, $y = f(x)$ funtzioak $[x_1, x_2]$ tartean, M eta m-ren artean kokaturiko μ balio guztiak hartzen ditu. Bestalde, $[x_1, x_2]$ tartea $f(x)$ funtzioa definituta dagoeneko tartearen parte da (55. irudia).

§ 11. Infinitesimoen arteko konparaketa

Demagun α, β eta γ infinitesimoak x argumentuaren funtzioak direla eta zerorantz jotzen dutela x aldagaiak a limiterantz edo infiniturantz doanean. Azter dezagun aldagai horien zeroranzko joera, beraien arteko zatidurak kontsideratuz[3].

Aurrerantzean hurrengo definizioak erabiliko ditugu.

---

3) Zatitzailean azaltzen den infinitesimoa a puntuaren ingurune batean ez dela anulatzen suposatzen da.

1. Definizioa. $\dfrac{\beta}{\alpha}$ arrazoiak limite finitu eta ez-nulu baterantz jotzen badu, hots, $\lim \dfrac{\beta}{\alpha} = A \neq 0$, eta beraz $\lim \dfrac{\alpha}{\beta} = \dfrac{1}{A} \neq 0$, α eta β infinitesimoak *ordena bereko infinitesimoak* direla esango dugu.

1. Adibidea. Demagun $\alpha = x$ eta $\beta = \sin 2x$ direla eta x aldagaiak zerorantz jotzen duela. α eta β infinitesimoak ordena berekoak dira, zeren

$$\lim_{x \to 0} \frac{\beta}{\alpha} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin 2x}{x} = 2$$

bait da.

2. Adibidea. $x \to 0$ denean, x, $\sin 3x$, $\tan 2x$ eta $7 \ln (1 + x)$ infinitesimoak ordena berekoak dira. Frogapena 1. adibidekoaren antzekoa da.

2. Definizioa. α eta β bi infinitesimoren arteko $\dfrac{\beta}{\alpha}$ arrazoiak zerorantz jotzen badu, hots, $\lim \dfrac{\beta}{\alpha} = 0$ (eta hortaz, $\lim \dfrac{\alpha}{\beta} = \infty$), α -rekiko, β *ordena handiagoko infinitesimoa* dela esango dugu eta elkarrekikoa, α *ordena txikiagoko infinitesimoa* izango da β -rekiko.

3. Adibidea. Demagun $\alpha = x$ eta $\beta = x^n$, $n > 1$ direla eta x-k zerorantz jotzen duela. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^n}{x} = \lim\limits_{x \to 0} x^{n-1} = 0$ denez gero, β infinitesimoa ordena handiagokoa da α-rekiko.

Elkarrekikoa, α infinitesimoa ordena txikiagokoa da β -rekiko.

3. Definizioa. β eta α^k ordena bereko infinitesimoak badira, hots, $\lim \dfrac{\beta}{\alpha^k} = A \neq 0$ bada, β *infinitesimoa* α*-rekiko* k *ordenakoa* dela esango dugu.

4. Adibidea. $\alpha = x$ eta $\beta = x^3$ badira, $x \to 0$ denean, β infinitesimoa hirugarren ordenakoa da α-rekiko, zeren eta:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\beta}{\alpha^3}=\lim_{x\to 0}\frac{x^3}{(x)^3}=1 \qquad \text{bait da.}$$

4. Definizioa. Bi infinitesimoren arteko $\dfrac{\beta}{\alpha}$ arrazoiak unitaterantz jotzen badu, hots, $\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=1$, β eta α infinitesimo horiei *baliokide* deritze eta $\beta\sim\alpha$ idatziko dugu.

5. Adibidea. Demagun $\alpha=x$ eta $\beta=\sin x$ direla, $x\to 0$ denean. α eta β infinitesimoak baliokideak dira,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

bait da.

6. Adibidea. Demagun $\alpha=x$ eta $\beta=\ln(1+x)$ direla, $x\to 0$ denean. α eta β infinitesimoak baliokideak dira,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$$

bait da (ikus § 9. ataleko 6. adibidea).

1. Teorema. α eta β infinitesimo baliokideak badira, beraien arteko kendura, $\alpha-\beta$, ordena handiagoko infinitesimoa da bai α edo β-rekiko.

Frogapena. Izan ere

$$\lim\frac{\alpha-\beta}{\alpha}=\lim\left(1-\frac{\beta}{\alpha}\right)=1-\lim\frac{\beta}{\alpha}=1-1=0.$$

2. Teorema (Aurrekoaren elkarrekikoa). Infinitesimo biren $\alpha-\beta$ kendura ordena handiagoko infinitesimoa bada, bai α eta bai β-rekiko, α eta β infinitesimo baliokideak dira.

Frogapena. Demagun $\lim \frac{\alpha-\beta}{\alpha} = 0$ dela, orduan, $\lim\left(1-\frac{\beta}{\alpha}\right) = 0$, hots, $1 - \lim\frac{\beta}{\alpha} = 0$, hau da, $1 = \lim\frac{\beta}{\alpha}$. Beraz, $\alpha \sim \beta$. $\lim\frac{\alpha-\beta}{\beta} = 0$ denean, $\lim\left(\frac{\alpha}{\beta}-1\right) = 0$ dugu, hots, $\lim\frac{\alpha}{\beta} = 1$ eta beraz, $\alpha \sim \beta$.

7. Adibidea. Demagun $\alpha = x$ eta $\beta = x + x^3$ direla, $x \to 0$ izanik.

α eta β infinitesimoak baliokideak dira, $\beta - \alpha = x^3$ beraien arteko kendura, ordena handiagoko infinitesimoa bait da α eta β-rekiko. Izan ere,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\beta-\alpha}{\alpha} = \lim_{x\to 0}\frac{x^3}{x} = \lim_{x\to 0} x^2 = 0,$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\alpha-\beta}{\beta} = \lim_{x\to 0}\frac{-x^3}{x+x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{-x^2}{1+x^2} = 0.$$

8. Adibidea. $x \to \infty$ denean, $\alpha = \frac{x+1}{x^2}$ eta $\beta = \frac{1}{x}$ infinitesimoak baliokideak dira, beraien arteko kendura $\alpha - \beta = \frac{x+1}{x^2} - \frac{1}{x} = \frac{1}{x^2}$, ordena handiagoko infinitesimoa bait da α eta β-rekiko. $\frac{\alpha}{\beta}$ arrazoiaren limitea 1 da:

$$\lim\frac{\alpha}{\beta} = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x+1}{x^2}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty}\frac{x+1}{x} = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right) = 1.$$

Oharra. Infinitesimo biren arteko $\frac{\beta}{\alpha}$ arrazoiak limiterik ez badu eta infiniturantz jotzen ez badu, α eta β ez dira aurreko zentzuan konparagarriak.

9. Adibidea. Demagun $\alpha = x$ eta $\beta = x\sin\frac{1}{x}$ direla. $x \to 0$ denean, α eta β infinitesimoak ez dira konparagarriak, beraien arteko arrazoiak $\frac{\beta}{\alpha} = \sin\frac{1}{x}$ limiterik ez duelako (ez finiturik eta ez infiniturik ere) $x \to 0$ denean (ikus § 3. ataleko 4. adibidea).

Ariketak

Hurrengo limiteak kalkulatu

1. $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^2+2x+5}{x^2+1}$. Emaitza: 4.

2. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} [2\sin x - \cos x + \cot x]$. Em.: 2.

3. $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x-2}{\sqrt{2+x}}$. Em.: 0.

4. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(2 - \frac{1}{x} + \frac{4}{x^2}\right)$. Em.: 2.

5. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{4x^3-2x^2+1}{3x^3-5}$. Em.: $\frac{4}{3}$.

6. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x+1}{x}$. Em.: 1.

7. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1+2+\ldots+n}{n^2}$. Em.: $\frac{1}{2}$.

8. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2}{n^3}$. Em.: $\frac{1}{3}$.

Iradokizuna: Adieraz dezagun $(k+1)^3 - k^3 = 3k^2 + 3k + 1$ formula $k = 0,1,2,\ldots,n$ balioetarako:

$$1^3=1;$$
$$2^3-1^3=3\cdot 1^2+3\cdot 1+1;$$
$$3^3-2^3=3\cdot 2^2+3\cdot 2+1;$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$(n+1)^3-n^3=3n^2+3n+1.$$

Formula horien atalkako batura eginez ondokoa dugu:

$$(n+1)^3=3(1^2+2^2+\dots+n^2)+3(1+2+\dots+n)+(n+1),$$

$$(n+1)^3=3(1^2+2^2+\dots+n^2)+3\frac{n(n+1)}{2}+(n+1),$$

eta beraz

$$1^2+2^2+\dots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

9. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+x-1}{2x+5}$. Em.: ∞.

10. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-2x-1}{x^3+4}$. Em.: 0.

11. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4x^3-2x^2+x}{3x^2+2x}$. Em.: $\dfrac{1}{2}$.

12. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x-2}$. Em.: 4.

13. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-1}{x-1}$. Em.: 3.

14. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-12x+20}$. Em.: $\dfrac{1}{8}$.

15. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+3x-10}{3x^2-5x-2}$. Em.: 1.

16. $\lim\limits_{y\to -2}\dfrac{y^3+3y^2+2y}{y^2-y-6}$. Em.: $-\dfrac{2}{5}$.

17. $\lim\limits_{u\to -2} \dfrac{u^3+4u^2+4u}{(u+2)(u-3)}$. Em.: 0.

18. $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{(x+h)^3-x^3}{h}$. Em.: $3x^2$.

19. $\lim\limits_{x\to 1}\left[\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{3}{1-x^3}\right]$. Em.: -1.

20. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^n-1}{x-1}$. Em.: n (n zenbaki oso positiboa da).

21. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x}$. Em.: $\dfrac{1}{2}$.

22. $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{\sqrt{2x+1}-3}{\sqrt{x-2}-\sqrt{2}}$. Em.: $\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$.

23. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x^2+p^2}-p}{\sqrt{x^2+q^2}-q}$. Em.: $\dfrac{q}{p}$.

24. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{x}-1}$. Em.: $\dfrac{2}{3}$.

25. $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\sqrt[m]{x}-\sqrt[m]{a}}{x-a}$. Em.: $\dfrac{\sqrt[m]{a}}{ma}$.

26. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{x}$. Em.: $\dfrac{1}{2}$.

27. $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\sqrt{x^2-3}}{\sqrt[3]{x^3+1}}$. Em.: 1.

28. $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x+1}$. Em.: 1 da $x\to +\infty$ denean eta -1, $x\to -\infty$ denean.

29. $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}\right)$. Em.: 0.

30. $\lim\limits_{x\to\infty} x\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$. Em.: $\frac{1}{2}$ da $x\to+\infty$ denean eta $-\infty$, $x\to-\infty$ denean.

31. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{\tan x}$. Em.: 1.

32. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin 4x}{x}$. Em.: 4.

33. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin^2\frac{x}{3}}{x^2}$. Em.: $\frac{1}{9}$.

34. $\lim\limits_{x\to+0}\frac{x}{\sqrt{1-\cos x}}$. Em.: $\frac{2}{\sqrt{2}}$.

35. $\lim\limits_{x\to 0} x\cot x$. Em.: 1.

36. $\lim\limits_{v\to\frac{\pi}{3}}\frac{1-2\cos v}{\sin\left(v-\frac{\pi}{3}\right)}$. Em.: $\sqrt{3}$.

37. $\lim\limits_{z\to 1}(1-z)\tan\frac{\pi z}{2}$. Em.: $\frac{2}{\pi}$.

38. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\arcsin x}{3x}$. Em.: $\frac{2}{3}$.

39. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin(a+x)-\sin(a-x)}{x}$. Em.: $2\cos a$.

40. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}$. Em.: $\frac{1}{2}$.

41. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^x$. Em.: e^2.

42. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^x$. Em.: $\frac{1}{e}$.

43. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x}{1+x}\right)^x$. Em.: $\frac{1}{e}$.

44. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+5}$. Em.: e.

45. $\lim\limits_{n\to\infty}\{n[\ln(n+1)-\ln n]\}$. Em.: 1.

46. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(1+\cos x)^{3\sec x}$. Em.: e^3.

47. $\lim\limits_{x\to 0}\ln\dfrac{(1+x\alpha)}{x}$. Em.: α.

48. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+3}{2x+1}\right)^{x+1}$. Em.: e.

49. $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+3\tan^2 x\right)^{\cot^2 x}$. Em.: e^3.

50. $\lim\limits_{m\to\infty}\left(\cos\dfrac{x}{m}\right)^{m}$. Em.: 1.

51. $\lim\limits_{\alpha\to\infty}\dfrac{\ln(1+e^{\alpha})}{\alpha}$. Em.: 1 da $\alpha\to+\infty$ denean eta 0, $\alpha\to-\infty$ denean.

52. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\alpha x}{\sin\beta x}$. Em.: $\dfrac{\alpha}{\beta}$.

53. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{a^x-1}{x}(a>1)$. Em.: $+\infty$ da $x\to+\infty$ denean eta 0, $x\to-\infty$ denean.

54. $\lim\limits_{n\to\infty}n\left[a^{\frac{1}{n}}-1\right]$. Em.: $\ln a$.

55. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\alpha x}-e^{\beta x}}{x}$. Em.: $\alpha-\beta$.

56. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\alpha x}-e^{\beta x}}{\sin\alpha x-\sin\beta x}$. Em.: 1.

Hurrengo funtzioen etenguneak aurkitu:

57. $y=\dfrac{x-1}{x(x+1)(x^2-4)}$. Em.: Bigarren mailako etenguneak $x=-2;\ -1;\ 0$ eta 2 balioetarako.

58. $y=\tan\dfrac{1}{x}$. Em.: Bigarren mailako etenguneak $x=0$ eta $x=\pm\dfrac{2}{\pi};\ \pm\dfrac{2}{3\pi};\ \ldots;\ \pm\dfrac{2}{(2n+1)\pi};\ \ldots$ balioetarako.

59. $y=1+2^{\frac{1}{x}}$ funtzioaren etenguneak aurkitu eta funtzio horren grafikoa eraiki. Em.: Bigarren mailako etengunea x=0 baliorako ($y\to+\infty$ dugu $x\to 0+0$ denean eta $y\to 1$, $x\to 0-0$ denean).

60. Hurrengo infinitesimoen artean: x^2, $\sqrt{x(1-x)}$, $\sin 3x$, $2x\cos x\sqrt[3]{\tan^2 x}$, xe^{2x}, x-rekiko ordena berekoak, handiagokoak edo txikiagokoak direnak aurkitu $x\to 0$ denean. Em.: Ordena bereko infinitesimoak $\sin 3x$ eta xe^{2x} dira; ordena handiagokoak x^2 eta $2x\cos x\sqrt[3]{\tan^2 x}$ dira eta $\sqrt{x(1-x)}$ ordena txikiagokoa da.

61. Hurrengo infinitesimoen artean $2\sin x$, $\dfrac{1}{2}\tan 2x$, $x-3x^2$, $\sqrt{2x^2+x^3}$, $\ln(1+x)$, x^3+3x^4, x -ren ordenakoak direnak aurkitu $x\to 0$ denean.

    Em.: $\dfrac{1}{2}\tan 2x$, $x-3x^2$, $\ln(1+x)$.

62. $1-x$ eta $1-\sqrt[3]{x}$ infinitesimoak ordena berekoak direla egiaztatu $x\to 1$ denean. Baliokideak dira? Em.: $\lim\dfrac{1-x}{1-\sqrt[3]{x}}=3$, eta beraz, infinitesimo horiek ez dira baliokideak.

III. GAIA

DERIBATUA ETA DIFERENTZIALA

§ 1. Higiduraren abiadura

Gorputz solido baten higidura zuzena azter dezagun. Adibidez, bertikalki eta gorantza jaurtikiriko harriarena, edo motorearen zilindroaren barnean kokaturik dagoen enboloarena. Gorputzaren dimentsioen eta formaren abstrakzioa eginez, gorputz hori M puntu higikor baten bidez adieraziko dugu.

M_0 hasierako posiziotik abiatuta, puntu materialak ibilitako s distantzia t denboraren araberakoa izango da, hots, s t-ren funtzioa izango da:

$$s = f(t). \tag{1}$$

Demagun t unean[1] M puntu higikorra hasierako M_0 posiziotik s distantziara dagoela eta $t + \Delta t$ unean M_1 posizioan dagoela, hasierako posiziotik $s + \Delta s$ distantziara (56. irudia). Beraz, Δt denbora-tartean, s distantzia Δs aldatu da. Kasu honetan, s magnitudeak Δt denbora-tartean Δs gehikuntza izan duela esaten da.

Kontsidera dezagun $\dfrac{\Delta s}{\Delta t}$ arrazoia. Horrek, puntuaren batezbesteko abiadura Δt denbora-tartean adierazten du:

$$v_m = \frac{\Delta s}{\Delta t}. \tag{2}$$

Ordea, batezbesteko abiadurak askotan ez du behar den zehaztasunez M puntuaren t uneko abiadura karakterizatzen. Honelatan ba, adibidez, gorputza Δt tarteko hasieran bizkor higitzen bada eta ordea, azkenean astiro, batezbesteko abiadurak ezin izango du puntuaren higiduraren berezitasun horiek adierazi eta ez digu emango t uneari dagokion higiduraren abiadura errealaren ideia zehatza. Abiadura erreala zehaztasun handiagoz emateko, batezbesteko abiadura erabiliz, Δt denbora-tartea txikiagoa hartu beharko dugu. $\Delta t \to 0$ denean batezbesteko abiadurak duen limiteak t unean puntuak duen abiadura doiki adierazten du. Limite horri higiduraren *aldiuneko abiadura* deritzo:

---

1) Hemen eta aurrerantzean, aldagaia eta beronek har ditzakeen balioak letra berberaz adieraziko ditugu.

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}. \qquad (3)$$

Honelatan ba, Δs ibilitako espazioaren gehikuntza eta Δt denboraren gehikuntzaren arteko arrazioaren limiteari, azkenak zerorantz jotzen duenean, higiduraren aldiuneko abiadura deritzo.

Idatz dezagun (3) berdintza era esplizituagoan.

$$\Delta s = f(t + \Delta t) - f(t),$$

denez gero, hurrengoa dugu

56. IRUDIA

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t}, \qquad (3')$$

eta horrek higidura ez uniformearen abiadura ematen du. Horrela, higidura ez-uniformearen abiaduraren kontzeptua limite delako kontzeptuari lotuta dagoela ikusten dugu. Higidura ez-uniformearen abiadura, limitearen kontzeptua erabiliz defini daiteke soilik.

(3') formulatik v-k Δt gehikuntzaren araberako menpekotasunik ez duela ikusten da, t balioaren eta $f(t)$ funtzioarena baizik.

Adibidea. Uniformeki azeleraturiko higiduraren abiadura edozein t aldiunetan eta batez ere $t = 2\,s$ aldiunean aurkitu, higiduraren legea

$$s = \frac{1}{2} g t^2$$

dela kontuan izanik.

Ebazpena: t unean $s = \frac{1}{2} g t^2$ dugu eta $t + \Delta t$ unean hurrengoa izango dugu:

$$s + \Delta s = \frac{1}{2} g (t + \Delta t)^2 = \frac{1}{2} g (t^2 + 2t\,\Delta t + \Delta t^2).$$

Kalkula dezagun orain Δs:

$$\Delta s = \frac{1}{2} g (t^2 + 2t\,\Delta t + \Delta t^2) - \frac{1}{2} g t^2 = g t\,\Delta t + \frac{1}{2} g \Delta t^2.$$

$\frac{\Delta s}{\Delta t}$ arrazoia hurrengoa izango da:

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{gt\Delta t + \frac{1}{2} g\Delta t^2}{\Delta t} = gt + \frac{1}{2} g\Delta t.$$

Abiaduraren definizioaren arabera hurrengoa dugu:

$$\upsilon = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \left(gt + \frac{1}{2} g\Delta t \right) = gt.$$

Beraz, t edozein unetan abiadura $\upsilon = gt$ izango da. $t = 2$ denean, $(\upsilon)_{t=2} = g \cdot 2 = 9{,}8 \cdot 2 = 19{,}6 \ m/s$ dugu.

§ 2. Deribatuaren definizioa

Biz

$$y = f(x) \tag{1}$$

tarte batean definituriko funtzioa. Tarte horretako x aldagaiaren balio bakoitzari, $y = f(x)$ funtzioaren balio bat dagokio.

Demagun x aldagaiari Δx gehikuntza ematen zaiola (positiboa edo negatiboa, horrek ez du garrantzirik). Orduan, y funtzioak Δy gehikuntza izango du. Modu honetan:

argumentuaren x balioari $y = f(x)$ dagokio, eta
argumentuaren $x + \Delta x$ balioari $y + \Delta y = f(x + \Delta x)$ dagokio.

Kalkula dezagun funtzioaren Δy gehikuntza:

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x). \tag{2}$$

Ikus dezagun orain funtzioaren gehikuntza eta argumentuaren gehikuntzaren arteko arrazoia:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}. \tag{3}$$

Aurki dezagun orain arrazoi horren limitea $\Delta x \to 0$ denean. Existitzen bada, $f(x)$ funtzioaren *deribatu* deituko diogu eta $f'(x)$ ikurraren bidez adieraziko dugu. Definizioaren arabera,

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

dugu, hots,

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}. \tag{4}$$

Honelatan ba, $y = f(x)$ funtzioaren x argumentuarekiko deribatua, funtzioaren Δy gehikuntza eta argumentuaren Δx gehikuntzaren arteko arrazoiaren limitea da $\Delta x \to 0$ denean.

Orokorrean, x bakoitzari deribatuaren $f'(x)$ balio bat dagokio, hots, deribatua ere x-ren funtzioa da.

$f'(x)$ notazioaz gain hurrengoak ere erabiltzen dira deribatua adierazteko:

$$y', \; y'_x, \; \frac{dy}{dx}.$$

Deribatuaren balio zehatza $x = a$ baliorako, $f'(a)$ edo $y'|_{x=a}$ ikurren bidez adierazten da.

Funtzioen deribatuak kalkulatzea helburutzat duen eragiketari funtzioen *deribazio* deritzo ("diferentziazio" gaia ere erabiltzen da).

1. Adibidea. Biz $y = x^2$ funtzioa. Berorren y' deribatua kalkulatu:

1) x edozein puntutan,

2) $x = 3$ puntuan.

Ebazpena. 1) Argumentuaren balioa x denean, $y = x^2$ dugu. Balioa $x + \Delta x$ denean, $y + \Delta y = (x + \Delta x)^2$ dugu.

Aurki dezagun funtzioaren gehikuntza:

$$\Delta y = (x + \Delta x)^2 - x^2 = 2x\Delta x + (\Delta x)^2.$$

Eraiki dezagun $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ arrazoia:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2x\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} = 2x + \Delta x.$$

Limitera pasatuz, funtzioaren deribatua aurkituko dugu:

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (2x + \Delta x) = 2x.$$

Beraz, $y = x^2$ funtzioaren deribatua edozein puntutan honela adieraziko da:

$$y' = 2x.$$

2) $x = 3$ denean,

$$y'|_{x=3} = 2 \cdot 3 = 6.$$

dugu.

2. Adibidea. $y = \dfrac{1}{x}$ izanik, y' aurkitu.

Ebazpena. Aurreko adibideko prozedurari jarraituz hurrengoa izango dugu:

$$y = \frac{1}{x}; \quad y + \Delta y = \frac{1}{x + \Delta x};$$

$$\Delta y = \frac{1}{x + \Delta x} - \frac{1}{x} = \frac{x - x - \Delta x}{x(x + \Delta x)} = -\frac{\Delta x}{x(x + \Delta x)};$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-1}{x(x + \Delta x)};$$

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left[-\frac{1}{x(x + \Delta x)} \right] = -\frac{1}{x^2}.$$

Oharra. Aurreko atalean ikusi dugun bezala, puntu higikor batek ibilitako s espazioa t denboraren arabera,

$$s = f(t)$$

formularen bidez emanik badago, t aldiuneko abiadura hurrengo formularen bidez adierazten da:

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t}.$$

Beraz,

$$v = s'_t = f'(t),$$

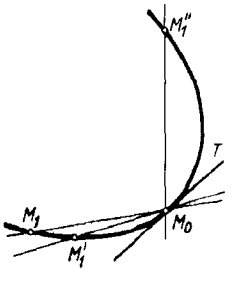
hots, abiadura, ibilitako espazioaren t denborarekiko deribatua[2)] da.

§ 3. Deribatuaren esanahi geometrikoa

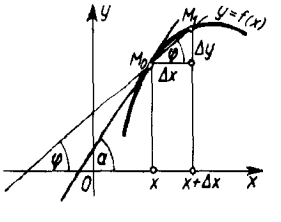
Deribatuaren kontzeptura heltzeko gorputz (edo puntu) baten higiduraren abiadura aztertu dugu, hau da, arrazonamendu guztiz mekanikoak erabili ditugu. Orain oso garrantzizkoa den deribatuaren esanahi geometrikoa emango dugu. Horretarako, kurba batekiko puntu bateko ukitzailea definitu behar dugu.

Biz M_0 emaniko kurba batean finkaturiko puntu bat. Har dezagun kurban beste puntu bat M_1 eta marra dezagun M_0M_1 ebakitzailea (57. irudia). M_1 puntua M_0-rantz etengabe hurbiltzen bada kurban higitzen delarik, M_0M_1 ebakitzaileak $M_0M'_1$, $M_0M''_1$, etab. posizioak hartuko ditu.

M_1 puntua M_0-rantz etengabe hurbiltzean kurbatik atera gabe (hurbiltzen denetiko aldea edozein izanik) M_0M_1 ebakitzaileak M_0T zuzenak definituriko posizio limite baterantz jotzen badu, M_0T zuzenari kurbaren M_0 puntuko ukitzaile deritzo («posizio limite baterantz jo» kontzeptua aurrerago zehaztuko dugu).



57. IRUDIA



58. IRUDIA

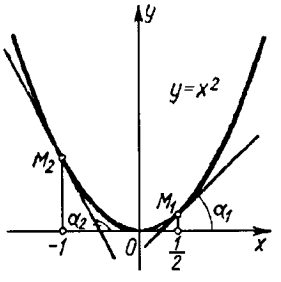
2) "x -rekiko deribatua" edo "t denborarekiko deribatua", etab. esaten dugunean, deribatua kalkulatzean x aldagaia, t denbora, etab. argumentutzat hartzen dira.

Kontsidera dezagun $f(x)$ funtzioa eta dagokion kurba,

$$y = f(x),$$

koordenatu angeluzuzenen sistema batean (58. irudia). x-ren balio bati $y = f(x)$ funtzioaren balio bat dagokio. Emaniko x eta y balioei kurban $M_0(x,y)$ puntu bat dagokie. Eman diezaiogun x balioari Δx gehikuntza. Argumentuaren $x + \Delta x$ balio berriari, funtzioaren «gehituriko» $y + \Delta y = f(x + \Delta x)$ balio bat dagokio. Balio berri horiei, kurban, $M_1(x + \Delta x, y + \Delta y)$ puntua dagokie. Marra dezagun M_0M_1 ebakitzailea eta biz φ ebakitzaileak eta Ox ardatzerdi positiboak osoturiko angelua. Osa dezagun $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ arrazoia. 58. iruditik ondorioztatzen denez:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \tan \varphi. \qquad (1)$$



59. IRUDIA

Δx gehikuntzak zerorantz jotzen duenean, M_1 puntua kurban zehar higituko da, M_0 punturantz etengabe hurbilduz. M_0M_1 ebakitzaileak M_0 puntuaren inguruan biratuko du eta φ angelua aldatuko da Δx aldatzean. $\Delta x \to 0$ denean φ angeluak α limite baterantz jotzen badu, M_0 puntutik pasatzen den eta abzisen ardatzerdi positiboarekin α angelua osotzen duen zuzena, nahi dugun ukitzailea izango da. Ukitzaile horren koefiziente angeluarra erraz aurkituko dugu:

$$\tan \alpha = \lim_{\Delta x \to 0} \tan\varphi = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x).$$

Beraz,

$$f'(x) = \tan \alpha, \qquad (2)$$

hau da, argumentuaren emaniko x balioari dagokion deribatuaren $f'(x)$ balioa, $f(x)$ funtzioak adierazten duen kurbaren dagokion $M_0(x,y)$ puntuko ukitzaileak eta Ox ardatzaren norantza positiboak osotzen duten angeluaren tangentea izango da.

Adibidea. $y = x^2$ kurbaren $M_1\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$ eta $M_2(-1,1)$ puntuetan ukitzaileek Ox ardatzarekin osotzen duten angeluen tangenteak aurkitu (59. irudia).

Ebazpena. § 2. ataleko 1. adibidearen arabera, $y' = 2x$ dugu eta beraz

$$\tan\alpha_1 = y'|_{x=\frac{1}{2}} = 1; \quad \tan\alpha_2 = y'|_{x=-1} = -2.$$

§ 4. Funtzioen deribazioa

Definizioa.

$$y = f(x) \tag{1}$$

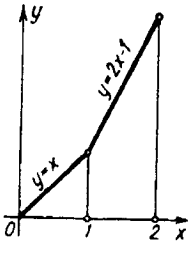
funtzioak $x = x_0$ puntuan deribatua badu, hots,

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \tag{2}$$

existitzen bada, funtzioa $x = x_0$ puntuan *deribagarria* dela esaten da, edo, gauza bera dena, funtzioak puntu horretan deribatua du.

Funtzioak (a,b) tarteko puntu guztietan deribatua badu, tarte horretan deribagarria dela esaten da.

Teorema. $y = f(x)$ funtzioa $x = x_0$ puntuan deribagarria bada, puntu horretan jarraia izango da.



60. IRUDIA

Izan ere,

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0)$$

bada

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0) + \gamma$$

dugu, $\Delta x \to 0$ denean γ magnitudeak zerorantz jotzen duelarik. Bestalde,

$$\Delta y = f'(x_0)\Delta x + \gamma\Delta x$$

dugu; $\Delta x \to 0$ denean, $\Delta y \to 0$ betetzen dela ondorioztatzen delarik. Beraz, $f(x)$ funtzioa x_0 puntuan jarraia da (ikus II. gaiko § 9. atala).

Honelatan ba, etenguneetan funtzioa ezin da deribagarria izan. Elkarrekikoa ez da egiazkoa, hots, $y = f(x)$ funtzioa x_0 puntu batean jarraia izatetik ezin da ondorioztatu puntu horretan funtzioa deribagarria izango denik: $f(x)$ funtzioa x_0 puntuan ez-deribagarria izan daiteke. Hori baieztatzeko ikus ditzagun adibide batzuk.

1. Adibidea. $f(x)$ funtzioa $[0,2]$ tartean honela definiturik dago (60. irudia):

$$f(x) = x, \qquad 0 \le x \le 1 \text{ denean}$$
$$f(x) = 2x - 1, \quad 1 < x \le 2 \text{ denean}$$

Funtzio horrek $x = 1$ puntuan ez du deribaturik, jarraia izan arren.
Izan ere, $\Delta x > 0$ denean ondokoa dugu:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(1+\Delta x) - f(1)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[2(1+\Delta x) - 1] - 1}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2\Delta x}{\Delta x} = 2.$$

$\Delta x < 0$ denean,

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(1+\Delta x) - f(1)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[1+\Delta x] - 1}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1$$

dugu. Hau da, limite hori Δx gehikuntzaren zeinuaren araberakoa da eta beraz, $x = 1$ puntuan funtzioak ez du deribaturik[3]. Horren esanahi geometrikoa hurrengoa da: $x = 1$ puntuan "kurbak" ez du ukitzaile mugaturik.

Hurrengo berdintzak ditugu:

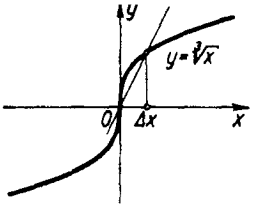
$$\Delta y = \Delta x, \quad \Delta x < 0 \text{ denean}$$
$$\Delta y = 2\Delta x, \quad \Delta x > 0 \text{ denean.}$$

Beraz, Δx gehikuntzaren zeinuarekiko independenteki, $\Delta x \to 0$ denean, $\Delta y \to 0$ dugu, funtzioa $x = 1$ puntuan jarraia dela ondorioztatzen delarik.

---

3) Deribatuaren definizioaren arabera, $\Delta x \to 0$ denean $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ arrazoiak limite baterantz jotzea beharrezkoa da Δx gehikuntzak zerorantz jotzen duen erarekiko independenteki.

2. Adibidea. 61. irudian azaltzen den grafikoa $y=\sqrt[3]{x}$ funtzioarena da. Funtzio hori aldagai independentearen balio guztietarako definituta dago eta jarraia da.



61. IRUDIA

Ikus dezagun ea funtzio horrek $x=0$ puntuan deribaturik duen. Horretarako, aurki ditzagun $x=0$ eta $x=0+\Delta x$ puntuetan funtzioaren balioak. $x=0$ denean $y=0$ dugu. $x=0+\Delta x$ denean $y+\Delta y=\sqrt[3]{(\Delta x)}$ dugu. Hortaz,

$$\Delta y=\sqrt[3]{(\Delta x)}.$$

Aurki dezagun orain funtzioaren eta argumentuaren gehikuntzen arteko arrazoiaren limitea:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sqrt[3]{(\Delta x)}}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\sqrt[3]{\Delta x^2}}=+\infty.$$

Honelatan ba, funtzioaren eta argumentuaren gehikuntzen arteko arrazoiak infiniturantz jotzen du $x=0$ puntuan $\Delta x\to 0$ denean, eta beraz ez du limiterik. Beraz, funtzio hori ez da $x=0$ puntuan deribagarri. Puntu horretako kurbarekiko ukitzaileak eta abzisa--ardatzak $\frac{\pi}{2}$ angelua osotzen dute, beraz, ukitzailea Oy ardatza da.

§ 5. Funtzio elementalen deribatuak. $y=x^n$ funtzioaren deribatua, n zenbaki osoa eta positiboa denean

Deribatuaren definizio orokorrean oinarrituz, emaniko $y=f(x)$ funtzio baten deribatua kalkulatzeko hurrengo urratsak eman behar ditugu:

1) x argumentuari Δx gehikuntza ematea eta funtzioaren gehituriko balioa kalkulatzea:

$$y + \Delta y = f(x + \Delta x);$$

2) funtzioaren gehikuntza kalkulatzea:

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x);$$

3) funtzioaren eta argumentuaren gehikuntzen arteko arrazoia osotzea:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x};$$

4) arrazoi horren limitea kalkulatzea $\Delta x \to 0$ denean:

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Deribatuak kalkulatzeko metodo orokor hori zenbait funtzio elementalen deribatuak aurkitzeko erabiliko dugu.

Teorema. n zenbaki oso eta positiboa denean, $y = x^n$ funtzioaren deribatua nx^{n-1} da, hau da,

$$y = x^n \text{ bada, } y' = nx^{n-1} \text{ dugu.} \qquad \text{(I)}$$

Frogapena. Biz $y = x^n$ funtzioa.

1) x aldagaiak Δx gehikuntza hartzen duenean,

$$y + \Delta y = (x + \Delta x)^n$$

dugu.

2) Newton-en binomioaren arabera:

$$\Delta y = (x + \Delta x)^n - x^n = x^n + \frac{n}{1} x^{n-1} \Delta x + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} x^{n-2} (\Delta x)^2 + \ldots + (\Delta x)^n - x^n$$

dugu, hots,

$$\Delta y = nx^{n-1}\Delta x + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}x^{n-2}(\Delta x)^2 + \ldots + (\Delta x^n).$$

3) Aurki dezagun arrazoia:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}x^{n-2}\Delta x + \ldots + (\Delta x)^{n-1}.$$

4) Arrazoi horren limitea:

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}\left[nx^{n-1} + \frac{n(n-1)x^{n-2}}{1\cdot 2}\Delta x + \ldots + (\Delta x)^{n-1}\right] = nx^{n-1}$$

izango da.

Honelatan ba, $y' = nx^{n-1}$, frogatu nahi genuen bezala.

1. Adibidea. $y = x^5$, $y' = 5x^{5-1} = 5x^4$.

2. Adibidea. $y = x$, $y' = 1x^{1-1}$, $y' = 1$. Emaitza horrek esanahi geometriko oso erraza du: $y = x$ zuzenaren ukitzailea, x aldagaiaren balio guztietarako, zuzena bera da eta beraz, Ox ardatzaren ardatzerdi positiboarekin 1 tangentea duen angelua osotzen du.

§ 12. atalean frogatuko dugunez, (1) formula n negatiboa edo zatikiarra denean ere baliagarria da.

3. Adibidea. $y = \sqrt{x}$.

Jar dezagun funtzio hau berredura bezala

$$y = x^{\frac{1}{2}}.$$

(I) formularen arabera (egin dugun oharra kontuan izanik) ondokoa lortzen dugu:

$$y' = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1},$$

hots,

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

4. Adibidea. $y = \dfrac{1}{x\sqrt{x}}$.

Jar dezagun y berredura bezala

$$y = x^{-\frac{3}{2}}.$$

Orduan,

$$y' = -\frac{3}{2}x^{-\frac{3}{2}-1} = -\frac{3}{2}x^{-\frac{5}{2}} = \frac{3}{2x^2\sqrt{x}}.$$

§ 6. $y = \sin x$ eta $y = \cos x$ funtzioen deribatuak

1. Teorema. $\sin x$ funtzioaren deribatua $\cos x$ da, hots,

$$y = \sin x \text{ bada, } y' = \cos x. \qquad \text{(II)}$$

Frogapena. Eman diezaiogun x argumentuari Δx gehikuntza:

1) $y + \Delta y = \sin(x + \Delta x)$;

2) $$\Delta y = \sin(x + \Delta x) - \sin x = 2\sin\frac{x + \Delta x - x}{2} \cdot \cos\frac{x + \Delta x + x}{2} = \\ = 2\sin\frac{\Delta x}{2} \cdot \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right);$$

3) $$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x} = \frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right);$$

4) $$y' = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} = \frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \cdot \lim_{\Delta x \to 0}\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right),$$

baina,

$$\lim_{\Delta x \to 0} = \frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} = 1$$

denez gero

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) = \cos x$$

dugu.

Azken berdintza hori legezkoa da $\cos x$ funtzioa jarraia bait da.

2. Teorema. $\cos x$ funtzioaren deribatua $-\sin x$ da, hots,

$$y = \cos x \text{ bada, } \quad y' = -\sin x. \qquad \text{(III)}$$

Frogapena. Eman diezaiogun Δx gehikuntza x argumentuari. Orduan:

$$y + \Delta y = \cos\,(x + \Delta x);$$

$$\Delta y = \cos(x + \Delta x) - \cos x = -2\sin\frac{x + \Delta x - x}{2} \cdot \sin\frac{x + \Delta x + x}{2} = -2\sin\frac{\Delta x}{2} \cdot \sin\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right);$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \cdot \sin\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right);$$

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}\left[-\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \cdot \sin\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)\right] = \lim_{\Delta x \to 0}\left[-\sin\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)\right]$$

eta $\sin x$ funtzioa jarraia dela kontutan harturik, azkenik

$$y' = -\sin x$$

dugu.

§ 7. Konstantearen deribatua, konstante baten eta funtzio baten arteko biderkaketarena eta bi funtzioren arteko batuketa, biderkaketa eta zatiketarena

1. Teorema. Konstante baten deribatua zero da, hots,

$$y = C \quad \text{eta} \quad C = \text{ktea.} \quad \text{badira} \quad y' = 0 \quad \text{dugu.} \tag{IV}$$

Frogapena. $y = C$ funtzioak x argumentuaren balio guztietarako C balio konstantea hartzen du.

Beraz, x edozein izanik,

$$y = f(x) = C$$

dugu.

Eman diezaiogun Δx $(\Delta x \neq 0)$ gehikuntza x argumentuari. Funtzioak C balioa kontserbatzen duenez, argumentuaren balioa edozein izanik,

$$y + \Delta y = f(x + \Delta x) = C$$

dugu.

Hots, funtzioaren gehikuntza

$$y = f(x + \Delta x) - f(x) = 0$$

da eta funtzioaren eta argumentuaren gehikuntzen arteko arrazoia

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 0$$

eta beraz,

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 0,$$

hots,

$$y' = 0.$$

Emaitza horrek adierazpen geometriko erraza du. $y = C$ funtzioaren grafikoa Ox ardatzarekiko paraleloa den zuzen bat da. Beraz, bistakoa denez, grafikoaren ukitzailea puntu guztietan $y = C$ zuzena bera da, eta hortaz, Ox ardatzarekiko $y' = 0$ tangentea duen angelua osotzen du.

2. Teorema. Faktore konstantea deribazio-ikurretik kanpo atera daiteke, hots,

$$y = Cu(x) \text{ bada, } C = \text{ktea. izanik, } y' = Cu'(x). \qquad \text{(V)}$$

Frogapena. Aurreko teoremaren arrazonamenduari jarraituz,

$$y = Cu(x),$$

$$y + \Delta y = Cu(x + \Delta x),$$

$$\Delta y = Cu(x + \Delta x) - Cu(x) = C[u(x + \Delta x) - u(x)],$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = C\frac{u(x + \Delta x) - u(x)}{\Delta x},$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = C \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x + \Delta x) - u(x)}{\Delta x},$$

dugu, hots,

$$y' = Cu'(x).$$

1. Adibidea. $y = 3\dfrac{1}{\sqrt{x}}$.

$$y' = 3\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)' = 3(x^{-\frac{1}{2}})' = 3\left(-\frac{1}{2}\right)x^{-\frac{1}{2}-1} = -\frac{3}{2}x^{-\frac{3}{2}},$$

hots,

$$y' = -\frac{3}{2x\sqrt{x}}.$$

3. Teorema. Funtzio deribagarrien kopuru finitu baten baturaren deribatua funtzio horien deribatuen arteko batura da[4].

Adibidez, hiru batugaien kasuan

$$y = u(x) + v(x) + w(x);\ y' = u'(x) + v'(x) + w'(x) \qquad \text{(VI)}$$

dugu.

Frogapena. Argumentuaren x balioetarako

$$y = u + v + w$$

dugu (laburtzeko, funtzioak izendatzerakoan x ez dugu idatzi).

Argumentuaren $x + \Delta x$ baliorako,

$$y + \Delta y = (u + \Delta u) + (v + \Delta v) + (w + \Delta w)$$

dugu, Δy, Δu, Δv eta Δw, y, u, v eta w funtzioen eta x argumentuaren Δx gehikuntzari dagozkien gehikuntzak direlarik. Beraz,

$$\Delta y = \Delta u + \Delta v + \Delta w,\quad \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\Delta v}{\Delta x} + \frac{\Delta w}{\Delta x},$$

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta x},$$

hau da,

$$y' = u'(x) + v'(x) + w'(x).$$

2. Adibidea. $y = 3x^4 - \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}$,

$$y' = 3(x^4)' - (x^{-\frac{1}{3}})' = 3 \cdot 4x^3 - \left(-\frac{1}{3}\right)x^{-\frac{1}{3}-1},$$

---

4) $y = u(x) - v(x)$ eta $y = u(x) + (-1)v(x)$ adierazpenak berdinak dira eta beraz, $y' = [u(x) + (-1)v(x)]' = u'(x) + [-v(x)]' = u'(x) - v'(x)$.

hau da,

$$y' = 12x^3 + \frac{1}{3}\frac{1}{x\sqrt[3]{x}}.$$

4. Teorema. Bi funtzio deribagarriren arteko biderkaduraren deribatua, lehenengoaren deribatuaren eta bigarrenaren arteko biderkadura gehi lehenengoaren eta bigarrenaren deribatuaren arteko biderkadura da, hau da,

$$y = uv \text{ bada, } \quad y' = u'v + uv'. \qquad \text{(VII)}$$

Frogapena. Aurreko teoremakoaren antzekoa den arrazonamendua erabiliz

$$y = uv,$$

$$y + \Delta y = (u + \Delta u)(v + \Delta v),$$

$$\Delta y = (u + \Delta u)(v + \Delta v) - uv = v\Delta u + u\Delta v + \Delta u\Delta v,$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta x}v + u\frac{\Delta v}{\Delta x} + \Delta u\frac{\Delta v}{\Delta x},$$

$$y' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}v + \lim_{\Delta x\to 0} u\frac{\Delta v}{\Delta x} + \lim_{\Delta x\to 0}\Delta u\frac{\Delta v}{\Delta x} =$$

$$= \left(\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}\right)v + u\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x} + \lim_{\Delta x\to 0}\Delta u\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x}$$

lortzen dugu (u eta v ez bait dira Δx gehikuntzaren araberakoak).

Bigarren ataleko azken gaia kontsidera dezagun:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta u\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x}.$$

$u(x)$ funtzioa deribagarria denez jarraia izango da. Beraz, $\lim_{\Delta x\to 0}\Delta u = 0$ da. Horretaz gain,

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x} = v' \neq \infty.$$

Honelatan ba, azterturiko gaia zero da eta azkenik

$$y' = u'v + uv'$$

dugu.

Frogaturiko teoreman oinarrituz erraz ondoriozta daiteke funtzioen edozein kopururen biderkaduraren deribaturako formula.

Adibidez, hiru funtzioren biderkadurarako,

$$y = uvw,$$

bigarren atala u eta (vw) bi funtzioen biderkadura bezala adieraziz, ondokoa dugu: $y' = u'(vw) + u(vw)' = u'vw + u(v'w + vw') = u'vw + uv'w + uvw'$. Modu berean, antzeko formula bat ateratzen da funtzioen edozein kopuru (finitu) baten biderkaduraren deribaturako. Hau da, $y = u_1u_2 \ldots u_n$ bada,

$$y' = u'_1 u_2 \ldots u_{n-1}u_n + u_1u'_2 \ldots u_{n-1}u_n + \ldots + u_1u_2 \ldots u_{n-1}u'_n$$

izango dugu.

3. Adibidea. $y = x^2 \sin x$ bada,

$$y' = (x^2)' \sin x + x^2 (\sin x)' = 2x \sin x + x^2 \cos x$$

dugu.

4. Adibidea. $y = \sqrt{x} \sin x \cos x$ bada

$$y' = (\sqrt{x})' \sin x \cos x + \sqrt{x} (\sin x)' \cos x + \sqrt{x} \sin x (\cos x)' =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x}} \sin x \cos x + \sqrt{x} \cos x \cos x + \sqrt{x} \sin x (-\sin x) =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x}} \sin x \cos x + \sqrt{x} (\cos^2 x - \sin^2 x) = \frac{\sin 2x}{4\sqrt{x}} + \sqrt{x} \cos 2x$$

dugu.

5. Teorema. Zatikiaren (hau da, bi funtzioren arteko arrazoiaren) deribatua beste zatiki bat da, izendatzaile gisa emaniko zatikiaren izendatzailearen karratua duelarik eta zenbakitzaile gisa, zenbakitzailearen deribatuaren eta izendatzailearen arteko biderkadura ken zenbakitzailearen eta izendatzailearen deribatuaren arteko biderkadura duelarik; hau da,

$$y = \frac{u}{v} \text{ bada, } y' = \frac{u'v - uv'}{v^2} \text{ dugu.} \qquad \text{(VIII)}$$

Frogapena. x argumentuaren Δx gehikuntzari dagozkion y, u eta v funtzioen gehikuntzak Δy, Δu eta Δv badira, ondokoa dugu:

$$y + \Delta y = \frac{u + \Delta u}{v + \Delta v},$$

$$\Delta y = \frac{u + \Delta u}{v + \Delta v} - \frac{u}{v} = \frac{v\Delta u - u\Delta v}{v(v + \Delta v)},$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\dfrac{v\Delta u - u\Delta v}{\Delta x}}{v(v + \Delta v)} = \frac{\dfrac{\Delta u}{\Delta x} v - u\dfrac{\Delta v}{\Delta x}}{v(v + \Delta v)},$$

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\dfrac{\Delta u}{\Delta x} v - u\dfrac{\Delta v}{\Delta x}}{v(v + \Delta v)} = \frac{v \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta u}{\Delta x} - u \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta v}{\Delta x}}{v \lim\limits_{\Delta x \to 0} (v + \Delta v)}.$$

Beraz, $\Delta x \to 0$ denean $\Delta v \to 0$[5] dela kontuan izanik,

$$y' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

lortzen dugu.

5. Adibidea. $y = \dfrac{x^3}{\cos x}$ bada,

$$y' = \frac{(x^3)'\cos x - x^3(\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{3x^2 \cos x + x^3 \sin x}{\cos^2 x}$$

---

5) $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta v = 0$ da, $v(x)$ funtzioa deribagarria bait da eta beraz, jarraia.

izango dugu.

Oharra. Azterturiko funtzioa

$$y = \frac{u(x)}{C}$$

modukoa bada, C zatitzailea konstantea izanik, berorren deribatua kalkulatzeko, (VIII) formula erabili beharrean hobe da (V) erabiltzea:

$$y' = \left(\frac{1}{C}u\right)' = \frac{1}{C}u' = \frac{u'}{C}.$$

Jakina, (VIII) formula erabiliz emaitza berbera lor daiteke.

6. Adibidea. $y = \dfrac{\cos x}{7}$ bada,

$$y' = \frac{(\cos x)'}{7} = -\frac{\sin x}{7}$$

izango dugu.

§ 8. Funtzio logaritmikoaren deribatua

Teorema. $\log_a x$ funtzioaren deribatua $\dfrac{1}{x}\log_a e$ da, hau da,

$$y = \log_a x \text{ bada, } y' = \frac{1}{x}\log_a e \text{ dugu.} \qquad \text{(IX)}$$

Frogapena. Demagun x argumentuaren Δx gehikuntzari dagokion $y = \log_a x$ funtzioaren gehikuntza Δy dela. Orduan

$$y + \Delta y = \log_a(x + \Delta x);$$

$$\Delta y = \log_a(x + \Delta x) - \log_a x = \log_a \frac{x + \Delta x}{x} = \log_a\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right);$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x}\log_a\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right).$$

Azken berdintzaren bigarren atalean x balioaz biderkatuz eta zatituz hurrengoa lortuko dugu:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{x}\frac{x}{\Delta x}\log_a\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right) = \frac{1}{x}\log_a\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}.$$

Adieraz dezagun $\frac{\Delta x}{x}$ magnitudea α ikurraz. Emaniko x balio baterako, $\alpha \to 0$ dugu $\Delta x \to 0$ denean. Beraz,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{x}\log_a(1 + \alpha)^{\frac{1}{\alpha}}.$$

Bestalde, dakigunez (II. gaiko § 7. atala)

$$\lim_{\Delta x \to 0}(1 + \alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = e.$$

Logaritmo ikurraren barnean dagoen adierazpenaren limitea e zenbakia bada, berorren logaritmoak $\log_a e$ zenbakirantz joko du (funtzio logaritmikoaren jarraitasunari esker). Horren arabera, azkenik, ondokoa izango dugu:

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{1}{x}\log_a(1 + \alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = \frac{1}{x}\log_a e.$$

$\log_a e = \frac{1}{\ln a}$ dela kontsideratuz, lorturiko formula honela idatz daiteke:

$$y' = \frac{1}{x}\frac{1}{\ln a}.$$

Ikus dezagun formula horren hurrengo kasu berezia: $a = e$ bada, $\ln a = \ln e = 1$, hau da, $y = \ln x$ denean,

$$y' = \frac{1}{x} \qquad \text{(X)}$$

dugu.

§ 9. Funtzio konposatuaren deribatua

Biz $y = f(x)$ funtzio konposatu bat, hots, hurrengo moduan idatz daitekeena:

$$y = F(u), \qquad u = \varphi(x)$$

edo $y = F[\varphi(x)]$ (I. gaiko § 8). $y = F(u)$ adierazpeneko u aldagaiari *bitarteko* argumentu (aldagai) deritzo.

Lor dezagun orain funtzio konposaturaren deribazio-formula.

Teorema. x puntu batean $u = \varphi(x)$ funtzioak $u'_x = \varphi'(x)$ badu deribatutzat eta $y = F(u)$ funtzioaren deribatua $y'_u = F'(u)$ bada x balioari dagokion u argumentuaren baliorako, $y = F[\varphi(x)]$ funtzio konposatua deribagarria izango da, deribatuaren adierazpena

$$y'_x = F'_u(u)\varphi'(x)$$

delarik, u-ren ordez $u = \varphi(x)$ idatzi behar delarik. Lorturiko formula hurrengo era laburtuan adieraz daiteke:

$$y'_x = y'_u u'_x,$$

hots, funtzio konposatuaren deribatua, funtzio horren u bitarteko argumentuarekiko deribatuaren eta bitarteko argumentuaren x-rekiko deribatuaren arteko biderkadura da.

Frogapena. Emaniko x-ren balio baterako

$$u = \varphi(x), \qquad y = F(u)$$

dugu.

Argumentuaren $x + \Delta x$ gehituriko baliorako

$$u + \Delta u = \varphi(x + \Delta x), \qquad y + \Delta y = F(u + \Delta u)$$

dugu.

Beraz, Δx gehikuntzari Δu gehikuntza dagokio, eta horri Δy gehikuntza; horretaz gain, $\Delta x \to 0$ denean, Δu eta Δy gehikuntzek ere zerorantz joko dute. Hipotesiari esker,

$$\lim_{\Delta u \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} = y'_u$$

dugu.

Erlazio horretatik eta limitearen definizioaren arabera, hurrengoa izango dugu ($\Delta u \neq 0$ denean):

$$\frac{\Delta y}{\Delta u} = y'_u + \alpha, \tag{1}$$

$\alpha \to 0$ dugularik $\Delta u \to 0$ denean. Idatz dezagun orain (1) formula hurrengo moduan:

$$\Delta y = y'_u \Delta u + \alpha\, \Delta \mathrm{u}. \tag{2}$$

α edozein izanik, (2) ekuazioa $\Delta u = 0$ denean ere betetzen da, kasu horretan berdintza $0 = 0$ bilakatzen bait da. $\Delta u = 0$ denean $\alpha = 0$ jarriko dugu. (2) ekuazioko atal biak Δx gehikuntzaz zatituz

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = y'_u \frac{\Delta u}{\Delta x} + \alpha \frac{\Delta u}{\Delta x} \tag{3}$$

dugu. Hipotesiari esker,

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = u'_x, \qquad \lim_{\Delta x \to 0} \alpha = 0.$$

Beraz, (3) ekuazioan $\Delta x \to 0$ deneko limitera pasatuz, ondokoa lortuko dugu

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x \tag{4}$$

frogatu nahi genuen bezala.

1. Adibidea. $y = \sin(x^2)$ funtzioa emanik, y'_x aurkitu. Idatz dezagun proposaturiko funtzioa funtzio konposatu bezala:

$$y = \sin u, \qquad u = x^2.$$

Hurrengoa dugu:

$$y'_u = \cos u, \qquad u'_x = 2x.$$

Beraz, (4) formularen arabera,

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x = \cos u \cdot 2x,$$

eta u x-ren funtzio bezala idatziz, azkenik, ondokoa lortzen dugu:

$$y'_x = 2x \cos (x^2).$$

2. Adibidea. $y = (\ln x)^3$ funtzioa emanik, y'_x aurkitu. Idatz dezagun proposaturiko funtzioa hurrengo moduan

$$y = u^3, \quad u = \ln x.$$

Hurrengoa dugu

$$y'_u = 3u^2, \quad u'_x = \frac{1}{x}.$$

Honelatan ba,

$$y'_x = 3u^2 \frac{1}{x} = 3(\ln x)^2 \frac{1}{x}.$$

$y = f(x)$ funtzioa honela jar badaiteke

$$y = F(u), \quad u = \varphi(v), \quad v = \psi(x),$$

y'_x deribatua aurreko teorema ondoz ondo aplikaturik lortzen da. Aurreko teoremaren arabera

$$y'_x = y'_u u'_x.$$

dugu. Teorema hori u'_x aurkitzeko aplikatuz hurrengoa lortzen da:

$$u'_x = u'_v v'_x.$$

eta u'_x adierazpen hori aurreko berdintzan ordekatuz

$$y'_x = y'_u u'_v v_x \tag{5}$$

ondorioztatzen da, hots,

$$y'_x = F'_u(u)\varphi'_v(v)\psi'_x(x).$$

3. Adibidea. $y = \sin\left[(\ln x)^3\right]$ funtzioa emanik, y'_x aurkitu.

Funtzio hau hurrengo moduan idatz daiteke:

$$y = \sin\ u, \qquad u = v^3 \qquad v = \ln x.$$

Hurrengoa dugu

$$y'_u = \cos\ u, \qquad u'_v = 3v^2 \qquad v'_x = \frac{1}{x}.$$

Hortaz, (5) formularen arabera

$$y'_x = y'_u u'_v v'_x = 3(\cos u)v^2\,\frac{1}{x},$$

eta azkenik

$$y'_x = \cos\left[(\ln x)^3\right]\cdot 3(\ln x)^2\cdot\frac{1}{x}.$$

Azterturiko funtzioa $x>0$ balioetarako soilik definituta dagoela kontuan izatekoa da.

§ 10. $y = \tan x$, $y = \cot x$ eta $y = \ln|x|$ funtzioen deribatuak

1. Teorema. $y = \tan x$ funtzioaren deribatua $\dfrac{1}{\cos^2 x}$ da, hau da,

$$y = \tan x \text{ bada, } y' = \frac{1}{\cos^2 x} \text{ da.} \qquad \text{(XI)}$$

Frogapena

$$y = \frac{\sin x}{\cos x},$$

denez gero, zatikiak deribatzeko formulatik (ikus III. gaiko § 7. ataleko (VIII) formula) ondokoa dugu:

$$y = \frac{(\sin x)' \cos x - \sin x(\cos x)'}{\cos^2 x} =$$

$$= \frac{\cos x \cos x - \sin x(-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

2. Teorema. $y = \cot x$ funtzioaren deribatua $-\dfrac{1}{\sin^2 x}$, da, hau da,

$$y = \cot x \text{ bada, } y' = -\frac{1}{\sin^2 x} \text{ da.} \qquad \text{(XII)}$$

Frogapena

$$y = \frac{\cos x}{\sin x},$$

denez gero, hurrengoa izango dugu:

$$y' = \frac{(\cos x)' \sin x - \cos x(\sin x)'}{\sin^2 x} =$$

$$= \frac{(-\sin)\sin x - \cos x(\cos x)}{\sin^2 x} = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

1. Adibidea. $y = \tan\sqrt{x}$ bada,

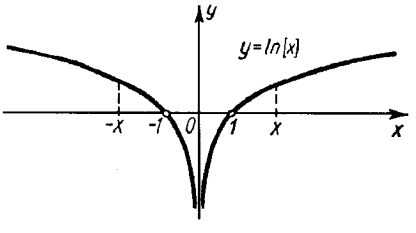
$$y' = \frac{1}{\cos^2 \sqrt{x}} \left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}} \frac{1}{\cos^2 \sqrt{x}}.$$

2. Adibidea. $y = \ln \cot x$ bada, orduan

$$y' = \frac{1}{\cot x} (\cot x)' = \frac{1}{\cot x} \left(-\frac{1}{\sin^2 x} \right) = -\frac{1}{\cos x \ \sin x} = -\frac{2}{\sin 2x}.$$

3. Teorema. $y = \ln|x|$ funtzioaren (62. irudia) deribatua $\frac{1}{x}$ da, hau da,

$$y = \ln|x| \text{ bada, } y' = \frac{1}{x} \text{ da.} \qquad \text{(XIII)}$$



62. IRUDIA

Frogapena. a) $x > 0$ bada, $|x| = x$, $\ln|x| = \ln x$ dugu eta beraz

$$y' = \frac{1}{x}.$$

b) Demagun $x < 0$ dela, orduan $|x| = -x$. Beraz

$$\ln|x| = \ln(-x).$$

($x < 0$ denean, $-x > 0$ dela kontuan izanik).

Idatz dezagun $y = \ln(-x)$ funtzio konposatu bezala,

$$y = \ln u; \ u = -x$$

eginez. Orduan

$$y'_x = y'_u u'_x = \frac{1}{u}(-1) = \frac{1}{-x}(-1) = \frac{1}{x}$$

Modu horretan, x-ren balio negatiboetarako ere

$$y'_x = \frac{1}{x}$$

berdintza betetzen da. Hortaz, (XIII) formula frogaturik geratzen da $x \neq 0$ balio guztietarako ($x = 0$ denean, $\ln|x|$ funtzioa ez dago definiturik).

§ 11. Funtzio inplizitua eta bere deribazioa

Demagun x eta y bi aldagairen balioak, sinbolikoki honela idazten dugun ekuazio baten bidez loturik daudela:

$$F(x, y) = 0. \tag{1}$$

$y = f(x)$ funtzioa (a, b) tartean definituta badago eta (1) ekuazioan y aldagaia $f(x)$ adierazpenaz ordezkatuz, ekuazioa x aldagaiarekiko berdintza bilakatzen bada, $y = f(x)$ funtzioari (1) ekuazioak definituriko *funtzio inplizitu* deritzo.

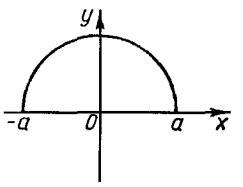
Adibidez,

$$x^2 + y^2 - a^2 = 0 \tag{2}$$

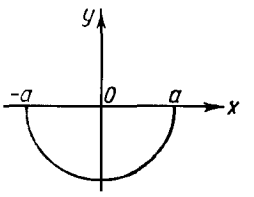
ekuazioak hurrengo funtzio elementalak definitzen ditu inplizituki (63. eta 64. irudiak):

$$y = \sqrt{a^2 - x^2}, \tag{3}$$

$$y = -\sqrt{a^2 - x^2}. \tag{4}$$



63. IRUDIA



64. IRUDIA

Izan ere, (2) ekuazioan y aldagaia goiko adierazpenez ordezkatuz, hurrengo berdintza lortzen da:

$$x^2 + (a^2 - x^2) - a^2 = 0$$

(3) eta (4) adierazpenak, (2) ekuazioa y aldagaiarekiko ebatziz lortu dira. Ordea, funtzio inplizituaren adierazpen esplizitua lortzea ez da beti posible, hau da, ezin da beti funtzio inplizitua $y = f(x)$[6] bezala idatzi, $f(x)$ funtzio elementala izanik.

Horrelatan,

$$y^6 - y - x^2 = 0$$

edo

$$y - x - \frac{1}{4}\sin\ y = 0$$

ekuazioen bidez definituriko funtzioak ezin dira funtzio elementalen bidez adierazi; hau da, ezin dira y-rekiko ebatzi funtzio elementalen bidez.

1. Oharra. Aipatzekoa da "funtzio esplizitua" eta "funtzio inplizitua" hitzak funtzioa emanik dagoen moduari dagozkiola eta funtzioen natura ez dutela karakterizatzen.

Edozein $y = f(x)$ funtzio esplizitu $y - f(x) = 0$ modu inpluzituan jar daiteke.

Ikus dezagun orain, aldez aurretik modu esplizituan jarri gabe, hau da, $y = f(x)$ eran idatzi gabe, nola lor daitekeen funtzio inplizituaren deribatua.

Demagun ondoko funtzioa

$$x^2 + y^2 - a^2 = 0$$

ekuazioak ematen duela.

Aurreko ekuazioak definituriko x-ren funtzioa y izango balitz, ekuazioa berdintza bilakatuko litzateke.

Berdintza horren atal biak x-rekiko deribatuz eta y x-ren funtzio bezala kontsideratuz, ondokoa lortuko dugu (funtzio konposatua deribatzeko erregela aplikatuz):

$$2x + 2yy' = 0,$$

nondik

---

6) Funtzioa $y = f(x)$ adierazpenaren bidez emanik badator *modu esplizituan* emanda dagoela esaten dugu edo funtzio *esplizitua* dela.

$$y' = -\frac{x}{y}$$

ateratzen den.

Ekuazioari dagokion

$$y = \sqrt{a^2 - x^2},$$

funtzio esplizitua deribatuz,

$$y' = \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}} = -\frac{x}{y}$$

lortuko genuke, hau da, emaitza berbera.

Azter dezagun berriz ere funtzio inplizituen adibide bat:

$$y^6 - y - x^2 = 0$$

x-rekiko deribatuz

$$6y^5y' - y' - 2x = 0$$

dugu eta bakanduz

$$y' = \frac{2x}{6y^5 - 1}.$$

2. Oharra. Aipaturiko adibideetatik, x argumentuaren emaniko balio baterako funtzio inplizituaren deribatua aurkitzeko, aldez aurretik emaniko x-ren balio horretarako y funtzioaren balioa ezagutzea beharrezkoa dela ondorioztatzen da.

§ 12. Edozein berretzaile errealdun funtzio potentzialaren, funtzio esponentzialaren eta funtzio esponentzial konposatuaren deribatuak

1. Teorema. x^n funtzio potentzialaren deribatua, n edozein zenbaki erreal izanik, nx^{n-1} da, hau da,

$$y = x^n \text{ bada, } y' = nx^{n-1} \text{ dugu.} \qquad (\mathrm{I}')$$

Frogapena. Demagun $x>0$ dela. Emaniko funtzioan logaritmoak hartuz,

$$\ln y = n \ln x$$

izango dugu.

Deriba ditzagun ekuazio horretan atal biak x-rekiko, y x-ren funtzioa dela kontsideratuz:

$$\frac{y'}{y} = n\frac{1}{x}; \quad y' = yn\frac{1}{x}.$$

y aldagaia $y = x^n$ beraren balioaz ordezkatuz, azkenik

$$y' = nx^{n-1}.$$

lortzen dugu.

Erraz froga daitekeenez, $x<0$ denean eta x^n adierazpenak zentzua duenean formula hori zuzena da[7].

2. Teorema. $a>0$ denean a^x funtzioaren deribatua $a^x \ln a$ da, hau da,

$$y = a^x \text{ bada, } y' = a^x \ln a \text{ da.} \qquad \text{(XIV)}$$

Frogapena. $y = a^x$ berdintzan logaritmoak hartuz ondokoa dugu:

$$\ln y = x \ln a$$

Lorturiko berdintzan deribatuz, y aldagaia x-ren funtzio bezala kontsideratuz,

$$\frac{1}{y} y' = \ln a; \quad y' = y \ln a$$

dugu, hau da,

$$y' = a^x \ln a.$$

---

7) Formula hori jadanik frogatua izan da n zenbaki oso eta positiboa den kasurako (III. gaiko 5. atala). Orain (I) formula n edozein zenbaki erreal konstantetarako orokorturik geratzen da.

Oinarria $a = e$ bada, $\ln e = 1$ da eta hurrengo formula lortzen dugu:

$$y = e^x, y' = e^x. \qquad \text{(XIV')}$$

1. Adibidea. Biz

$$y = e^{x^2}.$$

funtzioa.

Jar dezagun funtzio konposatu bezala u bitarteko argumentua definituz:

$$y = e^u, \quad u = x^2;$$

orduan

$$y'_u = e^u, \quad u'_x = 2x;$$

eta hortaz

$$y'_x = e^u \cdot 2x = e^{x^2} \cdot 2x.$$

Bai oinarria eta bai berretzailea x-ren funtzioak direneko funtzioari *funtzio esponentzial konposatu* deritzo. Adibidez, $(\sin x)^{x^2}, x^{\tan x}, x^x, (\ln x)^x$ eta, orokorrean,

$$y = [u(x)]^{v(x)} \equiv u^v$$

motatako funtzioak[8].

3. Teorema.

$$y = u^v \text{ bada, } \quad y' = vu^{v-1} \cdot u' + u^v v' \ln u \qquad \text{(XV)}$$

Frogapena. Har ditzagun logaritmoak y funtzioan

$$\ln y = v \ln u.$$

Berdintza horretan x aldagaiarekiko deribatuz

---

8) Horrelako funtzioak *esponentzial potentzial* edo *potentzial esponentzial* izena ere badu.

$$\frac{1}{y}y' = v\frac{1}{u}u' + v'\ln u$$

dugu, nondik

$$y' = y\left(v\frac{u'}{u} + v'\ln u\right)$$

ateratzen den.

y u^v-ren bidez ordezkatuz

$$y' = vu^{v-1}u' + u^v v'\ln u$$

dugu.

Honelatan ba, funtzio esponentzial konposatuaren deribatua honela lortzen direneko bi gaiz osoturik dago: lehenengoa, deribatzerakoan u x-ren funtzio dela kontsideratuz, v konstantea delarik (u^v funtzio potentzial bezala ulertuz); bigarrena, v x-ren funtzio dela kontsideratuz, u konstantea delarik (u^v funtzio esponentzial bezala ulertuz).

2. Adibidea. $y = x^x$ bada,

$$y' = x \cdot x^{x-1}(x') + x^x \cdot (x') \cdot \ln x$$

da, hots,

$$y' = x^x + x^x \ln x = x^x(1 + \ln\ x).$$

3. Adibidea. $y = (\sin x)^{x^2}$ bada,

$$y' = x^2(\sin\ x)^{x^2-1}(\sin\ x)' + (\sin\ x)^{x^2}\left(x^2\right)'\ln\sin\ x =$$

$$= x^2(\sin\ x)^{x^2-1}\cos x + (\sin\ x)^{x^2}\,2x\ln\sin\ x.$$

izango dugu.

Deribatua kalkulatzeko atal honetan erabilitako prozedura, lehenik, *emaniko funtzioaren logaritmoaren deribatua* aurkitzean datza. Prozedura hori maiz erabiltzen da zenbait funtzio deribatzerakoan, zeren eta, askotan, kalkuluak errazten bait ditu.

4. Adibidea. Hurrengo funtzioaren deribatua aurkitu

$$y = \frac{(x+1)^2\sqrt{x-1}}{(x+4)^3 e^x}.$$

Ebazpena. Logaritmoak hartuz

$$\ln y = 2\ln(x+1) + \frac{1}{2}\ln(x-1) - 3\ln(x+4) - x$$

lotzen dugu. Berdintzako atal biak deribatuz

$$\frac{y'}{y} = \frac{2}{x+1} + \frac{1}{2(x-1)} - \frac{3}{x+4} - 1$$

lortzen da. y-ren bidez biderkatuz eta hurrengoaren bidez ordezkatuz

$$\frac{(x+1)^2\sqrt{x-1}}{(x+4)^3 e^x},$$

ondokoa lortzen dugu

$$y' = \frac{(x+1)^2\sqrt{x-1}}{(x+4)^3 e^x}\left[\frac{2}{x+1} + \frac{1}{2(x-1)} - \frac{3}{x+4} - 1\right].$$

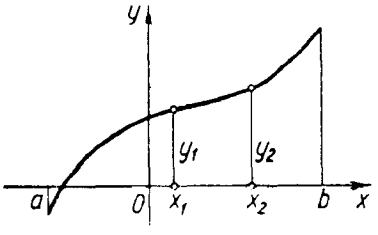
Oharra. Emaniko $y = y(x)$ funtzioaren logaritmo nepertarraren x-rekiko deribatua den $\frac{y'}{y} = (\ln y)'$ adierazpenari *deribatu logaritmiko* deritzo.

§ 13. Alderantzizko funtzioa eta bere deribazioa

Biz

$$y = f(x)$$

funtzio gorakorra (65. irudia) edo beherakorra (a,b) tartean $(a<b)$ (I. gaiko § 6. atala). $f(a)=c$ eta $f(b)=d$ egin dezagun. Zehazteko, hemendik aurrera funtzio gorakorra kontsideratuko dugu soilik.



65. IRUDIA

Har ditzagun x_1 eta x_2 bi balio desberdin (a,b) tartean. Funtzio gorakorraren definiziotik, $x_1<x_2$ eta $y_1=f(x_1)$, $y_2=f(x_2)$ direnean, $y_1<y_2$ dela ondorioztatzen da. Beraz, x_1 eta x_2 bi baliori, funtzioaren y_1 eta y_2 bi balio desberdin dagozkie. Elkarrekikoa ere egiazkoa da. Hau da, $y_1<y_2$ eta $y_1=f(x_1)$, $y_2=f(x_2)$ badira funtzio gorakorraren definiziotik $x_1<x_2$ dela ondorioztatzen da. Modu horretan, x-ren balioen eta dagozkien y-ren balioen artean erlazio biunibokoa definitzen da.

y-ren balioak argumentuaren balioak bezala kontsideratuz eta x-renak funtzioarenak bezala, x aldagaia y-ren funtzio bezala izango dugu:

$$x=\varphi(y).$$

Funtzio horri, $y=f(x)$ funtzioaren *alderantzizkoa* deritzo.

Elkarrekikoa, $y=f(x)$ funtzioa $x=\varphi(y)$ delakoaren alderantzizkoa da.

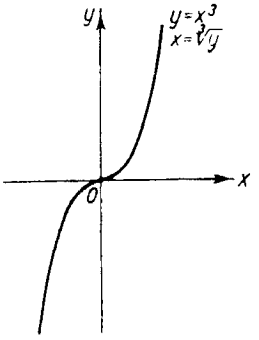
Modu berean arrazonatuz, funtzio beherakorrek ere alderantzizkoa dutela froga daiteke.

1. Oharra. Aipatu baino ez dugu egingo, frogapenik gabe, $y=f(x)$ funtzio gorakorra (edo beherakorra) $[a,b]$ tartean jarraia denean, $f(a)=c$ eta $f(b)=d$ izanik, alderantzizko funtzioa $[c,d]$ tartean definituta egongo dela eta bertan jarraia izango dela.

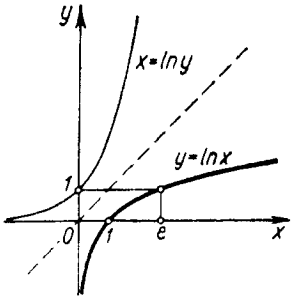
1. Adibidea. Biz $y=x^3$ funtzioa. Funtzio hori $-\infty<x<+\infty$ tartean gorakorra da eta berorren alderantzizkoa, $x=\sqrt[3]{y}$, ere (66. irudia).

Aipa dezagun $x=\varphi(y)$ alderantzizko funtzioa $y=f(x)$ ekuaziotik x bakanduz lortzen dela.

2. Adibidea. Biz $y = e^x$ funtzioa. Funtzio hori $-\infty < x < +\infty$ tartean gorakorra da. Berorren alderantzizkoa $x = \ln y$ da. Azken funtzio horren definizio--eremua $0 < y < +\infty$ da (67. irudia).



66. IRUDIA

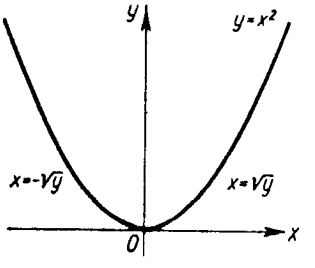


67. IRUDIA

2. Oharra. $y = f(x)$ funtzioa gorakorra edo beherakorra ez bada tarte batean, alderantzizko funtzio bat baino gehiago izan ditzake[9].

3. Adibidea. $y = x^2$ funtzioa $-\infty < x < +\infty$ tarte infinituan definituta dago. Ez da gorakorra ez eta beherakorra ere, eta ez du alderantzizko funtziorik. Ordea, $0 \leq x < +\infty$ tartea kontsideratzen badugu, funtzioa bertan gorakorra da eta bere alderantzizkoa $x = \sqrt{y}$ da, $-\infty < x < 0$ tartean funtzio bera beherakorra izango da eta bere alderantzizkoa $x = -\sqrt{y}$ da (68. irudia).

3. Oharra. $y = f(x)$ eta $x = \varphi(y)$ funtzioak elkarrekiko alderantzikoak badira, beraien grafikoak kurba bakar baten bidez adieratzen dira. Ordea, alderantzizko funtzioaren argumentua x izendatzen badugu eta funtzio honi y deitzen badiogu, koordenatu-sistema bakar batean funtzio bien grafikoak desberdinak izango dira.



68. IRUDIA

Erraz ikus daitekeenez grafiko bi horiek simetrikoak izango dira koordenatu-ardatzek osotzen duten lehen koadrantearen erdikariarekiko.

---

9) Azpimarra dezagun "y x-ren funtzioa da" esaterakoan, esan gabe y-ren x-rekiko menpekotasun unibokoa dela ulertzen dugula.

4. Adibidea. 67. irudian, 2. adibidean azterturiko, $y = e^x$ (edo $x = \ln y$) funtzioaren eta $y = \ln x$ bere alderantzizkoaren grafikoak marraturik daude.

Hurrengo teoremak $y = f(x)$ funtzioaren deribatua kalkulatzen lagunduko digu, aldez aurretik alderantzizkoaren deribatua ezagutzen denean.

Teorema.

$$y = f(x) \tag{1}$$

funtzioarako alderantzizkorik existitzen bada

$$x = \varphi(y), \tag{2}$$

eta emaniko y puntu batean, $\varphi'(y)$ existitzen bada, $\varphi'(y) \neq 0$ izanik, $y = f(x)$ funtzioa, y-ri dagokion x puntuan deribagarria da, $f'(x)$ deribatua $\dfrac{1}{\varphi'(y)}$ izanik, hau da, hurrengo formula betetzen da:

$$f'(x) = \frac{1}{\varphi'(y)} \tag{XVI}$$

Honelatan ba, elkarrekiko alderantzizkoak diren bi funtzioetariko baten deribatua beste funtzioaren deribatuaren alderantzizkoa da, dagozkien x eta y balioetarako[10].

Frogapena. y-ri Δy gehikuntza emanik, (2) berdintzatik

$$\Delta x = \varphi(y + \Delta y) - \varphi(y).$$

ondorioztatzen dugu, $\varphi(y)$ funtzio monotonoa denez gero, $\Delta x \neq 0$ dugu. Idatz dezagun hurrengo berdintza

---

10) $f'(x)$ edo y'_x idazterakoan, deribatua kalkulatzerakoan x aldagai independentetzat kontsideratzen dugu. Modu berean, $\varphi'(y)$ edo x'_y idazterakoan, deribatua kalkulatzerakoan aldagai independentea y dela kontsideratzen dugu. Aipa dezagun (XVI) formulako bigarren ataleko y-rekiko deribatua lortu eta gero y aldagaia $f(x)$ bidez ordezkatu behar dela.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{\frac{\Delta x}{\Delta y}}.$$

$\varphi(y)$ funtzioa jarraia denez gero, $\Delta y \to 0$ denean $\Delta x \to 0$ dugu.

Azken berdintzako atal bietan $\Delta y \to 0$ deneko limiteak hartuz,

$$y'_x = \frac{1}{x'_y}$$

lortzen dugu, hau da,

$$f'(x) = \frac{1}{\varphi'(y)},$$

hots, (XVI) formulara heltzen gara.

4. Oharra. (XVI) formula funtzio konposatuen deribaziorako teorema aplikatuz lor daiteke baita ere.

Izan ere, deriba ditzagun (2) berdintzako atal biak x aldagaiarekiko, y x-ren funtzioa dela kontsideratuz:

$$1 = \varphi'(y)y'_x,$$

nondik

$$y'_x = \frac{1}{\varphi'(y)}$$

lortzen den.

Esanahi geometrikoa oso erraza da. Kontsidera dezagun $y = f(x)$ funtzioaren grafikoa (69. irudia). Kurba bera $x = \varphi(y)$ funtzioaren grafikoa izango da, x funtziotzat kontsideratuz eta y aldagai independentetzat. Har dezagun kurba horretako $M(x, y)$ puntu bat. Marraz dezagun kurba horren ukitzailea puntu horretan. Ukitzaile horrek Ox eta Oy ardatzen ardatzerdi positiboekin osatzen dituen angeluak, α eta β izendatuko ditugu hurrenez hurren. Deribatuaren esanahi geometrikoari buruz § 3. atalean lorturiko emaitzei esker,

$$\left.\begin{aligned} f'(x) &= \tan\alpha \\ \varphi'(y) &= \tan\beta \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

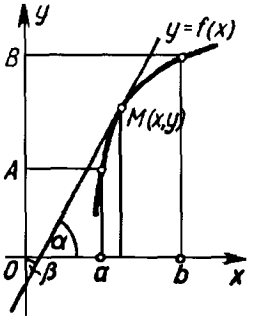
dugu.

69. iruditik, $\alpha < \dfrac{\pi}{2}$ denean

$$\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha.$$

dela berehala ondorioztatzen da.

$\alpha > \dfrac{\pi}{2}$ bada, $\beta = \dfrac{3\pi}{2} - \alpha.$



69. IRUDIA

Honelatan ba, edozein kasutan

$$\tan\beta = \cot\alpha$$

dugu, nondik

$$\tan\alpha \cdot \tan\beta = \tan\alpha \ \cot\alpha = 1,$$

lortzen den, hau da,

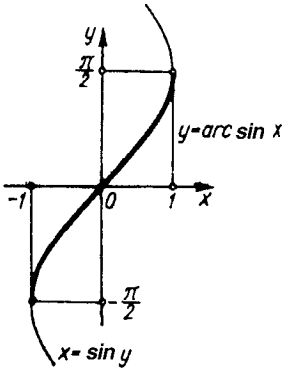
$$\tan\alpha = \frac{1}{\tan\beta}.$$

$\tan\alpha$ eta $\tan\beta$ (3) formulan ondorioztaturiko balioen bidez ordezkatuz,

$$f'(x) = \frac{1}{\varphi'(y)}$$

lortzen dugu.

§ 14. Alderantzizko funtzio trigonometrikoak eta berorien deribazioa



70. IRUDIA

1) $y = \arcsin x$ funtzioa.

Kontsidera dezagun

$$x = \sin y \qquad (1)$$

funtzioa eta eraiki dezagun bere grafikoa, goranzko bertikala Oy ardatz bezala hartuz (70. irudia).

Funtzio hori $-\infty < y < +\infty$ tartean dago definituta.

$-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$ tartean, $x = \sin y$ funtzioa gorakorra da eta bere balioak $-1 \leq x \leq 1$ tartean daude. Horregatik, funtzioak alderantzikoa du, honela idazten delarik $y = \arcsin x$ [11].

Funtzio hori $-1 \leq x \leq 1$ tartean definituta dago eta bere balioak $-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$ tartean daude. 70. irudian, $y = \arcsin x$ funtzioaren grafikoa lerro lodiz adierazten da.

1. Teorema. $\arcsin x$ funtzioaren deribatua $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, da, hau da,

$$y = \arcsin x \quad \text{bada,} \quad y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad \text{dugu.} \qquad \text{(XVII)}$$

Frogapena. (1) berdintzaren arabera

$$x'_y = \cos y,$$

dugu eta alderantzizko funtzioa deribatzeko erregela erabiliz,

$$y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{\cos y}$$

---

11) Aipa dezagun trigonometria-kurtsoan ezaguturiko $y = \arcsin x$ berdintza, (1) formula idazteko beste modu bat dela. Hemen (x emanik), y ikurrak sinua x-ren berdina duten angeluen balioen multzoa esan nahi du.

izango dugu, baina

$$\cos y = \sqrt{1 - \sin^2 y} = \sqrt{1 - x^2},$$

beraz,

$$y'_x = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Erroa zeinu positiboarekin hartzen da, $y = \arcsin x$ funtzioa $-\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2}$ tartean definitzen bait da eta, beraz, $\cos y \ge 0$.

1. Adibidea. $y = \arcsin e^x$.

$$y' = \frac{1}{\sqrt{1 - (e^x)^2}}(e^x)' = \frac{e^x}{\sqrt{1 - e^{2x}}}.$$

2. Adibidea.

$$y = \left(\arcsin \frac{1}{x}\right)^2,$$

$$y' = 2\left(\arcsin \frac{1}{x}\right)\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}}\left(\frac{1}{x}\right)' = -2\left(\arcsin \frac{1}{x}\right)\frac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}}.$$

2) $y = \arccos x$ funtzioa.

Lehen bezala, kontsidera dezagun

$$x = \cos y \qquad (2)$$

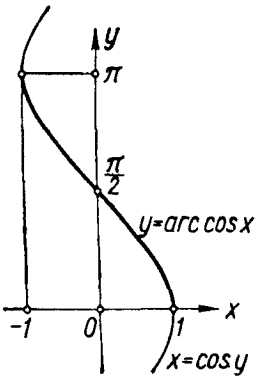
funtzioa eta eraiki dezagun beraren grafikoa, goranzko bertikala Oy ardatz bezala hartuz (71. irudia). Funtzio hori $-\infty < y < +\infty$ tarte infinituan definituta dago. $x = \cos y$

funtzioa $0 \le y \le \pi$ tartean beherakorra da eta alderantzizko funtzioa du, berori honela idazten delarik:

$$y = \arccos x.$$

Funtzioa $-1 \le x \le 1$ tartean dago definiturik.

Funtzio horren balioak $\pi \ge y \ge 0$ tartean daude. 71. irudian, $y = \arccos x$ funtzioaren grafikoa lerro lodiz adierazita dago.



71. IRUDIA

2. Teorema. $\arccos x$ funtzioaren deribatua $-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ da, hau da,

$$y = \arccos x \quad \text{bada,} \quad y' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad \text{dugu.} \qquad \text{(XVIII)}$$

Frogapena. (2) berdintzaren arabera

$$x'_y = -\sin y$$

dugu. Beraz,

$$y'_x = \frac{1}{x'_y} = -\frac{1}{\sin y} = -\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2 y}}.$$

Bestalde, $\cos y = x$ denez gero,

$$y'_x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

dugu.

$\sin y = \sqrt{1-\cos^2 y}$ berdintzan, erroa zeinu positiboz hartzen dugu, $y = \arccos x$ funtzioa $0 \le y \le \pi$ tartean definituta bait dago eta beraz, $\sin y \ge 0$ delako.

3. Adibidea. $y = \arccos(\tan x)$

$$y' = -\frac{1}{\sqrt{1-\tan^2 x}}(\tan x)' = \frac{1}{\sqrt{1-\tan^2 x}}\frac{1}{\cos^2 x}.$$

3) $y = \arctan x$ funtzioa.

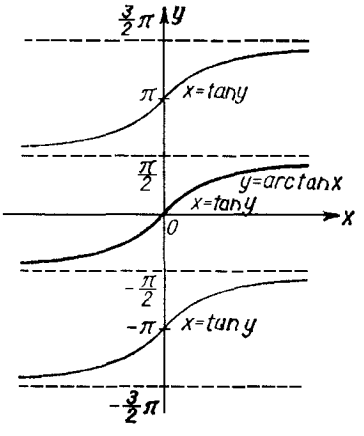
Kontsidera dezagun

$$x = \tan y \tag{3}$$

funtzioa eta eraiki dezagun bere grafikoa (72. irudia).

Funtzio hori, $y = (2k+1)\frac{\pi}{2}$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2 \ldots)$ izan ezik, aldagaiaren balio guztietarako definituta dago. $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$, tartean $x = \tan y$ funtzioa gorakorra da eta alderantzizkoa du, honela idatziko dugularik:

$$y = \arctan x.$$



72. IRUDIA

Funtzio hori, $-\infty < x < +\infty$ tartean definituta dago eta bere balioak $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$ tartean daude. 72. irudian, $y = \arctan x$ funtzioaren grafikoa lerro lodiz adierazita dago.

3. Teorema. $\arctan x$ funtzioaren deribatua $\frac{1}{1+x^2}$ da, hau da,

$$y = \arctan x \text{ bada, } y' = \frac{1}{1+x^2} \text{ dugu.} \tag{XIX}$$

Frogapena. (3) berdintzaren arabera,

$$x'_y = \frac{1}{\cos^2 y}$$

dugu. Beraz,

$$y'_x = \frac{1}{x'_y} = \cos^2 y,$$

baina

$$\cos^2 y = \frac{1}{\sec^2 y} = \frac{1}{1+\tan^2 y};$$

eta $\tan y = x$ denez gero, azkenik

$$y' = \frac{1}{1+x^2}$$

dugu.

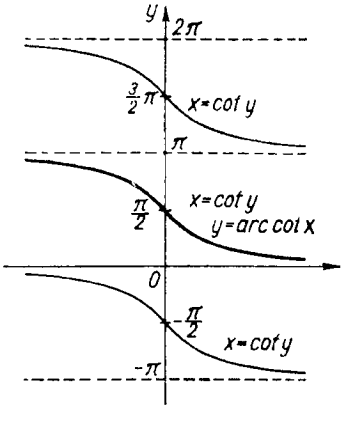
4. Adibidea. $y = (\arctan x)^4$,

$$y = 4(\arctan x)^3 (\arctan x)' = 4(\arctan x)^3 \frac{1}{1+x^2}.$$

4) $y = \operatorname{arc\,cot} x$ funtzioa. Kontsidera dezagun

$$x = \cot y \tag{4}$$

funtzioa.



73. IRUDIA

Funtzio hori, $y = k\pi$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ izan ezik, aldagaiaren balio guztietarako definituta dago. Funtzio horren grafikoa 73. irudian adierazita dago. $x = \cot y$ funtzioa, $0 < y < \pi$ tartean beherakorra da eta alderantzizkoa du, honela idatziko dugularik:

$$y = \operatorname{arc\,cot} x.$$

Funtzio hori $-\infty < x < +\infty$ tarte infinituan definituta dago eta bere balioak $\pi > y > 0$ tartean daude.

4. Teorema. $\operatorname{arc\,cot} x$ funtzioaren deribatua $-\dfrac{1}{1+x^2}$ da, hots,

$$y = \operatorname{arc\,cot} x \text{ bada, } \quad y' = -\frac{1}{1+x^2} \text{ dugu.} \qquad \text{(XX)}$$

Frogapena. (4) berdintzaren arabera:

$$x'_y = -\frac{1}{\sin^2 y}.$$

dugu. Beraz,

$$y'_x = -\sin^2 y = -\frac{1}{\operatorname{cosec}^2 y} = -\frac{1}{1+\cot^2 y}.$$

Bestalde,

$$\cot y = x.$$

Hortaz,

$$y'_x = -\frac{1}{1+x^2}.$$

§ 15. Deribazio-formula nagusien taula

Orain, aurreko ataletan lorturiko formula nagusien eta deribazio-erregelen bilduma aurkezten dugu taula batean.

Funtzio konstantea:

$$y = \text{ktea.}, \qquad y' = 0.$$

Funtzio potentziala:

$$y = x^{\alpha}, \qquad y' = \alpha x^{\alpha-1};$$

bereziki,

$$y = \sqrt{x}, \qquad y' = \frac{1}{2\sqrt{x}};$$

$$y = \frac{1}{x}, \qquad y' = -\frac{1}{x^2}.$$

Funtzio trigonometrikoak:

$$y = \sin x, \qquad y' = \cos x;$$

$$y = \cos x, \qquad y' = -\sin x;$$

$$y = \tan x, \qquad y' = \frac{1}{\cos^2 x};$$

$$y = \cot x, \qquad y' = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

Alderantziko funtzio trigonometrikoak:

$$y = \arcsin x, \qquad y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}};$$

$$y = \arccos x, \qquad y' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}};$$

$$y = \arctan x, \qquad y' = \frac{1}{1+x^2};$$

$$y = \operatorname{arc\,cot} x, \qquad y' = -\frac{1}{1+x^2}.$$

Funtzio esponentziala:

$$y = a^x, \qquad y' = a^x \ln a;$$

bereziki,

$$y = e^x, \qquad y' = e^x.$$

Funtzio logaritmikoa:

$$y = \log_a x, \qquad y' = \frac{1}{x}\log_a e;$$

bereziki,

$$y = \ln x, \qquad y' = \frac{1}{x}.$$

Deribazio-erregela nagusiak:

$$\begin{array}{ll}
y = Cu(x), & y' = Cu'(x) \ (C = ktea.); \\
y = u + v - w, & y' = u' + v' - w'; \\
y = uv, & y' = u'v + uv'; \\
y = \dfrac{u}{v}, & y' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}; \\
\left.\begin{array}{l} y = f(u), \\ u = \varphi(x), \end{array}\right\} & y'_x = f'_u(u)\varphi'_x(x); \\
y = u^v, & y' = vu^{v-1}u' + u^v v' \ln u.
\end{array}$$

$y = f(x)$ eta $x = \varphi(y)$ badira, f eta φ elkarrekiko alderantzizko funtzioak direlarik,

$$f'(x) = \frac{1}{\varphi'(y)}, \quad \text{non } y = f(x) \text{ den.}$$

§ 16. Funtzioen adierazpen parametrikoa

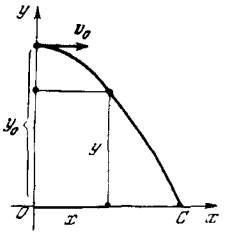
Kontsidera ditzagun bi ekuazio

$$\left.\begin{array}{l} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \end{array}\right\} \tag{1}$$

t aldagaiak $[T_1, T_2]$ tarteko balioak hartzen dituelarik. t aldagaiaren balio bakoitzari bi balio dagozkio, x eta y-rena (φ eta ψ funtzio unibokoak direla suposatzen dugu). x eta y-ren balioak Oxy planoko puntu baten koordenatuak direla suposatuz, t-ren balio bakoitzari plano horretako puntu bakar bat dagokio. Puntu horrek planoan kurba bat deskribatzen du t aldagaia T_1-etik T_2-ra aldatzean. (1) ekuazioei kurba horren *ekuazio parametriko* deritze; *t parametro* deitzen da eta kurba (1) ekuazioen bidez emateko metodoari metodo *parametriko* deritzo.

Demagun orain $x = \varphi(t)$ funtzioak $t = \Phi(x)$ alderantzizko funtzioa duela. Orduan bistakoa da y aldagaia x-ren funtzioa dela:

$$y = \psi[\Phi(x)]. \qquad (2)$$



74. IRUDIA

Beraz, (1) ekuazioek y definitzen dute x-ren funtzio bezala eta x-ren funtzioa den y parametrikoki emanik dagoela esaten da.

(1) ekuazioetatik t parametroa ezabatuz y-ren menpekotasun zuzenaren $y = f(x)$ adierazpena lortzen da.

Kurbak emateko metodo parametrikoa mekanikan maiz erabiltzen da. Adibidez, Oxy planoan puntu material bat higitzen bada eta bere koordenatu-ardatzekiko projekzioen higiduren legeak ezagutzen badira.

$$\left.\begin{aligned} x &= \varphi(t), \\ y &= \psi(t). \end{aligned}\right\} \qquad (1')$$

t parametroa denbora izanik, (1') ekuazioak puntu higikor baten ibilbidearen ekuazio parametrikoak izango dira. Ekuazio horietan t parametroa ezabatuz, ibilbidearen ekuazioa $y = f(x)$ edo $F(x, y) = 0$ forman lortuko dugu. Argi dezagun hori hurrengo problemaren bidez.

Problema. v_0 abiaduraz eta y_0 altueran horizontalki higitzen den hegazkin batetik jaurtikiriko gorputz baten ibilbidea eta jausten deneko puntua aurkitu (airearen erresistentzia ez dugu kontuan izango).

Ebazpena. Har dezagun 74. irudian azaltzen den koordenatu-sistema, gorputza hegazkinak Oy ardatza gurutzatzen duenean jaurtikitzen dela suposatuz. Bistakoa denez, gorputzaren desplazamendu horizontala v_0 abiadura konstantedun higidura uniformea izango da:

$$x = v_0 t.$$

Grabitateak eragindako jauskera bertikala hurrengo formularen bidez adierazten da:

$$s = \frac{gt^2}{2}.$$

Beraz, edozein unetan, gorputzetik lurrerainoko distantzia hurrengo formularen bidez adieraziko da:

$$y = y_0 - \frac{gt^2}{2}.$$

Hurrengo bi berdintzak

$$x = v_0 t,$$
$$y = y_0 - \frac{gt^2}{2},$$

ibilbidearen ekuazio parametrikoak dira. t parametroa ezabatzeko, lehen ekuaziotik t bakanduko dugu eta lorturiko $t = \frac{x}{v_0}$ balioa bigarrenean ordezkatuz, ibilbidearen ekuazioa lortuko dugu:

$$y = y_0 - \frac{g}{2v_0^2} x^2.$$

Hori erpina $M(O, y_0)$ puntuan eta simetri ardatza Oy dituen parabolaren ekuazioa da.

Determina dezagun OC zuzenkiaren luzera. Bedi X C puntuaren abzisa, koordenatua $y = 0$ duelarik. Balio horiek aurreko formulan sartuz

$$O = y_0 - \frac{g}{2v_0^2} x^2$$

dugu, nondik

$$X = v_0 \sqrt{\frac{2y_0}{g}}$$

den.

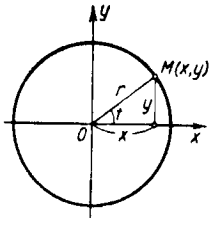
§ 17. Zenbait kurbaren ekuazio parametrikoak

Zirkunferentzia. Azter dezagun koordenatu-jatorrian zentrua duen r erradiodun zirkunferentzia (75. irudia).

Zirkunferentziako $M(x, y)$ puntu bati dagokion erradioak eta Ox ardatzak osotzen duten angelua t izendatuko dugu. Orduan, zirkunferentziako edozein punturen koordenatuak t parametroaren bidez honela adieraziko dira:

$$\left.\begin{aligned} x &= r\cos t, \\ y &= r\sin t, \end{aligned}\right\} \quad 0 \le t \le 2\pi.$$

Izan ere, horiek dira zirkunferentziaren ekuazio parametrikoak. Ekuazio horietatik t parametroa ezabatuz, x eta y soilik agertzen direneko zirkunferentziaren ekuazioa aurkituko dugu. Horretaz gain, ekuazio parametrikoen karratuak hartuz eta beroriek batuz



75. IRUDIA

$$x^2 + y^2 = r^2\left(\cos^2 t + \sin^2 t\right)$$

dugu, hau da,

$$x^2 + y^2 = r^2.$$

Elipsea. Idatz dezagun elipsearen ekuazioa

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \qquad (1)$$

Biz

$$x = a\cos t. \qquad (2')$$

Adierazpen hori (1) ekuazioan ordezkatuz

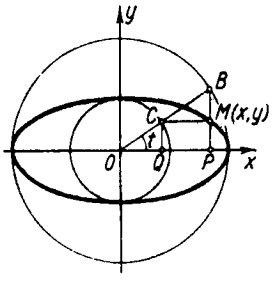
$$y = b\sin t \qquad (2'')$$

lortuko dugu. Hurrengo ekuazioak

$$\left.\begin{aligned} x &= a\ \cos t, \\ y &= b\ \sin t, \end{aligned}\right\} \quad 0 \le t \le 2\pi, \qquad (2)$$

elipsearen ekuazio parametrikoak dira.

Argi dezagun t parametroaren esanahi geometrikoa. Koordenatu-jatorrian zentrua duten a eta b erradiodun zirkunferentzia bi marra ditzagun (76. irudia). Suposa dezagun $M(x, y)$ puntua elipsean dagoela eta B erradio handiena duen zirkunferentzian kokatzen dela M puntuaren abzisa duelarik. OB erradioak eta Ox ardatzak osatzen duten angeluari t deituko diogu. Iruditik hurrengoa ondorioztatzen da:



76. IRUDIA

$$x = OP = a\cos t \quad [(2')\ \text{ekuazioa}],$$
$$CQ = b\sin t.$$

(2") ekuaziotik $CQ = y$ dela ondorioztatzen da, hau da, CM zuzena Ox ardatzarekiko paraleloa dela. Beraz, (2) ekuazioetan, t OB erradioak eta abzisa-ardatza osoturiko angelua da. Batzutan angeluari angelu eszentriko deritzo.

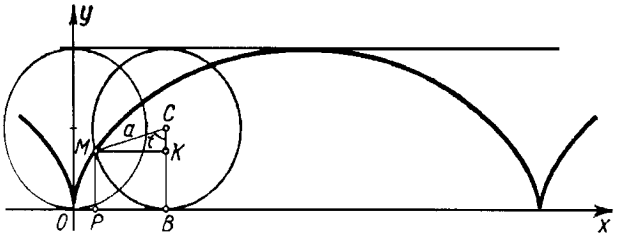
Zikloidea. Labaindu gabe zuzen baten gainean biratuz higitzen den zirkunferentzia baten puntu batek deskribatzen duen kurbari zikloide deritzo (77. irudia). Demagun zirkunferentziako M puntu higikorra higiduraren hasieran koordenatu-jatorrian kokatzen dela. Aurki ditzagun M puntuak izango dituen koordenatuak zirkunferentziak t angelua biratu ondoren. Bedi a zirkunferentziaren erradioa. 77. irudian ikusten den bezala,

$$x = OP = OB - PB,$$

eta zirkunferentziak labaindu gabe biratzen duenez gero:

$$OB = \overset{\frown}{MB} = at, \qquad PB = MK = a\sin t$$

dugu.



77. IRUDIA

Beraz,

$$x = at - a\sin t = a(t - \sin t).$$

Honelatan ba,

$$y = MP = KB = CB - CK = a - a\cos t = a(1 - \cos t).$$

Hurrengo adierazpenak

$$\left.\begin{aligned} x &= a(t - \sin t), \\ y &= a(1 - \cos t), \end{aligned}\right\} \quad 0 \le t \le 2\pi, \tag{3}$$

zikloidearen ekuazio parametrikoak dira. t parametroa 0-tik 2π-ra aldatzerakoan M puntuak zikloidearen arku bat deskribatzen du

Ekuazio horietatik t parametroa ezabatuz, x aldagaia y-rekiko duen menpekotasun zuzena lortuko dugu. $y = a(1 - \cos t)$ funtzioak $0 \le t \le \pi$ tartean hurrengo alderantzizko funtzioa du:

$$t = \arccos \frac{a - y}{a}.$$

(3) sistemako lehen ekuazioan t-ren adierazpen hori ordezkatuz

$$x = a \arccos \frac{a - y}{a} - a \sin\left(\arccos \frac{a - y}{a}\right)$$

edo

$$x = a \arccos \frac{a - y}{a} - \sqrt{2ay - y^2}$$

$0 \le x \le \pi a$ denean izango dugu.

77. iruditik,

$$\pi a \le x \le 2\pi a,$$

bada

$$x = 2\pi a - \left(a \arccos \frac{a - y}{a} - \sqrt{2ay - y^2}\right)$$

dugula ondorioztatzen da.

Aipa dezagun

$$x = a(t - \sin t)$$

funtzioak funtzio elementalen bidez adierazi ezin den alderantzizkoa duela. Modu berean $y = f(x)$ funtzioa ere ezin da funtzio elementalen bidez adierazi.

1. Oharra. Zikloidearen adibidean ikusten den bezala, kasu batzutan, ekuazio parametrikoak erosoagoak dira funtzioen eta kurben analisirako, x eta y aldagaien arteko menpekotasun zuzena baino.

Astroidea. Hurrengo ekuazio parametrikoak dituen kurbari astroide deritzo:

$$\left.\begin{aligned} x &= a\cos^3 t, \\ y &= a\sin^3 t, \end{aligned}\right\} \quad 0 \le t \le 2\pi. \tag{4}$$

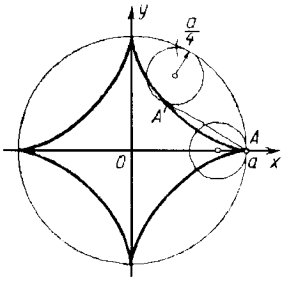
Ekuazio horietako atal biak $2/3$ potentziara berretuz eta atalka batuz, x eta y aldagaien menpekotasun zuzena lortzen dugu:

$$x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}\left(\cos^2 t + \sin^2 t\right),$$

hau da,

$$x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}. \tag{5}$$

Aurrerago (V. gaiko § 12. atala) kurba horrek 78. irudian azaltzen den forma duela frogatuko dugu.



78. IRUDIA

Kurba hori, a erradiodun zirkunferentzia baten gainean eta barnekaldetik labaindu gabe biratzen duen $\dfrac{a}{4}$ erradiodun zirkunferentzia baten puntu baten ibilbidea bezala uler daiteke (78. irudia).

2. Oharra. Aipa dezagun (4) eta (5) ekuazioek definitzen duten $y = f(x)$ funtzioa ez dela bakarra. Zehatzago izateko, ekuazio horiek $-a \le x \le +a$ tartean bi funtzio jarrai definitzen dituzte, batak balio ez-negatiboak soilik hartzen dituelarik eta besteak balio ez--positiboak.

§ 18. Parametrikoki emaniko funtzioaren deribatua

Biz hurrengo ekuazio parametrikoen bidez emaniko x-ren y funtzioa:

$$\left.\begin{aligned} x &= \varphi(t), \\ y &= \psi(t), \end{aligned}\right\} \quad t_0 \le t \le T. \tag{1}$$

Suposa dezagun funtzio horiek deribagarriak direla eta $x = \varphi(t)$ funtzioak $t = \Phi(x)$ duela alderantzizkotzat, azken hori ere deribagarria izanik. Kasu horretan, ekuazio parametrikoen bidez definituriko $y = f(x)$ funtzioa funtzio konposatutzat har daiteke t bitarteko aldagaia izanik:

$$y = \psi(t), \qquad t = \Phi(x).$$

Funtzio konposatuen deribazio-erregelaren arabera,

$$y'_x = y'_t t'_x = \psi'_t(t)\Phi'_x(x) \tag{2}$$

dugu eta alderantzizko funtzioen deribaziorako teoremari esker,

$$\Phi'_x(x) = \frac{1}{\varphi'_t(t)}.$$

Adierazpen hori (2) berdintzan ordezkatuz

$$y'_x = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$$

lortzen dugu, hots,

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} \tag{XXI}$$

Lorturiko formularekin parametrikoki emaniko funtzioaren deribatua kalkula daiteke, x eta y aldagaien arteko menpekotasun zuzena ezagutu gabe.

1. Adibidea. x-ren funtzioa den y hurrengo ekuazio parametrikoen bidez emanik dago

$$\left.\begin{aligned} x &= a\cos t, \\ y &= b\sin t, \end{aligned}\right\} \quad (0 \le t \le \pi).$$

$\dfrac{dy}{dx}$ deribatua kalkulatu: 1) t-ren edozein baliotarako; 2) $t = \dfrac{\pi}{4}$ denean.

Ebazpena:

$$1)\ y'_x = \frac{(a\sin t)'}{(a\cos t)'} = \frac{a\cos t}{-a\sin t} = -\cot t;$$

$$2)\ \left(y'_x\right)_{t=\frac{\pi}{4}} = -\cot\frac{\pi}{4} = -1.$$

2. Adibidea. Hurrengo zikloidearen ukitzailearen koefiziente angeluarra kalkulatu edozein puntutan $(0 \le t \le 2\pi)$.

$$x = a(t - \sin t),$$

$$y = a(1 - \cos t).$$

Ebazpena. Edozein puntutan ukitzailearen koefiziente angeluarra edo malda puntu horretan y'_x deribatuaren balioa da, hau da,

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}.$$

Kasu horretan

$$x'_t = a(1 - \cos t), \qquad y'_t = a\sin t,$$

eta beraz

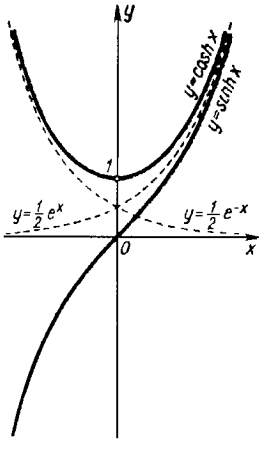
$$y'_x = \frac{a\sin t}{a(1-\cos t)} = \frac{2\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}}{2\sin^2\frac{t}{2}} = \cot\frac{t}{2} = \tan\left(\frac{\pi}{2} - \frac{t}{2}\right).$$

Honelatan ba, edozein puntutan, zikloidearen ukitzailearen koefiziente angeluarra $\tan\left(\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{t}{2}\right)$ da, t puntuari dagokion parametroaren balioa izanik. Horrek, ukitzaileak eta

Ox ardatzak osotzen duten α angelua $\frac{\pi}{2}-\frac{t}{2}$ dela esan nahi du ($-\pi$ eta π-ren artean kokaturiko t-ren balioetarako)[12].

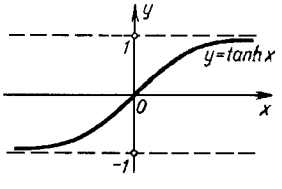
§ 19. Funtzio hiperbolikoak

Analisi matematikoaren aplikazio askotan $\frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$ eta $\frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$ funtzio esponentzialen konbinazioak agertzen dira. Konbinazio horiek funtzio berri bezala kontsideratzen dira eta honela izendatzen dira:



79. IRUDIA

$$\left.\begin{aligned} \sinh x &= \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \\ \cosh x &= \frac{e^x + e^{-x}}{2}. \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$



80. IRUDIA

---

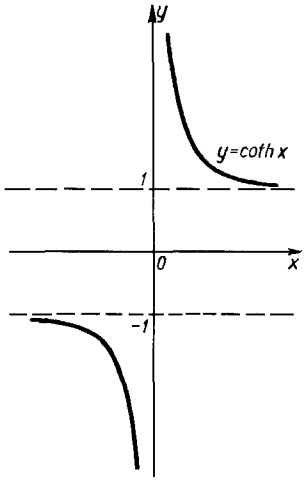
12) Izan ere, koefiziente angeluarra $\tan\alpha$ da, α ukitzailearen Ox ardatzarekiko inklinazioaren angelua izanik. Hortik

$$\tan\alpha = \tan\left(\frac{\pi}{2}-\frac{t}{2}\right)$$

dugu eta $\alpha = \frac{\pi}{2}-\frac{t}{2}$, $\frac{\pi}{2}-\frac{t}{2}$ balioa $[0,\pi]$ tartean kokatzen duten t-ren balioetarako.

(1) funtzioetariko lehenengoari *sinu hiperboliko* deritzo eta bigarrenari, *kosinu hiperboliko*. Funtzio horiekin beste bi funtzio defini ditzakegu: $\tanh x = \dfrac{\sinh x}{\cosh x}$ eta $\coth x = \dfrac{\cosh x}{\sinh x}$; hau da,

$$\left.\begin{aligned} \tanh x &= \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}, \text{ tangente hiperbolikoa} \\ \coth x &= \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}, \text{ kotangente hiperbolikoa} \end{aligned}\right\} \qquad (1')$$



81. IRUDIA

Bistakoa denez, $\sinh x$, $\cosh x$ eta $\tanh x$ funtzioak x-ren balio guztietarako definituta daude. $\coth x$ funtzioak ere, $x=0$ puntuan izan ezik.

Funtzio hiperbolikoen grafikoak 79., 80. eta 81. irudietan adierazita daude.

$\sinh x$ eta $\cosh x$ funtzioen definiziotik [(1) formulak] dagozkien funtzio trigonometrikoen artean ezagunak diren antzeko erlazioak ondorioztatzen dira:

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1, \qquad (2)$$

$$\cosh(a+b) = \cosh a \ \cosh b + \sinh a \ \sinh b, \qquad (3)$$

$$\sinh(a+b) = \sinh a \ \cosh b + \cosh a \ \sinh b. \qquad (3')$$

Izan ere,

$$\cosh^2 x - \cosh^2 x = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2 = \frac{e^{2x} + 2 + e^{-2x} - e^{2x} + 2 - e^{-2x}}{4} = 1$$

Hurrengo berdintza betetzen dela kontsideratuz

$$\cosh(a+b) = \frac{e^{a+b} + e^{-a-b}}{2},$$

ondokoa lortzen dugu:

$$\cosh a \cosh b + \sinh a \sinh b = \frac{e^a + e^{-a}}{2}\frac{e^b + e^{-b}}{2} + \frac{e^a - e^{-a}}{2}\frac{e^b - e^{-b}}{2} =$$

$$= \frac{e^{a+b} + e^{-a+b} + e^{a-b} + e^{-a-b} + e^{a+b} - e^{-a+b} - e^{a-b} + e^{-a-b}}{4} =$$

$$= \frac{e^{a+b} + e^{-a-b}}{2} = \cosh(a+b).$$

Modu berean (3') formula frogatzen da.

"Funtzio hiperboliko" izenaren arrazoia ondokoa da: $\sinh t$ eta $\cosh t$ funtzioek

$$x^2 - y^2 = 1$$

hiperbolaren ekuazio parametrikoetan, $\sin t$ eta $\cos t$ funtzio trigonometrikoek

$$x^2 + y^2 = 1$$

zirkunferentziaren ekuazio parametrikoetan jokatzen duten papera betetzen dute.

Izan ere, t parametroa

$$x = \cos t, \qquad y = \sin t,$$

ekuazioetan ezabatuz

$$x^2 + y^2 = \cos^2 t + \sin^2 t$$

edo (zirkunferentziaren ekuazioa)

$$x^2 + y^2 = 1$$

lortuko dugu.

Modu berean,

$$x = \cosh t,$$

$$y = \sinh t$$

hiperbolaren ekuazio parametrikoak dira.

Izan ere, ekuazio horietako atalak berretuz eta lehengoari bigarrena kenduz,

$$x^2 - y^2 = \cosh^2 t - \sinh^2 t$$

lortuko dugu.

(2) formularen arabera, bigarren ataleko adierazpena unitatea denez,

$$x^2 - y^2 = 1$$

dugu eta hori hiperbolaren ekuazioa da.

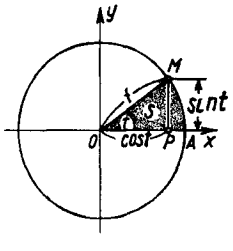
Azter dezagun $x^2 + y^2 = 1$ ekuazioaren bidez definituriko zirkunferentzia (82. irudia). $x = \cos t$ eta $y = sin t$ ekuazioetan t parametroa, zenbakiz, AOM angelu zentralaren baliokidea, edo AOM sektorearen S azaleraren bikoitza, $t = 2S$ bait da.

Aipa dezagun, frogapenik gabe,

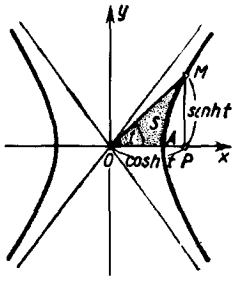
$$x = \cosh t$$

$$y = \sinh t,$$

hiperbolaren ekuazio parametrikoetan t parametroa, zenbakiz, AOM "sektore hiperbolikoaren" (83. irudia) azaleraren bikoitza dela baita ere.



82. IRUDIA



83. IRUDIA

Funtzio hiperbolikoen deribatuak hurrengo formulen bidez daude emanik:

$$\left.\begin{array}{ll} (\sinh x)' = \cosh x, & (\tanh x)' = \dfrac{1}{\cosh^2 x}, \\ (\cosh x)' = \sinh x, & (\coth x)' = \dfrac{1}{\sinh^2 x}, \end{array}\right\} \qquad \text{(XXII)}$$

formula horiek funtzio hiperbolikoen definizioetatik ateratzen dira zuzenean; adibidez, $\sinh x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ funtziorako,

$$(\sinh x)' = \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)' = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh x$$

dugu.

§ 20. Diferentziala

Demagun $y = f(x)$ funtzioa $[a,b]$ tartean deribagarria dela. Tarte horretako x puntu batean, funtzio horren deribatua hurrengo formularen bidez lortzen da:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x).$$

$\Delta x \to 0$ denean, $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ arrazoiak $f'(x)$ zenbaki baterantz jotzen du eta, beraz, $f'(x)$ deribatuarekiko diferentzia infinituki txikia den magnitudea da:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \alpha,$$

$\alpha \to 0$ delarik $\Delta x \to 0$ denean.

Azken berdintzako gai guztiak Δx gehikuntzaz biderkatuz

$$\Delta y = f'(x)\Delta x + \alpha\Delta x \tag{1}$$

lortzen dugu.

Oro har, $f'(x) \neq 0$ denez gero, x konstantea denean eta $\Delta x \to 0$, $f'(x)\Delta x$ biderkadura Δx-rekiko lehen ordenako magnitude infinituki txikia da. $\alpha\Delta x$ beti da Δx-rekiko ordena handiagoko infinitesimoa,

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\alpha\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \alpha = 0$$

bait da.

Honelatan ba, funtzioaren Δy gehikuntza bi batugaiz osoturik dago eta horietariko lehenengoari $[f'(x) \neq 0$ denean$]$ gehikuntzaren *zati nagusi* deritzo, Δx-rekiko lineala delarik. $f'(x)\Delta x$ biderkadurari funtzioaren *diferentzial* deritzo eta dy edota $df(x)$ ikurren bidez adierazten da.

Beraz, $y = f(x)$ funtzioak, x puntu batean $f'(x)$ deribatua badu, horren eta argumentuaren Δx gehikuntzaren arteko biderkadurari funtzioaren diferentzial deritzo eta dy ikurraren bidez adierazten da, hau da,

$$dy = f'(x)\Delta x. \qquad (2)$$

Aurki dezagun $y = x$ funtzioaren diferentziala. Kasu horretan,

$$y' = x' = 1,$$

eta, beraz, $dy = dx = \Delta x$, edo $dx = \Delta x$. Honelatan ba, x aldagai independentearen diferentziala bere Δx gehikuntza da. $dx = \Delta x$ aldagai independente baten diferentzialaren definizio bezala har liteke eta, kasu horretan, azterturiko adibideak funtzioaren diferentzialaren definizioa ez duela kontraesaten frogatuko luke. Nolanahi ere (2) formula honela idatz daiteke:

$$dy = f'(x)dx.$$

Adierazpen horretatik

$$f'(x) = \frac{dy}{dx}$$

ateratzen da.

Beraz, $f'(x)$ deribatua funtzioaren diferentzialaren aldagai independentearenarekiko arrazoia bezala kontsidera daiteke.

(2) formula kontuan izanik, idatz dezagun (1) formula modu honetan:

$$\Delta y = dy + \alpha\Delta x. \qquad (3)$$

Honelatan ba, funtzioaren gehikuntza eta beraren diferentzialaren arteko diferentzia Δx-rekiko ordena handiagoko infinitesimoa da. $f'(x) \neq 0$ bada, $\alpha\Delta x$ dy-rekiko ere ordena handiagoko infinitesimoa da eta, hortaz:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{dy} = 1 + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\alpha\Delta x}{f'(x)\Delta x} = 1 + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\alpha}{f'(x)} = 1.$$

Horrek, batzutan, posible egiten du hurrengo berdintza hurbildua erabiltzea

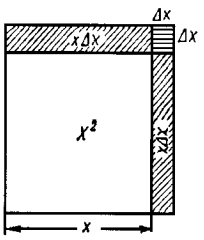
$$\Delta y \approx dy, \tag{4}$$

edo forma garatuan

$$f(x+\Delta x) - f(x) \approx f'(x)\Delta x, \tag{5}$$

kalkuluak laburtzen direlarik.

1. Adibidea. $y = x^2$ funtzioaren dy diferentziala eta Δy gehikuntza kalkulatu:



84. IRUDIA

1) x eta Δx-ren edozein baliotarako,
2) $x = 20$ eta $\Delta x = 0{,}1$ balioetarako.

Ebazpena:

1) $\Delta y = (x+\Delta x)^2 - x^2 = 2x\Delta x + \Delta x^2$,
$dy = (x^2)'\Delta x = 2x\Delta x$.

2) $x = 20$ eta $\Delta x = 0{,}1$ badira,

$$\Delta y = 2 \cdot 20 \cdot 0{,}1 + (0{,}1)^2 = 4{,}01,$$
$$dy = 2 \cdot 20 \cdot 0{,}1 \qquad = 4{,}00.$$

Δy dy-ren bidez ordezkatzerakoan eginiko errorea 0,01 da. Kasu askotan $\Delta y = 4{,}01$ balioarekiko txikia kontsideratzeagatik errore hori mespreza daiteke.

Azterturiko problema 84. irudian argitzen da.

Kalkulu hurbilduetan (5) ekuaziotik ateratzen den berdintza hurbildua ere erabiltzen da:

$$f(x+\Delta x) \approx f(x) + f'(x)\Delta x. \tag{6}$$

2. Adibidea. Demagun $f(x) = \sin x$ dela. Orduan, $f'(x) = \cos x$.

Kasu honetan (6) formula hurbilduak ondoko itxura du:

$$\sin(x+\Delta x) \approx \sin x + \cos x\,\Delta x. \tag{7}$$

Kalkula dezagun $\sin 46^\circ$ zenbakiaren balio hurbildua. $x = 45^\circ = \dfrac{\pi}{4}$ eginez

$$\Delta x = 1^\circ = \frac{\pi}{180}, \quad 46^\circ = 45^\circ + 1^\circ = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{180}$$

dugu. Lorturiko balioak (7) ekuazioan sartuz:

$$\sin 46^\circ = \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{180}\right) = \sin\frac{\pi}{4} + \left(\cos\frac{\pi}{4}\right)\frac{\pi}{180},$$

hau da,

$$\sin 46^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\pi}{180} = 0,7071 + 0,7071 \cdot 0,017 = 0,7194.$$

3. Adibidea. (7) formulan $x = 0$ eta $\Delta x = \alpha$ egiten badugu, hurrengo berdintza hurbildua lortuko dugu:

$$\sin\alpha \approx \alpha.$$

4. Adibidea. $f(x) = \tan x$ bada, (6) formularen arabera, hurrengo berdintza hurbildua lortuko dugu:

$$\tan(x + \Delta x) \approx \tan x + \frac{1}{\cos^2 x}\Delta x,$$

$x = 0$ eta $\Delta x = \alpha$ direnean,

$$\tan\alpha \approx \alpha$$

dugularik.

5. Adibidea. $f(x) = \sqrt{x}$ bada, (6) formulak

$$\sqrt{x + \Delta x} \approx \sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}}\Delta x$$

ematen digu. $x = 1$ eta $\Delta x = \alpha$ eginez, hurrengo berdintza hurbildua lortzen dugu:

$$\sqrt{1 + \alpha} \approx 1 + \frac{1}{2}\alpha.$$

Funtzio baten diferentzialaren kalkulua, azken batean, deribatuaren kalkulura laburtzen da, deribatua argumentuaren diferentzialaz biderkatuz funtzioaren diferentziala

lortzen bait da. Beraz, deribatuei dagozkien teorema eta formula gehienak diferentzialetarako ere baliagarriak dira. Adibidez:

u eta v bi funtzio deribagarriren arteko baturaren diferentziala funtzio horien diferentzialen arteko batura da:

$$d(u+v) = du + dv.$$

u eta v bi funtzio deribagarriren arteko biderkaduraren diferentziala hurrengo formularen bidez ematen da:

$$d(uv) = u\,dv + v\,du.$$

Froga dezagun azken formula hori. $y = uv$ bada

$$dy = y'dx = (uv' + vu')dx = uv'\,dx + vu'\,dx$$

dugu, baina

$$v'dx = dv, \qquad u'dx = du,$$

beraz

$$dy = udv + vdu.$$

Modu berean beste formula batzuk frogatzen dira; adibidez, zatidura baten diferentziala kalkulatzea posible egiten duena:

$y = \dfrac{u}{v}$ bada, $\quad dy = \dfrac{vdu - udv}{v^2}$ dugu.

Ikus ditzagun diferentzialaren kalkuluaren adibide batzuk.

6. Adibidea. $y = \tan^2 x$, $dy = 2\tan x \dfrac{1}{\cos^2 x}dx.$

7. Adibidea. $y = \sqrt{1+\ln x}$, $\quad dy = \dfrac{1}{2\sqrt{1+\ln x}} \cdot \dfrac{1}{x}dx.$

Aurki dezagun funtzio konposatuaren diferentzialaren adierazpena. Bira

$$y = f(u) \qquad u = \varphi(x), \qquad edo \qquad y = f[\varphi(x)].$$

Funtzio konposatuen deribazio-erregelaren arabera,

$$\frac{dy}{dx} = f_u'(u)\varphi'(x)$$

dugu. Beraz

$$dy = f'_u(u)\varphi'(x)dx,$$

baina $\varphi'(x)dx = du$, orduan

$$dy = f'(u)du.$$

Honelatan ba, funtzio konposatuaren diferentzialaren forma, u bitarteko argumentua aldagai independentetzat hartuz izango lukeen forma bera da. Beste modu batean, diferentzialaren adierazpena ez da aldagaia independentea edo beste argumentu baten funtzioa izatearen araberakoa. Diferentzialaren propietate garrantzitsu hori diferentzialaren inbariantza bezala ezagutzen da eta aurrerantzean maiz erabiliko dugu.

8. Adibidea. Biz $y = \sin\sqrt{x}$ forma. dy kalkulatu.

Ebazpena. Funtzio hori funtzio konposatutzat hartuz

$$y = \sin u, \qquad u = \sqrt{x},$$

dugu, nondik

$$dy = \cos u \frac{1}{2\sqrt{x}} dx;$$

baina $\frac{1}{2\sqrt{x}} dx = du$, denez gero

$$dy = \cos u \; du \qquad \text{edo} \qquad dy = \cos\left(\sqrt{x}\right) \; d\left(\sqrt{x}\right).$$

idatz daiteke.

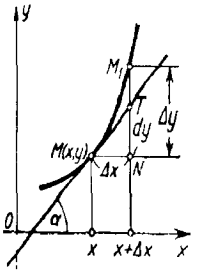
§ 21. Diferentzialaren esanahi geometrikoa

Azter dezagun

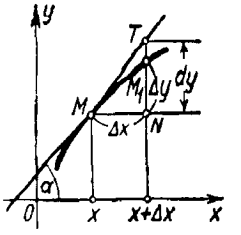
$$y = f(x)$$

funtzioa eta dagokion kurba (85. irudia).

Har dezagun $y = f(x)$ kurbako $M(x, y)$ edozein puntu bat eta marraz dezagun puntu horretan kurbaren ukitzailea. Biz α ukitzaile horrek eta Ox ardatzaren ardatzerdi positiboak osotzen duten angelua[13].



85. IRUDIA



86. IRUDIA

Eman diezaiogun aldagai independenteari Δx gehikuntza, orduan funtzioak $\Delta y = NM_1$ gehikuntza hartuko du. $x + \Delta x$ eta $y + \Delta y$ balioei $y = f(x)$ kurbako $M_1(x + \Delta x, y + \Delta y)$ puntua dagokie.

MNT triangeluan

$$NT = MN \tan\alpha$$

aurkituko dugu. Bestalde,

$$\tan\alpha = f'(x), \qquad MN = \Delta x$$

denez gero

$$NT = f'(x)\Delta x$$

---

13) $f(x)$ funtzioak x puntuan deribatu finitua duela suposatuz, $\alpha \neq \frac{\pi}{2}$ dugu.

izango dugu, baina diferentzialaren definizioaren arabera $f'(x)\Delta x = dy$. Orduan,

$$NT = dy.$$

Berdintza horrek, x eta Δx-ren emaniko balioei dagozkien $f(x)$ funtzioaren diferentziala x puntuan $y = f(x)$ kurbaren ukitzailearen ordenatuaren gehikuntza dela esan nahi du.

85. irudian

$$M_1T = \Delta y - dy$$

dela ikusten da.

Lehenago frogatutakoaren arabera $\dfrac{M_1T}{NT} \to 0$ dugu, $\Delta x \to 0$ denean.

Δy ez da beti dy baino handiagoa. Horrela, 86. iruditik ondorioztatzen den bezala,

$$\Delta y = M_1N, \qquad dy = NT, \qquad \text{hau da,} \qquad \Delta y < dy.$$

§ 22. Ordena handiagoko deribatuak

Demagun $y = f(x)$ funtzioa $[a,b]$ tartean deribagarria dela. Orokorrean $f'(x)$ deribatuaren balioak x-ren araberakoak dira, hau da, $f'(x)$ ere x-ren funtzio da. Azken funtzio hori deribatuz, $f(x)$ funtzioaren bigarren deribatu deritzona lortuko dugu.

Lehen deribatuaren deribatuari hasierako funtzioaren *bigarren ordenako deribatu* edo *bigarren deribatu* deritzo eta y'' edo $f''(x)$ ikurren bidez adieraziko dugu:

$$y'' = (y')' = f''(x).$$

Adibidez, $y = x^5$ bada,

$$y' = 5x^4; \qquad y'' = (5x^4)' = 20x^3$$

dugu.

Bigarren deribatuaren deribatuari *hirugarren ordenako deribatu* edo *hirugarren deribatu* deritzo eta y''' edo $f'''(x)$ ikurren bidez adieraziko dugu.

Orokorrean, $(n-1)$ ordenako deribatuaren (lehen ordenako) deribatuari $f(x)$ funtzioaren *n-garren ordenako deribatu* deritzo eta $y^{(n)}$ edo $f^{(n)}(x)$ ikurren bidez adierazten da:

$$y^{(n)} = \left(y^{(n-1)}\right)' = f^{(n)}(x).$$

(Deribatuaren ordena parentesi artean jartzen da berretzaileekin nahasterik ez sortzeko.)

Laugarren, bostgarren, seigarren, etab. ordenako deribatuak zifra erromatarren bidez adieraz daitezke baita ere: $y^{IV}, y^{V}, y^{VI}, \ldots$ kasu horretan deribatuaren ordena parentesirik gabe idatz daiteke. Adibidez, $y = x^5$ bada,

$$y' = 5x^4, \qquad y'' = 20x^3, \qquad y''' = 60x^2, \qquad y^{IV} = y^{(4)} = 120x,$$
$$y^{V} = y^{(5)} = 120, \qquad y^{(6)} = y^{(7)} = \ldots = 0$$

dugu.

1. Adibidea. Biz $y = e^{kx}$ funtzioa (k=ktea.) n-garren deribatuaren adierazpen orokorra aurkitu.

Ebazpena. $y' = ke^{kx}, y'' = k^2e^{kx}, \ldots, y^{(n)} = k^n e^{kx}$.

2. Adibidea. Biz $y = \sin x$ funtzioa. $y^{(n)}$ aurkitu.

Ebazpena.

$$y' = \cos\ x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right),$$
$$y'' = -\sin x = \sin\left(x + 2\frac{\pi}{2}\right),$$
$$y''' = -\cos x = \sin\left(x + 3\frac{\pi}{2}\right),$$
$$y^{IV} = \sin x = \sin\left(x + 4\frac{\pi}{2}\right),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$y^{(n)} = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$$

Modu berean, beste funtzio elemental batzuen edozein ordenatako deribatuak lortzen dira.

Irakurleak erraz lor ditzake, ariketa praktiko bezala, hurrengo funtzioen n-garren ordenako deribatuen formulak: $y = x^k$, $y = \cos x$, $y = \ln x$.

§ 7. ataleko 2. eta 3. teoremetan aipaturiko erregelak, edozein deribazio--ordenatarako orokor daitezke.

Bereziki, hurrengo formulak aurkituko ditugu:

$$(u+v)^{(n)} = u^{(n)} + v^{(n)}, \qquad (Cu)^{(n)} = Cu^{(n)}.$$

Froga dezagun orain bi funtzioen $u(x)\,v(x)$ biderkaduraren n-garren ordenako deribatua kalkulatzeko formula (Leibniz-ena delakoa). Formula hori lortzeko, lehendabizi ondoz ondoko zenbait deribatu aurkituko dugu eta ondoren edozein ordenatako deribatuaren kalkulurako aplikagarria den lege orokorra frogatuko dugu:

$$\begin{aligned}
&y = uv,\\
&y' = u'v + uv',\\
&y'' = u''v + u'v' + u'v' + uv'' = u''v + 2u'v' + uv'',\\
&y''' = u'''v + u''v' + 2u''v' + 2u'v'' + u'v'' + uv''' = u'''v + 3u''v' + 3u'v'' + uv''',\\
&y^{IV} = u^{IV}v + 4u'''v' + 6u''v'' + 4u'v''' + uv^{IV}.
\end{aligned}$$

Ikusten denez, deribatuak lortzeko legea edozein ordenatako deribatuetarako baliagarria da eta honelakoa da:

Newton-en binomioaren formularen bidez $(u+v)^n$ adierazpena garatzen da eta lorturiko seriean u eta v-ren berretzaileak dagozkien deribatuen indizeen bidez ordezkatzen dira; horretaz gain, garapenaren muturretan azaltzen diren zero berretzaileak ($u^\circ = v^\circ = 1$) funtzioen bidez ordezkatzen dira (hau da, «zero ordenako deribatuen» bidez):

$$y^{(n)} = (uv)^{(n)} = u^{(n)}v + nu^{(n-1)}v' + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}u^{(n-2)}v'' + \ldots + uv^{(n)}.$$

Hots, *Leibniz-en formula* lortu dugu.

Formula horren frogapen zorrotza indukzio matematikoaren metodoan oinarriturik dago (hau da, n-garren ordenako formula egiazkoa izanik, $n+1$ ordenakoa egiazkoa dela frogatuz).

3. Adibidea. $y = e^{ax}x^2$ funtzioa emanik, $y^{(n)}$ deribatua aurkitu.

Ebazpena.

$$u = e^{ax}, \qquad v = x^2,$$
$$u' = ae^{ax}, \qquad v' = 2x,$$
$$u'' = a^2e^{ax}, \qquad v'' = 2,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$u^n = a^ne^{ax}, \qquad v''' = v^{IV} = \ldots = 0,$$
$$y^{(n)} = a^ne^{ax}x^2 + na^{n-1}e^{ax}\cdot 2x + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}a^{n-2}e^{ax}\cdot 2,$$

hau da,

$$y^{(n)} = e^{ax}\left[a^nx^2 + 2na^{n-1}x + n(n-1)a^{n-2}\right].$$

§ 23. Ordena handiagoko diferentzialak

Biz $y = f(x)$ funtzioa, aldagai independentea x izanik. Funtzio horren diferentziala,

$$dy = f'(x)dx,$$

x-ren funtzioa da. x-rekiko menpekotasuna duen faktore bakarra lehenengoa, $f'(x)$, da bigarrena, dx, x aldagai independentearen gehikuntza bait da, haren balioaren araberakoa ez delarik. dy x-ren funtzioa denez bere diferentziala kalkula daiteke.

Funtzio baten diferentzialaren diferentzialari *bigarren diferentzial* edo *bigarren ordenako diferentzial* deritzo eta d^2y ikurraren bidez adierazten da:

$$d(dy) = d^2y.$$

Aurki dezagun bigarren diferentzialaren adierazpena. Diferentzialaren definizio orokorrari esker,

$$d^2y = \left[f'(x)dx\right]'dx$$

dugu.

dx diferentziala x-rekiko independentea denez gero, deribatzerakoan dx deribazio--ikurretik kanpo irteten da. Honelatan,

$$d^2y = f''(x)(dx)^2$$

izango dugu.

Diferentzialaren potentzian ez da parentesirik idazten. Honela, $(dx)^2$ gaiaren ordez dx^2 idazten da, adierazpenaren karratua dela gainulertuz; $(dx)^3$, dx^3 idatziko dugu eta horrela ondoz ondo.

Funtzio baten bigarren diferentzialaren diferentzialari *hirugarren diferentzial* edo *hirugarren ordenako diferentzial* deritzo.

$$d^3y = d(d^2y) = \left[f''(x)dx^2\right]' dx = f'''(x)dx^3.$$

Orokorrean, $(n-1)$ ordenako diferentzialaren lehen direntzialari *n-garren diferentzial* edo *n-garren ordenako diferentzial* deritzo.

$$d^ny = d(d^{n-1}y) = \left[f^{(n-1)}(x)dx^{n-1}\right]' dx,$$

$$d^ny = f^{(n)}(x)dx^n. \qquad (1)$$

Ordena handiagoko diferentzialak erabiliz, edozein ordenatako deribatua dagokion ordenako diferentzialen arteko zatidura bezala adieraz daiteke:

$$f'(x) = \frac{dy}{dx}, \qquad f''(x) = \frac{d^2y}{dx^2}, \ldots, f^{(n)}(x) = \frac{d^ny}{dx^n}. \qquad (2)$$

(1) eta (2) berdintzak ($n > 1$ denean) x aldagai independentea den kasurako bakarrik direla baliagarriak[14] aipatzea komeni da.

§ 24. Funtzio inplizituen eta parametrikoki definituriko funtzioen ordena handiagoko deribatuak

1. Ikus dezagun adibide baten bidez funtzio inplizituen ordena handiagoko deribatuak lortzeko metodoa.

Demagun x-ren y funtzio inplizitua hurrengo berdintzaren bidez emanik datorrela:

---

14) Ordea, (2) berdintza x aldagai independentea ez den kasuan ere idatziko dugu, baina orduan, $\frac{d^2y}{dx^2}, \ldots, \frac{d^ny}{dx^n}$ adierazpenak dagozkien deribatuen adierazpen sinboliko bezala kontsideratu behar dira.

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0. \qquad (1)$$

Berdintza horretako atal biak x-rekiko deribatuz, eta y x-ren funtzioa dela kontutan izanik,

$$\frac{2x}{a^2}+\frac{2y}{b^2}\frac{dy}{dx}=0$$

dugu, nondik

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{b^2x}{a^2y} \qquad (2)$$

lortzen dugun.

Deriba dezagun berriz ere azken berdintza x-rekiko (y, x-ren funtzioa dela kontutan izanik):

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{y-x\dfrac{dy}{dx}}{y^2}.$$

Hor $\dfrac{dy}{dx}$ deribatua (2) berdintzatik lorturiko bere adierazpenaz ordezkatuz,

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{y+x\dfrac{b^2}{a^2}\dfrac{x}{y}}{y^2}$$

dugu eta sinplifikatuz,

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{b^2\left(a^2y^2+b^2x^2\right)}{a^4y^3}.$$

(1) ekuaziotik

$$a^2y^2+b^2x^2=a^2b^2$$

ondorioztatzen da, beraz, bigarren deribatua honela adieraz daiteke

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{b^4}{a^2y^3}.$$

Azken berdintza x-rekiko deribatuz,

$$\frac{d^3y}{dx^3}$$

aurkituko dugu eta horrela ondoz ondo.

2. Ikus dezagun orain parametrikoki adierazitako funtzioen ordena handiagoko deribatuak aurkitzeko modua.

Suposa dezagun x-ren funtzioa den y

$$\left.\begin{aligned} x &= \varphi(t), \\ y &= \psi(t), \end{aligned}\right\} \quad t_o \le t \le T, \tag{3}$$

ekuazioen bidez parametrikoki emanik dagocla.

Demagun $x = \varphi(t)$ funtzioak $[t_o, T]$ tartean bere $t = \Phi(x)$ alderantzizkoa duela.

§ 18. atalean frogatutakoaren arabera, kasu horretan, $\frac{dy}{dx}$ deribatua

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} \tag{4}$$

formularen bidez emanik dago.

Bigarren deribatua $\frac{d^2y}{dx^2}$ kalkulatzeko, deriba dezagun (4) berdintza x-rekiko, t aldagaia x-ren funtzioa dela kontuan izanik:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}\right)\frac{dt}{dx}, \tag{5}$$

baina

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}\right)=\frac{\frac{dx}{dt}\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dt}\right)-\frac{dy}{dt}\frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right)}{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2}=\frac{\frac{dx}{dt}\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}\frac{d^2x}{dt^2}}{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2},$$

$$\frac{dt}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dt}}.$$

Azken adierazpenak (5) formulan sartuz,

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\frac{dx}{dt}\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}\frac{d^2x}{dt^2}}{\left(\frac{dx}{dt}\right)^3}$$

lortuko dugu.

Formula hori era trinkoagoan honela idatz daiteke:

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\varphi'(t)\psi''(t)-\psi'(t)\varphi''(t)}{[\varphi'(t)]^3}.$$

Modu berean,

$$\frac{d^3y}{dx^3},\quad \frac{d^4y}{dx^4},\quad \text{etab.}$$

deribatuak aurki daitezke.

Adibidea. Biz

$$x=a\cos t,\quad y=b\sin t,$$

ekuazio parametrikoak dituen x-ren y funtzioa, aurkitu $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$ deribatuak.

Ebazpena.

$$\frac{dx}{dt} = -a\sin t; \quad \frac{d^2x}{dt^2} = -a\cos t;$$

$$\frac{dy}{dt} = b\cos t; \quad \frac{d^2y}{dt^2} = -b\sin t;$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b\cos t}{-a\sin t} = -\frac{b}{a}\cot t;$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{(-a\sin t)(-b\sin t) - (b\cos t)(-a\cos t)}{(-a\sin t)^3} = -\frac{b}{a^2}\frac{1}{\sin^3 t}.$$

§ 25. Bigarren deribatuaren esanahi mekanikoa

Translazio-higidura baten bidez animaturiko gorputz batek ibilitako s espazioa

$$s = f(t) \tag{1}$$

formularen bidez adierazten da t denboraren funtzio bezala.

Jakina denez (III. gaiko § 1. atala) emaniko aldiune batean gorputzaren v abiadura ibilitako espazioaren denborarekiko lehen deribatua da:

$$v = \frac{ds}{dt}. \tag{2}$$

Suposa dezagun emaniko t aldiune batean gorputzaren abiadura v dela. Higidura uniformea ez bada, t aldiunetik hasitako Δt denbora-tartean abiadura aldatu egingo da, Δv gehikuntza hartuz.

Abiaduraren Δv gehikuntzaren denborarenarekiko arrazoiari Δt denbora-tartean *batezbesteko azelerazio* deritzo:

$$a_m = \frac{\Delta v}{\Delta t}.$$

Denboraren gehikuntzak zerora jotzen duenean, abiaduraren gehikuntzaren eta denborarenaren arteko arrazoiari *aldiuneko azelerazio* deritzo:

$$a = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t},$$

hau da, (emaniko aldiuneko) azelerazioa abiaduraren denborarekiko deribatua da:

$$a = \frac{dv}{dt},$$

baina $v = \dfrac{ds}{dt}$ denez,

$$a = \frac{d}{dt}\left(\frac{ds}{dt}\right) = \frac{d^2 s}{dt^2}$$

dugu, hau da, higidura zuzenaren azelerazioa ibilitako espazioaren denborarekiko bigarren deribatua da. (1) berdintzatik:

$$a = f''(t)$$

ondorioztatzen da.

Adibidea. Espazioan grabitatearen eraginez askatasunez erortzen den gorputz baten v abiadura eta a azelerazioa aurkitu, ibilitako s espazioa hurrengo formularen bidez t denboraren funtzio bezala emanik badator:

$$s = \frac{1}{2} g t^2 + v_0 t + s_0, \tag{3}$$

$g = 9,8 m / s$ grabitatearen azelerazioa eta $s_0 = s_{t=0}$ $t = 0$ deneko s-ren balioa direlarik.

Ebazpena. Deribatuz

$$v = \frac{ds}{dt} = gt + v_0 \tag{4}$$

aurkitzen dugu.

Formula horretatik $v_0 = (v)_{t=0}$ ondorioztatzen da.

Berriz deribatuz

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2} = g$$

aurkitzen dugu.

Elkarrekikoa, higidura baten azelerazioa konstantea mantentzen bada g balioaz, abiadura (4) formularen bidez adieraziko da eta ibilitako espazioa (3)-ren bidez, $(v)_{t=0} = v_o$ eta $(s)_{t=0} = s_0$ badira.

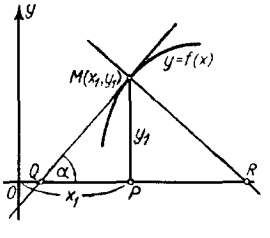
§ 26. Ukitzailearen eta normalaren ekuazioak. Azpiukitzailearen eta azpinormalaren luzerak

Biz

$$y = f(x)$$

ekuazioa duen kurba.

Har dezagun kurba horretako $M(x_1, y_1)$ puntu bat (87. irudia) eta idatz dezagun kurbaren M puntuko ukitzailearen ekuazioa, ukitzailea ordenatu-ardatzarekiko paraleloa ez dela suposatuz.



87. IRUDIA

k koefiziente angeluarra duen eta M-tik pasatzen den zuzenaren ekuazioa

$$y - y_1 = k(x - x_1)$$

da. Ukitzailearen kasuan (§ 3. atala)

$$k = f'(x_1)$$

Beraz, ukitzailearen ekuazioa

$$y - y_1 = f'(x_1)(x - x_1)$$

izango da.

Emaniko puntuan kurbaren ukitzaileaz gain, normala aztertzeko beharra maiz sortzen da.

Definizioa. Emaniko puntuan kurbaren *normala* puntu horretatik pasatuz ukitzailearekiko elkartzuta den zuzena da.

Normalaren definiziotik k_n bere koefiziente angeluarra ukitzailearen k_u koefiziente angeluarrarekin honela erlazionaturik dagoela ondorioztatzen da:

$$k_n = -\frac{1}{k_u},$$

hau da,

$$k_n = -\frac{1}{f'(x_1)}.$$

Beraz, $y = f(x)$ kurbaren $M(x_1, y_1)$ puntuan normalaren ekuazioa

$$y - y_1 = \frac{-1}{f'(x_1)}(x - x_1)$$

da.

1. Adibidea. $y = x^3$ kurbaren ukitzailearen eta normalaren ekuazioak idatzi, $M(1,1)$ puntuan.

Ebazpena. $y' = 3x^2$ denez gero, ukitzailearen koefiziente angeluarra $(y')_{x=1} = 3$ da. Beraz, ukitzailearen ekuazioa

$$y - 1 = 3(x - 1) \qquad \text{edo} \qquad y = 3x - 2.$$

izango da.

Bestalde, normalaren ekuazioa

$$y-1=-\frac{1}{3}(x-1),$$

$$y=-\frac{1}{3}x+\frac{4}{3}$$

izango da (88. irudia).

Ukitze-puntuaren eta Ox ardatzaren artean kokaturiko ukitzailearen QM zuzenkiaren T luzerari (87. irudia) *ukitzailearen luzera* deritzo. Aipaturiko zuzenkiaren Ox ardatzaren gaineko projekzioari, hau da, QP zuzenkiari, *azpiukitzaile* deritzo eta bere luzera S_T ikurraz adierazten da. MR zuzenkiaren N luzerari *normalaren luzera* deritzo eta Ox ardatzaren gaineko RP projekzioari *azpinormal* deritzo eta bere luzera S_N ikurraz adierazten da.

Aurki ditzagun $y=f(x)$ kurba eta $M(x_1,y_1)$ punturako T, S_T, N eta S_N balioak.

87. irudian ikusten denez

$$QP=y_1\cot\alpha=\frac{y_1}{\tan\alpha}=\frac{y_1}{y'_1},$$

beraz,

$$S_T=\left|\frac{y_1}{y'_1}\right|,$$

$$T=\sqrt{y_1^2+\frac{y_1^2}{y'^2_1}}=\left|\frac{y_1}{y'_1}\sqrt{y'^2_1+1}\right|.$$

Bestalde, irudi horrek azaltzen duenez gero

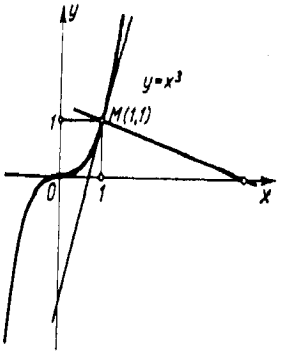
$$PR=y_1\tan\alpha=y_1\cdot y'_1,$$

eta orduan

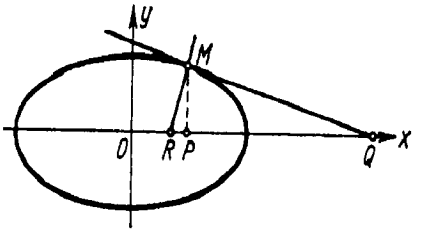
$$S_N=|y_1y'_1|,$$

$$N=\sqrt{y_1^2+(y_1y'_1)^2}=\left|y_1\sqrt{1+y'^2_1}\right|.$$

Aipaturiko formulak $y_1 > 0$ eta $y_1' > 0$ direla suposatuz lortuak izan dira. Ordea, beste edozein kasutarako ere baliagarriak dira.



88. IRUDIA



89. IRUDIA

2. Adibidea. Hurrengo elipsearen ukitzailearen eta normalaren ekuazioak eta ukitzailearen, azpiukitzailearen, normalaren eta azpinormalaren luzerak aurkitu $t = \dfrac{\pi}{4}$ deneko $M(x_1, y_1)$ puntuan (89. irudia):

$$x = a\cos t, \qquad y = b\sin t \tag{1}$$

Ebazpena. (1) ekuazioetatik

$$\frac{dx}{dt} = -a\sin t; \quad \frac{dy}{dt} = b\cos t; \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{b}{a}\cot t; \quad \left(\frac{dy}{dx}\right)_{t=\frac{\pi}{4}} = -\frac{b}{a}.$$

ondorioztatzen da. Aurki ditzagun orain ukitze-puntuaren koordenatuak:

$$x_1 = (x)_{t=\frac{\pi}{4}} = \frac{a}{\sqrt{2}}, \quad y_1 = (y)_{t=\frac{\pi}{4}} = \frac{b}{\sqrt{2}}.$$

Ukitzailearen ekuazioa

$$y - \frac{b}{\sqrt{2}} = -\frac{b}{a}\left(x - \frac{a}{\sqrt{2}}\right)$$

da, hau da,

$$bx + ay - ab\sqrt{2} = 0.$$

Normalaren ekuazioa

$$y - \frac{b}{\sqrt{2}} = \frac{a}{b}\left(x - \frac{a}{\sqrt{2}}\right)$$

da, hau da,

$$(ax - by)\sqrt{2} - a^2 + b^2 = 0.$$

Azpiukitzailearen eta azpinormalaren luzerak

$$S_T = \left|\frac{\frac{b}{\sqrt{2}}}{-\frac{b}{a}}\right| = \frac{a}{\sqrt{2}};$$

$$S_N = \left|\frac{b}{\sqrt{2}}\left(-\frac{b}{a}\right)\right| = \frac{b^2}{a\sqrt{2}}$$

dira. Ukitzailearen eta normalaren luzerak

$$T = \left|\frac{\frac{b}{\sqrt{2}}}{-\frac{b}{a}}\sqrt{\left(-\frac{b}{a}\right)^2 + 1}\right| = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{a^2 + b^2};$$

$$N = \left|\frac{b}{\sqrt{2}}\sqrt{1 + \left(-\frac{b}{a}\right)^2}\right| = \frac{b}{a\sqrt{2}}\sqrt{a^2 + b^2}$$

dira.

§ 27. Angelu polarrarekiko erradio bektorearen deribatuaren esanahi geometrikoa

Suposa dezagun koordenatu polarretan

$$\rho = f(\theta) \tag{1}$$

ekuazioa duen kurba dugula.

Idatz ditzagun koordenatu polarrak cartesiar bihurtzeko formulak:

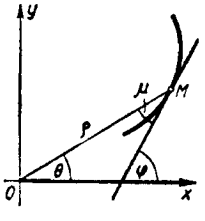
$$x = \rho \cos\theta, \qquad y = \rho \sin\theta$$

Ekuazio horietan ρ aldagaia (1) ekuazioko θ-ren funtzio bezalako adierazpenaren bidez ordezkatuz

$$x = f(\theta) \cos\theta, \quad y = f(\theta) \sin\theta \tag{2}$$

izango dugu.

(2) ekuazioak emaniko kurbaren adierazpen parametrikoa dira, parametroa θ angelu polarra delarik (90. irudia).



90. IRUDIA

Kurbaren $M(\rho,\theta)$ puntuan ukitzaileak eta abzisa-ardatzaren ardatzerdi positiboak osotzen duten angelua φ izendatuz

$$\tan\varphi = \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}}$$

izango dugu, hau da,

$$\tan\varphi = \frac{\dfrac{d\rho}{d\theta}\sin\theta + \rho\cos\theta}{\dfrac{d\rho}{d\theta}\cos\theta - \rho\sin\theta}. \tag{3}$$

Biz μ erradio bektoreak eta ukitzaileak osotzen duten angelua. Bistakoa denez, $\mu = \varphi - \theta$ eta

$$\tan\mu = \frac{\tan\varphi - \tan\theta}{1 + \tan\varphi\tan\theta}.$$

Ekuazio horretan tan φ-ren balioa bere (3) adierazpenaz ordezkatuz eta transformazio egokiak eginez

$$\tan\mu = \frac{(\rho'\sin\theta + \rho\cos\theta)\cos\theta - (\rho'\cos\theta - \rho\sin\theta)\sin\theta}{(\rho'\cos\theta - \rho\sin\theta)\cos\theta + (\rho'\sin\theta + \rho\cos\theta)\sin\theta} = \frac{\rho}{\rho'}$$

lortzen dugu, edo,

$$\rho'_\theta = \rho \ \cot\mu \tag{4}$$

Beraz, angelu polarrarekiko erradio bektorearen deribatua erradioaren luzeraren eta erradio bektoreak eta emaniko puntuan kurbaren ukitzaileak osotzen duten angeluaren kotangentearen biderkadura da.

Adibidea. Hurrengo kiribil logaritmikoaren ukitzaileak eta erradio bektoreak angelu konstante bat osotzen dutela frogatuz:

$$\rho = e^{a\theta}.$$

Ebazpena. Kiribilaren ekuaziotik

$$\rho' = ae^{a\theta}$$

ondorioztatzen dugu. (4) formulari esker,

$$\cot\mu = \frac{\rho'}{\rho} = a, \quad \text{hau da,} \quad \mu = \operatorname{arc\,cot} a = \text{ktea.}$$

lortzen dugu.

Ariketak

Deribatuaren definizioa erabiliz, hurrengo funtzioen deribatuak aurkitu:

1. $y = x^3$. Emaitza: $3x^2$.
2. $y = \frac{1}{x}$. Em.: $-\frac{1}{x^2}$.
3. $y = \sqrt{x}$. Em.: $\frac{1}{2\sqrt{x}}$.
4. $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$. Em.: $\frac{-1}{2x\sqrt{x}}$.
5. $y = \sin^2 x$. Em.: $2\sin x \cos x$.
6. $y = 2x^2 - x$. Em.: $4x - 1$.

Hurrengo kurben zuzen ukitzaileen inklinazio-angeluen tangenteak aurkitu:

7. $y = x^3$. a) $x = 1$ denean. Em.: 3. b) $x = -1$ denean. Em.: 3. Grafikoa eraiki.

8. $y = \frac{1}{x}$. a) $x = \frac{1}{2}$ denean. Em.: -4. b) $x = 1$ denean. Em.: -1. Grafikoa eraiki.

9. $y = \sqrt{x}$, $x = 2$ denean. Em.: $\frac{1}{2\sqrt{2}}$.

Hurrengo funtzioen deribatuak aurkitu:

10. $y = x^4 + 3x^2 - 6$. Em.: $y' = 4x^3 + 6x$.

11. $y = 6x^3 - x^2$. Em.: $y' = 18x^2 - 2x$.

12. $y = \frac{x^5}{a+b} - \frac{x^2}{a-b} - x$. Em.: $y' = \frac{5x^4}{a+b} - \frac{2x}{a-b} - 1$.

13. $y = \frac{x^3 - x^2 + 1}{5}$. Em.: $y' = \frac{3x^2 - 2x}{5}$.

14. $y = 2ax^3 - \frac{x^2}{b} + c$. Em.: $y' = 6ax^2 - \frac{2x}{b}$.

15. $y = 6x^{\frac{7}{2}} + 4x^{\frac{5}{2}} + 2x$. Em.: $y' = 21x^{\frac{5}{2}} + 10x^{\frac{3}{2}} + 2$.

16. $y=\sqrt{3x}+\sqrt[3]{x}+\dfrac{1}{x}$. Em.: $y'=\dfrac{\sqrt{3}}{2\sqrt{x}}+\dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}-\dfrac{1}{x^2}$.

17. $y=\dfrac{(x+1)^3}{x^{\frac{3}{2}}}$. Em.: $y'=\dfrac{3(x+1)^2(x-1)}{2x^{\frac{5}{2}}}$.

18. $y=\dfrac{x}{m}+\dfrac{m}{x}+\dfrac{x^2}{n^2}+\dfrac{n^2}{x^2}$. Em.: $y'=\dfrac{1}{m}-\dfrac{m}{x^2}+\dfrac{2x}{n^2}-\dfrac{2n^2}{x^3}$.

19. $y=\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt{x}+5$. Em.: $y'=\dfrac{2}{3}\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}-\dfrac{1}{\sqrt{x}}$.

20. $y=\dfrac{ax^2}{\sqrt[3]{x}}+\dfrac{b}{x\sqrt{x}}-\dfrac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}}$. Em.: $y'=\dfrac{5}{3}ax^{\frac{2}{3}}-\dfrac{3}{2}bx^{-\frac{5}{2}}+\dfrac{1}{6}x^{-\frac{7}{6}}$.

21. $y=(1+4x^3)(1+2x^2)$. Em.: $y'=4x(1+3x+10x^3)$.

22. $y=x(2x-1)(3x+2)$. Em.: $y'=2(9x^2+x-1)$.

23. $y=(2x-1)(x^2-6x+3)$. Em.: $y'=6x^2-26x+12$.

24. $y=\dfrac{2x^4}{b^2-x^2}$. Em.: $y'=\dfrac{4x^3(2b^2-x^2)}{(b^2-x^2)^2}$.

25. $y=\dfrac{a-x}{a+x}$. Em.: $y'=-\dfrac{2a}{(a+x)^2}$.

26. $f(t)=\dfrac{t^3}{1+t^2}$. Em.: $f'(t)=\dfrac{t^2(3+t^2)}{(1+t^2)^2}$.

27. $f(s)=\dfrac{(s+4)^2}{s+3}$. Em.: $f'(s)=\dfrac{(s+2)(s+4)}{(s+3)^2}$.

28. $y=\dfrac{x^3+1}{x^2-x-2}$. Em.: $y'=\dfrac{x^4-2x^3-6x^2-2x+1}{\left(x^2-x-2\right)^2}$.

29. $y=\dfrac{x^p}{x^m-a^m}$. Em.: $y'=\dfrac{x^{p-1}\left[(p-m)x^m-pa^m\right]}{\left(x^m-a^m\right)^2}$.

30. $y=\left(2x^2-3\right)^2$. Em.: $y'=8x\left(2x^2-3\right)$.

31. $y=\left(x^2+a^2\right)^5$. Em.: $y'=10x\left(x^2+a^2\right)^4$.

32. $y=\sqrt{x^2+a^2}$. Em.: $y'=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}$.

33. $y=(a+x)\sqrt{a-x}$. Em.: $y'=\dfrac{a-3x}{2\sqrt{a-x}}$.

34. $y=\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$. Em.: $y'=\dfrac{1}{(1-x)\sqrt{1-x^2}}$.

35. $y=\dfrac{2x^2-1}{x\sqrt{1+x^2}}$. Em.: $y'=\dfrac{1+4x^2}{x^2\left(1+x^2\right)^{\frac{3}{2}}}$.

36. $y=\sqrt[3]{x^2+x+1}$. Em.: $y'=\dfrac{2x+1}{3\sqrt[3]{\left(x^2+x+1\right)^2}}$.

37. $y=\left(1+\sqrt[3]{x}\right)^3$. Em.: $y'=\left(1+\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^2$.

38. $y=\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}$. Em.: $y'=\dfrac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}\left(1+\dfrac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x}}}\right)\left(1+\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\right)$.

39. $y=\sin^2 x$. Em.: $y'=\sin 2x$.

40. $y=2\sin x+\cos 3x$. Em.: $y'=2\cos x-3\sin 3x$.

41. $y = \tan(ax + b)$. Em.: $y' = \dfrac{a}{\cos^2(ax+b)}$.

42. $y = \dfrac{\sin x}{1 + \cos x}$. Em.: $y' = \dfrac{1}{1 + \cos x}$.

43. $y = \sin 2x \ \cos 3x$. Em.: $y' = 2\cos 2x \ \cos 3x - 3\sin 2x \ \sin 3x$.

44. $y = \cot^2 5x$. Em.: $y' = -10\cot 5x \ \operatorname{cosec}^2 5x$.

45. $y = t\sin t + \cos t$. Em.: $y' = t\cos t$.

46. $y = \sin^3 t \ \cos t$. Em.: $y' = \sin^2 t \ (3\cos^2 t - \sin^2 t)$.

47. $y = a\sqrt{\cos 2x}$. Em.: $y' = -\dfrac{a\sin 2x}{\sqrt{\cos 2x}}$.

48. $r = a\sin^3 \dfrac{\varphi}{3}$. Em.: $r'_\varphi = a\sin^2 \dfrac{\varphi}{3}\cos\dfrac{\varphi}{3}$.

49. $y = \dfrac{\tan\dfrac{x}{2} + \cot\dfrac{x}{2}}{x}$. Em.: $y' = -\dfrac{2x\cos x + \sin^2 x\left(\tan\dfrac{x}{2} + \cot\dfrac{x}{2}\right)}{x^2\sin^2 x}$.

50. $y = a\left(1 - \cos^2\dfrac{x}{2}\right)^2$. Em.: $y' = 2a\sin^3\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{2}$.

51. $y = \dfrac{1}{2}\tan x$. Em.: $y' = \tan x \ \sec^2 x$.

52. $y = \ln\cos x$. Em.: $y' = -\tan x$.

53. $y = \ln\tan x$. Em.: $y' = \dfrac{2}{\sin 2x}$.

54. $y = \ln\sin^2 x$. Em.: $y' = 2\cot x$.

55. $y = \dfrac{\tan x - 1}{\sec x}$. Em.: $y' = \sin x + \cos x$.

56. $y = \ln\sqrt{\dfrac{1+\sin x}{1-\sin x}}$. Em.: $y' = \dfrac{1}{\cos x}$.

57. $\ln\tan\left(\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{x}{2}\right)$. Em.: $y' = \dfrac{1}{\cos x}$.

58. $y = \sin(x+a)\cos(x+a)$. Em.: $y' = \cos 2(x+a)$.

59. $f(x) = \sin(\ln x)$. Em.: $f'(x) = \dfrac{\cos(\ln x)}{x}$.

60. $f(x) = \tan(\ln x)$. Em.: $f'(x) = \dfrac{\sec^2(\ln x)}{x}$.

61. $f(x) = \sin(\cos x)$. Em.: $f'(x) = -\sin x\ \cos(\cos x)$.

62. $r = \dfrac{1}{3}\tan^3\varphi - \tan\varphi + \varphi$. Em.: $\dfrac{dr}{d\varphi} = \tan^4\varphi$.

63. $f(x) = (x\cot x)^2$. Em.: $f'(x) = 2x\ \cot x\ (\cot x - x\operatorname{cosec}^2 x)$

64. $y = \ln(ax+b)$. Em.: $y' = \dfrac{a}{ax+b}$.

65. $y = \log_a(x^2+1)$. Em.: $y' = \dfrac{2x}{(x^2+1)\ln a}$.

66. $y = \ln\dfrac{1+x}{1-x}$. Em.: $y' = \dfrac{2}{1-x^2}$.

67. $y = \log_3\left(x^2 - \sin x\right)$. Em.: $y' = \dfrac{2x - \cos x}{\left(x^2 - \sin x\right)\ln 3}$.

68. $y = \ln\dfrac{1+x^2}{1-x^2}$. Em.: $y' = \dfrac{4x}{1-x^4}$.

69. $y = \ln\left(x^2 + x\right)$. Em.: $y' = \dfrac{2x+1}{x^2+x}$.

70. $y=\ln\left(x^3-2x+5\right)$. Em.: $y'=\dfrac{3x^2-2}{x^3-2x+5}$.

71. $y=x\ln x$. Em.: $y'=\ln x+1$.

72. $y=\ln^3 x$. Em.: $y'=\dfrac{3\ln^2 x}{x}$.

73. $y=\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$. Em.: $y'=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.

74. $y=\ln(\ln x)$. Em.: $y'=\dfrac{1}{x\ln x}$.

75. $f(x)=\ln\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$. Em.: $f'(x)=\dfrac{1}{1-x^2}$.

76. $f(x)=\ln\dfrac{\sqrt{x^2+1}-x}{\sqrt{x^2-1}+x}$. Em.: $f'(x)=-\dfrac{2}{\sqrt{1+x^2}}$.

77. $y=\sqrt{a^2+x^2}-a\ln\dfrac{a+\sqrt{a^2+x^2}}{x}$. Em.: $y'=\dfrac{\sqrt{a^2+x^2}}{x}$.

78. $y=\ln\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right)-\dfrac{\sqrt{x^2+a^2}}{x}$. Em.: $y'=\dfrac{\sqrt{x^2+a^2}}{x^2}$.

79. $y=-\dfrac{\cos x}{2\sin^2 x}+\dfrac{1}{2}\ln\tan\dfrac{x}{2}$. Em.: $y'=\dfrac{1}{\sin^3 x}$.

80. $y=\dfrac{\sin x}{2\cos^2 x}$. Em.: $y'=\dfrac{1+\sin^2 x}{2\cos^3 x}$.

81. $y=\dfrac{1}{2}\tan^2 x+\ln\cos x$. Em.: $y'=\tan^3 x$.

82. $y=e^{ax}$. Em.: $y'=ae^{ax}$.

83. $y = e^{4x+5}$. Em.: $y' = 4e^{4x+5}$.

84. $y = a^{x^2}$. Em.: $2xa^{x^2} \ln a$.

85. $y = 7^{x^2+2x}$. Em.: $y' = 2(x+1)7^{x^2+2x} \ln 7$.

86. $y = c^{a^2-x^2}$. Em.: $-2xc^{a^2-x^2} \ln c$.

87. $y = ae^{\sqrt{x}}$. Em.: $y' = \dfrac{a}{2\sqrt{x}} e^{\sqrt{x}}$.

88. $r = a^{\theta}$. Em.: $r' = a^{\theta} \ln a$.

89. $r = a^{\ln \theta}$. Em.: $\dfrac{dr}{d\theta} = \dfrac{a^{\ln \theta} \ln a}{\theta}$.

90. $y = e^x(1 - x^2)$. Em.: $y' = e^x(1 - 2x - x^2)$.

91. $y = \dfrac{e^x - 1}{e^x + 1}$. Em.: $y' = \dfrac{2e^x}{(e^x + 1)^2}$.

92. $y = \ln \dfrac{e^x}{1 + e^x}$. Em.: $\dfrac{1}{1 + e^x}$.

93. $y = \dfrac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}}\right)$. Em.: $y' = \dfrac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)$.

94. $y = e^{\sin x}$. Em.: $y' = e^{\sin x} \cos x$.

95. $y = a^{\tan nx}$. Em.: $y' = na^{\tan nx} \sec^2 nx \ \ln a$.

96. $y = e^{\cos x} \sin x$. Em.: $y' = e^{\cos x}(\cos x - \sin^2 x)$.

97. $y = e^x \ln \sin x$. Em.: $y' = e^x(\cot x + \ln \sin x)$.

98. $y = x^n e^{\sin x}$. Em.: $y' = x^{n-1} e^{\sin x}(n + x\cos x)$.

99. $y = x^x$. Em.: $y' = x^x(\ln x + 1)$.

100. $y = x^{\frac{1}{x}}$. Em.: $y' = x^{\frac{1}{x}}\left(\dfrac{1 - \ln x}{x^2}\right)$.

101. $y = x^{\ln x}$. Em.: $y' = x^{\ln x - 1} \ln x^2$.

102. $y = e^{x^x}$. Em.: $y' = e^{x^x}(1 + \ln x)x^x$.

103. $y = \left(\dfrac{x}{n}\right)^{nx}$. Em.: $y' = n\left(\dfrac{x}{n}\right)^{nx}\left(1 + \ln\dfrac{x}{n}\right)$.

104. $y = x^{\sin x}$. Em.: $y' = x^{\sin x}\left(\dfrac{\sin x}{x} + \ln x \cos x\right)$.

105. $y = (\sin x)^x$. Em.: $y' = (\sin x)^x(\ln \sin x + x\cot x)$.

106. $y = (\sin x)^{\tan x}$. Em.: $y' = (\sin x)^{\tan x}\left(1 + \sec^2 x \ln \sin x\right)$.

107. $y = \tan\dfrac{1 - e^x}{1 + e^x}$. Em.: $y' = -\dfrac{e^{2x}}{\left(1 + e^x\right)^2} \cdot \dfrac{1}{\cos^2\dfrac{1 - e^x}{1 + e^x}}$.

108. $y = \sin\sqrt{1 - 2^x}$. Em.: $y' = -\dfrac{\cos\sqrt{1 - 2^x}}{2\sqrt{1 - 2^x}} 2^x \ln 2$.

109. $y = 10^{x \tan x}$. Em.: $y' = 10^{x \tan x} \ln 10 \left(\tan x + \dfrac{x}{\cos^2 x}\right)$.

Hurrengo funtzioen deribatuak kalkulatu, lehenik bere logaritmoak hartuz:

110. $y = \sqrt[3]{\dfrac{x(x^2 + 1)}{(x - 1)^2}}$. Em.: $y' = \dfrac{1}{3}\sqrt[3]{\dfrac{x(x^2 + 1)}{(x - 1)^2}}\left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{2x}{x^2 + 1} - \dfrac{2}{x - 1}\right)$.

111. $y=\dfrac{(x+1)^3\sqrt[4]{(x-2)^3}}{\sqrt[5]{(x-3)^2}}$. Em.: $y'=\dfrac{(x+1)^3\sqrt[4]{(x-2)^3}}{\sqrt[5]{(x-3)^2}}\times$

$$\times\left(\frac{3}{x+1}+\frac{3}{4(x-2)}-\frac{2}{5(x-3)}\right).$$

112. $y=\dfrac{(x+1)^2}{(x+2)^3(x+3)^4}$. Em.: $y'=-\dfrac{(x+1)(5x^2+14x+5)}{(x+2)^4(x+3)^5}$.

113. $y=\dfrac{\sqrt[5]{(x-1)^2}}{\sqrt[4]{(x-2)^3}\sqrt[3]{(x-3)^7}}$. Em.: $y'=\dfrac{-161x^2+480x-271}{60\sqrt[5]{(x-1)^3}\sqrt[4]{(x-2)^7}\sqrt[3]{(x-3)^{10}}}$.

114. $y=\dfrac{x(1+x^2)}{\sqrt{1-x^2}}$. Em.: $y'=\dfrac{1+3x^2-2x^4}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}$.

115. $y=x^5(a+3x)^3(a-2x)^2$. Em.: $y'=5x^4(a+3x)^2(a-2x)(a^2+2ax-12x^2)$.

116. $y=\arcsin\dfrac{x}{a}$. Em.: $y'=\dfrac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$.

117. $y=(\arcsin x)^2$. Em.: $y'=\dfrac{2arc\sin x}{\sqrt{1-x^2}}$.

118. $y=\arctan(x^2+1)$. Em.: $y'=\dfrac{2x}{1+(x^2+1)^2}$.

119. $y=\arctan\dfrac{2x}{1-x^2}$. Em.: $y'=\dfrac{2}{1+x^2}$.

120. $y=\arccos(x^2)$. Em.: $y'=\dfrac{-2x}{\sqrt{1-x^4}}$.

121. $y=\dfrac{\arccos x}{x}$. Em.: $y'=\dfrac{-\left(x+\sqrt{1-x^2}\arccos x\right)}{x^2\sqrt{1-x^2}}$.

122. $y = \arcsin\frac{x+1}{\sqrt{2}}$. Em.: $y' = \frac{1}{\sqrt{1-2x-x^2}}$.

123. $y = x\sqrt{a^2 - x^2} + a^2 \arcsin\frac{x}{a}$. Em.: $y' = 2\sqrt{a^2 - x^2}$.

124. $y = \sqrt{a^2 - x^2} + a\arcsin\frac{x}{a}$. Em.: $y' = \sqrt{\frac{a-x}{a+x}}$.

125. $u = \arctan\frac{v+a}{1-av}$. Em.: $\frac{du}{dv} = \frac{1}{1+v^2}$.

126. $y = \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{x\sqrt{3}}{1-x^2}$. Em.: $y' = \frac{x^2+1}{x^4+x^2+1}$.

127. $y = x\arcsin x$. Em.: $y' = \arcsin x + \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$.

128. $f(x) = \arccos(\ln x)$. Em.: $f'(x) = -\frac{1}{x\sqrt{1-\ln^2 x}}$.

129. $f(x) = \arcsin\sqrt{\sin x}$. Em.: $f'(x) = \frac{\cos x}{2\sqrt{\sin x - \sin^2 x}}$.

130. $y = \arctan\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}$ $(0 \le x < \pi)$. Em.: $y' = \frac{1}{2}$.

131. $y = e^{\arctan x}$. Em.: $y' = \frac{e^{\arctan x}}{1+x^2}$.

132. $y = \arctan\frac{e^x - e^{-x}}{2}$. Em.: $y' = \frac{2}{e^x + e^{-x}}$.

133. $y = x^{\arcsin x}$. Em.: $y' = x^{\arcsin x}\left(\frac{\arcsin x}{x} + \frac{\ln x}{\sqrt{1-x^2}}\right)$.

134. $x = \arcsin(\sin x)$. Em.: $y' = \dfrac{\cos x}{|\cos x|} = \begin{cases} +1; & \text{1. eta 4. koadranteetan} \\ -1; & \text{2. eta 3. koadranteetan} \end{cases}$.

135. $y = \arctan \dfrac{4\sin x}{3 + 5\cos x}$. Em.: $y' = \dfrac{4}{5 + 3\cos x}$.

136. $y = \arctan \dfrac{a}{x} + \ln \sqrt{\dfrac{x-a}{x+a}}$. Em.: $y' = \dfrac{2a^3}{x^4 - a^4}$.

137. $y = \ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)^{\frac{1}{4}} - \dfrac{1}{2}\arctan x$. Em.: $y' = \dfrac{x^2}{1 - x^4}$.

138. $y = \dfrac{3x^2 - 1}{3x^3} + \ln\sqrt{1 + x^2} + \arctan x$. Em.: $y' = \dfrac{x^5 + 1}{x^6 + x^4}$.

139. $y = \dfrac{1}{3}\ln \dfrac{x+1}{\sqrt{x^2 - x + 1}} + \dfrac{1}{\sqrt{3}}\arctan \dfrac{2x - 1}{\sqrt{3}}$. Em.: $y' = \dfrac{1}{x^3 + 1}$.

140. $y = \ln \dfrac{1 + x\sqrt{2} + x^2}{1 - x\sqrt{2} + x^2} + 2\arctan \dfrac{x\sqrt{2}}{1 - x^2}$. Em.: $y' = \dfrac{4\sqrt{2}}{1 + x^4}$.

141. $y = \arccos \dfrac{x^{2n} - 1}{x^{2n} + 1}$. Em.: $y' = -\dfrac{2n|x|^n}{x\left(x^{2n} + 1\right)}$.

Funtzio inplizituen deribazioa.

Hurrengo ekuazioetan $\dfrac{dy}{dx}$ kalkulatu:

142. $y^2 = 4px$. Em.: $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2p}{y}$.

143. $x^2 + y^2 = a^2$. Em.: $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{x}{y}$.

144. $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$. Em.: $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{b^2x}{a^2y}$.

145. $y^3 - 3y + 2ax = 0$. Em.: $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2a}{3\left(1 - y^2\right)}$.

146. $x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{2}}$. Em.: $\dfrac{dy}{dx} = -\sqrt{\dfrac{y}{x}}$.

147. $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$. Em.: $\dfrac{dy}{dx} = -\sqrt[3]{\dfrac{y}{x}}$.

148. $y^2 - 2xy + b^2 = 0$. Em.: $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y}{y - x}$.

149. $x^3 + y^3 - 3axy = 0$. Em.: $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{ay - x^2}{y^2 - ax}$.

150. $y = \cos(x + y)$. Em.: $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{\sin(x + y)}{1 + \sin(x + y)}$.

151. $\cos(xy) = x$. Em.: $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1 + y\sin(xy)}{x\sin(xy)}$.

Parametrikoki emaniko hurrengo funtzioetarako $\dfrac{dy}{dx}$ aurkitu:

152. $x = a\cos t,\ \ y = b\sin t$. Em.: $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{b}{a}\cot t$.

153. $x = a(t - \sin t),\ \ y = a(1 - \cos t)$. Em.: $\dfrac{dy}{dx} = \cot\dfrac{t}{2}$.

154. $x = a\cos^3 t,\ \ y = b\sin^3 t$. Em.: $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{b}{a}\tan t$.

155. $x = \dfrac{3at}{1 + t^2},\ \ y = \dfrac{3at^2}{1 + t^2}$. Em.: $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2t}{1 - t^2}$.

156. $u = 2\ln\cot s,\ \ v = \tan s + \cot s$. $\dfrac{du}{dv} = \tan 2s$ dela frogatu.

Hurrengo kurben zuzen ukitzaileen inklinazio-angeluen tangenteak aurkitu:

157. $x = \cos t,\ y = \sin t,\ x = -\frac{1}{2},\ y = \frac{\sqrt{3}}{2}$ puntuan. Grafikoa eraiki.. Em.: $\frac{1}{\sqrt{3}}$.

158. $x = 2\cos t,\ y = \sin t,\ x = 1,\ y = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ puntuan. Grafikoa eraiki. Em.: $\frac{1}{2\sqrt{3}}$.

159. $x = a(t - \sin t),\ y = a(1 - \cos t),\ t = \frac{\pi}{2}$ denean. Grafikoa eraiki. Em.: 1.

160. $x = a\cos^3 t,\ y = \sin^3 t,\ t = \frac{\pi}{4}$ denean. Grafikoa eraiki. Em.: -1.

161. Horizontalarekin α angelua osotuz hutsetara jaurtikiriko gorputz batek, grabitatearen eraginez, hurrengo ekuazioak dituen kurba (parabola) bat deskribatzen du: $x = v_0 \cos \alpha t,\ y = v_0 \sin \alpha t - \frac{gt}{2} (g = 9{,}8\ m/s^2).\ \alpha = 60°,\ v_0 = 50 m/s$ direla jakinez, higiduraren norabidea aurkitu: 1) $t = 2s$ denean, 2) $t = 7s$ denean. Grafikoa eraiki.

Em.: 1) $\tan \varphi_1 = 0{,}948,\ \varphi_1 = 43°30'$; 2) $\tan \varphi_2 = -1{,}012,\ \varphi_2 = +134°7'$.

Hurrengo funtzioen diferentzialak aurkitu:

162. $y = (a^2 - x^2)^5$. Em.: $dy = -10x(a^2 - x^2)^4 dx$.

163. $y = \sqrt{1 + x^2}$. Em.: $dy = \frac{x\,dx}{\sqrt{1 + x^2}}$.

164. $y = \frac{1}{3}\tan^3 x + \tan x$. Em.: $dy = \sec^4 x\ dx$.

165. $y = \frac{x \ln x}{1 - x} + \ln(1 - x)$. Em.: $dy = \frac{\ln x\ dx}{(1 - x)^2}$.

Hurrengo funtzioen gehikuntzak eta diferentzialak aurkitu:

166. $y = 2x^2 - x,\ x = 1$ eta $\Delta x = 0{,}01$ direnean. Em.: $\Delta x = 0{,}0302,\ dy = 0{,}03$.

167. $y = x^3 + 2x$ emanik, Δy eta dy aurkitu $x = -1$ eta $\Delta x = 0,02$ direnean.
Em.: $\Delta y = 0,098808$, $dy = 0,1$.

168. $y = \sin x$ emanik, dy aurkitu $x = \frac{\pi}{3}$, $\Delta x = \frac{\pi}{18}$ direnean.
Em.: $dy = \frac{\pi}{36} = 0,00873$.

169. $\sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2} = 0,866025$ eta $\cos 60° = \frac{1}{2}$ direla jakinez, $\sin 60°3'$ eta $\sin 60°18'$ zenbakien balio hurbilduak aurkitu. Taulen bidez emaniko balioekin konparatu.
Em.: $\sin 60°3' \approx 0,866461$; $\sin 60°18' \approx 0,868643$.

170. $\tan 45°4'30''$ zenbakiaren balio hurbildua aurkitu. Em.: 1,00262.

171. $\log_{10} 200 = 2,30103$ dela ezagutuz, $\log_{10} 200,2$ zenbakiaren balio hurbildua aurkitu.
Em.: 2,30146.

n-garren ordenako deribatuak.

172. $y = 3x^3 - 2x^2 + 5x - 1$. y'' aurkitu. Em.: $18x - 4$.

173. $y = \sqrt[5]{x^3}$. y''' aurkitu. Em.: $\frac{42}{125} x^{-\frac{12}{5}}$.

174. $y = x^6$. $y^{(6)}$ aurkitu. Em.: 6!

175. $y = \frac{C}{x''}$. y'' aurkitu. Em.: $\frac{n(n+1)C}{x^{n+2}}$.

176. $y = \sqrt{a^2 - x^2}$. y'' aurkitu. Em.: $-\frac{a^2}{(a^2 - x^2)\sqrt{a^2 - x^2}}$.

177. $y = 2\sqrt{x}$. $y^{(4)}$ aurkitu. Em.: $-\frac{15}{8\sqrt{x^7}}$.

178. $y = ax^2 + bx + c$. y''' aurkitu. Em.: 0.

179. $f(x)=\ln(x+1)$. $f^{IV}(x)$ aurkitu. Em.: $-\dfrac{6}{(x+1)^4}$.

180. $y=\tan x$. y''' aurkitu. Em.: $6\sec^4 x-4\sec^2 x$.

181. $y=\ln\sin x$. y''' aurkitu. Em.: $2\cot x\,\mathrm{cosec}^2 x$.

182. $f(x)=\sqrt{\sec\ 2x}$. $f''(x)$ aurkitu. Em.: $f''(x)=3[f(x)]^5-f(x)$.

183. $y=\dfrac{x^3}{1-x}$. $f^{(4)}(x)$ aurkitu. Em.: $\dfrac{4!}{(1-x)^5}$.

184. $p=(q^2+a^2)\arctan\dfrac{q}{a}$. $\dfrac{d^3p}{dq^3}$ aurkitu. Em.: $\dfrac{4a^3}{(a^2+q^2)^2}$.

185. $y=\dfrac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right)$. $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ aurkitu. Em.: $\dfrac{y}{a^2}$.

186. $y=\cos ax$. $y^{(n)}$ aurkitu. Em.: $a^n\cos\left(ax+n\dfrac{\pi}{2}\right)$.

187. $y=a^x$. $y^{(n)}$ aurkitu. Em.: $(\ln a)^n a^x$.

188. $y=\ln(1+x)$. $y^{(n)}$ aurkitu. Em.: $(-1)^{n-1}\dfrac{(n-1)!}{(1+x)^n}$.

189. $y=\dfrac{1-x}{1+x}$. $y^{(n)}$ aurkitu. Em.: $2(-1)^n\dfrac{n!}{(1+x)^{n+1}}$.

190. $y=e^x x$. $y^{(n)}$ aurkitu. Em.: $e^x(x+n)$.

191. $y=x^{n-1}\ln x$. $y^{(n)}$ aurkitu. Em.: $\dfrac{(n-1)!}{x}$.

192. $y=\sin^2 x$. $y^{(n)}$ aurkitu. Em.: $-2^{n-1}\cos\left(2x+\dfrac{\pi}{2}n\right)$.

193. $y = x\sin x$. $y^{(n)}$ aurkitu. Em.: $x\sin\left(x+\frac{\pi}{2}n\right)-n\cos\left(x+\frac{\pi}{2}n\right)$.

194. $y = e^x \sin x$ bada, $y''-2y'+2y=0$ dela frogatu.

195. $y^2 = 4ax$. $\frac{d^2y}{dx^2}$ aurkitu. Em.: $-\frac{4a^2}{y^3}$.

196. $bx^2 + a^2y^2 = a^2b^2$. $\frac{d^2y}{dx^2}$ eta $\frac{d^3y}{dx^3}$ aurkitu. Em.: $-\frac{b^4}{a^2y^3}$; $\frac{3b^6x}{a^4y^5}$.

197. $x^2 + y^2 = r^2$. $\frac{d^2y}{dx^2}$ aurkitu. Em.: $-\frac{r^2}{y^3}$.

198. $y^2 - 2xy = 0$. $\frac{d^3y}{dx^2}$ aurkitu. Em.: 0.

199. $\rho = \tan(\varphi+\rho)$. $\frac{d^3\rho}{d\varphi^3}$ aurkitu. Em.: $-\frac{2(5+8\rho^2+3\rho^4)}{\rho^8}$.

200. $\sec\varphi\cdot\cos\rho = C$. $\frac{d^2\rho}{d\varphi^2}$ aurkitu. Em.: $\frac{\tan^2\rho-\tan^2\varphi}{\tan^3\rho}$.

201. $e^x + x = e^y + y$. $\frac{d^2y}{dx^2}$ aurkitu. Em.: $\frac{(1-e^{x+y})(e^x-e^y)}{(e^y+1)^3}$.

202. $y^3 + x^3 - 3axy = 0$. $\frac{d^2y}{dx^2}$ aurkitu. Em.: $-\frac{2a^3xy}{(y^2-ax)^3}$.

203. $x = a(t-\sin t)$, $y = a(1-\cos t)$. $\frac{d^2y}{dx^2}$ aurkitu. Em.: $-\frac{1}{4a\sin^4\left(\frac{t}{2}\right)}$.

204. $x = a\cos 2t$, $y = b\sin^2 t$. $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$ dela frogatu.

205. $x = a\cos t,\ y = a\ \sin t.\ \dfrac{d^3y}{dx^3}$ aurkitu. Em.: $-\dfrac{3\cos t}{a^2\sin^5 t}$.

206. $\dfrac{d^{2n}}{dx^{2n}}(\sinh x) = \sinh x;\ \dfrac{d^{2n+1}}{dx^{2n+1}}(\sinh x) = \cosh x$ direla frogatu.

Ukitzailearen eta normalaren ekuazioak.
Azpiukitzailearen eta azpinormalaren luzerak.

207. $y = x^3 - 3x^2 - x + 5$ kurbaren $M(3,2)$ puntuan ukitzailearen eta normalaren ekuazioak idatzi. Em.: ukitzailea $8x - y - 22 = 0$; normala $x + 8y - 19 = 0$.

208. $x^2 + y^2 = r^2$ zirkunferentziaren $M(x_1, y_1)$ puntuan ukitzailearen eta normalaren ekuazioak eta azpiukitzailearen eta azpinormalaren luzerak aurkitu. Em.: ukitzailea

$xx_1 + yy_1 = r^2$; normala $x_1y - y_1x = 0$; $s_T = \left|-\dfrac{y_1}{x_1}\right|$; $s_N = |-x_1|$.

209. $y^2 = 4px$ parabolaren edozein puntutan azpiukitzailea erpinak bi zati berdinetan ebakitzen duela frogatu eta azpinormala $2p$ dela. Grafikoa eraiki.

210. $M(x_1, y_1)$ puntuko ukitzailearen ekuazioa aurkitu.

a) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ elipserako. Em.: $\dfrac{xx_1}{a^2} + \dfrac{yy_1}{b^2} = 1$.

b) $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ hiperbolarako. Em.: $\dfrac{xx_1}{a^2} - \dfrac{yy_1}{b^2} = 1$.

211. Agnesi-ren $y = \dfrac{8a^3}{4a^2 + x^2}$ kurbaren $x = 2a$ deneko puntuan ukitzailearen eta normalaren ekuazioa aurkitu. Em.: ukitzailea $x + 2y = 4a$; normala $y - 2x = -3a$.

212. $3y = 6x - 5x^3$ kurbaren $M\left(1, \dfrac{1}{3}\right)$ puntuko normala koordenatu-jatorritik pasatzen dela frogatu.

213. $\left(\frac{x}{a}\right)^n + \left(\frac{y}{b}\right)^n = 2$ kurbaren $M(a,b)$ puntuko ukitzailea $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 2$ ekuazioaren bidez emanik datorrela frogatu.

214. Ox ardatzarekin 45°-ko angelua osotzen duen $y^2 = 20x$ parabolaren ukitzailearen ekuazioa aurkitu. Em.: $y = x + 5$ $[(5,10)$ puntuan$]$.

215. $2x + 3y = 6$ zuzenarekiko paraleloak diren $x^2 + y^2 = 52$ zirkunferentziaren ukitzaileen ekuazioak aurkitu. Em.: $2x + 3y \pm 26 = 0$.

216. $2y + 5x = 10$ zuzenarekiko elkartzutak diren $4x^2 - 9y^2 = 36$ hiperbolaren ukitzaileen ekuazioak aurkitu. Em.: ez da horrelako ukitzailerik existitzen.

217. Koordenatu-ardatzen artean kokaturiko $xy = m$ hiperbolaren ukitzailearen zuzenkia ukitze-puntuak bi zati berdinetan zatitzen duela frogatu.

218. Koordenatu-ardatzen artean kokaturiko $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ astroidearen ukitzailearen zuzenkiak luzera konstantea duela frogatu.

219. $y = a^x$ eta $y = b^x$ kurben α ebakitze-angelua aurkitu. Em.: $\tan\alpha = \frac{\ln a - \ln b}{1 + \ln a \cdot \ln b}$.

220. $x = a(\theta - \sin\theta)$, $y = a(1 - \cos\theta)$ zikloidearen $\theta = \frac{\pi}{2}$ deneko puntuko azpiukitzailearen, azpinormalaren, ukitzailearen eta normalaren luzerak aurkitu. Em.: $S_T = a$; $S_N = a$; $T = a\sqrt{2}$; $N = a\sqrt{2}$.

221. $x = 4a\cos^3 t$, $y = 4a\sin^3 t$ hipozikloiderako S_T, S_N, T eta N balioak aurkitu.

Em.: $S_T = -4a \sin^2 t \cos t$; $S_N = -4a\frac{\sin^4 t}{\cos t}$; $T = 4a\sin^2 t$; $N = 4a\sin^2 t \tan t$.

Beste zenbait problema

Ondoko funtzioen deribatuak kalkulatu:

222. $y=\dfrac{\sin x}{2\cos^2 x}-\dfrac{1}{2}\ln\tan\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{x}{2}\right)$. Em.: $y'=\dfrac{1}{\cos^3 x}$.

223. $y=\arcsin\dfrac{1}{x}$. Em.: $y'=\dfrac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$.

224. $y=\arcsin(\sin x)$. Em.: $y'=\dfrac{\cos x}{|\cos x|}$.

225. $y=\dfrac{2}{\sqrt{a^2-b^2}}\cdot\arctan\left(\sqrt{\dfrac{a-b}{a+b}}\tan\dfrac{x}{2}\right)$ $(a>0,\ b>0)$. Em.: $y'=\dfrac{1}{a+b\cos x}$.

226. $y=|x|$. Em.: $y'=\dfrac{x}{|x|}$.

227. $y=\arcsin\sqrt{1-x^2}$. Em.: $y'=-\dfrac{x}{|x|}\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

228. Esferaren bolumena eta azalera kalkulatzeko $v=\dfrac{4}{3}\pi r^3$ eta $s=4\pi r^2$ formuletatik $\dfrac{dv}{dr}=s$ dela ondorioztatzen da. Emaitza horren esanahi geometrikoa azaldu. Zirkuluaren azaleraren era zirkunferentziaren luzeraren arteko antzeko erlazioa aurkitu.

229. ABC triangeluan, a aldea beste bien, b eta c, funtzio bezala adierazten da eta azken bi horiek osotzen duten A angelua $a=\sqrt{b^2+c^2-2bc\cos A}$ formularen bidez emanik dago, b eta c aldaezinak izanik, a aldea A angeluaren funtzioa da. $\dfrac{da}{dA}=h_a$ dela frogatu, h_a zenbakia a oinarridun triangeluari dagokion altuera izanik. Emaitza horren esanahi geometrikoa azaldu.

230. Diferentzialaren kontzeptua erabiliz, $\sqrt{a^2+b} \approx a+\frac{b}{2a}$, $\sqrt[3]{a^3+b} \approx a+\frac{b}{3a}$ formula hurbilduen jatorria azaldu, $|b|$ zenbakia a-rekiko txikia denean.

231. Penduluaren oszilazio-periodoa $T=\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ da. Periodoaren T balioa kalkulatzerakoan,

1) penduluaren l luzera;
2) g grabitate-indarraren azelerazioa

neurtzerakoan eginiko %1-eko erroreak errorean duen eragina zein da?

Em.: 1) $\approx \%\frac{1}{2}$; 2) $\approx \%\frac{1}{2}$.

232. Traktrizeak hurrengo propietatea du: edozein puntutan ukitzailearen zuzenkiak luzera konstantea duela. Propietate hori frogatu:

1) $x=\sqrt{a^2-y^2}+\frac{a}{2}\ln\frac{a-\sqrt{a^2-y^2}}{a+\sqrt{a^2-y^2}}(a>0)$ traktrizearen ekuazioa emanik;

2) $x=a\left(\ln\tan\frac{t}{2}+\cos t\right)$, $y=a\ \sin t$ ekuazio parametrikoak emanik.

233. $y=C_1e^{-x}+C_2e^{-2x}$ funtzioak $y''+3y'+2y=0$ ekuazioa betetzen duela frogatu (C_1 eta C_2 konstanteak dira).

234. $y=a^x\sin x$, $z=e^x\cos x$, direla suposatuz, $y''=2z$, $z''=-2y$ direla frogatu.

235. $y=\sin(m\ \arcsin x)$ funtzioak $(1-x^2)y''-xy'+m^2y=0$ ekuazioa betetzen duela frogatu.

236. $(a-bx)^{\frac{y}{e^x}} = x$ denean, $x^2 \dfrac{d^2y}{dx^2} = \left(x\dfrac{dy}{dx} - y \right)^2$ dugula frogatu.

IV. GAIA

FUNTZIO DERIBAGARRIEI BURUZKO TEOREMAK

§ 1. Deribatuaren erroei buruzko teorema (Rolle-ren teorema)

Rolle-ren teorema. $f(x)$ funtzioa $[a,b]$ tartean jarraia eta barneko puntu guztietan deribagarria bada, $x=a$ eta $x=b$ muturretan nulua delarik, $[f(a)=f(b)=0]$, $[a,b]$ tartean gutxienez $x=c$ puntu bat existitzen da, $a<c<b$, non $f'(x)$ deribatua nulua den, hots, $f'(c)=0$[1].

Frogapena. $f(x)$ funtzioa $[a,b]$ tartean jarraia denez, bertan M balio maximo bat eta m balio minimo bat hartu behar ditu. $M=m$ bada, funtzioa konstantea da, hau da, x-ren balio guztietarako $f(x)=m$ balio konstantea du. Baina kasu honetan, zuzenkiko edozein puntutan: $f'(x)=0$, eta teorema frogaturik geratzen da.

Orain suposa dezagun $M \neq m$ dela. Beraz, gutxienez zenbaki horietako bat ez da zero izango. Zehaztuz, suposa dezagun $M>0$ dela eta funtzioak balio maximoa $x=c$ denean hartzen duela, hots, $f(c)=M$. Ohar dezagun c puntua a eta b-ren desberdina denaz, hasierako baldintzagatik, $f(a)=0$ eta $f(b)=0$ bait dira. $f(c)$ funtzioaren balio maximoa bada, $f(c+\Delta x)-f(c)\leq 0$, bai $\Delta x>0$ zein $\Delta x<0$ denean.

Hortik ondokoa ondorioztatzen da:

$$\frac{f(c+\Delta x)-f(c)}{\Delta x}\leq 0 \qquad \Delta x>0 \quad \text{bada,} \tag{1'}$$

$$\frac{f(c+\Delta x)-f(c)}{\Delta x}\geq 0 \qquad \Delta x<0 \quad \text{bada.} \tag{1''}$$

Hipotesiagatik $x=c$ puntuan deribatua existitzen denez, $\Delta x\to 0$ denean, limitea hartuz, zera lortzen dugu:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(c+\Delta x)-f(c)}{\Delta x}=f'(c)\leq 0 \qquad \Delta x>0 \text{ bada,}$$

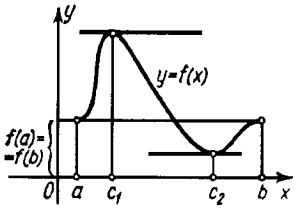
$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(c+\Delta x)-f(c)}{\Delta x}=f'(c)\geq 0 \qquad \Delta x<0 \text{ bada.}$$

---

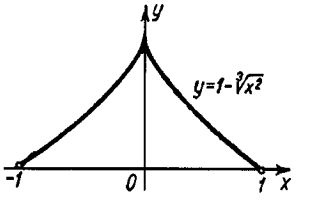
1) c zenbakiari $\varphi(x)$ funtzioaren *erro* deritzo, baldin $\varphi(c)=0$.

Baina $f'(c) \leq 0$ eta $f'(c) \geq 0$ baldintzak elkargarriak dira soilik $f'(c) = 0$ kasurako, beraz, $[a,b]$ tartean c puntu bat existitzen da, non deribatua nulua den.

Deribatuaren erroei buruzko teoremak oso argia den esangura geometrikoa du. Puntu guztietan zuzen ukitzailea duen kurba jarrai batek Ox ardatza a eta b abzisetako puntuetan ebakitzen badu, kurba horretan gutxienez c abzisa, $a < c < b$, duen puntu bat existitzen da non ukitzailea Ox ardatzarekiko paraleloa den.



91. IRUDIA



92. IRUDIA

1. Oharra. Frogaturiko teorema baliogarria da ere $[a,b]$ tarteko muturretan nulua ez den baina balio berdinak, $f(a) = f(b)$, hartzen dituen funtzio deribagarri baterako (91. irudia). Frogapena aurrekoaren antzekoa da.

2. Oharra. $f(x)$ funtzioak $[a,b]$ tarteko zenbait puntutan deribatua ez badu, teorema faltsua izan daiteke (hau da, kasu honetan, $[a,b]$ tartean $f'(c)$ deribatua nulua den c punturik ez egotea suerta daiteke).

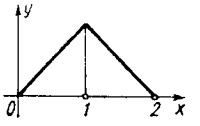
Adibidez,

$$y = f(x) = 1 - \sqrt[3]{x^2}$$

funtzioa (92. irudia) [-1,1] tartean jarraia da, muturretan balio bera hartuz; dena den,

$$f'(x) = -\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$$

deribatua ez da tarte horretako inolako puntutan anulatzen. Horren arrazoia, bertan $x = 0$ puntua existitzea da non deribatua existitzen ez den (infinitua egiten da eta).



93. IRUDIA

93. irudiko grafikoak beste adibide bat eskeintzen digu, non funtzioaren deribatua [0,2] tartean anulatzen ez den.

Funtzio horretarako ere ez dira Rolle-ren teoremaren baldintzak betetzen, funtzioak $x = 1$ puntuan deribaturik ez du eta.

§ 2. Gehikuntza finituen teorema (Lagrange-ren teorema)

Lagrange-ren teorema. $f(x)$ funtzioa $[a,b]$ tartean jarraia eta barneko puntu guztietan deribagarria bada, gutxienez c puntu bat existituko da, $a < c < b$, non

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a). \tag{1}$$

Frogapena. Q-ren bidez,

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

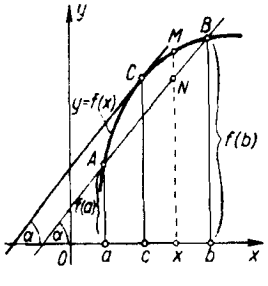
zenbakia adieraziko dugu, hau da,

$$Q = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}, \tag{2}$$

eta

$$F(x) = f(x) - f(a) - (x - a)Q \tag{3}$$

berdintzaren bidez definituriko $F(x)$ funtzio laguntzailea kontsideratuko dugu.



94. IRUDIA

Ikus dezagun $F(x)$ funtzioaren esangura geometrikoa. Horretarako lehenik AB kordaren (94. irudia) ekuazioa idatz dezagun, bere koefiziente angeluarra $Q = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$ dela eta korda $(a, f(a))$ puntutik pasatzen dela kontuan hartuz:

$$y - f(a) = Q(x - a);$$

hortik,

$$y = f(a) + Q(x - a).$$

Baina $F(x) = f(x) - [f(a) + Q(x - a)]$. Beraz, x-ren balio bakoitzerako $F(x)$, x abzisa berari dagozkion $y = f(x)$ kurbako eta $y = f(a) + Q(x - a)$ kordako puntuen ordenatuen arteko kendura da.

Erraz ikus daitekeenez, $F(x)$ $[a,b]$ tartean jarraia da, bere barnean deribagarria eta muturretan anulatzen delarik, hots, $F(a) = 0$, $F(b) = 0$. Horregatik, $F(x)$ funtzioari Rolle-ren teorema aplika diezaiokegu, horren arabera tartean $x = c$ puntu bat existituz, non

$$F'(c) = 0.$$

Baina,

$$F'(x) = f'(x) - Q.$$

Hau da,

$$F'(c) = f'(c) - Q = 0,$$

orduan

$$Q = f'(c).$$

Q balioa (2) berdintzan ordezkatuz,

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c), \qquad (1')$$

izango dugu; (1) formula hortik zuzenki lortzen delarik. Beraz, teorema frogatuta geratzen da.

Lagrange-ren teoremaren esangura geometrikoa argitzeko asmoz, 94. irudiari begira diezaiogun. Bertan, $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ magnitudeak a eta b abzisak dituzten A eta B puntuetatik pasatzen den kordaren malda adierazten du.

Beste aldetik, $f'(c)$ kurbaren zuzen ukitzailearen malda da, c abzisa duen puntuan. Hori dela eta, (1') berdintzaren, (1) berdintzaren baliokidea denaren, esangura geometrikoa ondokoa da: AB arkuko puntu guztietan zuzen ukitzailea marra badaiteke, arku horretan A eta B-ren arteko C puntu bat existitzen da, non dagokion zuzen ukitzailea A eta B puntuak lotzen dituen kordarekiko paraleloa den.

Orain kontutan har dezagun c balioak $a<c<b$ baldintza betetzen duenez, $c-a<b-a$ dugu, hau da,

$$c-a=\theta(b-a),$$

non θ zenbakia 0 eta 1 zenbakien artekoa den, hots,

$$0<\theta<1.$$

Beraz, kasu honetan,

$$c=a+\theta(b-a),$$

eta (1) formula modu honetan idatz daiteke:

$$f(b)-f(a)=(b-a)f'[a+\theta(b-a)],\quad 0<\theta<1. \tag{1''}$$

§ 3. Bi funtzioren gehikuntzen arteko zatidurari buruzko teorema (Cauchy-ren teorema)

Cauchy-ren teorema. Bira $[a,b]$ tartean jarraiak eta deribagarriak diren $f(x)$ eta $\varphi(x)$ funtzioak, horrez gain, tartearen barnean $\varphi'(x)$ anulatzen ez bada, $x=c$ puntu bat existituko da, $a<c<b$, non

$$\frac{f(b)-f(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)}=\frac{f'(c)}{\varphi'(c)}. \tag{1}$$

Frogapena. Defini dezagun Q zenbakia ondoko berdintzaren bidez,

$$Q = \frac{f(b) - f(a)}{\varphi(b) - \varphi(a)}. \qquad (2)$$

Kontutan har dezagun $\varphi(a) - \varphi(b) \neq 0$ dela, bestela $\varphi(a)$ eta $\varphi(b)$ berdinak izango bait lirateke, eta Rolle-ren teoremaren arabera, $\varphi'(x)$ deribatua tartearen barnean anulatuko litzateke, teoremaren hipotesiaren aurka.

Eraiki dezagun funtzio laguntzaile bat,

$$F(x) = f(x) - f(a) - Q[\varphi(x) - \varphi(a)].$$

Argi dagoenez, $F(a) = 0$ eta $F(b) = 0$ ($F(x)$ funtzio eta Q-ren definizioetatik ondorioztatzen dena). $[a,b]$ tartean Rolle-ren teoremaren baldintza guztiak betetzen direla kontutan hartu eta gero, a eta b-ren artean $x = c$ $(a < c < b)$ balio bat existitzen dela ondorioztatzen dugu non $F'(c) = 0$ den. Baina $F'(x) = f'(x) - Q\varphi'(x)$, beraz

$$F'(c) = f'(c) - Q\varphi'(c) = 0,$$

eta orduan

$$Q = \frac{f'(c)}{\varphi'(c)}.$$

Q-ren balioa (2) berdintzan ordezkatuz, (1) berdintza lortuko dugu.

Oharra. Hasiera batean honela eman arren, Cauchy-ren teorema ezin da frogatu

$$\frac{f(b) - f(a)}{\varphi(b) - \varphi(a)}$$

frakzioaren bi gaiei Lagrange-ren teorema aplikatuz.

Izan ere, kasu horretan ($b - a$ kenduraz zatituz frakzioa sinplifikatu eta gero)

$$\frac{f(b) - f(a)}{\varphi(b) - \varphi(a)} = \frac{f'(c_1)}{\varphi'(c_2)},$$

formula lortuko genuke, non $a < c_1 < b$, $a < c_2 < b$ diren. Baina oro har $c_1 \neq c_2$ denez, lorturiko emaitzak ez du oraindik Cauchy-ren teorema egiaztatzen.

§ 4. Bi infinitesimoren arteko zatiduraren limitea

($\frac{0}{0}$ motako indeterminazioen limiteen kalkulua)

Suposa dezagun $f(x)$ eta $\varphi(x)$ funtzioek $[a,b]$ tarte batean Cauchy-ren teoremaren baldintzak betetzen dituztela, $x=a$ puntuan nuluak direlarik, hots, $f(a)=0$ eta $\varphi(a)=0$.

$\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ arrazoia ez dago definiturik $x=a$ denean, baina, dena den, $x\neq a$ balioetarako oso esangura zehatza du. Beraz, $x\to a$ denean limite horren balioa kalkulatzearen problema plantea daiteke. Horrelako limiteen kalkuluari "$\frac{0}{0}$ motako indeterminazioaren limitearen kalkulu" ohi deritzo.

Horrelako problemekin topo egin dugu, esate baterako, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$ limitea eta funtzio elementalen deribatuak kalkulatzerakoan. $\frac{\sin x}{x}$ adierazpenak ez dauka zentzurik $x=0$ denean, hau da, $F(x)=\frac{\sin x}{x}$ funtzioa ez dago definiturik $x=0$ puntuan, baina $x\to 0$ denean $\frac{\sin x}{x}$ adierazpena existitzen eta 1 dela ikusi dugu.

Teorema (L'Hôpital-en erregela). Suposa dezagun $f(x)$ eta $\varphi(x)$ funtzioek $[a,b]$ tarte batean Cauchy-ren teoremaren baldintzak betetzen dituztela, $x=a$ puntuan nuluak direlarik, hau da, $f(a)=\varphi(a)=0$; orduan, $x\to a$ denean $\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$ zatiduraren limitea existitzen bada, $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ ere existituko da eta horrez gain

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}.$$

Frogapena. $[a,b]$ tartean $x\neq a$ puntu bat har dezagun. Cauchy-ren formula aplikatuz,

$$\frac{f(x)-f(a)}{\varphi(x)-\varphi(a)}=\frac{f'(\xi)}{\varphi'(\xi)}$$

izango dugu, non ξ, a eta x-ren artean aurkitzen den. Baina, hipotesiz, $f(a)=\varphi(a)=0$. Beraz,

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\frac{f'(\xi)}{\varphi'(\xi)}. \qquad (1)$$

$x\to a$ bada, ξ a eta x-ren artean dagonez gero, $\xi\to a$ ere izango da. Aldi berean, $\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}=A$ bada, $\lim\limits_{\xi\to a}\frac{f'(\xi)}{\varphi'(\xi)}$ ere existituko da, A delarik.

Argi dagoenez,

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(\xi)}{\varphi'(\xi)}=\lim_{\xi\to a}\frac{f'(\xi)}{\varphi'(\xi)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}=A,$$

hau da,

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}.$$

1. Oharra. $f(x)$ eta $\varphi(x)$ $x=a$ puntuan definiturik ez egotekotan, baina

$$\lim_{x\to a}f(x)=0, \qquad \lim_{x\to a}\varphi(x)=0$$

direlarik, teorema ere baliogarria da.

Kasu hori lehen aztertutakora eramateko, beharrezkoa da $x=a$ puntuan ere $f(x)$ eta $\varphi(x)$ funtzioak definitzea, puntu horretan jarraiak izan daitezen.

Horretarako, nahikoa da

$$f(a)=\lim_{x\to a}f(x)=0; \qquad \varphi(a)=\lim_{x\to a}\varphi(x)=0,$$

ezartzea, argia denez, $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ arrazoiaren limitea, $x\to a$ denean, $f(x)$ eta $\varphi(x)$ funtzioak $x=a$ puntuan definiturik ala ez egotearen menpekoa ez bait da.

2. Oharra. Baldin $f'(a)=\varphi'(a)=0$ eta $f'(x)$ eta $\varphi'(x)$ deribatuek teoremaren hipotesiek $f(x)$ eta $\varphi(x)$ funtzioei ezarritako baldintzak betetzen badituzte, $\dfrac{f'(x)}{\varphi'(x)}$ zatidurari L'Hôpital-en erregela aplikatuz, ondoko formula lortuko dugu:

$$\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f''(x)}{\varphi''(x)},\ \text{etab.}$$

3. Oharra. $\varphi'(a)=0$ bada, baina $f'(a)\neq 0$, teorema $x\to a$ denean zerorantz jotzen duen $\dfrac{\varphi(x)}{f(x)}$ alderantzizko arrazoiari aplikatzen zaio. Beraz, $\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}$ zatidurak infiniturantz jotzen du.

1. Adibidea.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{3x}=\lim_{x\to 0}\frac{(\sin 5x)'}{(3x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{5\cos 5x}{3}=\frac{5}{3}.$$

2. Adibidea.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+x}}{1}=\frac{1}{1}=1.$$

3. Adibidea.

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}-2x}{x-\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}-2}{1-\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}}{\cos x}=\frac{2}{1}=2.$$

Kasu horretan beharrezkoa izan da L'Hôpital-en erregela hiru aldiz aplikatzea, $x=0$ denean, lehen, bigarren eta hirugarren deribatuen arrazoiek $\dfrac{0}{0}$ indeterminaziora bait daramate.

4. Oharra. L'Hôpital-en erregela hurrengo kasuan ere aplikagarria da,

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=0\quad\text{eta}\quad\lim_{x\to\infty}\varphi(x)=0.$$

Izan ere, $x = \frac{1}{z}$ eginez, $x \to \infty$ denean $z \to 0$ dela ikusten dugu, eta beraz:

$$\lim_{z\to 0} f\left(\frac{1}{z}\right) = 0, \qquad \lim_{z\to 0} \varphi\left(\frac{1}{z}\right) = 0.$$

$\dfrac{f\left(\frac{1}{z}\right)}{\varphi\left(\frac{1}{z}\right)}$ arrazoiari L'Hôpital-en erregela bera aplikatuz,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{z\to 0} \frac{f\left(\frac{1}{z}\right)}{\varphi\left(\frac{1}{z}\right)} = \lim_{z\to 0} \frac{f'\left(\frac{1}{z}\right)\left(-\frac{1}{z^2}\right)}{\varphi'\left(\frac{1}{z}\right)\left(-\frac{1}{z^2}\right)} = \lim_{z\to 0} \frac{f'\left(\frac{1}{z}\right)}{\varphi'\left(\frac{1}{z}\right)} = \lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)},$$

lortzen dugu, frogatu nahi genuenez.

4. Adibidea.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sin\frac{k}{x}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty 0} \frac{k\cos\frac{k}{x}\left(-\frac{1}{x^2}\right)}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to\infty} k\cos\frac{k}{x} = k.$$

§ 5. Bi magnitude mugagabeki handiren arteko zatiduraren limitea ($\frac{\infty}{\infty}$ motako indeterminazioen limiteen kalkulua)

Azter dezagun $x \to a$ (edo $x \to \infty$) denean, infiniturantz jotzen duten bi funtzioren arteko zatiduraren limitearen problema.

Teorema. Suposa dezagun $f(x)$ eta $\varphi(x)$ funtzioak jarraiak eta deribagarriak direla a puntuaren ingurune bateko $x \neq a$ balio guztietarako, eta $\varphi'(x)$ deribatua horrelako puntuetan nulua ez dela. Horrez gain, suposa dezagun

$$\lim_{x\to a} f(x) = \infty, \qquad \lim_{x\to a} \varphi(x) = \infty$$

eta

$$\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)} = A \tag{1}$$

limitea existitzen dela.

Orduan $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{\varphi(x)}$ ere existituko da eta

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)} = A. \tag{2}$$

Frogapena. Kontsideraturiko a puntuaren ingurunean α eta x puntuak hauta ditzagun, non

$$\alpha < x < a \quad (\text{edo } a < x < \alpha).$$

Cauchy-ren teoremaren arabera:

$$\frac{f(x) - f(\alpha)}{\varphi(x) - \varphi(\alpha)} = \frac{f'(c)}{\varphi'(c)}, \tag{3}$$

non $\alpha < c < x$ den. (3) berdintzaren lehen atala ondoko moduan aldatzen dugu:

$$\frac{f(x) - f(\alpha)}{\varphi(x) - \varphi(\alpha)} = \frac{f(x)}{\varphi(x)} \frac{1 - \dfrac{f(\alpha)}{f(x)}}{1 - \dfrac{\varphi(\alpha)}{\varphi(x)}}. \tag{4}$$

(3) eta (4) erlazioetatik

$$\frac{f'(c)}{\varphi'(c)} = \frac{f(x)}{\varphi(x)} \frac{1 - \dfrac{f(\alpha)}{f(x)}}{1 - \dfrac{\varphi(\alpha)}{\varphi(x)}}$$

lortuko dugu. Hortaz,

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{f'(c)}{\varphi'(c)} \frac{1 - \dfrac{\varphi(\alpha)}{\varphi(x)}}{1 - \dfrac{f(\alpha)}{f(x)}}. \tag{5}$$

(1) baldintzatik hauxe ondorioztatzen da: nahi dugun bezain txikia den edozein ε positibotarako, α a-tik nahiko hurbil hauta daiteke, $x = c$ balio guztietarako, $\alpha < c < x$ izanik, ondoko desberdintza bete dadin

$$\left| \frac{f'(c)}{\varphi'(c)} - A \right| < \varepsilon$$

edo

$$A - \varepsilon < \frac{f'(c)}{\varphi'(c)} < A + \varepsilon. \tag{6}$$

Orain,

$$\frac{1 - \dfrac{\varphi(\alpha)}{\varphi(x)}}{1 - \dfrac{f(\alpha)}{f(x)}}$$

frakzioa azter dezagun.

(6) desberdintza betetzeko α finka dezagun, eta x-ri a-rantz joeraz diezaiogun. $x \to a$ denean $f(x) \to \infty$ eta $\varphi(x) \to \infty$ direnez gero

$$\lim_{x \to a} \frac{1 - \dfrac{\varphi(\alpha)}{\varphi(x)}}{1 - \dfrac{f(\alpha)}{f(x)}} = 1$$

lortuko dugu eta, beraz, aurrez finkaturiko $\varepsilon > 0$ baliorako eta a-tik nahiko hurbila den edozein x-tarako

$$\left| 1 - \frac{1 - \dfrac{\varphi(\alpha)}{\varphi(x)}}{1 - \dfrac{f(\alpha)}{f(x)}} \right| < \varepsilon$$

izango dugu, edo

$$1-\varepsilon<\frac{1-\dfrac{\varphi(\alpha)}{\varphi(x)}}{1-\dfrac{f(\alpha)}{f(x)}}<1+\varepsilon. \tag{7}$$

(6) eta (7) desberdintzak atalez atal biderkatuz,

$$(A-\varepsilon)(1-\varepsilon)<\frac{f'(c)}{\varphi'(c)}\frac{1-\dfrac{\varphi(\alpha)}{\varphi(x)}}{1-\dfrac{f(\alpha)}{f(x)}}<(A+\varepsilon)(1+\varepsilon)$$

lortuko dugu, eta (5) berdintza dela eta:

$$(A-\varepsilon)(1-\varepsilon)<\frac{f(x)}{\varphi(x)}<(A+\varepsilon)(1+\varepsilon).$$

ε zenbakia nahi dugun bezain txikia denez, x a-tik nahikoa hurbil dagoenean, azken desberdintzetatik

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=A$$

ondorioztatzen da, edo (1) dela medio:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}=A,$$

frogatu nahi genuenez.

1. Oharra. (1) berdintzan, $A=\infty$ bada, hau da,

$$\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}=\infty,$$

(2) berdintza mantentzen da. Izan ere, aurreko adierazpenetik

$$\lim_{x\to a}\frac{\varphi'(x)}{f'(x)}=0$$

lortzen da. Frogaturiko teoremaren arabera:

$$\lim_{x\to a}\frac{\varphi(x)}{f(x)}=\lim_{x\to a}\frac{\varphi'(x)}{f'(x)}=0,$$

beraz

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\infty.$$

2. Oharra. $x\to\infty$ izatekotan teorema aise orokor daiteke. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f'(x)}{\varphi'(x)}$, existitzen bada eta $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\infty$ eta $\lim\limits_{x\to\infty}\varphi(x)=\infty$,

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}. \tag{8}$$

Berori $x=\dfrac{1}{z}$ aldaketa eginez frogatzen da, $\dfrac{0}{0}$ motako indeterminazioen limiteak kalkulatzerakoan egin den legez (ikus § 4, 4. oharra).

1. Adibidea.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{(e^x)'}{(x)'}=\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{1}=\infty.$$

3. Oharra. Azpimarra dezagun berriro (2) eta (8) formulak bigarren ataleko limitea (finitua edo infinitua) existitzen denean soilik betetzen direla. Gerta daiteke lehen ataleko limitea existitzea eta bigarrenekoa ez, hurrengo kasuan gertatzen den bezalaxe:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x+\sin x}{x}.$$

Limite hori existitzen da, 1 delarik. Izan ere,

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x+\sin x}{x}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{\sin x}{x}\right)=1.$$

Baina deribatuen arrazoiak,

$$\frac{(x+\sin x)'}{(x)'}=\frac{1+\cos x}{1}=1+\cos x,$$

ez du inolako limiterantz jotzen $x\to\infty$ denean; baizik eta 0 eta 2 zenbakien artean oszilatzen du.

2. Adibidea.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{ax^2+b}{cx^2-d}=\lim_{x\to\infty}\frac{2ax}{2cx}=\frac{a}{c}.$$

3. Adibidea.

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\tan x}{\tan 3x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\frac{1}{\cos^2 x}}{\frac{3}{\cos^2 3x}}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1}{3}\frac{\cos^2 3x}{\cos^2 x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1}{3}\frac{2\cdot 3\cos 3x\sin 3x}{2\cos x\sin x}=$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos 3x}{\cos x}\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sin 3x}{\sin x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{3\sin 3x}{\sin x}\cdot\frac{(-1)}{(1)}=3\frac{(-1)}{(1)}\cdot\frac{(-1)}{(1)}=3.$$

4. Adibidea.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x}{e^x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{e^x}=0.$$

Orokorki, edozein $n>0$ zenbaki osotarako:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^n}{e^x}=\lim_{x\to\infty}\frac{nx^{n-1}}{e^x}=\ldots=\lim_{x\to\infty}\frac{n(n-1)\ldots 1}{e^x}=0.$$

a) $0\cdot\infty$; b) 0^0; c) ∞^0; d) 1^∞; e) $\infty-\infty$

moduan sinbolikoki adierazten diren indeterminazioen limiteen kalkulua aurrez azterturiko kasuetara murrizten da.

Adierazpen indeterminatu horien esangura honako hau da:

a) Demagun

$$\lim_{x\to a} f(x) = 0 \quad \text{eta} \quad \lim_{x\to a} \varphi(x) = \infty$$

direla,

$$\lim_{x\to a} [f(x)\cdot\varphi(x)].$$

kalkulatu. Horixe $0\cdot\infty$ motako indeterminazioa dugu.

Adierazpen hori

$$\lim_{x\to a} [f(x)\cdot\varphi(x)] = \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{\dfrac{1}{\varphi(x)}}$$

moduan edo

$$\lim_{x\to a} [f(x)\cdot\varphi(x)] = \lim_{x\to a} \frac{\varphi(x)}{\dfrac{1}{f(x)}},$$

moduan idatziz, $x\to a$ denean $\dfrac{0}{0}$ edo $\dfrac{\infty}{\infty}$ motako indeterminazioa lortuko dugu.

5. Adibidea.

$$\lim_{x\to 0} x^n \ln x = \lim_{x\to 0} \frac{\ln x}{\dfrac{1}{x^n}} = \lim_{x\to 0} \frac{\dfrac{1}{x}}{-\dfrac{n}{x^{n+1}}} = -\lim_{x\to 0} \frac{x^n}{n} = 0.$$

b) Biz:

$$\lim_{x\to a} f(x) = 0, \qquad \lim_{x\to a} \varphi(x) = 0,$$

$$\lim_{x\to a} [f(x)]^{\varphi(x)}$$

kalkulatu, edo, esaten ohi denez, 0^0 motako indeterminazioaren limitea kalkulatu.

$$y = [f(x)]^{\varphi(x)}$$

ipiniz eta berdintzaren bi ataletan logaritmoak hartuz,

$$\ln y = \varphi(x) \ [\ln f(x)]$$

lortuko dugu.

$x \to a$ denean, bigarren atalean $0 \cdot \infty$ motako indeterminazioa lortzen dugu. $\lim\limits_{x \to a} \ln y$ kalkulatu eta gero $\lim\limits_{x \to a} y$ aurkitzea erraza izango da. Izan ere, funtzio logaritmikoaren jarraitasuna dela eta, $\lim\limits_{x \to a} \ln y = \ln \lim\limits_{x \to a} y$ dugu eta $\ln \lim\limits_{x \to a} y = b$ bada argi geratuko da $\lim\limits_{x \to a} y = e^b$ dela. Baldin, kasu berezi bezala, $b = +\infty$ edo $b = -\infty$ bada, $\lim y = +\infty$ edo $\lim y = 0$ dagozkie.

6. Adibidea. $\lim\limits_{x \to 0} x^x$ kalkulatu. $y = x^x$ eginez:

$$\ln \lim y = \lim \ln y = \lim \ln(x^x) = \lim(x \ln x);$$

$$\lim_{x \to 0} (x \ln x) = \lim_{x \to 0} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{3} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = -\lim_{x \to 0} x = 0,$$

beraz, $\ln \lim y = 0$; hortik, $\lim y = e^0 = 1$ betetzen da, hots,

$$\lim_{x \to 0} x^x = 1.$$

Beste kasuetan limiteak antzeko moduan kalkulatzen dira.

§ 6. Taylor-en formula

Suposa dezagun $y = f(x)$ funtzioa $x = a$ puntua bere barnean duen tarte batean (n + 1). ordenaraino deribagarria dela. Bila dezagun n baino handiago ez den mailako $y = P_n(x)$ polinomioa, non $x = a$ puntuan duen balioa puntu horretan $f(x)$ funtzioarenaren berdina den eta $x = a$ puntuan n. ordenarainoko deribatuen balioak eta puntu horretan $f(x)$ funtzioari dagozkion deribatuen balioak berdinak diren:

$$P_n(a) = f(a),\ P_n'(a) = f'(a),\ P_n''(a) = f''(a)\ ,\ldots,\ P_n^{(n)}(a) = f^{(n)}(a). \qquad (1)$$

Nolabait, polinomio hori $f(x)$ funtzioaren "hurbila" izango dela suposa daiteke.

Bila dezagun polinomio hori $(x-a)$ berreduratako polinomio bezala, koefizienteak indeterminatuak direlarik.

$$P_n(x) = C_0 + C_1(x-a) + C_2(x-a)^2 + C_3(x-a)^3 + \ldots + C_n(x-a)^n. \qquad (2)$$

$C_0, C_1, C_2, \ldots, C_n$ koefiziente indeterminatuak (1) baldintzak betetzeko kalkulatuko ditugu.

Aurrez $P_n(x)$-ren deribatuak aurki ditzagun:

$$\left.\begin{array}{l} P'(x) = C_1 + 2C_2(x-a) + 3C_3(x-a)^2 + \ldots + nC_n(x-a)^{n-1}, \\ P''(x) = 2C_2 + 3\cdot 2C_3(x-a) + \ldots + n(n-1)C_n(x-a)^{n-2}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ P_n^{(n)} = n(n-1)\ldots 2\cdot 1\cdot C_n. \end{array}\right\} \qquad (3)$$

(2) eta (3) berdintzen bi ataletan x-ren ordez a ipiniz, eta, (1) berdintzen arabera, $P_n(a)$-ren ordez $f(a)$, $P_n'(a)$-ren ordez $f'(a)$, etab. ipiniz

$$\begin{array}{c} f(a) = C_0, \\ f'(a) = C_1, \\ f''(a) = 2\cdot 1\cdot C_2, \\ f'''(a) = 3\cdot 2\cdot 1\cdot C_3, \\ \cdots\cdots\cdots \\ f^{(n)}(a) = n(n-1)(n-2)\ldots 2\cdot 1\cdot C_n. \end{array}$$

lortuko dugu, hortaz:

$$\left.\begin{array}{l} C_0 = f(a),\quad C_1 = f'(a),\quad C_2 = \dfrac{1}{1\cdot 2} f''(a), \\ C_3 = \dfrac{1}{1\cdot 2\cdot 3} f'''(a),\ \ldots, C_n = \dfrac{1}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n} f^{(n)}(a). \end{array}\right\} \qquad (4)$$

Kalkulaturiko $C_0, C_1, C_2, \ldots, C_n$ balioak (2) formulan sartuz, bilatutako polinomioa lortuko dugu:

$$P_n(x) = f(a) + \frac{x-a}{1} f'(a) + \frac{(x-a)^2}{1\cdot 2} f''(a) +$$

$$+\frac{(x-a)^3}{1\cdot 2\cdot 3} f'''(a) + \ldots + \frac{(x-a)^n}{1\cdot 2\cdot \ldots \cdot n} f^{(n)}(a). \qquad (5)$$

Emandako $f(x)$ funtzioa eta kalkulaturiko $P_n(x)$ polinomioaren balioen arteko kendura $R_n(x)$ delakoaren bidez adieraziko dugu (95. irudia):

$$R_n(x) = f(x) - P_n(x),$$

beraz:

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x),$$

edo, garaturik:

$$f(x) = f(a) + \frac{x-a}{1!} f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!} f''(a) + \ldots$$

$$\ldots + \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + R_n(x). \qquad (6)$$

$R_n(x)$ gaia, *gai osagarri* izenaren bidez ezagutzen da. $R_n(x)$ gai osagarria txikia deneko x balioetan $P_n(x)$ polinomioak $f(x)$ funtzioaren balio hurbildua ematen du.

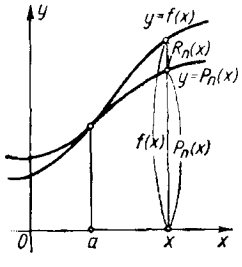
Horrela, bada, (6) formulak $y = f(x)$ funtzioaren ordez $y = P_n(x)$ polinomioa ipintzen uzten du, zehaztasun-maila $R_n(x)$ gai osagarriaren balioaren berdina delarik.

Estima dezagun $R_n(x)$-ren balioa x-ren zenbait balio desberdinetarako.

Idatz dezagun gai osagarria ondoko moduan,

$$R_n(x) = \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} Q(x), \qquad (7)$$

non $Q(x)$ aurkitu behar dugun funtzioa den.



95. IRUDIA

Idatz dezagun berriro (6) formula hurrengo eran:

$$f(x)=f(a)+\frac{x-a}{1!}f'(a)+\frac{(x-a)^2}{2!}f''(a)+\ldots$$

$$\ldots+\frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(a)+\frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}Q(x). \qquad (6')$$

x eta a balioak finkatuta hartuz, $Q(x)$ funtzioak balio konkretu bat edukiko du, Q izendatuko duguna.

Ikus dezagun t-ren ondoko funtzio laguntzailea (t, a eta x artean egonik):

$$F(t)=f(x)-f(t)-\frac{x-t}{1!}f'(t)-\frac{(x-t)^2}{2!}f''(t)-\ldots-\frac{(x-t)^n}{n!}f^{(n)}(t)-\frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!}Q,$$

non Q-ren balioa, a eta x zenbaki konkretuak direnean, (6') erlazioak mugatzen duen.

Kalkula dezagun $F'(t)$ deribatua:

$$F'(t)=-f'(t)+f'(t)-\frac{x-t}{1}f''(t)+\frac{2(x-t)}{2!}f''(t)-\frac{(x-t)^2}{2!}f'''(t)+\ldots$$

$$\ldots-\frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n)}(t)+\frac{n(x-t)^{n-1}}{n!}f^{(n)}(t)-\frac{(x-t)^n}{n!}f^{(n+1)}(t)+\frac{(n+1)(x-t)^n}{(n+1)!}Q,$$

eta sinplifikatuz:

$$F'(t)=-\frac{(x-t)^n}{n!}f^{(n+1)}(t)+\frac{(x-t)^n}{n!}Q. \qquad (8)$$

Beraz, $F(t)$ funtzioak a abzisa duen puntutik hurbilak diren t puntu guztietan deribatua du. Ikus dezagun, (6') formularen arabera, ondokoa dugula:

$$F(x)=0, \qquad F(a)=0.$$

Hori dela eta, $F(t)$ funtzioari Rolle-ren teorema aplika diezaiokegu eta, horregatik, $t=\xi$ balio bat existitzen da, a eta x-ren artekoa, non $F'(\xi)=0$ den. Hortaz, (8) berdintzari esker,

$$-\frac{(x-\xi)^n}{n!}f^{(n+1)}(\xi)+\frac{(x-\xi)^n}{n!}Q=0$$

lortzen dugu, eta orduan

$$Q = f^{(n+1)}(\xi).$$

Adierazpen hori (7) formulan sartuz,

$$R_n(x) = \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi).$$

Horixe da gai osagarrirako *Lagrange-ren formula* deitzen dena.

ξ balioa x eta a-ren artean dagoenez, honako moduan idatz daiteke[2]:

$$\xi = a + \theta(x-a),$$

non θ zenbakia 0 eta 1 zenbakien artekoa den, hots, $0 < \theta < 1$. Kasu honetan gai osagarriaren formulak hurrengo itxura hartzen du:

$$R_n(x) = \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}[a + \theta(x-a)].$$

$$f(x) = f(a) + \frac{x-a}{1!} f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!} f''(a) + \ldots$$

$$\ldots + \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}[a + \theta(x-a)], \qquad (9)$$

formulari $f(x)$ funtzioaren *Taylor-en formula* deritzo.

$a = 0$ eginez, Taylor-en formula honela idatz daiteke:

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1!} f'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \ldots$$

$$\ldots + \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0) + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\theta x), \qquad (10)$$

non θ 0 eta 1-en artekoa den. Kasu berezi hori Maclaurin-en formula izenez ezagutzen da.

---

2) Gai honetako § 2 atalaren amaiera ikusi.

§ 7. e^x, $\sin x$ eta $\cos x$ funtzioen Taylor-en formularen bidezko garapena

1. $f(x)=e^x$ funtzioaren garapena. $f(x)$-ren ondoz ondoko deribatuak kalkulatuz, hauxe lortuko dugu:

$$\begin{array}{ll} f(x)=e^x, & f(0)=1, \\ f'(x)=e^x, & f'(0)=1, \\ \dots\dots\dots\dots & \dots\dots \\ f^{(n)}(x)=e^x, & f^{(n)}(0)=1. \end{array}$$

Lorturiko adierazpenak (10) formulan sartuz ondokoa izango dugu:

$$e^x=1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\dots+\frac{x^n}{n!}+\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^{\theta x},$$

$$0<\theta<1.$$

Baldin $|x|\le 1$, $n=8$ eginez, gai osagarrirako hurrengoa dugu:

$$R_8<\frac{1}{9!}3.$$

$x=1$ denean e zenbakiaren balio hurbildua aurkitzen laguntzen duen formula lortzen da:

$$e=1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\dots+\frac{1}{8!}.$$

Frakzioak kalkulatzerakoan komaren atzeko bostgarren zifraraino mantenduz, zera aurkitzen da:

$$e=2,71827.$$

Hor, lehenengo lau zifra hamarrenak zehaztzat hartzen dira, errorea 3/9! edo 0,00001 baino handiagoa ez bait da. Kontutan har dezagun edozein x-tarako gai osagarria ondokoa izango dela:

$$R_n=\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\cdot e^{\theta x}\to 0 \qquad n\to\infty \text{ denean.}$$

Izan ere, baldin $\theta < 1$ eta x-k balio finkoa badu, $e^{\theta x}$ magnitudea bornaturik dago (e^x baino txikiagoa $x > 0$ bada eta 1 baino txikiagoa $x < 0$ bada).

Edozein x balio finkotarako, ondokoa betetzen dela froga dezagun:

$$\frac{x^{x+1}}{(n+1)!} \to 0 \qquad n \to \infty \text{ denean.}$$

Izan ere,

$$\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{x}{1} \cdot \frac{x}{2} \cdot \frac{x}{3} \cdots \frac{x}{n} \cdot \frac{x}{n+1}.$$

x zenbaki finkoa bada, N osoa eta positiboa existitzen da non

$$|x| < N.$$

$\frac{|x|}{N} = q$ egin dezagun. Orduan $0 < q < 1$ dela kontutan hartuz, $n = N+1$, $N+2$, $N+3$, etab. delarik, hurrengoa idatz dezakegu:

$$\left|\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\right| = \left|\frac{x}{1} \cdot \frac{x}{2} \cdot \frac{x}{3} \cdots \frac{x}{n} \cdot \frac{x}{n+1}\right| = \left|\frac{x}{1}\right| \cdot \left|\frac{x}{2}\right| \cdot \left|\frac{x}{3}\right| \cdots \left|\frac{x}{N-1}\right| \cdot \left|\frac{x}{N}\right| \cdots \left|\frac{x}{n}\right| \cdot \left|\frac{x}{n+1}\right| <$$

$$< \frac{x}{1} \cdot \frac{x}{2} \cdot \frac{x}{3} \cdots \frac{x}{N-1} \cdot q \cdot q \cdot \ldots \cdot q = \frac{x^{N-1}}{(N-1)!} q^{n-N+2},$$

zeren eta

$$\left|\frac{x}{n}\right| = q; \ \left|\frac{x}{N+1}\right| < q, \ \ldots; \ \left|\frac{x}{n+1}\right| < q$$

bait da. Baina $\frac{x^{N-1}}{(N-1)!}$ magnitudea kontantea da, hots, ez da n-ren menpekoa, $n \to \infty$ denean q^{n-N+2} delakoak zerorantz jotzen duen bitartean. Beraz,

$$\lim_{n \to \infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} = 0 \tag{1}$$

eta

$$R_n(x) = e^{\theta x}\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \to 0 \qquad n \to \infty \quad \text{denean.}$$

Aurrekoa dela eta, x-ren edozein baliotarako, gaien kopuru nahikoa hartuz, e^x edonolako zehaztasun-mailarekin kalkula daitekeela ondorioztatzen da.

2. $f(x) = \sin x$ funtzioaren garapena. $f(x) = \sin x$ funtzioaren ondoz ondoko deribatuak kalkula ditzagun:

$$f(x) = \sin x, \qquad f(0) = 0,$$

$$f'(x) = \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right), \qquad f'(0) = 1,$$

$$f''(x) = -\sin x = \sin\left(x + 2\frac{\pi}{2}\right), \qquad f''(0) = 0,$$

$$f'''(x) = -\cos x = \sin\left(x + 3\frac{\pi}{2}\right), \qquad f'''(0) = -1,$$

$$f^{IV}(x) = \sin x = \sin\left(x + 4\frac{\pi}{2}\right), \qquad f^{IV}(0) = 0,$$

. . . . . .

$$f^{(n)}(x) = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right), \qquad f^{(n)}(0) = \sin n\frac{\pi}{2},$$

$$f^{(n+1)}(x) = \sin\left(x + (n+1)\frac{\pi}{2}\right), \qquad f^{(n+1)}(\xi) = \sin\left(\xi + (n+1)\frac{\pi}{2}\right).$$

§ 6ko (10) formulan aurkituriko adierazpenak sartuz, Taylor-en formularen bidezko $f(x) = \sin x$ funtzioaren garapena lortzen dugu:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + \frac{x^n}{n!}\sin n\frac{\pi}{2} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\sin\left[\xi + (n+1)\frac{\pi}{2}\right].$$

$$\left|\sin\left[\xi + (n+1)\frac{\pi}{2}\right]\right| \le 1,$$

dela eta, x-ren edozein baliotarako $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x) = 0$ izango dugu.

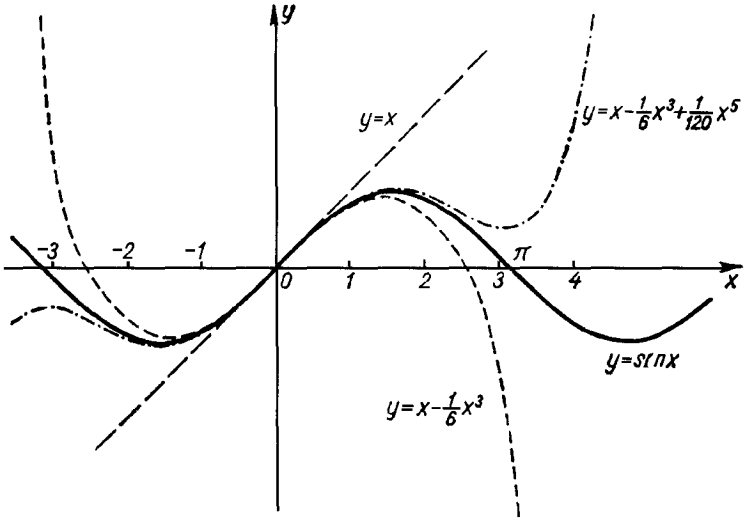
Lorturiko formula $\sin 20°$ delakoaren balio hurbilduaren kalkuluari aplika diezaiogun. $n = 3$ egin dezagun, hau da, garapenaren lehen bi gaietara murriztuko gara:

$$\sin 20° = \sin\frac{\pi}{9} \approx \frac{\pi}{9} - \frac{1}{3!}\left(\frac{\pi}{9}\right)^3 = 0{,}343.$$

Egindako errorea, gai osagarriaren berdina dena, baliozta dezagun:

$$|R_3| = \left|\left(\frac{\pi}{9}\right)^4 \frac{1}{4!}\sin(\xi + 2\pi)\right| \le \left(\frac{\pi}{9}\right)^4 \frac{1}{4!} = 0,0006 < 0,001.$$

Beraz, errorea 0,001 baino txikiagoa da, hots, $\sin 20° = 0,343$ da, errorea 0,001 baino txikiagoa delarik.



96. IRUDIA

96. irudian $f(x) = \sin x$ funtzioa eta bere lehen hiru hurbilketen grafikoak irudikaturik daude:

$$S_1(x) = x; \quad S_2(x) = x - \frac{x^3}{3!}; \quad S_3(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}.$$

3. $f(x) = \cos x$ funtzioaren garapena. $f(x) = \cos x$ funtzioaren ondoz ondoko deribatuen balioak $x = 0$ puntuan kalkulatuz eta Maclaurin-en formulan sartuz, garapen hau lortuko dugu:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + \frac{x^n}{n!}\cos\left(n\frac{\pi}{2}\right) + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\cos\left[\xi + (n+1)\frac{\pi}{2}\right], \quad |\xi| < |x|.$$

Hemen ere, $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x) = 0$ x-ren edozein baliotarako.

Ariketak

Ondoko funtzioetarako Rolle-ren teorema betetzen dela egiaztatu.

1. $y = x^2 - 3x + 2$, $[1,2]$ tartean.

2. $y = x^3 + 5x^2 - 6x$, $[0,1]$ tartean.

3. $y = (x-1)(x-2)(x-3)$, $[1,3]$ tartean.

4. $y = \sin^2 x$, $[0,\pi]$ tartean.

5. $f(x) = 4x^3 + x^2 - 4x - 1$ funtzioak ± 1 erroak ditu. Rolle-ren teoreman aztertutako $f'(x)$ deribatuaren erroa aurkitu.

6. $y = \sqrt[3]{x^2 - 5x - 6}$ funtzioaren erroen artean bere deribatuarena aurkitzen dela egiaztatu.

7. $\left[-\frac{\pi}{4}, +\frac{\pi}{4}\right]$ tartean $y = \cos^2 x$ funtziorako Rolle-ren teorema betetzen dela egiaztatu.

8. $y = 1 - \sqrt[5]{x^4}$ funtzioa $[-1,1]$ tarteko muturretan anulatzen da. Funtzioaren deribatua tarte horretako inolako puntutan anulatzen ez dela frogatu. Kasu honetan Rolle-ren teorema aplikagarria ez izatearen arrazoia azaldu.

9. $[x_1,x_2]$ tartean $y = \sin x$ funtziorako Lagrange-ren formula idatzi.
   Em.: $\sin x_2 - \sin x_1 = (x_2 - x_1)\cos c$, $x_1 < c < x_2$.

10. Lagrange-ren formula $[0,1]$ tartean $y = 2x - x^2$ funtziorako baliogarria dela egiaztatu.

11. $y = x^n$ kurbaren zein puntutan da ukitzailea $M_1(0,0)$ eta $M_2(a,a^n)$ puntuak lotzen dituen kordaren paraleloa? Em.: $c = \frac{a}{\sqrt[n-1]{n}}$ abzisa duen puntuan.

12. $y = \ln x$ kurbaren zein puntutan da ukitzailea $M_1(1,0)$ eta $M_2(e,1)$ puntuak lotzen dituen kordaren paraleloa? Em.: $c = e - 1$ abzisa duen puntuan.

Lagrange-ren teorema aplikatuz, hurrengo desberdintzak frogatu:

13. $e^x \geq 1 + x$.

14. $\ln(1+x) < x \quad (x > 0)$.

15. $b^n - a^n < nb^{n-1}(b-a) \quad b > a$ denean.

16. $\arctan x < x$.

17. Cauchy-ren formula aplikatu $[1,2]$ tartean $f(x) = x^2$ eta $\varphi(x) = x^3$ funtzioei eta c aurkitu. Em.: $c = \frac{14}{9}$.

Ondoko limiteak kalkulatu:

18. $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x-1}{x^n - 1}$. Em.: $\frac{1}{n}$.

19. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\sin x}$. Em.: 2.

20. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\tan x - x}{x - \sin x}$. Em.: 2.

21. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^{x^2} - 1}{\cos x - 1}$. Em.: -2.

22. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{\sqrt{1-\cos x}}$. Em.: limitea ez da existitzen ($\sqrt{2}$, $x \to +0$ denean; $-\sqrt{2}$, $x \to -0$ denean).

23. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{\ln \sin x}{(\pi - 2x)^2}$. Em.: $-\frac{1}{8}$.

24. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{a^x - b^x}{x}$. Em.: $\ln \frac{a}{b}$.

25. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x - \arcsin x}{\sin^3 x}$. Em.: $-\frac{1}{6}$.

26. $\lim\limits_{x\to a} \frac{\sin x - \sin a}{x - a}$. Em.: $\cos a$.

27. $\lim\limits_{y\to 0} \dfrac{e^y + \sin y - 1}{\ln(1+y)}$. Em.: 2.

28. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x \sin x - x}{3x^2 + x^5}$. Em.: $\dfrac{1}{3}$.

29. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x-1}{2x+5}$. Em.: $\dfrac{3}{2}$.

30. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\ln x}{x^n}$ ($n>0$ izanik). Em.: 0.

31. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)}{\operatorname{arc\,cot} x}$. Em.: 1.

32. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\ln\dfrac{x+1}{x}}{\ln\dfrac{x-1}{x}}$. Em.: -1.

33. $\lim\limits_{y\to+\infty} \dfrac{y}{e^{ay}}$. Em.: 0, $a>0$ denean; ∞, $a\le 0$ denean.

34. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$. Em.: 1.

35. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln\sin 3x}{\ln\sin x}$. Em.: 1.

36. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln\tan 7x}{\ln\tan 2x}$. Em.: 1.

37. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\ln(x-1)-x}{\tan\dfrac{\pi}{2x}}$. Em.: 0.

38. $\lim\limits_{x\to 1} (1-x)\tan\dfrac{\pi x}{2}$. Em.: $\dfrac{2}{\pi}$.

39. $\lim\limits_{x\to 1}\left[\dfrac{2}{x^2-1} - \dfrac{1}{x-1}\right]$. Em.: $-\dfrac{1}{2}$.

40. $\lim\limits_{x\to 1}\left[\dfrac{1}{\ln x} - \dfrac{x}{\ln x}\right]$. Em.: -1.

41. $\lim\limits_{\varphi\to\frac{\pi}{2}} (\sec\varphi - \tan\varphi)$. Em.: 0.

42. $\lim\limits_{x\to 1}\left[\dfrac{x}{x-1} - \dfrac{1}{\ln x}\right]$. Em.: $\dfrac{1}{2}$.

43. $\lim\limits_{x\to 0} x\cot 2x$. Em.: $\dfrac{1}{2}$.

44. $\lim\limits_{x\to 0} x^2 e^{\frac{1}{x^2}}$. Em.: ∞.

45. $\lim\limits_{x\to 1} x^{\frac{1}{1-x}}$. Em.: $\dfrac{1}{e}$.

46. $\lim\limits_{t\to\infty} \sqrt[t]{t^2}$. Em.: 1.

47. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}\right)^{\tan x}$. Em.: 1.

48. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{a}{x}\right)^x$. Em.: e^a.

49. $\lim\limits_{x\to 0} (\cot x)^{\frac{1}{\ln x}}$. Em.: $\dfrac{1}{e}$.

50. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} (\cos x)^{\frac{\pi}{2}-x}$. Em.: 1.

51. $\lim\limits_{\varphi\to 0}\left(\dfrac{\sin\varphi}{\varphi}\right)^{\frac{1}{\varphi^2}}$. Em.: $\dfrac{1}{\sqrt[6]{e}}$.

52. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\tan\dfrac{\pi x}{4}\right)^{\tan\frac{\pi x}{2}}$. Em.: $\dfrac{1}{e}$.

53. $x^4 - 5x^3 + 5x^2 + x + 2$ polinomioa $(x-2)$ kenduraren berreduraz garatu.
Em.: $2 - 7(x-2) - (x-2)^2 + 3(x-2)^3 + (x-2)^4$.

54. $x^5 + 2x^4 - x^2 + x + 1$ polinomioa $(x+1)$ baturaren berreduraz garatu.
Em.: $(x+1)^2 + 2(x+1)^3 - 3(x+1)^4 + (x+1)^5$.

55. $y = \sqrt{x}$ funtzioari Taylor-en formula aplikatu, $a = 1$, $n = 3$ denean.

Em.: $\sqrt{x} = 1 + \dfrac{x-1}{1}\cdot\dfrac{1}{2} - \dfrac{(x-1)^2}{1\cdot 2}\cdot\dfrac{1}{4} + \dfrac{(x-1)^3}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot\dfrac{3}{8} - \dfrac{(x-1)^4}{4!}\cdot\dfrac{5}{16}\times$

$\times\ [1+\theta(x-1)]^{-\frac{7}{2}},\ 0<\theta<1.$

56. $y = \sqrt{1+x}$ funtzioari Maclaurin-en formula aplikatu $n = 2$ denean.

Em.: $\sqrt{1+x} = 1 + \dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{8}x^2 + \dfrac{x^3}{16(1+\theta x)^{\frac{5}{2}}},\ 0<\theta<1.$

57. Aurreko ariketaren emaitzak hartuz $\sqrt{1+x} \approx 1 + \dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{8}x^2$ berdintza hurbilduaren errorea bornatu, $x = 0{,}2$ denean. Em.: $1/2.10^3$ baino txikiagoa.

x-ren balio txikietarako baliogarriak diren hurrengo berdintza hurbilduen jatorria azaldu, beraien errorea bornatuz:

58. $\ln\cos x \approx -\dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^4}{12}$.

59. $\tan x \approx x + \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{2x^5}{15}$.

60. $\arcsin x \approx x + \dfrac{x^3}{6}$.

61. $\arctan x \approx x - \dfrac{x^3}{3}$.

62. $\dfrac{e^x + e^{-x}}{2} \approx 1 + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{24}$.

63. $\ln\left(x + \sqrt{1 - x^2}\right) \approx x - \dfrac{x^3}{3!}$.

Taylor-en formula erabiliz, ondoko adierazpenen limiteak kalkulatu:

64. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x - \sin x}{e^x - 1 - x - \dfrac{x^2}{2}}$. Em.: 1.

65. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln^2(1 + x) - \sin^2 x}{1 - e^{-x^2}}$. Em.: 0.

66. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2(\tan x - \sin x) - x^3}{x^5}$. Em.: 1.

67. $\lim\limits_{x \to 0} \left[x - x^2 \ln\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)\right]$. Em.: $\dfrac{1}{2}$.

68. $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{1}{x^2} - \dfrac{\cot x}{x}\right)$. Em.: $\dfrac{1}{3}$.

69. $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{1}{x^2} - \cot^2 x\right)$. Em.: $\dfrac{2}{3}$.

V. GAIA

FUNTZIOEN ALDAKUNTZAREN ANALISIA

§ 1. Orokortasunak

Naturaren fenomeno desberdinen arteko erlazio kuantitatiboen azterketak, fenomeno bakoitzean parte hartzen duten aldagaien arteko menpekotasun funtzionala ikererazten digu. Menpekotasun funtzional hori era analitikoan, hau da, formula bat edo batzuren bidez, adieraztea lortzen bada, aipatutako menpekotasuna iker daiteke analisi matematikoaren metodoez baliatuz. Adibidez, hutseango jaurtikigai baten higiduraren fenomenoa aztertzerakoan, R tiramena, α tiro-angelu eta v_0 hasierako abiaduraren funtzio bezala mugatzen duen formula lortzen da:

$$R = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}$$

(non g grabitatearen azelerazioa den).

Formula horren bidez ezar dezakegu zein α angeluri dagokion R tiramena, maximoa edo minimoa, zer baldintzatan α angeluaren hazkundeak tiramenaren gehikuntza mugatzen duen, etab..

Kontsidera dezagun beste adibide bat. Esegidur sistema batean karga baten oszilazioen (bagoi batenak, automobil batenak, etab.) azterketaren ondorioz, orekagunearekiko kargaren y desbidazioaren formula t denboraren funtzioan lortzen da:

$$y = e^{-kt}(A\cos\omega t + B\sin\omega t).$$

Formulan parte hartzen duten k, A, B, ω magnitudeek, emandako sistema oszilakor baterako balio mugatua dute (t denborarekiko aldatzen ez diren esegiduraren elastizitatearen, aplikatutako kargaren, etab.en menpean daude) eta, horregatik, konstantetzat hartzen dira.

Formula horren bidez, ezar daiteke t-ren zein baliotarako y desbidazioa hazten den t gehitzerakoan; denborarekiko desbidazio maximoaren magnitutea nola aldatzen den; t-ren zein baliotarako desbidazio horiek maximoak diren; t-ren zein baliori dagozkion kargaren higiduraren abiadura maximoak, etab..

Aipatutako problema guztiek "funtzio baten aldakuntzaren analisi" kontzeptuan parte hartzen dute. Funtzioaren balioak puntu isolatuetan kalkulatuz (II. gaian egin genuen bezala), kontsideraturiko kontu guztiak argitzea zaila izango dela begien bistan dago. Gai honen helburua funtzioen aldakuntzaren analisirako metodo orokorra ezartzea da.

§ 2. Funtzio baten gorapena eta beherapena

I. gaiko § 6 atalean funtzio gorakorrak eta berakorrak definitu ditugu. Orain aplika diezaiogun deribatuaren kontzeptua funtzioen gorapen eta beherapenaren analisiari.

Teorema. 1) $[a,b]$ tartean deribagarria den $f(x)$ funtzioa, tarte horretan gorakorra bada, bere deribatua bertan ez da negatiboa, hots, $f'(x) \geq 0$.

2) $f(x)$ funtzioa $[a,b]$ tartean jarraia eta (a,b) tartean deribagarria bada, $a < x < b$ puntuetarako $f'(x)$ positiboa denean, $f(x)$ funtzio gorakorra da $[a,b]$ tartean.

Frogapena. Froga dezagun teoremaren lehen zatia. $f(x)$ $[a,b]$ tartean gorakorra dela suposa dezagun; x argumentuari Δx gehikuntza eman diezaiogun eta ondoko arrazoia kontsidera dezagun

$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}. \tag{1}$$

$f(x)$ funtzioa gorakorra denez,

$$f(x+\Delta x) > f(x) \qquad \Delta x > 0 \quad \text{denean,}$$

eta

$$f(x+\Delta x) < f(x) \qquad \Delta x < 0 \quad \text{denean.}$$

Bi kasuetan,

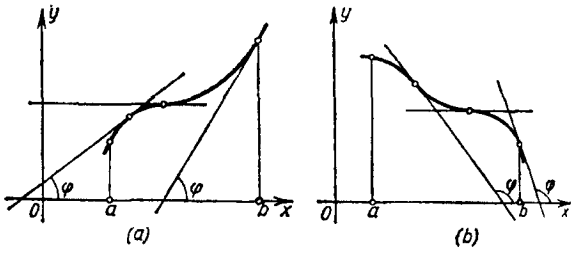
$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} > 0, \tag{2}$$

eta beraz,

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} \geq 0,$$

hau da, $f'(x) \geq 0$, frogatu nahi genuenez. [$f'(x) < 0$ izango balitz, Δx balio nahikoa txikietarako (1) arrazoia negatiboa izango litzateke, (2) erlazioaren kontra legokeena].

Goazen teoremaren bigarren zatira. Biz $f'(x) > 0$ (a,b) tarteko x balio guztietarako.



97. IRUDIA

Kontsidera ditzagun $[a,b]$ tarteko hautazko bi balio, x_1 eta x_2, $x_1 < x_2$. Gehikuntza finituetarako Lagrange-ren teorema dela eta,

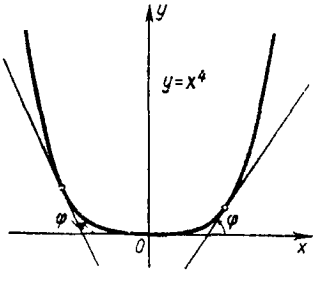
$$f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1); \qquad x_1 < \xi < x_2.$$

Hipotesiaz $f'(\xi) > 0$ denez, $f(x_2) - f(x_1) > 0$, $f(x)$ funtzio gorakorra dela esan nahi duena.

Funtzio beherakorretarako (deribagarriak izatekotan) antzeko teorema bat dago.

$f(x)$ funtzioa $[a,b]$ tartean beherakorra bada, $f'(x) \leq 0$ da bertan. (a,b) tartean $f'(x) < 0$ bada, $f(x)$ funtzioa beherakorra da $[a,b]$ tartean. Funtzioa $[a,b]$ tarteko puntu guztietan jarraia eta (a,b) tarte osoan deribagarria dela suposatzen da.

Oharra. Frogaturiko teoremak ondoko esangura geometrikoa du: $f(x)$ funtzioa $[a,b]$ tartean gorakorra bada, $y = f(x)$ kurbaren ukitzaileak Ox ardatzarekin φ angelu zorrotza osotzen du (zenbait puntutan ardatz horrekiko paraleloa izan daiteke). Angelu horren tangentea ez da negatiboa: $f'(x) = \tan\varphi \geq 0$ (97*a*. irudia).



98. IRUDIA

$f(x)$ funtzioa $[a,b]$ tartean beherakorra bada, zuzen ukitzailearen angelua kamutsa izango da (zenbait puntutan ukitzailea Ox ardatzarekiko paraleloa izan daiteke). Angeluaren tangentea ez da positiboa (97b. irudia).

Modu berean uler daiteke teoremaren bigarren zatia. Teoremak funtzioaren gorapena edo beherapena aztertzen uzten digu bere deribatuaren zeinuaren bidez.

Adibidea. Hurrengo funtzioaren gorapen eta beherapen-eremuak mugatu

$$y = x^4.$$

Ebazpena. Deribatua $y' = 4x^3$ da; $y' > 0$, $x > 0$ denean; hots, funtzioa gorakorra da; $y' < 0$, $x < 0$ denean, hau da, funtzioa beherakorra da (98. irudia).

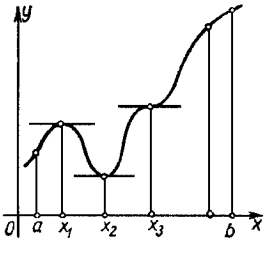
§ 3. Funtzioen maximoa eta minimoa

Maximoaren definizioa. $f(x)$ funtzioak x_1 puntuan *maximo* bat duela esaten da, bere balioa bertan x_1 puntua bere barnean duen tarte bateko edozein x puntutan baino handiagoa bada. Hau da, $f(x)$ funtzioak $x = x_1$ puntuan maximo bat du, baldin $f(x_1 + \Delta x) < f(x_1)$ balio absolutuan nahiko txikia den Δx-ren edozein baliotarako (positiboa ala negatiboa)[1].

Honela, adibidez, $y = f(x)$ funtzioak, zeinaren grafikoa 99. irudian agertzen den, $x = x_1$-ean maximo bat du.

Minimoaren definizioa. $f(x)$ funtzioak $x = x_2$ puntuan *minimo* bat duela esaten da, baldin

$$f(x_2 + \Delta x) > f(x_2)$$



99. IRUDIA

bada balio absolutuan nahiko txikia den Δx-ren edozein baliotarako (positiboa ala negatiboa) (99. irudia).

Adibidez, aurreko atalaren amaieran azterturiko $y = x^4$ funtzioak (ikus 98. irudia) $x = 0$ puntuan minimo bat du, $x = 0$ denean $y = 0$ bait da eta $y > 0$ x-ren beste balioetarako.

Maximo eta minimoaren definizio horiek direla eta, ondokoa kontutan hartu behar da:

---

1) Batzutan, definizio hori modu honetan ematen da: $f(x)$ funtzioak x_1 puntuan maximo bat du, baldin x_1 puntuaren (α,β) ingurune bat existitzen bada $(\alpha < x_1 < \beta)$ non bertako x_1-en desberdinak diren puntu guztietarako, $f(x) < f(x_1)$ desberdintza betetzen den.

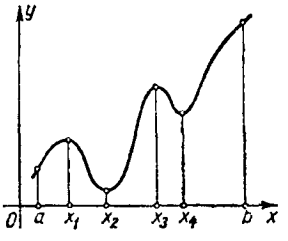
1. Tarte itxi batean definituriko funtzio batek, kontsideraturiko tartearen barneko puntuetan baino ez du bere balio maximoa edo minimoa hartzen.

2. Funtzio baten maximoa eta minimoa tarte horretan hartzen dituen baliorik handiena eta txikiena direla suposatzea errore bat izango litzateke. Maximoaren puntuan, funtzioak baliorik handiena du maximoaren puntutik nahikoa hurbil dauden puntuetan dituen balioekin konparatuta soilik. Minimoaren puntuan, funtzioak baliorik txikiena du minimoaren puntutik nahikoa hurbil dauden puntuetan dituen balioekin konparatuta soilik.

100. irudian $[a,b]$ tartean definituriko funtzio bat adierazten da, non

$x=x_1$ eta $x=x_3$ puntuetan maximo bana,
$x=x_2$ eta $x=x_4$ puntuetan minimo bana

dituen, baina funtzioaren $x=x_4$ puntuko minimoa, $x=x_1$ puntuan dagoen maximoa baino handiago da. $x=b$ punturako, funtzioaren balioa handiago da kontsideraturiko tartean funtzioaren edozein maximo baino.



100. IRUDIA

Maximo eta minimoei funtzioaren *mutur-balio* deritzegu.

Funtzioaren mutur-balioek eta $[a,b]$ tarteko kokapenak argumentuaren aldakuntzarekiko funtzioaren aldakuntza mugatzen dute nolabait.

Geroxeago muturrak kalkulatzeko modua adieraziko dugu.

1. Teorema. (Mutur-balioen existentziarako beharrezko baldintza). $y=f(x)$ funtzio deribagarriak $x=x_1$ puntuan maximo bat edo minimo bat badu, bere deribatua puntu horretan anulatzen da, hau da, $f'(x)=0$.

Frogapena. Demagun funtzioak $x=x_1$ puntuan maximo bat duela. Orduan, Δx $(\Delta x \neq 0)$ gehikuntzetarako, balio absolutuan nahiko txikiak direlarik, ondokoa betetzen da:

$$f(x_1+\Delta x) < f(x_1),$$

hau da,

$$f(x_1+\Delta x) - f(x_1) < 0.$$

Baina kasu honetan,

$$\frac{f(x_1+\Delta x)-f(x_1)}{\Delta x}$$

arrazoiaren zeinua, Δx-renaren bidez mugatzen da,

$$\frac{f(x_1+\Delta x)-f(x_1)}{\Delta x}>0 \qquad \Delta x<0 \quad \text{denean,}$$
$$\frac{f(x_1+\Delta x)-f(x_1)}{\Delta x}<0 \qquad \Delta x>0 \quad \text{denean.}$$

Deribatuaren definizioaren arabera,

$$f'(x_1)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_1+\Delta x)-f(x_1)}{\Delta x}.$$

$f(x)$ funtzioak $x=x_1$ puntuan deribatua badu, bigarren ataleko limitea ez da Δx-k (positiboa ala negatiboa mantenduz) zerorantz jotzen duen moduaren menpekoa.

Baina baldin $\Delta x\to 0$ bada, negatiboa mantenduz:

$$f'(x_1)\geq 0.$$

Baldin $\Delta x\to 0$ bada, positiboa mantenduz:

$$f'(x_1)\leq 0.$$

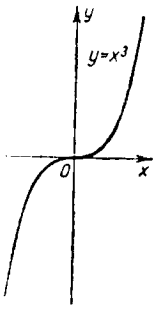
$f'(x)$ Δx-k zerorantz jotzen duen moduaren menpekoa ez den zenbaki mugatua denez, azken bi desberdintzak bateragarriak izango dira

$$f'(x_1)=0$$

denean soilik.

Era berean frogatzen da teorema, funtzioaren minimoaz aritzen denean.

Teorema horrek ondoko esangura geometrikoa du: maximo eta minimoaren puntuetan $f(x)$ funtzioak deribatua badu, $y=f(x)$ kurbaren zuzen ukitzailea puntu horretan Ox ardatzarekiko paraleloa izango da. Izan ere, baldin $f'(x_1)=\tan\varphi=0$ bada (non φ Ox ardatzak eta ukitzaileak osoturiko angelua den) $\varphi=0$ izango da (99. irudia).



101. IRUDIA

Teorema horretatik ondorioztatzen da $f(x)$ funtzioak x argumentuaren kontsideraturiko edozein baliotarako deribatua badu, funtzioak mutur-balioak (maximoa edo minimoa) deribatua anulatzen den puntuetan soilik eduki ditzakeela. Elkarrekikoa ez da egia: funtzio batek deribatua anulatzen den puntu batean ez maximorik ez minimorik ez izatea gerta daiteke. 99. irudian funtzio bat erakusten da, $x = x_3$ puntuan bere deribatua nulua delarik (ukitzailea horizontala da); dena dela, funtzioak puntu honetan ez du ez maximorik ez minimorik. Antzeko moduan, $y = x^3$ funtzioak (101. irudia) $x = 0$ puntuan deribatu nulua du:

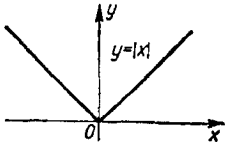
$$(y')_{x=0} = (3x^2)_{x=0} = 0,$$

baina puntu horretan funtzioak ez du ez maximorik ez minimorik. Izan ere, x puntua 0 puntutik oso hurbil aurkitu arren, beti beteko da

$$x^3 < 0 \quad \text{baldin} \quad x < 0,$$
$$x^3 > 0 \quad \text{baldin} \quad x > 0.$$

Tarteko puntu guztietan deribatua duen funtzioaren kasua aztertu dugu. Eta, zer gertatzen da deribatua existitzen ez den puntuetan? Hurrengo adibideetan funtzioak deribatua ez duen puntuetan bai maximoa edo minimoa egon daitekeela, edo ez bata ez bestea ez egotea ere suerta daitekeela azalduko dugu.

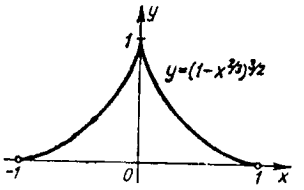
1. Adibidea. $y = |x|$ funtzioak ez du deribaturik $x = 0$ puntuan (puntu horretan kurbak ez dauka ukitzaile mugaturik), baina bertan funtzioak minimo bat onartzen du; izan ere, $y = 0$ da $x = 0$ denean, desberdin zero den edozein x puntutarako $y > 0$ dugun bitartean (102. irudia).



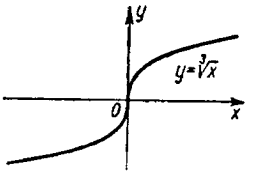
102. IRUDIA

2. Adibidea. $y = (1 - x^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}$ funtzioak ez du deribaturik $x = 0$ puntuan, $y' = -(1 - x^{\frac{2}{3}})^{\frac{1}{2}} x^{-\frac{1}{3}}$ adierazpenak infiniturantz jotzen bait du x-k zerorantz jotzen duenean; dena den, puntu horretan funtzioak maximo bat dauka: $f(0) = 1$, $f(x) < 1$ zero ez diren x-ren balioetarako (103. irudia).

3. Adibidea. $y=\sqrt[3]{x}$ funtzioak ez du deribaturik $x=0$ puntuan ($y'\to\infty$ $x\to 0$ denean). Puntu horretan funtzioak ez du maximorik ezta minimorik ere, $f(0)=0$, $x<0$ denean $f(x)<0$ eta $x>0$ denean $f(x)>0$ direnez gero (104. irudia).



103. IRUDIA



104. IRUDIA

Beraz, funtzioak muturrak izan ditzake deribatua existitzen eta zero den puntuetan soilik, edo bestela deribatua existitzen ez deneko puntuetan.

Ohar gaitezen deribatua puntu batean ez, baina bere inguruko puntuetan existitzen bada, funtzioaren deribatuak puntu horretan etengune bat izango duenaz.

Argumentuaren baloiei, non deribatua anulatzen den edo etengune bat duen, *balio* edo *puntu kritiko* deritze.

Aurrekoa dela eta, balio kritiko guztietan funtzioak halabeharrez maximoak edo minimoak ez dituela ondorioztatzen da. Dena dela, puntu batean funtzio batek maximo edo minimo bat onartzen badu, puntu hori halabeharrez kritikoa da. Horregatik, funtzioaren mutur-balioak kalkulatzeko hurrengo eran aritzen da: puntu kritiko guztiak aurkitzen ditugu eta gero bakoitza aztertzen dugu, bertan maximo edo minimo bat dagoen argituz.

Funtzioaren analisia puntu kritikoetan hurrengo teoremetan oinarritzen da.

2. Teorema. (Mutur-balioen existentziarako baldintza nahikoak). Suposa dezagun $f(x)$ funtzioa tarte batean, x_1 puntu kritikoa bere barnekoa delarik, jarraia eta bertako puntu guztietan (agian x_1 puntu berean ezik) deribagarria dela. Puntu horretatik ezkerretik eskuinera pasatzerakoan, deribatuaren zeinua "plus"-etik "minus"-era aldatzen bada, funtzioak maximo bat onartzen du $x=x_1$ puntuan. Baldin x_1 puntutik pasatzerakoan, ezkerretik eskuinera, deribatuaren zeinua "minus"-etik "plus"-era aldatzen bada, funtzioak minimo bat onartzen du puntu horretan.

Hori dela eta:

$$\text{baldin a)}\ \begin{cases} f'(x)>0 & x<x_1 \text{ denean} \\ f'(x)<0 & x>x_1 \text{ denean} \end{cases}$$

funtzioak maximo bat du x_1 puntuan;

$$\text{baldin b)} \begin{cases} f'(x) < 0 & x < x_1 \text{ denean} \\ f'(x) > 0 & x > x_1 \text{ denean} \end{cases}$$

funtzioak minimo bat du x_1 puntuan. Kontutan hartu behar da a) eta b) baldintzak x_1 baliotik nahikoa hurbil dauden x-ren balio guztietarako, hau da, x_1 puntu kritikoaren nahikoa txikia den ingurune bateko puntu guztietan, bete behar direla.

Frogapena. Lehenbizikoan ikus dezagun deribatuaren zeinua "plus"-etik "minus"-era aldatzearen kasua, hots, x_1 puntutik nahikoa hurbilak diren x puntu guztietarako, ondokoa betetzen da:

$$f'(x) > 0 \quad x < x_1 \text{ denean,}$$
$$f'(x) < 0 \quad x > x_1 \text{ denean.}$$

$f(x) - f(x_1)$ kendurari Lagrange-ren teorema aplikatuz,

$$f(x) - f(x_1) = f'(\xi)(x - x_1)$$

lortuko dugu, non ξ puntua x eta x_1 puntuen artekoa den.

1) Biz $x < x_1$, orduan,

$$\xi < x_1, \quad f'(\xi) > 0, \quad f'(\xi)(x - x_1) < 0$$

eta beraz,

$$f(x) - f(x_1) < 0,$$

hau da,

$$f(x) < f(x_1). \tag{1}$$

2) Biz $x > x_1$, orduan,

$$\xi > x_1, \quad f'(\xi) < 0, \quad f'(\xi)(x - x_1) < 0$$

eta beraz,

$$f(x) - f(x_1) < 0,$$

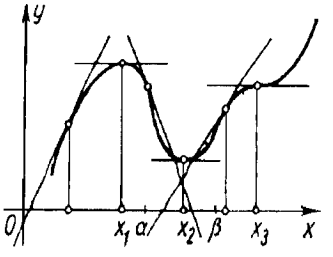
hau da,

$$f(x) < f(x_1). \tag{2}$$

(1) eta (2) erlazioek x_1-etik nahikoa hurbilak diren balio guztietarako funtzioaren balioak x_1 puntuari dagokion balioa baino txikiagoak direla erakusten dute. Beraz, puntu horretan $f(x)$ funtzioak maximo bat du.

Antzeko eran frogatzen da teoremaren bigarren zatia, hau da, balio minimoa izateko baldintza nahikoa.

105. irudiak argiro erakusten digu 2. teoremaren esangura.



105. IRUDIA

Suposa dezagun $x = x_1$ puntuan $f'(x_1) = 0$ daukagula, eta x_1-etik nahikoa hurbila den puntu bakoitzean hurrengo desberdintzak betetzen direla:

$$f'(x) > 0 \quad x < x_1 \quad \text{denean,}$$
$$f'(x) < 0 \quad x > x_1 \quad \text{denean.}$$

Orduan, $x < x_1$ denean kurbaren ukitzaileak angelu zorrotza osotzen du Ox ardatzarekin, funtzioa gorakorra delarik; $x > x_1$ denean, ukitzaileak eta Ox ardatzak osoturiko angelua kamutsa da, eta funtzioa beherakorra. $x = x_1$ izatekotan, funtzioa, gorakorra zena, beheratzen hasten da, hau da, maximo bat du.

Baldin x_2 puntuan $f'(x_2) = 0$ eta x_2-tik nahikoa hurbilak diren x-ren balio guztietarako hurrengo desberdintzak betetzen badira:

$$f'(x) < 0 \quad x < x_2 \quad \text{denean,}$$
$$f'(x) > 0 \quad x > x_2 \quad \text{denean,}$$

$x < x_2$ denean kurbaren ukitzaileak angelu kamutsa osotzen du Ox ardatzarekin, funtzioa beherakorra delarik; $x > x_2$ denean, ukitzaileak eta Ox ardatzak osoturiko angelua zorrotza da, eta funtzioa gorakorra. $x = x_2$ izatekotan, funtzioa beherakorretik gorakorrera pasatzen da, hau da, minimo bat du.

Baldin x_3 puntuan $f'(x_3) = 0$ eta x_3-tik nahikoa hurbilak diren x-ren balio guztietarako hurrengo desberdintzak betetzen badira:

$$f'(x) > 0 \quad x < x_3 \quad \text{denean}$$
$$f'(x) > 0 \quad x > x_3 \quad \text{denean,}$$

funtzioa gorakorra da $x < x_3$ zein $x > x_3$ denean. Beraz, $x = x_3$ kasuan funtzioak ez du ez maximorik ez minimorik.

Hain zuzen, horixe da $y = x^3$ funtzioaren kasua $x = 0$ denean.

Izan ere, deribatua $y' = 3x^2$ denez,

$$(y')_{x=0} = 0,$$
$$(y')_{x<0} > 0,$$
$$(y')_{x>0} > 0,$$

funtzioak $x = 0$ puntuan ez maximorik ez minimorik ez duela esan nahi duena (101. irudia).

§ 4. Funtzio deribagarri baten maximo eta minimoaren analisia lehen deribatuaren bidez

Lehenik azaldutakoan oinarrituz, $y = f(x)$ funtzio deribagarri baten maximo eta minimoen analisirako jarraitu behar den prozedura enuntzia dezakegu.

1. Funtzioaren $f'(x)$ lehen deribatua aurkitu.

2. x argumentuaren balio kritikoak aurkitu, horretarako hurrengoa beharrezkoa delarik:

a) lehen deribatua berdin zero egin eta $f'(x) = 0$ lorturiko ekuazioaren erro errealak aurkitu;

b) x-ren balioak, zeinetarako $f'(x)$ deribatua etena den, mugatu.

3. Puntu kritikoaren ezkerraldean eta eskuinaldean deribatuaren zeinua aztertu. Bi puntu kritikoren arteko tartean deribatuaren zeinua aldatzen ez denez gero, puntu kritikoaren (adibidez, x_2) bi alboetan deribatuaren zeinua aztertzeko, α eta β puntuetan ($x_1 < \alpha < x_2$, $x_2 < \beta < x_3$, non x_1 eta x_3 x_2-ren ondoko bi puntu kritikoak diren) deribatuaren zeinua aztertzea nahikoa izango da.

4. Argumentuaren balio kritiko bakoitzerako $f(x)$ funtzioaren balioak kalkulatu.

Era horretan, ondoko eskema lortzen da:

x_1 puntu kritikotik pasatzerakoan $f'(x)$ deribatuaren zeinua			Puntu kritikoaren izaera
$x < x_1$	$x = x_1$	$x > x_1$	
+	$f'(x_1) = 0$ edo etena	−	Maximoa
−	$f'(x_1) = 0$ edo etena	+	Minimoa
+	$f'(x_1) = 0$ edo etena	+	Ez dago ez maximorik ez minimorik (funtzioa gorakorra da)
−	$f'(x_1) = 0$ edo etena	−	Ez dago ez maximorik ez minimorik (funtzioa beherakorra da)

1. Adibidea. Hurrengo funtzioaren maximoak eta minimoak aurkitu,

$$y = \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x + 1.$$

Ebazpena. 1) Lehen deribatua aurkitzen dugu:

$$y' = x^2 - 4x + 3.$$

2) Deribatuaren erro errealak kalkulatzen ditugu:

$$x^2 - 4x + 3 = 0.$$

Hortaz,

$$x_1 = 1, \qquad x_2 = 3.$$

Deribatua puntu guztietan jarraia da, eta beraz ez dago beste puntu kritikorik.

3) Balio kritikoak aztertzen ditugu eta emaitzak 106. irudira daramatzagu.

Lehen puntu kritikoa $x_1 = 1$ da. $y' = (x-1)(x-3)$ denez:

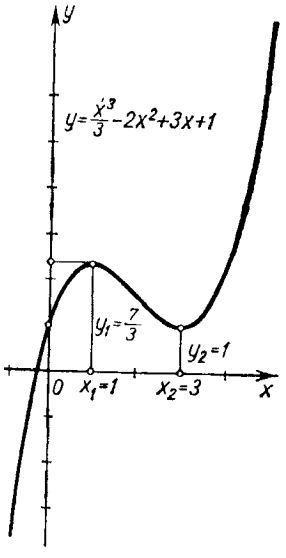
$x < 1$ denean: $y' = (-)\cdot(-) > 0$;
$x > 1$ denean: $y' = (+)\cdot(-) < 0$.

Horrek $x_1 = 1$ puntutik pasatzerakoan (ezkerretik eskuinera), deribatuaren zeinua "plus"-etik "minus"--era aldatzen dela esan nahi du. Beraz, $x = 1$ puntuan funtzioak maximo bat du:

$$(y)_{x=1} = \frac{7}{3}.$$

Bigarren puntu kritikoa $x_2 = 3$ da:

$x < 3$ denean: $y' = (+)\cdot(-) < 0$;
$x > 3$ denean: $y' = (+)\cdot(+) > 0$.



106. IRUDIA

Horrek $x_1 = 3$ puntutik pasatzerakoan, deribatuaren zeinua "minus"-etik "plus"-era aldatzen dela esan nahi du. Beraz, $x = 3$ puntuan funtzioak minimo bat du:

$$(y)_{x=3} = 1.$$

Analisi honetan oinarrituz, funtzioaren grafikoa marratzen dugu (106. irudia).

2. Adibidea. Hurrengo funtzioaren maximoak eta minimoak aurkitu,

$$y = (x-1)\sqrt[3]{x^2}.$$

Ebazpena. 1) Lehen deribatua kalkulatzen dugu:

$$y' = \sqrt[3]{x^2} + \frac{2(x-1)}{3\sqrt[3]{x}} = \frac{5x-2}{3\sqrt[3]{x}}.$$

2) Argumentuaren balio kritikoak kalkulatzen ditugu: a) puntuak kalkulatzen ditugu, non lehen deribatua anulatzen den

$$y' = \frac{5x-2}{3\sqrt[3]{x}} = 0, \quad x_1 = \frac{2}{5};$$

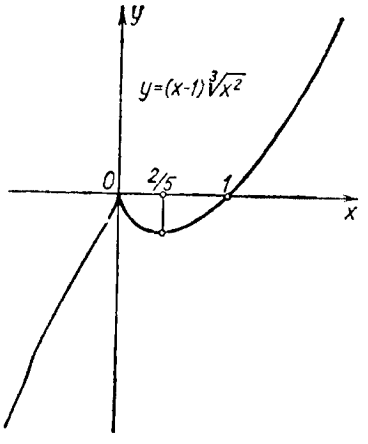
b) Puntuak non lehen deribatua etena den kalkulatzen ditugu (hemen deribatua infinitua egiten da). Horrela gertatzen da ondoko puntu honetan

$$x_2 = 0.$$

($x_2 = 0$ denean, funtzioa definituta dagoenaz eta jarraia denaz ohar gaitezen).

Ez dago puntu kritiko gehiagorik.

3) Lorturiko puntu kritikoen izaera azter dezagun. Lehendabizikoan $x_1 = \frac{2}{5}$ puntua mia dezagun.



107. IRUDIA

$$(y')_{x<\frac{2}{5}} < 0, \qquad (y')_{x>\frac{2}{5}} > 0$$

denez, funtzioak $x = \frac{2}{5}$ puntuan minimo bat duela ondorioztatzen dugu. Puntu horretan funtzioaren balioa

$$(y')_{x=\frac{2}{5}} = \left(\frac{2}{5} - 1\right)\sqrt[3]{\frac{4}{25}} = -\frac{3}{5}\sqrt[3]{\frac{4}{25}}$$

da. Orain $x = 0$ bigarren puntu kritikoa azter dezagun.

$$(y')_{x<0} > 0, \qquad (y')_{x>0} < 0$$

denez, funtzioak $x = 0$ puntuan maximo bat duela ondorioztatzen dugu, $(y)_{x=0} = 0$ dena. Aztertutako funtzioaren grafikoa 107. irudian agertzen da.

§ 5. Funtzio baten maximo eta minimoaren analisia bigarren deribatuaren bidez

Suposa dezagun $x = x_1$ puntuan $y = f(x)$ funtzioaren deribatua anulatzen dela, hau da, $f'(x_1) = 0$. Gainera, onar dezagun $f''(x)$ bigarren deribatua existitzen dela eta x_1 puntuaren ingurune batean jarraia dela. Kasu horretan ondoko teorema baliogarria da:

Teorema. Baldin $f'(x_1) = 0$ bada, $x = x_1$ puntuan funtzioak maximo bat du baldin $f''(x_1) < 0$, eta minimo bat baldin $f''(x_1) > 0$ badira.

Frogapena. Lehenik teoremaren lehen zatia froga dezagun. Suposa dezagun

$$f'(x_1) = 0 \qquad \text{eta} \qquad f''(x_1) < 0.$$

Hipotesiaz $x = x_1$ puntuaren ingurune batean $f''(x)$ jarraia denez gero, $x = x_1$ puntua bere barnean duen tarte nahikoa txikia existituko da, bere puntu guztietan $f''(x)$ bigarren deribatua negatiboa delarik.

$f''(x)$ lehen deribatuaren deribatua, $f''(x) = (f'(x))'$, izateagatik, $(f'(x))' < 0$ baldintzatik $x = x_1$ puntua bere barnean duen tartean $f'(x)$ beherakorra dela ondorioztatzen da (V. gaiko § 2). Baina $f'(x_1) = 0$. Beraz, tarte horretan $x < x_1$ denean $f'(x_1) > 0$ eta $x > x_1$ denean $f'(x_1) < 0$ beteko da, hau da, $f(x)$ deribatuaren zeinua "plus"-etik "minus"-era aldatzen da $x = x_1$ puntutik pasatzerakoan, puntu horretan $f(x)$ funtzioak maximo bat duela esan nahi duena. Teoremaren lehen zatia frogatuta geratzen da.

Era berean teoremaren bigarren zatia frogatzen da: baldin $f''(x_1) > 0$ bada $f''(x) > 0$ x_1 bere barnean duen aipaturiko tarteko puntu guztietan; baina, kasu horretan, emandako tartean $f''(x) = (f'(x))' > 0$ eta beraz $f'(x)$ gorakorra. $f'(x_1) = 0$ denez, x_1 puntutik pasatzerakoan, $f'(x)$ deribatuaren zeinua "minus"-etik "plus"-era aldatzen da, hau da, $f(x)$ funtzioak minimo bat du $x = x_1$ puntuan.

Baldin $f''(x_1) = 0$ bada puntu kritikoan, puntu horretan maximo edo minimo bat egon daiteke, baina gerta daiteke ez bata ez bestea ez existitzea. Kasu honetan, analisia lehen metodoa erabiliz egin behar da (ikus V. gaiko § 4).

Bigarren deribatuaren bidezko mutur-balioen azterketaren emaitza ondoko taularen bidez labur daiteke:

$f'(x_1)$	$f''(x_1)$	Puntu kritikoaren izaera
0	–	Maximoaren puntua
0	+	Minimoaren puntua
0	0	Ezezaguna

1. Adibidea. $y = 2\sin x + \cos 2x$ funtzioaren maximoak eta minimoak aurkitu.

Ebazpena. Funtzioa periodikoa denez eta 2π periodoa duenez, $[0,2\pi]$ tartean aztertzea nahikoa da.

1) Deribatua kalkulatzen dugu

$$y' = 2\cos x - 2\sin 2x = 2(\cos x - 2\sin x\cos x) = 2\cos x(1 - 2\sin x).$$

2) Argumentuaren balio kritikoak kalkulatzen ditugu:

$$2\cos x(1-2\sin x)=0,$$

$$x_1=\frac{\pi}{6};\quad x_2=\frac{\pi}{2};\quad x_3=\frac{5\pi}{6};\quad x_4=\frac{3\pi}{2}.$$

3) Bigarren deribatua aurkitzen dugu:

$$y''=-2\sin x-4\cos 2x.$$

4) Puntu kritiko bakoitzaren izaera aztertzen dugu:

$$(y'')_{x=\frac{\pi}{6}}=-2\cdot\frac{1}{2}-4\cdot\frac{1}{2}=-3<0.$$

Hortaz, $x_1=\frac{\pi}{6}$ puntuan

$$(y)_{x=\frac{\pi}{6}}=2\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$$

maximoa daukagu.

Gero,

$$(y'')_{x=\frac{\pi}{2}}=-2\cdot 1-4\cdot(-1)=2>0.$$

Beraz, $x_2=\frac{\pi}{2}$ puntuan

$$(y)_{x=\frac{\pi}{2}}=2\cdot 1-1=1$$

minimoa daukagu.

$x_3=\frac{5\pi}{6}$ puntuan:

$$(y'')_{x=\frac{5\pi}{6}} = -2\cdot\frac{1}{2} - 4\cdot\frac{1}{2} = -3 < 0.$$

Beraz, $x_3 = \frac{5\pi}{6}$ puntuan funtzioak

$$(y)_{x_3=\frac{5\pi}{6}} = 2\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

maximoa du.

Azkenik,

$$(y'')_{x=\frac{3\pi}{2}} = -2(-1) - 4(-1) = 6 > 0.$$

Horregatik, $x_4 = \frac{3\pi}{2}$ puntuan

$$(y)_{x=\frac{3\pi}{2}} = 2(-1) - 1 = -3$$

minimoa daukagu.

Azterturiko funtzioaren grafikoa 108. irudian adierazten da.

Orain erakuts dezagun, zenbait adibideren bidez, $f'(x_1) = 0$ eta $f''(x_1) = 0$ izatekotan, $x = x_1$ puntuan $f(x)$ funtzioak maximo edo minimo bat izan dezakeela; baita ez bata ez bestea ez existitzea gerta daitekeela ere.

2. Adibidea. $y = 1 - x^4$ funtzioaren maximoak eta minimoak mugatu.

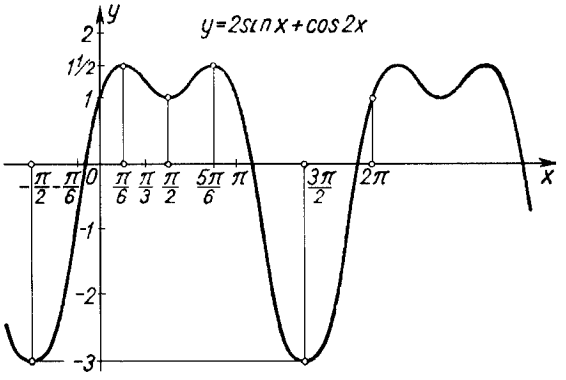
Ebazpena. 1) Puntu kritikoak aurki ditzagun:

$$y' = -4x^3, \quad -4x^3 = 0, \quad x = 0.$$

2) Azter dezagun bigarren deribatuaren zeinua $x = 0$ puntuan:

$$y'' = -12x^2, \quad (y'')_{x=0} = 0.$$

Beraz, kasu honetan ezinezkoa da puntu kritikoaren izaera mugatzea bigarren deribatuaren zeinuaren bidez.

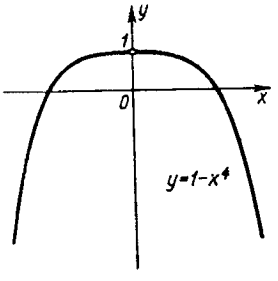


108. IRUDIA

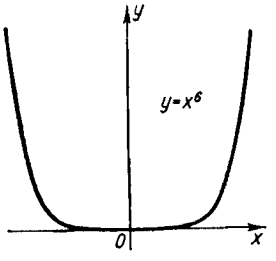
3) Iker dezagun puntu kritikoaren izaera lehen metodoaren bidez (V. gaiko §4):

$$(y')_{x<0} > 0, \quad (y')_{x>0} < 0.$$

Hortaz, $x=0$ puntuan funtzioak $(y)_{x=0} = 0$ maximoa du.
Kontsideraturiko funtzioaren grafikoa 109. irudian adierazten da.



109. IRUDIA



110. IRUDIA

3. Adibidea. $y = x^6$ funtzioaren maximoak eta minimoak mugatu.

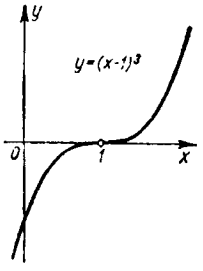
Ebazpena. Bigarren metodoaren bidez,

$$1)\ y' = 6x^5, \quad y' = 6x^5 = 0, \quad x = 0; \qquad 2)\ y'' = 30x^4, \quad (y'')_{x=0} = 0.$$

Beraz, bigarren metodoak ez du erantzunik ematen. Lehen metodoaz baliatuz

$$(y')_{x<0} < 0, \quad (y')_{x>0} > 0.$$

Hortaz, $x=0$ denean funtzioak minimo bat du (110. irudia)



111. IRUDIA

4. Adibidea. $y=(x-1)^3$ funtzioaren maximoa eta minimoa aztertu.

Ebazpena. Bigarren metodoa:

$$y'=3(x-1)^2, \quad 3(x-1)^2=0, \quad x=1;$$

$$y''=6(x-1), \quad (y'')_{x=1}=0.$$

Kasu honetan bigarren metodoak ez du erantzunik ematen. Lehen metodoa erabiliz:

$$(y')_{x<1}>0, \quad (y'')_{x>1}>0.$$

Beraz, $x=0$ denean funtzioak ez du ez maximorik ez minimorik (111. irudia).

§ 6. Funtzio baten balio maximoa eta minimoa tarte batean

Biz $y=f(x)$ funtzio jarraia $[a,b]$ tarte batean. Orduan, tarte horretan funtzioak maximo bat eta minimo bat hartuko ditu (II. gaiko § 10). Suposa dezagun emandako tartean $f(x)$ funtzioak puntu kritikoen kopuru finitua duela. Balio maximoa $[a,b]$ tartearen barnean hartzen bada, argi dago balio hori funtzioaren maximoetako bat (zenbait maximo badago) izango dela, hots, maximorik handiena. Baina gerta daiteke balio maximoa tarteko muturretako batean hartua izatea.

Honelatan, $[a,b]$ tartean funtzioak bere balio maximoa emandako tartearen mutur batean ala barneko puntu batean, maximoarenean, hartzen du.

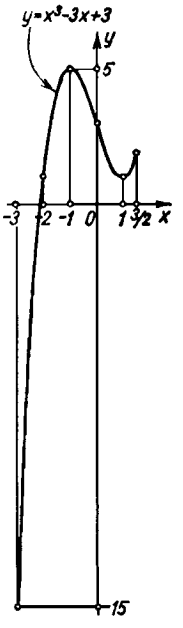
Berbera esan daiteke funtzioaren balio minimoaz: berau tartearen mutur batean ala barneko puntu batean, minimoarenean, hartzen da. Esandakotik $[a,b]$ tarte batean funtzio jarrai baten balio maximoa aurkitzeko ondoko erregela ondorioztatzen da:

1) tartean funtzioaren maximo guztiak aurkitu;

2) tartearen muturretan funtzioaren balioak mugatu, hau da, $f(a)$ eta $f(b)$ kalkulatu;

3) lortutako balio horietatik balio handiena hautatu. Honek tarte bateko funtzioaren balio maximoa adieraziko du. Modu berean ihardun behar da tarte bateko funtzioaren balio minimoa mugatzerakoan.

Adibidea. $\left[-3;\ \frac{3}{2}\right]$ tartean $y = x^3 - 3x + 3$ funtzioaren balio maximoa eta minimoa mugatu.



112. IRUDIA

Ebazpena. 1) $\left[-3;\ \frac{3}{2}\right]$ tartean funtzioaren maximoak eta minimoak aurkituko ditugu:

$$y' = 3x^2 - 3, \quad 3x^2 - 3 = 0, \quad x_1 = 1, \quad x_2 = -1,$$

$$y'' = 6x, \quad (y'')_{x=1} = 6 > 0.$$

Beraz, $x = 1$ puntuan minimo bat dago:

$$(y)_{x=1} = 1.$$

Beste aldetik,

$$(y'')_{x=-1} = -6 < 0.$$

Orduan, $x = -1$ puntuan maximo bat dago:

$$(y)_{x=-1} = 5.$$

2) Kalkula ditzagun funtzioaren balioak tartearen muturretan:

$$(y)_{x=\frac{3}{2}} = \frac{15}{8}, \quad (y)_{x=-3} = -15.$$

Era honetan, $\left[-3; \frac{3}{2}\right]$ tartean azterturiko funtzioaren balio maximoa hauxe da:

$$(y)_{x=-1} = 5,$$

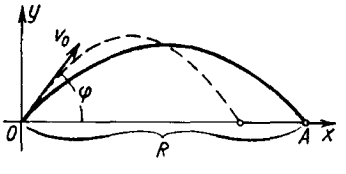
eta balio minimoa:

$$(y)_{x=-3} = -15.$$

Funtzioaren grafikoa 112. irudian adierazten da.

§ 7. Funtzioen maximo eta minimoen teoriaren aplikazioak problemen ebazpenean

Maximo eta minimoen teoriak geometriazko, mekanikazko, etab. ariketa anitz ebazten uzten du. Horietako batzuk kontsideratuko ditugu.



113. IRUDIA

1. Problema. Jautikigai baten $R = OA$ tiramena (hutsean) (113. irudia), horizontearekiko φ gorapen-angelua duen artilleri pieza batek v_0 hasierako abiaduraz jaurtikitakoa, ondoko formularen bidez mugatzen da:

$$R = \frac{v_0^2 \sin 2\varphi}{g}$$

(g grabitatearen azelerazioa delarik). v_0 hasierako abiadura emanik, R distantzia maximoa izateko φ angelua mugatu.

Ebazpena. R magnitudea φ angelu aldakorraren funtzioa da. Iker dezagun funtzio horren maximoa $0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$ tartean.

$$\frac{dR}{d\varphi} = \frac{2v_0^2 \cos 2\varphi}{g}; \qquad \frac{2v_0^2 \cos 2\varphi}{g} = 0;$$

$$\text{balio kritikoa: } \varphi = \frac{\pi}{4};$$

beste aldetik,

$$\frac{d^2R}{d\varphi^2} = -\frac{4v_0^2 \sin 2\varphi}{g}; \qquad \left(\frac{d^2R}{d\varphi^2}\right)_{\varphi=\frac{\pi}{4}} = -\frac{4v_0^2}{g} < 0.$$

Beraz, $\varphi = \frac{\pi}{4}$ baliorako R funtzioak maximoa du:

$$(R)_{\varphi=\frac{\pi}{4}} = \frac{v_0^2}{g}.$$

R funtzioaren balioak $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ tartearen muturretan hauexek dira:

$$(R)_{\varphi=0} = 0, \qquad (R)_{\varphi=\frac{\pi}{2}} = 0.$$

Honelatan, aurkitutako maximoa R-ren baliorik handiena dugu.

2. Problema. Zein dimentsio izan behar ditu zilindro batek, v bolumena emanda, bere S azalera totala minimoa izateko?

Ebazpena. r eta h-ren bidez zilindroaren oinarriaren erradioa eta bere altuera adieraziz:

$$S = 2\pi r^2 + 2\pi rh.$$

Zilindroaren bolumena ezaguna bada, hurrengo formularen bidez h r-ren funtzio bezala adierazten da:

$$v = \pi r^2 h,$$

hortaz,

$$h = \frac{v}{\pi r^2}.$$

S ematen duen formulan h-ren adierazpena ordezkatuz,

$$S = 2\pi r^2 + 2\pi r \frac{v}{\pi r^2},$$

lortuko dugu, hau da,

$$S = 2\left(\pi r^2 + \frac{v}{r}\right).$$

Hemen v emandako balioa dugu. Beraz, S r aldagai independente bakar baten funtzioa bezala adieraztea lortu dugu.

Aurki dezagun funtzio horren balio minimoa $0 < r < \infty$ tartean

$$\frac{dS}{dr} = 2\left(2\pi r - \frac{v}{r^2}\right),$$

$$2\pi r - \frac{v}{r^2} = 0, \qquad r_1 = \sqrt[3]{\frac{v}{2\pi}},$$

$$\left(\frac{d^2S}{dr^2}\right)_{r=r_1} = 2\left(2\pi + \frac{2v}{r^3}\right)_{r=r_1} > 0.$$

Hori dela medio, S funtzioak minimo bat du $r = r_1$ puntuan. Ohar gaitezen $\lim\limits_{r\to 0} S = \infty$ eta $\lim\limits_{r\to\infty} S = \infty$ direnaz, hots, r-k zerorantz edo infiniturantz jotzen duenean, S azalera infinituki handitzen da, S funtzioak bere balio minimoa $r = r_1$ puntuan hartzen duela ziurtatzen diguna.

Baina baldin $r = \sqrt[3]{\frac{v}{2\pi}}$ bada,

$$h = \frac{v}{\pi r^2} = 2\sqrt[3]{\frac{v}{2\pi}} = 2r.$$

Beraz, v bolumena eman eta gero, S azalera totala minimoa izateko zilindroaren altuera oinarriaren diametroaren berdina izan behar da.

§ 8. Funtzio baten balio maximo eta minimoen analisia Taylor-en formularen bidez

V. gaiko § 5 atalean adierazi denez, $x = a$ puntuan $f'(a) = 0$ eta $f''(a) = 0$ badira, maximo bat edo minimo bat existi daiteke, ala ez bata ez bestea. Aipatutako kasuan problema ebazteko, lehen deribatuaren bidezko analisia egitea gomendatzen dela komentatu dugu, hots, lehen deribatuaren zeinua $x = a$ puntuaren ezkerretik eta eskuinetik aztertuz.

Kasu honetan, Taylor-en formularen bidezko azterketa ere erabil daiteke (IV. gaiko § 6).

Azterketa orokortzeko asmoz, suposa dezagun $f''(a) = 0$ ezezik, $f(x)$ funtzioaren n. ordenarainoko deribatuak ere $x = a$ puntuan anulatzen direla:

$$f'(a) = f''(a) = \ldots = f^{(n)}(a) = 0, \qquad (1)$$

baina

$$f^{(n+1)}(a) \neq 0.$$

Horrez gain, demagun $x = a$ puntuaren ingurune batean $f(x)$-ren $(n + 1)$. ordenarainoko deribatuak jarraiak direla.

(1) berdintzak kontutan hartuz, $f(x)$ funtziorako Taylor-en formula idatz dezagun.

$$f(x) = f(a) + \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi), \qquad (2)$$

non ξ zenbakia a eta x-ren artekoa den. $f^{(n+1)}(x)$ a puntuaren ingurune batean jarraia denez, $f^{(n+1)}(a) \neq 0$ delarik, nahikoa txikia den h zenbaki positibo bat existituko da non $|x-a| < h$ desberdintza betetzen duen edozein x-tarako $f^{(n+1)}(x) \neq 0$ izango den. Horrez gain, baldin $f^{(n+1)}(a) > 0$ bada, $(a-h, a+h)$ tarteko puntu guztietan $f^{(n+1)}(x) > 0$ izango dugu; baldin $f^{(n+1)}(a) < 0$ bada, aipatutako tarteko puntuetan $f^{(n+1)}(x)$ negatiboa izango da.

(2) formula hurrengo moduan idatz dezagun:

$$f(x) - f(a) = \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi) \qquad (2')$$

eta kasu partikular desberdinak azter ditzagun.

Lehen kasua: n zenbaki bakoitia da.

a) Biz $f^{(n+1)}(a) < 0$. Orduan $(a-h, a+h)$ tarte bat existituko da non $(n+1)$. ordenako deribatua negatiboa den. x tarte horretako puntua izanez, ξ ere $a-h$ eta $a+h$ puntuen artean aurkituko da. Beraz, $f^{(n+1)}(\xi) < 0$. $n+1$ zenbaki bikoitia denez gero, $(x-a)^{(n+1)} > 0$ baldin $x \neq a$ eta, horregatik, (2') formulako bigarren atala negatiboa da.

Hori dela eta, $x \neq a$ izatekotan, tarteko puntu guztietan

$$f(x) - f(a) < 0$$

izango dugu, funtzioak $x = a$ puntuan maximo bat duela esan nahi duena.

b) Biz $f^{(n+1)}(a) > 0$. Orduan, nahikoa txikia den h baliorako $f^{(n+1)}(\xi) > 0$ dugu $(a-h, a+h)$ tarteko puntu guztietan. Beraz, (2') formulako bigarren atala positiboa izango da, hau da, $x \neq a$ izatekotan, aipatutako tarteko puntu guztietan

$$f(x) - f(a) > 0$$

izango dugu, $x = a$ puntuan funtzioak minimo bat duela esan nahi duena.

Bigarren kasua: n zenbaki bikoitia da.

$(n+1)$ zenbakia bakoitia izango da eta $(x-a)^{n+1}$ magnituteak kontrako zeinua edukiko du $x < a$ ala $x > a$ denean. h balio absolutuan nahikoa txikia bada, $(n+1)$. ordenako deribatuak $(a-h, a+h)$ tarteko puntu guztietan a puntuan duen zeinu

berbera edukiko du. Beraz, $f(x)-f(a)$ delakoak kontrako zeinua du $x<a$ ala $x>a$ denean. Horrek, $x=a$ puntuan ez maximo ez minimo ez dagoela esan nahi du.

Ohar gaitezen n bakoitia bada, $f^{(n+1)}(a)>0$ delarik, baldin $x<a$ bada $f(x)>f(a)$ eta baldin $x>a$ bada $f(x)<f(a)$ denaz.

Lorturiko emaitzak ondoko moduan formula daitezke.

$x=a$ puntuan

$$f'(a)=f''(a)=\ldots=f^{(n)}(a)=0$$

bada, anulatzen ez den $f^{(n+1)}(a)$ lehen deribatuaren ordena bikoitia delarik, a puntuan $f(x)$ funtzioak maximo bat edukiko du $f^{(n+1)}(a)<0$ izatekotan; ordea, $f(x)$ funtzioak minimo bat edukiko du $f^{(n+1)}(a)>0$ izatekotan. Anulatzen ez den $f^{(n+1)}(a)$ lehen deribatuaren ordena bakoitia bada, a puntuan $f(x)$ funtzioak ez du ez maximorik ez minimorik. Horrez gain,

$$f(x) \text{ goratzen da } f^{(n+1)}(a)>0 \text{ denean,}$$

$$f(x) \text{ beheratzen da } f^{(n+1)}(a)<0 \text{ denean.}$$

Adibidea. Hurrengo funtzioaren maximoak eta minimoak mugatu:

$$f(x)=x^4-4x^3+6x^2-4x+1.$$

Ebazpena. Funtzioaren balio kritikoak kalkula ditzagun:

$$f'(x)=4x^3-12x^2+12x-4=4(x^3-3x^2+3x-1).$$

$$4(x^3-3x^2+3x-1)=0$$

ekuaziotik

$$x=1$$

puntu kritiko bakarra lortzen dugu (emandako ekuazioak erro erreal bakar bat bait du).

Jarraian, $x=1$ puntu kritikoaren izaera iker dezagun:

$$f''(x) = 12x^2 - 24x + 12 = 0 \quad x = 1 \quad \text{puntuan,}$$
$$f'''(x) = 24x - 24 = 0 \quad x = 1 \quad \text{puntuan,}$$
$$f^{IV}(x) = 24 > 0 \quad x \quad \text{guztietarako.}$$

Beraz, $x = 1$ denean $f(x)$ funtzioak minimo bat du.

§ 9. Kurben ganbiltasuna eta ahurtasuna. Inflexio-puntuak

Biz $f(x)$ funtzio uniformea eta deribagarria adierazten duen $y = f(x)$ kurba launa.

1. Definizioa. Kurba (a,b) tartean *gorantz ganbila* dela esaten da, tarte horretan bere puntu guztiak kurbarekiko edozein ukitzaileren azpitik badaude.

Kurba (b,c) tartean *beherantz ganbila* dela esaten da, tarte horretan bere puntu guztiak kurbarekiko edozein ukitzaileren gainetik badaude.

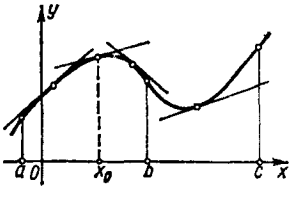
Goranzko ganbiltasuna duten kurbei *ganbil* deritze, beheranzko ganbiltasuna dutenei aldiz, *ahur*.

114. irudian (a,b) tartean ganbila eta (c,d) tartean ahurra den kurba bat erakusten da.

Kurbaren ganbiltasunaren norabidea bere formaren ezaugarri garrantzitsua da. Jarraian, $y = f(x)$ funtzioaren azterketan zehar, bere ganbiltasunaren norabidea, zenbait tartetan, mugatzen lagunduko duten irizpideak emango ditugu.

Ondoko teorema froga dezagun.

1. Teorema. $f(x)$ funtzioaren bigarren deribatua (a,b) tarteko puntu guztietan negatiboa baldin bada, hots, $f''(x) < 0$, tarte horretan $y = f(x)$ kurbak ganbiltasuna gorantz norabidatua du (kurba ganbila da).



114. IRUDIA

Frogapena. Har dezagun (a,b) tarteko $x = x_0$ hautazko puntu bat eta marra dezagun kurbaren ukitzailea $x = x_0$ abzisa duen puntuan (114. irudia). Teorema frogatuta geratuko da, baldin (a,b) tartean kurbako puntu guztiak ukitzailearen azpitik aurkitzen

direla, hau da, $y=f(x)$ kurbako edozein punturen ordenatua ukitzailearen x-ren balio berberarako $\bar{y}$ ordenatua baino txikiagoa dela egiaztatzen badugu.

Kurbaren ekuazioa ondokoa dugu:

$$y = f(x). \tag{1}$$

$x=x_0$ puntuan kurbaren zuzen ukitzailearen ekuazioa

$$\bar{y} - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

da, hau da,

$$\bar{y} = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0). \tag{2}$$

(1) eta (2) ekuazioetatik, x-ren balio berberarako kurba eta ukitzailearen ordenatuen arteko kendura hurrengoa dela ondorioztatzen da,

$$y - \bar{y} = f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0).$$

$f(x) - f(x_0)$ kendurari Lagrange-ren teorema aplikatuz,

$$y - \bar{y} = f'(c)(x - x_0) - f'(x_0)(x - x_0)$$

lortzen dugu (non c x_0 eta x puntuen artekoa den), hots,

$$y - \bar{y} = [f'(c) - f'(x_0)](x - x_0).$$

Kortxeteen arteko adierazpenari Lagrange-ren teorema berriro aplika diezaiogun:

$$y - \bar{y} = f''(c_1)(c - x_0)(x - x_0) \tag{3}$$

(non c_1 x_0 eta c puntuen artekoa den).

Lehenik $x>x_0$ kasua azter dezagun. Hemen: $x_0<c<x$,

$$x - x_0 > 0, \quad c - x_0 > 0$$

denez, eta gainera, hipotesiaz,

$$f''(c_1) < 0$$

denez, (3) ekuaziotik $y-\bar{y}<0$ dela ondorioztatzen da.

Orain $x<x_0$ kasua azter dezagun. Oraingoan: $x<c<c_1<x_0$, eta $x-x_0<0$ eta $c-x_0<0$. Hipotesiaz, $f''(c_1)<0$ denez, (3) berdintzatik ondoko hau ondorioztatzen da:

$$y-\bar{y}<0.$$

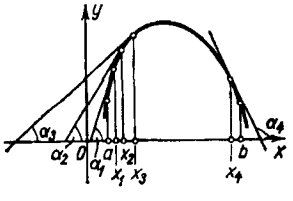
(a,b) tarteko edozein x eta x_0 baliotarako kurbako edozein puntu, horren ukitzailearen azpitik aurkitzen dela egiaztatu dugu. Horrek kurba ganbila dela esan nahi du.

Honela teorema frogatuta geratzen da.

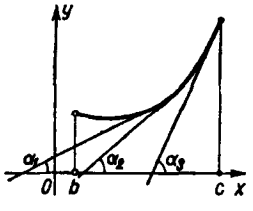
Antzeko moduan hurrengo teorema frogatzen da:

1'. Teorema. $f(x)$ funtzioaren bigarren deribatua (b,c) tarteko puntu guztietan positiboa baldin bada, hots, $f''(x)>0$, tarte horretan $f(x)$ kurbak ganbiltasuna beherantz norabidatua du (kurba ahurra da).

Oharra. 1. eta 1'. teoremen esangura geometrikoa ondoko moduan uler daiteke. (a,b) tartean ganbiltasuna gorantz norabidatua duen $y=f(x)$ kurba azter dezagun (115. irudia). $f'(x)$ deribatua eta x abzisa duen puntuan Ox ardatzak eta kurbaren ukitzaileak osoturiko α angeluaren tangentea berdinak dira, hots, $f'(x)=\tan\alpha$. Beraz, $f''(x)=[\tan\alpha]'_x$.



115. IRUDIA



116. IRUDIA

(a,b) tarteko edozein x-tarako $f''(x)<0$ bada $\tan\alpha$ beheratzen da x hazi ahala. Geometria ikuspuntutik x hazi ahala $\tan\alpha$ beheratzen bada dagokion kurba ganbila izango da. 1. teorema ondorio horren egiaztapen analitikoa da. Era berean uler daiteke geometrikoki 1'. teorema (116. irudia).

1. Adibidea. Hurrengo ekuazioaren bidez emandako kurbaren ganbiltasun eta ahurtasun-tarteak mugatu:

$$y=2-x^2.$$

Ebazpena. Bigarren deribatua

$$y'' = -2 < 0$$

da, edozein x baliotarako. Hortaz, kurba ganbila da bere puntu guztietan (117. irudia).

2. Adibidea. Kurba bat $y = e^x$ ekuazioaren bidez adierazten da.

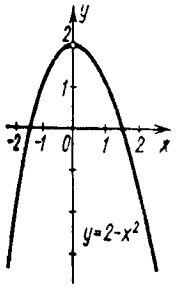
$$y'' = e^x > 0$$

izateagatik, x balio guztietarako kurba ahurra da, hau da, bere ganbiltasuna beherantz norabidatua du (118. irudia).

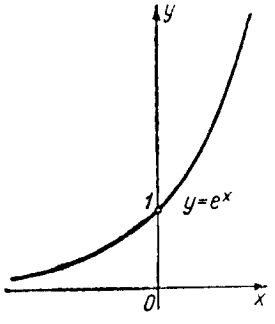
3. Adibidea. Kurba bat $y = x^3$ ekuazioaren bidez adierazten da.

$$y'' = 6x,$$

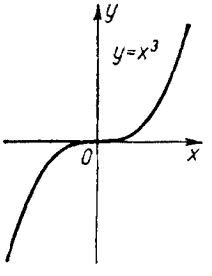
denez gero, $y'' < 0$ baldin $x < 0$ bada eta $y'' > 0$ baldin $x > 0$ bada. Beraz, kurba ganbila da $x < 0$ denean eta ahurra $x > 0$ denean (119. irudia).



117. IRUDIA



118. IRUDIA



119. IRUDIA

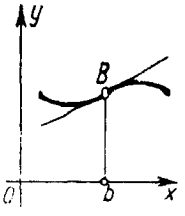
2. Definizioa. Kurba jarrai batean alde ganbila eta ahurra banatzen dituen puntuari kurbaren *inflexio-puntu* deritzo.

119, 120 eta 121 irudietan O, A eta B puntuak inflexio-puntuak dira.

Nabaria denez, inflexio-puntu batean ukitzaileak kurba mozten du, puntuaren alde batean kurba ukitzailearen azpitik eta beste aldean gainetik dagoelarik.

Ezar ditzagun kurbako puntu bat inflexio-puntu izateko baldintza nahikoak.

120. IRUDIA



121. IRUDIA

2. Teorema. Biz $y=f(x)$ ekuazioa duen kurba bat.

Baldin $f''(a)=0$ ala $f''(a)$ existitzen ez bada, eta $f''(x)$ deribatuaren zeinua $x=a$ baliotik pasatzerakoan aldatzen bada, $x=a$ abzisa duen kurbaren puntua inflexio--puntua da.

Frogapena. 1) Biz $f''(x)<0$ $x<a$ denean, eta $f''(x)>0$ $x>a$ denean. Orduan, $x<a$ denean kurba ganbila da eta $x>a$ denean ahurra. Beraz, $x=a$ abzisa duen kurbako A puntua inflexio-puntua da (120. irudia).

2) Biz $f''(x)>0$ baldin $x<b$, eta $f''(x)<0$ baldin $x>b$. Orduan, $x<b$ denean kurba ahurra da eta $x>b$ denean ganbila. Beraz, $x=b$ abzisa duen kurbako B puntua inflexio-puntua da (121. irudia).

4. Adibidea. Hurrengo funtzioaren inflexio-puntuak eta ganbiltasun- eta ahurtasun-eremuak mugatu:

$$y=e^{-x^2} \quad \text{(Gauss-en kurba).}$$

Ebazpena. 1) Lehen eta bigarren deribatuak kalkula ditzagun:

$$y'=-2xe^{-x^2},$$

$$y''=2e^{-x^2}(2x^2-1).$$

2) Bigarren deribatua puntu guztietan existitzen da. Aurki ditzagun x-ren balioak, zeinetarako $y''=0$ den:

$$2e^{-x^2}(2x^2-1)=0,$$

$$x_1=-\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad x_2=\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

3) Lorturiko balioak azter ditzagun:

$$x < \frac{-1}{\sqrt{2}} \quad \text{denean,} \quad y'' > 0 \quad \text{da,}$$
$$x > \frac{-1}{\sqrt{2}} \quad \text{denean,} \quad y'' < 0 \quad \text{da.}$$

Bigarren deribatua zeinuaz aldatzen da x_1 puntutik pasatzerakoan, beraz, $x_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ denean kurban inflexio-puntu bat dago. Bere koordenatuak $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\ e^{-\frac{1}{2}}\right)$ dira.

$$x < \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{denean,} \quad y'' < 0 \quad \text{da,}$$
$$x > \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{denean,} \quad y'' > 0 \quad \text{da.}$$

Horregatik, $x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$ denean kurban inflexio-puntu bat existitzen da, bere koordenatuak $\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\ e^{-\frac{1}{2}}\right)$ direlarik. Bigarren inflexio-puntuaren existentzia kurbaren Oy ardatzarekiko simetriatik ere ondorioztatzen da.

4) Aurrekoa dela eta,

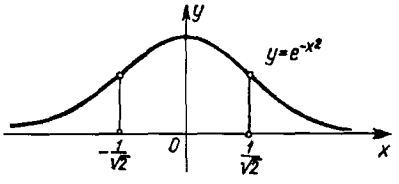
$$-\infty < x < -\frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{denean kurba ahurra da,}$$
$$-\frac{1}{\sqrt{2}} < x < \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{denean kurba ganbila da,}$$
$$+\frac{1}{\sqrt{2}} < x < +\infty \quad \text{denean kurba ahurra da.}$$

5) $y' = 2xe^{-x^2}$ lehen deribatuaren adierazpenetik ondokoa ondorioztatzen da:

$x < 0$ denean, $y' > 0$, hots, funtzioa goratzen da;
$x > 0$ denean, $y' < 0$, hots, funtzioa beheratzen da;
$x = 0$ denean, $y' = 0$.

Puntu horretan funtzioak maximoa du, $y = 1$ baliokoa.

Egindako azterketan oinarrituz, kurbaren grafikoa eraikitzea erraza da (122. irudia).



122. IRUDIA

5. Adibidea. Hurrengo kurbaren inflexio-puntuak lortu:

$$y = x^4.$$

Ebazpena. 1) Bigarren deribatua aurki dezagun:

$$y'' = 12x^2.$$

2) $y'' = 0$ betetzen duten puntuak mugatu:

$$12x^2 = 0, \quad x = 0.$$

3) Lorturiko $x = 0$ balioa azter dezagun;

$x < 0$ denean, $y'' > 0$, kurba ahurra da;
$x > 0$ denean, $y'' > 0$, kurba ahurra da.

Beraz, kurbak ez du inflexio-punturik (123. irudia).

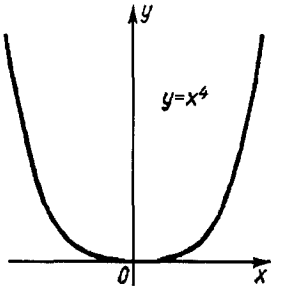
6. Adibidea. Ondoko kurbaren inflexio-puntuak kalkulatu:

$$y = (x-1)^{\frac{1}{3}}.$$

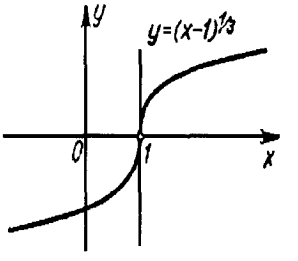
Ebazpena. 1) Lehen eta bigarren deribatuak kalkula ditzagun:

$$y' = \frac{1}{3}(x-1)^{-\frac{2}{3}}; \qquad y'' = -\frac{2}{9}(x-1)^{-\frac{5}{3}}.$$

2) Bigarren deribatua ez da inon anulatzen, baina $x = 1$ baliorako ez da existitzen ($y'' = \pm\infty$).



123. IRUDIA



124. IRUDIA

3) $x = 1$ balioa azter dezagun:

$x < 1$ denean, $y'' > 0$, kurba ahurra da;
$x > 1$ denean, $y'' < 0$, kurba ganbila da.

Beraz, $x = 1$ delakoan inflexio puntu bat dago, (1,0) puntua da.

Ohar gaitezen $x = 1$ denean $y' = \pm\infty$ denaz, hau da, puntu horretan kurbaren ukitzailea bertikala da (124. irudia).

§ 10. Asintotak

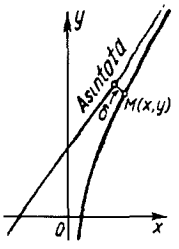
Sarritan $y = f(x)$ kurbaren forma, eta, beraz, dagokion funtzioaren jokabidea, kurbako puntu baten abzisak eta ordenatuak (balio absolutuan), elkarrekin ala banaturik, infiniturantz jotzen dutenean aztertzea beharrezkoa da. Hemen garrantzi handia du azterturiko kurba, kurbako puntu aldakor batek infiniturantz jotzen duenean, zuzen baterantz etengabeki hurbiltzearen kasuak[2].

Definizioa. A zuzen baten eta kurbako M puntu aldakor baten arteko δ distantziak, M puntuak infiniturantz jotzen duenean, zerorantz jotzen badu, zuzen horri kurbaren *asintota* deritzogu (125. eta 126. irudiak).

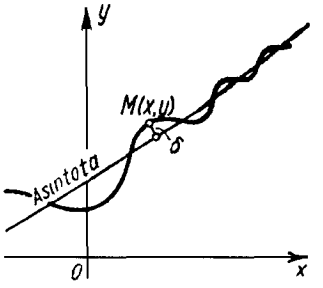
Geroko azterketetarako asintota bertikalak (ordenatu-ardatzarekiko paraleloak) eta zeiharrak (ordenatu-ardatzarekiko paraleloak ez direnak) bereiztuko ditugu.

---

2) Kurbako M puntu aldakorrak infiniturantz jotzen duela esaten da, baldin puntu horren eta koordenatu-jatorriaren arteko distantzia infinituki handitzen bada



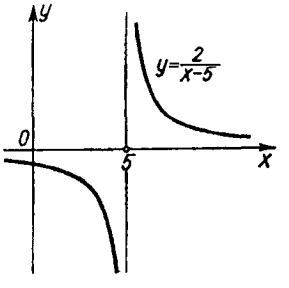
125. IRUDIA



126. IRUDIA

I. Asintota bertikalak.

Asintotaren definiziotik $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)=\infty$, $\lim\limits_{x\to a-0} f(x)=\infty$ edo $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty$ izatekotan, $x=a$ zuzena $y=f(x)$ kurbaren asintota dela ondorioztatzen da. Elkarrekikoki, $x=a$ zuzena asintota baldin bada, aurreko berdintzaren bat betetzen da.



127. IRUDIA

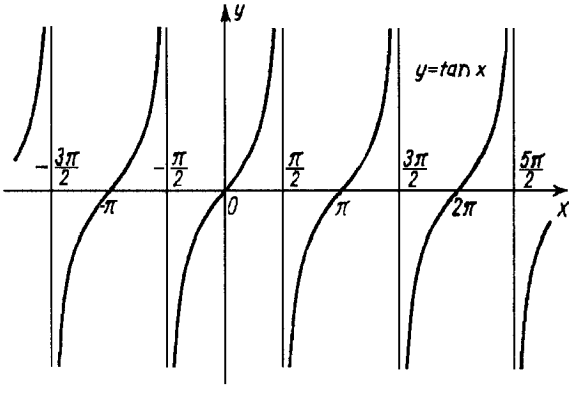
Beraz, asintota bertikalak mugatzeko $x=a$ balioak, zeinetarantz hurbiltzerakoan funtzioak infiniturantz jotzen duen, aurkitu behar dira. Kasu honetan, $x=a$ zuzena asintota bertikala izango da.

1. Adibidea. $y=\dfrac{2}{x-5}$ kurbak $x=5$ asintota bertikala du, $y\to\infty$ bait da, baldin $x\to 5$ bada (127. irudia).

2. Adibidea. $y=\tan x$ kurbak asintota bertikalen kopuru infinitua du:

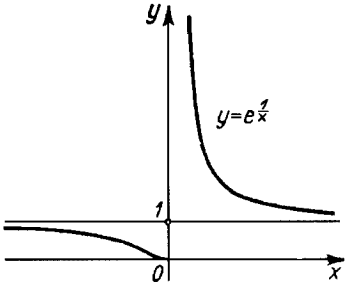
$$x=\pm\frac{\pi}{2};\quad x=\pm\frac{3\pi}{2};\quad x=\pm\frac{5\pi}{2};\ \ldots.$$

Hori, x-k $\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \ldots$ edo $-\frac{\pi}{2}, -\frac{3\pi}{2}, -\frac{5\pi}{2} \ldots$ (128. irudia) balioetarantz jotzen duenean, $\tan x \to \infty$ izatetik ondorioztatzen da.

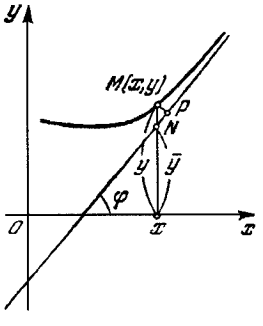


128. IRUDIA

3. Adibidea. $y = e^{\frac{1}{x}}$ kurbak $x = 0$ asintota bertikala du, $\lim\limits_{x \to +0} e^{\frac{1}{x}} = \infty$ izateagatik (129. irudia).



129. IRUDIA



130. IRUDIA

II. Asintota zeiharrak.

Suposa dezagun $y = f(x)$ kurbak asintota zeihar bat duela, horren ekuazioa ondokoa delarik

$$y = kx + b. \qquad (1)$$

k eta b zenbakiak muga ditzagun (130. irudia). Bira $M(x,y)$ kurbako puntu bat eta $N(x,\bar{y})$ asintotakoa. MP zuzenkiaren luzera M puntuaren eta asintotaren arteko distantziaren berdina da. Hipotesiaz,

$$\lim_{x\to+\infty} MP = 0. \tag{2}$$

Asintotak eta Ox ardatzak osoturiko angelua φ-ren bidez adieraziz, ΔNMP triangelutik ondokoa lortzen dugu:

$$NM = \frac{MP}{\cos\varphi}.$$

φ angelu konstantea ($\frac{\pi}{2}$-ren desberdina) denez, aurreko berdintzaren arabera:

$$\lim_{x\to+\infty} NM = 0. \tag{2'}$$

Elkarrekikoki, (2') berdintzatik (2) berdintza ondorioztatzen da. Baina

$$NM = |QM - QN| = |y - \bar{y}| = |f(x) - (kx + b)|$$

betetzen da eta (2') berdintzak

$$\lim_{x\to+\infty} [f(x) - kx - b] = 0 \tag{3}$$

itxura hartzen du.

Horregatik (1) zuzena asintota bada, (3) berdintza betetzen da. Elkarrekikoki, k eta b konstanteetarako (3) berdintza betetzen bada, $y = kx + b$ zuzena asintota izango da.

Orain k eta b muga ditzagun. (3) berdintzan x faktore amankomuna hartuz:

$$\lim_{x\to+\infty} x\left[\frac{f(x)}{x} - k - \frac{b}{x}\right] = 0.$$

$x \to +\infty$ izateagatik, ondoko berdintza bete behar da,

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{f(x)}{x} - k - \frac{b}{x}\right] = 0.$$

b konstante denean, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{b}{x} = 0$. Hortaz,

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{f(x)}{x} - k\right] = 0,$$

hots,

$$k = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}. \tag{4}$$

k ezagutu eta gero, (3) berdintzatik b kalkulatzen dugu:

$$b = \lim_{x\to+\infty} [f(x) - kx]. \tag{5}$$

Honelatan, $y = kx + b$ zuzena asintota bada, k eta b (4) eta (5) formuletatik lortzen dira. Elkarrekikoki, (4) eta (5) limiteak existitzen badira, (3) berdintza betetzen da eta $y = kx + b$ zuzena asintota da. (4) eta (5) limiteren bat existitzen ez bada, kurbak ez du asintotarik.

Ohar gaitezen 130. irudiari dagokion problema $x \to +\infty$ kasuan ikertu dugun arren, arrazonamendu guztiak $x \to -\infty$ kasuan ere baliogarriak direnaz.

4. Adibidea. Hurrengo kurbaren asintotak aurkitu:

$$y = \frac{x^2 + 2x - 1}{x}.$$

Ebazpena. 1) Asintota bertikalak aurki ditzagun:

$$x \to -0 \quad \text{denean,} \quad y \to +\infty;$$
$$x \to +0 \quad \text{denean,} \quad y \to -\infty.$$

Beraz, $x = 0$ zuzena asintota bertikala da.

2) Asintota zeiharrak kalkula ditzagun:

$$k = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2 + 2x - 1}{x^2} = \lim_{x\to\pm\infty}\left[1 + \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2}\right] = 1,$$

hau da,

$$k = 1,$$

$$b = \lim_{x \to \pm\infty} [y - x] = \lim_{x \to \pm\infty} \left[\frac{x^2 + 2x - 1}{x} - x \right] =$$

$$= \lim_{x \to \pm\infty} \left[\frac{x^2 + 2x - 1 - x^2}{x} \right] = \lim_{x \to \pm\infty} \left[2 - \frac{1}{x} \right] = 2,$$

hots,

$$b = 2.$$

Beraz, $y = x + 2$ zuzena kontsideraturiko kurbaren asintota zeiharra dugu.

Kurbaren eta asintotaren posizio erlatiboa ikertzeko, x balio berberarako kurba eta asintotaren ordenatuen arteko kendura azter dezagun:

$$\frac{x^2 + 2x - 1}{x^2} - (x + 2) = -\frac{1}{x}.$$

Kendura negatiboa da $x > 0$ denean, eta positiboa $x < 0$ denean; orduan, $x > 0$ denean kurba asintotaren azpitik aurkitzen da, eta $x < 0$ denean asintotaren gainetik (131. irudia).

5. Adibidea. Ondoko kurbaren asintotak aurkitu:

$$y = e^{-x} \sin x + x.$$

Ebazpena. 1) Argi ta garbi, ez dago asintota bertikalik.

2) Zeiharrak aurkitzeko:

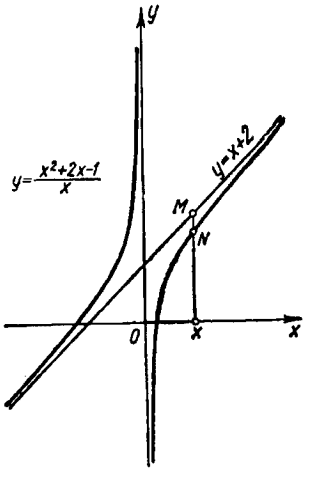
$$k = \lim_{x \to +\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^{-x} \sin x + x}{x} = \lim_{x \to +\infty} \left[\frac{e^{-x} \sin x}{x} + 1 \right] = 1,$$

$$b = \lim_{x \to +\infty} [e^{-x} \sin x + x - x] = \lim_{x \to +\infty} e^{-x} \sin x = 0.$$

Beraz, $y = x$ zuzena asintota zeiharra da $x \to +\infty$ izatekotan. Emandako kurbak ez du asintotarik $x \to -\infty$ kasuan. Hain zuzen, $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{y}{x}$ ez da existitzen,

$$\frac{y}{x} = \frac{e^{-x}}{x} \sin x + 1$$

izateagatik ($x \to -\infty$ denean, lehen batugaia etengabeki handitzen da, eta, beraz, ez du limiterik).



131. IRUDIA

§ 11. Funtzioen analisiaren eta grafikoen eraikuntzaren eskema orokorra

Funtzioen analisia normalki hurrengo elementuak mugatzera murrizten da:

1) funtzioaren definizio-eremu naturala;

2) funtzioaren etenguneak;

3) funtzioaren gorapen- eta beherapen-tarteak;

4) maximo eta minimoen puntuak, baita funtzioaren balio maximo eta minimoak ere;

5) grafikoaren ganbiltasun eta ahurtasun-eremuak eta inflexio-puntuak;

6) funtzioaren asintotak.

Analisi horrek funtzioaren grafikoa eraikitzen laguntzen du (batzutan komenigarriagoa izaten da analisiarekin batera grafikoaren elementuak marratzea).

1. Oharra. Azterturiko $y=f(x)$ funtzioa bikoitia bada, hau da, argumentua zeinuaz aldatzerakoan funtzioaren balioa aldatzen ez bada, hots,

$$f(-x)=f(x),$$

funtzioaren definizio-eremuaren barneko argumentuaren balio positiboetarako funtzioa aztertzea eta bere grafikoa eraikitzea nahikoa izango da. Argumentuaren balio negatiboetarako, funtzioa bikoitia izatekotan, funtzioaren grafikoa ordenatu-ardatzarekiko simetrikoa dela kontutan hartuz eraikitzen da.

1. Adibidea. $y=x^2$ funtzioa bikoitia da, $(-x)^2=(x)^2$ bait da (ikus 5. irudia).

2. Adibidea. $y=\cos x$ bikoitia da, $\cos(-x)=\cos x$ bait da (ikusi 17. irudia).

2. Oharra. $y=f(x)$ funtzioa bakoitia bada, hau da, argumentua zeinuaz aldatzerakoan funtzioa ere zeinuaz aldatzen bada, hots,

$$f(-x)=-f(x),$$

argumentuaren balio positiboetarako funtzioa aztertzea nahikoa izango da. Funtzio bakoiti baten grafikoa koordenatu-jatorriarekiko simetrikoa da.

3. Adibidea. $y=x^3$ funtzioa bakoitia da $(-x)^3=-x^3$ delako (ikus 7. irudia).

4. Adibidea. $y=\sin x$ funtzio bakoitia da, $\sin(-x)=-\sin x$ delako (ikus 16. irudia).

3. Oharra. Funtzioaren zenbait propietateren ezagumenduak beste batzuei buruzko ondorioak ateratzen uzten duenez gero, batzutan lehen emandako ordena aldatzea komenigarria suerta daiteke, emandako funtzioaren berezitasunen arabera. Esate baterako, dagoeneko emandako funtzioa jarraia eta deribagarria dela ezarri badugu, eta bere puntu maximo eta minimoak aurkitzen baditugu, berehala funtzioaren gorapen- eta beherapen--eremuak mugaturik geratzen dira.

5. Adibidea. Hurrengo funtzioa aztertu eta bere grafikoa eraiki:

$$y=\frac{x}{1+x^2}.$$

Ebazpena. 1) Funtzioaren definizio-eremua $-\infty < x < +\infty$ tartea da. Berehala ohartzen gara $x<0$ denean $y<0$ eta $x>0$ denean $y>0$ dugunaz.

2) Funtzioa bere puntu guztietan jarraia da.

3) Funtzioaren maximo eta minimoak muga ditzagun

$$y' = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2} = 0$$

ekuaziotik abiatuz. Puntu kritikoak aurki ditzagun

$$x_1 = -1, \qquad x_2 = 1.$$

Puntu kritikoen izaera azter dezagun:

$$x < -1 \text{ denean, } y' < 0 \text{ dugu;}$$
$$x > -1 \text{ denean, } y' > 0 \text{ dugu.}$$

Beraz, $x=-1$ puntuan funtzioak minimo bat du:

$$y_{\min} = (y)_{x=-1} = -0,5.$$

Modu berean:

$$x < 1 \text{ denean, } y' > 0 \text{ dugu;}$$
$$x > 1 \text{ denean, } y' < 0 \text{ dugu.}$$

Beraz, $x=1$ puntuan funtzioak maximo bat du:

$$y_{\min} = (y)_{x=1} = 0,5.$$

4) Funtzioaren gorapen- eta beherapen-eremuak muga ditzagun:

$-\infty < x < -1$ denean, $y' < 0$ dugu: funtzioa beheratzen da;
$-1 < x < 1$ denean, $y' > 0$ dugu: funtzioa goratzen da;
$1 < x < -\infty$ denean, $y' < 0$ dugu: funtzioa beheratzen da.

5) Kurbaren ganbiltasun- eta ahurtasun-eremuak eta bere inflexio-puntuak muga ditzagun,

$$y'' = \frac{2x(x^2-3)}{(1+x^2)^3} = 0$$

ekuaziotik abiatuz,

$$x_1 = -\sqrt{3}, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = \sqrt{3}$$

lortzen dugu.

y'' x-ren funtzio bezala aztertuz, ondoko hau dugu:

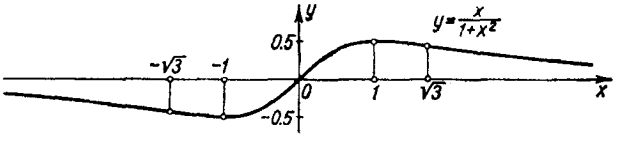
$-\infty < x < -\sqrt{3}$ denean, $y'' < 0$ dugu: funtzioa ganbila da;
$-\sqrt{3} < x < 0$ denean, $y'' > 0$ dugu: funtzioa ahurra da;
$0 < x < \sqrt{3}$ denean, $y'' < 0$ dugu: funtzioa ganbila da;
$\sqrt{3} < x < +\infty$ denean, $y'' > 0$ dugu: funtzioa ahurra da.

Beraz, $x = -\sqrt{3}$, $y = -\frac{\sqrt{3}}{4}$ koordenatuak dituen puntua inflexio-puntua da, (0,0) eta $\left(\sqrt{3}, \frac{\sqrt{3}}{4}\right)$ puntuak bezala.

6) Kurbaren asintotak aurki ditzagun:

$x \to +\infty$ denean, $y \to 0$ dugu;
$x \to -\infty$ denean, $y \to 0$ dugu.

Horregatik, $y = 0$ zuzena asintota horizontal bakarra da. Kurbak ez du asintota bertikalik, x-ren balio finiturik existitzen ez da eta, zeinetarako funtzioak infiniturantz joko duen. Azterturiko kurbaren grafikoa 132. irudian dago.



132. IRUDIA

6. Adibidea. Hurrengo funtzioa aztertu eta bere grafikoa eraiki:

$$y = \sqrt[3]{2ax^2 - x^3}.$$

Ebazpena. 1) Funtzioa x-ren balio guztietarako definituta dago.

2) Funtzioa puntu guztietan jarraia da.

3) Funtzioaren maximo eta minimoak muga ditzagun:

$$y' = \frac{4ax - 3x^2}{3\sqrt[3]{(2ax^2 - x^3)^2}} = \frac{4a - 3x}{3\sqrt[3]{x(2a - x)^2}}.$$

Deribatua puntu guztietan existitzen da, ondokoetan ezik:

$$x_1 = 0 \quad \text{eta} \quad x_2 = 2a.$$

Aurki ditzagun deribatuaren limiteak $x \to -0$ eta $x \to +0$ direnean:

$$\lim_{x \to -0} \frac{4a - 3x}{3\sqrt[3]{x}\ \sqrt[3]{(2a - x)^2}} = -\infty, \qquad \lim_{x \to +0} \frac{4a - 3x}{3\sqrt[3]{x}\ \sqrt[3]{(2a - x)^2}} = +\infty$$

$x < 0$ denean $y' < 0$ dugu; $x > 0$ denean $y' > 0$ dugu.

Beraz, $x = 0$ denean funtzioak minimoa du. Funtzioaren balioa puntu horretan zero da.

Orain azter dezagun funtzioa beste puntu kritikoan, $x_2 = 2a$ puntuan. Baldin $x \to 2a$, deribatuak ere infiniturantz jotzen du. Dena den, kasu honetan, $2a$-tik nahikoa hurbilak diren x-ren balio guztietarako (puntuaren eskuinaldetik zein ezkerraldetik) deribatua negatiboa da. Horregatik, puntu horretan funtzioak ez du ez maximorik ez minimorik. $x_2 = 2a$ puntuan, horren ingurune nahiko txiki batean legez, funtzioa beheratzen da. Kurbaren ukitzailea puntu horretan bertikala da.

$x = \dfrac{4a}{3}$ denean deribatua anulatzen da. Iker dezagun puntu kritiko horren izaera.

Lehen deribatuaren adierazpena aztertuz, ondokoaz jabetzen gara:

$$x < \frac{4a}{3} \quad \text{denean,} \quad y' > 0 \quad \text{dugu,}$$

$$x > \frac{4a}{3} \quad \text{denean,} \quad y' < 0 \quad \text{dugu.}$$

Beraz, funtzioak maximo bat du $x = \frac{4a}{3}$ puntuan:

$$y_{\max} = \frac{2}{3} a \sqrt[3]{4}.$$

4) Egindako analisiaren emaitzak erabiliz, funtzioaren gorapen- eta beherapen--eremuak lortzen ditugu:

$-\infty < x < 0$ denean, funtzioa beheratzen da;

$0 < x < \frac{4a}{3}$ denean, funtzioa goratzen da;

$\frac{4a}{3} < x < +\infty$ denean, funtzioa beheratzen da.

5) Kurbaren ganbiltasun- eta ahurtasun-eremuak eta inflexio-puntuak aurki ditzagun:

$$y'' = -\frac{8a^2}{9x^{\frac{4}{3}}(2a - x)^{\frac{5}{3}}}$$

bigarren deribatua ez da inon anulatzen. Dena dela, bi puntu existitzen dira non bigarren deribatua etena den: $x_1 = 0$ eta $x_2 = 2a$ puntuak.

Iker dezagun bigarren deribatuaren zeinua puntu bakoitzaren ingurunean: $x < 0$ denean $y'' < 0$ dugu, eta kurbak bere ganbiltasuna gorantz norabidatua du; $x > 0$ denean $y'' < 0$ dugu, berbera gertatuz.

Horrek $x = 0$ abzisa duen puntua inflexio-puntu ez dela esan nahi du.

$x < 2a$ denean $y'' < 0$ dugu, eta kurbak bere ganbiltasuna gorantz norabidatua du.

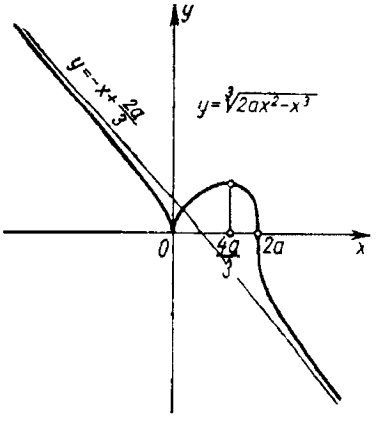
$x > 2a$ denean $y'' > 0$ da, eta alderantzizkoa gertatzen da.

Horrek $(2a,0)$ puntua kurbaren inflexio-puntua dela esan nahi du.

6) Kurbaren asintotak aurki ditzagun:

$$k = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{\sqrt[3]{2ax^2 - x^3}}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \sqrt[3]{\frac{2a}{x} - 1} = -1,$$

$$b = \lim_{x \to \pm\infty} [\sqrt[3]{2ax^2 - x^3} + x] = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{2ax^2 - x^3 + x^3}{\sqrt[3]{(2ax^2 - x^3)^2} - x\sqrt[3]{2ax^2 - x^3} + x^2} = \frac{2a}{3}.$$



133. IRUDIA

Beraz, $y=-x+\dfrac{2a}{3}$ zuzena $y=\sqrt[3]{2ax^2-x^3}$ kurbaren asintota zeiharra da. Funtzioaren grafikoa 133. irudian adierazten da.

§ 12. Era parametrikoan emandako kurben azterketa

Biz ondoko ekuazio parametrikoek emandako kurba:

$$\left.\begin{aligned} x &= \varphi(t), \\ x &= \psi(t). \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Kasu honetan kurbaren analisia eta eraikuntza

$$y=f(x)$$

ekuazioak emandako kurbarako erabili dugunaren antzeko moduan egiten dira.

Lehenbizikoan deribatuak kalkula ditzagun:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \varphi'(t), \\ \frac{dy}{dt} &= \psi'(t). \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Kalkula dezagun deribatua kurbako puntuetan, zeintzuetatik gertu kurba $y=f(x)$ funtzioaren grafiko gisa erabil bait daiteke:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}. \tag{3}$$

Parametroaren $t = t_1, t_2, \ldots, t_k$ balioak, zeinetarako gutxienez $\varphi'(t)$ edo $\psi'(t)$ deribatuetako bat anulatzen den edo etengune bat duen, aurki ditzagun (t-ren balio horiei kritiko deritzegu). (3) formularen arabera, $\frac{dy}{dx}$ deribatuaren zeinua muga dezagun (t_1, t_2); (t_2, t_3); ...; (t_{k-1}, t_k) tarte bakoitzean, eta beraz, (x_1, x_2); (x_2, x_3); ...; (x_{k-1}, x_k) tarteetan, non $x_i = \varphi(t_i)$. Modu horretan gorapen- eta beherapen-eremuak mugatuta geratzen dira. Horrek parametroaren $t_1, t_2, \ldots, t_k$ balioei dagozkien puntuen izaera mugatzeko aukera ematen du. Orduan,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\psi''(t)\varphi'(t) - \varphi''(t)\psi'(t)}{[\varphi'(t)]^2}. \tag{4}$$

Formula horrek kurbako puntu bakoitzean ganbiltasunaren norabidea mugatzen uzten digu. Asintotak aurkitzeko t-ren balioak, zeinen ingurunean x edo y aldagaietako batek infiniturantz jotzen duen, eta t-ren balioak, zeinen ingurunean x eta y aldagaiek aldi berean infiniturantz jotzen duten, bilatzen dira. Gero kurbaren azterketa ohizko eran egiten da. Adibideen bidez era parametrikoan emandako kurben azterketaren zenbait berezitasun erakuts dezagun.

1. Adibidea. Hurrengo ekuazioek emandako kurba aztertu:

$$\left.\begin{aligned} x &= a\cos^3 t, \\ y &= a\sin^3 t. \end{aligned}\right\} \tag{1'}$$

Ebazpena. x eta y balioak t-ren balio guztietarako mugaturik daude. $\cos^3 t$ eta $\sin^3 t$ funtzioak 2π periodoko funtzioak direlarik, t parametroaren aldakuntza 0-tik 2π-rainoko tartean kontutan hartzea nahikoa izango da. $[-a, a]$ tartea definizio-eremua dugu, x zein y-rako. Beraz, azterturiko kurbak ez du asintotarik. Orain deribatuak aurki ditzagun:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -3a\cos^2 t \sin t, \\ \frac{dy}{dt} &= 3a\sin^2 t \cos t. \end{aligned}\right\} \tag{2'}$$

Deribatu horiek $t=0,\ \frac{\pi}{2},\ \pi,\ \frac{3\pi}{2},\ 2\pi$ balioetarako anulatzen dira. Hortik,

$$\frac{dy}{dx}=\frac{3a\sin^2 t\cos t}{-3a\cos^2 t\sin t}=-\tan t. \qquad (3')$$

(2') eta (3') formulak kontutan hartuz, ondoko taula eraikitzen dugu:

t-ren aldakuntz eremua	x-ri dagokion aldakuntz eremua	y-ri dagokion aldakuntz eremua	$\frac{dy}{dx}$-ren zeinua	x-rekiko $y=f(x)$-ren aldakuntzaren izaera
$0<t<\frac{\pi}{2}$	$a>x>0$	$0<y<a$	$-$	Beherakorra
$\frac{\pi}{2}<t<\pi$	$0>x>-a$	$a>y>0$	$+$	Gorakorra
$\pi<t<\frac{3\pi}{2}$	$-a<x<0$	$0>y>-a$	$-$	Beherakorra
$\frac{3\pi}{2}<t<2\pi$	$0<x<a$	$-a<y<0$	$+$	Gorakorra

Taulatik (1') ekuazioek $y=f(x)$ motako bi funtzio jarrai definitzen dutela ondorioztatzen da; $0\le t\le\pi$ denean $y\ge 0$ dugu (taulako lehen bi lerroak ikus), $\pi\le t\le 2\pi$ denean $y<0$ dugu (taulako azken bi lerroak ikus). (3') formulatik ondoko hau ondorioztatzen da:

$$\lim_{t\to\frac{\pi}{2}}\frac{dy}{dx}=\infty \qquad \text{eta} \qquad \lim_{x\to\frac{3\pi}{2}}\frac{dy}{dx}=\infty.$$

Puntu horietan kurbaren ukitzailea bertikala da. Beste aldetik,

$$\left.\frac{dy}{dt}\right|_{t=0}=0 \quad \left.\frac{dy}{dt}\right|_{t=\pi}=0 \quad \left.\frac{dy}{dt}\right|_{t=2\pi}=0.$$

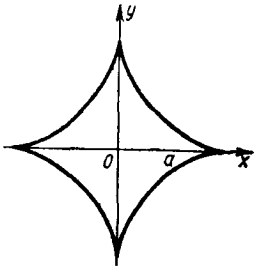
Puntu horietan kurbaren ukitzailea horizontala da. Orain,

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{1}{3a\cos^4 t\sin t}$$

kalkulatu eta gero, zera ondorioztatzen da:

$$\frac{d^2y}{dx^2} > 0 \quad 0 < t < \pi \quad \text{denean, kurba ahurra da,}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} < 0 \quad \pi < t < 2\pi \quad \text{denean, kurba ganbila da.}$$



134. IRUDIA

Lorturiko emaitzek dagokion kurba eraikitzen laguntzen dute (134. irudia). Kurba hori *astroide* deitzen da.

2. Adibidea. Hurrengo ekuazioek emandako kurba (*Descartes-en orria*) eraiki.

$$x = \frac{3at}{1+t^3}, \quad y = \frac{3at^2}{1+t^3}. \qquad (1'')$$

Ebazpena. Bi funtzio horiek t-ren balio guztietarako, $t = -1$ izan ezik, definiturik daude, horrez gain:

$$\lim_{t \to -1-0} x = \lim_{t \to -1-0} \frac{3at}{1+t^3} = +\infty,$$

$$\lim_{t \to -1-0} y = \lim_{t \to -1-0} \frac{3at^2}{1+t^3} = -\infty,$$

$$\lim_{t \to -1+0} x = -\infty, \quad \lim_{t \to -1+0} y = +\infty.$$

Ondokoaz ohar gaitezen:

$$t=0 \text{ denean, } x=0,\ y=0 \text{ dugu,}$$
$$t\to+\infty \text{ denean, } x\to 0,\ y\to 0 \text{ dugu,}$$
$$t\to-\infty \text{ denean, } x\to 0,\ y\to 0 \text{ dugu.}$$

$\dfrac{dx}{dt}$ eta $\dfrac{dy}{dt}$ aurki ditzagun:

$$\frac{dx}{dt}=\frac{6a\left(\frac{1}{2}-t^3\right)}{(1+t^3)^2},\quad \frac{dy}{dt}=\frac{3at(2-t^3)}{(1+t^3)^2}. \tag{2''}$$

t-rako hurrengo balio kritikoak lortzen ditugu:

$$t_1=-1,\quad t_2=0,\quad t_3=\frac{1}{\sqrt[3]{2}},\quad t_4=\sqrt[3]{2}.$$

Orain:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{t(2-t^3)}{2\left(\frac{1}{2}-t^3\right)}. \tag{3''}$$

(1''), (2'') eta (3'') formulak erabiliz, ondoko taula osotzen dugu:

t-ren aldakuntz eremua	x-ri dagokion aldakuntz eremua	y-ri dagokion aldakuntz eremua	$\frac{dy}{dx}$-ren zeinua	x-rekiko $y=f(x)$-ren aldakuntzaren izaera
$-\infty<t<-1$	$0<x<+\infty$	$0>y>-\infty$	$-$	Beherakorra
$-1<t<0$	$-\infty<x<0$	$+\infty>y>0$	$-$	Beherakorra
$0<t<\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$	$0<x<a\sqrt[3]{4}$	$0<y<a\sqrt[3]{2}$	$+$	Gorakorra
$\frac{1}{\sqrt[3]{2}}<t<\sqrt[3]{2}$	$a\sqrt[3]{4}>x>a\sqrt[3]{2}$	$a\sqrt[3]{2}<y<a\sqrt[3]{4}$	$-$	Beherakorra
$\sqrt[3]{2}<t<+\infty$	$a\sqrt[3]{2}>x>0$	$a\sqrt[3]{4}>y>0$	$+$	Gorakorra

(3") formulatik

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{\substack{t=0\\ \begin{pmatrix}x=0\\ y=0\end{pmatrix}}} = 0, \quad \left(\frac{dy}{dx}\right)_{\substack{t=\infty\\ \begin{pmatrix}x=0\\ y=0\end{pmatrix}}} = \infty$$

ondorioztatzen da. Beraz, kurba birritan pasatzen da koordenatu-jatorritik: behin bere ukitzailea Oy ardatzarekiko paraleloa izanik eta bestean ukitzailea Ox ardatzarekiko paraleloa izanik.

Beste aldetik,

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{\substack{t=\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\\ \begin{pmatrix}x=a\sqrt[3]{4}\\ y=a\sqrt[3]{2}\end{pmatrix}}} = \infty.$$

Puntu horretan kurbaren ukitzailea bertikala da.

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{\substack{t=\sqrt[3]{2}\\ \begin{pmatrix}x=a\sqrt[3]{2}\\ y=a\sqrt[3]{4}\end{pmatrix}}} = 0.$$

Puntu horretan kurbaren ukitzailea horizontala da. Asintotak aurki ditzagun:

$$k = \lim_{x\to+\infty}\frac{y}{x} = \lim_{t\to-1-0}\frac{3at^2(1+t^3)}{3at(1+t^3)} = -1,$$

$$b = \lim_{x\to+\infty}(y-kx) = \lim_{t\to-1-0}\left[\frac{3at^2}{1+t^3} - (-1)\frac{3at}{1+t^3}\right] =$$

$$= \lim_{t\to-1-0}\left[\frac{3at(1+t)}{1+t^3}\right] = \lim_{t\to-1-0}\frac{3at}{1-t+t^2} = -a.$$

Horregatik, $y=-x-a$ zuzena kurbaren adar baten asintota da baldin

$$x \to +\infty.$$

Modu berean:

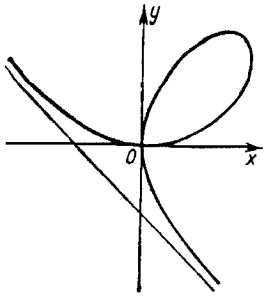
$$k = \lim_{x \to -\infty} \frac{y}{x} = -1,$$

$$b = \lim_{x \to -\infty} (y - kx) = -a.$$

Honelatan, $y = -x - a$ zuzena $x \to -\infty$ delakoari dagokion kurbaren adarraren asintota ere da.

Analisia amaitu eta gero, kurba eraiki dezakegu (135. irudia).

Kurbeen analisiarekin erlazionatuta dauden zenbait problema VIII. gaiko § 20, "Kurba baten puntu singularrak" atalean aztertuko dira.



135. IRUDIA

Ariketak

Hurrengo funtzioen muturrak aurkitu:

1. $y = x^2 - 2x + 3$. Emaitza: $y_{\min} = 2$, $x = 1$ denean.

2. $y = \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x + 1$. Em.: $y_{\max} = \frac{7}{2}$, $x = 1$ denean.

3. $y = x^3 - 9x^2 + 15x + 3$. Em.: $y_{\max} = 10$, $x = 1$ denean; $y_{\min} = -22$, $x = 5$ denean.

4. $y = -x^4 + 2x^2$. Em.: $y_{\max} = 1$, $x = \pm 1$ denean; $y_{\min} = 0$, $x = 0$ denean.

5. $y = x^4 - 8x^2 + 2$. Em.: $y_{\max} = 2$, $x = 0$ denean; $y_{\min} = -14$, $x = \pm 2$ denean.

6. $y = 3x^5 - 125x^3 + 2160x$. Em.: maximoak $x = -4$ eta $x = 3$ direnean; minimoak $x = -3$ eta $x = 4$ direnean.

7. $y = 2 - (x-1)^{\frac{2}{3}}$. Em.: $y_{\max} = 2$, $x = 1$ denean.

8. $y = 3 - 2(x+1)^{\frac{1}{3}}$. Em.: Ez dago ez maximorik ez minimorik.

9. $y = \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + 3x + 2}$. Em.: minimoa $x = \sqrt{2}$ denean; maximoa $x = -\sqrt{2}$ denean.

10. $y = \dfrac{(x-2)(3-x)}{x^2}$. Em.: maximoa $x = \dfrac{12}{5}$ denean.

11. $y = 2e^x + e^{-x}$. Em.: minimoa $x = -\dfrac{\ln 2}{2}$ denean.

12. $y = \dfrac{x}{\ln x}$. Em.: $y_{\min} = e$, $x = e$ denean.

13. $y = \cos x + \sin x \left(-\dfrac{\pi}{2} \le x \le \dfrac{\pi}{2}\right)$. Em.: $y_{\max} = \sqrt{2}$, $x = \dfrac{\pi}{4}$ denean.

14. $y = \sin 2x - x \left(-\dfrac{\pi}{2} \le x \le \dfrac{\pi}{2}\right)$. Em.: maximoa $x = \dfrac{\pi}{6}$ denean; minimoa $x = -\dfrac{\pi}{6}$ denean.

15. $y = x + \tan x$. Em.: Ez dago ez maximorik ez minimorik.

16. $y = e^x \sin x$. Em.: minimoa $x = 2k\pi - \dfrac{\pi}{4}$ denean; maximoa $x = 2k\pi + \dfrac{3\pi}{4}$ denean.

17. $y = x^4 - 2x^2 + 2$. Em.: maximoa $x = 0$ denean; bi minimo $x = -1$ eta $x = 1$ direnean.

18. $y = (x-2)^3(2x+1)$. Em.: $y_{\min} \approx -8{,}24$, $x = \dfrac{1}{8}$ denean.

19. $y = x + \dfrac{1}{x}$. Em.: minimoa $x = 1$ denean; maximoa $x = -1$ denean.

20. $y = x^2(a-x)^2$. Em.: $y_{\max} = \dfrac{a^4}{16}$, $x = \dfrac{a}{2}$ denean; $y_{\min} = 0$, $x = 0$ eta $x = a$ direnean.

21. $y = \dfrac{a^2}{x} + \dfrac{b^2}{a-x}$. Em.: maximoa $x = \dfrac{a^2}{a-b}$; minimoa $x = \dfrac{a^2}{a+b}$ denean.

22. $y = x + \sqrt{1-x}$. Em.: $y_{\max} = \dfrac{5}{4}$, $x = \dfrac{3}{4}$ denean; $y_{\min} = 1$, $x = 1$ denean.

23. $y = x\sqrt{1-x}$ $(x \le 1)$. Em.: $y_{\max} = \dfrac{2}{3}\sqrt{\dfrac{1}{3}}$, $x = \dfrac{2}{3}$ denean.

24. $y = \dfrac{x}{1+x^2}$. Em.: minimoa $x = -1$ denean; maximoa $x = 1$ denean.

25. $y = x \ln x$. Em.: minimoa $x = \dfrac{1}{e}$ denean.

26. $y = x \ln^2 x$. Em.: maximoa $x = \dfrac{1}{e^2}$ denean; minimoa $x = 1$ denean.

27. $y = \ln x - \arctan x$. Em.: funtzio gorakorra da.

28. $y = \sin 3x - 3\sin x$. Em.: minimoa $x = \dfrac{\pi}{2}$ denean; maximoa $x = \dfrac{3\pi}{2}$ denean.

29. $y = 2x + \arctan x$. Em.: Ez dago muturrik.

30. $y = \sin x \ \cos^2 x$. Em.: minimoa $x = \dfrac{\pi}{2}$ denean;

bi maximo $x = \arccos\left(-\sqrt{\dfrac{2}{3}}\right)$ eta $x = \arccos\left(\sqrt{\dfrac{2}{3}}\right)$ direnean.

31. $y = \arcsin(\sin x)$. Em.: maximoa $x = \dfrac{(4m+1)\pi}{2}$ denean;

minimoa $x = \dfrac{(4m+3)\pi}{2}$ denean.

Emandako tarteetan ondoko funtzioen maximo eta minimoak aurkitu:

32. $y = -3x^4 + 6x^2 - 1 \ (-2 \le x \le 2)$. Em.: $y_{\max} = 2$, $x = \pm 1$ denean;
$y_{\min} = -25$, $x = \pm 2$ denean.

33. $y = \dfrac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x + 1 \ (-1 \le x \le 5)$. Em.: $y_{\max} = \dfrac{23}{3}$, $x = 5$ denean;
$y_{\min} = \dfrac{-13}{3}$, $x = -1$ denean.

34. $y = \dfrac{x-1}{x+1} \ (0 \le x \le 4)$. Em.: $y_{\max} = \dfrac{3}{5}$, $x = 4$ denean;
$y_{\min} = -1$, $x = 0$ denean.

35. $y = \sin 2x - x \ \left(-\dfrac{\pi}{2} \le x \le \dfrac{\pi}{2}\right)$. Em.: $y_{\max} = \dfrac{\pi}{2}$, $x = \dfrac{-\pi}{2}$ denean;
$y_{\min} = \dfrac{-\pi}{2}$, $x = \dfrac{\pi}{2}$ denean.

36. a aldeko latorrizko xafla karratu batekin bolumen maximoa edukiko duen goitik irekitako kajoi bat egin behar da. Latorriaren angeluetan karratuak mozten dira eta kajoia eraikitzeko tolesten da. Zein izan behar da mozturiko karratuen aldearen luzera?

Em.: $\dfrac{a}{6}$.

37. Emandako zirkulu batean inskriba daitezkeen laukizuzenetatik azalera maximokoa karratua dela frogatu. Karratua ere perimetro maximokoa dela frogatu.

38. Emandako zirkulu batean inskribaturiko triangelu isoszele guztien artean perimetro maximokoa triangelu aldekidea dela frogatu.

39. h hipotenusa emanda, azalera maximoko triangelu zuzena aurkitu.
Em.: Kateto bakoitzaren luzera $h / \sqrt{2}$ da.

40. R erradioko esfera batean inskribaturiko bolumen maximoko zilindro zuzenaren altuera aurkitu. Em.: Altuera $2R / \sqrt{3}$ da.

41. R erradioko esfera batean inskribaturiko aldeko azalera maximoa duen zilindro zuzenaren altuera aurkitu. Em.: Altuera $R\sqrt{2}$ da.

42. R erradioko esfera batean zirkunskribaturiko bolumen minimoko kono zuzenaren altuera aurkitu. Em.: Altuera $4R$ da (konoaren bolumena esferarenaren bikoitza da).

43. Hondo karratua duen eta goitik irekita dagoen ontzi baten barnea berunez estali behar da. Ontziaren bolumena 32 litrokoa bada, zeintzuk izan behar dira bere dimentsioak berunaren kantitatea minimoa izateko? Em.: Altuera 0,2 m da, eta oinarriaren aldea 0,4 m da (hots, oinarriaren aldea altueraren bikoitza izan behar da).

44. Edukiera maximoa izango duen ubide ireki bat eraiki nahi da. Ubidearen oinarriaren eta aldeen zabalera 10 cm-koak izan behar dira; horrez gain, aldeak oinarriarekiko berdinki inklinatuta egon behar dira. Zein izan behar da ubidearen goiko zabalera?
Em.: 20 cm.

45. Emandako edukiera duen kanpainadenda koniko batek ehun kantitate minimoa bere altuera oinarriaren erradioa baino $\sqrt{2}$ aldiz handiagoa denean eskatzen duela frogatu.

46. Goitik irekitako zilindro bat eraiki behar da, bere ormek eta hondoak duten lodiera emanda dagoelarik. Zeintzuk izan behar dira zilindroaren dimentsioak, edukiera emanik, erabilitako gaiaren kantitatea minimoa izateko? Em.: Oinarriaren barneko erradioa R bada, eta zilindroaren barneko bolumena v bada: $R = \sqrt[3]{v / \pi}$.

47. Zilindro batez eta bi hondo esferaerdikoz galdara bat fabrikatu behar da, bere ormen lodiera konstantea izanik, v bolumena eman eta gero kanpoko azalera minimoa edukitzeko. Em.: Galdarak $R = \sqrt[3]{\dfrac{3v}{4\pi}}$ barneko erradioko esfera baten forma izan behar du.

48. S azalera emanda, perimetro minimoa edukiko duen trapezio isoszelea eraiki; trapezioaren oinarriaren angelua α da. Em.: Alboko aldeen luzera $\sqrt{\dfrac{S}{\sin\alpha}}$ izan behar da.

49. R erradioko esfera batean bolumen maximoa edukiko duen prisma triangeluar erregularra inskribatu. Em.: Prismaren altuera $\dfrac{2R}{\sqrt{3}}$ da.

50. R erradioko esferaerdi batean bolumen minimoko konoa zirkunskribatu; konoaren oinarriaren planoa eta esferaerdiaren oinarriarena batera datoz; konoaren altuera aurkitu. Em.: Konoaren altuera $R\sqrt{3}$ da.

51. r erradioko zilindro batean bolumen minimoko kono zuzena zirkunskribatu, zilindro eta konoaren oinarri zirkularren zentruak eta planoak batera datozela suposatuz. Em.: Konoaren oinarriaren erradioa $\dfrac{3r}{2}$ da.

52. R erradioko orri zirkular baten sektore bat ebaki. Sektore hori biribilkatzerakoan lorturiko onilaren edukiera maximoa izan behar da. Em.: Sektorearen angelu zentrala $2\pi\sqrt{2/3}$ da.

53. Emandako a ertzeko kubo batean inskribaturiko zilindro zirkular guztietatik bolumen maximoko zilindroa aurkitu, beraien ardatzak eta kuboaren diagonala batera datozelarik eta oinarrien zirkunferentziek horren aurpegiak ukiturik.
Em.: Zilindroaren altuera $a\sqrt{3}/3$ da, oinarriaren erradioa $a/\sqrt{6}$ da.

54. Biz (x_0, y_0) puntua, koordenatu-sistema angeluzuzenaren lehen koadrantean dagoena. Puntu horretatik zuzen bat marratu, zeinek koordenatu-ardatzen norantza positiboekin osotzen duen triangeluaren azalera minimoa den. Em.: zuzenak ardatzak $2x_0$ eta $2y_0$ puntuetan ebakitzen ditu, hau da, $\dfrac{x}{2x_0}+\dfrac{y}{2y_0}=1$ ekuazioa du.

55. $y^2 = 2px$ parabolaren ardatzaren gaineko puntu bat ematen da, erpinetik a distantziara dagoelarik. Emandako puntutik kurbako puntu hurbilenaren abzisa aurkitu. Em.: $x = a - p$.

56. Sekzio angeluzuzena duen gapirio baten erresistentzia zabalerarekiko eta altueraren kuboarekiko zuzenki proportzionala da. 16 cm-ko diametroa duen zurezko enbor batetik lor litekeen erresistentzia maximoko gapirioaren zabalera aurkitu.
Em.: Zabalera 8 cm-koa da.

57. Torpeduntzi bat kostako puntu hurbilenetik 9 km-ra ainguratuta aurkitzen da. Kostan zehar zenbatuta, lurreko puntu hurbilenetik 15 km-ra dagoen kanpamentu militar batera mezulari bat bidali behar da; mezularia oinez 5 km/h egiten du eta arraunatuz 4 km/h. Kostako zein puntutan lehorreratu behar du mezulariak denborarik laburrenean kanpamentura heltzeko? Em.: Kanpamentutik 3 km-ra.

58. Plano batean puntu bat higitzen da, v_1 abiaduraz MN zuzenetik kanpo, eta v_2 abiaduraz MN zuzenean. Zein da egin behar duen bidea, A posiziotik MN zuzenean kokaturiko B-ra denbora laburrenean higitzeko? A puntuaren eta MN zuzenaren arteko distantzia h da; A puntuaren MN zuzenaren gaineko α proiekzioaren eta B puntuaren arteko distantzia a da. Em.: Puntuaren ibilbidea ACB bada:

$$\frac{\alpha C}{AC} = \frac{v_1}{v_2} \quad \frac{\alpha B}{AB} \geq \frac{v_1}{v_2} \text{ bada, eta } \alpha C = \alpha B \quad \frac{\alpha B}{AB} < \frac{v_1}{v_2} \text{ bada.}$$

59. ω zama bat zatagaz jasotzen da, horren mutur bati ezarritako indarra F izanik; eustarri-puntua beste muturrean aurkitzen da. Zama eustarritik a cm-ko distantziara aurkitzen bada eta zatagaren zentimetro lineal bakoitzak v gramo pisatzen badu, zein izan behar da zatagaren luzera zama jasotzeko beharrezko indarra minimoa izateko?
Em.: $x = \sqrt{2a\omega / v}$ cm.

60. x magnitude ezezagun baten n neurketa egin eta gero, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ irakurketak lortu dira. x-tzat $\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}$ zenbakia hartzen bada, $(x - x_1)^2 + (x - x_2)^2 + \ldots + (x - x_n)^2$ erroreen karratuen batura minimoa izango dela frogatu.

61. Ubide baten ormen aurkako fluido baten marruskadura txikitzeko uraz bustitako gainazalaren azalera minimo izan behar da. Zeharkako sekzioa emanda, kanal angeluzuzen irekiaren formarik onena zabalera altueraren bikoitza duena dela frogatu.

Hurrengo kurben inflexio-puntuak eta ahurtasun- eta ganbiltasun-tarteak aurkitu.

62. $y = x^5$. Em.: $x < 0$ denean kurba ganbila da, $x > 0$ denean ahurra da, $x = 0$ denean inflexio-puntu bat dago.

63. $y = 1 - x^2$. Em.: Kurba puntu guztietan ganbila da.

64. $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 9$. Em.: $x = 1$ denean inflexio-puntu bat dago.

65. $y = (x - b)^3$. Em.: $x = b$ denean inflexio-puntu bat dago.

66. $y = x^4$. Em.: Kurba puntu guztietan ahurra da.

67. $y = \dfrac{1}{x^2 + 1}$. Em.: $x = \pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ denean inflexio-puntu bana dago.

68. $y = \tan x$. Em.: $x = n\pi$ denean inflexio-puntu bat dago.

69. $y = xe^{-x}$. Em.: $x = 2$ denean inflexio-puntu bat dago.

70. $y = a - \sqrt[3]{x - b}$. Em.: $x = b$ denean inflexio-puntu bat dago.

71. $y = a - \sqrt[5]{(x - b)^2}$. Em.: Kurbak ez du inflexio-punturik.

Ondoko kurben asintotak aurkitu:

72. $y = \dfrac{1}{x - 1}$. Em.: $x = 1$; $y = 0$.

73. $y = \dfrac{1}{(x + 2)^3}$. Em.: $x = -2$; $y = 0$.

74. $y = c + \dfrac{a^3}{(x - b)^2}$. Em.: $x = b$; $y = c$.

75. $y = e^{\frac{1}{x}} - 1$. Em.: $x = 0$; $y = 0$.

76. $y = \ln x$. Em.: $x = 0$.

77. $y^3 = 6x^2 + x^3$. Em.: $y = x + 2$.

78. $y^3 = a^3 - x^3$. Em.: $y + x = 0$.

79. $y^2 = \dfrac{x^3}{2a - x}$. Em.: $x = 2a$.

80. $y^2(x - 2a) = x^3 - a^3$. Em.: $x = 2a$; $y = \pm(x + a)$.

Hurrengo funtzioak aztertu eta bere grafikoak eraiki:

81. $y = x^4 - 2x + 10$.

82. $y = \dfrac{8a^3}{x^2 + 4a^2}$.

83. $y = e^{-\frac{1}{x}}$.

84. $y = \dfrac{6x}{1 + x^2}$.

85. $y = \dfrac{4 + x}{x^2}$.

86. $y = \dfrac{x}{x^2 - 1}$.

87. $y = \dfrac{x + 2}{x^3}$.

88. $y = \dfrac{x^2}{1 + x}$.

89. $y^2 = x^3 - x$.

90. $y = \dfrac{x^3}{3 - x^2}$.

91. $y = \sqrt[3]{x^2} + 2$.

92. $y = x - \sqrt[3]{x^3 + 1}$.

93. $y = \sqrt{\dfrac{x - 1}{x + 1}}$.

94. $y = xe^{-x}$.

95. $y = x^2 e^{-x^2}$.

96. $y = x - \ln(x + 1)$.

97. $y = \ln(x^2 + 1)$.

98. $y = \sin 3x$.

99. $y = x + \sin x$.

100. $y = x \sin x$.

101. $y = e^{-x} \sin x$.

102. $y = \ln \sin x$.

103. $y = \dfrac{\ln x}{x}$.

104. $\begin{cases} x = t^2, \\ y = \dfrac{1}{2} t. \end{cases}$

105. $\begin{cases} x = t^2, \\ y = t^3. \end{cases}$

106. $\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t). \end{cases}$

107. $\begin{cases} x = ae^t \cos t, \\ y = ae^t \sin t. \end{cases}$

Ariketa osagarriak:

Ondoko kurbeen asintotak aurkitu:

108. $y=\dfrac{x^2+1}{1+x}$. Em.: $x=-1$; $y=x-1$.

109. $y=x+e^{-x}$. Em.: $y=x$.

110. $2y(x+1)^2=x^3$. Em.: $x=-1$; $y=\dfrac{1}{2}x-1$.

111. $y^3=a^3-x^2$. Em.: $x+y=0$.

112. $y=e^{-2x}\sin x$. Em.: $y=0$.

113. $y=e^{-x}\sin 2x+x$. Em.: $y=x$.

114. $y=x\ln\left(e+\dfrac{1}{x}\right)$. Em.: $x=-\dfrac{1}{e}$; $y=x+\dfrac{1}{e}$.

115. $y=xe^{\frac{1}{x^2}}$. Em.: $x=0$; $y=x$.

116. $x=\dfrac{2t}{1-t^2}$, $y=\dfrac{t^2}{1-t^2}$. Em.: $y=\pm\dfrac{1}{2}x-\dfrac{1}{2}$.

Ondoko funtzioak aztertu eta bere grafikoak eraiki:

117. $y=|x|$.

118. $y=\ln|x|$.

119. $y^2=x^3-x$.

120. $y=(x+1)^2(x-2)$.

121. $y=x+|x|$.

122. $y=\sqrt[3]{x^2}-x$.

123. $y=x^2\sqrt{x+1}$.

124. $y=\dfrac{x^2}{2}-\ln x$.

125. $y=\dfrac{x^2}{2}\ln x$.

126. $y=\dfrac{1}{e^x-1}$.

127. $y=\dfrac{x}{\ln x}$.

128. $y=x+\dfrac{\ln x}{x}$.

129. $y = x \ln x$.

130. $y = e^{\frac{1}{x}} - x$.

131. $y = |\sin 3x|$.

132. $y = \dfrac{\sin x}{x}$.

133. $y = x \arctan x$.

134. $y = x - 2\arctan x$.

135. $y = e^{-2x} \sin 3x$.

136. $y = |\sin x| + x$.

137. $y = \sin(x^2)$.

138. $y = \cos^3 x + \sin^3 x$.

139. $y = \dfrac{x + |x|}{2}$.

140. $y = \dfrac{x - |x|}{2}$.

141. $y = \sin\left(\dfrac{x + |x|}{2}\right) - \dfrac{x - |x|}{2} \quad (-\pi \le x \le \pi)$.

142. $y = \cos\left(\dfrac{x - |x|}{2}\right) - \dfrac{x + |x|}{2} \quad \left(-\dfrac{\pi}{2} \le x \le 1\right)$.

143. $y = \dfrac{1}{2}\left(3x + |x|\right) + 1$.

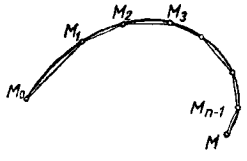
144. $y = \dfrac{1}{2}\left[3(x-1) + |x-1|\right] + 1 \quad (0 \le x \le 2)$.

VI. GAIA

KURBA BATEN KURBADURA

§ 1. Arkuaren luzera eta bere deribatua

Demagun M_0M kurba-arkua (136. irudia) (a,b) tartean definituriko $y=f(x)$ funtzioaren grafikoa dela. Defini dezagun kurba-arkuaren luzera. M_0M arkuaren gainean $M_0, M_1, M_2, \ldots, M_{i-1}, M_i, \ldots, M_{n-1}, M$ puntuak har ditzagun. Aukeratutako puntuak zuzenkien bidez lotuz $\overset{\frown}{M_0M}$ arkuan inskribatutako $M_0M_1M_2\ldots M_{i-1}M_i\ldots M_{n-1}M$ lerro poligonala lortzen dugu. Izan bedi P_n lerro poligonal horren luzera.



136. IRUDIA

Limiteari (s izendatuko dugu), hau da, $M_{i-1}M_i$ zuzenki handienaren luzerak zerorantz jotzen duenean poligonalaren luzerak jotzen duenari, M_0M *arkuaren luzera* deitzen zaio, limitea existitu eta $M_0M_1M_2\ldots M_{i-1}M_i\ldots M_{n-1}M$ poligonalaren erpinen hautaketaren menpe ez badago. Kontura gaitezen hautazko kurba-arku baten luzeraren definizio hori zirkunferentziaren luzerarenaren antzekoa dela.

XII. gaian frogatuko dugu $[a,b]$ tartean $f(x)$ funtzioa eta $f'(x)$ bere deribatua jarraiak badira, $(a, f(a))$ eta $(b, f(b))$ puntuen arteko $y=f(x)$ kurbaren arkuak luzera zeharo determinatuta daukala. Kapitulu berean frogatuko da luzera hori kalkulatzeko era. Baita ere, (koralario gisa) emandako baldintzetan, kordaren luzerak 0-rantz jotzen duenean, kurba horren edozein arkuren luzera eta dagokion kordaren luzeraren arteko arrazoiak 1-erantz jotzen duela ezarriko da, hau da,

$$\lim_{M_0M\to 0} \frac{\overset{\frown}{M_0M} \text{ luzera}}{\overline{M_0M} \text{ luzera}} = 1.$$

Teorema hori erraz egiazta daiteke zirkunferentziaren kasuan[1], hala ere, kasu orokorrerako frogapenik gabe onartuko dugu.

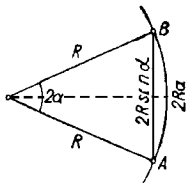
Iker dezagun ondorengo problema:

Izan bedi $y = f(x)$ Oxy planoko kurba baten ekuazioa.

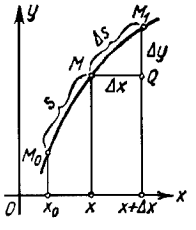
Izan bedi $M_0(x_0, y_0)$ kurbako puntu finko bat, eta $M(x, y)$, bertako puntu aldakor bat. Izenda dezagun s M_0M arkuaren luzera (138. irudia)

M puntuaren x abzisa aldatzean arkuaren s luzera ere aldatuko da, hau da, s x-ren funtzioa da. Kalkula dezagun s-ren x-rekiko deribatua.

x-ri Δx gehikuntza emango diogu. Orduan s luzerak $\Delta s = \text{luz. } \overset{\frown}{MM_1}$ gehikuntza jasango du. Izan bedi $\overline{MM_1}$ arku horren korda. $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta s}{\Delta x}$ determinatzeko, ondoko eran ihardungo dugu: ΔMM_1Q triangelutik



137. IRUDIA



138. IRUDIA

$$\overline{MM_1}^2 = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2$$

lortzen dugu. Biderka eta zati dezagun lehenengo atala $(\Delta s)^2$ gaiaz:

$$\left(\frac{\overline{MM_1}}{\Delta s}\right)^2 . (\Delta s)^2 = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 .$$

Zati dezagun $(\Delta x)^2$ gaiaz berdintzaren bi atalak:

---

1) 2α angelu zentraleko AB arkua hartuko dugu (137. irudia). Arku horren luzera $2R\alpha$ da (R zirkunferentziaren erradioa izanik) eta bere kordarena $2R$ sin α, Horregatik:

$$\lim_{\alpha \to 0} \frac{\overset{\frown}{AB} \text{ luzera}}{\overline{AB} \text{ luzera}} = \lim_{\alpha \to 0} \frac{2R\alpha}{2R \sin \alpha} = 1.$$

$$\left(\frac{\overline{MM_1}}{\Delta s}\right)^2 \cdot \left(\frac{\Delta s}{\Delta x}\right)^2 = 1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2.$$

Bila ditzagun bi atalen limiteak $\Delta x \to 0$ denean. $\lim\limits_{MM_1 \to 0} \frac{\overline{MM_1}}{\Delta s} = 1$ eta $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx}$ kontutan hartuz,

$$\left(\frac{ds}{dx}\right)^2 = 1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2$$

lortzen dugu, hots,

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}. \qquad (1)$$

Hortik, arku baten diferentzialerako

$$ds = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx \qquad (2)$$

adierazpena ateratzen da, edo baita

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}\ ^{2)}. \qquad (2')$$

Arku baten luzeraren diferentzialaren adierazpena lortu dugu, kurba $y = f(x)$ funtzioak emana datorrenean. Hala ere, (2') formulak kurba ekuazio parametrikoen bidez definitzen denean ere balio du.

Kurbaren ekuazio parametrikoak

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t)$$

---

2) Hertsiki arrazoituz (2') formulak $dx > 0$ denean soilik balio du. $dx < 0$ bada, $ds = -\sqrt{dx^2 + dy^2}$ dugu. Horregatik, orokorrean, zehatzagoa izango da ondoko eran: $|ds| = \sqrt{dx^2 + dy^2}$.

badira,

$$dx = \varphi'(t)dt, \quad dy = \psi'(t)dt$$

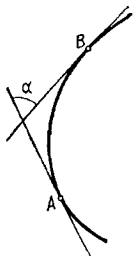
dira eta (2') adierazpenak

$$ds = \sqrt{[\varphi(t)]^2 + [\psi'(t)]^2}\ dt$$

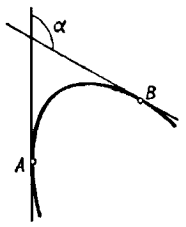
itxura hartzen du.

§ 2. Kurbadura

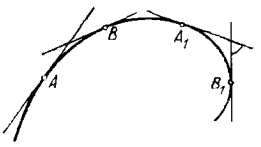
Kurba baten itxura karakterizatzen duten elementuetako bat bere kurbaduraren maila da. Demagun bere burua ebakitzen ez duen kurba bat existitzen dela eta bere puntu bakoitzean ondo determinatutako ukitzaile bat daukala. Marra dezagun kurbaren bi ukitzaile hautzazko A eta B bi puntutan, eta izenda dezagun α bi ukitzaile horiek osatutako angelua edo (zehaztasun handiagoz), ukitzailearen biraketa-angelua, A puntutik B puntura pasatzen denean (139. irudia). Angelu hori AB arkuaren *kontingentzi angelu* deitzen da. Luzera bereko bi arkutatik, kurbadura handienekoa kontingentzi angelu handiena daukana izango da (139. eta 140. irudiak).



139. IRUDIA



140. IRUDIA



141. IRUDIA

Beste aldetik, nabarmena da ezin dela luzera desberdinetako arkuen kurbadur maila determinatu, bere kontingentzi angeluak soilik kontsideratuz. Hori dela eta, kurbaren kurbaduraren ezaugarri osoa kontingentzi angelu eta dagokion arkuaren luzeraren arteko arrazoia izango da.

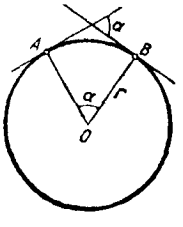
1. Definizioa. α kontingentzi angelu eta dagokion arkuaren luzeraren arteko zatidura $\overset{\frown}{AB}$ *arkuaren batezbesteko kurbadura* deitzen da, K_{bb}:

$$K_{bb} = \frac{\alpha}{\overset{\frown}{AB}}.$$

Kurba baten arku desberdinen batezbesteko kurbadurak desberdinak izan daitezke. Honelatan, adibidez, 141. irudiko kurbaren $\overset{\frown}{AB}$ eta $\overset{\frown}{A_1B_1}$ arkuen batezbesteko kurbadurak desberdinak dira, arku horien luzerak berdinak badira ere. Are gehiago, bere kurbadur maila puntuz puntu aldatzen da. Emandako kurba baten kurbadur maila, puntu baten inguruan, karakterizatzeko, ezar dezagun kurba baten A puntu bateko kurbaduraren nozioa.

2. Definizioa. $\overset{\frown}{AB}$ arkuaren batezbesteko kurbaduraren limitea, bere luzerak zerorantz jotzen duenean (hau da, B puntuak A punturantz jotzen duenean[3]) kurbaren A puntuko *kurbadura*, K_A, deitzen da:

$$K_A = \lim_{B \to A} K_{bb} = \lim_{\overset{\frown}{AB} \to 0} \frac{\alpha}{\overset{\frown}{AB}}.$$



142. IRUDIA

Adibidea. r erradioko zirkunferentzia baterako: 1) determinatu α angelu zentralari dagokion $\overset{\frown}{AB}$ arkuaren batezbesteko kurbadura (142. irudia); 2) determinatu A puntuko kurbadura.

Ebazpena. 1) Bistakoa da $\overset{\frown}{AB}$ arkuaren kontingentzi angelua α dena eta arkuaren luzera αr dena. Hortaz:

---

3) Limitearen balioa kurbako B puntua A-rantz hurbiltzen deneko norabidearen menpe ez dagoela suposatuko dugu.

$$K_{bb} = \frac{\alpha}{\alpha r}, \text{ hots } K_{bb} = \frac{1}{r}.$$

2) A puntuko kurbadura

$$K = \lim_{\alpha \to 0} \frac{\alpha}{\alpha r} = \frac{1}{r}$$

da.

Honela bada, r erradioko zirkunferentzi arku baten batezbesteko kurbadura ez dago ez luzeraren ez arkuaren posizioaren menpe; arku guztietarako $\frac{1}{r}$ da. Zirkunferentziaren puntu bateko kurbadura ere ez dago puntuaren posizioaren menpe eta $\frac{1}{r}$ da ere.

Oharra. Kontutan har dezagun hautazko kurba baten kurbadura, oro har, puntu batetik bestera alda daitekeela, jarraian ikusiko dugun legez.

§ 3. Kurbaduraren kalkulua

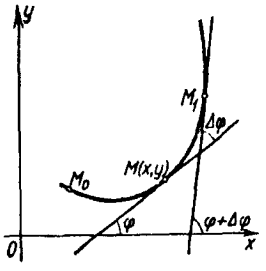
Kurba baten $M(x, y)$ edozein puntutako kurbadura kalkulatzeko formula lortuko dugu. Demagun kurba koordenatu angeluzuzenetako sistema batean,

$$y = f(x) \tag{1}$$

ekuazioak emana datorrela eta $f(x)$ funtzioak bere bigarren deribatua jarraia daukala.

Marra ditzagun x eta Δx abzisetako M eta M_1 puntuetako ukitzaileak kurbarekiko, eta izan bitez φ eta $\varphi + \Delta\varphi$ ukitzaile horiek Ox ardatzarekin osatzen duten angeluak (143. irudia).

Izenda dezagun s $\overset{\frown}{M_0M}$ arkuaren luzera, M_0 puntu batetik kalkulatua. Orduan, $\Delta s = \overset{\frown}{M_0M_1} - \overset{\frown}{M_0M}$ eta $|\Delta s| = \overset{\frown}{MM_1}$.



143. IRUDIA

143. irudian ikusten denez, $\overset{\frown}{MM_1}$ arkuari dagokion kontingentzi angelua φ eta $\varphi+\Delta\varphi$ angeluen kenduraren balio absolutuaren berdina da[4)], hots $|\Delta\varphi|$-ren berdina.

Kurba baten $\overset{\frown}{MM_1}$ arkuaren batezbesteko kurbaduraren definizioari jarraituz,

$$K_{bb} = \frac{|\Delta\varphi|}{|\Delta s|} = \left|\frac{\Delta\varphi}{\Delta s}\right|$$

daukagu.

M puntuko kurbadura determinatzeko adierazpen horren limitea, $\overset{\frown}{MM_1}$ arkuaren luzerak zerorantz jotzen duenean, bilatu behar da:

$$K = \lim_{\Delta s \to 0} \left|\frac{\Delta\varphi}{\Delta s}\right|.$$

φ eta s x-ren menpe daudenez gero (x-ren funtzioak dira), φ kontsidera daiteke s-ren funtzio bezala eta funtzio hori x parametroaren bidez era parametrikoan datorrela. Kasu horretan:

$$\lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta s} = \frac{d\varphi}{ds},$$

eta, beraz,

$$K = \left|\frac{d\varphi}{ds}\right|. \qquad (2)$$

---

4) Bistakoa da 143. irudian emandako kurbarako $|\Delta\varphi| = \Delta\varphi$ dena, $\Delta\varphi > 0$ bait da.

$\dfrac{d\varphi}{ds}$ kalkulatzeko funtzio parametrikoen deribazio-formula erabil dezagun:

$$\frac{d\varphi}{ds}=\frac{\dfrac{d\varphi}{dx}}{\dfrac{ds}{dx}}.$$

$\dfrac{d\varphi}{dx}$ deribatua $y=f(x)$ funtzioaren bitartez adierazteko, ohar gaitezen $\tan\varphi=\dfrac{dy}{dx}$ dela eta, hortaz,

$$\varphi=\arctan\frac{dy}{dx}.$$

Azkeneko berdintza x-rekiko deribatuz

$$\frac{d\varphi}{dx}=\frac{\dfrac{d^2y}{dx^2}}{1+\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2}$$

daukagu.

$\dfrac{ds}{dx}$ deribaturako, VI. kapitulua § 1ean

$$\frac{ds}{dx}=\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

balioa aurkitu dugu. Nondik

$$\frac{d\varphi}{ds}=\frac{\dfrac{d\varphi}{dx}}{\dfrac{ds}{dx}}=\frac{\dfrac{\dfrac{d^2y}{dx^2}}{1+\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2}}{\sqrt{1+\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2}}=\frac{\dfrac{d^2y}{dx^2}}{\left[1+\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}}$$

den; eta $K = \left|\frac{d\varphi}{ds}\right|$ denez, azkenik,

$$K = \frac{\left|\frac{d^2y}{dx^2}\right|}{\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}} \tag{3}$$

lortzen dugu.

Hortaz, kurbako puntu batean, $\frac{d^2y}{dx^2}$ bigarren deribatua existitu eta jarraia izanik, kalkula daiteke kurbadura, (3) formula erabiliz. Ohar gaitezen, kurba baten kurbadura kalkulatzerakoan, izendatzaileko erroaren balio positiboa soilik hartzea komeni dela, definizioaren arabera kurba baten kurbadura ezin bait da negatibo izan.

1. Adibidea. Determinatu $y^2 = 2px$ parabolaren kurbadura:

a) $M(x,y)$ hautazko puntu batean;

b) $M_1(0,0)$ puntuan;

c) $M_2\left(\frac{p}{2}, p\right)$ puntuan.

Ebazpena. Aurki ditzagun $y = \sqrt{2px}$ funtzioaren lehenengo eta bigarren deribatuak:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{p}{\sqrt{2px}}; \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{p^2}{(2px)^{3/2}}.$$

Lortutako adierazpenak (3) formulan ordezkatuz, zera lortzen dugu:

a) $K = \dfrac{p^2}{\left(2px + p^2\right)^{3/2}}$

b) $K_{x=0,\ y=0} = \dfrac{1}{p}$;

c) $K_{x=\frac{p}{2},\ y=p} = \dfrac{1}{2\sqrt{2p}}$.

2. Adibidea. Determinatu $y = ax + b$ zuzenaren kurbadura (x,y) hautazko puntu batean.

Ebazpena. $y' = a$, $y'' = 0$.

(3) formularen arabera

$$K = 0$$

erdiesten dugu.

Honela bada, zuzena "kurbadura zeroko" kurba da. Emaitza bera lor daiteke kurbaduraren definiziotik zuzenean.

§ 4. Forma parametrikoan emandako kurba baten kurbaduraren kalkulua

Izan bedi era parametrikoan emandako kurba bat:

$$x = \varphi(t), \qquad y = \psi(t).$$

Orduan (III. gaiko § 24):

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\psi''\varphi' - \psi'\varphi''}{(\varphi')^3}$$

dira.

Lortutako adierazpenak aurreko ataleko (3) formulan sartuz,

$$K = \frac{|\psi''\varphi' - \psi'\varphi''|}{\left[\varphi'^2 + \psi'^2\right]^{3/2}} \tag{1}$$

lortzen dugu.

Adibidea. Determinatu $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ zikloidearen kurbadura, (x,y) puntu batean.

Ebazpena.

$$\frac{dx}{dt} = a(1 - \cos t), \quad \frac{d^2y}{dx^2} = a\sin t, \quad \frac{dy}{dt} = a\sin t, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = a\cos t.$$

Lortutako adierazpenak (1) formulan ordezkatuz

$$K = \frac{\left|a(1-\cos t)a \cos t - a \sin t \cdot a \sin t\right|}{\left|a^2(1-\cos t)^2 + a^2 \sin^2 t\right|^{3/2}} =$$

$$\frac{|\cos t - 1|}{2^{3/2} a(1-\cos t)^{3/2}} = \frac{1}{2^{3/2} a(1-\cos t)^{1/2}} = \frac{1}{4a\left|\sin \frac{t}{2}\right|}$$

lortzen dugu.

§ 5. Koordenatu polarretan emandako kurba baten kurbaduraren kalkulua

Izan bedi

$$\rho = f(\theta) \tag{1}$$

motako ekuazioak emandako kurba bat.

Idatz ditzagun koordenatu polarretatik cartesiarretara pasatzeko formulak:

$$\left.\begin{aligned} x &= \rho \cos \theta, \\ y &= \rho \sin \theta. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Formula horietan, ρ bere adierazpenaz, θ-ren funtzioan, ordezkatzen badugu, hau da, $f(\theta)$ balioaz.

$$\left.\begin{aligned} x &= f(\theta) \cdot \cos \theta, \\ y &= f(\theta) \cdot \sin \theta \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

erdiesten dugu.

Ekuazio horiek (1) kurbaren ekuazio parametrikotzat har daitezke, parametroa θ izanik. Orduan,

$$\frac{dx}{d\theta}=\frac{d\rho}{d\theta}\cos\theta-\rho\sin\theta,\quad \frac{dy}{d\theta}=\frac{d\rho}{d\theta}\sin\theta+\rho\cos\theta;$$

$$\frac{d^2x}{d\theta^2}=\frac{d^2\rho}{d\theta^2}\cos\theta-2\frac{d\rho}{d\theta}\sin\theta-\rho\cos\theta,$$

$$\frac{d^2y}{d\theta^2}=\frac{d^2\rho}{d\theta^2}\sin\theta+2\frac{d\rho}{d\theta}\cos\theta-\rho\sin\theta.$$

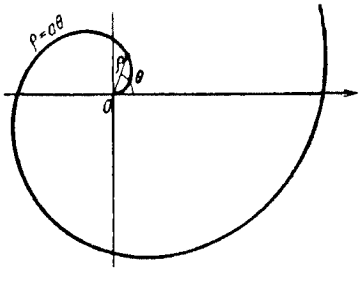
Azkeneko adierazpenak aurreko pasarteko (1) formulan sartuz, koordenatu polarretako kurba baten kurbadura kalkulatzeko formula lortzen dugu:

$$K=\frac{\left|\rho^2+2\rho'^2-\rho\rho''\right|}{\left(\rho^2+\rho'^2\right)^{3/2}}. \tag{4}$$

Adibidea. Determinatu $\rho=a\theta$ $(a>0)$ Arkimedes-en kiribilaren kurbadura puntu batean (144. irudia)

Ebazpena.

$$\frac{d\rho}{d\theta}=a;\quad \frac{d^2\rho}{d\theta^2}=0.$$



144. IRUDIA

Hortaz,

$$K=\frac{\left|a^2\theta^2+2a^2\right|}{(a^2\theta^2+a^2)^{3/2}}=\frac{1}{a}\frac{\theta^2+2}{(\theta^2+1)^{3/2}}.$$

Kontura gaitezen θ-ren balio handietarako

$$\frac{\theta^2+2}{\theta^2}\approx 1,\quad \frac{\theta^2+1}{\theta^2}\approx 1$$

ekuazio hurbilduak betetzen direla. Hori dela eta, aurreko formulan (θ^2+2) θ^2 balioaz eta (θ^2+1) θ^2 balioaz ordezkatuz, formula hurbildua erdiesten dugu (θ-ren balio handietarako balio duena):

$$K\approx\frac{1}{a}\frac{\theta^2}{(\theta^2)^{3/2}}=\frac{1}{a\theta}.$$

Horrela, Arkimedes-en kiribilak, θ-ren balio handietarako, gutxi gorabehera $a\theta$ erradioko zirkunferentziaren kurbadura bera dauka.

§ 6. Kurbadur erradioa eta zirkulua. Kurbadur zentrua. Eboluta eta bilkaria

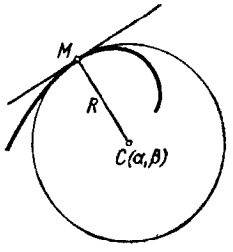
Definizioa. R magnitudea, kurba baten M puntuko K kurbaduraren alderantzizkoa, kurbaren puntu horretako *kurbadur erradio* deitzen da

$$R=\frac{1}{K}, \tag{1}$$

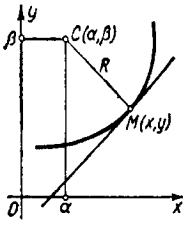
edota

$$R=\frac{\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}}{\left|\frac{d^2y}{dx^2}\right|}. \tag{2}$$

Marra ditzagun kurbako M puntutik (145. irudia) bere ahurtasunaren arabera zuzendutako normala eta horren gainean luzera puntuko kurbadur erradioaren berdina daukan $\overline{MC}$ zuzenki bat.



145. IRUDIA



146. IRUDIA

C puntua M puntuari dagokion *kurbadur zentru* deitzen da; R erradioa eta zentrua C puntuan dauzkan (M puntutik pasatzen den) zirkuluari M puntuko *kurbadur zirkulu* deitzen zaio.

Kurbadur zirkuluaren definiziotik emandako puntuan, kurbaren kurbadura kurbadur zirkuluarenaren berdina dela ondorioztatzen da.

Lor ditzagun kurbadur zentruaren koordenatuak determinatzen dituzten formulak.

Izan bedi

$$y = f(x) \tag{3}$$

ekuazioak emandako kurba bat, finka dezagun $M(x, y)$ puntu bat kurban eta determina ditzagun aukeratutako puntuari dagokion kurbadur zentruaren α eta β koordenatuak (146. irudia). Idatz dezagun kurbaren M puntuko normalaren ekuazioa

$$Y - y = -\frac{1}{y'}(X - x) \tag{4}$$

(hor, X eta Y normaleko puntu baten koordenatu orokorrak dira).

$C(\alpha,\beta)$ puntua normalaren gainean dagoenez gero, bere koordenatuek (4) ekuazioa bete behar dute:

$$\beta - y = -\frac{1}{y'}(\alpha - x). \tag{5}$$

$C(\alpha,\beta)$ eta $M(x, y)$ puntuen arteko distantzia R kurbadur erradioaren berdina da:

$$(\alpha - x)^2 + (\beta - y)^2 = R^2. \tag{6}$$

(5) eta (6) ekuazioak batera ebatziz, α eta β aurkituko ditugu:

$$(\alpha - x)^2 + \frac{1}{(y')^2}(\alpha - x)^2 = R^2, \quad (\alpha - x)^2 = \frac{(y')^2}{1+(y')^2}R^2;$$

nondik

$$\alpha = x \pm \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}R, \quad \beta = y \mp \frac{1}{\sqrt{1+y'^2}}R$$

diren, eta

$$R = \frac{\left(1+y'^2\right)^{3/2}}{|y''|}$$

denez gero,

$$\alpha = x \pm \frac{y'\left(1+y'^2\right)}{|y''|}, \quad \beta = y \mp \frac{1+y'^2}{|y''|}$$

lortzen ditugu.

Azkeneko formuletan zeintzu zeinu (goiko edo behekoak) hartu behar ditugun erabakitzeko, $y'' > 0$ eta $y'' < 0$ kasuak aztertzea komeni da. $y'' > 0$ bada kurba puntu horretan ahurra da eta, beraz, $\beta > y$ (146. irudia); hortaz, beheko zeinuak hartu behar ditugu.

Kasu horretan $|y''| > y''$ dela kontutan hartuz, kurbadur zentruaren koordenatuen formulak

$$\left.\begin{aligned} \alpha &= x - \frac{y'(1+y'^2)}{y''}, \\ \beta &= y + \frac{1+y'^2}{y''} \end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

izango dira.

Antzeko eran froga daiteke (7) formulak $y'' < 0$ denean ere betetzen direla.

Kurba

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t)$$

ekuazio parametrikoen bidez emana badago, kurbadur zentruaren koordenatuak erraz lortzen dira (7) formuletatik, y' eta y'' bere adierazpenaz, parametroaren funtzioan, ordezkatuz:

$$y' = \frac{y'_t}{x'_t}; \qquad y'' = \frac{x'_t\, y''_t - x''_t\, y'_t}{(x'_t)^3}.$$

Orduan,

$$\left.\begin{aligned} \alpha &= x - \frac{y'(x'^2 + y'^2)}{x'y'' - x''y'} \\ \beta &= y + \frac{x'(x'^2 + y'^2)}{x'y'' - x''y'} \end{aligned}\right\} \qquad (7')$$

dira.

1. Adibidea. Aurkitu $y^2 = 2px$ parabolaren kurbadur zentruaren koordenatuak:

a) $M(x, y)$ puntu batean;

b) $M_0(0,0)$ puntuan;

c) $M_1(\frac{p}{2}, p)$ puntuan.

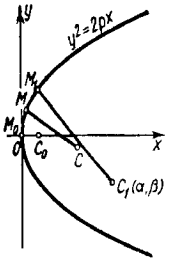
Ebazpena. $\frac{dy}{dx}$ eta $\frac{d^2y}{dx^2}$ balioak (7) formuletan sartuz (147. irudia) zera lortuko dugu:

a) $\alpha = 3x + p$, $\beta = -\frac{(2x)^{3/2}}{\sqrt{p}}$;

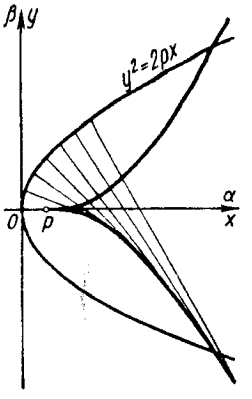
b) $x = 0$ baliorako $\alpha = p$, $\beta = 0$ aurkitzen ditugu;

c) $x = \frac{p}{2}$ baliorako $\alpha = \frac{5p}{2}$, $\beta = -p$ dauzkagu.

$M_1(x, y)$ puntuko kurbadura zero ez bada, aipatu puntuari ondo determinatutako kurbadur zentru bat dagokio: $C_1(\alpha, \beta)$. Emandako kurbaren kurbadur zentru guztien multzoak kurba berri bat osatzen du, aztertutako kurbaren *eboluta* deiturikoa.



147. IRUDIA



148. IRUDIA

Honelatan bada, kurbadur zentruen leku geometrikoari kurbaren *eboluta* deritzo. Aztertutako kurba, bere ebolutarekiko, *bilkari* deitzen da.

Emandako kurba $y = f(x)$ ekuazioaren bidez definiturik badago, (7) ekuazioak ebolutaren ekuazio parametrikotzat, x parametroarekin, har daitezke. Emandako ekuazioetatik x parametroa (ahal izanez gero) ezabatuz, ebolutaren α eta β koordenatu orokorren arteko erlazioaren adierazpena erdiesten dugu. Kurba $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ ekuazio parametrikoen bidez definiturik badago, (7') ekuazioak ebolutaren ekuazio parametrikoak izango dira (x, y, x', y', x'', y'' balioak t-ren funtzioak dira eta).

2. Adibidea. Aurkitu $y^2 = 2px$ parabolaren ebolutaren ekuazioa.

Ebazpena. 1. adibideko emaitzak erabiliz, parabolako (x,y) puntu bakoitzarako

$$\alpha = 3x + p,$$

$$\beta = -\frac{(2x)^{3/2}}{\sqrt{p}}$$

dauzkagu.

Bi ekuazio horien artean x parametroa ezabatuz gero

$$\beta^2 = \frac{8}{27p}(\alpha - p)^3$$

lortzen dugu. Hori da parabola erdikubiko baten ekuazioa (148. irudia).

3. Adibidea. Bilatu

$$x = a\cos t, \quad y = b\sin t$$

ekuazio parametrikoek emandako elipsearen ebolutaren ekuazioa.

Ebazpena. Kalkula ditzagun x eta y -ren deribatuak t -rekiko:

$$x' = -a \sin t, \quad y' = b \cos t;$$
$$x'' = -a \cos t, \quad y'' = -b \sin t.$$

Deribatuen adierazpen horiek (7') formuletan sartuz

$$\alpha = a \cos t - \frac{b \cos t(a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t)}{ab \sin^2 t + ab \cos^2 t} =$$

$$= a \cos t - a \cos t \sin^2 t - \frac{b^2}{a}\cos^3 t = \left(a - \frac{b^2}{a}\right)\cos^3 t$$

ateratzen dugu.

Honela bada,

$$\alpha = \left(a - \frac{b^2}{a}\right)\cos^3 t.$$

Antzeko eran:

$$\beta = \left(b - \frac{a^2}{b}\right)\sin^3 t.$$

t parametroa ezabatzean, elipsearen ebolutaren ekuazioa,

$$\left(\frac{\alpha}{b}\right)^{2/3} + \left(\frac{\beta}{a}\right)^{2/3} = \left(\frac{a^2 - b^2}{ab}\right)^{2/3}$$

erdiesten dugu.

Hor, α eta β ebolutaren koordenatu orokorrak dira (149. irudia).

4. Adibidea. Bilatu

$$x = a(t - \sin t),$$

$$y = a(1 - \cos t)$$

zikloidearen ebolutaren ekuazio parametrikoak.

Ebazpena.

$$x' = a(1 - \cos t), \quad y' = a \sin t;$$

$$x'' = a \sin t, \quad y'' = -a \cos t.$$

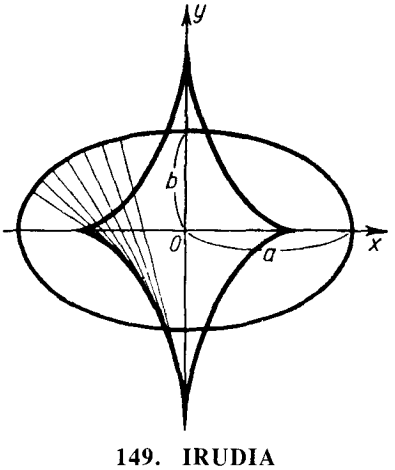
Lortu ditugun adierazpenak (7') formulan sartuz gero

$$\alpha = a(t + \sin t), \quad \beta = -a(1 - \cos t)$$

lortzen dugu. Alda ditzagun aldagaiak

$$\begin{Bmatrix} \alpha = \xi - \pi a \\ \beta = \eta - 2a \\ t = \tau - \pi \end{Bmatrix}$$

eginez.



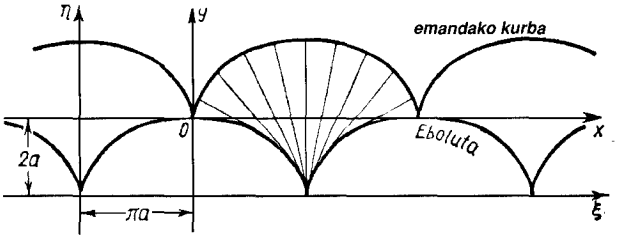
149. IRUDIA

Ebolutaren ekuazioek orain

$$\xi = a(\tau - \sin\tau),$$

$$\eta = a(1 - \cos\tau)$$

itxura hartuko dute.



150. IRUDIA

Azkeneko horiek, ξ, η koordenatuetan, a erradio berdineko zirkulu batek sortutako zikloide bat adierazten dute. Honela, zikloide baten eboluta zikloide berdina da, Ox ardatzaren araberako $-\pi\alpha$ eta Oy ardatzaren araberako $-2a$ magnitudez trasladatua (150. irudia).

§ 7. Ebolutaren propietateak

1. Teorema. Kurbarekiko normala bere ebolutarekiko ukitzailea da.

Frogapena. Aurreko pasarteko (7') ekuazio parametrikoek determinatutako ebolutarekiko ukitzailearen koefiziente angeluarra

$$\frac{d\beta}{d\alpha} = \frac{\dfrac{d\beta}{dx}}{\dfrac{d\alpha}{dx}}$$

da.

Ohar gaitezen, (7') ekuazioen arabera,

$$\frac{d\alpha}{dx} = -\frac{3y''^2 y'^2 - y' y''' - y'^3 y'''}{y''^2} = -y' \frac{3y' y''^2 - y''' - y'^2 y'''}{y''^2}, \qquad (1)$$

$$\frac{d\beta}{dx} = \frac{3y'y''^2 - y''' - y'^2 y'''}{y''^2} \tag{2}$$

dela, nondik

$$\frac{d\beta}{d\alpha} = -\frac{1}{y'}$$

erlazioa lortzen bait dugu.

Baina y' kurbarekiko ukitzailearen koefiziente angeluarra da, dagokion puntuan; hortaz, lortutako erlaziotik ondorioztatzen da kurbarekiko ukitzailea kurbaren ebolutarekiko ukitzailearekiko elkartzut dela, dagokion puntuan, hau da, kurbarekiko normala kurbaren ebolutarekiko ukitzailea da.

2. Teorema. Kurbadur erradioa era monotonoan aldatzen bada (hau da, gorakorra edo beherakorra) kurbaren $\overset{\frown}{M_1M_2}$ arku batean, kurba-arku horri dagokion eboluta-arkuaren luzeraren gehikuntza (balio absolutuan) kurbaren kurbadur erradioari dagokion gehikuntzaren berdina da.

Frogapena. VI. gaiko § 1eko (2') formularen arabera

$$ds^2 = d\alpha^2 + d\beta^2$$

daukagu, non ds eboluta-arkuaren luzeraren diferentziala den; hortik ondorioztatzen da

$$\left(\frac{ds}{dx}\right)^2 = \left(\frac{d\alpha}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\beta}{dx}\right)^2.$$

(1) eta (2) adierazpenak ekuazio horretan sartuz

$$\left(\frac{ds}{dx}\right)^2 = \left(1 + y'^2\right)\left(\frac{3y'y''^2 - y''' - y'^2 y'''}{y''^2}\right)^2 \tag{3}$$

lortzen dugu.

Aurki dezagun orain $\left(\frac{dR}{dx}\right)^2$.

$$R = \frac{\left(1 + y'^2\right)^{3/2}}{y''} \quad \text{denez gero,} \quad R^2 = \frac{\left(1 + y'^2\right)^3}{y''^2}$$

daukagu.

Berdintza horren bi atalak x-rekiko deribatuz eta aldaketa egokiak burutuz gero

$$2R\frac{dR}{dx} = \frac{2(1 + y'^2)^2(3y'y''^2 - y''' - y'^2 y''')}{(y'')^3}$$

erdiesten dugu. Berdintzaren bi atalak

$$2R = \frac{2(1 + y'^2)^{3/2}}{y''}$$

berdintzak zatituz

$$\frac{dR}{dx} = \frac{\left(1 + y'^2\right)^{1/2}\left(3y'y''^2 - y''' - y'^2 y'''\right)}{y''^2}$$

ateratzen dugu. Bi aldeak berretuz

$$\left(\frac{dR}{dx}\right)^2 = (1 + y'^2)\left(\frac{3y'y''^2 - y''' - y'^2 y'''}{y''^2}\right)^2 \tag{4}$$

dugu. (3) eta (4) ekuazioak konparatuz

$$\left(\frac{dR}{dx}\right)^2 = \left(\frac{ds}{dx}\right)^2$$

dugu, nondik

$$\frac{dR}{dx} = \mp\frac{ds}{dx}.$$

Hipotesiz, $\dfrac{dR}{dx}$ ez da zeinuz aldatzen (R gora, edo behera, doa soilik), hortaz $\dfrac{ds}{dx}$ ere ez da zeinuz aldatzen. Har ditzagun (arrazoinamenduaren zehaztasun handiagorako)

$$\frac{dR}{dx} \leq 0, \quad \frac{ds}{dx} \geq 0$$

(151. irudiari dagokiona). Beraz,

$$\frac{dR}{dx} = -\frac{ds}{dx}$$

da.

Izan bitez x_1 eta x_2 , M_1 eta M_2 puntuen abzisak. Aplika diezaiegun $s(x)$ eta $R(x)$ Cauchy-ren teorema, $[x_1, x_2]$ tartean:

$$\frac{s(x_2) - s(x_1)}{R(x_2) - R(x_1)} = \frac{\left(\frac{ds}{dx}\right)_{x=\xi}}{\left(\frac{dR}{dx}\right)_{x=\xi}} = -1,$$

non ξ x_1 eta x_2 arteko puntua bait da $(x_1 < \xi < x_2)$.

Ezar ditzagun ondoko idazkerak (151. irudia):

$$s(x_2) = s_2, \quad s(x_1) = s_1, \quad R(x_2) = R_2, \quad R(x_1) = R_1.$$

Orduan

$$\frac{s_2 - s_1}{R_2 - R_1} = -1, \text{ hau da, } s_2 - s_1 = -(R_2 - R_1).$$

Horrek

$$|s_2 - s_1| = |R_2 - R_1|$$

dela esan nahi du.

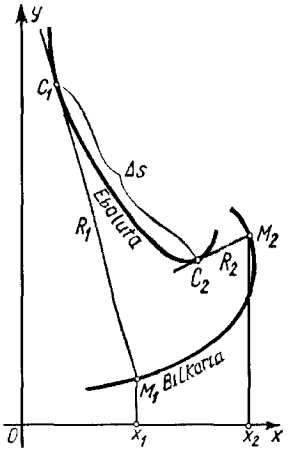
Era berean frogatzen da ekuazio hori kurbadur erradioa handitzen denean.

1 eta 2 teoremak kurba $y = f(x)$ ekuazio esplizitu baten bidez emana datorreneko kasurako frogatu ditugu. Teorema horiek kurba ekuazio parametrikoen bidez emana datorrenean ere balio dute. Frogapena zeharo analogoa da.

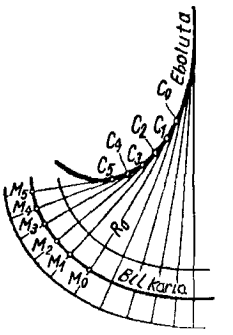
Oharra. Ikus dezagun prozedura mekaniko elemental bat kurba (bilkaria) ebolutatik eraikitzeko.

Eman diezaiogun erregela malgu bati C_0C_5 ebolutaren itxura (152. irudia). Imajina dezagun hari hedaezin batek erregela habailtzen duela, bere mutur bat C_0 puntuan finkaturik daukalarik. Hari hori desbiribilkatzen badugu, tinko mantenduz, bere beste muturrak M_5M_0 kurba deskribatuko du, bilkaria dena alegia. Lortutako kurba benetan bilkari bat denaren egiaztapena egin daiteke gorago ezarritako ebolutaren propietateen laguntzaz.

Ohar gaitezen eboluta bati infinitu bilkari desberdin dagokiola (152. irudia).



151. IRUDIA

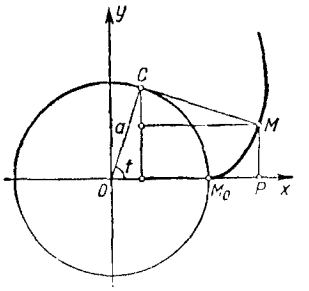


152. IRUDIA

Adibidea. a erradioko zirkunferentzia ematen da (153. irudia); zirkunferentzia horren bilkarien artean $M_0(a,0)$ puntutik igarotzen dena aukeratzen dugu, $CM = \overset{\frown}{CM_0} = at$ dela kontutan hartuz, erraza izango da zirkunferentziaren bilkariaren ekuazioak lortzea

$$OP = x = a(\cos t + t\sin t),$$

$$PM = y = a(\sin t - t\cos t).$$



153. IRUDIA

Esan dezagun engranaia baten hortzen soslaiak, kasu gehienetan, zirkuluaren bilkari itxura daukala.

§ 8. Ekuazio baten erro errealen kalkulu hurbildua

Funtzioen aldakuntzaren analisi-metodook

$$f(x) = 0$$

ekuazioaren erroen balio hurbilduak kalkulatzen uzten digute.

Hori lehenengo, bigarren, hirugarren edo laugarren mailako ekuazio algebraikoa bada[5], badaude ekuazioaren erroak bere koefizienteen funtzioan ematen dituzten formulak, batuketa, kenketa, biderkaketa, zatiketa eta erroketen kopuru finituren bidez. Laugarren baino maila handiagoko ekuazioetarako formula horiek, kasu orokorrean, ez dira existitzen. Edozein ekuazioren koefizienteak, algebraikoa ala ez (traszendentea), zenbakizkoak badira, bere erroak gutxi gorabehera kalkula daitezke, nahi den doitasun--mailarekin. Kontura gaitezen praktikan, ekuazioaren erroak erroketen bidez adierazten direnean ere bai, batzutan komenigarriagoa dela metodo hurbilduak aplikatzea ekuazioak ebazteko. Hona hemen ekuazio baten erroen kalkulu hurbilduaren zenbait metodo.

1. Korden metodoa. Izan bedi

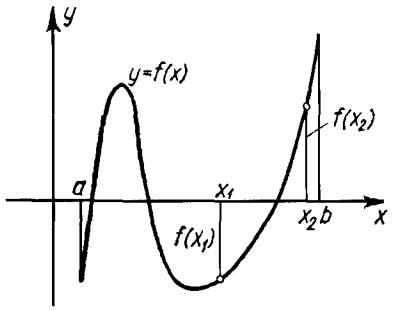
$$f(x) = 0 \tag{1}$$

ekuazioa, non $f(x)$ $[a,b]$ tartean funtzio jarraia bi aldiz deribagarria bait da. Demagun, $y = f(x)$ funtzioa $[a,b]$ tartean ikertzean, $[x_1,x_2]$ beste bat aurkitzen dugula zeinaren barnealdean funtzioa monotonoa (gorakorra edo beherakorra) eta bere muturretan $f(x_1)$ eta $f(x_2)$ balioek zeinu desberdinak bait dauzkate. Zehaztasun handiagoz adierazteko $f(x_1) < 0$, $f(x_2) > 0$ (154. irudia) direla suposatuko dugu. $y = f(x)$ funtzioa $[x_1,x_2]$ tartean jarraia denez gero, bere grafikoak Ox ardatza x_1 eta x_2-ren arteko puntu batean ebakiko du.

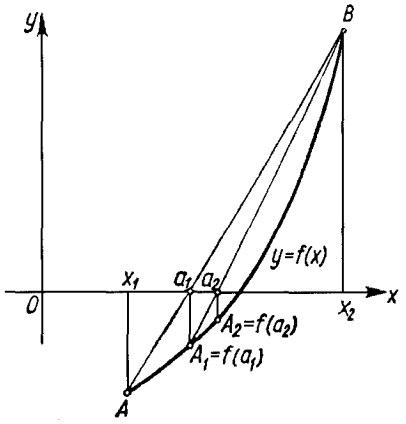
Marra dezagun x_1 eta x_2 abzisei dagozkien $y = f(x)$ kurbaren muturrak lotzen dituen AB korda. Orduan korda eta Ox ardatzaren arteko ebaki-puntuaren a_1 abzisa erroaren balio hurbildua izango da (155. irudia).

---

5) $f(x) = 0$ ekuazioa *algebraiko* deitzen da, $f(x)$ polinomikoa bada (ikus VII. gaiko § 6.)



154. IRUDIA



155. IRUDIA

Balio hurbildu hori lortzeko, emandako $A(x_1, f(x_1))$ eta $B(x_2, f(x_2))$ puntuetatik pasatzen den AB zuzenaren ekuazioa idatziko dugu:

$$\frac{y - f(x_1)}{f(x_2) - f(x_1)} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}.$$

$x = a_1$ denean $y = 0$ denez gero,

$$\frac{-f(x_1)}{f(x_2) - f(x_1)} = \frac{a_1 - x_1}{x_2 - x_1}$$

daukagu, nondik

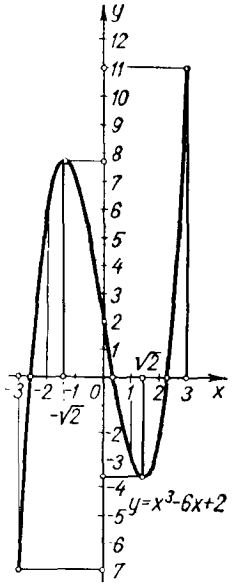
$$a_1 = x_1 - \frac{(x_2 - x_1) f(x_1)}{f(x_2) - f(x_1)} \qquad (2)$$

den.

Balio hurbilduago bat determinatzeko $f(a_1)$ bilatuko dugu. $f(a_1) < 0$ bada, prozedura bera errepikatzen dugu, (2) formula $[a_1, x_2]$ tarteari aplikatuz. $f(a_1) > 0$ bada, aipatu formula $[x_1, a_1]$ tarteari aplikatzen diogu. Prozedura hau errepikatuz, argi eta garbi, erroaren balio gero eta hurbilduagoak, a_2, a_3 e.a. lortuko ditugu.

1. Adibidea. Aurkitu $f(x)=x^3-6x+2=0$ ekuazioaren erroen balio hurbilduak.

Ebazpena. Bila ditzagun lehendabizi, $f(x)$ funtzioa monotonoa den tarteak: Deribatuaren kalkuluaren emaitzak, $f'(x)=3x^2-6$, argi uzten du positiboa dela $x<-\sqrt{2}$ edo $\sqrt{2}<x$ denean eta negatiboa $-\sqrt{2}<x<+\sqrt{2}$ denean (156. irudia). Honela, funtzioak badauka hiru monotoni tarte, zeinen barnean erro bana aurkitzen bait da. Hurrengo kalkuluak errazteko, monotoni tarte horiek txikiagotuko ditugu, baina tarte bakoitzean dagokion erroa mantenduz. Horretarako, $f(x)$ adierazpenean x-ren balioak zoriz aldatuz, monotoni tarteen barruan beste txikiago batzuk aurkituko ditugu, zeinen muturretan funtzioak zeinu desberdinak bait dauzka:



156. IRUDIA

$$\left.\begin{array}{ll} x_1=0, & f(0)=2, \\ x_2=1, & f(1)=-3, \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{ll} x_3=-3, & f(-3)=-7, \\ x_4=-2, & f(-2)=6, \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{ll} x_5=2, & f(2)=-2, \\ x_6=3, & f(3)=11. \end{array}\right\}$$

Era honetan, erroak

$$(0,1),\ (-3,-2),\ (2,3)$$

tartean daude.

Determina dezagun (0,1) tarteko erroaren balio hurbildua; (2) formularen arabera

$$a_1=0-\frac{(1-0)2}{-3-2}=\frac{2}{5}=0,4$$

daukagu.

$$f(0,4)=0,4^3-6\cdot 0,4+2=-0,336,\ \ f(0)=2$$

denez gero, erroa 0 eta 0,4 artean dago. (2) formula berriro (0,0,4) tarteari aplikatuz, ondoko balio hurbildua erdiesten dugu:

$$a_2 = 0 - \frac{(0,4-0)\cdot 2}{-0,336-2} = \frac{0,8}{2,336} = 0,342, \text{ etab.}$$

Antzeko eran aurkitzen dira erroen balio hurbilduak gainontzeko tarteetan.

2. Ukitzaileen metodoa (Newton-en metodoa). Demagun berriro $f(x_1)<0$, $f(x_2)>0$ direla eta $[x_1,x_2]$ tartean lehenengo deribatua ez dela zeinuz aldatzen. Kasu horretan, (x_1,x_2) tartean dago $f(x)=0$ ekuazioaren erro bat. Suposa dezagun, gainera, bigarren deribatua ere ez dela $[x_1,x_2]$ tartean zeinuz aldatzen, erroa daukan tartea txikiagotuz lor daitekeena. $[x_1,x_2]$ tartean bigarren deribatua zeinuz ez aldatzeak esan nahi du kurba bertan ganbila ala ahurra soilik dela.

Marra dezagun kurbaren ukitzailea B puntuan (157. irudia). Ukitzaile eta Ox ardatzaren arteko ebaki-puntuaren a_1 abzisa izango da bilatutako erroaren balio hurbildua. Abzisa hori aurkitzeko, B puntuko ukitzailearen ekuazioa idatziko dugu:

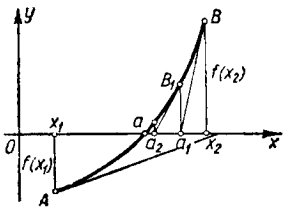
$$y - f(x_2) = f'(x_2)(x - x_2).$$

$x = a_1$ bada $y = 0$ denez gero,

$$a_1 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)} \tag{3}$$

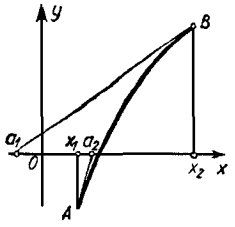
lortzen dugu.

Gero marra dezagun $B_1(a_1, f(a_1))$ puntuko ukitzailea eta era antzekoan, erroaren a_2 balio hurbilduago bat lortuko dugu. Prozedura hori errepikatuz kalkula dezakegu erroaren balio hurbildua nahi den zehaztasun-mailaz.

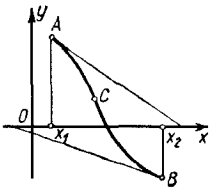


157. IRUDIA

Ikus dezagun hurrengo kasua. Kurbaren ukitzailea B puntuan marratu beharrean A puntuan marratuz gero, gerta liteke ukitzaile eta Ox ardatzaren arteko ebaki-puntua



158. IRUDIA



159. IRUDIA

(x_1, x_2) tartetik kanpo geratzea. 157. eta 158. irudietan argi ikusten da ukitzailea funtzioa eta bere bigarren deribatuaren zeinuak bat datozen arkuaren muturrean marratu behar dena. Hipotesiaren arabera, bigarren deribatuak $[x_1, x_2]$ tartean mantentzen du bere zeinua. Hortaz funtzioa eta bere bigarren deribatuaren zeinuak derrigorrez muturretako batean bat datoz. Erregela horrek $f'(x) < 0$ deneko kasuan ere balio du. Ukitzailea tartearen ezkerreko muturrean marrazten bada, (3) formulan x_2, x_1-ez ordezkatu behar da:

$$a_1 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} \qquad (3')$$

$[x_1, x_2]$ tartearen barnealdean C inflexio-puntu bat balego, ukitzaileen metodoak erroarren balio hurbildua tarte horretatik at eman lezake (159. irudia)

2. Adibidea. Aplika dezagun (3) formula (0,1) tartean dagoen

$$f(x) = x^3 - 6x + 2 = 0$$

ekuazioaren erroa kalkulatzeko.

Ebazpena.

$$f(0) = 2, \quad f'(0) = (3x^2 - 6)_{x=0} = -6$$

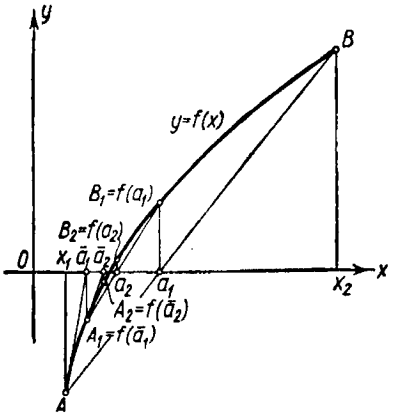
daukagu. Horregatik, (3) formularen arabera,

$$a_1 = 0 - \frac{2}{-6} = \frac{1}{3} = 0{,}333$$

erdiesten dugu.

3. Metodo nahasia (160. irudia) $[x_1, x_2]$ tartean korden eta ukitzaileen metodoak batera aplikatzen baditugu, a_1 eta $\bar{a}_1$ bi puntu lortuko ditugu, bilatutako a

erroaren bi aldeetan daudelarik ($f(a_1)$ eta $f(\bar{a}_1)$ zeinu kontrakoak bait dira). Jarraian, korden eta ukitzaileen metodoak $[a_1, \bar{a}_1]$ tarteari aplikatzen dizkiogu. Emaitzatzat a_2 eta $\bar{a}_2$ bi balio lortzen dugu, erroaren baliotik gertuagoak. Era horretan segitzen dugu harik eta aurkitzen diren balioen arteko diferentzia behar den doitasun-maila baino txikiago izan arte.



160. IRUDIA

Ohar gaitezen, metodo nahasia aplikatuz, bilatutako errorantz bi aldeetatik batera hurbiltzen garela (hau da, gehiagoz eta gutxiagozko balio hurbilduak aldiberean aurkitzen ditugu).

Aurrrekoa ilustratzeko nahikoa da, 1. eta 2. adibideetan, $f(0,333) > 0$, $f(0,342) < 0$ direla ikustea. Hortaz, erroaren balioa kalkulatutako balio hurbilduen artean dago:

$$0,333 < x < 0,342.$$

Ariketak

Aurkitu kurben kurbadura emandako puntuetan:

1. $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$, $(0,b)$ eta $(a,0)$ puntuetan.

   Emaitza: $\dfrac{b}{a^2}$, $(0,b)$ puntuan; $\dfrac{a}{b^2}$, $(a,0)$ puntuan.

2. $yx = 12$, $(3,4)$ puntuan. Em.: $\dfrac{24}{125}$.

3. $y = x^3$, (x_1, y_1) puntuan. Em.: $\dfrac{6x_1}{\left(1 + 9x_1^4\right)^{3/2}}$.

4. $16y^2 = 4x^4 - x^6$, $(2,0)$ puntuan. Em.: $\dfrac{1}{2}$.

5. $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$, hautazko puntu batean. Em.: $\dfrac{1}{3}(axy)^{1/3}$.

Kalkulatu kurben kurbadur erradioa aipatu puntuetan; kurba bakoitza eta kurbadur zirkulua eraiki:

6. $y^2 = x^3$, $(4,8)$ puntuan. Em.: $R = 80\sqrt{\dfrac{10}{3}}$.

7. $x^2 = 4ay$, $(0,0)$ puntuan. Em.: $R = 2a$.

8. $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$, (x_1, y_1) puntuan. Em.: $R = \dfrac{\left(b^4x_1 + a^4y_1\right)^{3/2}}{a^4b^4}$.

9. $y = \ln x$, $(1,0)$ puntuan. Em.: $R = 2\sqrt{2}$.

10. $y = \sin x$, $\left(\dfrac{\pi}{2}, 1\right)$ puntuan. Em.: $R = 1$.

11. $\left.\begin{array}{l} x = a\ \cos^3 t \\ y = a\ \sin^3 t \end{array}\right\}$, $t = t_1$ denean. Em.: $R = 3a \sin t_1 \cos t_1$.

Aurkitu ondorengo kurben kurbadur erradioa:

12. $\left.\begin{array}{l} x = 3t^2 \\ y = 3t - t^3 \end{array}\right\}$, $t = 1$ denean. Em.: $R = 6$.

13. $\rho = a\ \sin\ \theta$ zirkunferentzia. Em.: $R = \dfrac{a}{2}$.

14. $\rho = a\theta$ Arkimedes-en kiribila. Em.: $R = \dfrac{(\rho^2 + a^2)^{3/2}}{\rho^2 + 2a^2}$.

15. $\rho = a(1 - \cos\theta)$ kardioidea. Em.: $R = \dfrac{2}{3}\sqrt{2a\rho}$.

16. $\rho^2 = a^2 \cos 2\theta$ lemniskata. Em.: $R = \dfrac{a^2}{3\rho}$.

17. $\rho = a\sec^3\dfrac{\theta}{2}$ parabola. Em.: $R = 2a\sec^3\dfrac{\theta}{2}$.

18. $\rho = a\sin^3\dfrac{\theta}{3}$. Em.: $R = \dfrac{3}{4}a\sin^2\dfrac{\theta}{3}$.

Bilatu kurbako puntuak, zeinetan kurbadur erradioak baliorik txikiena hartzen duen:

19. $y = \ln x$. Em.: $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}, -\dfrac{1}{2}\ln 2\right)$.

20. $y = e^x$. Em.: $\left(-\dfrac{1}{2}\ln 2, \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

21. $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$. Em.: $\left(\dfrac{a}{4}, \dfrac{a}{4}\right)$.

22. $y = a \ln\left(1 - \dfrac{x^2}{a^2}\right)$. Em.: $(0,0)$ puntuan $R = \dfrac{a}{2}$.

Kalkulatu kurbadur zentruaren (α,β) koordenatuak eta ebolutaren ekuazioak ondorengo kurbetarako:

23. $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$. Em.: $\alpha = \dfrac{\left(a^2 + b^2\right)x^3}{a^4}$; $\beta = -\dfrac{\left(a^2 + b^2\right)y^3}{b^4}$.

24. $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$. Em.: $\alpha = x + 3x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{2}{3}}$; $\beta = y + 3x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{1}{3}}$.

25. $y^3 = a^2 x$. Em.: $\alpha = \dfrac{a^4 + 15y^4}{6a^2 y}$; $\beta = \dfrac{a^4 y - 9y^5}{2a^4}$.

26. $\begin{cases} x = 3t, \\ y = t^2 - 6. \end{cases}$ Em.: $\alpha = -\dfrac{4}{3}t^3$; $\beta = 3t^2 - \dfrac{3}{2}$.

27. $\begin{cases} x = k \ln \cot \dfrac{t}{2} - k \cos t, \\ y = k \sin t. \end{cases}$ Em.: $y = \dfrac{k}{2}\left(e^{\frac{x}{k}} + e^{-\frac{x}{k}} \right)$ (traktrizea).

28. $\begin{cases} x = a(\cos\ t + t \sin\ t), \\ y = a(\sin\ t - t \cos\ t). \end{cases}$ Em.: $\begin{array}{l} \alpha = a \cos\ t; \\ \beta = a \sin\ t. \end{array}$

29. $\begin{cases} \alpha = a\ \cos^3\ t; \\ \beta = a\ \sin^3\ t. \end{cases}$ Em.: $\begin{array}{l} \alpha = a \cos^3 t + 3a \cos\ t \sin^2\ t; \\ \beta = a \sin^3 t + 3a \cos^2\ t \sin\ t. \end{array}$

30. Kalkulatu $x^3 - 4x + 2 = 0$ ekuazioaren erroak, 0'001 baino errore txikiagorekin. Em.: $x_1 = 1{,}675$, $x_2 = 0{,}539$, $x_3 = -2{,}214$.

31. Kalkulatu (1;1,1) tartean dagoen $f(x) = x^5 - x - 0{,}2 = 0$ ekuazioaren erroaren balio hurbildua. Em.: 1,045.

32. Kalkulatu $x^4 + 2x^2 - 6x + 2 = 0$ ekuazioaren erroak, 0,01 baino errore txikiagoz. Em.: $0{,}38 < x_1 < 0{,}39$; $1{,}24 < x_2 < 1{,}25$.

33. Kalkulatu $x^3 - 5 = 0$ ekuazioaren erroen balio hurbildua.

Em.: $x_1 \approx 1{,}71$, $x_{2,3} = 1{,}71 \dfrac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$.

34. Aurkitu 0 eta $\dfrac{3\pi}{2}$ artean dagoen $x - \tan x = 0$ ekuazioaren erroaren balio hurbildua. Em.: 4'4935.

35. Aurkitu, 0,001 baino errore txikiagoz, $\sin x = 1 - x$ ekuazioaren erro hurbildua. Oharra: aldatu ekuazioa $f(x) = 0$ itxurara. Em.: $0'5110 < x < 0'5111$.

36. Frogatu $\rho^2 = a^2 \cos^2 \varphi$ lemniskataren puntu bakoitzeko kurbadura puntu horretako erradio bektorearen proportzionala dela.

37. Aurkitu $\rho = a \sin^3 \frac{\varphi}{3}$ kurbaren kurbadur erradioaren baliorik handiena. Em.: $\frac{3a}{4}$.

38. Aurkitu $y = x \ln x$ kurbaren kurbadur zentruaren koordenatuak $y'=0$ den puntuan. Em.: $\left(e^{-1}, 0\right)$.

39. Egiaztatu $\rho = a\varphi$ Arkimedes-en kiribileko puntuetarako erradio bektore eta kurbadur erradioaren arteko diferentziak 0rantz jotzen duela, $\varphi \to \infty$ denean.

40. Aurkitu $y = ax^2 + bx + c$ parabola, zeinaren $\left(\frac{\pi}{2}, 1\right)$ puntuko ukitzailea eta kurbadura $y = \sin x$ sinusoidearenekin bat bait datoz. Eraiki grafikoa.

Em.: $y = -\frac{x^2}{2} + \frac{\pi x}{2} + 1 - \frac{\pi^2}{8}$.

41. $y = f(x)$ funtzioa ondoko eran definitzen da: $f(x) = x^3$, $-\infty < x \leq 1$ tartean, $f(x) = ax^2 + bx + c$ $1 < x < +\infty$ tartean. Zeintzu dira a, b, c $y = f(x)$ kurbak bere puntu guztietan kurbadura jarraia izan dezan. Eraiki grafikoa.
Em.: $a = 3$, $b = -3$, $c = 1$.

42. Frogatu zikloide baten edozein puntutako kurbadur erradioa, puntu bereko normalaren luzeraren bikoitza dela.

43. Idatzi $y = x^2$ parabolaren $(1,1)$ puntuko kurbadur zirkuluaren ekuazioa.

Em.: $(x+4)^2 + \left(y - \frac{7}{2}\right)^2 = \frac{125}{4}$.

44. Idatzi $y = \tan x$ kurbaren $\left(\frac{\pi}{4}, 1\right)$ puntuko kurbadur zirkuluaren ekuazioa.

Em.: $\left(x - \frac{\pi - 10}{4}\right)^2 + \left(y - \frac{9}{4}\right)^2 = \frac{125}{16}$.

45. Bilatu a eta b ardatzerdietako elipsearen ebolutaren luzera osoa. Em.: $\dfrac{4(a^3 - b^3)}{ab}$.

46. Aurkitu $xe^x = 2$ ekuazioaren erroen balio hurbilduak 0,01erainoko doitasunaz. Em.: ekuazioaren erro bakarra erreala da, $x \approx 0,84$.

47. Aurkitu $x \ln x = 0,8$ ekuazioaren erroen balio hurbilduak 0,01erainoko doitasunaz. Em.: ekuazioaren erro bakarra erreala da, $x \approx 1,64$.

48. Bilatu $x^2 \arctan x = 1$ ekuazioaren erroen balio hurbilduak 0,001erainoko doitasunaz. Em.: ekuazioaren erro bakarra erreala da, $x \approx 1,096$.

VII. GAIA

ZENBAKI KONPLEXUAK. POLINOMIOAK

§ 1. Zenbaki konplexuak. Orokortasunak

$$a + bi \tag{1}$$

itxurako adierazpena, a eta b zenbaki errealak izanik, *zenbaki konplexu* deitzen da; i unitate irudikaria da, ondoko ekuazioen bidez definituta:

$$i = \sqrt{-1} \quad \text{edo} \quad i^2 = -1; \tag{2}$$

a zenbaki konplexuaren *zati erreala* da eta *bi zati irudikaria*. Zati irudikariaren zeinuan bakarrik desberdintzen diren bi zenbaki konplexu, $a + bi$ eta $a - bi$, *konjokatu* deitzen dira.

$a = 0$ bada, $0 + bi = bi$ zenbakiari *irudikari puru* deitzen diogu; $b = 0$ bada zenbaki erreal bat, $a + 0i = a$, lortzen da. Onar dezagun ondoko oinarrizko bi hitzarmen:

1) bi zenbaki konplexu, $a_1 + b_1 i$ eta $a_2 + b_2 i$ berdinak kontsideratzen dira, baldin eta:

$$a_1 = a_2, \quad b_1 = b_2$$

bada, hau da, haien zati errealak eta irudikariak berdinak badira, hurrenez hurren.

2) Zenbaki konplexu bat zeroren berdina da:

$$a + bi = 0,$$

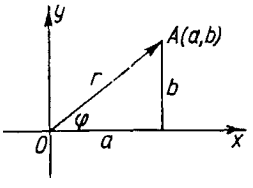
$a = 0$ eta $b = 0$ betetzen den bakoitzean.

1. Zenbaki konplexuen adierazpen geometrikoa. Zenbaki konplexu oro, $a + bi$, Oxy planoan irudikatua izan daiteke, a eta b koordenatuetako $A(a,b)$ puntu baten bidez. Alderantziz, Oxy planoko $M(a,b)$ puntu oro, $a + bi$ zenbaki konplexuaren irudi geometriko bezala kontsidera daiteke. Gainera, $A(a,b)$ puntu orori, $a + bi$ zenbaki konplexua dagokion bezala, bereziki, $0x$ ardatzeko puntu orori zenbaki erreal bat ($b = 0$) dagokiola esan daiteke. Oy ardatzeko edozein puntuk zenbaki irudikari puru bat adierazten du, kasu honetan $a = 0$ bait da.

Horregatik plano batean zenbaki konplexuak irudikatzen baditugu, Oy ardatzak *ardatz irudikari* izena du eta Ox ardatzak *ardatz erreal.*

$A(a,b)$ puntua koordenatu-jatorriarekin lotuz, $\overline{OA}$ bektorea lortzen da. Kasu batzuetan, $\overline{OA}$ bektorea, $a+bi$ zenbaki konplexuaren adierazpen geometrikoa bezala kontsideratzea oso komenigarria da.

2. Zenbaki konplexuen forma trigonometrikoa. Izenda ditzagun φ eta r $(r \geq 0)$ $A(a,b)$ puntuaren koordenatu polarrak, polotzat koordenatu-jatorria eta ardatz polartzat Ox ardatzaren norantza positiboa hartuz. Kasu honetan ondoko adierazpenak dauzkagu (161. irudia):



161. IRUDIA

$$a = r\cos\varphi, \quad b = r\sin\varphi$$

eta, beraz, zenbaki konplexua hurrengo eran adierazia izan daiteke:

$$a + bi = r(\cos\varphi + i\ \sin\varphi). \tag{3}$$

Bigarren ataleko adierazpenak, $a + bi$ zenbaki konplexuaren forma trigonometriko izena du. r eta φ magnitudeak a eta b-ren funtzioan adierazten dira ondoko formulen bitartez:

$$r = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad \varphi = \operatorname{Arctan}\frac{b}{a}.$$

r zenbakiak, $a+bi$ zenbaki konplexuaren *modulu* izena du eta φ-k *argumentu.*

Zenbaki konplexu baten argumentua, hau da, φ angelua, positiboa da Ox ardatzaren norantza positibotik abiatuz erloju-orratzen ibileraren aurkakoa denean, eta negatiboa da aldekoa denean. Nabaria da, φ argumentua ez dela determinatzen era unibokoan, baizik eta balio posible guztien artean $2\pi k$-ko diferentzia dagoela, k edozein zenbaki oso izanik.

Batzutan, $a+bi$ zenbaki konplexuaren r modulua $|a+bi|$ ikurraz adierazten da:

$$r = |a + bi|.$$

Nabari dezagun, A edozein zenbaki erreal (3) itxuraz idatz daitekeela, hau da:

$A = |A|(\cos\ 0 + i\ \sin\ 0)$ $A > 0$ denean

$A = |A|(\cos\ \pi + i\ \sin\ \pi)$ $A < 0$ denean

0 zenbaki konplexuaren modulua zero da: $|0| = 0$.

0 zenbakiaren argumentutzat edozein angelu φ har daiteke. Izan ere, φ edozein angelutarako hurrengo berdintza betetzen da:

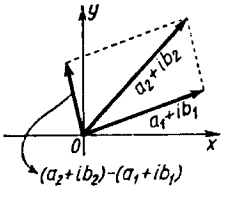
$$0 = 0 \cdot (\cos\ \varphi + i\ \sin\ \varphi).$$

§ 2. Zenbaki konplexuen arteko oinarrizko eragiketak

1. Batuketa. $a_1 + b_1 i$ eta $a_2 + b_2 i$ bi zenbaki konplexuen arteko batura ondoko berdintzak definitutako zenbaki konplexua da:

$$(a_1 + b_1 i) + (a_2 + b_2 i) = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i. \qquad (1)$$

Bektore-eran irudikatutako zenbaki konplexuen arteko batura, bektoreen batuketaren erregelaz egiten dela (1) formulatik ondorioztatzen da.



162. IRUDIA

2. Kenketa. $a_1 + b_1 i$ eta $a_2 + b_2 i$ bi zenbaki konplexuen arteko kendura, zenbaki konplexua da, hain zuzen ere, $a_1 + b_1 i$ zenbakiarekin batuz $a_2 + b_2 i$ ematen duena.

$$(a_2 + b_2 i) - (a_1 + b_1 i) = (a_2 - a_1) + (b_2 - b_1)i. \qquad (2)$$

Kontura gaitezen bi zenbaki konplexuren arteko kenduraren modulua

$$\sqrt{(a_1 - a_2)^2 + (b_1 - b_2)^2},$$

planu konplexuan zenbaki horiek adierazten dituzten puntuen arteko distantzia dela (162. irudia).

3. Biderkaketa. $a_1 + b_1 i$ eta $a_2 + b_2 i$ bi zenbakien arteko biderkadura, zenbaki horiek binomioak bezala biderkatuz, erregela algebraikoen arabera, zenbaki konplexua da. Kontutan hartu behar da:

$$i^2 = -1; \quad i^3 = (-1)i = -i; \quad i^4 = (-i)(i) = -i^2 = 1;$$
$$i^5 = 1 \cdot i, \text{ etab.}$$

eta, orokorrean, k zenbaki oso baterako:

$$i^{4k} = 1; \quad i^{4k+1} = i; \quad i^{4k+2} = -1; \quad i^{4k+3} = -i.$$

Arau horren bitartez

$$(a_1 + b_1 i)(a_2 + b_2 i) = a_1 a_2 + b_1 a_2 i + a_1 b_2 i + b_1 b_2 i^2$$

edo

$$(a_1 + b_1 i)(a_2 + b_2 i) = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + b_1 a_2) i \tag{3}$$

dugu.

Zenbaki konplexuak forma trigonometrikoan adierazita badaude

$$\begin{aligned} & r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)\ r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) = \\ & = r_1 r_2 [\cos\varphi_1 \cos\varphi_2 + i\sin\varphi_1 \cos\varphi_2 + i\cos\varphi_1 \sin\varphi_2 + \\ & + i^2 \sin\varphi_1 \sin\varphi_2] = r_1 r_2 [(\cos\varphi_1 \cos\varphi_2 - \sin\varphi_1 \sin\varphi_2) + \\ & + i(\sin\varphi_1 \cos\varphi_2 + \cos\varphi_1 \sin\varphi_2)] = r_1 r_2 [\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)]. \end{aligned}$$

dugu.

Honela bada,

$$\begin{aligned} & r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)\ r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) = \\ & = r_1 r_2 [\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)], \end{aligned} \tag{3'}$$

hau da, bi zenbaki konplexuren arteko biderkadura beste zenbaki konplexu bat da, non modulua faktoreen moduluen arteko biderkadura den eta argumentua faktoreen argumentuen arteko batura.

1. Oharra. (3) formularen bitartez, zenbaki konplexu konjokatuek, $a+bi$ eta $a-bi$,

$$(a+ib)(a-ib)=a^2+b^2$$

berdintza betetzen dute. Hau da, bi zenbaki konplexu konjokaturen arteko biderkadura moduluaren karratuaren berdina da.

4. Zatiketa. Bi zenbaki konplexuren arteko zatiketa bere biderkaketaren alderantzizko eragiketa da. Halako kasuan, baldin eta

$$\frac{a_1+b_1i}{a_2+b_2i}=x+yi$$

bada, $\left(\text{non } \sqrt{a_2^2+b_2^2}\neq 0\right)$, x eta y-k hurrengo berdintza bete dezaten modukoak izan behar dute:

$$a_1+b_1i=(a_2+b_2i)(x+yi),$$

hau da,

$$a_1+b_1i=(a_2x-b_2y)+(a_2y+b_2x)i.$$

Beraz,

$$a_1=a_2x-b_2y,\quad b_1=b_2x+a_2y,$$

hortik

$$x=\frac{a_1a_2+b_1b_2}{a_2^2+b_2^2},\quad y=\frac{a_2b_1-a_1b_2}{a_2^2+b_2^2},$$

eta azkenean:

$$\frac{a_1+b_1i}{a_2+b_2i}=\frac{a_1a_2+b_1b_2}{a_2^2+b_2^2}+\frac{a_2b_1-a_1b_2}{a_2^2+b_2^2}i.$$

Praktikan, bi zenbaki konplexuren arteko zatiketa hurrengo eran egiten da: a_1+b_1i zati a_2+b_2i egiteko, azken horren konjokatuaz (hau da a_2-b_2i) zatikizuna zein zatitzailea biderkatzen ditugu. Orduan, zatitzailea zenbaki erreala izango da; zatikizunaren zati erreala eta irudikaria zatitzerakoan

$$\frac{a_1+b_1i}{a_2+b_2i}=\frac{(a_1+b_1i)(a_2-b_2i)}{(a_2+b_2i)(a_2-b_2i)}=\frac{(a_1a_2+b_1b_2)+(a_2b_1-a_1b_2)i}{a_2^2+b_2^2}=$$
$$=\frac{a_1a_2+b_1b_2}{a_2^2+b_2^2}+\frac{a_2b_1-a_1b_2}{a_2^2+b_2^2}i$$

lortzen dugu.

Zenbaki konplexua forma trigonometrikoan adierazita badago,

$$\frac{r_1(\cos\ \varphi_1+i\ \sin\ \varphi_1)}{r_2(\cos\ \varphi_2+i\ \sin\ \varphi_2)}=\frac{r_1}{r_2}\left[\cos\ (\varphi_1-\varphi_2)+i\ \sin\ (\varphi_1-\varphi_2)\right]$$

izango dugu.

Berdintza hori egiaztatzeko, zatitzailea zatiduraz biderkatzea nahikoa da:

$$r_2(\cos\ \varphi_2+i\ \sin\ \varphi_2)\frac{r_1}{r_2}\left[\cos(\varphi_1-\varphi_2)+i\ \sin\ (\varphi_1-\varphi_2)\right]=$$
$$=r_2\frac{r_1}{r_2}\left[\cos\ (\varphi_2+\varphi_1-\varphi_2)+i\ \sin\ (\varphi_2+\varphi_1-\varphi_2)\right]=r_1(\cos\ \varphi_1+i\ \sin\ \varphi_1).$$

Honela, bi zenbaki konplexuren arteko zatiduraren modulua, zatikizun eta zatitzailearen moduluen arteko zatidura da; zatiduraren argumentua zatikizun eta zatitzailearen argumentuen arteko kendura da.

2. Oharra. Zenbaki konplexuen arteko eragiketarako arauetatik, zenbaki konplexuen arteko batuketa, kenketa, biderkaketa eta zatiketak beste zenbaki konplexu berri bat ematen dutela ondorioztatzen da. Zenbaki konplexuen arteko eragiketen arauak zenbaki errealeei aplikatzen bazaizkie (zenbaki konplexuetako kasu partikularra kontsideratuz) arau horiek aritmetikaren arau arruntekin bat datoz.

3. Oharra. Batuketa, kenketa, biderkaketa eta zatiketaren definiziora itzuliz, adierazpen horietan zenbaki konplexuak dagozkien konjokatuaz ordezkatzen badira esandako eragiketen emaitzak ere zenbaki konjokatuaz ordezkatuak direla egiaztatzea erraza da. Hortik, bereziki, hurrengo teorema ondorioztatzen da.

Teorema. Koefiziente errealetako polinomio batean,

$$A_0x^n+A_1x^{n-1}+\ldots+A_n,$$

x $a+bi$ zenbakiaz ordezkatzen badugu eta, gero, $a-bi$ zenbaki konjokatuaz, lortutako emaitzak elkarren konjokatuak izango dira.

§ 3. Zenbaki konplexuen berreketa eta erroketa

1. Zenbaki konplexuen berreketa. Aurreko ataleko (3') formulatik ateratzen da, n zenbaki positibo osoa bada

$$[r(\cos\ \varphi + i\ \sin\ \varphi)]^n = r^n(\cos\ n\varphi + i\ \sin\ n\varphi) \qquad (1)$$

dela.

Adierazpen hori *Moivre-ren formula* da, eta erakusten du zenbaki konplexua potentzia oso eta positibo batera jasotzerakoan, zenbaki horren modulua potentzia berberara jasotzen dela eta argumentua potentzia horren berretzailearekin biderkatzen dela.

Kontsidera dezagun orain Moivre-ren formularen beste aplikazio bat gehiago. $r = 1$ eginez,

$$(\cos\ \varphi + i\ \sin\ \varphi)^n = \cos\ n\varphi + i\ \sin\ n\varphi$$

lortzen dugu.

Newton-en binomio-formularen bitartez, lehenengo atala garatuz eta zati errealak eta irudikariak berdinduz, $\sin n\varphi$ eta $\cos n\varphi$, $\sin\varphi$ eta $\cos\varphi$-ren potentzien bitartez adieraz ditzakegu.

Horrela, adibidez, $n = 3$ bada,

$$\cos^3\ \varphi + i3\ \cos^2\ \varphi \cdot \sin\ \varphi - 3\ \cos\ \varphi \cdot \sin^2\ \varphi - i\ \sin^3\ \varphi = \cos\ 3\varphi + i\ \sin\ 3\varphi$$

lortzen dugu.

Zenbaki konplexu horien berdintzatik hauxe ondorioztatzen da:

$$\cos\ 3\varphi = \cos^3\ \varphi - 3\ \cos\varphi\ \sin^2\ \varphi,$$
$$\sin\ 3\varphi = -\sin^3\ \varphi + 3\ \cos^2\ \varphi\ \sin\ \varphi.$$

2. Zenbaki konplexuen erroketa. Zenbaki konplexu baten n-garren erroa beste zenbaki konplexu bat da, zeinak n-garren potentziara jasotzen denean hasierako zenbakia emango duen, hau da,

$$\sqrt[n]{r(\cos\ \varphi + i\ \sin\ \varphi)} = \rho(\cos\ \psi + i\ \sin\ \psi),$$
$$\rho^n(\cos\ n\psi + i\ \sin\ n\psi) = r(\cos\ \varphi + i\ \sin\ \varphi).$$

Berdinak diren bi zenbaki konplexuen moduluek berdinak izan behar dutenez eta argumentuek n arteko kendura 2π-ren anizkoitza denez,

$$\rho^n = r, \quad n\psi = \varphi + 2k\pi$$

badugu.

Hortik

$$\rho = \sqrt[n]{r}, \quad \psi = \frac{\varphi + 2k\pi}{n},$$

non k zenbaki oso hautazkoa den; r zenbaki positiboaren erroaren balio aritmetikoa (erreala eta positiboa) $\sqrt[n]{r}$ da. Hortaz,

$$\sqrt[n]{r(\cos\ \varphi + i\ \sin\ \varphi)} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i\ \sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right). \qquad (2)$$

k-ri $0, 1, 2, ..., n-1$ balioak emanez, erroaren n balio desberdin lortzen ditugu. k-ren beste balioetarako argumentuak eta lortutakoen arteko diferentziak 2π-ren anizkoitzak dira eta, beraz, erroaren n balio berberak erdietsiko dira.

Honela, zenbaki konplexu baten n-garren erroak n balio desberdinak ditu.

Zero ez den A zenbaki errealaren n-garren erroak ere n balio badu, zenbaki erreala zenbaki konplexuaren kasu partikularra bait da eta, badauka forma trigonometrikoan adierazterik:

$A > 0$ bada, $\quad A = |A|\ (\cos 0 + i \sin 0)$ dugu

$A < 0$ bada, $\quad A = |A|\ (\cos \pi + i \sin \pi)$ dugu.

1. Adibidea. Lortu unitatearen erro kubiko guztiak.

Ebazpena. Adieraz dezagun unitatea era trigonometrikoan:

$$1 = \cos\ 0 + i\ \sin\ 0.$$

(2) formularen bitartez,

$$\sqrt[3]{1} = \sqrt[3]{\cos\ 0 + i\ \sin\ 0} = \cos\ \frac{0 + 2k\pi}{3} + i\ \sin\ \frac{0 + 2k\pi}{3}.$$

k berdin 0, 1, 2 eginez, erroaren hiru balioak lortzen ditugu:

$$x_1 = \cos 0 + i\ \sin\ 0 = 1;\ x_2 = \cos\frac{2\pi}{3} + i\ \sin\ \frac{2\pi}{3};\ x_3 = \cos\ \frac{4\pi}{3} + i\ \sin\ \frac{4\pi}{3}.$$

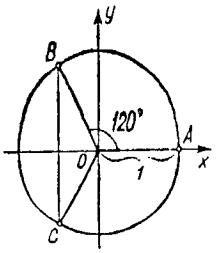
$$\cos\frac{2\pi}{3}=-\frac{1}{2};\quad \sin\frac{2\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2};\quad \cos\frac{4\pi}{3}=-\frac{1}{2};\quad \sin\frac{4\pi}{3}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

kontutan hartuz,

$$x_1=1;\quad x_2=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2};\quad x_3=-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

ondorioztatzen da.

163. irudian, A, B, C, puntuak lortutako erroei dagozkien irudi geometrikoak dira.



163. IRUDIA

3. Ekuazio binomikoaren ebazpena. $x^n = A$ ekuazioak *binomiko* izena du. Aurki ditzagun ekuazio horren erroak.

A zenbaki erreala eta positiboa bada,

$$x=\sqrt[n]{A}\left(\cos\frac{2k\pi}{n}+i\ \sin\frac{2k\pi}{n}\right)$$
$$(k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n-1)$$

dugu.

Parentesi artean itxitako adierazpenak unitatearen n-garren erroaren balio guztiak ematen ditu.

A zenbaki erreala eta negatiboa bada,

$$x=\sqrt[n]{|A|}\left(\cos\frac{\pi+2k\pi}{n}+i\ \sin\ \frac{\pi+2k\pi}{n}\right)$$

daukagu.

-1aren n-garren erroaren balio guztiak parentesi artean dagoen adierazpenak ematen ditu.

A zenbaki konplexu bat bada, x-ren balioak (2) formularen bitartez kalkulatzen dira.

2. Adibidea. Ebatzi $x^4 = 1$ ekuazioa.

Ebazpena. $x = \sqrt[4]{\cos 2k\pi + i \sin 2k\pi} = \cos \frac{2k\pi}{4} + i \sin \frac{2k\pi}{4}$

$k = 0, 1, 2, 3$ bada,

$$x_1 = \cos 0 + i \sin 0 = 1,$$
$$x_2 = \cos \frac{2\pi}{4} + i \sin \frac{2\pi}{4} = i,$$
$$x_3 = \cos \frac{4\pi}{4} + i \sin \frac{4\pi}{4} = -1,$$
$$x_4 = \cos \frac{6\pi}{4} + i \sin \frac{6\pi}{4} = -i$$

lortzen ditugu.

§ 4. Berretzaile konplexuko funtzio esponentziala eta bere propietateak

Izan bedi $z = x + iy$. x eta y aldagai errealak badira, z aldagai konplexua da. Aldagai konplexuaren balio bakoitzari Oxy planoan (aldagai konplexuaren planoa) ondo zehaztutako puntu bat dagokio (161. irudia).

Definizioa. Baldin eta aldagai konplexuaren balio bati, plano konplexuko eremu batekoa izanik, ondo determinatutako ω beste aldagai konplexu baten balioa badagokio, ω, z aldagai konplexuaren funtzio bat dela esaten da: $\omega = f(z)$ edo $\omega = \omega(z)$ idazten da.

Aldagai konplexuko funtzioaren limite, deribatu, integral, etab. nozioak existitzen dira.

Aldagai konplexuko funtzio bat aztertuko dugu, funtzio esponentziala alegia: $\omega = e^z$, hau da: $\omega = e^{x+iy}$

ω funtzioaren balio konplexuak hurrengo eran mugatzen dira[1]:

$$e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \sin y), \qquad (1)$$

hots,

1) Aurrerago (XIII. gaiko § 21 eta XVI. gaiko § 18) funtzio esponentzialaren definizio horren egokitasuna frogatuko dugu.

$$\omega(z) = e^x(\cos\ y + i\ \sin\ y). \tag{2}$$

Adibideak:

1) $z = 1 + \frac{\pi}{4}i,\ e^{1+\frac{\pi}{4}i} = e\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\ \sin\ \frac{\pi}{4}\right) = e\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right).$

2) $z = 0 + \frac{\pi}{2}i,\ e^{0+\frac{\pi}{2}i} = e^0\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\ \sin\ \frac{\pi}{2}\right) = i.$

3) $z = 1 + i,\ e^{1+i} = e^1(\cos\ 1 + i\ \sin\ 1) = 0{,}54 + i \cdot 0{,}83.$

4) $z = x$ (x zenbaki erreala da),

$$e^{x+0i} = e^x(\cos\ 0 + i\ \sin\ 0) = e^x,$$

funtzio esponentzial arrunta dena.

Funtzio esponentzialaren propietateak

1. z_1 eta z_2 bi zenbaki konplexu badira

$$e^{z_1+z_2} = e^{z_1} \cdot e^{z_2} \tag{3}$$

betetzen da.

Frogapena. Izan bedi

$$z_1 = x_1 + iy_1, \qquad z_2 = x_2 + iy_2,$$

orduan

$$e^{z_1+z_2} = e^{(x_1+iy_1)+(x_2+iy_2)} = e^{(x_1+x_2)+i(y_1+y_2)} =$$
$$= e^{x_1}e^{x_2}\left[\cos(y_1 + y_2) + i\ \sin\ (y_1 + y_2)\right]. \tag{4}$$

Beste aldetik, forma trigonometrikoan adierazitako bi zenbaki konplexuren arteko biderkaketari buruzko teoremari esker,

$$e^{z_1}e^{z_2} = e^{x_1+iy_1}e^{x_2+iy_2} = e^{x_1}(\cos\ y_1 + i\ \sin\ y_1) \times$$
$$\times\ e^{x_2}(\cos\ y_2 + i\ \sin\ y_2) = e^{x_1}e^{x_2}\left[\cos(y_1 + y_2) + i\ \sin\ (y_1 + y_2)\right] \tag{5}$$

daukagu.

(4) eta (5) berdintzen bigarren atalak berdinak dira eta, beraz, lehenengoak ere berdinak izango dira:

$$e^{z_1+z_2} = e^{z_1}e^{z_2}$$

2. Era berean

$$e^{z_1-z_2} = \frac{e^{z_1}}{e^{z_2}} \tag{6}$$

formula frogatzen da.

3. m zenbaki osoa bada,

$$(e^z)^m = e^{mz} \tag{7}$$

badugu.

Formula hori (3) formulatik erraz lortzen da, $m>0$ denean. $m<0$ bada (3) eta (6) formulen bidez lortzen da.

4. Froga dezagun hurrengo identitatea:

$$e^{z+2\pi i} = e^z \tag{8}$$

(3) eta (1) formulen bitartez,

$$e^{z+2\pi i} = e^z e^{2\pi i} = e^z(\cos 2\pi + i \sin 2\pi) = e^z$$

dugu.

(8) identitatetik ondorioztatzen da e^z funtzio esponentziala, $2\pi i$ periodoko funtzio periodikoa dela.

5. Azter dezagun orain ondoko magnitude konplexua,

$$\omega = u(x) + iv(x),$$

non $u(x)$ eta $v(x)$ x aldagai errealeko funtzio errealak diren. *Aldagai errealeko funtzio konplexua* da.

a) Suposa dezagun

$$\lim_{x\to x_0} u(x) = u(x_0), \quad \lim_{x\to x_0} v(x) = v(x_0)$$

limiteak existitzen direla. Orduan,

$$u(x_0) + iv(x_0) = \omega_0$$

ω aldagai konplexuaren limitea da.

b) $u'(x)$ eta $v'(x)$ deribatuak existitzen badira,

$$\omega'_x = u'(x) + iv'(x) \tag{9}$$

adierazpena aldagai errealeko funtzio konplexuaren deribatua da, aldagai errealarekiko.

Iker dezagun orain hurrengo funtzio esponentziala:

$$\omega = e^{\alpha x + i\beta x} = e^{(\alpha + i\beta)x},$$

non α eta β konstanteak diren eta x aldagai erreala den. Aldagai errealeko funtzio konplexua da eta (1) formularen bitartez

$$\omega = e^{\alpha x}[\cos \beta x + i \sin \beta x]$$

edo

$$\omega = e^{\alpha x} \cos \beta x + ie^{\alpha x} \sin \beta x$$

eran idatz daiteke.

ω'_x deribatua kalkula dezagun. (9) formularen bidez

$$\begin{aligned}
\omega'_x &= (e^{\alpha x} \cos \beta x)' + i(e^{\alpha x} \sin \beta x)' = \\
&= e^{\alpha x}(\alpha \cos \beta x - \beta \sin \beta x) + ie^{\alpha x}(\alpha \sin \beta x + \beta \cos \beta x) = \\
&= \alpha\left[e^{\alpha x}(\cos \beta x + i \sin \beta x)\right] + i\beta\left[e^{\alpha x}(\cos \beta x + i \sin \beta x)\right] = \\
&= (\alpha + i\beta)\left[e^{\alpha x}(\cos \beta x + i \sin \beta x)\right] = (\alpha + i\beta)e^{(\alpha + i\beta)x}
\end{aligned}$$

badugu.

Honelatan,

$$\omega = e^{(\alpha + i\beta)x}$$

bada

$$\omega' = (\alpha + i\beta)e^{(\alpha + i\beta)x}$$

edo

$$\left[e^{(\alpha+i\beta)x}\right]' = (\alpha + i\beta)e^{(\alpha+i\beta)x} \tag{10}$$

izango da.

Honela, k zenbaki konplexua bada (bereziki erreala) eta x zenbaki erreala:

$$(e^{kx})' = ke^{kx}. \tag{9'}$$

Funtzio esponentzial baten deribaziorako formula orokor bat lortu dugu. Badugu ere:

$$(e^{kx})'' = \left[(e^{kx})'\right]' = k(e^{kx})' = k^2 e^{kx}$$

eta edozein n-tarako:

$$(e^{kx})^{(n)} = k^n e^{kx}.$$

Aurrerago formula horiek erabiliko ditugu.

§ 5. Euler-en formula. Zenbaki konplexu baten forma esponentziala

Aurreko ataleko (1) formulan $x = 0$ egiten badugu,

$$e^{iy} = \cos\ y + i\ \sin\ y \tag{1}$$

lortzen dugu.

Hori da *Euler-en formula* eta berretzaile irudikariko funtzio esponentziala eta funtzio trigonometrikoen arteko erlazioa adierazten du.

(1) formulan y, $-y$-rekin ordezkautz,

$$e^{-iy} = \cos\ y - i\ \sin\ y \tag{2}$$

lortzen dugu.

(1) eta (2) berdintzetatik $\cos y$ eta $\sin y$ kalkulatzen ditugu:

$$\left.\begin{aligned} \cos y &= \frac{e^{iy}+e^{-iy}}{2}, \\ \sin y &= \frac{e^{iy}-e^{-iy}}{2i}. \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

(3) formulak erabiltzen dira bereziki, $\cos y$ eta $\sin y$-ren potentziak ezezik haien arteko biderkadurarenak ere arku anizkoitzeko sinu eta kosinuaren funtziotan adierazteko.

Adibideak:

1. $$\cos^2 y = \left(\frac{e^{iy}+e^{-iy}}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}(e^{i2y}+2+e^{-i2y}) =$$
$$= \frac{1}{4}\left[(\cos 2y + i \sin 2y) + 2 + (\cos 2y - i \sin 2y)\right]$$
$$= \frac{1}{4}(2 \cos 2y + 2) = \frac{1}{2}(1+\cos 2y).$$

2. $$\cos^2 \varphi \sin^2 \varphi = \left(\frac{e^{i\varphi}+e^{-i\varphi}}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{e^{i\varphi}-e^{-i\varphi}}{2i}\right)^2 =$$
$$= \frac{(e^{i2\varphi}-e^{-i2\varphi})^2}{4\cdot 4i^2} = -\frac{1}{8}\cos 4\varphi + \frac{1}{8}.$$

Zenbaki konplexuen forma esponentziala. Idatz dezagun z zenbaki konplexua forma trigonometrikoan:

$$z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi),$$

r eta y zenbaki konplexu horren modulua eta argumentua izanik.

Euler-en formularen arabera

$$\cos \varphi + i \sin \varphi = e^{i\varphi}.$$

Beraz, edozein zenbaki konplexu forma esponentzialean adieraz daiteke:

$$z = re^{i\varphi}.$$

Adibidea. Idatzi forma esponentzialean 1, i, -2, $-i$ zenbakiak.

Ebazpena.

$$1 = \cos 2k\pi + i \sin 2k\pi = e^{2k\pi i},$$

$$i = \cos\frac{\pi}{2} + i \sin\frac{\pi}{2} = e^{\frac{\pi}{2}i},$$

$$-2 = 2(\cos \pi + i \sin \pi) = 2e^{\pi i},$$

$$-i = \cos\frac{\pi}{2} - i \sin\frac{\pi}{2} = e^{-\frac{\pi}{2}i}.$$

§ 6. Polinomio baten faktoretako deskonposaketa

$$f(x) = A_0x^n + A_1x^{n-1} + \ldots + A_n$$

funtzioak, non n zenbaki osoa den, *polinomio* edo x-ren *funtzio razional oso* izena du. n zenbakia *polinomiaren maila* da. Hor $A_0, A_1, \ldots A_n$ koefizienteak zenbaki erreal edo konplexuak dira. x aldagai independenteak balio errealak zein balio konplexuak har ditzake. x aldagaiaren balioa, zeinean polinomioak 0 balioa hartzen duen, polinomioaren *erro* deitzen da.

1. Teorema (Bezout-en teorema). $f(x)$ polinomioa eta $(x-a)$-ren arteko zatiketaren hondarra $f(a)$-ren berdina da.

Frogapena. $f(x)$ polinomioaren eta $(x-a)$-ren arteko zatiketaren zatidura $f_1(x)$ polinomioa da, zeinaren maila $f(x)$ polinomioaren maila baino unitate bat txikiagoa den; hondarra, R zenbaki konstantea da. Orduan, hauxe idatz dezakegu:

$$f(x) = (x-a)f_1(x) + R. \tag{1}$$

a ez diren x-ren balio guztietarako balio du berdintza horrek ($x = a$ denean, $(x-a)$-rekiko zatiketak ez du zentzurik). x-k a-rantz jotzen badu, berdintzaren lehenengo atalaren limitea $f(a)$ eta bigarren atalaren limitea R dira. $f(x)$ eta $(x-a)f_1(x) + R$ funtzioak berdinak direnez, $x \neq a$ diren balio guztietarako, haien limiteak ere berdinak dira $x \to a$ denean, hau da, $f(a) = R$.

Korolarioa: a polinomioaren erroa bada, hots, $f(a) = 0$, $(x-a)$ $f(x)$ funtzioaren zatitzaile da, beraz, ondokoa idatz daiteke:

$$f(x) = (x-a)f_1(x),$$

non $f_1(x)$ polinomioa den.

1. Adibidea. $f(x)=x^3-6x^2+11x-6$ polinomioa anulatzen da $x=1$ denerako, hau da, $f(1)=0$. Horregatik emandako polinomioa $(x-1)$ faktoreaz zatigarria da:

$$f(x)=x^3-6x^2+11x-6$$

Iker ditzagun orain x ezezagun bateko ekuazioak. x ordezkatzean ekuazioa identitate bihurtzen duen zenbaki orok (erreal edo konplexu) ekuazioaren *erro* izena du.

2. Adibidea.

$$x_1=\frac{\pi}{4};\ x_2=\frac{5\pi}{4};\ x_3=\frac{9\pi}{4},\ \ldots$$

zenbakiak, $\cos x=\sin x$ ekuazioaren erroak dira.

n mailako ekuazio *algebraiko* deitzen zaio $P(x)=0$ itxura duenari, $P(x)$ n mailako polinomioa izanik. Definiziotik ondorioztatzen da, $P(x)=0$ ekuazio algebraikoaren erroak $P(x)$ polinomioarenak direla.

Jakina, edozein ekuaziok erroak dituen ala ez galdera sortzen da. Ekuazio ez-algebraikoetarako erantzuna ezezkoa da. Errorik (ez errealik, ez konplexurik) ez duen ekuazio ez-algebraikorik badago, $e^x=0$ ekuazioa esate baterako[2].

Hala ere, ekuazio algebraikoetarako erantzuna baiezkoa da, hau algebraren oinarrizko teorema delarik.

2. Teorema (Algebraren oinarrizko teorema). Funtzio razional oso orok badu gutxienez erro erreal edo konplexu bat.

Teorema hau goi-mailako algebran frogatzen da. Hemen frogapenik gabe onartuko dugu.

Algebraren oinarrizko teorema erabiliz hurrengo teorema frogatzea erraza da.

3. Teorema. n mailako polinomio oro x^n-ren koefizientea den faktorea eta $(x-a)$ itxurako n faktore linealetan deskonposa daiteke.

---

2) Izan ere, $x_1=a+bi$ zenbakia ekuazio horren erro balitz, $e^{a+bi}=0$ identitatea beteko litzateke, edo (Euler-en formularen arabera) $e^a(\cos b+i\sin b)=0$. Baina, e^a ezin da anulatu a edozein zenbaki erreal izanik ere; $\cos b+i\sin b$ ere ezin da zero izan (b edozein dela ere, zenbaki horren modulua $\sqrt{\cos^2 b+\sin^2 b}=1$ bait da). Beraz, $e^a(\cos b+i\sin b)\neq 0$, hau da, $e^{a+bi}\neq 0$, horrek $e^a=0$ ekuazioak errorik ez duela esan nahi du.

Frogapena. Izan bedi $f(x)$ n mailako polinomio bat

$$f(x) = A_0x^n + A_1x^{n-1} + \ldots + A_n.$$

Oinarrizko teoremaren bidez, polinomio horrek gutxienez erro bat badauka; erro horri a_1 deituko diogu. Baina, Bezout-en teoremaren korolarioaren bidez

$$f(x) = (x - a_1)f_1(x)$$

idatz dezakegu, non $f_1(x)$ $n-1$ mailako polinomioa den; arrazonamendu bera erabiliz $f_1(x)$ polinomioak badu a_2 izendatuko dugun erro bat gutxienez. Orduan,

$$f_1(x) = (x - a_2)f_2(x),$$

$f_2(x)$ $n-2$ mailako polinomioa izanik. Era berean:

$$f_2(x) = (x - a_3)f_3(x).$$

Prozesu hori errepikatuz,

$$f_{n-1}(x) = (x - a_n)f_n$$

adierazpenera iristen gara, non f_n 0 mailako polinomioa den, hau da, f_n konstante bat da. Bistan dagoenez, konstante hori x^n-ren koefiziente bera da hots, $f_n = A_0$.

Lortutako berdintzen bitartez

$$f(x) = A_0(x - a_1)(x - a_2)\ldots(x - a_n) \qquad (2)$$

idatz dezakegu.

(2) garapenetik $a_1, a_2, \ldots, a_n$ zenbakiak $f(x)$ polinomioaren erroak direla ondorioztatzen da, $x = a_1$, $x = a_2, \ldots, x = a_n$ ordezkapenak egin eta gero bigarren atala eta, beraz, lehenengoa anulatzen bait dira.

3. Adibidea. $f(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ polinomioa anulatzen da $x = 1$, $x = 2$, $x = 3$ denean. Beraz,

$$x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = (x - 1)(x - 2)(x - 3)$$

$a_1, a_2, \ldots, a_n$ ez den inongo $x = a$ ez da $f(x)$ polinomioaren erroa, zeren eta (2) berdintzaren bigarren ataleko faktore bat ere ez bait da anulatzen $x = a$ denean.

Orain ondoko enuntziatua adieraz dezakegu:

n mailako polinomio orok ezin du n baino erro desberdin gehiago izan.

Emaitza horrek hurrengo teoremara garamatza.

4. Teorema. n mailako $\varphi_1(x)$ eta $\varphi_2(x)$ polinomioen balioak x aldagaiaren $a_0, a_1, \ldots, a_n$ $n+1$ balio desberdinetarako berdinak badira, emandako polinomioak berdinak dira.

Frogapena. Izenda dezagun $f(x)$ polinomio horien arteko kendura:

$$f(x) = \varphi_1(x) - \varphi_2(x).$$

Hipotesiaren arabera, $f(x)$ n baino maila handiagoa ez duen polinomioa da, $a_1, \ldots, a_n$ puntuetan anulatzen dena. Beraz,

$$f(x) = A_0(x - a_1)(x - a_2)\ldots(x - a_n)$$

eran adieraz daiteke.

Baina, hipotesiz, $f(x)$ a_0 puntuan ere anulatzen da. Orduan, $f(a_0) = 0$, faktore lineal guztiak zeroren desberdinak direlarik. Horregatik, $A_0 = 0$ eta (2) berdintzatik $f(x)$ polinomio nulua dela ondorioztatzen da. Beraz, $\varphi_1(x) - \varphi_2(x) \equiv 0$, hau da, $\varphi_1(x) \equiv \varphi_2(x)$.

5. Teorema. Baldin eta

$$P(x) = A_0x^n + A_1x^{n-1} + \ldots + A_{n-1}x + A_n$$

polinomio nulua bada, bere koefiziente guztiak zeroren berdinak dira.

Frogapena. (2) formularen arabera idatz dezagun polinomioaren faktoretako deskonposaketa.

$$P(x) = A_0x^n + A_1x^{n-1} + \ldots + A_{n-1}x + A_n = A_0(x - a_1)\ldots(x - a_n). \qquad (1')$$

Polinomio hori nulua bada, $a_1, \ldots, a_n$ ez den x-ren balio baterako 0 izango da. Baina kasu honetan faktoreak ez dira anulatzen eta, beraz, $A_0 = 0$.

Era berean frogatzen da $A_1 = 0$, $A_2 = 0$ eta abar.

6. Teorema. Berdinak diren polinomioen elkarri dagozkien koefizienteak berdinak dira.

Hori, emandako bi polinomioen arteko kendura polinomio nulua izatetik ondorioztatzen da. Beraz, aurreko teoremaren arabera koefiziente guztiak zero dira.

4. Adibidea. $ax^3 + bx^2 + cx + d$ polinomioa $x^2 - 5x$ polinomioaren berdina bada,

$$a = 0, \quad b = 1, \quad c = -5, \quad d = 0$$

dira.

§ 7. Polinomio baten erro anizkoitzak

$$f(x) = A_0(x - a_1)(x - a_2)\ldots(x - a_n) \tag{1}$$

n mailako polinomio baten deskonposaketaren faktore lineal batzuk berdinak badira taldeka daitezke eta, horrela, polinomioa

$$f(x) = A_0(x - a_1)^{k_1}(x - a_2)^{k_2}\ldots(x - a_m)^{k_m} \tag{1'}$$

eran adierazi, $k_1 + k_2 + \ldots + k_m = n$ izanik.

Kasu honetan $a_1\, k_1$ ordenako *erro anizkoitza* dela esaten da (k_1 erroaren anizkoiztasuna da); $a_2\, k_2$ ordenako erro anizkoitza, eta abar.

Adibidea. $f(x) = x^3 - 5x^2 + 8x - 4$ polinomioa ondoko faktore linealetan deskonposatzen da:

$$f(x) = (x - 2)(x - 2)(x - 1)$$

Deskonposaketa hori

$$f(x) = (x - 2)^2(x - 1)$$

eran idatz daiteke.

$a_1 = 2$ erro bikoitza da; $a_2 = 1$ erro bakuna.

Polinomioak k ordenako a erro anizkoitza baldin badauka, kontsidera dezagun k erro berdin dituela. Orduan, polinomio baten faktore linealetako deskonposaketari buruzko teorematik ondorioztatzen da hurrengo teorema:

n mailako polinomio orok n erro (errealak edo konplexuak) du zehazki.

Oharra.

$$f(x) = A_0x^n + A_1x^{n-1} + \ldots + A_n$$

polinomioaren erroei buruz esan den guztia

$$A_0x^n + A_1x^{n-1} + \ldots + A_n = 0$$

ekuazio algebraiko baten erroetarako orobat baliogarria da.

Froga dezagun, jarraian, ondoko teorema:

Teorema. a_1 $f(x)$ polinomioaren $k_1 > 1$ ordenako erro anizkoitza bada, $f'(x)$ deribatuaren $k_1 - 1$ ordenako erro anizkoitza izango da.

Frogapena. a_1 k_1 ordenako erro anizkoitza bada, $k_1 > 1$ izanik, (1') formulatik

$$f(x) = (x - a_1)^{k_1}\varphi(x)$$

ondorioztatzen da, non

$$\varphi(x) = (x - a_2)^{k_2}\ldots(x - a_m)^{k_m}$$

ez bait da anulatzen $x = a_1$ baliorako, hots, $\varphi(a_1) \neq 0$

Deribatuz,

$$f'(x) = k_1(x - a_1)^{k_1 - 1}\varphi(x) + (x - a_1)^{k_1}\varphi'(x) = (x - a_1)^{k_1 - 1}\left[k_1\varphi(x) + (x - a_1)\varphi'(x)\right]$$

dugu.

Egin dezagun

$$\psi(x) = k_1\varphi(x) + (x - a_1)\varphi'(x).$$

Orduan

$$f'(x) = (x - a_1)^{k_1 - 1}\psi(x),$$

non

$$\psi(a_1) = k_1\varphi(a_1) + (a_1 - a_1)\varphi'(a_1) = k_1\varphi(a_1) \neq 0$$

den, hau da, $x = a_1$ $f'(x)$ polinomioaren $k_1 - 1$ ordenako erro anizkoitza da. Frogapenetik, $k_1 = 1$ bada a_1 $f'(x)$ polinomioaren erroa ez dela ondorioztatzen da.

Frogatutako teorematik, a_1 $f''(x)$ deribatuaren $k_1 - 2$ ordenako erro anizkoitza dela ondorioztatzen da, $f'''(x)$ deribatuaren $k_1 - 3$ ordenako erroa, ... $f^{(k_1-1)}(x)$ deribatuaren erro bakuna, eta ez da $f^{(k_1)}(x)$ deribatuaren erro, hau da,

$$f(a_1) = 0,\ f'(a_1) = 0,\ f''(a_1) = 0,\ \ldots,\ f^{(k_1-1)}(a_1) = 0,$$

baina

$$f^{(k_1)}(a_1) \neq 0.$$

§ 8. Erro konplexutako polinomio baten faktorizazioa

VII. gaiko § 7ko (1) formularen $a_1, a_2, \ldots, a_n$ erroak errealak zein konplexuak izan daitezke. Azken kasu horretan ondoko teorema enuntzia daiteke.

Teorema. Koefiziente errealeko $f(x)$ polinomioak $a + bi$ erro konplexua badu, polinomio horrek $a - bi$ zenbaki konplexua ere du errotzat.

Frogapena. $f(x)$ polinomioan x, $a + bi$ zenbakiaz ordezkatzen badugu, dagozkion eragiketak egiten baditugu eta i duten atalak eta i ez dutenak, banaturik biltzen baditugu,

$$f(a + bi) = M + Ni$$

lortzen dugu, non M eta N i ez duten adierazpenak diren.

$a + bi$ polinomioaren erroa denez gero,

$$f(a + bi) = M + Ni = 0$$

daukagu, hortik

$$M = 0, \quad N = 0.$$

Ordezka dezagun orain polinomioaren x $a-bi$ adierazpenaz. Orduan (§ 2ko 3. oharraren arabera) $M+Ni$-ren zenbaki konjokatua lortuko dugu, hau da,

$$f(a-bi)=M-Ni.$$

$M=0$ eta $N=0$ direnez $f(a-bi)=0$ da, hots, $a-bi$ polinomioaren erroa da.

Beraz,

$$f(x)=A_0(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_n)$$

deskonposaketan erro konplexuak bikote konjokatuka aurkitzen dira.

Erro konplexu konjokatu bikoteari dagozkion faktore linealen arteko biderkadura eginez, koefiziente errealeko bigarren mailako trinomioa lortzen dugu:

$$\begin{aligned}&\left[x-(a+bi)\right]\left[x-(a-bi)\right]=\left[(x-a)-bi\right]\left[(x-a)+bi\right]=\\&=(x-a)^2+b^2=x^2-2ax+a^2+b^2=x^2+px+q,\end{aligned}$$

non $p=-2a$ $q=a^2+b^2$ zenbaki errealak diren.

$a+bi$ zenbakia k ordenako erro anizkoitza bada, $a-bi$ zenbaki konjokatua ere k ordenako erro anizkoitza da, honela polinomio baten deskonposaketan $x-(a+bi)$ faktore linealak eta beste hainbeste $x-(a-bi)$ faktore lineal sartzen dira. Horrela, koefiziente errealeko polinomio oro lehen eta bigarren mailako faktore errealetan, dagokien anizkoiztasunaz, deskonposa daiteke, hau da,

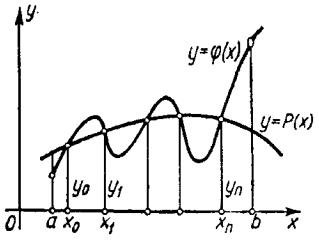
$$f(x)=A_0(x-a_1)^{k_1}(x-a_2)^{k_2}\ldots(x-a_r)^{k_r}(x^2+p_1x+q_1)^{l_1}\ldots(x^2+p_sx+q_s)^{l_s},$$

non

$$k_1+k_2+\ldots+k_r+2l_1+\ldots+2l_s=n$$

§ 9. Interpolazioa. Lagrange-ren interpolazio-formula

Suposa dezagun fenomeno bat ikertzerakoan, x eta y magnitudeen artean menpekotasun funtzional baten existentzia frogatua dela, zeinak fenomeno horren aspektu kuantitatiboa adierazten bait du.



164. IRUDIA

$y = \varphi(x)$ funtzioa ezezaguna da; hala ere, saiakuntz serie baten bitartez, $[a,b]$ tartean dauden argumentuaren $x_0, x_1, \ldots, x_n$ balio batzuetarako funtzio horren balioak $y_0, y_1, \ldots, y_n$ determinatuko ditugu.

Problema, kalkuluak errazteko, $[a,b]$ tartean $y = \varphi(x)$ funtzio ezezagunaren adierazpen hurbildu edo zehatza den funtziorik sinpleena (polinomio bat adibidez) kalkulatzean datza. Era abstraktuagoan problema ondoko eran formula daiteke: $[a,b]$ tarteko $x_0, x_1, \ldots, x_n$ $n+1$ puntu desberdinetan $y = \varphi(x)$ funtzio ezezagunaren balioak emanda,

$$y_0 = \varphi(x_0), \quad y_1 = \varphi(x_1), \quad \ldots, \quad y_n = \varphi(x_n),$$

n edo maila txikiagoko $P(x)$ polinomioa kalkulatu, $\varphi(x)$ funtziora hurbiltzen dena.

Horretarako, aukera dezagun polinomio bat, zeinek $x_0, x_1, \ldots, x_n$ puntuetan $\varphi(x)$ funtzioaren $y_0, y_1, \ldots, y_n$ balioak hartzen dituen (164. irudia). Kasu honetan, planteatutako problema, "funtzioaren interpolazio-problema" izena duena, hurrengo eran formula daiteke: kalkulatu, $\varphi(x)$ funtzioa emanda, n edo maila txikiagoko $P(x)$ polinomioa, zeinek $x_0, x_1, \ldots, x_n$ emandako balioetan

$$y_0 = \varphi(x_0), \quad y_1 = \varphi(x_1), \quad \ldots, \quad y_n = \varphi(x_n)$$

balioak hartzen dituen.

Horretarako har dezagun

$$P(x) = C_0(x-x_1)(x-x_2)\ \ldots\ (x-x_n) + C_1(x-x_0)(x-x_2)\ \ldots\ (x-x_n) +$$
$$+C_2(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)\ \ldots\ (x-x_n) + \ldots + C_n(x-x_0)(x-x_1)\ \ldots\ (x-x_{n-1}) \quad (1)$$

itxurako n mailako polinomio bat.

Determina ditzagun

$$P(x_0) = y_0, \quad P(x_1) = y_1, \quad \ldots, \quad P(x_n) = y_n \qquad (2)$$

baldintzak betetzen dituzten $C_0, C_1, \ldots, C_n$ koefizienteak.

(1) formulan egin dezagun $x = x_0$; orduan, (2) berdintzak kontutan hartuz

$$y_0 = C_0(x_0 - x_1)(x_0 - x_2) \ldots (x_0 - x_n)$$

lortzen dugu, hortik

$$C_0 = \frac{y_0}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2) \ldots (x_0 - x_n)}.$$

Gero, $x = x_1$ eginez

$$y_1 = C_1(x_1 - x_0)(x_1 - x_2) \ldots (x_1 - x_n)$$

lortzen da, hortik

$$C_1 = \frac{y_1}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2) \ldots (x_1 - x_n)}.$$

Era berean

$$C_2 = \frac{y_2}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)(x_2 - x_3) \ldots (x_2 - x_n)}$$

. . . . . .

eta

$$C_n = \frac{y_n}{(x_n - x_0)(x_n - x_1)(x_n - x_2) \ldots (x_n - x_{n-1})}$$

aurkitzen ditugu.

Lortutako koefizienteen balioak (1) formulan sartuz

$$\begin{aligned} P(x) = {} & \frac{(x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_n)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2) \ldots (x_0 - x_n)} y_0 + \frac{(x - x_0)(x - x_2) \ldots (x - x_n)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2) \ldots (x_1 - x_n)} y_1 + \\ & + \frac{(x - x_0)(x - x_1)(x - x_3) \ldots (x - x_n)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)(x_2 - x_3) \ldots (x_2 - x_n)} y_2 + \ldots \\ & \ldots + \frac{(x - x_0)(x - x_1) \ldots (x - x_{n-1})}{(x_n - x_0)(x_n - x_1) \ldots (x_n - x_{n-1})} y_n \end{aligned} \tag{3}$$

ondorioztatzen da.

Formula horrek *Lagrange-ren interpolazio-formula* izena du.

Frogatu gabe onar dezagun $[a,b]$ tartean $\varphi(x)$-k $n+1$ ordenako deribatua badu, $\varphi(x)$ $P(x)$ polinomioaz ordezkatuz egiten den erroreak, hau da, $R(x)=\varphi(x)-P(x)$ magnitudeak,

$$|R(x)|<|(x-x_0)(x-x_1)\ \dots\ (x-x_n)|\frac{1}{(n+1)!}\ \max\left|\varphi^{(n+1)}(x)\right|$$

desberdintza betetzen duela.

Oharra. VII. gaiko § 6ko 4. teorematik planteatutako baldintzak betetzen dituen $P(x)$ polinomioa bakarra dela ondorioztatzen da.

Adibidea. Saiakuntza baten emaitzaz lortu ditugu $y=\varphi(x)$ funtzioaren balioak: $y_0=3,\ x_0=1$ denean; $y_1=-5,\ x_1=2$ denerako; $y_2=4,\ x_2=-4$ denerako. Kalkulatu $y=\varphi(x)$ funtzioaren adierazpen hurbildua bigarren mailako polinomio baten bidez.

Ebazpena. (3) formularen arabera

$$P(x)=\frac{(x-2)(x+4)}{(1-2)(1+4)}3+\frac{(x-1)(x+4)}{(2-1)(2+4)}(-5)+\frac{(x-1)(x-2)}{(-4-1)(-4-2)}4$$

dugu ($n=2$ denerako). Hau da,

$$P(x)=-\frac{39}{30}x^2-\frac{123}{30}x+\frac{252}{30}.$$

§ 10. Newton-en interpolazio-formula

Izan bitez $y_0,y_1,\dots,y_n$ $\varphi(x)$ funtzioaren $n+1$ balio ezagunak, argumentuaren $x_0,x_1,\dots,x_n$ balioei dagozkienak, argumentuaren ondoz ondoko bi balioren arteko kendura konstantea izanik. Izenda dezagun h letraz bi balioren arteko kendura. $y=\varphi(x)$ funtzio ezezagunaren balio-taulak, argumentuari dagozkion balioetarako, hurrengo itxura izango du:

x	x_0	$x_1=x_0+h$	$x_2=x_0+2h$	$x_n=x_0+nh$
y	y_0	y_1	y_2	y_n

Era dezagun n baino maila handiagoa ez duen polinomio bat, emandako x-ren balioei dagozkien balioak hartuko dituena. Polinomio horrek gutxi gorabehera $\varphi(x)$ funtzioa adieraziko du.

Sar ditzagun

$$\Delta y_0 = y_1 - y_0; \quad \Delta y_1 = y_2 - y_1; \quad \Delta y_2 = y_3 - y_2, \quad \text{etab.}$$
$$\Delta^2 y_0 = y_2 - 2y_1 + y_0 = \Delta y_1 - \Delta y_0 = (y_2 - y_1) - (y_1 - y_0);$$
$$\Delta^3 y_0 = y_3 - 3y_2 + 3y_1 - y_0 = \Delta^2 y_1 - \Delta^2 y_0 = (y_3 - 2y_2 + y_1) - (y_2 - 2y_1 + y_0);$$
$$\Delta^n y_0 = \Delta^{n-1} y_1 - \Delta^{n-1} y_0$$

idazkerak.

Horiek lehen, bigarren eta n. ordenako diferentziak deitzen dira. Idatz dezagun x_0 eta x_1-erako y_0 eta y_1 balioak hartuko dituen polinomio bat.

Lehen mailako polinomioa izango da:

$$P_1(x) = y_0 + \Delta y_0 \frac{x - x_0}{h}. \tag{1}$$

Izan ere,

$$P_1(x)\Big|_{x=x_0} = y_0, \quad P_1(x)\Big|_{x=x_1} = y_0 + \Delta y_0 \frac{h}{h} = y_0 + (y_1 - y_0) = y_1.$$

Era dezagun orain x_0, x_1, x_2-rako y_0, y_1, y_2 balioak hartuko dituen polinomio bat. Bigarren mailako polinomioa izango da.

$$P_2(x) = y_0 + \Delta y_0 \frac{x - x_0}{h} + \frac{\Delta^2 y_0}{2!} \cdot \frac{x - x_0}{h}\left(\frac{x - x_0}{h} - 1\right). \tag{2}$$

Nabaria da

$$P_2(x)\Big|_{x=x_0} = y_0, \quad P_2(x)\Big|_{x=x_1} = y_1.$$

Orain, egiazta dezagun:

$$P_2(x)\Big|_{x=x_2} = y_0 + \Delta y_0 \cdot 2 + \frac{\Delta^2 y_0}{2!} \cdot \frac{2h}{h}\left(\frac{2h}{h} - 1\right) = y_2.$$

Hirugarren mailako polinomioak

$$P_3(x) = y_0 + \Delta y_0 \frac{x - x_0}{h} + \frac{\Delta^2 y_0}{2!} \frac{x - x_0}{h}\left(\frac{x - x_0}{h} - 1\right) +$$
$$+ \frac{\Delta^3 y_0}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{x - x_0}{h}\left(\frac{x - x_0}{h} - 1\right)\left(\frac{x - x_0}{h} - 2\right) \qquad (3)$$

itxura izango du.

$x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$-rako $y_0, y_1, y_2, \ldots, y_n$ balioak hartuko dituen n mailako polinomioa

$$P_n(x) = y_0 + \Delta y_0 \frac{x - x_0}{h} + \frac{\Delta^2 y_0}{1 \cdot 2} \cdot \frac{x - x_0}{h}\left(\frac{x - x_0}{h} - 1\right) + \ldots +$$
$$+ \frac{\Delta^n y_0}{h} \cdot \frac{x - x_0}{h} \cdot \left(\frac{x - x_0}{h} - 1\right) \ldots \left[\frac{x - x_0}{h} - (h - 1)\right] \qquad (4)$$

izango da.

Ordezkapen zuzenaren bidez erraza da frogatzea lortutako berdintza zuzena dela. Hau da, Newton-en interpolazio-formula edo polinomioa.

Oinarrian, emandako balio-taularako, Lagrange-ren polinomioa eta Newton-ena berdinak dira era desberdinean idatziak izan arren. Hau da, x-ren $n+1$ balioetarako emandako $n+1$ balioak hartzen dituen n baino maila handiagoa ez duen polinomioa bakarra da.

Kasu askotan, Newton-en interpolazio-polinomioa erabiltzea Lagrange-rena baino komenigarriagoa da. Bere berezitasuna ondokoan datza: k mailako polinomiotik $k+1$ mailako polinomiora pasatzerakoan lehenengo $k+1$ gaiak ez dira aldatzen, baizik eta argumentuaren aurreko balio guztietarako zero den beste gai berri bat eransten dela.

Oharra. Lagrange-ren (ikus §10eko 3. formula) eta Newton-en (4. formula) formulen arabera, $x_0 < x < x_n$ tartean funtzio baten balioak aurkitzen dira. Formula horiek erabiltzen badira funtzioaren balioa aurkitzeko, $x < x_0$ denean ($|x - x_0|$ txikia denean egin daitekeena) taularen atzeranzko estrapolazio bat egiten dela esaten da. Funtzioaren balioa $x > x_n$ denerako aurkitzen bada, taularen aurreranzko estrapolazioa egiten dela esaten da.

§ 11. Zenbakizko deribazioa

Suposa dezagun $\varphi(x)$ funtzio ezezagun baten balioak lehenago kontsideratutako taularen bitartez emanda datozela. Funtzio horren deribatua, gutxi gorabehera, determinatu

nahi dugu. Helburu horrekin, Lagrange edo Newton-en interpolazio-polinomioa egiten da eta bere deribatua aurkitzen da.

Askotan, argumentuaren ondoz ondoko bi balioen arteko kendura berdinetako taulak agertzen direnez, erabil dezagun Newton-en interpolazio-formula. Izan bitez funtzioaren hiru balioak y_0, y_1, y_2, argumentuaren x_0, x_1, x_2 balieei dagozkienak. Orduan, idatz dezagun (2) polinomioa eta deriba dezagun. $x_0 \le x \le x_2$ tartean funtzioaren deribatuaren balio hurbildua lortzen dugu:

$$\varphi'(x) \approx P_2'(x) = \frac{\Delta y_0}{h} + \frac{\Delta^2 y_0}{2h}\left(2\frac{x - x_0}{h} - 1\right). \tag{5}$$

$x = x_0$ denean

$$\varphi'(x_0) \approx P_2'(x_0) = \frac{\Delta y_0}{h} - \frac{\Delta^2 y_0}{2h} \tag{6}$$

dugu.

Kontsidera dezagun hirugarren mailako polinomioa (ikus (3)), deribatuz hurrengo adierazpena lortzen dugu:

$$\varphi'(x) \approx P_3'(x) = \frac{\Delta y_0}{h} + \frac{\Delta^2 y_0}{2h}\left(2\frac{x - x_0}{h} - 1\right) + \\ + \frac{\Delta^3 y_0}{2 \cdot 3h}\left[3\left(\frac{x - x_0}{h}\right)^2 - 6\left(\frac{x - x_0}{h}\right) + 2\right]. \tag{7}$$

Bereziki, $x = x_0$ denean

$$\varphi'(x_0) \approx P_3'(x_0) = \frac{\Delta y_0}{h} - \frac{\Delta^2 y_0}{2h} + \frac{\Delta^3 y_0}{3h} \tag{8}$$

dugu.

(4) formula erabiltzean, $x = x_0$ denean, deribatuaren adierazpen hurbildurako hurrengo formula lortzen dugu:

$$\varphi'(x_0) \approx P_n'(x_0) = \frac{\Delta y_0}{h} - \frac{\Delta^2 y_0}{2h} + \frac{\Delta^3 y_0}{3h} - \frac{\Delta^4 y_0}{4h} + \ldots \tag{9}$$

Ohar gaitezen mugagabeki deribagarri den funtzio baterako, Δy_0 diferentzia h-rekiko lehenengo ordenako infinitesimoa dela; $\Delta^2 y_0$ bigarren ordenako infinitesimoa, $\Delta^3 y_0$ hirugarren ordenakoa, eta abar.

§ 12. Funtzioen polinomioen bidezko hurbilketa hoberena. Chebishev-en teoria.

§ 9an aztertutako problematik, hurrengoa logikoki ondorioztatzen da: izan bedi $[a,b]$ tartean $\varphi(x)$ funtzio jarraia. Gutxi gorabehera aurretik finkatutako doitasun-mailaz $P(x)$ polinomioaren bidez adieraz daiteke? Hau da, aurkitu ahal izango da $P(x)$ polinomioa, $\varphi(x)$ eta $P(x)$ arteko kenduraren balio absolutua, $[a,b]$ tarteko puntu guztietan, aurretik finkatutako ε edozein zenbaki positibo baino txikiago izan dadin? Ondorengo teoremak, eta hemen frogapenik gabe aipatzen duguna, baiezko erantzuna ematen dio galdera horri[3].

Weierstrass-en teorema. $\varphi(x)$ funtzioa $[a,b]$ tartean jarraia bada, edozein ε positibotarako tarte horretako puntu bakoitzean

$$|f(x) - P(x)| < \varepsilon$$

desberdintza betetzen duen polinomioa existitzen da.

S.N. Bernstein, matematikari sobietar ospetsuak, emandako tartean gutxi gorabehera $\varphi(x)$ funtzio jarraiaren berdinak diren polinomioen formulazio zuzenerako hurrengo metodoa eman du.

Suposa dezagun, adibidez, $\varphi(x)$ funtzio jarraia dela $[0,1]$ tartean.

Era dezagun

$$B_n(x) = \sum_{m=0}^{n} \varphi\left(\frac{m}{n}\right) C_n^m x^m (1-x)^{n-m}$$

adierazpena.

---

3) Ohar dezagun Lagrange-ren interpolazio-polinomioak (ikus § 9ko (3)) ez diola planteatutako galderari erantzuten. $x_0, x_1, \ldots, x_n$ puntuetan, polinomioaren balioak dagozkien funtzioaren balioen berdinak dira, baina $[a,b]$ tarteko beste puntuetan balio horiek nabariro diferi daitezke.

Adierazpen horretan C_n^m Newton-en binomioaren koefizienteak dira; $\varphi\left(\frac{m}{n}\right)$ emandako funtzioaren balioa da $x = \frac{m}{n}$ puntuan. $B_n(x)$ adierazpena n mailako polinomioa da, *Bernstein-ena* deitutakoa.

Nahi bezain txikia den $\varepsilon > 0$ zenbaki positibo orotarako Bernstein-en polinomio bat bila daiteke (hau da, bere n maila aukeratu), zeinek $[0,1]$ tarteko x-ren balio guztietarako

$$\left|B_n(x) - \varphi(x)\right| < \varepsilon$$

berdintza betetzen duen.

Ohar dezagun $[0,1]$ tartearen aukerapenak, $[a,b]$ beste hautazko baten lekuan, ez duela mugatzen, funtsean, metodoaren izaera orokorra, $x = a + t(b-a)$ aldagai--aldaketaren bitartez edozein tarte $[a,b]$, $[0,1]$ tarte bihur bait daiteke. Transformazio horrek polinomioaren maila mantentzen du.

Funtzioen polinomioen bidezko hurbilketari buruzko teoria, P. L. Chebishev-ek (1821-1894), matematikari sobietar ospetsuak, garatu zuen.

Arlo honetan lortutako emaitza baliotsuek geroko matematikarien lanak erabakiorki eragin dituzte. Teoria hau sortzeko abiapuntua, makinerian erabilera zabala duten mekanismo giltzatuei buruzko lana izan zen. Mekanismo horien inguruko ikerketak eraman zuen, maila handieneko gaiaren koefizientea unitatearen berdina duten n mailako polinomio guztien artean, emandako tartean zerotik ahalik eta gutxien urruntzen den polinomioa bilatzera. Matematikari handi honek problema ebaztea lortu zuen eta berak aurkitutako polinomioei *Chebishev-en polinomio* izena eman zieten. Horiek propietate aipagarriak dituzte eta gaur egun problema matematiko eta tekniko askotan ikerkuntzarako tresna ahaltsua osatzen dute.

Ariketak

1. Kalkulatu $(3+5i)(4-i)$. Emaitza: $17+17i$.

2. Kalkulatu $(6+11i)(7+3i)$. Em.: $9+95i$.

3. Kalkulatu $\frac{3-i}{4+5i}$. Em.: $\frac{7}{41} - \frac{19}{41}i$.

4. Kalkulatu $(4-7i)^3$. Em.: $-524+7i$.

5. Kalkulatu $\sqrt{i}$. Em.: $\pm\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}$.

6. Kalkulatu $\sqrt{-5-12i}$. Em.: $\pm(2-3i)$.

7. Forma trigonometrikoan idatzi ondorengo adierazpenak:

$a)$ $1+i$, Em.: $\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4}+i\ \sin\dfrac{\pi}{4}\right)$;

$b)$ $1-i$, Em.: $\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{7\pi}{4}+i\ \sin\dfrac{7\pi}{4}\right)$.

8. Kalkulatu $\sqrt[3]{i}$. Em.: $\dfrac{i+\sqrt{3}}{2}$; $-i$; $\dfrac{i-\sqrt{3}}{2}$.

9. Adierazi $\sin x$ eta $\cos x$ funtzioen bidez hurrengo adierazpenak:

$$\sin 2x,\ \cos 2x,\ \sin 4x,\ \cos 4x,\ \sin 5x,\ \cos 5x.$$

10. Adierazi arku anizkoitzen sinu eta kosinuen funtzioan

$$\cos^2 x,\ \cos^3 x,\ \cos^4 x,\ \cos^5 x,\ \cos^6 x;\ \sin^2 x,\ \sin^3 x,\ \sin^4 x,\ \sin^5 x$$

adierazpenak.

11. $f(x)=x^3-4x^2+8x-1$ zati $x+4$ egin.

Em.: $f(x)=(x+4)(x^2-8x+40)-161$, hau da, zatidura: $x^2-8x+40$, hondarra: $f(-4)=-161$.

12. $f(x)=x^4+12x^3+54x^2+108x+81$ zati $x+3$ egin.

Em.: $f(x)=(x+3)(x^3+9x^2+27x+27)$.

13. $f(x)=x^7-1$ zati $(x-1)$ egin.

Em.: $f(x)=(x-1)(x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1)$.

Deskonposatu faktoretan hurrengo polinomioak:

14. $f(x) = x^4 - 1$. Em.: $f(x) = (x-1)(x+1)(x^2+1)$.

15. $f(x) = x^2 - x - 2$. Em.: $f(x) = (x-2)(x+1)$.

16. $f(x) = x^3 + 1$. Em.: $f(x) = (x+1)(x^2 - x + 1)$.

17. Saiakuntza baten emaitza bezala x-ren y funtzioaren hurrengo balioak lortu dira:

$y_1 = 4$, $x_1 = 0$ denerako;
$y_2 = 6$, $x_2 = 1$ denerako;
$y_3 = 10$, $x_3 = 2$ denerako.

Adierazi funtzio hori, era hurbilean, bigarren mailako polinomio baten bitartez.
Em.: $x^2 + x + 4$.

18. Aurkitu, $x = 1, 2, 3, 4, 5$ balioetarako $2, 1, -1, 5, 0$ balioak, hurrenez hurren, hartzen dituen 4 mailako polinomioa. Em.: $\frac{3}{2}x^4 - 17x^3 + \frac{129}{2}x^2 - 92x + 35$.

19. Aurkitu $x = 2, 4, 5, 10$ balioetarako $3, 7, 9, 19$ balioak, hurrenez hurren, hartzen dituen ahalik eta maila txikieneko polinomioa. Em.: $2x - 1$.

20. Kalkulatu, $[0,1]$ tartean $y = \sin \pi x$ funtzioari dagozkion lehenengo, bigarren, hirugarren eta laugarren mailako Bernstein-en polinomioak.

Em.: $B_1(x) = 0$; $B_2(x) = 2x(1-x)$; $B_3(x) = \frac{3\sqrt{3}}{2}x(1-x)$;

$$B_4(x) = 2x(1-x)\left[\left(2\sqrt{2}-3\right)x^2 - \left(2\sqrt{2}-3\right)x + \sqrt{2}\right].$$

VIII. GAIA

ALDAGAI ANITZEKO FUNTZIOAK

§ 1. Aldagai anitzeko funtzioen definizioa

Aldagai bateko funtzioak azaltzerakoan adierazi dugunez, fenomeno askoren azterketak bi edo aldagai independente gehiagoko funtzioak erabiltzera behartzen gaitu. Ikus ditzagun adibide batzuk:

1. Adibidea. x eta y aldeetako laukizuzenaren S azalera hurrengo formularen bidez definiturik dago:

$$S = xy.$$

x eta y delakoen balio-bikote bakoitzari S azaleraren balio bat dagokio; honelatan ba, S bi aldagaiko funtzioa izango da.

2. Adibidea. x, y eta z luzerako ertzak dituen paralelepipedo zuzenaren V bolumena, ondoko formulaz adierazten da:

$$V = xyz.$$

Hor, V hiru aldagaiko funtzioa izango da: x, y eta z aldagaiena.

3. Adibidea. v_0 hasierako abiaduraz eta horizontearekiko φ angeluz jaurtikitako proiektilaren R distantzia ondoko formulaz adierazten da:

$$R = \frac{v_0^2 \sin 2\varphi}{g}$$

(airearen erresistentzia mesprezatuz). Formulako g ikurrak grabitate-indarrak sorterazitako azelerazioa adierazten du. v_0 eta φ balio-bikote bakoitzerako aurreko formulak R-ren balio bat ematen digu; hots, R, v_0 eta φ aldagaien funtzioa izango da.

4. Adibidea.

$$u = \frac{x^2 + y^2 + z^2 + t^2}{\sqrt{1 + x^2}}$$

Hor, u lau aldagaiko funtzioa izango da: x, y, z eta t aldagaiena.

1. Definizioa. D definizio-eremu batean x, y bi aldagai independenteak hartuz, aldagai horien (x,y) balio-bikote bakoitzari z magnitudearen balio bat dagokionean, z delakoari x eta y *aldagai independenteen funtzio* deritzogu, D eremuan.

Bi aldagaiko funtzioa ondoko formulez adieraziko dugu:

$$z = f(x, y), \quad \text{edo} \quad z = F(x, y), \quad \text{etab.}$$

Bi aldagaiko funtzioa taula baten bidez edo (aztertutako lau adibideetan egin dugunez) analitikoki formula baten bidez adieraz daiteke. Formulak, aldagai independenteen balio-bikote bakoitzerako funtzioak hartzen dituen balioen taula eraikitzeko posibilitatea ematen digu. 1. adibiderako ondoko taula idatz dezakegu:

$$S = xy$$

$y \backslash x$	0	1	1,5	2	3
1	0	1	1,5	2	3
2	0	2	3	4	6
3	0	3	4,5	6	9
4	0	4	6	8	12

Taulan, hautatutako x eta y balioei dagozkien errenkada eta zutabeen elkargunean S funtzioaren balioa aurkitzen da.

$z = f(x, y)$ menpekotasun funtzionala, fenomeno baten azterketa esperimentalean z magnitudearen neurketetatik ondorioztatzen denean, z bi aldagaiko funtzio gisa definitzen duen taula lortuko dugu. Kasu horretan, funtzioa taularen bidez soilik definitzen da.

Bi aldagaiko funtzioa, aldagai bakar bateko funtzioa bezala, x eta y-ren hautazko balio batzuetarako definiturik ez egotea gerta daiteke.

2. Definizioa. x eta y balioen (x,y) bikoteek, zeintzuetarako $z = f(x, y)$ funtzioa definiturik dagoen, multzo bat osotzen dute; multzo horri funtzioaren *definizio--eremu* edo *existentzi eremu* deritzogu.

Funtzioaren definizio-eremua geometrikoki adieraz daiteke. Balio-bikote bakoitza, x eta y, Oxy planoko $M(x,y)$ puntuaren bidez adierazten bada, funtzioaren definizio--eremua planoko puntu-multzo batez adierazia izango da. Puntu-multzo horri, halaber, funtzioaren definizio-eremu deritzogu. Eremu hori, bereziki, Oxy plano osoa izan daiteke. Jarraian aztertuko ditugun definizio-eremuak lerroen bidez mugatutako planoaren zatiak izango dira. Eremua mugatzen duen lerroa eremu horren *muga* deituko dugu. Mugakoak ez diren eremuaren puntuei, eremuaren *barneko* puntu deritzegu. Barne-puntuz soilik eratutako eremua, eremu *ireki* deituko dugu. Mugako puntu guztiak bere barnean dituen eremua, eremu *itxi* deituko dugu.

C magnitude konstantea existitzen bada, non eremuaren edozein puntu, M, eta koordenatu-jatorriaren arteko distantzia C baino txikiagoa den, $|OM| < C$, eremu horri *bornatu* deritzogu.

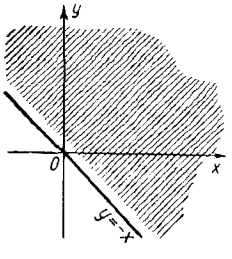
5. Adibidea. Aurkitu ondoko funtzioaren berezko definizio-eremua

$$z = 2x - y.$$

$2x - y$ adierazpen analitikoa x eta y hautazko balio guztietarako definituta dago. Beraz, funtzio horren definizio-eremua Oxy plano osoa izango da.

6. Adibidea.

$$z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}.$$



165. IRUDIA

Errokizuna ez-negatiboa izatea beharrezkoa da, z-k balio erreala har dezan; hots, x eta y-k ondoko desberdintza bete beharko dute:

$$1 - x^2 - y^2 \geq 0, \quad \text{hots,} \quad x^2 + y^2 \leq 1.$$

Adierazitako desberdintza egiaztatzen duten koordenatuetako $M(x,y)$ puntu guztiak, 1 erradiodun eta koordenatu-jatorria zentrudun zirkuluaren barnean eta beraren mugan kokatzen dira.

7. Adibidea.

$$z = \ln(x + y).$$

Logaritmoak zenbaki positiboetarako soilik definiturik daudenez, derrigorrez,

$$x + y > 0 \quad \text{hots,} \quad y > -x$$

desberdintza bete beharko da.

Beraz, z funtzioaren berezko definizio-eremua $y = -x$ zuzenaren gainetik dagoen planoerdia izango da, zuzena bera kenduz (165. irudia).

8. Adibidea. Triangeluaren S azalera x oinarri eta y altueraren funtzioa da:

$$S = \frac{xy}{2}.$$

Funtzio horren definizio-eremua $x > 0,\ y > 0$ eremua dela bistakoa da (triangeluaren oinarri eta altuera zenbaki positiboez soilik adieraz daitezke eta). Aztertutako funtzioaren definizio-eremua eta adierazpen analitikoaren berezko definizio-eremua ez datoz bat, $\frac{xy}{2}$ adierazpenaren berezko definizio-eremua Oxy plano osora zabaltzen bait da.

Bi aldagaiko funtzioaren definizioa hiru edo aldagai gehiagoko kasura heda daiteke.

3. Definizioa. $x,y,z,...,u,t$ aldagaien balioen multzo bakoitzari w aldagaiaren balio bat baldin badagokio, azken hori $x, y, z, ..., u, t$ *aldagai independenteen funtzioa* da, hau da: $w = F(x,y,z,\ldots,u,t)$ edo $w = f(x,y,z,\ldots,u,t)$, etab.

Bi aldagaiko funtzioaren kasurako bezala, definizio-eremua bi, hiru edo aldagai gehiagoko funtziorako defini daiteke.

Esate baterako, hiru aldagaiko definizio-eremua zenbakizko (x,y,z) hirukoteen multzoa izango da.

Zenbakizko hirukote bakoitzak $Oxyz$ espazioko $M(x,y,z)$ puntu bat adierazten duenez, hiru aldagaiko funtzioaren definizio-eremua espazioko puntu-multzo bat izango da.

Modu berean, lau aldagaiko $u = f(x,y,z,t)$ funtzioaren definizio-eremua, x,y,z,t lau zenbakiko multzoen sistema da.

Ordea, lau edo aldagai gehiagoko funtzioaren definizio-eremuaren adierazpen geometrikoa eman ezina da.

Bigarren adibidean aztertutako hiru aldagaiko funtzioa x, y eta z-ren balio guztietarako definiturik dago. Lau aldagaiko funtzio bat 4. adibidean ikusi dugu.

9. Adibidea.

$$w = \sqrt{1 - x^2 - y^2 - z^2 - u^2}.$$

Hor, w funtzioa x, y, z eta u lau aldagaien funtzioa da, hurrengo erlazioa egiaztatzen duten aldagaien balioetarako definituta dagoelarik:

$$1 - x^2 - y^2 - z^2 - u^2 \geq 0.$$

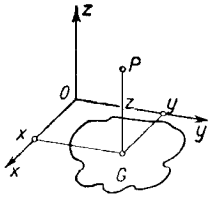
§ 2. Bi aldagaiko funtzioaren adierazpen geometrikoa

Bira

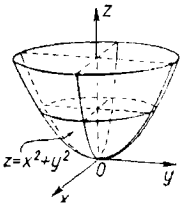
$$z = f(x, y) \tag{1}$$

funtzioa, Oxy planoaren G eremuan definitua (eremu hori, plano osoa izan daiteke), eta $Oxyz$ espazioko koordenatu cartesiarren sistema (166. irudia). G eremuaren (x, y) puntu bakoitzetik Oxy planoarekiko perpendikularra altxa eta perpendikular horretan $f(x, y)$ luzerako zuzenkia marra dezagun. Horrela, espazioan, x, y eta z koordenatuetako P puntua lortzen dugu, $z = f(x, y)$ izanik.

(1) ekuazioa betetzen duten koordenatuetako P puntuen leku geometrikoari bi aldagaitako funtzioaren grafiko deritzogu.



166. IRUDIA



167. IRUDIA

Geometria analitikoaren arabera, (1) ekuazioak espazioko gainazal bat adierazten duela dakigu. Horrela, bi aldagaiko funtzioaren grafikoa gainazal bat izango da, beraren

Oxy planoaren gaineko projekzioa funtzio horren definizio-eremua delarik. Oxy planoarekiko perpendikular bakoitzak $z = f(x, y)$ gainazala gehienez puntu bakar batean ebakitzen du.

Adibidea. Geometria analitikoaren arabera, $z = x^2 + y^2$ funtzioaren grafikoa biraketa-paraboloidea dela badakigu (167. irudia).

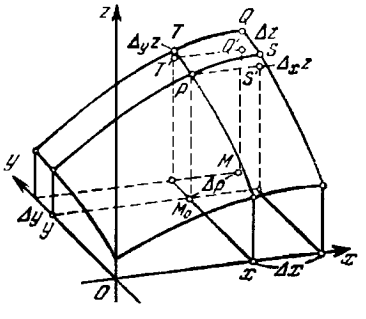
Oharra. Hiru edo aldagai gehiagoko funtzioaren grafikoaren adierazpen geometrikoa eman ezina da.

§ 3. Funtzioaren gehikuntza partziala eta totala

Kontsidera dezagun Oxz planoarekiko paraleloa den y=ktea. plano eta

$$z = f(x, y)$$

gainazalaren arteko PS ebaki-kurba (168. irudia).



168. IRUDIA

Aipaturiko planoko puntu guztietan y konstantea denez, z-ren aldakuntza PS kurban zehar x-ren funtzioa soilik izango da. Eman diezaiogun x aldagai independenteari Δx gehikuntza; orduan z-ri dagokion gehikuntzari *x-rekiko z-ren gehikuntza partzial* deritzogu eta $\Delta_x z$ ikurraz adieraziko dugu (168. irudiko SS' zuzenkia); alegia,

$$\Delta_x z = f(x + \Delta x, y) - f(x, y). \qquad (1)$$

Modu berean, x konstantea bada eta y-ri Δy gehikuntza ematen badiogu, z-ri dagokion gehikuntzari *y-rekiko z-ren gehikuntza partzial* deritzogu, $\Delta_y z$ ikurraz idatziz (168. irudiko TT' zuzenkia):

$$\Delta_y z = f(x, y + \Delta y) - f(x, y). \tag{2}$$

Funtzioaren aldakuntza Oyz planoarekiko paraleloa den $x =$ ktea. plano eta $z = f(x, y)$ gainazalaren arteko ebaki-kurban zehar, $\Delta_y z$ gehikuntza izango da.

Azkenez, x aldagaiari Δx eta y aldagaiari Δy gehikuntza aldi berean ematen badiegu z-ri dagokion Δz gehikuntza lortuko dugu; *z funtzioaren gehikuntza total* deituko duguna eta ondoko formulaz definiturik dagoena:

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y). \tag{3}$$

Δz gehikuntza, 168. irudian, QQ' zuzenkiaren bidez adierazi da.

Kontutan har dezagun, kasu orokorrean gehikuntza totala eta gehikuntza partzialen batura berdinak ez direla, hau da:

$$\Delta z \neq \Delta_x z + \Delta_y z.$$

Adibidea: $z = xy$.

$$\Delta_x z = (x + \Delta x)y - xy = y\Delta x,$$
$$\Delta_y z = x(y + \Delta y) - xy = x\Delta y,$$
$$\Delta z = (x + \Delta x)(y + \Delta y) - xy = y\Delta x + x\Delta y + \Delta x\Delta y.$$

$x = 1$, $y = 2$, $\Delta x = 0,2$, $\Delta y = 0,3$ kasurako, $\Delta_x z = 0,4$, $\Delta_y z = 0,3$, $\Delta z = 0,76$ lortuko dugu.

Edozein aldagai-kopurutako funtzioaren gehikuntza total eta partzialak modu berean kalkulatzen dira. Honela, $u = f(x, y, z)$ hiru aldagaiko funtziorako hauxe dugu:

$$\Delta_x u = f(x + \Delta x, y, t) - f(x, y, t),$$
$$\Delta_y u = f(x, y + \Delta y, t) - f(x, y, t),$$
$$\Delta_t u = f(x, y, t + \Delta t) - f(x, y, t),$$
$$\Delta u = f(x + \Delta x, y + \Delta y, t + \Delta t) - f(x, y, t).$$

§ 4. Aldagai anitzeko funtzioen jarraitasuna

Hasieran, kontzeptu garrantzitsu bat definituko dugu: puntu baten ingurunea.

$\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<r$ desberdintza egiaztatzen duten puntu guztien multzoa, r erradiodun $M_0(x_0,y_0)$ puntuaren ingurunea izango da; hots, r erradiodun eta $M_0(x_0,y_0)$ zentrudun zirkulu barnean dauden puntu guztien multzoa.

$f(x,y)$ funtzioak $M_0(x_0,y_0)$ puntuaren ingurune batean propietate bat betetzen duela esaten dugunean, zera adierazi nahi dugu: $M_0(x_0,y_0)$ puntuan zentrua duen zirkulu bat existitzen dela, non zirkulu horren puntu guztietan propietate hori egiaztatzen den.

Aldagai anitzeko funtzioaren jarraitasunaren azalpenera pasatu baino lehen, aldagai anitzeko funtzioaren limite kontzeptua aztertuko dugu[1]. Biz

$$z=f(x,y)$$

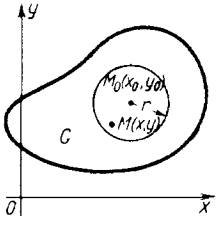
funtzioa, Oxy planoaren G eremu batean definiturik.

Kontsidera dezagun G eremuaren mugan edo barnean dagoen $M_0(x_0,y_0)$ puntu bat (169. irudia).

1. Definizioa. $M(x,y)$ puntua $M_0(x_0,y_0)$ punturantz doanean, A zenbakia $f(x,y)$ funtzioaren *limitea* dela esango dugu, baldin edozein $\varepsilon>0$ zenbakitarako $r>0$ zenbakia existitzen bada, non $\overline{MM_0}<r$ desberdintza egiaztatzen duten $M(x,y)$ puntu guztietarako

$$|f(x,y)-A|<\varepsilon$$

betetzen den.



169. IRUDIA

Baldin $f(x,y)$ funtzioaren limitea $M(x,y)\to M_0(x_0,y_0)$ denean A zenbakia bada, honela idatziko dugu:

---

1) Aurrerantzean, batez ere, bi aldagaiko funtzioak aztertuko ditugu, hiru edo aldagai gehiagoko funtzioen azterketak ez bait du ezer berririk eransten eta ikuspegi praktikotik problema zaildu baino ez du egiten.

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x,y) = A.$$

2. Definizioa. Biz $M_0(x_0, y_0)$ $f(x,y)$ funtzioaren definizio-eremuko puntua. $z = f(x,y)$ funtzioa $M_0(x_0, y_0)$ puntuan jarraia dela esango dugu baldin ondoko berdintza betetzen bada

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x,y) = f(x_0, y_0). \tag{1}$$

$M(x,y)$ puntua funtzioaren definizio-eremukoa izanik eta $M_0(x_0, y_0)$ punturantz edonola doanean.

$x = x_0 + \Delta x$, $y = y_0 + \Delta y$ egiten badugu, (1) ekuazioa honela idatz dezakegu:

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) = f(x_0, y_0) \tag{1'}$$

edo

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} [f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)] = 0. \tag{1''}$$

Egin dezagun $\Delta\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$ (ikus 168. irudia); $\Delta x \to 0$ eta $\Delta y \to 0$ direnean, $\Delta\rho \to 0$ izango da; alderantziz $\Delta\rho \to 0$ bada, $\Delta x \to 0$ eta $\Delta y \to 0$ dugu.

(1") berdintzan, kortxeteen arteko adierazpena z funtzioaren gehikuntza totala, Δz, da. Beraz, (1") berdintza ondoko eran idatz daiteke

$$\lim_{\Delta\rho \to 0} \Delta z = 0. \tag{1'''}$$

Eremu bateko puntu bakoitzean jarraia den funtzioa, *eremu horretan jarraia* dela esango dugu.

$N_0(x_0, y_0)$ puntu batean (1) baldintza betetzen ez bada, puntu horri $z = f(x,y)$ funtzioaren *etengune* deritzogu. Eman ditzagun (1) baldintza betetzen ez duten adibide batzuk:

1) $z = f(x,y)$ funtzioa $N_0(x_0, y_0)$ puntuaren ingurune bateko puntu guztietan definiturik dago, $N_0(x_0, y_0)$ puntuan izan ezik;

2) $z = f(x, y)$ funtzioa $N_0(x_0, y_0)$ puntuaren ingurune bateko puntu guztietan definiturik dago, baina $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y)$ limitea ez da existitzen;

3) $N_0(x_0, y_0)$ puntuaren ingurune bateko puntu guztietan funtzioa definiturik dago eta $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y)$ existitzen da, baina

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y) \neq f(x_0, y_0)$$

dugu.

1. Adibidea.

$$z = x^2 + y^2$$

funtzioa x eta y-ren balio guztietarako jarraia da, hots, Oxy planoaren puntu bakoitzean.

Izan ere, edozein x, y, Δx eta Δy zenbakitarako

$$\Delta z = [(x + \Delta x^2) + (y + \Delta y)^2] - [x^2 + y^2] = 2x\Delta x + 2y\Delta y + \Delta x^2 + \Delta y^2$$

dugu eta beraz,

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \Delta z = 0.$$

Demagun orain funtzio etenaren adibide bat.

2. Adibidea.

$$z = \frac{2xy}{x^2 + y^2}$$

funtzioa puntu guztietan definiturik dago, $x = 0$, $y = 0$ puntuan izan ezik (170. eta 171. irudiak).

Azter ditzagun z funtzioak $y = kx$ (k = ktea.) zuzenean kokaturitako puntuetan hartzen dituen balioak. Zuzenaren puntu guztietarako

$$z = \frac{2kx^2}{x^2 + k^2x^2} = \frac{2k}{1+k^2} = \text{ktea.}$$

dugu, hau da, koordenatu-jatorritik pasatzen den zuzen bakoitzaren gainean z funtzioak balio konstantea du, konstante hori zuzenaren k koefiziente angeluarraren menpekoa delarik. Horregatik, z funtzioaren limitea Oxy planoko (x, y) puntuak koordenatu--jatorrirantz doanean egindako bidearen menpean dago; horrek, $f(x, y)$ funtzioak limiterik ez duela adierazten du. Beraz, puntu horretan funtzioa etena da. Kasu horretan, koordenatu--jatorrian z funtzioari balio bat eman arren, jarrai bihurtzea ezinezkoa da. Beste aldetik, funtzio hori beste puntu guztietan jarraia dela erraz ikus daiteke.

Eremu itxi eta bornatu batean jarraia den aldagai anitzeko funtzioaren propietate garrantzitsu batzuk aipa ditzagun, frogatu gabe. Propietate hauek, tarte batean jarraia den aldagai bateko funtzioaren propictateen antzekoak dira (ikus II. gaiko § 10).

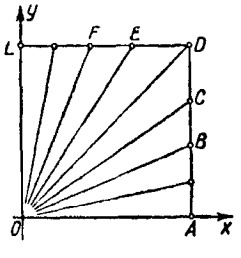
1. Propietatea. $f(x, y, \ldots)$ funtzioa eremu itxi eta bornatuan definitu eta jarraia bada, eremu horretan gutxienez $N_0(x_0, y_0, \ldots)$ eta $\overline{N}_0(\bar{x}_0, \bar{y}_0, \ldots)$ puntuak existituko dira, non eremuaren beste puntu guztietarako

$$f(x_0, y_0, \ldots) \geq f(x, y, \ldots)$$

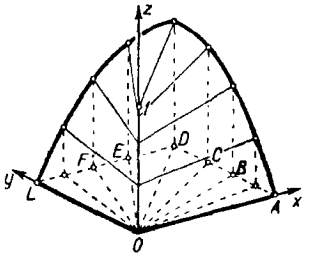
eta

$$f(\bar{x}_0, \bar{y}_0, \ldots) \leq f(x, y, \ldots)$$

egiaztatzen diren.



170. IRUDIA



171. IRUDIA

D eremuan, $f(x,y,\ldots)$ funtzioaren $f(x_0,y_0,\ldots)=M$ balioari balio maximo eta $f(\bar{x}_0,\bar{y}_0,\ldots)=m$ delakoari balio minimo deritzegu. Propietate hori beste era batez formula daiteke: D eremu itxi eta bornatu batean funtzio jarrai batek gutxienez behin M balio maximoa eta m balio minimoa hartzen ditu.

2. Propietatea. D eremu itxi eta bornatu batean $f(x,y,\ldots)$ funtzioa jarraia bada, aipatutako eremuan funtzioaren balio maximoa eta minimoa M eta m izanik, $m<\mu<M$ baldintza betetzen duen edozein μ zenbakitarako eremuan $N^*(x_0^*,y_0^*,\ldots)$ puntua existituko da, non

$$f(x_0^*,y_0^*,\ldots)=\mu$$

berdintza betetzen den.

2. Propietatearen korolarioa. Eremu itxi eta bornatu batean $f(x,y,\ldots)$ funtzioa jarraia bada eta balio bai positiboak bai negatiboak hartzen baditu, eremuaren barnean puntu batzuk existituko dira, non $f(x,y,\ldots)$ funtzioa anulatzen den.

§ 5. Aldagai anitzeko funtzioaren deribatu partzialak

Definizioa. x-rekiko $\Delta_x z$ gehikuntza partzial eta Δx gehikuntzaren arteko zatiduraren limiteari, Δx zerorantz doanean, $z=f(x,y)$ funtzioaren *x-rekiko deribatu partzial* deritzogu.

$z=f(x,y)$ funtzioaren x-rekiko deribatu partziala ondoko ikurren bidez adieraz daiteke:

$$z'_x;\ f'_x(x,y);\ \frac{\partial z}{\partial x};\ \frac{\partial f}{\partial x}.$$

Honela, definizioaren arabera:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta_x z}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x,y)-f(x,y)}{\Delta x}.$$

Modu berean, $z=f(x,y)$ funtzioaren y-rekiko *deribatu partziala*, y-rekiko $\Delta_y z$ gehikuntza partzial eta Δy gehikuntzaren arteko zatiduraren limitea izango da, Δy zerorantz doanean. y-rekiko deribatu partziala ondoko ikurren bidez adieraz daiteke:

$$z'_y;\ f'_y(x,y);\ \frac{\partial z}{\partial y};\ \frac{\partial f}{\partial y}.$$

Honela,

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}.$$

Kontutan har dezagun y aldaezina eta x aldaezina mantenduz, $\Delta_x z$ eta $\Delta_y z$, hurrenez hurren, kalkulatzen direla. Beraz, deribatu partziala honela defini daiteke: x-rekiko $z = f(x, y)$ funtzioaren deribatu partziala, y konstantea hartuz, funtzio horren x-rekiko deribatua da. y-rekiko $z = f(x, y)$ funtzioaren deribatu partziala, x konstantea hartuz, funtzio horren y-rekiko deribatua da.

Definizioaren arabera, deribatu partzialak kalkulatzeko erregelak aldagai bateko funtzioen deribatuak kalkulatzekoak bezalakoak direla ondorioztatzen da; deribazioa zein aldagairekiko egiten den soilik kontutan hartu behar da.

1. Adibidea. Kalkulatu $z = x^2 \sin y$ funtzioaren $\frac{\partial z}{\partial x}$ eta $\frac{\partial z}{\partial y}$ deribatu partzialak

Ebazpena.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x \sin y;\ \frac{\partial z}{\partial y} = x^2 \cos y.$$

2. Adibidea. $z = x^y$.
Kasu honetan,

$$\frac{\partial z}{\partial x} = yx^{y-1};\quad \frac{\partial z}{\partial y} = x^y \ln x.$$

Era berean, edozein aldagai-kopurutako funtzioaren deribatu partzialak kalkulatzen dira. Adibidez, u x, y, z eta t lau aldagaien funtzioa bada,

$$u = f(x, y, z, t),$$

orduan,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y, z, t) - f(x, y, z, t)}{\Delta x},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y + \Delta y, z, t) - f(x, y, z, t)}{\Delta y}, \text{ etab.}$$

3. Adibidea.

$$u = x^2 + y^2 + xtz^3,$$

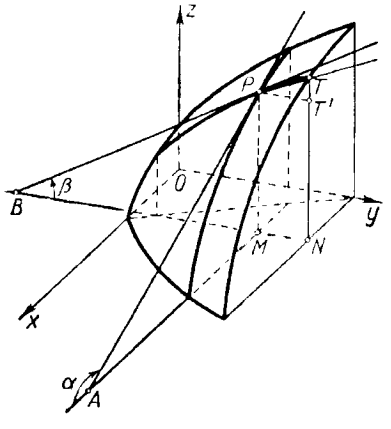
$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x + tz^3; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 2y; \quad \frac{\partial u}{\partial z} = 3xtz^2; \quad \frac{\partial u}{\partial t} = xz^3.$$

§ 6. Bi aldagaiko funtzioaren deribatu partzialen adierazpen geometrikoa

Biz

$$z = f(x, y)$$

172. irudian adierazitako gainazalaren ekuazioa.



172. IRUDIA

Marra dezagun $x =$ ktea. planoa. Plano horren eta gainazalaren arteko ebakidurak PT kurba mugatzen du. Oxy planoan x finko baterako $M(x, y)$ puntua kontsidera dezagun. M puntuari $z = f(x, y)$ gainazalaren $P(x, y, z)$ puntua dagokio. x aldaezina mantenduz, y aldagaiari $\Delta y = MN = PT'$ gehikuntza emango diogu. z funtzioaren

gehikuntza $\Delta_y z = TT'$ izango da ($N(x, y+\Delta y)$ puntuari $z = f(x,y)$ gainazalaren $T(x, y+\Delta y, z+\Delta_y z)$ puntua dagokio).

$\dfrac{\Delta_y z}{\Delta y}$ arrazoia Oy ardatzaren norantza positibo eta PT ebakitzaileak eratutako angeluaren tangentea izango da.

$$\frac{\Delta_y z}{\Delta y} = \tan \widehat{TPT'}.$$

Beraz,

$$\lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y} = \frac{\partial z}{\partial y}$$

limitea, P puntuan PT kurbarekiko zuzen ukitzaileak, PB, eta Oy ardatzaren norantza positiboak eratutako β angeluaren tangentea izango da:

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \tan \beta.$$

Beraz, $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ deribatu partzialaren balioa, $z = f(x,y)$ gainazal eta $x =$ ktea. planoaren arteko ebakiduraz lortutako kurbarekiko zuzen ukitzailearen inklinazio-angeluaren tangentea izango da.

Era berean, $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ deribatu partzialaren balioa, $z = f(x,y)$ gainazal eta $y =$ ktea. planoaren arteko ebakiduraz definitutako kurbarekiko zuzen ukitzailearen α inklinazio--angeluaren tangentea izango da.

§ 7. Gehikuntza totala eta diferentzial totala

$z = f(x,y)$ funtzioaren gehikuntza totalaren definizioaren arabera zera dugu (VIII. gaiko § 3.)

$$\Delta z = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x,y). \tag{1}$$

Demagun $f(x,y)$ funtzioak aztertutako (x,y) puntuan deribatu partzial jarraiak dituela.

Adieraz dezagun Δz deribatu partzialen bidez. (1) ekuazioaren bigarren atalari $f(x,y+\Delta y)$ adierazpena gehituz eta kenduz hauxe dugu:

$$\Delta z = [f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y+\Delta y)] + [f(x, y+\Delta y) - f(x,y)]. \qquad (2)$$

Kortxetez mugatutako bigarren batugaia,

$$f(x, y+\Delta y) - f(x,y),$$

y aldagai bakarreko funtzioaren bi balioen arteko kendura dela uler daiteke (x-ren balioa konstante mantenduz). Kendura horri Lagrange-ren teorema aplikatuz,

$$f(x, y+\Delta y) - f(x,y) = \Delta y \frac{\partial f(x,\bar{y})}{\partial y}, \qquad (3)$$

dugu, $\bar{y}$ balioa y eta $y+\Delta y$ balioen artekoa izanik.

Modu berean, (2) ekuazioaren lehenengo batugaia, x aldagai bakarreko funtzioaren bi balioen arteko kendura dela uler dezakegu (bigarren aldagaia konstantea eta berdin $y+\Delta y$ da). Kendura horri Lagrange-ren teorema aplikatuz

$$f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y+\Delta y) = \Delta x \frac{\partial f(\bar{x}, y+\Delta y)}{\partial x}, \qquad (4)$$

dugu, $\bar{x}$ balioa x eta $x+\Delta x$ balioen artekoa izanik.

(2) ekuazioan (3) eta (4) adierazpenak ordezkatuz, zera dugu:

$$\Delta z = \Delta x \frac{\partial f(\bar{x}, y+\Delta y)}{\partial x} + \Delta y \frac{\partial f(x,\bar{y})}{\partial y}. \qquad (5)$$

Hipotesiz, deribatu partzialak jarraiak direnez,

$$\left.\begin{aligned} &\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} \frac{\partial f(\bar{x}, y+\Delta y)}{\partial x} = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}, \\ &\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} \frac{\partial f(x,\bar{y})}{\partial y} = \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} \end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

dugu, $\bar{x}$ x eta $x+\Delta x$ balioen artekoa eta $\bar{y}$ y eta $y+\Delta y$ balioen artekoa direlako; beraz, $\bar{x}$, x-rantz eta $\bar{y}$, y-rantz doaz $\Delta x \to 0$ eta $\Delta y \to 0$ ditugunean hurrenez hurren. Honela, (6) ekuazioak ondoko eran idatz daitezke:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial f(\bar{x}, y+\Delta y)}{\partial x} &= \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} + \gamma_1 \\ \frac{\partial f(x, \bar{y})}{\partial y} &= \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} + \gamma_2 \end{aligned}\right\} \qquad (6')$$

non γ_1 eta γ_2 magnitudeek Δx eta Δy zerorantz doazenean (hau da, $\Delta\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} \to 0$ denean) zero limitetzat duten.

(6') berdintzen arabera, (5) adierazpenak ondoko forma hartuko du:

$$\Delta z = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\Delta y + \gamma_1 \Delta x + \gamma_2 \Delta y. \qquad (5')$$

Bigarren ataleko azken bi gaien batura ordena goreneko infinitesimoa da $\Delta\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$ delakoarekiko. Izan ere, $\frac{\gamma_1 \Delta x}{\Delta\rho} \to 0$ dugu $\Delta\rho \to 0$ denean, γ_1 infinitesimoa eta $\frac{\Delta x}{\Delta\rho}$ magnitude bornatua direlako $\left(\left|\frac{\Delta x}{\Delta\rho}\right| \le 1\right)$. Antzeko eran egiaztatzen da $\frac{\gamma_2 \Delta y}{\Delta\rho} \to 0$ betetzen dela.

Lehendabiziko bi gaien batura Δx eta Δy gehikuntzen adierazpen lineala da. $f'_x(x,y) \neq 0$ eta $f'_y(x,y) \neq 0$ direnean, adierazpen hori gehikuntzaren zati nagusia da eta, Δz eta adierazpen linealaren arteko kendura, $\Delta\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$ delakoarekiko ordena goreneko infinitesimoa izango da.

Definizioa. $z = f(x,y)$ funtzioa (x,y) puntuan *diferentziagarria* dela esango dugu, baldin puntu horretako bere gehikuntza totala, Δz, bi gaiko batura gisa adieraz badaiteke, non lehen gaia Δx eta Δy-ren adierazpen lineala eta, bigarrena, $\Delta\rho$-rekiko ordena goreneko infinitesimoa diren. Gehikuntzaren zati linealari *diferentzial total* deritzogu, eta dz edo df ikurraz idatziko dugu.

(5') berdintzatik zera ondorioztatzen da: $f(x,y)$ funtzioak puntu batean deribatu partzial jarraiak baditu, puntu horretan f funtzioa deribagarria izango da eta beraren diferentzial totala ondokoa da:

$$dz = f_x'(x,y)\Delta x + f_y'(x,y)\Delta y.$$

(5') berdintza ondoko eran idatz dezakegu:

$$\Delta z = dz + \gamma_1 \Delta x + \gamma_2 \Delta y,$$

eta

$$\Delta z \approx dz$$

berdintza hurbildua idatz daiteke, errorea, $\Delta\rho$-rekiko ordena goreneko infinitesimoa izanik.

Δx eta Δy gehikuntzei x eta y aldagai independenteen *diferentzial* deritzegu eta dx eta dy ikurrez idatziko ditugu, hurrenez hurren. Orduan, diferentzial totala ondoko eran idatz dezakegu:

$$dz = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy.$$

Beraz, $z = f(x,y)$ funtzioak deribatu partzial jarraiak baditu, funtzioa (x,y) puntuan diferentziagarria izango da eta bere diferentzial totala batura bat da, zeinen batugai bakoitza aldagai independente batekiko f-ren deribatu partzial eta aldagaiaren diferentzialaren arteko biderkadura bait da.

1. Adibidea. Kalkulatu $z = xy$ funtzioaren diferentzial total eta gehikuntza totala (2,3) puntuan, $\Delta x = 0,1$, $\Delta y = 0,2$ denerako.

Ebazpena.

$$\Delta z = (x + \Delta x)(y + \Delta y) - xy = y\Delta x + x\Delta y + \Delta x \Delta y,$$

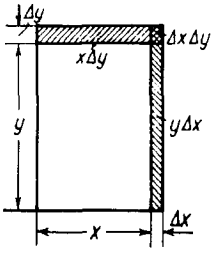
$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy = ydx + xdy = y\Delta x + x\Delta y.$$

Beraz

$$\Delta z = 3 \cdot 0,1 + 2 \cdot 0,2 + 0,1 \cdot 0,2 = 0,72;$$

$$dz = 3 \cdot 0,1 + 2 \cdot 0,2 = 0,7.$$

173. irudia 1. adibideari dagokio.



173. IRUDIA

Era berean, goian idatzitakoa edozein aldagai-kopurutako funtzioen kasura heda daiteke.

Biz $w = f(x, y, z, u, \ldots, t)$ edozein aldagai-kopurutako funtzioa eta demagun $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial t}$ deribatu partzialak $(x, y, z, u, \ldots, t)$ puntuan jarraiak direla.

$$dw = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz + \ldots + \frac{\partial f}{\partial t} dt$$

adierazpena funtzioaren gehikuntza totalaren zati nagusia izango da eta diferentzial total deituko dugu. Bi aldagaiko funtzio baterako egin dugun bezala, $\Delta w - dw$ kendura $\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + \ldots + (\Delta t)^2}$ balioarekiko ordena goreneko infinitesimoa dela froga daiteke.

2. Adibidea. Kalkulatu x, y eta z hiru aldagaien $u = e^{x^2+y^2} \sin^2 z$ funtzioaren diferentzial totala.

Ebazpena. x, y eta z-ren balio guztietarako

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^{x^2+y^2} 2x \sin^2 z,$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = e^{x^2+y^2} 2y \sin^2 z,$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = e^{x^2+y^2} 2 \sin z \cos z = e^{x^2+y^2} \sin 2z$$

deribatu partzialak jarraiak direla kontutan hartuz, ondokoa lortuko dugu

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial z}dz = e^{x^2+y^2}(2x\sin^2 z\,dx + 2y\sin^2 z\;dy + \sin 2z\;dz).$$

§ 8. Kalkuku hurbilduetan diferentzial totalaren erabilera

Demagun $z = f(x, y)$ funtzioa (x, y) puntuan deribagarria dela. Kalkula dezagun funtzio horren gehikuntza totala:

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y),$$

nondik

$$f(x + \Delta x, y + \Delta y) = f(x, y) + \Delta z \tag{1}$$

dugun.

Ondoko formula hurbildua dugu:

$$\Delta z \approx dz, \tag{2}$$

non

$$dz = \frac{\partial f}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\Delta y \tag{3}$$

den. (1) formulan Δz-ren ordez dz-ren adierazpen garatua idatziz, ondoko formula hurbildua lortuko dugu:

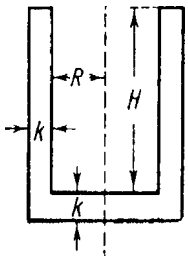
$$f(x + \Delta x, y + \Delta y) \approx f(x, y) + \frac{\partial f(x, y)}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}\Delta y, \tag{4}$$

errorea, Δx- eta Δy-rekiko ordena goreneko infinitesimoa izanik.

(2) eta (4) formulen erabilpena erakutsiko dugu kalkuku hurbilduak egiteko.

Problema. Kalkulatu (174. irudia) baso zilindrikoa fabrikatzeko behar den materialaren bolumena, beraren dimentsioak ondokoak izanik:

zilindroaren bameko erradioa: R,
zilindroaren bameko altuera : H,
basoaren hondo eta ormen lodiera : k.



174. IRUDIA

Ebazpena. Problemaren bi soluzio emango ditugu: zehatza eta hurbildua.

(a) Soluzio zehatza. Bilatutako v bolumena kanpo eta barneko zilindroen bolumenen arteko kendura izango da. Kanpoko zilindroaren erradioa $R + k$ eta altuera $H + k$ direnez,

$$v = z(R + k)^2 (H + k) — zR^2 H,$$

dugu; hau da,

$$v = z(2RHk + R^2 k + Hk^2 + 2Rk^2 + k^3). \qquad (5)$$

(b) Soluzio hurbildua. Barneko zilindroaren bolumena f bada, $f = zR^2 H$ dugu. f delakoa, R eta H aldagaien funtzioa da. R eta H magnitudeei k balioa gehitzen badiegu, f funtzioaren gehikuntza Af izango da; eta hori bilatutako v bolumena izango da, hots, $v =$

(1) adierazpenaren arabera,

$$v \quad df$$

berdintza hurbildua dugu; hau da,

$$v \quad + \; afAH \;\; aR$$

$$\text{aR} = 2zRH, — = zR^2 , AR = 4H = k$$

deribatu partzialak jarraiak direla kontutan hartuz, ondokoa lortuko dugu

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial z}dz = e^{x^2+y^2}(2x\sin^2 z\,dx + 2y\sin^2 z\;dy + \sin 2z\;dz).$$

§ 8. Kalkuku hurbilduetan diferentzial totalaren erabilera

Demagun $z = f(x, y)$ funtzioa (x, y) puntuan deribagarria dela. Kalkula dezagun funtzio horren gehikuntza totala:

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y),$$

nondik

$$f(x + \Delta x, y + \Delta y) = f(x, y) + \Delta z \tag{1}$$

dugun.

Ondoko formula hurbildua dugu:

$$\Delta z \approx dz, \tag{2}$$

non

$$dz = \frac{\partial f}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\Delta y \tag{3}$$

den. (1) formulan Δz-ren ordez dz-ren adierazpen garatua idatziz, ondoko formula hurbildua lortuko dugu:

$$f(x + \Delta x, y + \Delta y) \approx f(x, y) + \frac{\partial f(x, y)}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}\Delta y, \tag{4}$$

errorea, Δx- eta Δy-rekiko ordena goreneko infinitesimoa izanik.

(2) eta (4) formulen erabilpena erakutsiko dugu kalkuku hurbilduak egiteko.

Problema. Kalkulatu (174. irudia) baso zilindrikoa fabrikatzeko behar den materialaren bolumena, beraren dimentsioak ondokoak izanik:

dugunez, ondokoa lortzen dugu:

$$v \approx \pi(2RHk + R^2k). \qquad (6)$$

(5) eta (6) emaitzak konparatuz, beraien arteko kendura $\pi(Hk^2 + 2Rk^2 + k^3)$ dela ikusten dugu, eta adierazpen horren gaietan k^2 eta k^3 soilik agertzen dira.

Aplika ditzagun formula horiek datu konkretu batzuetarako.

Bira $R = 4$cm, $H = 20$cm, $k = 0{,}1$cm. (5) erabiliz,

$$v = \pi(2 \cdot 4 \cdot 20 \cdot 0{,}1 + 4^2 \cdot 0{,}1 + 20 \cdot 0{,}1^2 + 2 \cdot 4 \cdot 0{,}1^2 + 0{,}1^3) = 17{,}881\pi$$

bolumen zehatza lortzen dugu.

(6) erabiliz, bolumen hurbildua lortuko dugu:

$$v \approx \pi(2 \cdot 4 \cdot 20 \cdot 0{,}1 + 4^2 \cdot 0{,}1) = 17{,}6\pi.$$

Beraz, (6) formula hurbilduaren bidez, $0{,}3\pi$ baino errore txikiago duen emaitza izango dugu; $0{,}3\pi$ hori balio zehatzaren $\%100 \cdot \dfrac{0{,}3\pi}{17{,}881\pi}$ da, hau da, %2a baino gutxiagoa.

§ 9. Kalkulu-errorearen balioztapenerako diferentzialaren aplikazioa

Biz $u = f(x, y, z, \ldots, t)$ $x, y, z, \ldots, t$ aldagaien funtzioa.

Demagun $x, y, z, \ldots, t$ magnitudeen zenbakizko balioen balioztapena Δx, Δy, ..., Δt erroreekin lortzen dela. Kasu honetan, aldagaien balio hurbilduekin kalkulatutako u-ren balioa halaber Δu errorearekin kalkulatuta egongo da

$$\Delta u = f(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z, \ldots, t + \Delta t) - f(x, y, z, \ldots t).$$

Δx, Δy, ..., Δt erroreak ezagunak direnean, Δu errorea ere kalkula dezakegu.

Δx, Δy, ..., Δt magnitudeen balio absolutuak aski txikiak izanik, gehikuntza totalaren ordez diferentzial totala idatz dezakegu, eta honela

$$\Delta u \approx \frac{\partial f}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\Delta y + \ldots + \frac{\partial f}{\partial t}\Delta t$$

berdintza hurbildua lortu dugu.

Hor, deribatu partzialen balioak eta aldagaien erroreen balioak bai positiboak bai negatiboak izan daitezke.

Beraien ordez balio absolutuak jarriz,

$$|\Delta u| \leq \left|\frac{\partial f}{\partial x}\right||\Delta x| + \left|\frac{\partial f}{\partial y}\right||\Delta y| + \ldots + \left|\frac{\partial f}{\partial t}\right||\Delta t| \qquad (1)$$

desberdintza lortzen dugu.

$x, y, \ldots, u$ magnitudeen errore absolutu maximoak (erroreen balio absolutuen limiteak) $|\Delta * x|$, $|\Delta * y|$, ..., $|\Delta * u|$ adieraziz, ondokoa onar daiteke:

$$|\Delta * u| = \left|\frac{\partial f}{\partial x}\right||\Delta * x| + \left|\frac{\partial f}{\partial y}\right||\Delta * y| + \ldots + \left|\frac{\partial f}{\partial t}\right||\Delta * t|. \qquad (2)$$

Adibideak.

1. Biz $u = x + y + z$, orduan,

$$|\Delta * u| = |\Delta * x| + |\Delta * y| + |\Delta * z|.$$

2. Biz $u = x - y$, orduan,

$$|\Delta * u| = |\Delta * x| + |\Delta * y|.$$

3. Biz $u = xy$, orduan,

$$|\Delta * u| = |x||\Delta * y| + |y||\Delta * x|.$$

4. Biz $u = \dfrac{x}{y}$, orduan,

$$|\Delta * u| = \left|\frac{1}{y}\right||\Delta * x| + \left|\frac{x}{y^2}\right||\Delta * y| = \frac{|y||\Delta * x| + |x||\Delta * y|}{y^2}.$$

5. Bira c eta a ABC triangelu zuzenaren hipotenusa eta katetua, $|\Delta * c| = 0,2$, $|\Delta * a| = 0,1$ errore absolutu maximoen bidez aurkitutakoak. $c = 75$ eta $a = 32$ ditugu.

Kalkulatu A angelua $\sin A = \frac{a}{c}$ formularen bidez eta angeluaren kalkuluan eginiko $|\overline{\Delta A}|$ errore absolutu maximoa.

Ebazpena. $\sin A = \frac{a}{c}$, $A = \arcsin \frac{a}{c}$; orduan:

$$\frac{\partial A}{\partial a} = \frac{1}{\sqrt{c^2 - a^2}}, \quad \frac{\partial A}{\partial c} = -\frac{a}{c\sqrt{c^2 - a^2}}.$$

(2) formularen arabera,

$$|\overline{\Delta A}| = \frac{1}{\sqrt{(75)^2 - (32)^2}} \cdot 0,1 + \frac{32}{75\sqrt{(75)^2 - (32)^2}} \cdot 0,2 = 0,00275 \quad radianak = 9'\ 38''$$

dugu. Beraz,

$$A = \arcsin \frac{32}{75} \pm 9'38''.$$

6. ABC triangelu zuzenaren $b = 121{,}56$m-ko katetua eta $A = 25°21'40''$-ko angelua kalkulatu dira; magnitude horien balioztapenean eginiko errore absolutu maximoak $|\Delta * b| = 0{,}05$m eta $|\Delta * A| = 12''$ dira, hurrenez hurren.

Aurkitu $a = b \tan A$ formularen bidez a katetuaren kalkukuan gertatutako errore absolutu maximoa.

Ebazpena. (2) formularen arabera, zera dugu:

$$|\Delta * a| = |\tan A| \cdot |\Delta * b| + \frac{|b|}{\cos^2 A} |\Delta * A|.$$

Balioak ordezkatuz (eta $|\Delta * A|$ radianetan adieraziz)

$$|\Delta * a| = \tan 25°21'40'' \cdot 0{,}05 + \frac{121{,}56}{\cos^2 25°21'40''} \frac{12}{206\ 265} = 0{,}0237 + 0{,}0087 = 0{,}0324\text{m}$$

dugu.

Magnitude baten Δx errorearen eta x-ren balio hurbilduaren arteko arrazoiari, magnitude horren *errore erlatibo* deituko diogu, δx adieraziz:

$$\delta x = \frac{\Delta x}{x}.$$

Errore absolutu maximoaren eta x-ren balio absolutuaren arteko arrazoiari x magnitudearen *errore erlatibo maximo* deituko diogu, $|\delta * x|$ adieraziz:

$$|\delta * x| = \frac{|\Delta * x|}{|x|}. \tag{3}$$

u funtzioaren errore erlatibo maximoa kalkulatzeko, (2) berdintzaren atal biak $|u| = |f(x, y, z, \ldots, t)|$ bidez zatituz,

$$\frac{|\Delta * u|}{|u|} = \left|\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{f}\right| |\Delta * x| + \left|\frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{f}\right| |\Delta * y| + \ldots + \left|\frac{\frac{\partial f}{\partial t}}{f}\right| |\Delta * t| \tag{4}$$

dugu, eta

$$\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{f} = \frac{\partial}{\partial x} \ln|f|; \quad \frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{f} = \frac{\partial}{\partial y} \ln|f|; \quad \ldots; \frac{\frac{\partial f}{\partial t}}{f} = \frac{\partial}{\partial t} \ln|f|$$

denez, (3) berdintza ondoko eran idatz daiteke:

$$|\delta * u| = \left|\frac{\partial}{\partial x} \ln|f|\right| |\Delta * x| + \left|\frac{\partial}{\partial y} \ln|f|\right| |\Delta * y| + \ldots + \left|\frac{\partial}{\partial t} \ln|f|\right| |\Delta * t|, \tag{5}$$

edo, laburrago:

$$|\delta * u| = |\Delta * \ln|f||. \tag{6}$$

(3) eta (5) formuletatik, funtzio baten errore erlatibo maximoa eta funtzio horren logaritmoaren errore absolutu maximoa berdinak direla ondorioztatzen da.

(6) formulatik kalkulu hurbilduetan erabil daitezkeen erregelak ondorioztatuko ditugu.

1. Biz $u = xy$. 3. adibidearen emaitzak erabiliz,

$$|\delta * u| = \frac{|x||\Delta * x|}{|xy|} + \frac{|y||\Delta * y|}{|xy|} = \frac{|\Delta * x|}{|x|} + \frac{|\Delta * y|}{|y|} = |\delta * x| + |\delta * y|$$

dugu; hau da, biderkaduraren errore erlatibo maximoa, biderkagaien errore erlatibo maximoen batura izango da.

2. Biz $u = \frac{x}{y}$. 4. adibidearen emaitzak erabiliz, ondokoa dugu:

$$|\delta * u| = |\delta * x| + |\delta * y|.$$

Oharra. 2. adibidearen arabera, $u = x - y$ bada,

$$|\delta * u| = \frac{|\Delta * x| + |\Delta * y|}{|x - y|}$$

izango dugu. x eta y balioak elkarren hurbilak badira, $x - y$ magnitudearekin konparatuz $|\delta * u|$ oso handia izatea gerta daiteke. Arazo hori kontutan hartu beharko da kalkuluak egiterakoan.

7. Adibidea. Pendulu baten oszilazio-periodoa

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

da, l penduluaren luzera eta g grabitatearen azelerazioa direlarik.

Kalkulatu aipatutako formula erabiliz lortutako T-ren errore erlatiboa, ondoko datuak harturik: $\pi \approx 3{,}14$ (0,005 baino txikiagoko errorea), $l = 1\text{m}$ (0,01m baino txikiagoko errorea), $g = 9{,}8\text{m} / s^2$ ($0{,}02\text{m} / s^2$ baino txikiagoko errorea).

Ebazpena. (6) formularen arabera, errore erlatibo maximoa ondokoa izango da:

$$|\delta * T| = |\Delta * \ln T|,$$

$$\ln T = \ln 2 + \ln \pi + \frac{1}{2}\ln l - \frac{1}{2}\ln g$$

izanik.

Kalkula dezagun $|\Delta * \ln T|$. $\pi \approx 3{,}14$, $\Delta * \pi = 0{,}005$, $l = 1\text{m}$, $\Delta * l = 0{,}01\text{m}$, $g = 9{,}8\text{m}/s^2$, $\Delta * g = 0{,}02\text{m}/s^2$ kontutan hartuz, ondokoa lortzen dugu:

$$\Delta * \ln T = \frac{\Delta * \pi}{\pi} + \frac{\Delta * l}{2l} + \frac{\Delta * g}{2g} = \frac{0{,}005}{3{,}14} + \frac{0{,}01}{2} + \frac{0{,}02}{2 \cdot 9{,}8} = 0{,}0076.$$

Beraz, errore erlatibo maximoa hauxe da:

$$\delta * T = 0{,}0076 = \%\ 0{,}76.$$

§ 10. Funtzio konposatuaren deribatua. Deribatu totala

Demagun

$$z = F(u, v) \tag{1}$$

ekuazioan u eta v aldagaiak x eta y aldagai independenteen funtzioak direla:

$$u = \varphi(x, y); \quad v = \psi(x, y). \tag{2}$$

Kasu horretan z, x eta y aldagaien funtzio konposatua da.

z, x eta y aldagaien funtzioan zuzenean adieraz daiteke:

$$z = F[\varphi(x, y),\ \psi(x, y)]. \tag{3}$$

1. Adibidea. Biz

$$z = u^3 v^3 + u + 1; \quad u = x^2 + y^2; \quad v = e^{x+y} + 1;$$

orduan,

$$z = (x^2 + y^2)^3 (e^{x+y} + 1)^3 + (x^2 + y^2) + 1.$$

Demagun $F(u, v)$, $\varphi(x, y)$, $\psi(x, y)$ funtzioen deribatu partzialak jarraiak direla beraien argumentu guztiekiko. Kalkula ditzagun $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ eta $\dfrac{\partial z}{\partial y}$, (1) eta (2) ekuazioak

erabiliz eta (3) berdintzara jo barik. Eman diezaiogun x argumentuari Δx gehikuntza, y-ren balioa konstante mantenduz. (2) ekuazioaren arabera, u eta v delakoek $\Delta_x u$ eta $\Delta_x v$ gehikuntzak izango dituzte, hurrenez hurren.

Baina u eta v aldagaiek $\Delta_x u$ eta $\Delta_x v$ gehikuntzak izan ondoren, $z = F(u, v)$ funtzioaren gehikuntza Δz, VIII. gaiko § 7. (5') formularen bidez kalkulatuko da:

$$\Delta z = \frac{\partial F}{\partial u}\Delta_x u + \frac{\partial F}{\partial v}\Delta_x v + \gamma_1 \Delta_x u + \gamma_2 \Delta_x v.$$

Zati ditzagun berdintza horretako gai guztiak Δx-ren bidez:

$$\frac{\Delta z}{\Delta x} = \frac{\partial F}{\partial u}\frac{\Delta_x u}{\Delta x} + \frac{\partial F}{\partial v}\frac{\Delta_x v}{\Delta x} + \gamma_1 \frac{\Delta_x u}{\Delta x} + \gamma_2 \frac{\Delta_x v}{\Delta x}.$$

Baldin $\Delta x \to 0$ bada, $\Delta_x u \to 0$ eta $\Delta_x v \to 0$ ditugu (u eta v funtzioen jarraitasunaren arabera). Eta kasu horretan γ_1 eta γ_2 delakoek ere zerorantz jotzen dute. $\Delta x \to 0$ denean limitea kalkulatuz zera lortzen dugu:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta z}{\Delta x} = \frac{\partial z}{\partial x}; \quad \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x u}{\Delta x} = \frac{\partial u}{\partial x}; \quad \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x v}{\Delta x} = \frac{\partial v}{\partial x};$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \gamma_1 = 0; \quad \lim_{\Delta x \to 0} \gamma_2 = 0$$

eta beraz,

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}. \tag{4}$$

y aldagaiari Δy gehikuntza ematen badiogu, x aldaezina mantenduz, era berean ondokoa lortzen dugu:

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}. \tag{4'}$$

2. Adibidea.

$$z = \ln(u^2 + v); \quad u = e^{x+y^2}; \quad v = x^2 + y;$$

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{2u}{u^2 + v}; \quad \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{1}{u^2 + v};$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=e^{x+y^2};\quad \frac{\partial u}{\partial y}=2ye^{x+y^2};\quad \frac{\partial v}{\partial x}=2x;\quad \frac{\partial v}{\partial y}=1.$$

(4) eta (4') formulak erabiliz, hauxe dugu:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{2u}{u^2+v}e^{x+y^2}+\frac{1}{u^2+v}2x=\frac{2}{u^2+v}(ue^{x+y^2}+x),$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{2u}{u^2+v}2ye^{x+y^2}+\frac{1}{u^2+v}=\frac{1}{u^2+v}(4uye^{x+y^2}+1).$$

(4) eta (4') formulak aldagai-kopuru handiagoetara heda ditzakegu.

Adibidez, baldin $w=F(z,u,v,s)$ z, u, v eta s aldagaien funtzioa bada, aldagai bakoitza x eta y aldagaien funtzioa izanik, (4) eta (4') formulek ondoko itxura hartzen dute:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial w}{\partial x}&=\frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial x},\\ \frac{\partial w}{\partial y}&=\frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial y}.\end{aligned}\right\}\qquad(5)$$

Baldin $z=F(x,y,u,v)$ funtzioan y, u eta v aldagaiak x argumentuaren funtzioak badira, hau da,

$$y=f(x);\quad u=\varphi(x);\quad v=\psi(x),$$

z, funtsean, x aldagai bakarreko funtzioa da, eta beraz, $\frac{dz}{dx}$ deribatua kalkula daiteke.

Deribatu hori (5) formuletako lehenengoaren bidez kalkulatutako da:

$$\frac{dz}{dx}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x};$$

baina y, u, v x aldagai bakarraren menpekoak direnez, deribatu partzialak deribatu arruntak izango dira; bestalde, $\frac{\partial x}{\partial x}=1$ da, beraz:

$$\frac{dz}{dx}=\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dx}+\frac{\partial z}{\partial u}\frac{du}{dx}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{dv}{dx}. \qquad (6)$$

Azken horri, $\frac{dz}{dx}$ *deribatu total*aren kalkulurako formula deritzogu ($\frac{\partial z}{\partial x}$ deribatu partzialen desberdina).

3. Adibidea.

$$z=x^2+\sqrt{y},\ y=\sin x,$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=2x;\ \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{2\sqrt{y}};\ \frac{dy}{dx}=\cos x.$$

(6) formularen arabera zera dugu:

$$\frac{dz}{dx}=\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dx}=2x+\frac{1}{2\sqrt{y}}\cos x=2x+\frac{1}{2\sqrt{\sin x}}\cos x.$$

§ 11. Funtzio inplizituen deribatua

Problema honen azalpena aldagai bateko funtzio inplizitua aztertuz hasiko dugu[2]. Biz y

$$F(x,y)=0$$

ekuazioaren bidez definitutako x-ren funtzioa.

Ondoko teorema frogatuko dugu:

1. Teorema. Biz y x-ren funtzio jarraia

$$F(x,y)=0$$

ekuazioaren bidez inplizituki definitua, eta demagun (x,y) puntuaren koordenatuek ekuazio hori egiaztatzen dutela. Suposa dezagun $F(x,y)$, $F'_x(x,y)$, $F'_y(x,y)$ funtzioak

2) III. gaiko § 11 atalean, aldagai bateko funtzio inplizituen deribazio-problema aztertu dugu. Adibide batzuk kontsideratu ditugu, baina funtzio inplizituaren deribatua kalkulatzeko formula orokorra lortu barik. Deribatu horren existentzi baldintzak ere ez ditugu lortu.

jarraiak direla (x,y) puntua bere barnean duen D eremu batean, eta (x,y) puntuan $F_y'(x,y) \neq 0$ dela. Orduan x-ren y funtzioaren deribatua ondokoa izango da:

$$y_x' = \frac{-F_x'(x,y)}{F_y'(x,y)}.$$

Frogapena. Demagun x-ren balio bati y funtzio inplizituaren balio bat dagokiola eta

$$F(x,y) = 0.$$

x aldagai independenteari Δx gehikuntza emanez, y funtzioari dagokion gehikuntza Δy izango da; hau da, aldagaiaren $x + \Delta x$ balioari funtzioaren $y + \Delta y$ balioa dagokio. $F(x,y) = 0$ ekuazioaren arabera, zera dugu:

$$F(x + \Delta x, y + \Delta y) = 0.$$

Beraz,

$$F(x + \Delta x, y + \Delta y) - F(x,y) = 0.$$

Azken berdintzaren lehen atala bi aldagaiko funtzioaren gehikuntza totala da eta § 7 (5') formularen arabera zera idatz dezakegu:

$$F(x + \Delta x, y + \Delta y) - F(x,y) = \frac{\partial F}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial F}{\partial y}\Delta y + \gamma_1 \Delta x + \gamma_2 \Delta y,$$

non γ_1 eta γ_2 zerorantz bait doaz, $\Delta x \to 0$ eta $\Delta y \to 0$ direnean. Adierazpenaren lehen atala zero denez,

$$\frac{\partial F}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial F}{\partial y}\Delta y + \gamma_1 \Delta x + \gamma_2 \Delta y = 0$$

idatz daiteke.

Zati dezagun lortutako berdintza Δx-ren bidez eta kalkula dezagun $\frac{\Delta y}{\Delta x}$:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x} + \gamma_1}{\dfrac{\partial F}{\partial y} + \gamma_2}.$$

$\Delta x \to 0$ denerako limitea harturik, γ_1 eta γ_2 zerorantz doazenez eta $\dfrac{\partial F}{\partial y} \neq 0$ denez, hauxe dugu:

$$y'_x = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}}{\dfrac{\partial F}{\partial y}}. \qquad (1)$$

Horrela, inplizituki definituriko funtzioaren y'_x deribatuaren existentzia frogatu dugu, deribatu hori kalkulatzeko formula lortuz.

1. Adibidea.

$$x^2 + y^2 - 1 = 0$$

ekuazioak y, x-ren funtzio inplizitu gisa definitzen du. Hor:

$$F(x,y) = x^2 + y^2 - 1, \quad \frac{\partial F}{\partial x} = 2x; \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 2y.$$

Beraz, (1) formularen arabera, zera dugu:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2x}{2y} = -\frac{x}{y}.$$

Kontutan har dezagun emandako ekuazioak bi funtzio desberdin definitzen dituela (zeren (-1,1) tarteko x-ren balio bakoitzari y-ren bi balio bait dagozkio); aldiz, kalkulatutako y'_x deribatuaren balioa funtzio bietarako baliagarria da.

2. Adibidea. Biz

$$e^y - e^x + xy = 0.$$

Orain:

$$F(x,y) = e^y - e^x + xy,$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = -e^x + y; \quad \frac{\partial F}{\partial y} = e^y + x.$$

Beraz, (1) formularen arabera, zera lortuko dugu:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{-e^x + y}{e^y + x} = \frac{e^x - y}{e^y + x}.$$

Kontsidera dezagun orain

$$F(x,y,z) = 0 \tag{2}$$

ekuazioa. Eremu bateko x eta y balio-bikote bakoitzari, (2) ekuazioa egiaztatzen duen z-ren balio bat edo gehiago dagozkionean, ekuazioak x eta y aldagaien z funtzio bat edo gehiago inplizituki definituko ditu.

Adibidez,

$$x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0$$

ekuazioak x eta y aldagaien z bi funtzio jarrai inplizituki definitzen ditu; horiek esplizituki adieraz daitezke, ekuazioan z askatuz:

$$z = \sqrt{\mathrm{R}^2 - x^2 - y^2} \quad \text{eta} \quad z = -\sqrt{\mathrm{R}^2 - x^2 - y^2}.$$

Kalkula ditzagun $\frac{\partial z}{\partial x}$ eta $\frac{\partial z}{\partial y}$ deribatu partzialak, z (2) ekuazioak definitutako funtzio inplizitua izanik.

$\frac{\partial z}{\partial x}$ lortzeko, y konstantea dela suposatu beharko dugu. Horren arabera, hemen (1) formula erabil dezakegu, z, x aldagai independentearen funtzio gisa hartuz. Beraz,

$$z'_x = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}}{\dfrac{\partial F}{\partial z}}.$$

Eta modu berean

$$z'_y = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial y}}{\dfrac{\partial F}{\partial z}}.$$

Kasu bietan zera suposatuz,

$$\frac{\partial F}{\partial z} \neq 0.$$

Edozein aldagai-kopurutako funtzio inplizituak definituko dira eta beraien deribatu partzialak era berean kalkulatuko dira.

3. Adibidea.

$$x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0,$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{2x}{2z} = -\frac{x}{z}; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{y}{z}.$$

Funtzio hori esplizitua balitz bezala deribatuz (ekuazioa z-rekiko askatuz), emaitza berbera lortuko dugu.

4. Adibidea.

$$e^z + x^2 y + z + 5 = 0.$$

Oraingoan

$$F(x, y, z) = e^z + x^2 y + z + 5,$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2xy; \quad \frac{\partial F}{\partial y} = x^2; \quad \frac{\partial F}{\partial z} = e^z + 1;$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{2xy}{e^z + 1}; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{x^2}{e^z + 1}.$$

1. Oharra. Goiko lerroaldean eginiko arrazonamendu guztiak zera suposatuz egin dira: $F(x,y)=0$ ekuazioak aldagai bateko y funtzio bat, $y=\varphi(x)$, eta $F(x,y,z)=0$ ekuazioak bi aldagaiko z funtzio bat, $z=f(x,y)$, definitzen dituztela. Aipa dezagun, frogapenik gabe, baldintza nahikoa bat $F(x,y)=0$ ekuazioak $y=\varphi(x)$ funtzio uniformea defini dezan.

2. Teorema. Biz $F(x,y)$ funtzioa jarraia eta beraren deribatu partzialak jarraiak (x_0,y_0) puntuaren ingurune batean, $F'_y(x,y)\neq 0$ izanik. Demagun halaber $F(x_0,y_0)=0$ dela. Orduan, (x_0,y_0) puntuaren ingurune bat existitzen da non $F(x,y)=0$ ekuazioak $y=\varphi(x)$ funtzio uniformea definitzen duen.

Badago ere, $F(x,y,z)=0$ ekuazioak funtzio inplizitua defini dezan baldintza nahikoei buruzko pareko teorema.

2. Oharra. Funtzio inplizituetarako deribazio-erregelak ondorioztatzean, funtzio inplizituen existentzia determinatzen duten baldintzak erabiliak izan dira.

§ 12. Ordena goreneko deribatu partzialak

Biz $z=f(x,y)$ bi aldagai independenteko funtzioa.

Deribatu partzialak, $\dfrac{\partial z}{\partial x}=f'_x(x,y)$ eta $\dfrac{\partial z}{\partial y}=f'_y(x,y)$, orokorrean x, y aldagaien funtzioak dira. Beraz, beraiek ere deribatu partzialak eduki ditzakete. Honela, bi aldagaiko funtzioaren bigarren ordenako deribatu partzialak lau dira, $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ eta $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ funtzioetako bakoitza bai x-rekiko eta bai y-rekiko deriba dezakegulako.

Bigarren ordenako deribatu partzialak honela adieraziko dira:

$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=f''_{xx}(x,y)$; f x-rekiko bi aldiz elkarren segidan deribatu da;

$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f''_{xy}(x,y)$; f x-rekiko deribatu ondoren, emaitza y-rekiko deribatu da;

$\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=f''_{yx}(x,y)$; f y-rekiko deribatu ondoren, emaitza x-rekiko deribatu da;

$\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f''_{yy}(x,y)$; f y-rekiko bi aldiz elkarren segidan deribatu da.

Bigarren ordenako deribatuak berriro ere deriba daitezke, bai x-rekiko baita y-rekiko ere; horrela, hirugarren ordenako deribatuak lortuko ditugu. Horiek zortzi izango direla bistakoa da:

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^3};\quad \frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y};\quad \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y \partial x};\quad \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2};$$

$$\frac{\partial^3 z}{\partial y \partial x^2};\quad \frac{\partial^3 z}{\partial y \partial x \partial y};\quad \frac{\partial^3 z}{\partial y^2 \partial x};\quad \frac{\partial^3 z}{\partial y^3}.$$

Orokorrean, n-garren ordenako deribatu partziala, $(n-1)$-garrenekoaren lehen deribatua izango da. Adibidez, $\dfrac{\partial^n z}{\partial x^p \partial y^{n-p}}$ n-garren ordenako deribatua da. Hor, z funtzioa lehendabizi x-rekiko p aldiz eta ondoren y-rekiko $(n-p)$ aldiz deribaturik dago.

Era berean, edozein aldagai-kopurutako funtziorako ordena goreneko deribatu partzialak defini daitezke.

1. Adibidea. Bilatu $f(x,y) = x^2 y + y^3$ funtzioaren bigarren ordenako deribatu partzialak.

Ebazpena.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy;\quad \frac{\partial f}{\partial y} = x^2 + 3y^2;$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2y;\quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial(2xy)}{\partial y} = 2x;\quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial(x^2 + 3y^2)}{\partial x} = 2x;\quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6y.$$

2. Adibidea. Bilatu $\dfrac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}$ eta $\dfrac{\partial^3 z}{\partial y \partial x^2}$, $z = y^2 e^x + x^2 y^3 + 1$ izanik.

Ebazpena.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = y^2 e^x + 2xy^3; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = y^2 e^x + 2y^3; \quad \frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} = 2ye^x + 6y^2,$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 2ye^x + 3x^2 y^2; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = 2ye^x + 6xy^2; \quad \frac{\partial^3 z}{\partial y \partial x^2} = 2ye^x + 6y^2.$$

3. Adibidea. Bilatu $\dfrac{\partial^4 z}{\partial x^2 \partial y \partial z}$, $u = z^2 e^{x+y^2}$ izanik.

Ebazpena.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = z^2 e^{x+y^2}; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = z^2 e^{x+y^2}, \quad \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} = 2yz^2 e^{x+y^2}, \quad \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y \partial z} = 4yze^{x+y^2}.$$

Berezkoa da hurrengo galdera planteatzea: aldagai anitzeko funtzioaren deribatua aldagaiekiko deribazioaren ordenaren menpekoa al da? Hots, ondoko deribatuak, adibidez, berdinak izango al dira?:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \quad \text{eta} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

edo

$$\frac{\partial^3 f(x,y,t)}{\partial x \partial y \partial t} \quad \text{eta} \quad \frac{\partial^3 f(x,y,t)}{\partial t \partial x \partial y}, \quad \text{etab.}$$

Erantzuna ondoko teoremak emango digu.

Teorema. Baldin $z = f(x,y)$ funtzioa eta beraren deribatu partzialak f'_x, f'_y, f''_{xy}, f''_{yx} $M(x,y)$ puntuaren ingurune batean definiturik badaude eta jarraiak badira, ingurune horretan, ondokoa izango dugu:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \qquad (f''_{xy} = f''_{yx}).$$

Frogapena. Har dezagun

$$A = [f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x+\Delta x, y)] - [f(x, y+\Delta y) - f(x, y)]$$

adierazpena.

$$\varphi(x) = f(x, y+\Delta y) - f(x, y)$$

berdintzaren bidez definituriko $\varphi(x)$ funtzio laguntzailea harturik, A ondoko eran idatz daiteke:

$$A = \varphi(x+\Delta x) - \varphi(x).$$

Hipotesiz, $f_x'(x,y)$ puntuaren ingurune batean definiturik dago. Beraz, $\varphi(x)$ $(x, x+\Delta x)$ tartean deribagarria da eta Lagrange-ren teorema erabiliz

$$A = \Delta x \varphi'(\bar{x})$$

lortzen dugu, non $\bar{x}$, x eta $x+\Delta x$ balioen artekoa den.

Eta,

$$\varphi'(\bar{x}) = f_x'(\bar{x}, y+\Delta y) - f_x'(\bar{x}, y).$$

f_{xy}'', (x,y) puntuaren ingurune batean definiturik dagoenez, f_x' deribagarria da $[y, y+\Delta y]$ tartean; beraz, lortutako kendurari Lagrange-ren teorema aplikatuz (y aldagaiarekiko)

$$f_x'(\bar{x}, y+\Delta y) - f_x'(\bar{x}, y) = \Delta y \ f_{xy}''(\bar{x}, \bar{y})$$

dugu, non $\bar{y}$, y eta $y+\Delta y$ balioen artekoa den. Beraz,

$$A = \Delta x \ \Delta y \ f_{xy}''(\bar{x}, \bar{y}). \tag{1}$$

Gaien ordena aldatzerakoan ondokoa lortzen dugu:

$$A = [f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y+\Delta y)] - [f(x+\Delta x, y) - f(x, y)].$$

Sar dezagun hurrengo funtzio laguntzailea:

$$\psi(y) = f(x+\Delta x, y) - f(x, y).$$

Orduan,

$$A = \psi(y + \Delta y) - \psi(y).$$

Berriro ere Lagrange-ren teorema aplikatuz,

$$A = \Delta y \psi'(\bar{\bar{y}})$$

dugu, non $\bar{\bar{y}}$, y eta $y + \Delta y$ balioen artekoa den.

Eta

$$\psi'(\bar{\bar{y}}) = f_y'(x + \Delta x, \bar{\bar{y}}) - f_y'(x, \bar{\bar{y}}).$$

Lagrange-ren teorema berriz erabiliz,

$$f_y'(x + \Delta x, \bar{\bar{y}}) - f_y'(x, \bar{\bar{y}}) = \Delta x \ f_{yx}''(\bar{\bar{x}}, \bar{\bar{y}})$$

lortzen dugu, non $\bar{\bar{x}}$, x eta $x + \Delta x$ balioen artekoa den.

Honela,

$$A = \Delta x \ \Delta y \ f_{yx}''(\bar{\bar{x}}, \bar{\bar{y}}). \qquad (2)$$

(1) eta (2) berdintzetako lehendabiziko atalak A dira; beraz, bigarrenak ere berdinak izango dira, hots,

$$\Delta x \ \Delta y \ f_{xy}''(\bar{x}, \bar{y}) = \Delta y \ \Delta x \ f_{yx}''(\bar{\bar{x}}, \bar{\bar{y}}),$$

nondik

$$f_{xy}''(\bar{x}, \bar{y}) = f_{yx}''(\bar{\bar{x}}, \bar{\bar{y}}).$$

$\Delta x \to 0$ eta $\Delta y \to 0$ egiterakoan ekuazio horren limitera pasatuz, hauxe lortzen dugu:

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} f_{xy}''(\bar{x}, \bar{y}) = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} f_{yx}''(\bar{\bar{x}}, \bar{\bar{y}}).$$

f''_{xy} eta f''_{yx} deribatuak (x, y) puntuan jarraiak direnez, zera dugu:

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} f''_{xy}(\bar{x}, \bar{y}) = f''_{xy}(x, y) \quad \text{eta} \quad \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} f''_{yx}(\bar{\bar{x}}, \bar{\bar{y}}) = f''_{yx}(x, y).$$

Hots,

$$f''_{xy}(x, y) = f''_{yx}(x, y)$$

eta horrela teorema frogaturik dago.

Frogatutako teoremaren korolarioa hauxe da: baldin

$$\frac{\partial^n f}{\partial x^k \partial y^{n-k}} \quad \text{eta} \quad \frac{\partial^n f}{\partial y^{n-k} \partial x^k}$$

deribatu partzialak jarraiak badira,

$$\frac{\partial^n f}{\partial x^k \partial y^{n-k}} = \frac{\partial^n f}{\partial y^{n-k} \partial x^k}.$$

Antzeko teorema eman daiteke edozein aldagai-kopurutako funtzioetarako.

4. Adibidea. Aurkitu $\dfrac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z}$ eta $\dfrac{\partial^3 u}{\partial y \partial z \partial x}$ baldin $u = e^{xy} \sin z$ bada.

Ebazpena.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = y e^{xy} \sin z; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = e^{xy} \sin z + xy e^{xy} \sin z = e^{xy}(1 + xy) \sin z;$$

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z} = e^{xy}(1 + xy) \cos z; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = x e^{xy} \sin z; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} = x e^{xy} \cos z;$$

$$\frac{\partial^3 u}{\partial y \partial z \partial x} = e^{xy} \cos z + xy e^{xy} \cos z = e^{xy}(1 + xy) \cos z.$$

Beraz,

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z} = \frac{\partial^3 u}{\partial y \partial z \partial x}$$

(ikus atal honetako 1. eta 2. adibideak).

§ 13. Maila-gainazalak

Demagun (x, y, z) puntuetako espazioan D eremua existitzen dela non

$$u = u(x, y, z) \tag{1}$$

funtzioa definiturik dagoen. Kasu horretan, D eremuan *eskalare-eremu* bat definiturik dagoela esan ohi da. Adibidez, $M(x, y, z)$ puntuko tenperatura $u(x, y, z)$ funtzioaren bidez adierazten badugu, tenperaturen eskalare-eremua definiturik dagoela esango dugu. D eremua likido edo gasez beterik egonez, $u(x, y, z)$ funtzioak presioa adierazten badu, presioaren eskalare-eremuaz arituko gara, eta abar.

Kontsidera dezagun D eremuaren puntuak non $u(x, y, z)$ funtzioak c balio konstantea hartzen duen:

$$u(x, y, z) = c. \tag{2}$$

Puntu horien multzoak gainazal bat eratzen du. c delakoari beste balio bat emanez, beste gainazal bat lortuko dugu. Gainazal hauek *maila-gainazal* deituko ditugu.

1. Adibidea. Biz

$$u(x, y, z) = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{16}$$

eskalare-eremua.

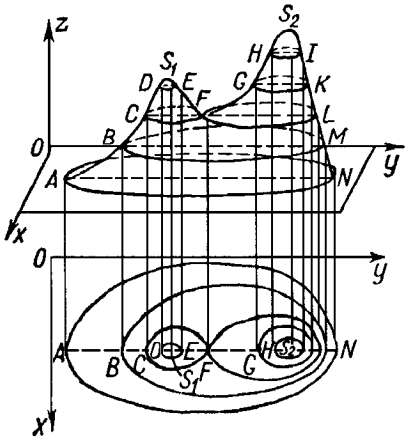
Maila-gainazalak ondokoak izango dira:

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{16} = c,$$

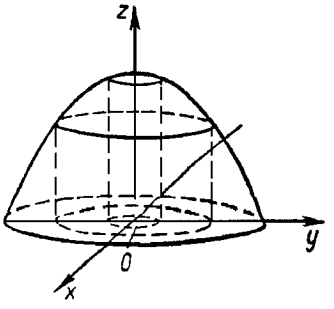
hots, $2\sqrt{c}$, $3\sqrt{c}$, $4\sqrt{c}$ luzeretako ardatzerdiak dituzten elipsoideak.

Baldin u x eta y aldagaien funtzioa bada, hots,

$$u = u(x, y),$$



175. IRUDIA



176. IRUDIA

"maila-gainazalak" Oxy planoko lerro batzuk:

$$u(x,y)=c \qquad (2')$$

izango dira eta *maila-lerro* deituko ditugu.

Oz ardatz gainean u-ren balioak hartuz, hau da:

$$z=u(x,y),$$

Oxy planoan maila-lerroak, $z=u(x,y)$ gainazal eta $z=c$ planoen arteko ebakiduraz lortzen diren lerroen projekzioak izango dira (175. irudia). Maila-lerroak ezagutuz, $z=u(x,y)$ gainazalaren forma aztertzea erraza izango da.

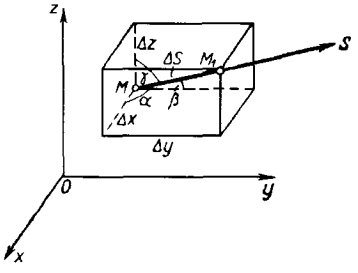
2. Adibidea. Finkatu $z=1-x^2-y^2$ funtzioaren maila-lerroak.

Maila-lerroak $1-x^2-y^2=c$ ekuazioak adierazitako lerroak dira, $\sqrt{1-c}$ erradioko zirkunferentziak, hain zuzen (176. irudia). Bereziki, $c=0$ denean x^2+y^2-1 zirkunferentzia lortzen dugu.

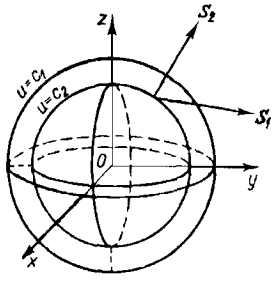
§ 14. Norabide batekiko deribatua

Demagun $u=u(x,y,z)$ funtzioa D eremu batean definiturik dagoela eta $M(x,y,z)$ eremuko puntu bat dela. M puntutik, $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ kosinu zuzentzaileak dituen s bektorea marra dezagun (177. irudia). Kontsidera dezagun bektore horretan M puntutik Δs distantziara $M_1(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z)$ puntua. Orduan, zera dugu:

$$\Delta s = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}.$$



177. IRUDIA



178. IRUDIA

Demagun D eremuan $u(x,y,z)$ funtzioa jarraia dela eta, aldagai guztiekiko deribatuak jarraiak dituela. § 7 atalean egin dugun bezala, funtzioaren gehikuntza totala honela adieraziko dugu:

$$\Delta u = \frac{\partial u}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial u}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial u}{\partial z}\Delta z + \varepsilon_1\Delta x + \varepsilon_2\Delta y + \varepsilon_3\Delta z, \qquad (1)$$

non ε_1, ε_2 eta ε_3 zerorantz bait doaz, $\Delta s \to 0$ denean. (1) berdintzaren gai guztiak Δs-ren bidez zatituz ondokoa lortzen dugu:

$$\frac{\Delta u}{\Delta s} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\Delta x}{\Delta s} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\Delta y}{\Delta s} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\Delta z}{\Delta s} + \varepsilon_1\frac{\Delta x}{\Delta s} + \varepsilon_2\frac{\Delta y}{\Delta s} + \varepsilon_3\frac{\Delta z}{\Delta s}. \qquad (2)$$

Eta

$$\frac{\Delta x}{\Delta s} = \cos\alpha, \quad \frac{\Delta y}{\Delta s} = \cos\beta, \quad \frac{\Delta z}{\Delta s} = \cos\gamma$$

bistakoa denez, (2) berdintza ondoko eran idatz daiteke:

$$\frac{\Delta u}{\Delta s} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma + \varepsilon_1\cos\alpha + \varepsilon_2\cos\beta + \varepsilon_3\cos\gamma. \qquad (3)$$

(x,y,z) puntuan $u = u(x,y,z)$ *funtzioaren deribatua* s *norabidearekiko*, $\dfrac{\Delta u}{\Delta s}$ arrazoiaren limitea izango da $\Delta s \to 0$ denean, eta $\dfrac{\partial u}{\partial s}$ adieraziko da, hau da:

$$\lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta s} = \frac{\partial u}{\partial s}. \tag{4}$$

Horrela, (3) berdintzan limitea kalkulatuz

$$\frac{\partial u}{\partial s} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma \tag{5}$$

lortzen dugu.

(5) formularen arabera, deribatu partzialak ezaguturik, edozein s norabiderekiko deribatua erraz kalkula daiteke. Deribatu partzialak, heurak ere, norabide batekiko deribatu gisa kontsidera daitezke. Horrela, esaterako, $\alpha = 0$, $\beta = \frac{\pi}{2}$, $\gamma = \frac{\pi}{2}$ direnean ondokoa dugu:

$$\frac{\partial u}{\partial s} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos 0 + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\frac{\pi}{2} + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\frac{\pi}{2} = \frac{\partial u}{\partial x}.$$

Adibidea. Biz

$$u = x^2 + y^2 + z^2$$

funtzioa. Kalkulatu $\frac{\partial u}{\partial s}$ deribatua $M(1,1,1)$ puntuan:

a) $s_1 = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} + 3\mathbf{k}$ bektorearen norabidean,

b) $s_2 = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$ bektorearen norabidean.

Ebazpena.

a) Bila ditzagun s_1 bektorearen kosinu zuzentzaileak:

$$\cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{4+1+9}} = \frac{2}{\sqrt{14}}, \quad \cos\beta = \frac{1}{\sqrt{14}}, \quad \cos\gamma = \frac{3}{\sqrt{14}}.$$

Hortaz,

$$\frac{\partial u}{\partial s_1} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{2}{\sqrt{14}} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{1}{\sqrt{14}} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{3}{\sqrt{14}}.$$

$M(1,1,1)$ puntuko deribatu partzialak

$$\frac{\partial u}{\partial x}=2x,\quad \frac{\partial u}{\partial y}=2y,\quad \frac{\partial u}{\partial z}=2z;$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_M=2,\quad \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_M=2,\quad \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_M=2$$

dira. Horrela,

$$\frac{\partial u}{\partial s_1}=2\frac{2}{\sqrt{14}}+2\frac{1}{\sqrt{14}}+2\frac{3}{\sqrt{14}}=\frac{12}{\sqrt{14}}.$$

b) Kalkula ditzagun s_2 bektorearen kosinu zuzentzaileak:

$$\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{3}},\quad \cos\beta=\frac{1}{\sqrt{3}},\quad \cos\gamma=\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Hortaz,

$$\frac{\partial u}{\partial s_2}=2\frac{1}{\sqrt{3}}+2\frac{1}{\sqrt{3}}+2\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{6}{\sqrt{3}}=2\sqrt{3}.$$

Kontura gaitezen

$$2\sqrt{3}>\frac{12}{\sqrt{14}}$$

dela (178. irudia).

§ 15. Gradientea

$u=u(x,y,z)$ funtzioa definiturik dagoen D eremuko puntu bakoitzean bektore bat determinatuko dugu, zeinaren koordenatu-ardatzen gaineko projekzioak, dagozkion puntuan, funtzio horren $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial z}$ deribatu partzialak bait dira:

$$\operatorname{grad}u=\frac{\partial u}{\partial x}\mathbf{i}+\frac{\partial u}{\partial y}\mathbf{j}+\frac{\partial u}{\partial z}\mathbf{k}. \tag{1}$$

Bektore horri $u(x,y,z)$ funtzioaren *gradiente* deritzo. D eremuan *gradienteen bektore-eremua* definiturik dagoela esan ohi da. Gradientearen eta norabidearekiko deribatuaren arteko erlazioa ematen digun teorema frogatuko dugu.

Teorema. Bedi $u = u(x, y, z)$ $\operatorname{grad} u = \frac{\partial u}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\mathbf{k}$ gradienteen eremua definiturik dagoen eskalare-eremua.

s bektorearen norabidearekiko $\frac{\partial u}{\partial s}$ deribatua, s bektorearen gaineko $\operatorname{grad} u$ bektorearen projekzioaren berdina da.

Frogapena. Azter dezagun s bektoreari dagokion s^0 unitate bektorea:

$$s^0 = \mathbf{i}\cos\alpha + \mathbf{j}\cos\beta + \mathbf{k}\cos\gamma.$$

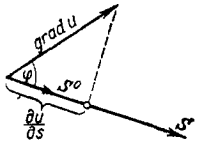
$\operatorname{grad} u$ eta s^0 bektoreen arteko biderkadura eskalarra kalkulatuko dugu:

$$\operatorname{grad} u \cdot s^0 = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma. \qquad (2)$$

(2) berdintzaren bigarren atala $u(x, y, z)$ funtzioaren s bektorearen norabidearekiko deribatua da. Beraz,

$$\operatorname{grad} u \cdot s^0 = \frac{\partial u}{\partial s}$$

idatz dezakegu.



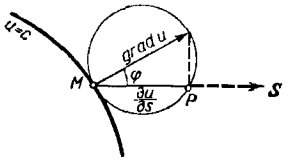
179. IRUDIA

$\operatorname{grad} u$ eta s^0 bektoreek osatzen duten angelua φ bada (179. irudia),

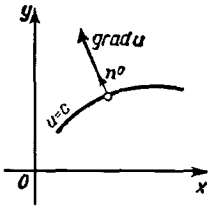
$$|\operatorname{grad} u|\cos\varphi = \frac{\partial u}{\partial s} \qquad (3)$$

idatz dezakegu. Horrela, teorema frogaturik dago.

Frogatutako teormatik abiatuz, emandako puntuan gradientearen eta edozein norabiderekiko deribatuaren arteko erlazioa ezar dezakegu. Emandako $M(x,y,z)$ puntuan grad u bektorea eraikiko dugu (180. irudia). Diametrotzat grad u bektorea duen esfera eratuko dugu. M puntutik abiatuz s bektorea marratuko da. Bedi P, s bektorearen eta esferaren gainazalaren arteko ebaki-puntua. Bistakoa da $MP = |\text{grad } u| \cos\varphi$, φ gradientearen eta MP zuzenkiaren norabideen arteko angelua bada ($\varphi < \frac{\pi}{2}$ izanik), hau da, $MP = \frac{\partial u}{\partial s}$. Argi dago, s bektorea aurkako norantzan badago, deribatua zeinuz aldatuko dela, baina bere balio absolutua ez dela aldatuko.



180. IRUDIA



181. IRUDIA

Aipa ditzagun gradientearen propietate batzuk.

1) Emandako puntuko deribatuak, s bektorearen norabidean, balio maximoa lortuko du s bektorearen norabidea eta gradientearena bat badatoz. Deribatuaren balio maximo hori $|\text{grad } u|$ da.

Baieztapen hori egia da, (3) berdintzatik ondoriozta daitekeen legez; $\frac{\partial u}{\partial s}$ deribatuak balio maximoa $\varphi = 0$ denean lortzen du, eta kasu horretan

$$\frac{\partial u}{\partial s} = |\text{grad } u|.$$

2) Maila-gainazalaren ukitzailearen norabidearekiko deribatua zero da.

Baieztapen hori (3) formulatik ateratzen da. Izan ere, kasu horretan:

$$\varphi = \frac{\pi}{2}, \quad \cos\varphi = 0 \quad \text{eta} \quad \frac{\partial u}{\partial s} = |\text{grad } u| \cos\varphi = 0.$$

1. Adibidea. Bedi $u = x^2 + y^2 + z^2$ funtzioa.

a) $M\,(1,1,1)$ puntuko gradientea kalkulatuko dugu. Emandako funtzioaren gradientea hautazko puntu batean ondokoa izango da:

$$\operatorname{grad} u = 2x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} + 2z\mathbf{k}.$$

Hortaz,

$$(\operatorname{grad} u)_M = 2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k},\ \left|\operatorname{grad} u\right|_M = 2\sqrt{3}.$$

b) $M\,(1,1,1)$ puntuko gradientearen norabidearekiko u funtzioaren deribatua determinatuko dugu. Gradientearen kosinu zuzentzaileak ondokoak dira:

$$\cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{2^2+2^2+2^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}},\quad \cos\beta = \frac{1}{\sqrt{3}},\quad \cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Hortaz,

$$\frac{\partial u}{\partial s} = 2\frac{1}{\sqrt{3}} + 2\frac{1}{\sqrt{3}} + 2\frac{1}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3},$$

hau da,

$$\frac{\partial u}{\partial s} = \left|\operatorname{grad} u\right|.$$

Oharra. $u = u(x,y)$ bi aldagaiko funtzioa bada $\operatorname{grad} u = \dfrac{\partial u}{\partial x}\mathbf{i} + \dfrac{\partial u}{\partial y}\mathbf{j}$ bektorea Oxy planoan dago. Froga dezagun $\operatorname{grad} u$ $u(x,y) = c$ maila-lerroarekiko perpendikularra dela, maila-lerroa dagokion puntutik pasa eta Oxy planoan dagoelarik.

Izan ere, $u(x,y) = c$ maila-lerroaren ukitzailearen k_1 koefiziente angeluarra $k_1 = -\dfrac{u'_x}{u'_y}$ da. Gradientearen koefiziente angeluarra $k_2 = \dfrac{u'_y}{u'_x}$ da. $k_1 k_2 = -1$ dela bistakoa da, beraz

gure baieztapena egiazkoa da (181. irudia). Hiru aldagaiko funtzioari dagokion gradientearen propietate antzekoa IX. gaiko § 6 atalean ezarriko da.

2. Adibidea. Aurkitu $u = \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{3}$ (182. irudia) funtzioaren M (2,4) puntuko gradientea.

Ebazpena. Oraingoan,

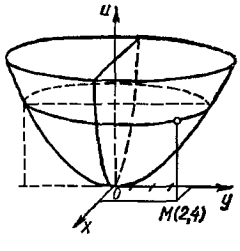
$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_M = x|_M = 2, \qquad \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_M = \left.\frac{2y}{3}\right|_M = \frac{8}{3}.$$

Hortaz,

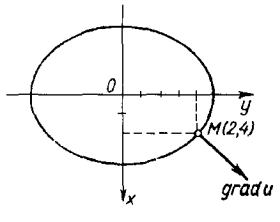
$$\operatorname{grad} u = 2\mathbf{i} + \frac{8}{3}\mathbf{j}.$$

Emandako puntutik pasatzen den maila-lerroaren ekuazioa ondokoa da (183. irudia):

$$\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{3} = \frac{22}{3}.$$



182. IRUDIA



183. IRUDIA

§ 16. Taylor-en formula bi aldagaiko funtziorako

Demagun $M(a,b)$ puntuaren ingurune batean

$$z = f(x,y)$$

bi aldagaiko funtzioa eta $(n+1)$-garren ordenarainokoa barne, beraren deribatu partzialak jarraiak direla. Orduan, aldagai bateko funtzioaren kasuan bezala (ikus IV. gaiko § 6), bi

aldagaiko funtzioa n mailako polinomio bat gehi hondarra gisa adieraz daiteke, polinomio hori $(x-a)$ eta $(y-b)$ kenduren berredura osoez osaturik. Froga dezagun $n=2$ kasurako, formula hori ondoko erakoa dela:

$$f(x,y)=A_0+D(x-a)+E(y-b)+$$
$$+\frac{1}{2!}[A(x-a)^2+2B(x-a)(y-b)+C(y-b)^2]+R_2, \qquad (1)$$

non A_0, D, E, A, B, C koefizienteak x- eta y-rekiko independenteak bait dira eta R_2 hondarrak, aldagai baterako Taylor-en formularen gai osagarriaren egitura bait du.

x aldagaia konstantea harturik, $f(x,y)$ funtzioa y aldagai bakarreko funtzio gisa har daiteke; eta beraz, Taylor-en formula aplikatuz (bigarren ordenako gaietarainokoa):

$$f(x,y)=f(x,b)+\frac{y-b}{1}f'_y(x,b)+$$
$$+\frac{(y-b)^2}{1\cdot 2}f''_{yy}(x,b)+\frac{(y-b)^3}{1\cdot 2\cdot 3}f'''_{yyy}(x,\eta) \qquad (2)$$

dugu, non $\eta=b+\theta_1(y-b)$, $0<\theta_1<1$ den. Taylor-en formula erabiliz, gara dezagun $f(x,b), f'_y(x,b), f''_{yy}(x,b)$ funtzioak $(x-a)$ gaiaren berreduretaz, hirugarren ordenako deribaturaino barne.

$$f(x,b)=f(a,b)+\frac{x-a}{1}f'_x(a,b)+\frac{(x-a)^2}{1\cdot 2}f''_{xx}(a,b)+\frac{(x-a)^3}{1\cdot 2\cdot 3}f'''_{xxx}(\xi_1,b), \qquad (3)$$

non

$$\xi_1=x+\theta_2(x-a), \qquad 0<\theta_2<1;$$

$$f'_y(x,b)=f'_y(a,b)+\frac{x-a}{1}f''_{yx}(a,b)+\frac{(x-a)^2}{1\cdot 2}f'''_{yxx}(\xi_2,b) \qquad (4)$$

eta

$$\xi_2=x+\theta_3(x-a), \qquad 0<\theta_3<1;$$

$$f''_{yy}(x,b)=f''_{yy}(a,b)+\frac{x-a}{1}f'''_{yyx}(\xi_3,b), \qquad (5)$$

eta

$$\xi_3 = x + \theta_4(x-a), \qquad 0 < \theta_4 < 1$$

diren.

(2) formulan (3), (4) eta (5) adierazpenak ordezkatuz, hauxe lortuko dugu:

$$f(x,y) = f(a,b) + \frac{x-a}{1} f_x'(a,b) + \frac{(x-a)^2}{1\cdot 2} f_{xx}''(a,b) + \frac{(x-a)^3}{1\cdot 2\cdot 3} f_{xxx}'''(\xi_1,b) +$$

$$+\frac{y-b}{1}\left[f_y'(a,b) + \frac{x-a}{1} f_{yx}''(a,b) + \frac{(x-a)^2}{1\cdot 2} f_{yxx}'''(\xi_2,b)\right] +$$

$$+\frac{(y-b)^2}{1\cdot 2}\left[f_{yy}''(a,b) + \frac{x-a}{1} f_{yyx}'''(\xi_3,b)\right] + \frac{(y-b)^3}{1\cdot 2\cdot 3} f_{yyy}'''(x,\eta).$$

Gaiak ordenatuz,

$$f(x,y) = f(a,b) + (x-a)f_x'(a,b) + (y-b)f_y'(a,b) +$$

$$+\frac{1}{2!}[(x-a)^2 f_{xx}''(a,b) + 2(x-a)(y-b)f_{xy}''(a,b) + (y-b)^2 f_{yy}''(a,b)] +$$

$$+\frac{1}{3!}[(x-a)^3 f_{xxx}'''(\xi_1,b) + 3(x-a)^2(y-b)f_{xxy}'''(\xi_2,b) +$$

$$+3(x-a)(y-b)^2 f_{xyy}'''(\xi_3,b) + (y-b)^3 f_{yyy}'''(a,\eta)] \qquad (6)$$

lortzen dugu. Hori $n = 2$ denerako Taylor-en formula da.

$$R_2 = \frac{1}{3!}[(x-a)^3 f_{xxx}'''(\xi_1,b) + 3(x-a)^2(y-b)f_{xxy}'''(\xi_2,b) +$$

$$+3(x-a)(y-b)^2 f_{xyy}'''(\xi_3,b) + (y-b)^3 f_{yyy}'''(a,\eta)]$$

adierazpenari gai osagarri deritzogu. Egin dezagun $x - a = \Delta x$, $y - b = \Delta y$, $\Delta\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$, orduan R_2-rako zera dugu:

$$R_2 = \frac{1}{3!}\left[\frac{\Delta x^3}{\Delta\rho^3} f'''_{xxx}(\xi_1, b) + 3\frac{\Delta x^2 \Delta y}{\Delta\rho^3} f'''_{xxy}(\xi_2, b) + \right.$$

$$\left. +3\frac{\Delta x \Delta y^2}{\Delta\rho^3} f'''_{xyy}(\xi_3, b) + \frac{\Delta y^3}{\Delta\rho^3} f'''_{yyy}(a, \eta)\right]\Delta\rho^3.$$

$|\Delta x| < \Delta\rho, |\Delta y| < \Delta\rho$ direnez, eta hipotesiz hirugarren deribatuak bornatuak direnez, $\Delta\rho^3$ delakoaren koefizientea azterturiko eremuan bornaturik dago. Koefiziente hori α_0 deituko dugu eta beraz, hauxe dugu:

$$R_2 = \alpha_0 \Delta\rho^3.$$

$n = 2$ denerako Taylor-en formula, (6), ondoko eran idatz daiteke:

$$f(x,y) = f(a,b) + \Delta x f'_x(a,b) + \Delta y f'_y(a,b) + \frac{1}{2!}[\Delta x^2 f''_{xx}(a,b) +$$

$$+ 2\Delta x \Delta y f''_{xy}(a,b) + \Delta y^2 f''_{yy}(a,b)] + \alpha_0 \Delta\rho^3. \qquad (6')$$

Edozein n-tarako Taylor-en formula antzekoa da.

§ 17. Aldagai anitzeko funtzioaren maximo eta minimoak

1. Definizioa. $z = f(x,y)$ funtzioak $M_0(x_0, y_0)$ puntuan (hots, $x = x_0$ eta $y = y_0$ direnean) maximoa duela esango dugu, baldin (x_0, y_0) puntutik aski hurbil dauden (x,y) puntu guztiek, (x_0, y_0) bera izan ezik,

$$f(x_0, y_0) > f(x,y)$$

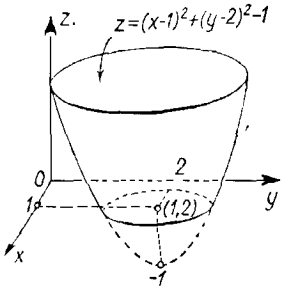
desberdintza betetzen badute.

2. Definizioa. Era berean, $z = f(x,y)$ funtzioak $M_0(x_0, y_0)$ puntuan minimoa duela esango dugu, baldin (x_0, y_0) puntutik aski hurbil dauden (x,y) puntu guztiek, (x_0, y_0) bera izan ezik,

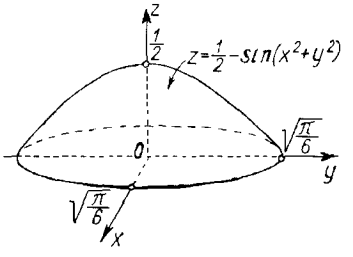
$$f(x_0, y_0) < f(x,y)$$

desberdintza egiaztatzen badute.

Funtzioaren maximo eta minimoei *mutur* deritzegu; beraz, funtzioak emandako puntu batean muturra izango du, puntu horretan maximo edo minimo bat duenean.



184. IRUDIA



185. IRUDIA

1. Adibidea. $z=(x-1)^2+(y-2)^2-1$ funtzioak $x=1,\ y=2$ balioetarako minimoa agertzen du, hots, (1,2) puntuan. Izan ere, $f(1,2)=-1$ da eta $(x-1)^2$ eta $(y-2)^2$ beti positiboak direnez, $x\neq 1,\ y\neq 2$ balioetarako

$$(x-1)^2+(y-2)^2-1>-1$$

dugu; hau da,

$$f(x,y)>f(1,2).$$

184. irudian emaitza horren adierazpen geometrikoa dugu.

2. Adibidea. $z=\dfrac{1}{2}-\sin\,(x^2+y^2)$ funtzioak $x=0,\ y=0$ balioetan maximoa hartzen du, hau da, koordenatu-jatorrian (ikus 185. irudia).

Izan ere,

$$f(0,0)=\frac{1}{2}.$$

$x^2 + y^2 = \frac{\pi}{6}$ gainazalaren barnean, har dezagun $(0,0)$ puntua ez den (x, y) puntua; orduan $0 < x^2 + y^2 < \frac{\pi}{6}$ desberdintzarako

$$\sin\ (x^2 + y^2) > 0$$

dugu, eta beraz,

$$f(x, y) = \frac{1}{2} - \sin\ (x^2 + y^2) < \frac{1}{2},$$

hots,

$$f(x, y) < f(0, 0).$$

Funtzioaren maximo eta minimoaren definizioak ondoko eran adieraz daitezke:

Egin ditzagun

$$x = x_0 + \Delta x; \qquad y = y_0 + \Delta y;$$

orduan:

$$f(x, y) - f(x_0, y_0) = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) = \Delta f.$$

1) Aldagai independenteen gehikuntza aski txiki guztietarako $\Delta f < 0$ bada, $f(x, y)$ funtzioak $M_0(x_0, y_0)$ puntuan *maximo* bat agertuko du.

2) Aldagai independenteen gehikuntza aski txiki guztietarako $\Delta f > 0$ bada, $f(x, y)$ funtzioak $M_0(x_0, y_0)$ puntuan *minimo* bat agertuko du.

Definizio horiek baliagarriak dira edozein aldagai-kopurutako funtziorako.

1. Teorema (Baldintza beharrezkoak muturraren existentziarako).

Baldin $z = f(x, y)$ funtzioak $x = x_0$, $y = y_0$ balioetarako muturra badu, z-ren lehen ordenako deribatu partzialak (x_0, y_0) puntuan edo anulatuko dira edo ez dira existituko.

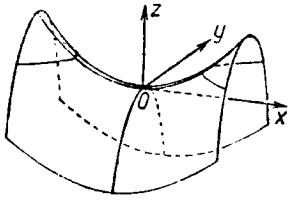
Har dezagun y aldagaiaren balio bat, y_0. Orduan $f(x, y_0)$ x aldagai bakarreko funtzioa izango da. Funtzio horrek $x = x_0$ balioan mutur bat (maximo edo minimoa)

duenez, $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_{\substack{x=x_0\\ y=y_0}}$ zero izango da edo ez da existituko. Modu berean, $\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_{\substack{x=x_0\\ y=y_0}}$ zero dela edo existitzen ez dela froga daiteke.

Teorema horrek funtzioaren mutur-balioen existentziarako baldintza nahikorik ez digu azaltzen. Baina existitzen badira, teoremak, beroriek kalkulatzeko bidea aurkeztu digu. Aurkako kasuan, beharrezkoa egingo da azterketa zehatzagoa.

Horrela, adibidez, $z = x^2 - y^2$ funtzioaren deribatuak, $\frac{\partial z}{\partial x} = +2x$; $\frac{\partial z}{\partial y} = -2y$, $x = 0, y = 0$ balioetarako anulatzen dira.

Aipatutako balioetarako, aldiz, funtzioak ez du ez maximo ez minimorik. Izan ere, funtzio hori zero da koordenatu-jatorrian, baina puntu horren ingurunean funtzioak bai balio positiboak eta bai negatiboak hartzen ditu. Beraz, zero balioa ez da ez maximoa ez minimoa (186. irudia).



186. IRUDIA

Deribatu partzialak existitzen ez diren edo $\frac{\partial z}{\partial x} = 0$ $\frac{\partial z}{\partial y} = 0$ ekuazioak egiaztatzen diren puntuak, $z = f(x, y)$ funtzioaren puntu *kritiko* deituko ditugu.

Funtzioak muturra punturen batean lortzen badu, hori (1. teoremaren arabera) puntu kritikoan soilik gerta daiteke.

Ezar dezagun orain, muturraren existentziarako baldintza nahikoak bi aldagaiko funtzioaren kasurako.

2. Teorema. Biz $f(x, y)$ funtzioa, $M_0(x_0, y_0)$ puntua bere barnean duen eremu batean definitua eta demagun funtzio horren hirugarren ordenarainoko deribatu partzialak, horiek barne, jarraiak direla. Demagun, halaber, $M_0(x_0, y_0)$ $f(x, y)$ funtzioaren puntu kritikoa dela, hots,

$$\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}=0, \qquad \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}=0.$$

Orduan, $M_0(x_0,y_0)$ puntuan:

1) $f(x,y)$ funtzioak maximoa du baldin

$$\frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial x\partial y}\right)^2>0$$

eta

$$\frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial x^2}<0$$

betetzen badira.

2) $f(x,y)$ funtzioak minimoa du baldin

$$\frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial x\partial y}\right)^2>0$$

eta

$$\frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial x^2}>0$$

betetzen badira.

3) $f(x,y)$ funtzioak ez du ez maximo ez minimorik baldin

$$\frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial x\partial y}\right)^2<0$$

egiaztatzen bada.

4) Baldin

$$\frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial x\partial y}\right)^2=0$$

bada, muturra existitzea edo ez existitzea gerta daiteke (kasu horretan azterketa zehatzagoa egin beharko da).

Frogapena. Idatz dezagun $f(x,y)$ funtzioaren bigarren ordenarainoko Taylor-en formula (§ 16, (6) formula).

$$a = x_0, \quad b = y_0, \quad x = x_0 + \Delta x, \quad y = y_0 + \Delta y$$

eginez, zera dugu:

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}\Delta y +$$

$$+\frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x^2}\Delta x^2 + 2\frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x \partial y}\Delta x \Delta y + \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial y^2}\Delta y^2\right] + \alpha_0(\Delta\rho)^3,$$

non $\Delta\rho \to 0$ denean $\Delta\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$ eta α_0 delakoek limitetzat zero duten.

Hipotesiz,

$$\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} = 0.$$

Beraz,

$$\Delta f = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) =$$

$$= \frac{1}{2!}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\Delta x^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\Delta x \Delta y + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\Delta y^2\right] + \alpha_0(\Delta\rho)^3. \qquad (1)$$

$M_0(x_0, y_0)$ puntuan bigarren deribatu partzialen balioak A, B, C izendatuko ditugu, hots,

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_{M_0} = A; \qquad \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)_{M_0} = B; \qquad \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)_{M_0} = C.$$

Biz φ, Ox ardatzak eta M_0M zuzenkiak osotutako angelua, $M = M(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$ puntua izanik; beraz,

$$\Delta x = \Delta\rho\cos\varphi; \quad \Delta y = \Delta\rho\sin\varphi.$$

Adierazpen horiek (1) formulan ordezkatuz, ondokoa lortzen dugu

$$\Delta f = \frac{1}{2}(\Delta\rho)^2[A\cos^2\varphi + 2B\cos\varphi\sin\varphi + C\sin^2\varphi + 2\alpha_0\Delta\rho]. \qquad (2)$$

Demagun $A \neq 0$ dela.

Kortxeteen arteko adierazpena A-rekin zatituz eta biderkatuz, zera dugu:

$$\Delta f = \frac{1}{2}(\Delta\rho)^2\left[\frac{(A\cos\varphi + B\sin\varphi)^2 + (AC - B^2)\sin^2\varphi}{A} + 2\alpha_0\Delta\rho\right]. \qquad (3)$$

Azter ditzagun orain ager daitezkeen lau kasuak:

1) $AC - B^2 > 0$, $A < 0$. Orduan frakzioaren zenbakitzailean bi magnitude ez-negatiboen batura izango dugu. Horiek ez dira batera anulatzen; lehen gaia $\tan\varphi = -\frac{A}{B}$ denean anulatuko da, eta bigarrena, $\sin\varphi = 0$ denean.

Baldin $A < 0$ bada, frakzioa magnitude negatibo ez-nulua izango da eta $-m^2$ adieraziko dugu; beraz,

$$\Delta f = \frac{1}{2}(\Delta\rho)^2\left[-m^2 + 2\alpha_0\Delta\rho\right]$$

lortzen dugu, m $\Delta\rho$-rekiko independentea izanik eta $\Delta\rho \to 0$ eginez, $\alpha_0\Delta\rho \to 0$ dugularik. Beraz, $\Delta\rho$ aski txikia denean hauxe izango dugu:

$$\Delta f < 0,$$

hots,

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) < 0.$$

Kasu horretan (x_0, y_0) puntutik aski hurbil dauden $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$ puntu guztietarako

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) < f(x_0, y_0)$$

dugu, hots, (x_0, y_0) puntuan $f(x, y)$ funtzioak maximo bat du.

2) $AC - B^2 > 0$, $A > 0$. Aurreko kasuan bezala aztertuz,

$$\Delta f = \frac{1}{2}(\Delta\rho)^2\left[m^2 + 2\alpha_0\Delta\rho\right]$$

dugu, hots,

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) > f(x_0, y_0),$$

eta beraz, (x_0, y_0) puntuan $f(x, y)$ funtzioak minimo bat izango du.

3') Biz $AC - B^2 < 0$, $A > 0$. Kasu horretan funtzioak ez du ez maximo ez minimorik (x_0, y_0) puntuan. Funtzioa gorakorra da (x_0, y_0)-tik abiatzen diren norabide batzuetan zehar eta beherakorra beste batzuetan. Izan ere, $\varphi = 0$ norabidean zehar mugitzen denean funtzioa gorakorra da:

$$\Delta f = \frac{1}{2}(\Delta\rho)^2\left[A + 2\alpha_0\Delta\rho\right] > 0;$$

$A > 0$ denerako $\tan\varphi_0 = -\dfrac{A}{B}$ harturik, $\varphi = \varphi_0$ norabidean zehar mugitzen denean funtzioa beherakorra da:

$$\Delta f = \frac{1}{2}(\Delta\rho)^2\left[\frac{AC - B^2}{A}\sin^2\varphi_0 + 2\alpha_0\Delta\rho\right] < 0.$$

3") $AC - B^2 < 0$, $A < 0$. Kasu horretan funtzioak ez du ez maximo ez minimorik (x_0, y_0) puntuan. Azterketa 3') kasuko modukoa da.

3'") $AC - B^2 < 0$, $A = 0$. Orduan $B \neq 0$ izango da eta (2) berdintza ondoko eran idatziko da:

$$\Delta f = \frac{1}{2}(\Delta\rho)^2\left[\sin\varphi(2B\cos\varphi + C\sin\varphi) + 2\alpha_0\Delta\rho\right].$$

φ zerotik aski hurbila denean, $(2B\cos\varphi + C\sin\varphi)$ adierazpena $2B$-ren inguruan dago eta beraz, beraren zeinua mantentzen du. $\sin\varphi$ biderkagaiaren zeinua, aldiz, aldatuko da φ zero baino handiagoa edo txikiagoa izatearen arabera. Bestalde $\Delta\rho$ behar den bezain txikia hartuz, $2\alpha_0$ gaiak ez du eraginik izango kortxeteen arteko

adierazpenaren zeinuan. Beraz, φ desberdinetarako, hots, Δx eta Δy desberdinetarako, Δf zeinuz aldatuko da. Horrek funtzioak (x_0, y_0) puntuan ez duela ez maximo ez minimorik adierazten digu.

Honelatan ba, edozein A-tarako ondoko baieztapena dugu:

(x_0, y_0) puntuan $AC - B^2 < 0$ denean, funtzioak ez du ez maximo ez minimorik puntu horretan. Eta puntu horren ingurune batean funtzioaren adierazpen grafikoa zela baten itxurakoa izango da (ikus 186. irudia). Funtzioak puntu horretan "*mini-max*" duela esango dugu.

4) Biz $AC - B^2 = 0$. Kasu horretan (2) eta (3) formulek ez digute Δf-ren zeinuari buruzko informaziorik ematen. Adibidez, $A \neq 0$ denerako zera dugu:

$$\Delta f = \frac{1}{2}(\Delta\rho)^2\left[\frac{(A\cos\varphi + B\sin\varphi)^2}{A} + 2\alpha_0\Delta\rho\right];$$

eta $\varphi = \arctan\left(-\frac{A}{B}\right)$ baliorako, Δf-ren zeinua $2\alpha_0$ delakoaren zeinuaren arabera finkatuko da. Beraz, Δf-ren zeinua ezagutzeko azterketa berezia beharrezkoa izango da (adibidez, Taylor-en formularen bidez edo beste prozedura baten bidez). Honelatan ba, 2. teorema osoa frogaturik geratu da.

3. Adibidea. Aurkitu hurrengo funtzioaren maximo eta minimoak:

$$z = x^2 - xy + y^2 + 3x - 2y + 1.$$

Ebazpena. 1) Aurki ditzagun puntu kritikoak:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x - y + 3; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -x + 2y - 2.$$

Eta

$$\left.\begin{aligned} 2x - y + 3 = 0, \\ -x + 2y - 2 = 0, \end{aligned}\right\}$$

ekuazio-sistema ebatziz,

$$x = -\frac{4}{3}; \quad y = \frac{1}{3}$$

lortzen ditugu.

2) Aurki ditzagun bigarren ordenako deribatuak $\left(-\frac{4}{3};\ \frac{1}{3}\right)$ puntu kritikoan eta lor dezagun puntu kritiko horren izaera:

$$A = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2; \quad B = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -1; \quad C = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2;$$

$$AC - B^2 = 2 \cdot 2 - (-1)^2 = 3 > 0.$$

Beraz, $\left(-\frac{4}{3};\ \frac{1}{3}\right)$ puntuan emandako funtzioak

$$z_{\min} = -\frac{4}{3}$$

balio minimoa hartzen du.

4. Adibidea. Kalkulatu ondoko funtzioaren maximo eta minimoak:

$$z = x^3 + y^3 - 3xy.$$

Ebazpena. 1) Kalkula ditzagun puntu kritikoak muturraren existentziarako baldintza beharrezkoak erabiliz

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= 3x^2 - 3y = 0, \\ \frac{\partial z}{\partial y} &= 3y^2 - 3x = 0. \end{aligned}\right\}$$

Hortik bi puntu kritiko lortuko dira:

$$x_1 = 1,\ y_1 = 1 \quad \text{eta} \quad x_2 = 0,\ y_2 = 0.$$

2) Kalkula ditzagun bigarren ordenako deribatuak:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6x, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -3, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 6y.$$

3) Azter dezagun lehendabiziko puntu kritikoaren izaera:

$$A=\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)_{\substack{x=1\\y=1}}=6;\quad B=\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right)_{\substack{x=1\\y=1}}=-3;\quad C=\left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)_{\substack{x=1\\y=1}}=6;$$

$$AC-B^2=36-9=27>0;\ A>0.$$

Beraz, emandako funtzioak (1,1) puntuan minimoa izango du:

$$z_{\min}=-1.$$

4) Azter dezagun $M_2(0,0)$ puntu kritikoaren izaera:

$$A=0;\ B=-3;\ C=0;$$

$$AC-B^2=-9<0.$$

Beraz, bigarren puntu kritikoan funtzioak ez du ez maximo ez minimorik (mini--max).

5. Adibidea. Deskonposatu emandako a zenbaki positiboa hiru batugai positibotan, horien arteko biderkadurak balio maximoa har dezan.

Ebazpena. Hiru zenbaki horiek x, y eta $a-x-y$ izendatuko ditugu. Batugai horien biderkadura ondoko hauxe da:

$$u=xy(a-x-y).$$

Hipotesiaren arabera, $x>0$, $y>0$, $a-x-y>0$, hots, $x+y<a$, $u>0$. Beraz, x eta y aldagaiek $x=0$, $y=0$, $x+y=a$ zuzenek mugatutako eremuan hartuko dituzte beraien balioak.

Kalkula ditzagun u funtzioaren deribatu partzialak:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=y(a-2x-y),$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=x(a-2y-x).$$

Deribatu horiek berdin zero eginez, ondoko ekuazio-sistema lortuko dugu:

$$y(a-2x-y)=0; \quad x(a-2y-x)=0.$$

Sistema hori ebatziz, ondoko puntu kritikoak aurkituko ditugu:

$$x_1=0, \qquad y_1=0, \qquad M_1(0,0);$$

$$x_2=0, \qquad y_2=a, \qquad M_2(0,a);$$

$$x_3=a, \qquad y_3=0, \qquad M_3(a,0);$$

$$x_4=\frac{a}{3}, \qquad y_4=\frac{a}{3}, \qquad M_4\left(\frac{a}{3},\frac{a}{3}\right).$$

Lehendabiziko hiru puntuak eremuaren mugan daude eta azkena barnean. Eremuaren mugan u funtzioa zero egiten da eta barnean funtzio positiboa da; beraz, u funtzioak $\left(\frac{a}{3},\frac{a}{3}\right)$ puntuan maximoa du (puntu hori triangeluaren barneko mutur-puntu bakarra delako). Biderkaduraren balio maximoa hauxe da:

$$u_{\max}=\frac{a}{3}\frac{a}{3}\left(a-\frac{a}{3}-\frac{a}{3}\right)=\frac{a^3}{27}.$$

Azter dezagun puntu kritikoaren izaera, muturraren existentziarako baldintza beharrezko eta nahikoak erabiliz. Kalkula ditzagun u funtzioaren bigarren ordenako deribatu partzialak:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=-2y; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=a-2x-2y; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=-2x.$$

$M_1(0,0)$puntuan $A=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0;\ B=\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=a;\ C=\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0;\ AC-B^2=-a^2<0$ dugu; beraz M_1 puntuan ez dago ez maximo ez minimorik. $M_2(0,a)$ puntuan

$A=\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=-2a;\ B=\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=-a;\ C=\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0;\ AC-B^2=-a^2<0$ dugu; beraz, M_2 puntuan ez dago ez maximo ez minimorik. $M_3(a,0)$ puntuan $A=0;\ B=-a;\ C=-2a;$ $AC-B^2=-a^2<0$ dugu eta M_3 puntuan ez da egongo ez maximo ez minimorik.

$M_4\left(\dfrac{a}{3},\dfrac{a}{3}\right)$ puntuan

$$A=-\frac{2a}{3};\ B=-\frac{a}{3};\ C=-\frac{2a}{3};\ AC-B^2=\frac{4a^2}{9}-\frac{a^2}{9}>0;\ A<0$$

dugunez, funtzioak M_4 puntuan balio maximoa hartuko du.

Oharra. Aldagai anitzeko funtzioen maximo eta minimoei buruzko teoria, datu esperimentaletatik abiatuz menpekotasun funtzionala adierazten duen legea lortzeko metodo baten oinarri gisa erabil dezakegu. "Datu esperimentalak erabiliz, karratu txikienen metodoaren bidezko funtzioaren lorpena" izeneko problema gai honen § 19 atalean azalduko da.

§ 18. Emandako ekuazioen bidez erlazionatutako aldagai anitzeko funtzioaren maximo eta minimoak (maximo eta minimo baldintzatuak)

Funtzioaren balio maximo eta minimoen aurkikuntzari buruzko problemetan, sarritan, funtzioaren aldagaiak ez dira independenteak, erlazionaturik daude baldintza batzuren bidez (adibidez, ekuazio batzuk bete behar dituztenean).

Demagun adibidez hurrengo problema. $2a$ azalerako xafla-zati batez paralelepipedo itxurako kutxa itxia eraiki nahi dugu, beraren bolumena maximoa izanik.

Kutxaren luzera, zabalera eta altuera x, y, eta z izendatuko ditugu, hurrenez hurren. Orduan, problema

$$v=xyz$$

funtzioaren maximoa lortzea izango da, $2xy+2xz+2yz=2a$ baldintzapean. Horixe mutur baldintzatuen problema da, x, y, eta z aldagaiak $2xy+2xz+2yz=2a$ ekuazioaz erlazionaturik daudelako.

Atal honetan horrelako problemak ebazteko erabili ohi diren metodoak aztertuko ditugu.

Lehenbizi baldintza bakarrez erlazionaturik dauden bi aldagaiko funtzioaren muturren problema aztertuko dugu. Kalkula ditzagun

$$u = f(x, y) \tag{1}$$

funtzioaren maximo eta minimoak, x eta y aldagaiak

$$\varphi(x, y) = 0 \tag{2}$$

ekuazioaren bidez erlazionatuak izanik. (2) baldintza dugunez, x eta y aldagaietatik independente bat soilik izan daiteke, adibidez x, (2) ekuazioaren bidez y, x-ren funtzio gisa defini bait daiteke. (2) ekuazioa y-rekiko ebatziz eta emaitza (1) berdintzan ordezkatuz, x aldagaiaren funtzio bat lortuko dugu eta beraz, gure problema x aldagai independente bakarreko funtzioaren maximo eta minimoen azterketa bihurtuko da.

(2) ekuazioa ebatzi barik ere, aipaturiko problema ebatz dezakegu. x-rekiko u-ren deribatua nulua izango da, u funtzioak balio maximo edo minimo hartzen dituen x puntuetan.

(1) ekuaziotik kalkula dezagun $\dfrac{du}{dx}$, y aldagaia x-ren funtzioa dela kontutan harturik

$$\frac{du}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\,\frac{dy}{dx}.$$

Beraz, mutur-puntuetan hauxe beteko da:

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\,\frac{dy}{dx} = 0. \tag{3}$$

(2) berdintza deribatuz:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\,\frac{dy}{dx} = 0 \tag{4}$$

dugu. (4) berdintza (2) ekuazioa betetzen duten x eta y balio guztietarako baliozkoa da (ikus VIII. gaiko § 11). (4) berdintza λ koefiziente indeterminatuaz biderkatu ondoren (3) berdintzarekin gehitzen badugu, zera lortuko dugu:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx}\right)+\lambda\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}+\frac{\partial \varphi}{\partial y}\frac{dy}{dx}\right)=0$$

edo

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}+\lambda\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)+\left(\frac{\partial f}{\partial y}+\lambda\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)\frac{dy}{dx}=0. \tag{5}$$

Berdintza hori mutur bat dagoen puntu guztietan beteko da. Aukera dezagun λ koefizientea, u funtzioaren mutur bati dagozkion x eta y balioetarako, (5) formularen $\left(\frac{\partial f}{\partial y}+\lambda\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)$ adierazpena nulua[3] izan dadin, hau da,

$$\frac{\partial f}{\partial y}+\lambda\frac{\partial \varphi}{\partial y}=0.$$

Orduan, x eta y-ren balio horietarako, (5) berdintzatik zera ondorioztatzen da:

$$\frac{\partial f}{\partial x}+\lambda\frac{\partial \varphi}{\partial x}=0.$$

Horrela, mutur-puntuetan hiru ekuazioak egiaztatzen dira:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}+\lambda\frac{\partial \varphi}{\partial x}&=0,\\ \frac{\partial f}{\partial y}+\lambda\frac{\partial \varphi}{\partial y}&=0,\\ \varphi(x,y)&=0.\end{aligned}\right\} \tag{6}$$

ezezagunak x, y eta λ izanik. Ekuazio horietatik x, y eta λ aurkituko ditugu.

---

3) Ideiak finkatzeko, puntu kritikoetan $\frac{\partial \varphi}{\partial y}\neq 0$ betetzen dela suposatuko dugu.

Bistakoa da (6) ekuazioak mutur baldintzatuen existentziarako baldintza beharrezkoak direla; hau da, mutur-puntu guztietan (6) ekuazioak egiaztatzen dira. Elkarrekiko proposamena ez da betetzen, (6) ekuazioak egiaztatzen dituzten x, y eta λ-ren balioetan funtzioak muturrik izan behar ez duelako. Beraz, puntu kritikoari buruz beste ikerketa egin beharra dugu. Problema konkretu batzuetan, puntu kritikoen izaerak problemaren ezaugarrien arabera muga daitezke. Kontutan har dezagun (6) ekuazioen lehen gaiak

$$F(x,y,\lambda) = f(x,y) + \lambda\varphi(x,y) \tag{7}$$

funtzioaren x, y eta λ aldagaiekiko deribatu partzialak direla.

Honela, (2) baldintza egiaztatzen dituzten x eta y-ren balioak kalkulatzeko, puntu horietan $u = f(x,y)$ funtzioak maximo edo minimo baldintzatua izanik, (7) funtzio laguntzailea osotu behar dugu. Beraren x, y eta λ-rekiko deribatu partzialak zerorekin berdindu eta (6) ekuazioen ezezagunak kalkulatu. Erabilitako metodoa edozein aldagai--kopurutako funtzioaren mutur baldintzatuen ikerketara heda daiteke.

Demagun n aldagaiko $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ funtzioaren maximo eta minimoak kalkulatu behar ditugula, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ aldagaien arteko baldintzak ondoko m $(m < n)$ ekuazioak izanik:

$$\left.\begin{array}{l} \varphi_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0, \\ \varphi_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \varphi_m(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0. \end{array}\right\} \tag{8}$$

Mutur baldintzatuak kalkulatzeko, hurrengo funtzioa kontsideratuko dugu:

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n, \lambda_1, \ldots, \lambda_m) = f(x_1, \ldots, x_n) + \lambda_1\varphi_1(x_1, \ldots, x_n) +$$

$$+\lambda_2\varphi_2(x_1, \ldots, x_n) + \ldots + \lambda_m\varphi_m(x_1, \ldots, x_n),$$

eta beraren $x_1, x_2, \ldots, x_n$-rekiko deribatu partzialak zerorekin berdindu:

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{\partial f}{\partial x_1}+\lambda_1\dfrac{\partial \varphi_1}{\partial x_1}+\ldots+\lambda_m\dfrac{\partial \varphi_m}{\partial x_1}=0,\\ \dfrac{\partial f}{\partial x_2}+\lambda_1\dfrac{\partial \varphi_1}{\partial x_2}+\ldots+\lambda_m\dfrac{\partial \varphi_m}{\partial x_2}=0,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \dfrac{\partial f}{\partial x_n}+\lambda_1\dfrac{\partial \varphi_1}{\partial x_n}+\ldots+\lambda_m\dfrac{\partial \varphi_m}{\partial x_n}=0.\end{array}\right\} \qquad (9)$$

(8) eta (9) formuletako $m+n$ ekuazioak ebatziz, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ eta $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ ezezagunak kalkulatuko ditugu. Bi aldagaiko funtzioaren kasuan bezala, funtzioaren maximo edo minimo baldintzatuen existentzia lortutako puntuetan ebatzi gabe dugu.

Arazo hori propietate laguntzaileen bidez ebatziko dugu.

1. Adibidea. Atal honen hasieran aipaturiko problemara itzuliz:

Kalkulatu

$$v = xyz$$

funtzioaren maximoa

$$xy + xz + yz - a = 0 \quad (x > 0, y > 0, z > 0) \qquad (10)$$

baldintzapean.

Ondoko funtzio laguntzailea hartuko dugu:

$$F(x, y, z, \lambda) = xyz + \lambda(xy + xz + yz - a).$$

Beraren deribatu partzialak kalkulatuz eta zerorekin berdinduz,

$$\left.\begin{array}{l} yz + \lambda(y+z) = 0,\\ xz + \lambda(x+z) = 0,\\ xy + \lambda(x+y) = 0.\end{array}\right\} \qquad (11)$$

Problema x, y, z eta λ lau ezezaguneko (10) eta (11) lau ekuazioetako sistemaren ebazpena izango da. Sistema horren ebazpena (11)-ren lehen ekuazioa x-rekin biderkatuz, bigarrena y-rekin, hirugarrena z-rekin eta lortutako adierazpenak batuz lortuko dugu.

(10) berdintza kontutan hartuz, $\lambda = -\dfrac{3xyz}{2a}$ kalkulatzen dugu. (11) ekuazioan lortutako λ-ren balioa ordezkatuz,

$$yz\left[1-\frac{3x}{2a}(y+z)\right]=0,$$

$$xz\left[1-\frac{3y}{2a}(x+z)\right]=0,$$

$$xy\left[1-\frac{3z}{2a}(x+y)\right]=0$$

lortzen dugu. Problemaren ezaugarrien arabera, x, y eta z zero ez direnez, azkeneko ekuazioetatik:

$$\frac{3x}{2a}(y+z)=1,\quad \frac{3y}{2a}(x+z)=1,\quad \frac{3z}{2a}(x+y)=1$$

ondorioztatzen da.

Lehen bi ekuazioetatik $x=y$ lortzen dugu, eta bigarren eta hirugarrenetik $y=z$.

Eta kasu horretan, (10) ekuaziotik $x=y=z=\sqrt{\dfrac{a}{3}}$ ondorioztatzen da. Horrela, funtzioak har ditzakeen balio maximo edo minimoa puntu horretan hartuko du.

Puntu hori maximoa dela froga daiteke, baina ezaugarri geometriko batzuk erabiliz zuzenean ondorioztatuko dugu: problemaren baldintzen arabera, kutxaren bolumena ezin da infinitu izan; beraz, beraren aldeen balio batzuetarako bolumena maximoa izan behar da.

Honela, kutxa $\sqrt{\dfrac{a}{3}}$ aldeko kuboa denean, bolumena maximoa izango da.

2. Adibidea. Kalkulatu $x_1, x_2, \ldots, x_n$ zenbaki positiboen biderkaduraren n--garren erroaren balio maximoa, zenbaki horien batuketa berdin a zenbakia deneko baldintzapean. Beraz, problema honela plantea daiteke: kalkulatu $u=\sqrt{x_1\cdot x_2\cdot\ldots\cdot x_n}$ funtzioaren maximoa, ondoko baldintza egiaztaturik

$$x_1+x_2+\ldots+x_n-a=0$$

$$(x_1 > 0,\ x_2 > 0,\ \ldots,\ x_n > 0). \tag{12}$$

Har dezagun hurrengo funtzio laguntzailea:

$$F(x_1,\ldots,x_n,\lambda) = \sqrt[n]{x_1\cdot\ldots\cdot x_n} + \lambda(x_1 + x_2 + \ldots + x_n - a).$$

Beraren deribatu partzialak kalkulatuz,

$$F'_{x_1} = \frac{1}{n}\frac{x_2x_3\cdot\ldots\cdot x_n}{(x_1\cdot\ldots\cdot x_n)^{\frac{n-1}{n}}} + \lambda = \frac{1}{n}\frac{u}{x_1} + \lambda = 0 \qquad \text{edo} \qquad u = -n\lambda x_1,$$

$$F'_{x_2} = \frac{1}{n}\frac{u}{x_2} + \lambda = 0 \qquad \text{edo} \qquad u = -n\lambda x_2,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$F'_{x_n} = \frac{1}{n}\frac{u}{x_n} + \lambda = 0 \qquad \text{edo} \qquad u = -n\lambda x_n.$$

Azkenengo ekuazioetatik zera dugu:

$$x_1 = x_2 = \ldots = x_n,$$

eta (12) ekuaziotik

$$x_1 = x_2 = \ldots = x_n = \frac{a}{n}$$

lortzen dugu. Problemaren berezitasunek puntu horretan $\sqrt{x_1 \cdot x_2\cdot\ldots\cdot x_n}$ funtzioak $\frac{a}{n}$ balio maximoa duela ziurtatzen digute. Beraz, $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = a$ baldintzaz erlazionaturiko $x_1, x_2, \ldots, x_n$ zenbaki positibo guztietarako

$$\sqrt[n]{x_1\cdot\ldots\cdot x_n} \le \frac{a}{n} \tag{13}$$

desberdintza betetzen da (frogatu dugunez funtzio horren balio maximoa $\frac{a}{n}$ bait da).

(13) desberdintzan, a delakoa (12) ekuaziotik ondorioztatzen den beraren adierazpenaz ordezkatuz, zera lortzen dugu:

$$\sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n} \leq \frac{x_1 + \ldots + x_n}{n}. \qquad (14)$$

Ekuazio hori edozein $x_1, x_2, \ldots, x_n$ zenbaki positibotarako baliozkoa da. (14) berdintzaren lehen atalari zenbaki horien *batezbesteko geometriko* deritzogu. Honela, zenbaki positiboen kopuru finituaren batezbesteko geometrikoa ez da beraien batezbesteko aritmetikoa baino handiagoa izango.

§ 19. Datu esperimentalak erabiliz, karratu txikienen metodoaren bidezko funtzioaren lorpena

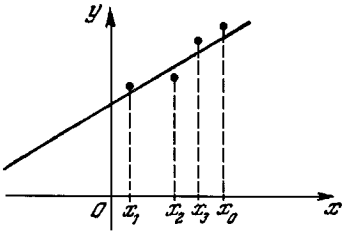
Demagun x eta y aldagaien arteko menpekotasuna esperimentalki aurkitu nahi dugula, hots,

$$y = \varphi(x). \qquad (1)$$

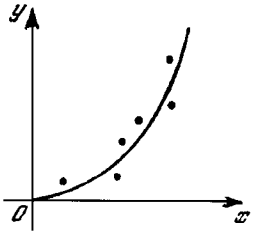
Demagun orain esperimentuaren ondorioz, x aldagaiaren n balioei dagozkien y funtzioaren balioak lortu ditugula; horiek, ondokoak direlarik:

x	x_1	x_2	...	x_n
y	y_1	y_2	...	y_n

$y = \varphi(x)$ funtzioa, bai teorikoki bai plano gainean datu esperimentalei dagozkien puntuen kokapena aztertuz aurki dezakegu. Puntu horiei esperimental deritze.



187. a IRUDIA



187. b IRUDIA

Demagun puntu horien banaketa planoan 187a. irudian adierazitakoa dela. Esperimentuetan lortutako datuak zehatzak ez direnez, $y = \varphi(x)$ funtzio ezezaguna, $y = ax + b$ funtzio lineala dela suposa daiteke.

Datu esperimentalen banaketa 187b. irudikoa bada, berezkoa da $y = \varphi(x)$ funtzioa $y = ax^b$ erako funtzioa bilatzea; eta abar. $y = \varphi(x, a, b, c, \ldots)$ funtzioaren forma ikusi ondoren, a, b, c, ... parametroak aurkitu beharko ditugu, funtzioak aztertutako fenomenoa ahalik eta hoberen adieraz dezan.

Aipatutako problemaren ebazpena lortzeko, gehien erabilitako metodoa *karratu txikienena* da, horixe jarraian adieraziko delarik.

Har dezagun esperimentalki lortutako y_i balioaren eta $\varphi(x_i, a, b, c, \ldots)$ balioaren arteko kenduraren karratua, eta ondoren, karratu horien batura:

$$S(a,b,c,\ldots) = \sum_{i=1}^{n} [y_i - \varphi(x_i, a, b, c, \ldots)]^2. \tag{2}$$

Aukera ditzagun a, b, c, ... parametroak batura horrek balio minimoa har dezan:

$$S(a,b,c,\ldots) = \sum_{i=1}^{n} [y_i - \varphi(x_i, a, b, c, \ldots)]^2 = \min. \tag{3}$$

Beraz, problema orain hauxe da: a, b, c, ... parametroak aurkitzea zeinetan $S(a,b,c,\ldots)$ funtzioak balio minimoa hartzen duen.

§ 17 ataleko 1. teoremaren arabera, aurkitu nahi ditugun a, b, c, ... balioek ondoko ekuazio-sistema beteko dute:

$$\frac{\partial S}{\partial a} = 0, \quad \frac{\partial S}{\partial b} = 0, \quad \frac{\partial S}{\partial c} = 0, \quad \ldots, \tag{4}$$

hots,

$$\left.\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{n}[y_i - \varphi(x_i,a,b,c,\ldots)]\frac{\partial\varphi(x_i,a,b,c,\ldots)}{\partial a} = 0,\\
&\sum_{i=1}^{n}[y_i - \varphi(x_i,a,b,c,\ldots)]\frac{\partial\varphi(x_i,a,b,c,\ldots)}{\partial b} = 0,\\
&\sum_{i=1}^{n}[y_i - \varphi(x_i,a,b,c,\ldots)]\frac{\partial\varphi(x_i,a,b,c,\ldots)}{\partial c} = 0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

Hor, ekuazio-kopurua eta ezezagun-kopurua berdinak dira. Kasu horretan aztergai bi ditugu: (5) ekuazio-sistemaren soluzioaren existentzia eta $S(a,b,c,\ldots)$ funtzioaren minimoarena.

Aztertuko ditugu $y = \varphi(x,a,b,c,\ldots)$ funtzioaren adibide batzuk.

I. Biz $y = ax + b$. Orduan, $S(a,b)$ funtzioa ondokoa izango da (ikus (2) adierazpena):

$$S(a,b) = \sum_{i=1}^{n}[y_i - (ax_i + b)]^2. \qquad (6)$$

Hori bi aldagaiko funtzioa da, a eta b; x_i eta y_i emandako zenbakiak izanik. Beraz,

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial S}{\partial a} = -2\sum_{i=1}^{n}[y_i - (ax_i + b)]x_i = 0,\\
&\frac{\partial S}{\partial b} = -2\sum_{i=1}^{n}[y_i - (ax_i + b)] = 0,
\end{aligned}\right\}$$

eta kasu honetan (5) ekuazio-sistema hauxe izango da:

$$\left.\begin{aligned}&\sum_{i=1}^{n} y_i x_i - a\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - b\sum_{i=1}^{n} x_i = 0,\\ &\sum_{i=1}^{n} y_i - a\sum_{i=1}^{n} x_i - bn = 0.\end{aligned}\right\} \tag{7}$$

a eta b ezezagunetako bi ekuazio linealetako sistema bat lortu dugu. Orokorrean sistema horrek soluzio bat izango du eta $S(a,b)$ funtzioak soluzio horretan balio minimoa hartuko du[4].

II. Biz hurbilketa-funtzioa bigarren mailako trinomioa, $y = ax^2 + bx + c$.

Kasu horretan (2) adierazpenak ondoko forma izango du:

$$S(a,b,c) = \sum_{i=1}^{n} [y_i - (ax_i^2 + bx_i + c)]^2. \tag{8}$$

Hori , a, b, c aldagaien funtzioa da.

(5) ekuazio-sistema ondokoa da:

$$\left.\begin{aligned}&\sum_{i=1}^{n} [y_i - (ax_i^2 + bx_i + c)]x_i^2 = 0,\\ &\sum_{i=1}^{n} [y_i - (ax_i^2 + bx_i + c)]x_i = 0,\\ &\sum_{i=1}^{n} [y_i - (ax_i^2 + bx_i + c)] = 0,\end{aligned}\right\}$$

---

4) Hori, baldintza nahikoen bidez froga daiteke (ikus § 17). Izan ere, zera dugu:

$$\frac{\partial^2 S}{\partial a^2} = \sum_{i=1}^{n} x_i^2; \quad \frac{\partial^2 S}{\partial a \partial b} = \sum_{i=1}^{n} x_i; \quad \frac{\partial^2 S}{\partial b^2} = n.$$

Beraz,

$$\frac{\partial^2 S}{\partial a^2}\cdot\frac{\partial^2 S}{\partial b^2} - \left(\frac{\partial^2 S}{\partial a \partial b}\right)^2 = n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 = \sum_{i\neq j} (x_i - x_j)^2 > 0; \quad \frac{\partial^2 S}{\partial a^2} > 0.$$

hots,

$$\left.\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{n} y_i x_i^2 - a\sum_{i=1}^{n} x_i^4 - b\sum_{i=1}^{n} x_i^3 - c\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 0,\\
&\sum_{i=1}^{n} y_i x_i - a\sum_{i=1}^{n} x_i^3 - b\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - c\sum_{i=1}^{n} x_i = 0,\\
&\sum_{i=1}^{n} y_i - a\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - b\sum_{i=1}^{n} x_i - cn = 0.
\end{aligned}\right\} \qquad (9)$$

a, b, c ezezagunetako ekuazio linealetako sistema lortu dugu. Problemaren baldintzetatik, orokorrean, zera ondorioztatzen da: sistemak soluzio bakar bat duela eta soluzio horretan $S(a,b,c)$ funtzioak balio minimoa hartuko duela.

Adibidea. Demagun $y - \varphi(x)$ funtzioaren lau balio esperimentalki lortu ditugula ondoko taulan agertzen diren argumentuaren lau balioetarako:

x	1	2	3	5
y	3	4	2,5	0,5

φ funtzio gisa, $y = ax + b$ funtzio lineala hartuko dugu eta $S(a,b)$ hauxe izango da:

$$S(a,b) = \sum_{i=1}^{4} [y_i - (ax_i + b)]^2.$$

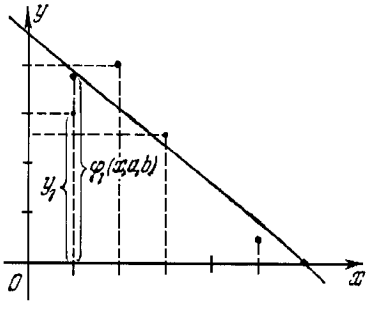
a eta b koefizienteak finkatuko dituen (7) sistema eratu aurretik,

$$\sum_{i=1}^{4} y_i x_i = 21; \quad \sum_{i=1}^{4} x_i^2 = 39;$$

$$\sum_{i=1}^{4} x_i = 11; \quad \sum_{i=1}^{4} y_i = 10.$$

lortzen ditugu, eta (7) sistema hau izango da:

$$\left.\begin{aligned} 21 - 39a - 11b = 0, \\ 10 - 11a - 4b = 0. \end{aligned}\right\}$$



187. c IRUDIA

Sistema ebatziz, a eta b aurkituko ditugu: $a = -\frac{26}{35}$, $b = \frac{159}{35}$, eta bilatutako zuzena ondokoa izango da (ikus 187c. irudia):

$$y = -\frac{26}{35}x + \frac{159}{35}.$$

§ 20. Kurbaren puntu singularrak

Kurbei buruzko ikasketetarako deribatu partziala erabili ohi da. Biz

$$F(x, y) = 0$$

kurba baten ekuazioa.

Kurbaren zuzen ukitzailearen koefiziente angeluarra ondoko formularen bidez aurkituko da:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}$$

(ikus VIII. gaiko § 11).

Kurbaren $M(x,y)$ puntuan $\frac{\partial F}{\partial x}$ edo $\frac{\partial F}{\partial y}$ nuluak ez badira, puntu horretan $\frac{\partial y}{\partial x}$ edo $\frac{\partial x}{\partial y}$ deribatu partzialak definiturik egongo dira. Beraz, puntu horretan $F(x,y)=0$ kurbak zuzen ukitzailea du. Kasu horretan $M(x,y)$-ri *puntu arrunt* deritzogu. Aldiz, $M_0(x_0,y_0)$ puntuan

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_{\substack{x=x_0\\ y=y_0}}=0 \quad \text{eta} \quad \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_{\substack{x=x_0\\ y=y_0}}=0$$

ditugunean, zuzen ukitzailearen koefiziente angeluarra definitu gabe dago.

Definizioa. Deribatu partzial biak, $\frac{\partial F}{\partial x}$ eta $\frac{\partial F}{\partial y}$, $F(x,y)=0$ kurbaren $M_0(x_0,y_0)$ puntuan anulatzen direnean, puntu horri kurbaren *puntu singular* deritzogu. Honelatan ba, kurbaren puntu singularrak ondoko ekuazio-sistemaren bidez kalkulatuko dira:

$$F=0; \quad \frac{\partial F}{\partial x}=0; \quad \frac{\partial F}{\partial y}=0.$$

Bistakoa da kurba guztiek ez dutela puntu singularrik; adibidez,

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0$$

elipserako ondoko ekuazioak ditugu:

$$F(x,y)=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1; \quad \frac{\partial F}{\partial x}=\frac{2x}{a^2}; \quad \frac{\partial F}{\partial y}=\frac{2y}{b^2}.$$

Hemen $\frac{\partial F}{\partial x}$ eta $\frac{\partial F}{\partial y}$ deribatuak $x=0$ eta $y=0$ balioetarako soilik anulatzen dira baina puntu horrek ez du elipsearen ekuazioa egiaztatzen; beraz, elipseak ez du puntu singularrik.

Puntu singular baten ingurunean funtzioaren joerari buruzko azterketa zehatza egin gabe, puntu singularra dauzkaten kurben adibide batzuk azalduko ditugu.

1. Adibidea. Aztertu $y^2 - x(x-a)^2 = 0 \quad (a > 0)$ kurbaren puntu singularrak.

Ebazpena. Emandako kasuan $F(x,y) = y^2 - x(x-a)^2$ dugu; beraz,

$$\frac{\partial F}{\partial x} = (x-a)(a-3x); \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 2y.$$

Hurrengo hiru ekuazioetako sistema ebatziz:

$$F(x,y) = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 0$$

emaitza bakarra lortuko dugu: $x_0 = a$, $y_0 = 0$.

Beraz, $M_0(a,0)$ kurbaren puntu singularra izango da.

Azter dezagun kurbaren joera puntu singularraren ingurune batean eta eraiki dezagun kurba. Emandako ekuazioa honela idatziko dugu:

$$y = \pm(x-a)\sqrt{x}.$$

Formula horretatik zera ondorioztatzen da:

1) Kurba $x \geq 0$ balioetarako soilik definiturik dago; 2) Ox ardatzarekiko simetrikoa da; 3) kurbak Ox ardatza (0,0) eta (a,0) puntuetan ebakitzen du. Ikusi dugunez, azken hori puntu singularra da.

Azter dezagun lehendabizi kurbaren adar positiboa:

$$y = (x-a)\sqrt{x}.$$

x-rekiko y-ren lehen eta bigarren deribatuak ondokoak dira:

$$y' = \frac{3x-a}{2\sqrt{x}}, \quad y'' = \frac{3x+a}{4x\sqrt{x}}.$$

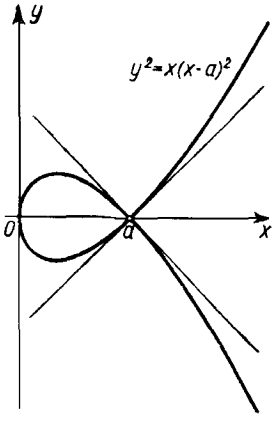
$x = 0$ denerako $y' = \infty$ dugu; beraz, kurba koordenatu-jatorrian Oy ardatzaren ukitzailea da. $x = \frac{a}{3}$ denerako $y' = 0$ eta $y'' > 0$ ditugu, eta beraz, y funtzioak balio minimoa hartzen du $x = \frac{a}{3}$ denean:

$$y = -\frac{2a}{3}\sqrt{\frac{a}{3}}.$$

$0 < x < a$ tartean $y < 0$ dugu; $x > \frac{a}{3}$ denerako $y' > 0$; $x \to \infty$ denean $y \to \infty$ dugu. $x = a$ denean $y' = \sqrt{a}$ dugu, hots, $y = +(x-a)\sqrt{x}$ kurbaren adarrak $M_0(a,0)$ puntu singularrean $y = \sqrt{a}(x-a)$ zuzen ukitzailea du.

Kurbaren bigarren adarra, $y = -(x-a)\sqrt{x}$, Ox ardatzarekiko aurrekoaren simetrikoa denez, beraren zuzen ukitzailea puntu singularrean hurrengo ekuazioaren bidez definiturik egongo da:

$$y = -\sqrt{a}(x-a).$$



188. a IRUDIA

Kurba puntu singularretik bi bider pasatzen da. Puntu horri *bikoitz* deritzogu. Aztertutako kurba 188a. irudian aurkeztu da.

2. Adibidea. Kalkulatu $y^2 - x^3 = 0$ (parabola erdikubikoa) kurbaren puntu singularrak.

Ebazpena. Puntu singularren koordenatuak ondoko ekuazio-sistema ebatziz lortuko dira:

$$y^2 - x^3 = 0, \quad 3x^2 = 0, \quad 2y = 0.$$

Beraz, $M_0(0,0)$ puntua puntu singular bakarra da.

Emandako ekuazioa honela idatziko dugu:

$$y = \pm\sqrt{x^3}.$$

Kurba eraikitzeko azter dezagun, lehendabizi, kurbaren adar positiboa; beste adarra Ox ardatzarekiko aurrekoaren simetrikoa denez, ez du azterketa berezirik behar.

y funtzioa $x \geq 0$ denerako soilik definiturik dago, ez da negatiboa eta gorakorra da. $y = \sqrt{x^3}$ funtzioaren lehen eta bigarren deribatuak ondokoak dira:

$$y' = \frac{3}{2}\sqrt{x}; \quad y'' = \frac{3}{4}\frac{1}{\sqrt{x}}.$$

$x = 0$ denerako $y = 0$, $y' = 0$ emaitzak ditugu. Beraz, aztertutako kurbaren adarrak koordenatu-jatorrian $y = 0$ zuzen ukitzailea izango du. $y = -\sqrt{x^3}$ kurbaren bigarren adarrak koordenatu-jatorrian, ere, $y = 0$ ukitzailea du. Honelatan ba, kurbaren adar desberdin biak koordenatu-jatorritik pasatzen dira, zuzen ukitzaile berbera dute eta ukitzaile horrekiko simetrikoak dira. Puntu singular horri *lehen mailako atzerapen-puntu* deritzogu (188b. irudia).

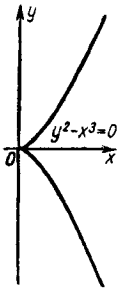
Oharra. $y^2 - x^3 = 0$ kurba $y^2 = x(x-a)^2$ (1. adibidean aztertutakoa) kurbaren limite gisa $a \to 0$ denean, uler dezakegu; hau da, kurbaren bigizta puntu bakar bateraino murrizten denean.

3. Adibidea. Aztertu $(y - x^2)^2 - x^5 = 0$ kurba.

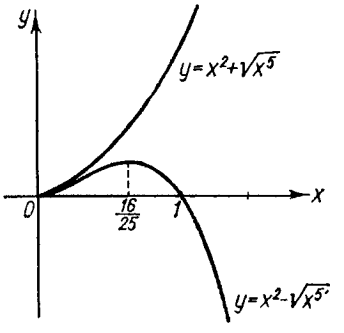
Soluzioa. Puntu singularren koordenatuak

$$-4x(y - x^2) - 5x^4 = 0; \; 2(y - x^2) = 0$$

ekuazio-sistemaren bidez lortuko dira. Horrek $x = 0$, $y = 0$ soluzio bakarra du; beraz, koordenatu-jatorria puntu singularra da.



188. b IRUDIA



189. IRUDIA

Idatz dezagun emandako ekuazioa $y = x^2 \pm \sqrt{x^5}$ eran; bistakoa da x-k balio positibo guztiak har ditzakeela. Lehen eta bigarren ordenako deribatuak ondokoak dira:

$$y' = 2x \pm \frac{5}{2}\sqrt{x^3}; \quad y'' = 2 \pm \frac{15}{4}\sqrt{x}.$$

Kurbaren adar biak, hau da, + eta – zeinuei dagozkienak, banan-banan aztertuko ditugu. Kasu bietan $x = 0$ denerako $y = 0$ eta $y' = 0$ emaitzak ditugu, hots, adar bietarako ukitzaile bakarra Ox ardatza da.

Lehendabizi

$$y = x^2 + \sqrt{x^5}$$

adarra aztertuko dugu. x aldagaia 0tik ∞rantz hazi ahala y ere haziko da.

Bigarren adarrak,

$$y = x^2 - \sqrt{x^5}$$

ekuaziokoak, Ox ardatza (0,0) eta (1,0) puntuetan ebakitzen du. $y = x^2 - \sqrt{x^5}$ funtzioak $x = \frac{16}{25}$ denean balio maximoa hartzen du eta $x \to +\infty$ eginik, $y \to -\infty$ lortuko dugu.

Honela, kurbaren adar biak koordenatu-jatorritik pasatzen dira; puntu horretan ukitzaile berbera dute eta ukiguneren ingurunean ukitzailearen alde berberean aurkitzen dira. Puntu singular horri *bigarren mailako atzerapen-puntu* deritzogu. Aztertutako funtzioaren grafikoa 189. irudian adierazi da.

4. Adibidea. Aztertu $y^2 - x^4 + x^6 = 0$ kurba.

Ebazpena. Koordenatu-jatorria puntu singularra da. Puntu horren ingurune batean kurbaren aldakuntza aztertzeko, kurbaren ekuazioa honela idatziko dugu:

$$y = \pm x^2\sqrt{1 - x^2}.$$

Ekuazioan aldagaien berredura bikoitiak soilik agertzen direnez, kurba koordenatu--ardatzekiko simetrikoa da eta beraz, aski da x eta y aldagaien balio positiboei dagokien kurba-zatia aztertzea. Azken ekuaziotik x 0tik 1era aldatuko dela ondorioztatuko dugu, hots, $0 \le x \le 1$.

Kalkula dezagun $y = +x^2\sqrt{1 - x^2}$ ekuazioko adarraren lehen deribatua. Hau da:

$$y' = \frac{x(2 - 3x^2)}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

$x = 0$ denerako $y = 0$ eta $y' = 0$ emaitzak ditugu. Beraz, koordenatu-jatorrian Ox ardatza kurbaren ukitzailea da.

$x = 1$ denerako $y = 0$ eta $y' = \infty$ ditugu. Honelatan ba, (1,0) puntuan ukitzailea Oy ardatzaren paraleloa da. Eta $x = \sqrt{\frac{2}{3}}$ denean funtzioak balio maximoa hartzen du (190. irudia).

Koordenatu-jatorrian (puntu singularrean) kurbaren adar biak (zeinu positibo eta negatiboari dagozkienak), elkarrekiko ukitzaileak dira. Puntu singular horri *oskulazio--puntu* deritzo.

5. Adibidea. Aztertu $y^2 - x^2(x - 1) = 0$ kurba.

Ebazpena. Puntu singularrak definitzen dituen ekuazio-sistema idatziko dugu:

$$y^2 - x^2(x - 1) = 0; \quad -3x^2 + 2x = 0; \quad 2y = 0.$$

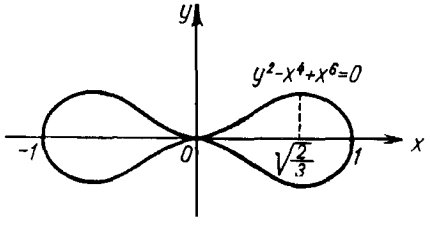
Sistema horrek $x = 0$, $y = 0$ soluzioa du; hots, (0,0) puntua kurbaren puntu singularra da. Idatz dezagun emandako ekuazioa $y = \pm x\sqrt{x-1}$ eran. Bistakoa da x-k 1 eta ∞ren arteko balioak eta zero balioa ere (kasu horretan $y = 0$ da) har ditzakeela.

Azter dezagun erroaren balio positiboari dagokion kurbaren adarra. x 1etik ∞raino hazten doanean, y 0tik ∞raino handituz doa. Deribatua ondokoa da:

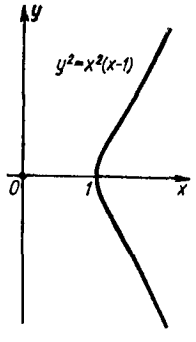
$$y' = \frac{3x-2}{2\sqrt{x-1}}.$$

$x = 1$ denerako $y' = \infty$ dugu. Beraz, (1,0) puntuan ukitzailea Oy ardatzaren paraleloa da.

Kurbaren bigarren adarra, zeinu negatiboari dagokiona, Ox ardatzarekiko lehenengo adarraren simetrikoa da.



190. IRUDIA



191. IRUDIA

(0,0) puntuaren koordenatuek ekuazioa betetzen dute eta beraz, puntua kurbarena da baina bere ingurunean ez dago kurbaren beste punturik. (191. irudia). Horrelako puntu singularrari *isolatu* deritzogu.

Ariketak

Aurkitu ondoko funtzioen deribatu partzialak:

1. $z = x^2 \sin^2 y$. Emaitza: $\dfrac{\partial z}{\partial x} = 2x\sin^2 y$; $\dfrac{\partial z}{\partial y} = x^2 \sin 2y$.

2. $z = x^{y^2}$. Em.: $\dfrac{\partial z}{\partial x} = y^2 x^{y^2-1}$; $\dfrac{\partial z}{\partial y} = x^{y^2}\, 2y \ln x$.

3. $u = e^{x^2+y^2+z^2}$. Em.: $\dfrac{\partial u}{\partial x} = 2xe^{x^2+y^2+z^2}$; $\dfrac{\partial u}{\partial y} = 2ye^{x^2+y^2+z^2}$; $\dfrac{\partial u}{\partial z} = 2ze^{x^2+y^2+z^2}$.

4. $u = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$. Em.: $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$.

5. $z = \arctan(xy)$. Em.: $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{y}{1+x^2y^2}$; $\dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{x}{1+x^2y^2}$.

6. $z = \arctan\dfrac{y}{x}$. Em.: $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{-y}{x^2+y^2}$; $\dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{x}{x^2+y^2}$.

7. $z = \ln\dfrac{\sqrt{x^2+y^2}-x}{\sqrt{x^2+y^2}+x}$. Em.: $\dfrac{\partial z}{\partial x} = -\dfrac{2}{\sqrt{x^2+y^2}}$; $\dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{2x}{y\sqrt{x^2+y^2}}$.

8. $u = e^{\frac{x}{y}} + e^{\frac{z}{y}}$. Em.: $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{1}{y}e^{\frac{x}{y}}$; $\dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{x}{y^2}e^{\frac{x}{y}} - \dfrac{z}{y^2}e^{\frac{z}{y}}$; $\dfrac{\partial u}{\partial z} = \dfrac{1}{y}e^{\frac{z}{y}}$.

9. $z = \arcsin(x+y)$. Em.: $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{1}{\sqrt{1-(x+y)^2}} = \dfrac{\partial z}{\partial y}$.

10. $z = \arctan\sqrt{\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}}$. Em.: $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{y^2}{x\sqrt{x^4-y^4}}$; $\dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{-y}{\sqrt{x^4-y^4}}$.

Aurkitu ondoko funtzioen diferentzial totalak:

11. $z = x^2 + xy^2 + \sin y$. Em.: $dz = (2x+y^2)dx + (2xy+\cos y)dy$.

12. $z = \ln(xy)$. Em.: $dz = \dfrac{dx}{x} + \dfrac{dy}{y}$.

13. $z = e^{x^2+y^2}$. Em.: $dz = 2e^{x^2+y^2}\cdot(x\,dx + y\,dy)$.

14. $u = \tan(3x - y) + 6^{y+z}$. Em.: $du = \dfrac{3dx}{\cos^2(3x - y)} +$

$$+\left(-\frac{1}{\cos^2(3x - y)} + 6^{y+z}\ln 6\right)dy + 6^{y+z}\ln 6\ dz.$$

15. $w = \arcsin\dfrac{x}{y}$. Em.: $dw = \dfrac{y\,dx - x\,dy}{|y|\sqrt{y^2 - x^2}}$.

16. Aurkitu $f'_x(2,3)$ eta $f'_y(2,3)$ $f(x,y) = x^2 + y^2$ denean.

Em.: $f'_x(2,3) = 4$, $f'_y(2,3) = 6$.

17. Aurkitu $df(x,y)$ $x = 1$, $y = 0$; $dx = \dfrac{1}{2}$, $dy = \dfrac{1}{4}$ balioetarako baldin $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ bada. Em.: $\dfrac{1}{2}$.

18. Aurkitu x, y eta z aldagaien balio absolutu txikietarako ondoko formularen adierazpen hurbildua: $\sqrt{\dfrac{1+x}{(1+y)(1+z)}}$. Em.: $1 + \dfrac{1}{2}(x - y - z)$.

19. Aurkitu gauza berbera hurrengo formularako: $\sqrt{\dfrac{1+x}{1+y+z}}$. Em.: $1 + \dfrac{1}{2}(x - y - z)$.

20. Aurkitu $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ eta $\dfrac{\partial z}{\partial y}$, $z = u + v^2$, $u = x^2 + \sin y$, $v = \ln(x + y)$ funtzioetarako.

Em.: $\dfrac{\partial z}{\partial x} = 2x + 2v\dfrac{1}{x+y}$; $\dfrac{\partial z}{\partial y} = \cos y + 2v\dfrac{1}{x+y}$.

21. Aurkitu $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ eta $\dfrac{\partial z}{\partial y}$, $z = \sqrt{\dfrac{1+u}{1+v}}$, $u = -\cos x$; $v = \cos x$ kasurako.

Em.: $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{1}{2\cos^2\dfrac{x}{2}}$; $\dfrac{\partial z}{\partial y} = 0$.

22. Aurkitu $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ eta $\dfrac{\partial z}{\partial y}$, $z = e^{u-2v}$, $u = \sin x$; $v = x^3 + y^2$ kasurako.

Em.: $\dfrac{\partial z}{\partial x} = e^{u-2v}(\cos x - 6x^2)$, $\dfrac{\partial z}{\partial y} = e^{u-2v}(0 - 2 \cdot 2y) = -4ye^{u-2v}$.

23. Aurkitu ondoko funtzioen deribatu partzialak: $z = \arcsin(u + v)$; $u = \sin x \cos \alpha$;

$v = \cos x \sin \alpha$. Em.: $\dfrac{\partial z}{\partial x} = 1$, baldin $2k\pi - \dfrac{\pi}{2} < x + \alpha < 2k\pi + \dfrac{\pi}{2}$ bada;

$\dfrac{\partial z}{\partial x} = -1$, baldin $2k\pi + \dfrac{\pi}{2} < x + \alpha < (2k+1)\pi + \dfrac{\pi}{2}$ bada.

24. $u = \dfrac{e^{ax}(y - z)}{a^2 + 1}$; $y = a \sin x$; $z = \cos x$. Em.: $\dfrac{\partial u}{\partial x} = e^{ax} \sin x$.

25. $z = \ln(1 - x^4)$; $x = \sqrt{\sin \theta}$. Em.: $\dfrac{dz}{d\theta} = -2 \tan \theta$.

Aurkitu ondoko ekuazioen bidez definitutako x-ren funtzio inplizituen deribatuak:

26. $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - 1 = 0$. Em.: $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{b^2}{a^2}\dfrac{x}{y}$.

27. $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$. Em.: $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{b^2}{a^2}\dfrac{x}{y}$.

28. $y^x = x^y$. Em.: $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{yx^{y-1} - y^x \ln y}{xy^{x-1} - x^y \ln x}$.

29. $\sin(xy) - e^{xy} - x^2 y = 0$. Em.: $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y[\cos(xy) - e^{xy} - 2x]}{x[x + e^{xy} - \cos(xy)]}$.

30. Biz $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$; kalkulatu $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ eta $\dfrac{\partial z}{\partial y}$. Em.: $\dfrac{\partial z}{\partial x} = -\dfrac{c^2 x}{a^2 z}$; $\dfrac{\partial z}{\partial y} = -\dfrac{c^2 y}{b^2 z}$.

31. Biz $u - v\tan aw = 0$; kalkulatu $\dfrac{\partial w}{\partial u}$ eta $\dfrac{\partial w}{\partial v}$.

Em.: $\dfrac{\partial w}{\partial u} = \dfrac{\cos^2 aw}{av}$; $\dfrac{\partial w}{\partial v} = -\dfrac{\sin 2aw}{2av}$.

32. Biz $z^2 + \dfrac{2}{x} = \sqrt{y^2 - z^2}$; frogatu $x^2\dfrac{\partial z}{\partial x} + \dfrac{1}{y}\dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{1}{z}$ betetzen dela.

33. Biz $\dfrac{z}{x} = F\left(\dfrac{y}{z}\right)$; froga ezazu edozein F funtzio deribagarritarako, $x\dfrac{\partial z}{\partial x} + y\dfrac{\partial z}{\partial y} = z$ betetzen dela.

Kalkulatu ondoko funtzioen bigarren ordenako deribatu partzialak:

34. $z = x^3 - 4x^2y + 5y^2$. Em.: $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6x - 8y$; $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = -8x$; $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 10$.

35. $z = e^x \ln y + \sin y \ln x$. Em.: $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = e^x \ln y - \dfrac{\sin y}{x^2}$; $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \dfrac{e^x}{y} + \dfrac{\cos y}{x}$;

$\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\dfrac{e^x}{y^2} - \sin y \ln x$.

36. Frogatu $u = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$ bada, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$ betetzen dela.

37. Frogatu $z = \dfrac{x^2y^2}{x + y}$ bada, $x\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} + y\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 2\dfrac{\partial z}{\partial x}$ betetzen dela.

38. Frogatu $z = \ln(x^2 + y^2)$ bada, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$ betetzen dela.

39. Frogatu bi aldiz deribagarriak diren edozein φ eta ψ funtziotarako $z = \varphi(y + ax) + \psi(y - ax)$ funtzioa badugu, $a^2 \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0$ betetzen dela.

40. Kalkulatu Ox ardatzarekin 60 graduko angelua osotzen duen norabidearekiko $z = 3x^4 - xy + y^3$ funtzioaren deribatua $M(1,2)$ puntuan. Em.: $5 + 11\sqrt{\dfrac{3}{2}}$.

41. Kalkulatu $M(2,1)$ puntutik $N(5,5)$ punturaino doan zuzenarekiko $z = 5x^2 - 3x - y - 1$ funtzioaren deribatua $M(2,1)$ puntuan. Em.: 9,4.

42. Kalkulatu $f(x,y)$ funtzioaren deribatuak hurrengo norabideekiko:

1) Oxy koordenatu-ardatzek osotzen duten angeluaren erdikaria.

Em.: $\dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x} + \dfrac{\partial f}{\partial y}\right)$.

2) Ox-ren ardatzerdi negatiboa. Em.: $-\dfrac{\partial f}{\partial x}$.

43. Biz $f(x,y) = x^3 + 3x^2 + 4xy + y^2$ funtzioa. Frogatu $M\left(\dfrac{2}{3}, -\dfrac{4}{3}\right)$ puntuan funtzioaren edozein norabiderekiko deribatua zero dela ("funtzio gerakorra").

44. Aurkitu $2p$ perimetrodun triangelu guztien artetik azalera handiena duena.
Em.: Triangelu aldekidea.

45. Aurkitu S azalera totaleko paralelepipedo angeluzuzenen artean, bolumen maximoa duena. Em.: $\sqrt{\dfrac{S}{6}}$ ertzeko kuboa.

46. Kalkulatu espazioko $\dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y}{2} = \dfrac{z}{1}$, $\dfrac{x}{1} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z}{1}$ zuzenen arteko distantzia.

Em.: $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Aztertu ondorengo funtzioen maximo eta minimoa:

47. $z = x^3y^2(a - x - y)$. Em.: z maximo da $x = \frac{a}{2}$; $y = \frac{a}{3}$ balioetarako.

48. $z = x^2 + xy + y^2 + \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$. Em.: z minimoa da $x = y = \frac{1}{\sqrt[3]{3}}$ balioetarako.

49. $z = \sin x + \sin y + \sin(x + y)$ $\left(0 \le x \le \frac{\pi}{2};\ 0 \le y \le \frac{\pi}{2}\right)$.

Em.: z balio maximoa $x = y = \frac{\pi}{3}$ balioetarako.

50. $z = \sin x \sin y \sin(x + y)$ $(0 \le x \le \pi;\ 0 \le y \le \pi)$.

Em.: z-k $x = y = \frac{\pi}{3}$ direnean balio maximoa hartzen du.

Kalkulatu ondoko kurben puntu singularrak beraien izaera aztertuz, eta lortu puntu horietako ukitzaileen ekuazioak:

51. $x^3 + y^3 - 3axy = 0$. Em.: $M_0(0,0)$ korapiloa da eta $x = 0$, $y = 0$ ukitzaileen ekuazioak dira.

52. $a^4y^2 = x^4(a^2 - x^2)$. Em.: Koordenatu-jatorria oskulazio-puntua da, ukitzaile bikoitza $y^2 = 0$ delarik.

53. $y^2 = \frac{x^3}{2a - x}$. Em.: $M_0(0,0)$ lehen mailako atzerapen-puntua da; ukitzailearen ekuazioa $y^2 = 0$ da.

54. $y^2 = x^2(9 - x^2)$. Em.: $M_0(0,0)$ korapiloa da, ukitzaileen ekuazioak $y = \pm 3x$ direlarik.

55. $x^4 - 2ax^2y - axy^2 + a^2x^2 = 0$. Em.: $M_0(0,0)$ bigarren mailako atzerapen-puntua da, ukitzaile bikoitzaren ekuazioa $y^2 = 0$ izanik.

56. $y^2(a^2+x^2)=x^2(a^2-x^2)$. Em.: $M_0(0,0)$ korapiloa da, ukitzaileen ekuazioak $y=\pm x$ direlarik.

57. $b^2x^2+a^2y^2=x^2y^2$. Em.: $M_0(0,0)$ puntu isolatua da.

58. Frogatu $y=x\ln x$ kurbarako koordenatu-jatorria mutur-puntua dela eta puntu horretan kurbaren ukitzailea Oy ardatza dela.

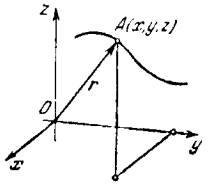
59. Frogatu koordenatu-jatorria $y=\dfrac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}$ kurbaren puntu singularra dela eta puntu horretako ukitzaileak, eskuinetik $y=0$ eta ezkerretik $y=x$ direla.

IX. GAIA

KALKULU DIFERENTZIALAREN APLIKAZIOAK ESPAZIOKO GEOMETRIAN

§ 1. Espazioko kurba baten ekuazioak

Kontsidera dezagun $\overline{OA}=\mathbf{r}$ bektorea, zeinaren jatorria koordenatu-jatorriarekin bat bait dator, eta bere muturra $A(x,y,z)$ puntua bait da (192. irudia). Bektore horri *erradio bektore* deritzo.



192. IRUDIA

Adieraz dezagun bektore hori, bere koordenatu-ardatzen gaineko projekzioen funtzioan:

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}. \tag{1}$$

Jo dezagun $\mathbf{r}$ bektorearen projekzioak t parametro baten funtzioak direla:

$$\left.\begin{aligned} x &= \varphi(t), \\ y &= \psi(t), \\ z &= \chi(t). \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Kasu honetan (1) formula

$$\mathbf{r} = \varphi(t)\mathbf{i} + \psi(t)\mathbf{j} + \chi(t)\mathbf{k} \tag{1'}$$

eran idatz daiteke, edo laburrago oraindik:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t). \tag{1''}$$

t aldatzen denean, x, y, z koordenatuak ere aldatuko dira eta A puntuak, $\mathbf{r}$ bektorearen muturra denak, espazioan lerro bat, $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ bektorearen *hodografo* izenekoa, deskribatuko du. (1') edo (1") ekuazioak espazioko lerro baten *ekuazio bektorial* deitzen dira. (2) ekuazioak espazioko lerro baten *ekuazio parametriko* deitzen dira. Ekuazio horiek t-ren balio bakoitzari dagokion kurbako puntuaren koordenatuak x, y, z determinatzen dituzte.

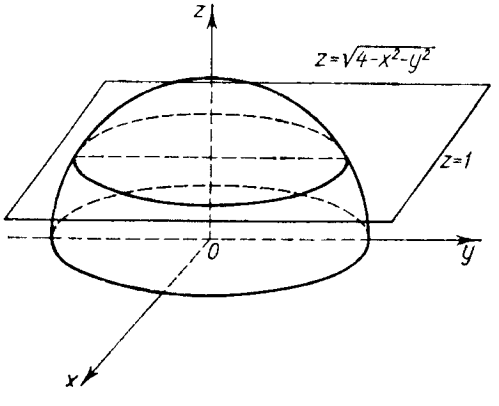
Oharra. Espazioko kurba bat, bi gainazalen arteko ebakidurako puntuen leku geometriko bezala ere difini daiteke. Hortaz, kurba hori bi gainazal horien ekuazioen bidez eman daiteke:

$$\left.\begin{aligned} \Phi_1(x,y,z) = 0, \\ \Phi_2(x,y,z) = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

Honela, adibidez,

$$x^2 + y^2 + z^2 = 4, \quad z = 1$$

ekuazioak espazioko zirkunferentzia batenak dira, esfera eta plano baten ebakiduraz lortua alegia (193. irudia).



193. IRUDIA

Horrela, espazioko kurba bat adieraz daiteke (2) ekuazio parametrikoen bitartez zein (3) bi gainazalen ebakiduraren bidez.

(2) ekuazioetan t parametroa ezabatzen badugu, eta x, y eta z lotzen dituzten bi ekuazio lortzen baditugu, prozedura parametrikoaren bidez emandako kurbatik bi

gainazalen ebakidurak adierazitako kurbara pasatu egingo gara. Alderantziz, $x = \varphi(t)$ badakigu ($\varphi(t)$ hautazko funtzioa izanik) eta y eta z, t-ren funtzio bezala,

$$\Phi_1[\varphi(t), y, z] = 0, \quad \Phi_2[\varphi(t), y, z] = 0,$$

ekuazioetatik ateratzen baditugu bi gainazalen ebakidurak adierazitako kurbatik adierazpen parametrikora pasako gara.

1. Adibidea. Izan bitez

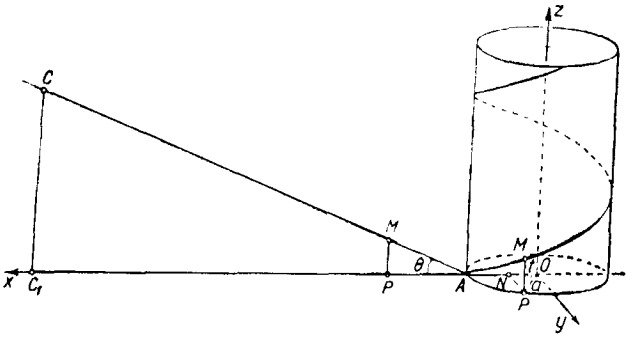
$$x = 4t - 1, \quad y = 3t, \quad z = t + 2$$

zuzen baten ekuazio parametrikoak. t parametroa ezabatuz bi ekuazio lortzen dugu, bakoitza plano baten ekuazioa delarik. Adibidez, lehenengo ekuazioari bigarrena eta hirugarrena, atalez atal, kentzean, $x - y - z = -3$ lortzen dugu. Bestalde, lau aldiz hirugarren ekuazioa lehenengoari kenduz gero, $x - 4z = -9$ lortzen dugu. Hau da, emandako zuzena

$$x - y - z + 3 = 0 \quad \text{eta} \quad x - 4z + 9 = 0$$

planoen ebakidura da.

2. Adibidea. Kontsidera dezagun a erradiodun zilindro zuzena, zeinaren ardatza Oz ardatzarekin bat bait dator. (194. irudia). Zilindro horren inguruan C_1AC triangelu zuzen bat biribilka dezagun, A erpina zilindroaren sortzaile eta Ox ardatzaren arteko ebaki-puntuarekin bat etor dadin, eta AC_1 katetua zilindro horren Oxy planoko sekzioaren inguruan biribilka dadin. Kasu honetan, hipotenusak zilindroaren gainean *helize* deituriko lerro bat eratuko du.



194. IRUDIA

Idatz dezagun helizearen ekuazioa, M bere puntu aldakorraren koordenatuak x, y, z eta AOP angelua t izendatuz (ikus 194. irudia). Orduan,

$$x = a\cos t,\quad y = a\sin t,\quad z = PM = AP\tan\theta$$

dugu, non θ-k C_1AC angelu zorrotza adierazten bait du. Ohar gaitezen $\overset{\frown}{AP} = at$ ($\overset{\frown}{AP}$ t angelu zentralari dagokion a erradioko zirkunferentziaren arkua bait da), $\tan\theta$ m letraz izenda dezagun. Horrela, helizearen ekuazio parametrikoak:

$$x = a\cos t,\quad y = a\sin t,\quad z = amt$$

(hor t da parametroa), edo era bektorialean:

$$r = \mathbf{i}a\cos t + \mathbf{j}a\sin t + \mathbf{k}amt.$$

Helizearen ekuazio parametrikoetatik t parametroa ezabatzea erraza da. Lehenengo bi ekuazioak ber bi eginez eta batuz $x^2 + y^2 = a^2$ aurkitzen dugu. Hori da helizea datzan zilindroaren ekuazioa. Orain, bigarren ekuazioa lehenengoaz, atalez atal, zatituz eta lortutako erlazioan hirugarren ekuaziotik lortzen den t-ren balioa ordezkatuz, helizea datzan beste gainazal baten ekuazioa aurkitzen dugu:

$$\frac{y}{x} = \tan\frac{z}{am}.$$

Hori da *gainazal helikoidal* (*helikoide*) delakoa. Kontsidera dezakegu Oxy planoarekiko paralelo den eta mutur bat Oz ardatzean daukan zuzenerdi batek sortua dela, Oz ardatzarekiko abiadura angeluar konstantez biratzen duenean eta, aldi berean, gorantz abiadura konstantez desplazatzen denean. Helizea zilindro eta gainazal helikoidalaren arteko ebakidurak definitua da. Horrengatik defini daiteke helizea bi ekuazioren bitartez:

$$x^2 + y^2 = a^2,\quad \frac{y}{x} = \tan\frac{z}{am}.$$

§ 2. Aldagai eskalar bateko funtzio bektorial baten limitea eta deribatua. Kurba batekiko ukitzailearen ekuazioa. Plano normalaren ekuazioa

Itzul gaitezen aurreko pasarteko (1') eta (1") formuletara

$$\mathbf{r} = \varphi(t)\mathbf{i} + \psi(t)\mathbf{j} + \chi(t)\mathbf{k}$$

edo

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t),$$

alegia.

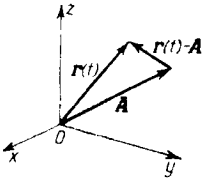
Kasu orokorrean, t aldatzen denean $\mathbf{r}$ bektorearen magnitudea eta norabidea ere aldatzen dira. $\mathbf{r}$ t aldagai eskalarraren funtzio bektoriala dela esan ohi da.

Jo dezagun

$$\lim_{t\to t_0} \varphi(t) = \varphi_0,$$
$$\lim_{t\to t_0} \psi(t) = \psi_0,$$
$$\lim_{t\to t_0} \chi(t) = \chi_0$$

direla. Kasu honetan $\mathbf{r}_0 = \varphi_0\mathbf{r} + \psi_0\mathbf{j} + \chi_0\mathbf{k}$ bektorea $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ bektorearen limitea dela esaten da (195. irudia):

$$\lim_{t\to t_0} \mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0.$$



195. IRUDIA

Azkeneko ekuaziotik

$$\lim_{t\to t_0} |\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}_0| = \lim_{t\to t_0} \sqrt{[\varphi(t) - \varphi_0]^2 + [\psi(t) - \psi_0]^2 + [\chi(t) - \chi_0]^2} = 0$$

eta

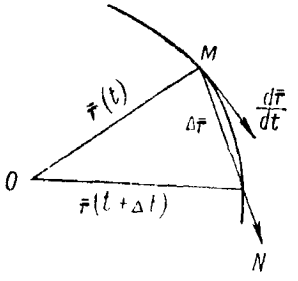
$$\lim_{t\to t_0} |\mathbf{r}(t)| = |\mathbf{r}_0|$$

ateratzen dira.

Goazen, orain, aldagai eskalar bateko

$$\mathbf{r}(t) = \varphi(t)\mathbf{i} + \psi(t)\mathbf{j} + \chi(t)\mathbf{k} \tag{1}$$

funtzio bektorial baten deribatuaren noziora, $\mathbf{r}(t)$ bektorearen jatorria koordenatu--jatorriarekin bat datorrela suposatuz. Badakigu azken ekuazioa espazioko lerro baten ekuazio bektoriala dena.



196. IRUDIA

Aukera dezagun t-ren balio finko bat, kurbako M puntu ezagun bati dagokiona, eta t-ri Δt gehikuntza eman diezaiogun; kasu horretan

$$\mathbf{r}(t + \Delta t) = \varphi(t + \Delta t)\mathbf{i} + \psi(t + \Delta t)\mathbf{j} + \chi(t + \Delta t)\mathbf{k}$$

bektorea lortzen dugu, zeinak kurbaren gainean M_1 puntu bat determinatzen bait du (196. irudia). Aurki dezagun bektorearen gehikuntza:

$$\Delta\mathbf{r} = \mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t) = [\varphi(t + \Delta t) - \varphi(t)]\mathbf{i} + [\psi(t + \Delta t) - \psi(t)]\mathbf{j} + [\chi(t + \Delta t) - \chi(t)]\mathbf{k}.$$

Gehikuntza hori, 196. irudian $\overline{MM_1} = \Delta\mathbf{r}(t)$ bektoreaz dago adierazita, non $\overline{OM} = \mathbf{r}(t)$, $\overline{OM_1} = \mathbf{r}(t + \Delta t)$ bait dira. Kontsidera dezagun $\dfrac{\Delta\mathbf{r}(t)}{\Delta t}$ funtzio bektorial eta aldagai eskalarraren gehikuntzen arteko arrazoia; jakina, $\Delta\mathbf{r}(t)$ bektoreak duen norabide bera izango du, azken horretatik $\dfrac{1}{\Delta t}$ faktore eskalarrez biderkatzean lortzen bait da. Bektore hori

$$\frac{\Delta\mathbf{r}(t)}{\Delta t} = \frac{\varphi(t + \Delta t) - \varphi(t)}{\Delta t}\mathbf{i} + \frac{\psi(t + \Delta t) - \psi(t)}{\Delta t}\mathbf{j} + \frac{\chi(t + \Delta t) - \chi(t)}{\Delta t}\mathbf{k}$$

eran idatz dezakegu.

$\varphi(t)$, $\psi(t)$, $\chi(t)$ funtzioen deribatuak aukeratutako t-ren baliorako existitzen badira, $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$-ren faktoreek limitean, $\varphi'(t)$, $\psi'(t)$, $\chi'(t)$ deribatuetarantz joko dute, $\Delta t \to 0$ denean. Hortaz, kasu honetan, $\frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t}$-ren limitea existitzen da $\Delta t \to 0$ denean, eta $\varphi'(t)\mathbf{i} + \psi'(t)\mathbf{j} + \chi'(t)\mathbf{k}$ bektorea da:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} = \varphi'(t)\mathbf{i} + \psi'(t)\mathbf{j} + \chi'(t)\mathbf{k}.$$

Azken berdintzak determinatutako bektorea, $\mathbf{r}(t)$ bektorearen t aldagai eskalarrekiko *deribatu* deitzen da. Deribatua $\frac{d\mathbf{r}}{dt}$ edo $\mathbf{r}'$ ikurrez adierazten da.

Hola,

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{r}' = \varphi'(t)\mathbf{i} + \psi'(t)\mathbf{j} + \chi'(t)\mathbf{k} \tag{2}$$

edo

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\mathbf{i} + \frac{dy}{dt}\mathbf{j} + \frac{dz}{dt}\mathbf{k}. \tag{2'}$$

Determina dezagun $\frac{d\mathbf{r}}{dt}$ bektorearen norabidea. $\Delta t \to 0$ denean, M_1 puntuak M punturantz jotzen du eta MM_1 sekantearen norabidea ukitzailearenarekin bat dator limitean. Beraz, $\frac{d\mathbf{r}}{dt}$ deribatuaren bektorea kurbaren M puntuko ukitzailearen arabera dago norabidatua. $\frac{d\mathbf{r}}{dt}$ bektorearen modulu edo luzera

$$\left|\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right| = \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2 + [\chi'(t)]^2} \tag{3}$$

formulaz determinatzen da[1].

---

1) Aztertutako puntuetan $\left|\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right| \neq 0$ dela suposatuko dugu.

Lortutako emaitzek

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$$

kurbaren M puntuko ukitzailearen ekuazioa idazten uzten digute, kurbaren ekuazioan $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $z = \chi(t)$ direla kontutan hartuz.

$M(x,y,z)$ puntutik pasatzen den zuzen baten ekuazioak

$$\frac{X - x}{m} = \frac{Y - y}{n} = \frac{Z - z}{p}$$

itxura dauka, non X, Y, Z zuzeneko puntu aldakor baten koordenatuak eta m, n, p zuzen horren kosinu zuzentzaileen magnitude proportzionalak bait dira.

Beste aldetik

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\mathbf{i} + \frac{dy}{dt}\mathbf{j} + \frac{dz}{dt}\mathbf{k}$$

bektoreak ukitzailearen norabidea duela erabaki dugu. Horrengatik, bektore horren projekzioak ukitzailearen kosinu zuzentzaileen magnitude proportzionalak dira eta, ondorioz, m, n, p zenbakienak. Ukitzailearen ekuazioa, bada,

$$\frac{X - x}{\frac{dx}{dt}} = \frac{Y - y}{\frac{dy}{dt}} = \frac{Z - z}{\frac{dz}{dt}} \tag{4}$$

izango da.

1. Adibidea. Idatzi

$$x = a \cos t, \quad y = a \sin t, \quad z = amt$$

helizearen ukitzailearen ekuazioa t edozein izanik eta $t = \frac{\pi}{4}$ denerako.

Ebazpena.

$$\frac{dx}{dt} = -a \sin t, \quad \frac{dy}{dt} = a \cos t; \quad \frac{dz}{dt} = am.$$

(4) formularen arabera

$$\frac{X - a\cos t}{-a\sin t} = \frac{Y - a\sin t}{a\cos t} = \frac{Z - amt}{am}$$

daukagu. Bereziki, $t = \frac{\pi}{4}$ denerako

$$\frac{X - \frac{a\sqrt{2}}{2}}{-\frac{a\sqrt{2}}{2}} = \frac{Y - \frac{a\sqrt{2}}{2}}{\frac{a\sqrt{2}}{2}} = \frac{Z - am\frac{\pi}{4}}{am}$$

erdiesten dugu.

Planoko kurba baten kasuan bezala, ukitzailearekiko elkartzuta eta ukigunetik pasatzen den zuzena espazioko kurbaren emandako puntuko *normal* deitzen da. Nabaria da espazioko kurba bateko puntu batean infinitu normal dagoela. Guztiak ukitzailearekiko elkartzut den plano batean daude. Aipatu planoa *plano normal* deitzen da.

Atera dezagun plano normalaren ekuazioa, ukitzailearekiko elkartzutikotasunaren baldintzatik abiatuz:

$$\frac{dx}{dt}(X - x) + \frac{dy}{dt}(Y - y) + \frac{dz}{dt}(Z - z) = 0. \qquad (5)$$

2. Adibidea. Idatzi helizearen plano normalaren ekuazioa parametroaren $t = \frac{\pi}{4}$ baliorako.

Ebazpena. 1. adibidearen emaitzak eta (5) formula erabiliz

$$-\frac{\sqrt{2}}{2}\left(X - \frac{a\sqrt{2}}{2}\right) + \frac{\sqrt{2}}{2}\left(Y - \frac{a\sqrt{2}}{2}\right) + m\left(Z - am\frac{\pi}{4}\right) = 0$$

daukagu.

Atera ditzagun, orain,

$$\Phi_1(x, y, z) = 0, \quad \Phi_2(x, y, z) = 0 \qquad (6)$$

ekuazioek emandako espazioko kurba baten ukitzaile eta plano normalaren ekuazioak.

Adieraz ditzagun kurba horren x, y, z koordenatuak t hautazko parametro baten funtzioan:

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad z = \chi(t). \tag{7}$$

Demagun $\varphi(t)$, $\psi(t)$, $\chi(t)$ t-rekiko funtzio deribagarriak direla.

(6) ekuazioan x, y, z kurbako puntuetarako t-ren funtzioan dituzten adierazpenez ordezkatuz t-rekiko bi identitate lortzen dugu

$$\Phi_1[\varphi(t), \psi(t), \chi(t)] = 0, \tag{8a}$$

$$\Phi_2[\varphi(t), \psi(t), \chi(t)] = 0, \tag{8b}$$

alegia. t-rekiko deribatuz

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial\Phi_1}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial\Phi_1}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial\Phi_1}{\partial z}\frac{dz}{dt} = 0, \\ \frac{\partial\Phi_2}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial\Phi_2}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial\Phi_2}{\partial z}\frac{dz}{dt} = 0 \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

aurkitzen ditugu. (9) ekuazioetatik

$$\frac{\frac{dx}{dt}}{\frac{dz}{dt}} = \frac{\frac{\partial\Phi_1}{\partial y}\frac{\partial\Phi_2}{\partial z} - \frac{\partial\Phi_1}{\partial z}\frac{\partial\Phi_2}{\partial y}}{\frac{\partial\Phi_1}{\partial x}\frac{\partial\Phi_2}{\partial y} - \frac{\partial\Phi_1}{\partial y}\frac{\partial\Phi_2}{\partial x}}; \quad \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dz}{dt}} = \frac{\frac{\partial\Phi_1}{\partial z}\frac{\partial\Phi_2}{\partial x} - \frac{\partial\Phi_1}{\partial x}\frac{\partial\Phi_2}{\partial z}}{\frac{\partial\Phi_1}{\partial x}\frac{\partial\Phi_2}{\partial y} - \frac{\partial\Phi_1}{\partial y}\frac{\partial\Phi_2}{\partial x}} \tag{10}$$

ondorioztatzen dira. Demagun

$$\frac{\partial\Phi_1}{\partial x}\frac{\partial\Phi_2}{\partial y} - \frac{\partial\Phi_1}{\partial y}\frac{\partial\Phi_2}{\partial x} \neq 0$$

dela. Hala ere, (11) eta (12) formulek (beherago agertuko direnak) adierazpen hori zero deneko kasurako ere balio dutela froga daiteke, baldin eta formula horietan agertzen diren determinanteetako bat zero ez bada. (10) berdintzetatik

$$\frac{\frac{dx}{dt}}{\frac{\partial\Phi_1}{\partial y}\frac{\partial\Phi_2}{\partial z} - \frac{\partial\Phi_1}{\partial z}\frac{\partial\Phi_2}{\partial y}} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{\partial\Phi_1}{\partial z}\frac{\partial\Phi_2}{\partial x} - \frac{\partial\Phi_1}{\partial x}\frac{\partial\Phi_2}{\partial z}} = \frac{\frac{dz}{dt}}{\frac{\partial\Phi_1}{\partial x}\frac{\partial\Phi_2}{\partial y} - \frac{\partial\Phi_1}{\partial y}\frac{\partial\Phi_2}{\partial x}}$$

daukagu.

Hortaz (4) formularen arabera, ukitzailearen ekuazioak

$$\frac{X-x}{\frac{\partial\Phi_1}{\partial y}\frac{\partial\Phi_2}{\partial z}-\frac{\partial\Phi_1}{\partial z}\frac{\partial\Phi_2}{\partial y}}=\frac{Y-y}{\frac{\partial\Phi_1}{\partial z}\frac{\partial\Phi_2}{\partial x}-\frac{\partial\Phi_1}{\partial x}\frac{\partial\Phi_2}{\partial z}}=\frac{Z-z}{\frac{\partial\Phi_1}{\partial x}\frac{\partial\Phi_2}{\partial y}-\frac{\partial\Phi_1}{\partial y}\frac{\partial\Phi_2}{\partial x}}$$

itxura izango du, edo, determinanteak erabiliz,

$$\frac{X-x}{\begin{vmatrix}\frac{\partial\Phi_1}{\partial y} & \frac{\partial\Phi_1}{\partial z}\\ \frac{\partial\Phi_2}{\partial y} & \frac{\partial\Phi_2}{\partial z}\end{vmatrix}}=\frac{Y-y}{\begin{vmatrix}\frac{\partial\Phi_1}{\partial z} & \frac{\partial\Phi_1}{\partial x}\\ \frac{\partial\Phi_2}{\partial z} & \frac{\partial\Phi_2}{\partial x}\end{vmatrix}}=\frac{Z-z}{\begin{vmatrix}\frac{\partial\Phi_1}{\partial x} & \frac{\partial\Phi_1}{\partial y}\\ \frac{\partial\Phi_2}{\partial x} & \frac{\partial\Phi_2}{\partial y}\end{vmatrix}}. \tag{11}$$

Plano normalaren ekuazioa

$$(X-x)\begin{vmatrix}\frac{\partial\Phi_1}{\partial y} & \frac{\partial\Phi_1}{\partial z}\\ \frac{\partial\Phi_2}{\partial y} & \frac{\partial\Phi_2}{\partial z}\end{vmatrix}+(Y-y)\begin{vmatrix}\frac{\partial\Phi_1}{\partial z} & \frac{\partial\Phi_1}{\partial x}\\ \frac{\partial\Phi_2}{\partial z} & \frac{\partial\Phi_2}{\partial x}\end{vmatrix}+(Z-z)\begin{vmatrix}\frac{\partial\Phi_1}{\partial x} & \frac{\partial\Phi_1}{\partial y}\\ \frac{\partial\Phi_2}{\partial x} & \frac{\partial\Phi_2}{\partial y}\end{vmatrix}=0 \tag{12}$$

izango da.

Azkeneko formulek soilik balioko dute gutxienez determinante bat zero ez bada. Kurbako puntu batean

$$\begin{vmatrix}\frac{\partial\Phi_1}{\partial y} & \frac{\partial\Phi_1}{\partial z}\\ \frac{\partial\Phi_2}{\partial y} & \frac{\partial\Phi_2}{\partial z}\end{vmatrix},\ \begin{vmatrix}\frac{\partial\Phi_1}{\partial z} & \frac{\partial\Phi_1}{\partial x}\\ \frac{\partial\Phi_2}{\partial z} & \frac{\partial\Phi_2}{\partial x}\end{vmatrix},\ \begin{vmatrix}\frac{\partial\Phi_1}{\partial x} & \frac{\partial\Phi_1}{\partial y}\\ \frac{\partial\Phi_2}{\partial x} & \frac{\partial\Phi_2}{\partial y}\end{vmatrix}$$

hiru determinanteak batera nuluak badira, aipatutako puntua espazioko kurbaren *puntu singular* deitzen da. Kurbak ez du zertan ukitzailerik izan behar puntu horretan, planoko kurben puntu singularretan bezala (ikus VIII. gaiko § 19.)

3. Adibidea. Bilatu $x^2+y^2+z^2=4r^2$ esfera eta $x^2+y^2=2ry$ zilindroaren arteko ebakidurak definitutako kurbaren ukitzaile eta plano normalaren ekuazioak, $M(r,r,r\sqrt{2})$ puntuan (197. irudia).

Ebazpena.

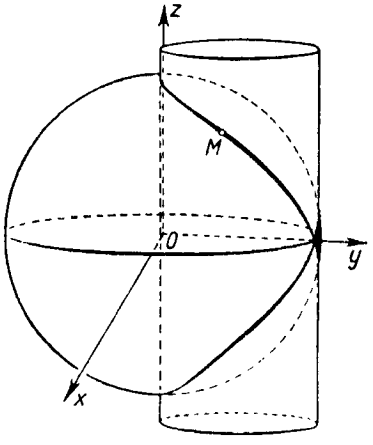
$$\Phi_1(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 4r^2,$$
$$\Phi_2(x,y,z) = x^2 + y^2 - 2ry,$$
$$\frac{\partial\Phi_1}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial\Phi_1}{\partial y} = 2y, \quad \frac{\partial\Phi_1}{\partial z} = 2z,$$
$$\frac{\partial\Phi_2}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial\Phi_2}{\partial y} = 2y - 2r, \quad \frac{\partial\Phi_2}{\partial z} = 0.$$

Deribatuen balioak emandako M puntuan

$$\frac{\partial\Phi_1}{\partial x} = 2r, \quad \frac{\partial\Phi_1}{\partial y} = 2r, \quad \frac{\partial\Phi_1}{\partial z} = 2r\sqrt{2},$$
$$\frac{\partial\Phi_2}{\partial x} = 2r, \quad \frac{\partial\Phi_2}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial\Phi_2}{\partial z} = 0$$

izango dira. Horrexegatik, ukitzailearen ekuazioa

$$\frac{X - r}{0} = \frac{Y - r}{\sqrt{2}} = \frac{Z - r\sqrt{2}}{-1}$$



197. IRUDIA

da. Eta plano normalaren ekuazioa

$$\sqrt{2}(Y - r) - (Z - r\sqrt{2}) = 0.$$

§ 3. Bektoreen (funtzio bektorialen) deribazio-erregelak

$$\mathbf{r}(t) = \varphi(t)\mathbf{i} + \psi(t)\mathbf{j} + \chi(t)\mathbf{k} \tag{1}$$

bektorearen deribatua

$$\mathbf{r}'(t) = \varphi'(t)\mathbf{i} + \psi'(t)\mathbf{j} + \chi'(t)\mathbf{k} \tag{2}$$

adierazpenaz definitu dugu.

Definizio horretatik berehala ondorioztatzen da funtzioen deribazioaren oinarrizko erregelek bektoreetarako ere balio dutela.

Sar dezagun orain funtzioen zenbait deribazio-formula bektoreetarako. Formula horiek aurrerago beharko ditugu.

I. Bektoreen arteko baturaren deribatua bektore horien deribatuen arteko batura da.

Izan ere,

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{r}_1(t) &= \varphi_1(t)\mathbf{i} + \psi_1(t)\mathbf{j} + \chi_1(t)\mathbf{k}, \\ \mathbf{r}_2(t) &= \varphi_2(t)\mathbf{i} + \psi_2(t)\mathbf{j} + \chi_2(t)\mathbf{k} \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

bektoreak ematen badira, beraien batura

$$\mathbf{r}_1(t) + \mathbf{r}_2(t) = [\varphi_1(t) + \varphi_2(t)]\mathbf{i} + [\psi_1(t) + \psi_2(t)]\mathbf{j} + [\chi_1(t) + \chi_2(t)]\mathbf{k}$$

izango da.

Definizioz, bektore aldakor baten deribatua

$$\frac{d[\mathbf{r}_1(t) + \mathbf{r}_2(t)]}{dt} = [\varphi_1(t) + \varphi_2(t)]'\mathbf{i} + [\psi_1(t) + \psi_2(t)]'\mathbf{j} + [\chi_1(t) + \chi_2(t)]'\mathbf{k}$$

da, edo

$$\frac{d[\mathbf{r}_1(t) + \mathbf{r}_2(t)]}{dt} = [\varphi_1'(t) + \varphi_2'(t)]\mathbf{i} + [\psi_1'(t) + \psi_2'(t)]\mathbf{j} + [\chi_1'(t) + \chi_2'(t)]\mathbf{k} =$$

$$= \varphi_1'(t)\mathbf{i} + \psi_1'(t)\mathbf{j} + \chi_1'(t)\mathbf{k} + \varphi_2'(t)\mathbf{i} + \psi_2'(t)\mathbf{j} + \chi_2'(t)\mathbf{k} = \mathbf{r}_1' + \mathbf{r}_2'.$$

Hortaz,

$$\frac{d[\mathbf{r}_1(t)+\mathbf{r}_2(t)]}{dt}=\frac{d\mathbf{r}_1}{dt}+\frac{d\mathbf{r}_2}{dt} \qquad \text{(I)}$$

dugu.

II. Bi bektoreren arteko biderkadura eskalarraren deribatua

$$\frac{d(\mathbf{r}_1\mathbf{r}_2)}{dt}=\frac{d\mathbf{r}_1}{dt}\mathbf{r}_2+\mathbf{r}_1\frac{d\mathbf{r}_2}{dt} \qquad \text{(II)}$$

formulaz lortzen da.

Izan ere, $\mathbf{r}_1(t)$ eta $\mathbf{r}_2(t)$ bektoreak (3) formulaz badaude definiturik, beraien arteko biderkadura eskalarra

$$\mathbf{r}_1(t)\mathbf{r}_2(t)=\varphi_1\varphi_2+\psi_1\psi_2+\chi_1\chi_2$$

da. Horregatik,

$$\begin{aligned}\frac{d(\mathbf{r}_1\mathbf{r}_2)}{dt}&=\varphi_1'\varphi_2+\varphi_1\varphi_2'+\psi_1'\psi_2+\psi_1\psi_2'+\chi_1'\chi_2+\chi_1\chi_2'=\\&=(\varphi_1'\varphi_2+\psi_1'\psi_2+\chi_1'\chi_2)+(\varphi_1\varphi_2'+\psi_1\psi_2'+\chi_1\chi_2')=\\&=(\varphi_1'\mathbf{i}+\psi_1'\mathbf{j}+\chi_1'\mathbf{k})(\varphi_2\mathbf{i}+\psi_2\mathbf{j}+\chi_2\mathbf{k})+\\&+(\varphi_1\mathbf{i}+\psi_1\mathbf{j}+\chi_1\mathbf{k})(\varphi_2'\mathbf{i}+\psi_2'\mathbf{j}+\chi_2'\mathbf{k})=\frac{d\mathbf{r}_1}{dt}\mathbf{r}_2+\mathbf{r}_1\frac{d\mathbf{r}_2}{dt}.\end{aligned}$$

Horrela teorema frogaturik dago.

(II) formulatik ondoko korolario garrantzitsua ateratzen da:

Korolarioa. $\mathbf{e}$ bektore unitarioa bada, hau da $|\mathbf{e}|=1$, bere deribatua bere buruarekiko elkartzut den bektorea da.

Frogapena. Baldin $\mathbf{e}$ bektore unitarioa bada, $\mathbf{ee}=1$ daukagu.

Azken berdintzaren atalak deriba ditzagun t-rekiko:

$$\mathbf{e}\frac{d\mathbf{e}}{dt}+\frac{d\mathbf{e}}{dt}\mathbf{e}=0,$$

edo,

$$2\mathbf{e}\frac{d\mathbf{e}}{dt}=0,$$

hau da,

$$\mathbf{e}\frac{d\mathbf{e}}{dt}=0$$

berdintza dugu, $\frac{d\mathbf{e}}{dt}$ bektorea $\mathbf{e}$ bektorearekiko elkartzut dela esan nahi duena.

III. $f(t)$ funtzio eskalarra eta $\mathbf{r}(t)$ funtzio bektoriala badira $f(t)\cdot\mathbf{r}(t)$ biderkaduraren deribatua

$$\frac{d(f\mathbf{r})}{dt}=\frac{df}{dt}\mathbf{r}+f\frac{d\mathbf{r}}{dt} \qquad \text{(III)}$$

formulaz lortzen da.

Frogapena. $\mathbf{r}(t)$ (1) formulaz definitzen bada,

$$f(t)\mathbf{r}(t)=f(t)\varphi(t)\mathbf{i}+f(t)\psi(t)\mathbf{j}+f(t)\chi(t)\mathbf{k}$$

izango dugu.

(2) formularen arabera

$$\frac{d[f(t)\cdot\mathbf{r}(t)]}{dt}=\left(\frac{df}{dt}\varphi+f\frac{d\varphi}{dt}\right)\mathbf{i}+\left(\frac{df}{dt}\psi+f\frac{d\psi}{dt}\right)\mathbf{j}+\left(\frac{df}{dt}\chi+f\frac{d\chi}{dt}\right)\mathbf{k}=$$

$$=\frac{df}{dt}(\varphi\mathbf{i}+\psi\mathbf{j}+\chi\mathbf{k})+f\left(\frac{d\varphi}{dt}\mathbf{i}+\frac{d\psi}{dt}\mathbf{j}+\frac{d\chi}{dt}\mathbf{k}\right)=\frac{df}{dt}\mathbf{r}+f\frac{d\mathbf{r}}{dt}$$

daukagu, frogatu nahi genuen legez.

Baldin $f(t)=a=$ktea. bada, $\frac{df}{dt}=0$ eta hurrengo erregela ateratzen da:

IV. Zenbakizko faktore konstante bat deribazio ikurretik atera daiteke

$$\frac{d(a\cdot\mathbf{r}(t))}{dt}=a\frac{d\mathbf{r}}{dt}=a\mathbf{r}'(t). \qquad \text{(IV)}$$

II formulan erabilitako antzeko eran frogatzen da:

V. $\mathbf{r}_1(t)$ eta $\mathbf{r}_2(t)$ bektoreen arteko biderkadura bektorialaren deribatua

$$\frac{d(\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2)}{dt} = \frac{d\mathbf{r}_1}{dt} \times \mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_1 \times \frac{d\mathbf{r}_2}{dt} \qquad \text{(V)}$$

formulaz lortzen da.

§ 4. Bektore baten lehenengo eta bigarren deribatuak arkuaren luzerarekiko. Kurbaren kurbadura. Normal nagusia. Puntu higikor baten abiadura eta azelerazioa higidura lerromakurrean

Espazioko kurba baten $\overset{\frown}{M_0A} = s$ arkuaren luzera[2], planoko kurba baten kasuan egin zen antzeko eran determinatzen da (198. irudia). Puntu aldakor bat, $A(x,y,z)$, kurban zehar desplazatzen denean, arkuaren s luzera aldatzen da eta, alderantziz, s aldatzen denean, kurbako A puntu aldakorraren x, y, z koordenatuak ere aldatzen dira. Hortaz, kurbako A puntu aldakorraren koordenatuak s arkuaren luzeraren funtziotzat har daitezke:

$$x = \varphi(s),$$
$$y = \psi(s),$$
$$z = \chi(s).$$

Kurbaren ekuazio parametriko horietan parametroa arkuaren s luzera da.

$\overline{0A} = \mathbf{r}$ bektorea

$$\mathbf{r} = \varphi(s)\mathbf{i} + \psi(s)\mathbf{j} + \chi(s)\mathbf{k}$$

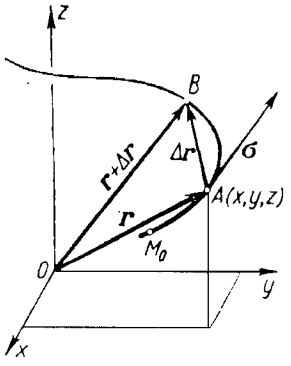
edo

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(s) \qquad (1)$$

adieraziko da, hau da, $\mathbf{r}$ bektorea arkuaren s luzeraren funtzioa da.

---

2) Espazioko kurba baten arkuaren luzera planoko kurba batenaren antzera kalkulatzen da. (ikus VI. gaiko §1 eta XII. gaiko §3).



198. IRUDIA

Argi dezagun $\dfrac{d\mathbf{r}}{ds}$ deribatuaren esanahi geometrikoa. 198. iruditik ateratzen dira ondoko berdintzak:

$$\overset{\frown}{M_0A} = s, \quad \overset{\frown}{AB} = \Delta s, \quad \overset{\frown}{M_0B} = s + \Delta s,$$
$$\overline{OA} = \mathbf{r}(s), \quad \overline{OB} = \mathbf{r}(s + \Delta s),$$
$$\overline{AB} = \Delta\mathbf{r} = \mathbf{r}(s + \Delta s) - \mathbf{r}(s),$$
$$\frac{\Delta\mathbf{r}}{\Delta s} = \frac{\overline{AB}}{\overset{\frown}{AB}}.$$

§ 2an ikusi dugu $\dfrac{d\mathbf{r}}{ds} = \lim\limits_{\Delta s \to 0} \dfrac{\Delta\mathbf{r}}{\Delta s}$ bektorea kurbaren A puntuko ukitzailearen arabera dagoela norabidatuta, s-ren hazkundearen norantzan. Beste aldetik, $\lim \left|\dfrac{\overline{AB}}{\overset{\frown}{AB}}\right| = 1$ berdintza daukagu [korda eta arkuaren luzeren arteko zatiduraren limitea[3)]]. Hortaz, $\dfrac{d\mathbf{r}}{ds}$ ukitzailearen norabideko bektore unitarioa da; izan bedi $\boldsymbol{\sigma}$ bektore hori:

$$\frac{d\mathbf{r}}{ds} = \boldsymbol{\sigma}. \tag{2}$$

---

3) Berdintza hori, planoko kurba baterako frogatu duguna (VI. gaiko §1), $\mathbf{r}(t) = \varphi(t)\mathbf{i} + \psi(t)\mathbf{j} + \chi(t)\mathbf{k}$ espazioko kurba baterako ere betetzen da, $\varphi(t)$, $\psi(t)$ eta $\chi(t)$ funtzioen deribatuak jarraiak badira eta ez badira batera anulatzen.

$\mathbf{r}$ bektorea,

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$$

bere projekzioen bidez emana badago,

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{dx}{ds}\mathbf{i} + \frac{dy}{ds}\mathbf{j} + \frac{dz}{ds}\mathbf{k} \qquad (3)$$

izango da, horrez gain

$$\sqrt{\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dz}{ds}\right)^2} = 1$$

ere beteko da.

Kontsidera dezagun orain $\mathbf{r}$ funtzio bektorialaren bigarren deribatua $\frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2}$, hau da, $\frac{d\mathbf{r}}{ds}$-aren deribatua, eta eman dezagun bigarren deribatu horren esanahi geometrikoa.

(2) formulatik

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2} = \frac{d}{ds}\left[\frac{d\mathbf{r}}{ds}\right] = \frac{d\boldsymbol{\sigma}}{ds}$$

ateratzen da.

Hortaz, $\lim\limits_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta\boldsymbol{\sigma}}{\Delta s}$ kalkulatu behar dugu.

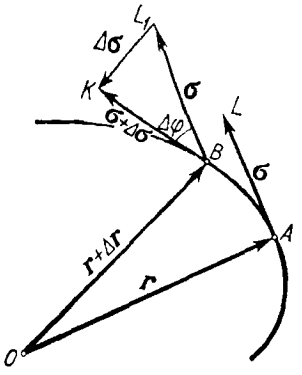
199. irudian, $AB = \Delta s$, $\overline{AL} = \boldsymbol{\sigma}$, $\overline{BK} = \boldsymbol{\sigma} + \Delta\boldsymbol{\sigma}$ direla ikusten da. Marra dezagun B puntutik $\overline{BL_1} = \boldsymbol{\sigma}$ bektorea. BKL_1 triangelutik

$$\overline{BK} = \overline{BL_1} + \overline{L_1K}$$

edo

$$\boldsymbol{\sigma} + \Delta\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma} + \overline{L_1K}$$

ondorioztatzen da.



199. IRUDIA

Beraz, $\overline{L_1K} = \Delta\boldsymbol{\sigma}$. Frogatuagatik, σ bektorearen luzera ez bait da aldatzen, orduan $|\boldsymbol{\sigma}| = |\boldsymbol{\sigma} + \Delta\boldsymbol{\sigma}|$; ondorioz BKL_1 triangelua isoszelea da.

Triangelu horren $\Delta\varphi$ angelua kurbaren ukitzailearen biraketa-angelua da, A puntutik B puntura pasatzen denean, hau da, arkuaren luzeraren Δs gehikuntzari dagokion angelua. BKL_1 triangeluan

$$L_1K = |\Delta\boldsymbol{\sigma}| = 2|\boldsymbol{\sigma}| \left|\sin\frac{\Delta\varphi}{2}\right| = 2\left|\sin\frac{\Delta\varphi}{2}\right|$$

betetzen da ($|\sigma|=1$ da eta).

Azken ekuazioaren bi atalak zati Δs eginez:

$$\left|\frac{\Delta\boldsymbol{\sigma}}{\Delta s}\right| = 2\left|\frac{\sin\frac{\Delta\varphi}{2}}{\Delta s}\right| = \left|\frac{\sin\frac{\Delta\varphi}{2}}{\frac{\Delta\varphi}{2}}\right|\left|\frac{\Delta\varphi}{\Delta s}\right|$$

dugu. Berdintza horren bi ataletan $\Delta s \to 0$ denerako limiteak lor ditzagun. Lehenengo atalean

$$\lim_{\Delta s\to 0}\left|\frac{\Delta\boldsymbol{\sigma}}{\Delta s}\right| = \frac{d\boldsymbol{\sigma}}{ds}$$

erdiesten dugu. Gainera

$$\lim_{\Delta s\to 0}\left|\frac{\sin\frac{\Delta\varphi}{2}}{\frac{\Delta\varphi}{2}}\right| = 1$$

da, emandako kasuan $\lim\limits_{\Delta s \to 0} \dfrac{\Delta\varphi}{\Delta s}$ limitea existitzen deneko kurbak kontsideratzen bait ditugu eta, beraz, $\Delta\varphi \to 0$ dugu $\Delta s \to 0$ denean.

Honela, limiteak hartu eta gero,

$$\left|\frac{d\boldsymbol{\sigma}}{ds}\right| = \lim_{\Delta s \to 0}\left|\frac{\Delta\varphi}{\Delta s}\right| \tag{4}$$

daukagu. Ukitzailearen biraketa-angeluaren, $\Delta\varphi$, eta, A puntutik B puntura pasatzean, AB arkuaren Δs luzeraren arteko arrazoiari (balio absolutuan) planoko kurba baterako bezala, kontsideratutako kurbaren AB arkuaren *batezbesteko kurbadura* deitzen dio:

$$\text{batezbesteko kurbadura} = \left|\frac{\Delta\varphi}{\Delta s}\right|.$$

Batezbesteko kurbaduraren limitea, $\Delta s \to 0$ denean, kurbaren A puntuko kurbadura deitzen da eta K izendatzen da:

$$K = \lim_{\Delta s \to 0}\left|\frac{\Delta\varphi}{\Delta s}\right|.$$

(4) berdintzatik $\left|\dfrac{d\boldsymbol{\sigma}}{ds}\right| = K$ dela ateratzen da, hau da, ukitzailearen bektore unitarioaren arkuaren luzerarekiko deribatuaren modulua[4] lerroaren emandako puntuko kurbaduraren berdina da. σ bektore unitarioa denez gero, bere deribatua, $\dfrac{d\boldsymbol{\sigma}}{ds}$, elkartzut da berarekiko. (ikus IX. gaiko §3, korolarioa).

Honela, $\dfrac{d\boldsymbol{\sigma}}{ds}$ bektorea ukitzailearen elkartzutaren arabera dago norabidatua eta bere modulua kurbaren puntu horretako kurbaduraren berdina da.

---

4) Gogora dezagun bektore baten deribatua ere bektorea dela eta horregatik mintza daiteke horren moduluaz.

Definizioa. $\dfrac{d\boldsymbol{\sigma}}{ds}$ bektorearen norabidea duen eta dagokion kurbaren puntutik pasatzen den zuzena emandako puntuko kurbaren *normal nagusi* deitzen da. Izan bedi $\mathbf{n}$ norabide horretako bektore unitarioa.

$\dfrac{d\boldsymbol{\sigma}}{ds}$ bektorearen luzera kurbaren K kurbaduraren berdina denez gero

$$\frac{d\boldsymbol{\sigma}}{ds} = K\mathbf{n}$$

daukagu.

$\dfrac{1}{K}$ magnitudea, kurbaduraren alderantzizkoa, emandako puntuko kurba horren *kurbadur erradio* deitzen da eta R izendatzen da, hots, $\dfrac{1}{K} = R$. Orduan,

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2} = \frac{d\boldsymbol{\sigma}}{ds} = \frac{\mathbf{n}}{R} \tag{5}$$

idatz daiteke.

(5) formulatik

$$\frac{1}{R^2} = \left(\frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2}\right)^2 \tag{6}$$

ateratzen da. Baina,

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2} = \frac{d^2x}{ds^2}\mathbf{i} + \frac{d^2y}{ds^2}\mathbf{j} + \frac{d^2z}{ds^2}\mathbf{k}$$

dugu. Beraz,

$$\frac{1}{R} = \sqrt{\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{ds^2}\right)^2} \tag{6'}$$

da.

Azken formulak ekuazio parametrikoetan definituriko kurba baten edozein puntutako kurbadura kalkulatzen uzten digu, parametroa arkuaren s luzera izanik (hau da, kurba horretako puntu aldakorraren erradio bektorea arkuaren luzeraren funtzioa denean).

Kontsidera dezagun $\mathbf{r}$ erradio bektorea t hautazko parametro baten funtzioa deneko kasua:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t).$$

Kasu honetan, arkuaren s luzera t parametroaren funtzioa dela kontsideratuko dugu. Kurbaduraren kalkulua ondoko eran egingo da:

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d\mathbf{r}}{ds}\frac{ds}{dt}. \tag{7}$$

$\left|\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right| = 1$ denez gero[5],

$$\left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right)^2 = \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 \tag{8}$$

izango da.

Bi atalak deribatuz eta $2z$ zatituz gero

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt}\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \frac{ds}{dt}\frac{d^2s}{dt^2} \tag{9}$$

lortzen dugu.

(7) formulatik

$$\frac{d\mathbf{r}}{ds} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}\frac{1}{\frac{ds}{dt}}$$

ondorioztatzen da.

---

5) Berdintza hori $\left|\frac{d\mathbf{r}}{ds}\right| = \lim_{\Delta s \to 0}\left|\frac{\Delta\mathbf{r}}{\Delta s}\right|$ berdintzatik dator. Baina, $\Delta\mathbf{r}$ Δs luzerako arkuaren korda da. Beraz, $\left|\frac{\Delta\mathbf{r}}{\Delta s}\right|$ 1erantz doa, $\Delta s \to 0$ denean.

Azken berdintzaren bi atalak s-rekiko deribatuz

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2}=\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}\frac{1}{\left(\frac{ds}{dt}\right)^2}-\frac{d\mathbf{r}}{dt}\frac{\frac{d^2s}{dt^2}}{\left(\frac{ds}{dt}\right)^3}$$

daukagu.

$\frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2}$ deribaturako aurkitutako adierazpena (6) formulan sartuz

$$\frac{1}{R^2}=\left[\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}\frac{1}{\left(\frac{ds}{dt}\right)^2}-\frac{d\mathbf{r}}{dt}\frac{\frac{d^2s}{dt^2}}{\left(\frac{ds}{dt}\right)^3}\right]^2=\frac{\left(\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}\right)^2\left(\frac{ds}{dt}\right)^2-2\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}\frac{d\mathbf{r}}{dt}\frac{ds}{dt}\frac{d^2s}{dt^2}+\left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right)^2\left(\frac{d^2s}{dt^2}\right)^2}{\left(\frac{ds}{dt}\right)^6}$$

lortzen dugu.

Adieraz ditzagun orain $\frac{ds}{dt}$ eta $\frac{d^2s}{dt^2}$ $\mathbf{r}(t)$-ren deribatuen funtzioan (8) eta (9) formuletatik abiatuz eta

$$\frac{1}{R^2}=\frac{\left(\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}\right)^2\left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right)^2-\left(\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right)^2}{\left\{\left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right)^2\right\}^3} \tag{10}$$

erdiesten dugu[6].

(10) formula

$$K^2 = \frac{1}{R^2} = \frac{\left[\frac{d\mathbf{r}}{dt} \times \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}\right]^2}{\left\{\left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right)^2\right\}^3} \tag{11}$$

eran ere idatz daiteke[7].

Horrela lortu dugu, parametroa edozein izanik ere, kurba baten edozein puntutako kurbadura kalkulatzen uzten digun formula.

Baldin kurba $0xy$ planoan badago, bere ekuazio parametrikoak

$$x = \varphi(t),$$
$$y = \psi(t),$$
$$z = 0$$

dira.

x, y, z-ren adierazpenak (11) formulan ordezkatuz, formula ezaguna (ikus VI. gaia) lortzen dugu, ekuazio parametrikoetan emandako planoko kurba baten kurbadura ematen duena alegia:

---

6) Transforma dezagun izendatzailea ondoko eran: $\left(\frac{ds}{dt}\right)^6 = \left\{\left(\frac{ds}{dt}\right)^2\right\}^3 = \left\{\left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right)^2\right\}^3$. Hemen ezin dugu $\left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right)^6$ idatzi, $\left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right)^2$ gaiak $\frac{d\mathbf{r}}{dt}$ bektorearen karratu eskalarra adierazten bait du, $\left\{\left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right)^2\right\}^3$ gaiak $\left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right)^2$ zenbakiaren kuboa adierazten duen bitartean. $\left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right)^6$ adierazpenak ez du zentzurik.

7) $a^2b^2 - (ab)^2 = (a \times b)^2$ identitatea erabili dugu. Balio duela frogatzeko nahikoa da

$$a^2b^2 - (ab\cos\varphi)^2 = (ab\sin\varphi)^2$$

eran idaztea.

$$K = \frac{\left|\varphi'(t)\psi''(t) - \psi'(t)\varphi''(t)\right|}{\left\{\left[\varphi'(t)\right]^2 + \left[\psi'(t)\right]^2\right\}^{3/2}}.$$

Adibidea. Bilatu

$$\mathbf{r} = \mathbf{i}a\cos t + \mathbf{j}a\sin t + \mathbf{k}amt$$

helizearen kurbadura, puntu orokor batean.

Ebazpena.

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = -\mathbf{i}a\sin t + \mathbf{j}a\cos t + \mathbf{k}am, \quad \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = -\mathbf{i}a\cos t - \mathbf{j}a\sin t,$$

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} \times \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -a\sin t & a\cos t & am \\ -a\cos t & -a\sin t & 0 \end{vmatrix} = \mathbf{i}a^2 m\sin t - \mathbf{j}a^2 m\cos t + \mathbf{k}a^2,$$

$$\left(\frac{d\mathbf{r}}{dt} \times \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}\right)^2 = a^4(m^2+1), \quad \left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right)^2 = a^2\sin^2 t + a^2\cos^2 t + a^2m^2 = a^2(1+m^2).$$

Beraz,

$$\frac{1}{R^2} = \frac{a^4(m^2+1)}{\left[a^2(1+m^2)\right]^3} = \frac{1}{a^2(1+m^2)^2}$$

dugu, nondik

$$R = a(1+m^2) = \text{ktea}.$$

lortzen dugun. Honela bada, helizearen kurbadur erradioa konstante da.

Oharra. Beti suposa daiteke kurba laun bat Oxy planoan dagoela (erraz froga daitekeena, koordenatu-sistema egokiro aldatuz). Ondorioz, Oxy planoan $z=0$ da, baina kasu honetan $\frac{d^2z}{ds^2} = 0$, eta, beraz, $\mathbf{n}$ bektorea ere Oxy planoan dago kokaturik.

Hortik, ondorio garrantzitsu bat atera daiteke: kurba laun baten normal nagusia kurbaren plano berean dago.

Puntu baten abiadura higidura lerromakurrean. Puntu higikor bat, t unean M puntuan badago, $\overline{OM} = \mathbf{r}(t)$ (196. irudia) erradio bektoreak determinatua, eta $t + \Delta t$ beste une batean $\overline{OM_1} = \mathbf{r}(t + \Delta t)$ erradio bektoreak determinatutako M_1 puntuan, $\overline{MM_1}$ bektorea puntuaren *desplazamendu-bektore* deitzen da. $\overline{MM_1}$ desplazamendu-bektore eta dagokion denboraren Δt gehikuntzaren arteko arrazoiari, puntuaren *batezbesteko abiadura*, Δt tartean, deitzen zaio

$$v_{bb} = \frac{\overline{MM_1}}{\Delta t} = \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} = \overline{MN}.$$

Batezbesteko abiadura adierazten duen bektorea MM_1 kordan zehar dago norabidatua (196. irudia) puntuaren higiduraren norantzan (higidura zuzenean bektorearen norabidea ibilbidearekin bat dator).

$\frac{d\mathbf{r}}{dt}$, puntuaren abiadura une batean,

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \left(v_{bb}\right) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}$$

formularen bidez determinatzen da, hau da,

$$v = \frac{d\mathbf{r}}{dt}. \qquad (12)$$

Hortaz, zera esan daiteke:

Puntuaren abiadura une batean, puntu horren erradio bektorearen denborarekiko lehenengo deribatuaren berdina da.

(2) formularen arabera, abiaduraren koordenatu-ardatzen gaineko projekzioak

$$v_x = \frac{dx}{dt}, \quad v_y = \frac{dy}{dt}, \quad v_z = \frac{dz}{dt}$$

dira.

Determina dezagun abiaduraren modulua (3) formularen bidez:

$$|v| = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}. \tag{13}$$

Sar dezagun arkuaren s luzera (pasarte honen hasieran egin dugun bezala) eta kontsidera dezagun s t denboraren funtzio bezala. Orduan (12) formula

$$v = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d\mathbf{r}}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = \boldsymbol{\sigma} \cdot v \tag{14}$$

idatz dezakegu, non $v = \frac{ds}{dt}$ abiaduraren balio absolutua; σ ukitzailearen norabideko bektore unitarioa, higiduraren norantzan, bait dira.

Puntu kigikor baten azelerazioa higidura lerromakurrean. III. gaiko § 25ean higidura zuzenaren azelerazioa hartu dugu kontutan. Antzeko eran higidura lerromakurrean, abiadura bektorearen denborarekiko deribatuari puntu bateko ω azelerazio deitzen zaio:

$$\omega = \frac{dv}{dt}, \tag{15}$$

baina,

$$v = \frac{d\mathbf{r}}{dt}$$

da. Hortaz,

$$\omega = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} \tag{16}$$

dugu. (14) formulatik

$$\omega = \frac{dv}{dt} = \frac{d(v \cdot \boldsymbol{\sigma})}{dt}$$

erdiesten dugu.

Azken deribatua § 3ko III. formularen bidez garatuz

$$\omega = \frac{dv}{dt}\boldsymbol{\sigma} + v\frac{d\boldsymbol{\sigma}}{dt} \tag{17}$$

daukagu. Transforma dezagun $\frac{d\sigma}{dt}$ deribatua (5) formularen bidez:

$$\frac{d\sigma}{dt} = \frac{d\sigma}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = \frac{\mathbf{n}}{R} v.$$

$\frac{d\sigma}{dt}$-aren adierazpena (17) berdintzan sartuz gero,

$$\omega = \frac{dv}{dt} \cdot \sigma + v^2 \frac{\mathbf{n}}{R} \tag{18}$$

erdiesten dugu.

Hor, σ ukitzailean zeharreko bektore unitarioa da, higiduraren norantzan; $\mathbf{n}$ normal nagusian zeharreko bektore unitarioa.

Ondorioz, (18) formula honela interpreta daiteke: puntu baten azelerazioaren ukitzailearen gaineko projekzioa abiaduraren balio absolutuaren lehenengo deribatuaren berdina da; azelerazioaren normal nagusiaren gaineko projekzioa abiaduraren karratuaren eta ibilbidearen puntu horretako kurbadur erradioaren arteko zatidura da.

σ eta $\mathbf{n}$ bektoreak elkarren elkartzut direnez gero, azelerazioaren modulua

$$|\omega| = \sqrt{\left(\frac{dv}{dt}\right)^2 + \left(\frac{v^2}{R}\right)^2} \tag{19}$$

formularen bidez determinatzen da.

§ 5. Plano oskulatzailea. Binormala. Bihurdura

1. Definizioa. Kurba bateko A puntuko ukitzaile eta normal nagusitik pasatzen den planoa A puntuko *plano oskulatzaile* deitzen da. Kurba bat launa denean, plano oskulatzailea eta kurbaren planoa bat datoz. Kurba launa ez bada, P eta P_1 puntuetako plano oskulatzaileek μ angelu diedroa osatzen dute, bien artean. Angelua zenbat eta handiagoa izan, orduan kurba kurba launetik gero eta gehiago urruntzen da. Kontu hori zehazteko asmoz, eman dezagun ondoko definizioa.

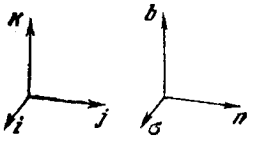
2. Definizioa. Kurbaren normalak, plano oskulatzailearekiko elkartzutak, *binormal* du izena.

Har dezagun **b** unitate bektore bat binormalaren gainean eta eman diezaiogun norantza $\sigma, \mathbf{n}, \mathbf{b}$ bektoreek osatzen duten triedroak koordenatu-ardatzetako $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ unitate bektoreenaren norabide bera izan dezan (200. eta 201. irudiak).

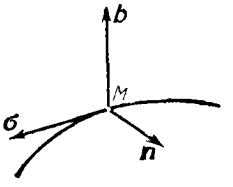
Bektoreen arteko biderkadura bektorial eta eskalarraren definizioaren arabera

$$\mathbf{b} = \sigma \times \mathbf{n}; \quad \mathbf{bb} = 1 \tag{1}$$

daukagu.



200. IRUDIA



201. IRUDIA

Bila dezagun $\dfrac{d\mathbf{b}}{ds}$ deribatua. § 3ko (IV) formularen arabera

$$\frac{d\mathbf{b}}{ds} = \frac{d(\sigma \times \mathbf{n})}{ds} = \frac{d\sigma}{ds} \times \mathbf{n} + \sigma \times \frac{d\mathbf{n}}{ds} \tag{2}$$

dugu. Baina, $\dfrac{d\sigma}{ds} = \dfrac{\mathbf{n}}{R}$ da (ikus § 4); horregatik,

$$\frac{d\sigma}{ds} \times \mathbf{n} = \frac{1}{R}\mathbf{n} \times \mathbf{n} = 0,$$

eta (2) formulak

$$\frac{d\mathbf{b}}{ds} = \sigma \times \frac{d\mathbf{n}}{ds} \tag{3}$$

itxura hartzen du.

Biderkadura bektorialaren definiziotik, $\dfrac{d\mathbf{b}}{ds}$ bektorea ukitzailearen σ bektorearekiko elkartzut dela ondorioztatzen da. Bestalde, $\dfrac{d\mathbf{b}}{ds}$ deribatua elkartzut da **b**-rekiko, **b** unitate bektore bait da (ikus §3ko koralarioa).

Hortaz, $\frac{d\mathbf{b}}{ds}$ bektorea σ eta $\mathbf{b}$-rekiko elkartzut da, hau da, $\mathbf{n}$-ren norabidea dauka.

Izan bedi $\frac{1}{T}$, $\frac{d\mathbf{b}}{ds}$ bektorearen modulua, hots, egin dezagun

$$\left|\frac{d\mathbf{b}}{ds}\right| = \frac{1}{T}.$$

Beraz, hauxe dugu:

$$\frac{d\mathbf{b}}{ds} = \frac{1}{T}\mathbf{n}. \qquad (4)$$

$\frac{1}{T}$ magnitudea kurbaren *bihurdura* deitzen da.

μ angelu diedroa, kurbako bi puntutako plano oskulatzaileek osatua, binormalek osatutako angeluaren berdina da. IX. gaiko § 4ko (4) formularen antzera

$$\left|\frac{d\mathbf{b}}{ds}\right| = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\mu}{|\Delta s|}$$

idatz daiteke.

Honela, kurbaren A puntuko bihurdura, balio absolutuan, A eta B puntuetako plano oskulatzaileek osatutako μ angelua eta AB arkuaren $|\Delta s|$ luzeraren arteko arrazoiaren limitea da, $\Delta s \to 0$ denean.

Kurba launa bada, plano oskulatzailea ez da aldatzen eta, beraz, bihurdura zero da.

Bihurduraren definiziotik ateratzen da magnitude horrek karakterizatzen duela kurba abaildu eta kurba launaren arteko diferentzia. T magnitudea kurbaren *bihurdura erradio* deitzen da.

Bila dezagun bihurdura kalkulatzeko formula . (3) eta (4) formuletatik

$$\frac{1}{T}\mathbf{n} = \boldsymbol{\sigma} \times \frac{d\mathbf{n}}{ds}$$

ateratzen da.

Bi atalak $\mathbf{n}$-z biderkatuz (eskalarra)

$$\frac{1}{T}\mathbf{nn} = \mathbf{n}\left[\boldsymbol{\sigma} \times \frac{d\mathbf{n}}{ds}\right]$$

erdiesten dugu.

Berdintza horren bigarren atala $\mathbf{n}$, $\boldsymbol{\sigma}$ eta $\frac{d\mathbf{n}}{ds}$ hiru bektoreen arteko biderkadura nahasia deiturikoa da. Dakigunez, biderkadura hori ez da aldatzen faktoreen permutazio ziklikoz. $\mathbf{nn} = 1$ denez, idatz dezagun azken berdintza

$$\frac{1}{T} = \boldsymbol{\sigma}\left[\frac{d\mathbf{n}}{ds} \times \mathbf{n}\right]$$

edo

$$\frac{1}{T} = -\boldsymbol{\sigma}\left[\mathbf{n} \times \frac{d\mathbf{n}}{ds}\right] \tag{5}$$

eran.

Baina, $\mathbf{n} = R\frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2}$ denez,

$$\frac{d\mathbf{n}}{ds} = R\frac{d^3\mathbf{r}}{ds^3} + \frac{dR}{ds} \cdot \frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2}$$

eta

$$\left[\mathbf{n} \times \frac{d\mathbf{n}}{ds}\right] = R\frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2} \times \left\{R\frac{d^3\mathbf{r}}{ds^3} + \frac{dR}{ds}\frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2}\right\} = R^2\left[\frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2} \times \frac{d^3\mathbf{r}}{ds^3}\right] + R\frac{dR}{ds}\left[\frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2} \times \frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2}\right]$$

izango dugu. Bektore bat eta bere buruaren arteko biderkadura bektoriala zero denez gero,

$$\left[\frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2} \times \frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2}\right] = 0.$$

Honela,

$$\left[\mathbf{n}\times\frac{d\mathbf{n}}{ds}\right]=R^2\left[\frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2}\times\frac{d^3\mathbf{r}}{ds^3}\right]$$

da.

Ohar gaitezen $\boldsymbol{\sigma}=\dfrac{d\mathbf{r}}{ds}$ dela, (5) berdintzaren arabera, beraz,

$$\frac{1}{T}=-R^2\frac{d\mathbf{r}}{ds}\left[\frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2}\times\frac{d^3\mathbf{r}}{ds^3}\right] \tag{6}$$

da.

$\mathbf{r}$ bektorea t hautazko parametro baten funtzioan adierazita badago,

$$\frac{d\mathbf{r}}{ds}\left[\frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2}\times\frac{d^3\mathbf{r}}{ds^3}\right]=\frac{\dfrac{d\mathbf{r}}{dt}\left[\dfrac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}\times\dfrac{d^3\mathbf{r}}{dt^3}\right]}{\left\{\left(\dfrac{d\mathbf{r}}{dt}\right)^2\right\}^3}$$

dela froga daiteke[8)] (aurreko ataleko prozedura bera erabiliz).

---

8) Izan ere,

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt}=\frac{d\mathbf{r}}{ds}\frac{ds}{dt}$$

dugu. Deriba dezagun berriro berdintza hori t-rekiko:

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}=\frac{d}{ds}\left(\frac{d\mathbf{r}}{ds}\right)\frac{ds}{dt}\frac{ds}{dt}+\frac{d\mathbf{r}}{ds}\frac{d^2s}{dt^2}=\frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2+\frac{d\mathbf{r}}{ds}\frac{d^2s}{dt^2}.$$

Deriba dezagun berriro t-rekiko:

$$\frac{d^3\mathbf{r}}{dt^3}=\frac{d}{ds}\left(\frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2}\right)\frac{ds}{dt}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2+\frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2}2\frac{ds}{dt}\frac{d^2s}{dt^2}+\frac{d}{ds}\left(\frac{d\mathbf{r}}{ds}\right)\frac{ds}{dt}\frac{d^2s}{dt^2}+\frac{d\mathbf{r}}{ds}\frac{d^3s}{dt^3}=$$

$$=\frac{d^3\mathbf{r}}{ds^3}\left(\frac{ds}{dt}\right)^3+3\frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2}\frac{ds}{dt}\frac{d^2s}{dt^2}+\frac{d\mathbf{r}}{ds}\frac{d^3s}{dt^3}.$$

Era dezagun orain biderkadura nahasia

Adierazpen hori (6) formulan sartuz eta R^2 bere adierazpenaz ordezkatuz, §4ko (11) formularen arabera,

$$\frac{1}{T} = -\frac{\dfrac{d\mathbf{r}}{dt}\left(\dfrac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} \times \dfrac{d^3\mathbf{r}}{dt^3}\right)}{\left(\dfrac{d\mathbf{r}}{dt} \times \dfrac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}\right)^2} \tag{7}$$

lortzen dugu azkenik.

Formula horrek, ekuazio parametrikoen bidez, t parametroaren funtzioan, emandako kurba baten edozein puntutako bihurdura, kalkulatzen uzten digu.

Ondorio bezala, esan dezagun $\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{b}, \mathbf{n}$ bektoreen deribatuak ematen dituzten formulak *Serret-Frenet-en formulak* deitzen direla:

$$\frac{d\boldsymbol{\sigma}}{ds} = \frac{\mathbf{n}}{R}, \quad \frac{d\mathbf{b}}{ds} = \frac{\mathbf{n}}{T}, \quad \frac{d\mathbf{n}}{ds} = -\frac{\boldsymbol{\sigma}}{R} - \frac{\mathbf{b}}{T}.$$

Azkenekoa honela lortzen da:

$$\mathbf{n} = \mathbf{b} \times \boldsymbol{\sigma},$$

$$\frac{d\mathbf{n}}{ds} = \frac{d(\mathbf{b} \times \boldsymbol{\sigma})}{ds} = \frac{d\mathbf{b}}{ds} \times \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{b} \times \frac{d\boldsymbol{\sigma}}{ds} = \frac{\mathbf{n}}{T} \times \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{b} \times \frac{\mathbf{n}}{R} = \frac{1}{T}\mathbf{n} \times \boldsymbol{\sigma} + \frac{1}{R}\mathbf{b} \times \mathbf{n}.$$

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt}\left(\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} \times \frac{d^3\mathbf{r}}{dt^3}\right) = \frac{d\mathbf{r}}{ds}\frac{ds}{dt}\left\{\left[\frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 + \frac{d\mathbf{r}}{ds}\frac{d^2s}{dt^2}\right] \times \right.$$
$$\left. \times \left[\frac{d^3\mathbf{r}}{ds^3}\left(\frac{ds}{dt}\right)^3 + 3\frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2}\frac{ds}{dt}\frac{d^2s}{dt^2} + \frac{d\mathbf{r}}{ds}\frac{d^3\mathbf{r}}{dt^3}\right]\right\}.$$

Biderkadura hori polinomioen arteko biderkaketa-erregelaren arabera garatuz eta gutxienez bi bektore berdin dauzkaten biderkadurak ahantziz (bi bektore berdin duten hiru bektoreren arteko biderkadura nahasia zero bait da)

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt}\left(\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} \times \frac{d^3\mathbf{r}}{dt^3}\right) = \frac{d\mathbf{r}}{ds}\left(\frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2} \times \frac{d^3\mathbf{r}}{ds^3}\right)\left(\frac{ds}{dt}\right)^6$$

erdiesten dugu. Azkenik,

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right)^2 \text{ edo } \left(\frac{ds}{dt}\right)^6 = \left\{\left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right)^2\right\}^3$$

dugu, bilatutako ekuazioa lortuz.

Baina,

$$\mathbf{n} \times \boldsymbol{\sigma} = -\mathbf{b}; \quad \mathbf{b} \times \mathbf{n} = -\boldsymbol{\sigma}$$

da. Horregatik,

$$\frac{d\mathbf{n}}{ds} = -\frac{\mathbf{b}}{T} - \frac{\boldsymbol{\sigma}}{R}.$$

Adibidea.

$$\mathbf{r} = \mathbf{i}a\cos t + \mathbf{j}a\sin t + \mathbf{k}amt$$

helizearen bihurdura kalkulatu.

Ebazpena.

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt}\left(\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} \times \frac{d^3\mathbf{r}}{dt^3}\right) = \begin{vmatrix} -a\sin t & a\cos t & am \\ -a\cos t & -a\sin t & 0 \\ a\sin t & -a\cos t & 0 \end{vmatrix} = a^3 m.$$

$\left(\frac{d\mathbf{r}}{dt} \times \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^3}\right)^2 = a^4(1+m^2)$ (ikus §4ko adibidea). Hortaz,

$$T = -\frac{a^4(1+m^2)}{a^3 m} = -\frac{a(1+m^2)}{m}$$

dugu.

§ 6. Gainazal batekiko plano ukitzailea eta normala

Izan bedi

$$F(x, y, z) = 0 \tag{1}$$

gainazal baten ekuazioa.

Ezar ditzagun ondorengo definizioak.

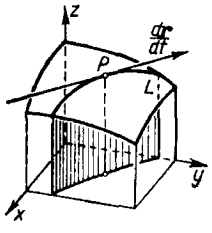
1. Definizioa. Zuzen bat gainazal bateko kurba batekiko ukitzailea bada eta bertako P puntutik pasatzen bada, zuzen hori gainazalarekiko $P(x,y,z) = 0$ puntuko

ukitzaile dela esaten da. Gainazalean, P puntutik pasatzen den infinitu kurba dagoenez gero, oro har, puntu horretan ere badago infinitu ukitzaile gainazalarekiko.

Defini ditzagun $F(x,y,z)=0$ gainazaleko puntu singular eta arruntak.

$M(x,y,z)=0$ puntuan $\dfrac{\partial F}{\partial x}, \dfrac{\partial F}{\partial y}, \dfrac{\partial F}{\partial z}$ hiru deribatuak zeroren berdinak badira edo, gutxienez, deribatu horietako bat existitzen ez bada, M gainazaleko *puntu singularra* da. $M(x,y,z)=0$ puntuan $\dfrac{\partial F}{\partial x}, \dfrac{\partial F}{\partial y}, \dfrac{\partial F}{\partial z}$ deribatuak existitu eta jarraiak badira eta gutxienez bat zero ez bada, M gainazaleko *puntu arrunta* da.

Orain eman dezakegu hurrengo teorema.



202. IRUDIA

Teorema. Emandako (1) gainazal baten P puntu arrunteko ukitzaile guztiak plano berean daude.

Frogapena. Kontsidera dezagun gainazaleko P puntutik pasatzen den eta gainazalean dagoen L kurba bat (202. irudia). Izan bitez,

$$x=\varphi(t);\quad y=\psi(t);\quad z=\chi(t) \tag{2}$$

kurba horren ekuazio parametrikoak.

Kurba horrekiko ukitzailea, definizioz, gainazalarekiko ukitzaile izango da. Ukitzaile horren ekuazioak

$$\frac{X-x}{\dfrac{dx}{dt}}=\frac{Y-y}{\dfrac{dy}{dt}}=\frac{Z-z}{\dfrac{dz}{dt}}$$

dira.

Ordezka ditzagun (2) adierazpenak (1) ekuazioan eta t-ren funtzioan identitate bat lortuko dugu, (2) kurba (1) gainazalean bait dago. Berdintza hori t-rekiko deribatuz gero

$$\frac{\partial F}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dt}+\frac{\partial F}{dz}\frac{dz}{dt}=0 \tag{3}$$

erdiesten dugu[9].

Kontsidera ditzagun orain P puntutik pasatzen diren $\mathbf{N}$ eta $\frac{d\mathbf{r}}{dt}$ bektoreak:

$$\mathbf{N}=\frac{\partial F}{\partial x}\mathbf{i}+\frac{\partial F}{\partial y}\mathbf{j}+\frac{\partial F}{\partial z}\mathbf{k}. \tag{4}$$

Bektore horren projekzioak, $\frac{\partial F}{\partial x}$, $\frac{\partial F}{\partial y}$, $\frac{\partial F}{\partial z}$, P puntuaren x, y, z, koordenatuen menpe daude. Ohar gaitezen, P puntu arrunta izanik, projekzio horiek ez direla P puntuan batera anulatzen,

$$|\mathbf{N}|=\sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2}\neq 0.$$

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt}=\frac{dx}{dt}\mathbf{i}+\frac{dy}{dt}\mathbf{j}+\frac{dz}{dt}\mathbf{k} \tag{5}$$

bektorea P puntutik pasatzen den eta gainazalean dagoen kurbarekiko ukitzaile da.

Bektore horren projekzioak (2) ekuazioen bitartez kalkula daitezke t parametroari P puntuari dagokion balioa ematen badiogu. Kalkula dezagun $\mathbf{N}$ eta $\frac{d\mathbf{r}}{dt}$ bektoreen arteko biderkadura eskalarra. Biderkadura eskalar hori elkarri dagokien projekzioen arteko biderkaduren batura da:

$$\mathbf{N}\frac{d\mathbf{r}}{dt}=\frac{\partial F}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial y}{dt}+\frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{dt}.$$

(3) berdintzaren arabera, bigarren atala zero da; beraz:

---

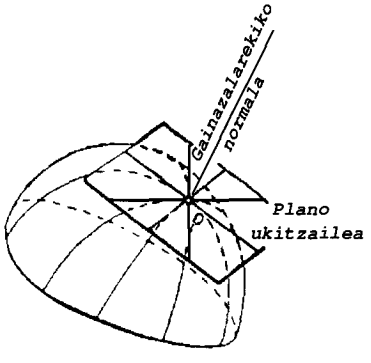
9) Hor, hiru aldagaiko funtzio konplexuak deribatzeko erregela erabiltzen dugu. Erregela horrek emandako kasuan balio du, $\frac{\partial F}{\partial x}$, $\frac{\partial F}{\partial y}$, $\frac{\partial F}{\partial z}$ deribatu partzial guztiak, hipotesiz, jarraiak bait dira.

$$\mathbf{N}\frac{d\mathbf{r}}{dt}=0.$$

Azkeneko ekuaziotik, **N** bektorea, P puntuan (2) kurbaren $\frac{d\mathbf{r}}{dt}$ bektore ukitzailearekiko elkartzuta dela ondorioztatzen da. Frogapenak gainazalean marratutako eta P puntutik pasatzen den edozein (2) kurbatarako balio du. Hortaz, gainazal horren P puntuko ukitzaile guztiak **N** bektore batekiko elkartzutak dira, beraz ukitzaile guztiak plano berean daude, aipatu bektorearekiko elkartzuta, alegia. Teorema, bada, frogaturik dago.

2. Definizioa. P puntutik pasatzen diren gainazal bateko kurba desberdinekiko, P puntuko ukitzaileen planoa gainazalarekiko *plano ukitzaile* deitzen da (203. irudia).

Esan dezagun, gainazaleko puntu singularretan gerta daitekeela plano ukitzailerik ez existitzea. Horrelako puntuetan, gainazalaren zuzen ukitzaileak egon daitezke plano desberdinetan. Honela, esate baterako, gainazal koniko baten erpina puntu singularra da. Gainazal konikoaren puntu horretako ukitzaileak ez daude plano berean, gainazal koniko bat osatzen dutelarik.



203. IRUDIA

Idatz dezagun (1) gainazalarekiko plano ukitzailearen ekuazioa puntu arrunt batean. Plano hori (4) bektorearekiko elkartzuta da. Bere ekuazioak

$$\frac{\partial F}{\partial x}(X-x)+\frac{\partial F}{\partial y}(Y-y)+\frac{\partial F}{\partial z}(Z-z)=0 \qquad (6)$$

itxura dauka. Gainazalaren ekuazioa

$$z=f(x,y) \quad \text{edo} \quad z-f(x,y)=0$$

bada,

$$\frac{\partial F}{\partial x} = -\frac{\partial f}{\partial x}, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = -\frac{\partial f}{\partial y}, \quad \frac{\partial F}{\partial z} = 1$$

izango dira eta plano ukitzailearen ekuazioa

$$Z - z = \frac{\partial f}{\partial x}(X - x) + \frac{\partial f}{\partial y}(Y - y) \qquad (6')$$

izango da.

Oharra: (6') formulan $X - x = \Delta x$; $Y - y = \Delta y$ egiten badugu

$$Z - z = \frac{\partial f}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\Delta y$$

lortuko dugu; bere bigarren atala $z = f(x,y)$ funtzioaren diferentzial totala izanik. Hortaz, $Z - z = dz$ da. Horrela, bi aldagaiko funtzio baten $M(x,y)$ puntuko diferentzial totala, x eta y aldagai independenteen Δx eta Δy gehikuntzei dagokiena, z ordenatuari dagokion plano ukitzaile eta emandako funtzioak adierazten duen gainazalaren arteko gehikuntzaren berdina da.

3. Definizioa. (1) gainazaleko $P(x,y,z)$ puntutik marratutako eta plano ukitzailearekiko elkartzut den zuzena gainazalaren puntu horretako *normal* deitzen da (203. irudia).

Idatz ditzagun normalaren ekuazioak. Bere norabidea **N** bektorearenarekin bat datorrenez gero, bere ekuazioak

$$\frac{X - x}{\frac{\partial F}{\partial x}} = \frac{Y - y}{\frac{\partial F}{\partial y}} = \frac{Z - z}{\frac{\partial F}{\partial z}} \qquad (7)$$

dira.

Gainazalaren ekuazioa $z = f(x,y)$ edo $z - f(x,y) = 0$ bada, normalaren ekuazioak

$$\frac{X - x}{-\frac{\partial f}{\partial x}} = \frac{Y - y}{-\frac{\partial f}{\partial y}} = \frac{Z - z}{1}$$

izango dira.

Oharra. Izan bedi $F(x,y,z)=0$, hiru aldagaiko $u=u(x,y,z)$ funtzioaren maila--gainazal bat, hau da,

$$F(x,y,z)=u(x,y,z)-C=0.$$

Bistakoa da, (4) formulak determinatutako **N** bektorea, $F=u(x,y,z)-C=0$ maila--gainazalaren normalaren norabidearekin,

$$\mathbf{N}=\frac{\partial u}{\partial x}\mathbf{i}+\frac{\partial u}{\partial y}\mathbf{j}+\frac{\partial u}{\partial z}\mathbf{k}$$

izango dela, hots, $\mathbf{N}=\operatorname{grad} u$.

Horrela egiaztatu dugu $u(x,y,z)$ funtzioaren gradienteak, emandako puntutik pasatzen den maila-gainazalaren normalaren norabidea daukala.

Adibidea. Idatzi $x^2+y^2+z^2=14$ esferaren $P(1,2,3)$ puntuko plano ukitzailearen ekuazioa eta normalaren ekuazioak.

Ebazpena.

$$F(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-14=0;$$

$$\frac{\partial F}{\partial x}=2x;\ \frac{\partial F}{\partial y}=2y;\ \frac{\partial F}{\partial z}=2z;$$

$x=1,\ y=2,\ z=3$ balioetarako

$$\frac{\partial F}{\partial x}=2;\ \frac{\partial F}{\partial y}=4;\ \frac{\partial F}{\partial z}=6$$

daukagu. Hortaz, plano ukitzailearen ekuazioa

$$2(x-1)+4(y-2)+6(z-3)=0 \quad \text{edo} \quad x+2y+3z-14=0$$

da. Normalaren ekuazioak

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{4}=\frac{z-3}{6}$$

dira, edo hobeto

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{2}=\frac{z-3}{6}.$$

Ariketak

Kalkulatu ondoko bektoreen deribatuak:

1. $\mathbf{r} = \mathbf{i}\cot t + \mathbf{j}\arctan t$. Emaitza: $\mathbf{r}' = -\dfrac{1}{\sin^2 t}\mathbf{i} + \dfrac{1}{1+t^2}\mathbf{j}$.

2. $\mathbf{r} = \mathbf{i}e^{-t} + \mathbf{j}2t + \mathbf{k}\ln t$. Em.: $\mathbf{r}' = -\mathbf{i}e^{-t} + 2\mathbf{j} + \dfrac{\mathbf{k}}{t}$.

3. $\mathbf{r} = t^2\mathbf{i} - \dfrac{\mathbf{j}}{t} + \dfrac{\mathbf{k}}{t^2}$. Em.: $\mathbf{r}' = 2t\mathbf{i} + \dfrac{\mathbf{j}}{t^2} - \dfrac{2\mathbf{k}}{t^3}$.

4. Bilatu $\mathbf{r} = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + t^3\mathbf{k}$ kurbaren (3,9,27) puntuko bektore ukitzailea, ukitzailearen ekuazioa eta plano normalaren ekuazioa. Em.: $\mathbf{r}' = \mathbf{i} + 6\mathbf{j} + 27\mathbf{k}$; ukitzailea: $\dfrac{x-3}{1} = \dfrac{y-9}{6} = \dfrac{z-27}{27}$ da; plano normala: $x + 6y + 27z = 786$ da.

5. Bilatu $\mathbf{r} = \mathbf{i}\cos^2\dfrac{t}{2} + \dfrac{1}{2}\mathbf{j}\sin t + \mathbf{k}\sin\dfrac{t}{2}$ kurbaren bektore ukitzailea, ukitzaile eta plano normalaren ekuazioak. Em.: $\mathbf{r}' = -\dfrac{1}{2}\mathbf{i}\sin t + \dfrac{1}{2}\mathbf{j}\cos t + \dfrac{1}{2}\mathbf{k}\cos\dfrac{t}{2}$; ukitzailearen ekuazioak: $\dfrac{X - \cos^2\frac{t}{2}}{-\sin t} = \dfrac{Y - \frac{1}{2}\sin t}{\cos t} = \dfrac{Z - \sin\frac{t}{2}}{\cos\frac{t}{2}}$ da; plano normalaren ekuazioa: $X\sin t - Y\cos t - Z\cos\dfrac{t}{2} = -x\sin t + y\cos t + z\cos\dfrac{t}{2}$ da, non x,y,z plano normala pasatzen den kurbako puntu baten koordenatuak bait dira (hau da, $x = \cos^2\dfrac{t}{2}$, $y = \dfrac{1}{2}\sin t$, $z = \sin\dfrac{t}{2}$).

6. Aurkitu $x = t - \sin t,\ y = 1 - \cos t,\ z = 4\sin\frac{t}{2}$ kurbaren ukitzailearen ekuazioak eta ukitzaileak koordenatu-ardatzekin osatzen dituen angeluen kosinuak.
Em.: $\dfrac{X - X_0}{\sin\frac{t_0}{2}} = \dfrac{Y - Y_0}{\cos\frac{t_0}{2}} = \dfrac{Z - Z_0}{\cot\frac{t_0}{2}},\ \cos\alpha = \sin^2\frac{t_0}{2};\ \cos\beta = \frac{1}{2}\sin t_0;\ \cos\gamma = \cos\frac{t_0}{2}.$

7. Aurkitu $z = x^2 - y^2,\ y = x$ kurbaren plano normalaren ekuazioa koordenatu-jatorrian. Iradokizuna. Adierazi kurba ekuazio parametrikoen bidez. Em.: $x + y = 0$.

8. Bilatu $\boldsymbol{\sigma}$, $\mathbf{n}$, $\mathbf{b}$ $\mathbf{r} = \mathbf{i}(\cos t + \sin^2 t) + \mathbf{j}\sin t(1 - \cos t) - \mathbf{k}\cos t$ kurbako $t = \frac{\pi}{2}$ puntuan. Em.: $\boldsymbol{\sigma} = \frac{1}{\sqrt{3}}(-\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k});\ \mathbf{n} = \dfrac{-5\mathbf{i} - 4\mathbf{j} - \mathbf{k}}{\sqrt{42}};\ \mathbf{b} = \dfrac{\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}}{\sqrt{14}}.$

9. Bilatu $x = \frac{t^4}{4};\ y = \frac{t^3}{3};\ z = \frac{t^2}{2}$ kurbaren (x_0, y_0, z_0) puntuko normal nagusia eta binormalaren ekuazioak.
Em.: $\dfrac{x - x_0}{t_0^3 + 2t_0} = \dfrac{y - y_0}{1 - t_0^4} = \dfrac{z - z_0}{-2t_0^3 - t_0};\ \dfrac{x - x_0}{1} = \dfrac{y - y_0}{2t_0} = \dfrac{z - z_0}{t_0^2}.$

10. Aurkitu $y^2 = x;\ x^2 = z$ kurbaren $M(1,1,1)$ puntuko plano oskulatzailearen ekuazioa. Em.: $6x - 8y - z + 3 = 0$.

11. Aurkitu $x^2 + y^2 + z^2 - 4 = 0,\ x + y - z = 0$ ekuazioek emandako kurbaren kurbadur erradioa. Em.: $R = 2$.

12. Aurkitu $\mathbf{r} = \mathbf{i}\cos t + \mathbf{j}\sin t + \mathbf{k}\dfrac{e^t - e^{-t}}{2}$ kurbaren bihurdura-erradioa.
Em.: $T = \dfrac{(e^t + e^{-t})^2}{2(e^t - e^{-t})}.$

13. Bilatu $\mathbf{r} = t^2\mathbf{i} + 2t^3\mathbf{j}$ kurbaren kurbadur eta bihurdura-erradioak.
Em.: $R = \frac{2}{3}t(1 + 9t^2)^{3/2},\ T = \infty.$

14. Frogatu $\mathbf{r} = (a_1t^2 + b_1t + c_1)\mathbf{i} + (a_2t^2 + b_2t + c_2)\mathbf{j} + (a_3t^2 + b_3t + c_3)\mathbf{k}$ kurba launa dela. Em.: $\mathbf{r}''' \equiv 0$, beraz bihurdura nulua da.

15. Kalkulatu $x = e^t$, $y = e^{-t}$; $z = t\sqrt{2}$ kurbaren kurbadura eta bihurdura.

Em.: kurbadura $\dfrac{\sqrt{2}}{(x+y)^2}$ da; bihurdura, aldiz, $\dfrac{-\sqrt{2}}{(x-y)^2}$ da.

16. Kalkulatu $x = e^{-t}\sin t$; $y = e^{-t}\cos t$; $z = e^t$ kurbaren kurbadura eta bihurdura.

Em.: kurbadura $\dfrac{\sqrt{2}}{3}e^t$ da; bihurdura $\dfrac{1}{3}e^t$ da.

17. Bilatu $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1$ hiperboloidearen (x_1, y_1, z_1) puntuko plano ukitzailearen ekuazioa. Em.: $\dfrac{x_1x}{a^2} - \dfrac{y_1y}{b^2} - \dfrac{z_1z}{c^2} = 1$.

18. Bilatu $x^2 - 4y^2 + 2z^2 = 6$ gainazalaren (2, 2, 3) puntuko normalaren ekuazioa. Em.: $y + 4x = 10$; $3x - z = 3$.

19. Bilatu $z = 2x^2 + 4y^2$ gainazalaren $M(2,1,12)$ puntuko plano ukitzailearen ekuazioa. Em.: $8x + 8y - z = 12$.

20. Marratu $x^2 + 2y^2 + z^2 = 1$ kurbaren plano ukitzailea $x - y + 2z = 0$ planoarekiko paralelo izan dadin. Em.: $x - y + 2z = \pm\sqrt{\dfrac{11}{2}}$.

X. GAIA

INTEGRAL MUGAGABEA

§ 1. Jatorrizko funtzioa eta integral mugagabea

III. gaian ondoko problema hau aztertu dugu: $F(x)$ funtzio ezaguna izanik funtzioaren deribatua kalkulatu, hots, $f(x) = F'(x)$.

Gai honetan alderantzizko problema aztertuko dugu: $f(x)$ funtzio ezaguna izanik, $F(x)$ kalkulatu, non horren deribatua $f(x)$ den, hau da,

$$F'(x) = f(x).$$

1. Definizioa. [a,b] tarteko puntu guztietan $F'(x) = f(x)$ ekuazioa betetzen bada, tarte horretan $F(x)$ funtzioari $f(x)$ funtzioaren *jatorrizko* deitzen zaio.

Adibidea. Kalkulatu $f(x) = x^2$ funtzioaren jatorrizko bat. Jatorrizko funtzioaren definizioa aplikatuz, $F(x) = \frac{x^3}{3}$ funtzioa $f(x)$ funtzioaren jatorrizko bat da, $\left(\frac{x^3}{3}\right)' = x^2$ betetzen bait da.

Aztertutako $f(x)$ funtzioak jatorrizko funtzioren bat baldin badu, hori bakarra ez dela erraz ikus daiteke. Honela, aipatu adibidean $F(x) = \frac{x^3}{3} + 1$; $F(x) = \frac{x^3}{3} - 7$ edo orohar $F(x) = \frac{x^3}{3} + C$ jatorrizko funtzioak dira (C edozein konstante delarik),

$$\left(\frac{x^3}{3} + C\right)' = x^2$$

betetzen bait da.

Bestalde, $\frac{x^3}{3}+C$ motako funtzioek x^2 funtzioaren jatorrizko funtzio guztiak ordezkatzen dituztela froga daiteke. Hori ondoko teorematik ondorioztatzen da.

Teorema. $F_1(x)$ eta $F_2(x)$ funtzioak $[a,b]$ tartean $f(x)$ funtzioaren jatorrizko bi funtzio baldin badira, beraien arteko diferentzia konstantea da.

Frogapena. Jatorrizko funtzioaren definizioa aplikatuz hauxe dugu:

$$\left.\begin{aligned} F_1'(x) &= f(x), \\ F_2'(x) &= f(x), \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

$[a,b]$ tarteko edozein x-ren baliotarako.

Ondokoa egin dezagun:

$$F_1(x) - F_2(x) = \varphi(x). \qquad (2)$$

(1) berdintzen arabera

$$F_1'(x) - F_2'(x) = f(x) - f(x) = 0$$

edo

$$\varphi'(x) = \left[F_1(x) - F_2(x)\right]' \equiv 0$$

lortzen dira, $[a,b]$ tarteko edozein x-ren baliotarako. Baina, $\varphi'(x)=0$ berdintzatik $\varphi(x)$ konstante dela ondorioztatzen da.

Hori frogatzeko, aplika diezaiogun Lagrange-ren teorema (ikus IV. gaiko § 2) $[a,b]$ tartean jarraia eta deribagarria den $\varphi(x)$ funtzioari. Lagrange-ren teoremaren arabera, $[a,b]$ tarteko edozein x-ren baliotarako hauxe dugu:

$$\varphi(x) - \varphi(a) = (x-a)\varphi'(\xi),$$

$a < \xi < x$ izanik.

$\varphi'(\xi)=0$ denez,

$$\varphi(x) - \varphi(a) = 0$$

edo

$$\varphi(x) = \varphi(a) \tag{3}$$

betetzen da.

Honela, $\varphi(x)$ funtzioak $[a,b]$ tarteko edozein puntutan $\varphi(a)$ balioa hartzen du, hau da, funtzio hori $[a,b]$ tartean konstante da. $\varphi(a)$ konstanteari C deituko diogu; (2) eta (3) desberdintzetatik ondokoa lortzen da:

$$F_1(x) - F_2(x) = C.$$

Frogatutako teorematik ondokoa ondorioztatzen da: $f(x)$ funtzioaren edozein $F(x)$ jatorrizko funtzio ezagutzen badugu, $f(x)$ funtzioaren edozein jatorrizko funtziok $F(x) + C$, C konstante izanik, itxura izango du.

2. Definizioa. $F(x)$, $f(x)$-ren jatorrizko funtzio bat baldin bada $F(x) + C$ adierazpenari $f(x)$ funtzioaren *integral mugagabe* deitzen zaio eta $\int f(x)\, dx$ ikurraz adierazten da. Beraz, definizioaren arabera

$$F'(x) = f(x)$$

baldin bada,

$$\int f(x)\ dx = F(x) + C$$

betetzen da.

Kasu honetan, $f(x)$ funtzioari *integrakizun* edo *integrazio-ikurpeko funtzio* deritzo; $f(x)\, dx$ adierazpenari *integrazio-elementu* edo *integrazio-ikurpeko integrazio--elementu* deritzo eta $\int$ ikurrari *integrazio-ikur* deritzo.

Beraz, integral mugagabeak $y = F(x) + C$ itxura duen funtzio-familia ordezkatzen du.

Integral mugagabearen esanahi geometrikoa honako hau da: kurba bat berekiko paraleloki higituz, Oy ardatzaren norabidean, lortzen den kurba-multzoa da.

Galdera bat sortzen da berehala: $f(x)$ funtzio orok jatorrizko funtziorik (eta beraz, integral mugagabea) al du? Erantzuna ezezkoa da. Hala ere, frogapenik egin gabe zera esango dugu: $[a,b]$ tartean jarraia den funtzio orok jatorrizko funtzioa (eta beraz, integral mugagabea) du.

Gai honetan zenbait funtzio elementalen jatorrizko funtzioak (eta beraz, integral mugagabeak) lortzea ahalbidetzen dituzten metodoak aztertuko ditugu.

$f(x)$ funtzio baten jatorrizko funtzioa lortzea ahalbidetzen duen prozesuari $f(x)$ *funtzioaren integrazio* deritzo.

Har dezagun kontutan ondokoa: funtzio elemental baten deribatua beti funtzio elementala den bitartean, funtzio elemental haren jatorrizkoa ez da zertan beti funtzio elementalen arteko batura finitu batez adierazi beharrik. Gai honen bukaeran arazo hori aztertuko dugu.

2. definiziotik hauxe ondorioztatzen da:

1. Integral mugagabe baten deribatua integrakizunaren berdina izateko $F'(x)=f(x)$ bete behar da. Beraz,

$$\left(\int f(x)\,dx\right)' = \left(F(x)+C\right)' = f(x). \tag{4}$$

Azken berdintza horrek, edozein jatorrizkoren deribatua integrakizunaren berdina dela esan nahi du.

2. Integral mugagabe baten diferentziala integrazio-elementuaren berdina da.

$$d\left(\int f(x)\,dx\right) = f(x)\,dx. \tag{5}$$

Hori (4) formulatik ondorioztatzen da.

3. Funtzio baten diferentzialaren integral mugagabea, funtzio horren eta hautazko konstante baten arteko batura da.

$$\int dF(x) = F(x) + C.$$

Berdintza horren baieztapena erraz egin daiteke deribatuz (berdintzako bi aldeen diferentzialak $dF(x)$ dira).

§ 2. Integralen taula

Integrazio-metodoak azaldu aurretik, funtzio elementalen integralen taula bat emango dugu. Integralen taula berehala ondorioztatzen da X. gaiko § 1eko 2. definiziotik eta deribatuen taulatik (III. gaiko § 15). (Taulako berdintzak erraz egiazta daitezke deribazioa erabiliz, hau da, bigarren aldeko deribatua integrakizunaren berdina dela egiazta daiteke).

1. $\int x^{\alpha}\, dx = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \quad (\alpha \neq -1)$. (Formula horretan eta hurrengoetan C hautazko konstantea da).

2. $\int \dfrac{dx}{x} = \ln |x| + C.$

3. $\int \sin x\, dx = -\cos x + C.$

4. $\int \cos x\, dx = \sin x + C.$

5. $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + C.$

6. $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x + C.$

7. $\int \tan x\, dx = -\ln |\cos x| + C.$

8. $\int \cot x\, dx = \ln |\sin x| + C.$

9. $\int e^x dx = e^x + C.$

10. $\int a^x\, dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C.$

11. $\int \dfrac{dx}{1+x^2} = \arctan x + C.$

11'. $\int \dfrac{dx}{a^2+x^2} = \dfrac{1}{a} \arctan \dfrac{x}{a} + C.$

12. $\displaystyle\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a+x}{a-x} \right| + C.$

13. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} = \arcsin x + C.$

13'. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C.$

14. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right| + C.$

Oharra. (III. gaiko § 15) deribatuen taulan ez dira azaltzen 7., 8., 11'., 12., 13'. eta 14. formulei dagozkienak. Hala ere, erraz froga daiteke formula horien zuzentasuna deribazioa erabiliz.

7. formularen kasuan hauxe dugu:

$$\left(-\ln |\cos x|\right)' = -\frac{-\sin x}{\cos x} = \tan x,$$

beraz, $\displaystyle\int \tan x \, dx = -\ln |\cos x| + C$.

8. formularen kasuan hauxe dugu:

$$\left(\ln |\sin x|\right)' = \frac{\cos x}{\sin x} = \cot x,$$

beraz, $\displaystyle\int \cot x \, dx = \ln |\sin x| + C$.

12. formularen kasuan hauxe dugu:

$$\left(\frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a+x}{a-x} \right|\right)' = \frac{1}{2a}\left[\ln |a+x| - \ln |a-x|\right]' = \frac{1}{2a}\left[\frac{1}{a+x} + \frac{1}{a-x}\right] = \frac{1}{a^2 - x^2},$$

beraz,

$$\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a+x}{a-x} \right| + C.$$

Kontutan hartu azkeneko formula X. gaiko § 9ko emaitza orokorretatik ere ondorioztatzen dela.

14. formularen kasuan hauxe dugu:

$$\left(\ln\left|x+\sqrt{x^2\pm a^2}\right|\right)' = \frac{1}{x+\sqrt{x^2\pm a^2}}\left(1+\frac{x}{\sqrt{x^2\pm a^2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{x^2\pm a^2}},$$

beraz,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2\pm a^2}} = \ln\left|x+\sqrt{x^2\pm a^2}\right| + C.$$

Formula hori § 11ko emaitza orokorretatik ere ondorioztatzen da.

Era berean baieztatzen dira 11'. eta 13'. formulak. Hala ere, kontutan hartu formula horiek aurrerago (ikus § 4, 3. eta 4. adibideak) ezarriko diren 11. eta 13. formulen ondorio zuzena direla.

§ 3. Integral mugagabearen zenbait propietate

1. Teorema. Bi edo funtzio gehiagoren arteko baturaren integral mugagabea beren integralen arteko batura da.

$$\int [f_1(x)+f_2(x)]\,dx = \int f_1(x)\,dx + \int f_2(x)\,dx. \qquad (1)$$

Teorema hori frogatzeko (1) berdintza horren bi aldeen deribatuak kalkulatuko ditugu. Aurreko ataleko (4) berdintzaren arabera hauxe dugu:

$$\left(\int [f_1(x)+f_2(x)]\,dx\right)' = f_1(x)+f_2(x),$$

$$\left(\int f_1(x)\,dx + \int f_2(x)\,dx\right)' = \left(\int f_1(x)\,dx\right)' + \left(\int f_2(x)\,dx\right)' = f_1(x)+f_2(x).$$

Beraz, (1) berdintzaren lehen aldearen deribatua bigarren aldearenaren berdina da, hau da, lehenengo aldearen edozein jatorrizko funtzioren deribatua bigarren aldearen hautazko jatorrizko funtzio baten deribatuaren berdina da. Beraz, X. gaiko § 1eko teoremaren

arabera, (1) berdintzaren lehen ataleko funtzio ororen eta bigarren ataleko funtzio ororen arteko diferentzia konstantea da. (1) berdintzak, hain zuzen ere, esanahi hori du.

2. Teorema. Faktore konstante bat integrazio-ikurretik kanpo atera daiteke; hau da, $a=$ktea. baldin bada,

$$\int af(x)\,dx = a\int f(x)\,dx. \tag{2}$$

(2) berdintza frogatzeko bi aldeak deribatuko ditugu:

$$\left(\int af(x)\,dx\right)' = af(x),$$

$$\left(a\int f(x)\,dx\right)' = a\left(\int f(x)\,dx\right)' = af(x).$$

Bi aldeen deribatuak berdinak dira, beraz, (1) berdintzan bezala, dagozkien bi funtzioen arteko diferentzia konstante da. (2) berdintzak, hain zuzen ere, esanahi hori du.

Integral mugagabeen kalkulaketan ondoko arauak kontutan hartzea komenigarri da.

I.

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C$$

betetzen bada,

$$\int f(ax)\,dx = \frac{1}{a}F(ax) + C. \tag{3}$$

(3) berdintzaren bi aldeak deribatuz hauxe lortzen dugu:

$$\left(\int f(ax)\,dx\right)' = f(ax),$$

$$\left(\frac{1}{a}F(ax)\right)' = \frac{1}{a}(F(ax))'_x = \frac{1}{a}F'(ax)a = F'(ax) = f(ax).$$

Bi aldeen deribatuak berdinak dira, frogatu nahi genuen bezala.

II.

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C$$

baldin bada,

$$\int f(x+b)\,dx = F(x+b) + C. \qquad (4)$$

III.

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C$$

baldin bada,

$$\int f(ax+b)\,dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C. \qquad (5)$$

(4) eta (5) berdintzen zuzentasuna beren aldeak deribatuz frogatzen da.

1. Adibidea.

$$\int\left(2x^3 - 3\sin x + 5\sqrt{x}\right)dx = \int 2x^3\,dx - \int 3\sin x\,dx + \int 5\sqrt{x}\,dx =$$

$$= 2\int x^3\,dx - 3\int \sin x\,dx + 5\int x^{\frac{1}{2}}\,dx =$$

$$= 2\frac{x^{3+1}}{3+1} - 3(-\cos x) + 5\frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + C = \frac{1}{2}x^4 + 3\cos x + \frac{10}{3}x\sqrt{x} + C.$$

2. Adibidea.

$$\int\left(\frac{3}{\sqrt[3]{x}} + \frac{1}{2\sqrt{x}} + x\sqrt[4]{x}\right)dx = 3\int x^{-\frac{1}{3}}\,dx + \frac{1}{2}\int x^{-\frac{1}{2}}dx + \int x^{\frac{5}{4}}\,dx =$$

$$= 3\frac{x^{-\frac{1}{3}+1}}{-\frac{1}{3}+1} + \frac{1}{2}\frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} + \frac{x^{\frac{5}{4}+1}}{\frac{5}{4}+1} + C = \frac{9}{2}\sqrt[3]{x^2} + \sqrt{x} + \frac{4}{9}x^2\sqrt[4]{x} + C.$$

3. Adibidea.

$$\int \frac{dx}{x+3} = \ln|x+3| + C.$$

4. Adibidea.

$$\int \cos 7x \, dx = \frac{1}{7}\sin 7x + C.$$

5. Adibidea.

$$\int \sin(2x-6)\, dx = \frac{1}{2}\cos(2x-6) + C.$$

§ 4. Aldagai-aldaketa edo ordezkapenaren bidezko integrazioa

Demagun ondoko integrala kalkulatu behar dugula,

$$\int f(x)\, dx,$$

baina, nahiz eta jakin badagoela ezin dugu $f(x)$ funtzioaren jatorrizkoa berehala kalkulatu.

Egin dezagun ondoko aldagai-aldaketa,

$$x = \varphi(t). \tag{1}$$

$\varphi(t)$ jarraia da, bere deribatua ere bai eta gainera alderantzizko funtzioa du. Orduan, $dx = \varphi'(t)dt$; froga dezagun kasu honetan ondoko berdintza betetzen dela:

$$\int f(x)\, dx = \int f[\varphi(t)]\varphi'(t)\, dt. \tag{2}$$

Berdintzaren bigarren aldearen integrazioa egin ondoren, t aldagaia (1) berdintzan azaltzen den x-rekiko adierazpenaz ordezkatuko da.

(2) berdintzaren bi aldeetako adierazpenak berdinak direla baieztatzeko, beren deribatuak x-rekiko berdinak direla frogatu behar da. Kalkula dezagun lehen aldearen deribatua:

$$\left(\int f(x)\,dx\right)'_x = f(x).$$

(2) berdintzaren bigarren aldea x-rekiko funtzio konposatu gisa deribatuko dugu, t tarteko aldagaia izanik. (1) berdintzan x-rekiko duen erlazioa agertzen da, $\frac{dx}{dt} = \varphi'(t)$ izanik; alderantzizko funtzio baten deribazio-erregela aplikatuz hauxe lortzen da:

$$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{\varphi'(t)}.$$

Beraz, hauxe dugu:

$$\left(\int f[\varphi(t)]\varphi'(t)\,dt\right)'_x = \left(\int f[\varphi(t)]\varphi'(t)\,dt\right)'_t \frac{dt}{dx} = f[\varphi(t)]\varphi'(t)\frac{1}{\varphi'(t)} = f[\varphi(t)] = f(x).$$

(2) berdintzaren bi aldeen x-rekiko deribatuak berdinak dira, frogatu nahi zen bezala.

Aukeratu behar den funtzioak, hau da, $x = \varphi(t)$, (2) berdintzaren bigarren atalean azaltzen den integral mugagabearen kalkulaketa erraztu behar du.

Oharra. Batzutan komeni izaten da $x = \varphi(t)$ ordez $t = \psi(x)$ aldagai-aldaketa egitea. Argitu dezagun hori adibide baten bidez. Demagun ondoko integrala kalkulatu behar dugula:

$$\int \frac{\psi'(x)\,dx}{\psi(x)}.$$

Ondokoa egitea komeni da:

$$\psi(x) = t,$$

$$\psi'(x)dx = dt, \quad \int \frac{\psi'(x)\,dx}{\psi(x)} = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln|\psi(x)| + C$$

betetzen bait da.

Hona hemen aldagai-aldaketaz kalkulatzen diren zenbait integrazio-adibide:

1. Adibidea. $\int \sqrt{\sin x}\cos x\, dx$. Egin dezagun $t = \sin x$ aldagai-aldaketa. Orduan

$dt = \cos x\, dx$, beraz, $\int \sqrt{\sin x}\cos x\, dx = \int \sqrt{t}\, dt = \int t^{\frac{1}{2}}\, dt = \frac{2t^{3/2}}{3} + C = \frac{2}{3}\sin^{3/2} x + C$.

2. Adibidea. $\int \frac{x\, dx}{1+x^2}$. Egin dezagun $t = 1 + x^2$, orduan $dt = 2x\, dx$ eta

$\int \frac{x\, dx}{1+x^2} = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t} = \frac{1}{2}\ln|t| + C = \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C$.

3. Adibidea. $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a^2}\int \frac{dx}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2}$. Egin dezagun $t = \frac{x}{a}$, orduan,

$dx = a\, dt$, $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a^2}\int \frac{a\, dt}{1+t^2} = \frac{1}{a}\int \frac{dt}{1+t^2} = \frac{1}{a}\arctan t + C = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C$.

4. Adibidea. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \frac{1}{a}\int \frac{dx}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}}$. Egin dezagun $t = \frac{x}{a}$, orduan

$dx = a\, dt$, $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \frac{1}{a}\int \frac{a\, dt}{\sqrt{1-t^2}} = \int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \arcsin t + C = \arcsin\frac{x}{a} + C$
($a > 0$ suposatu dugu).

3. eta 4. adibideetan integralen taulako (ikus § 2) 11'. eta 13'. formulak lortu ditugu.

5. Adibidea. $\int (\ln x)^3 \frac{dx}{x}$. Egin dezagun $t = \ln x$, orduan $dt = \frac{dx}{x}$,

$\int (\ln x)^3 \frac{dx}{x} = \int t^3\, dt = \frac{t^4}{4} + C = \frac{1}{4}(\ln x)^4 + C$.

6. Adibidea. $\int \frac{x\,dx}{1+x^4}$. Egin dezagun $t = x^2$, orduan $dt = 2x\,dx$,

$$\int \frac{x\,dx}{1+x^4} = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{1+t^2} = \frac{1}{2}\arctan t + C = \frac{1}{2}\arctan x^2 + C.$$

Ordezkapenezko integrazioa integral mugagabeak kalkulatzeko metodorik garrantzitsuenetakoa da. Nahiz eta beste metodoren bat erabili, askotan jo behar izaten dugu aldagai-aldaketara tarteko urratsetan. Integrazioaren arrakasta, aldagai-aldaketa egokia egitean datza. Horrela integrala erraztu egiten bait da. Beraz, integrazio-metodoen azpian aldaketa egokiena aurkitzea dago. Aipatu metodoen azterketari eskaintzen zaio gai honen zati handiena.

§ 5. Bigarren mailako trinomioa duten zenbait funtzioren integralak

I. Kalkulatu ondoko integrala

$$I_1 = \int \frac{dx}{ax^2 + bx + c}.$$

Ezer egin aurretik, izendatzailea karratuen batuketan eta kenketan deskonposatuko dugu,

$$ax^2 + bx + c = a\left[x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right] = a\left[x^2 + 2\frac{b}{2a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} - \left(\frac{b}{2a}\right)^2\right] =$$

$$= a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \left(\frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2}\right)\right] = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 \pm k^2\right],$$

bertan, hauxe egin da:

$$\frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2} = \pm k^2.$$

Plus edo minus zeinua adierazpenaren lehen aldea positiboa edo negatiboa denean hartuko da hurrenez hurren, hau da, $ax^2 + bx + c$ trinomioaren erroak konplexuak ala errealak direnean. Honela, I_1 integralak ondoko itxura du:

$$I_1 = \int \frac{dx}{ax^2 + bx + c} = \frac{1}{a} \int \frac{dx}{\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 \pm k^2\right]}.$$

Alda dezagun aldagaia azkeneko integralean; honela

$$x + \frac{b}{2a} = t, \qquad dx = dt.$$

Hauxe lortuko dugu:

$$I_1 = \frac{1}{a} \int \frac{dt}{t^2 \pm k^2}.$$

Horiek taulako 11'. eta 12. integralak dira.

1. Adibidea. Kalkulatu ondoko integrala

$$\int \frac{dx}{2x^2 + 8x + 20}.$$

Ebazpena:

$$I = \int \frac{dx}{2x^2 + 8x + 20} = \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x^2 + 4x + 10} = \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x^2 + 4x + 4 + 10 - 4} = \frac{1}{2} \int \frac{dx}{(x+2)^2 + 6}.$$

Egin dezagun, $x + 2 = t$, $dx = dt$. Horrela, taulako ondoko integrala lortuko dugu:

$$I = \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t^2 + 6} = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{6}} \arctan \frac{t}{\sqrt{6}} + C.$$

t, x-ren funtzioan duen adierazpenaz ordezkatuz, hauxe lortuko dugu:

$$I = \frac{1}{2\sqrt{6}} \arctan \frac{x+2}{\sqrt{6}} + C.$$

II. Kalkulatu ondoko integral orokorra:

$$I_2 = \int \frac{Ax + B}{ax^2 + bx + c} dx.$$

Integrakizuna ondoko eran deskonposatuko dugu:

$$I_2 = \int \frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}\,dx = \int \frac{\frac{A}{2a}(2ax+b)+\left(B-\frac{Ab}{2a}\right)}{ax^2+bx+c}\,dx.$$

Azkeneko integrala bi integralen batuketa bezala hartuko dugu. Faktore konstanteak integraletik kanpo atereaz hauxe lortuko dugu:

$$I_2 = \frac{A}{2a}\int \frac{2ax+b}{ax^2+bx+c}\,dx + \left(B-\frac{Ab}{2a}\right)\int \frac{dx}{ax^2+bx+c}\,dx.$$

Azkena I_1 integrala da; bere kalkulaketa ezaguna da. Lehenengo integralean ondoko aldagai-aldaketa egingo dugu:

$$ax^2+bx+c=t, \quad (2ax+b)dx = dt.$$

Beraz,

$$\int \frac{(2ax+b)\,dx}{ax^2+bx+c} = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln\left|ax^2+bx+c\right| + C.$$

Azkenik, hauxe lortuko dugu:

$$I_2 = \frac{A}{2a}\ln\left|ax^2+bx+c\right| + \left(B-\frac{Ab}{2a}\right)I_1.$$

2. Adibidea. Kalkulatu ondoko integrala

$$I = \int \frac{x+3}{x^2-2x-5}\,dx.$$

Aplika dezagun aipatutako prozedura,

$$I = \int \frac{x+3}{x^2-2x-5}\,dx = \int \frac{\frac{1}{2}(2x-2)+\left(3+\frac{1}{2}2\right)}{x^2-2x-5}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{(2x-2)\,dx}{x^2-2x-5} + 4\int \frac{dx}{x^2-2x-5} =$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left|x^2-2x-5\right| + 4\int \frac{dx}{(x-1)^2-6} = \frac{1}{2}\ln\left|x^2-2x-5\right| + 4\frac{1}{\sqrt{6}}\ln\left|\frac{\sqrt{6}-(x-1)}{\sqrt{6}+(x-1)}\right| + C.$$

III. Kalkulatu ondoko integrala

$$\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}.$$

I. atalean aztertutako transformazioak erabiliz, integrala taulako integral batera labur daiteke (a-ren zeinuaren arabera)

$$a > 0 \quad \text{bada} \quad \int \frac{dt}{\sqrt{t^2 - k^2}}$$

edo

$$a < 0 \quad \text{bada} \quad \int \frac{dt}{\sqrt{k^2 - t^2}}.$$

Bi integral horiek taulan daude (ikus 13'. eta 14. formulak)

IV.

$$\int \frac{Ax + B}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}\, dx$$

integrala II. atalean aztertutako transformazioen bidez kalkulatzen da:

$$\int \frac{Ax + B}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}\, dx = \int \frac{\frac{A}{2a}(2ax + b) + \left(B - \frac{Ab}{2a}\right)}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}\, dx =$$

$$= \frac{A}{2a} \int \frac{2ax + b}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}\, dx + \left(B - \frac{Ab}{2a}\right) \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}.$$

Lehenengo integralean

$$ax^2 + bx + c = t, \quad (2ax + b)\, dx = dt$$

ordezkapena eginez hauxe lortuko dugu:

$$\int \frac{(2ax+b)\,dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = \int \frac{dt}{\sqrt{t}} = 2\sqrt{t} + C = 2\sqrt{ax^2+bx+c} + C.$$

Bigarren integrala atal honetako III. kasuan ebatzi da.

3. Adibidea.

$$\int \frac{5x+3}{\sqrt{x^2+4x+10}}\,dx = \int \frac{\frac{5}{2}(2x+4)+(3-10)}{\sqrt{x^2+4x+10}}\,dx =$$

$$= \frac{5}{2}\int \frac{2x+4}{\sqrt{x^2+4x+10}}\,dx - 7\int \frac{dx}{\sqrt{(x+2)^2+6}} =$$

$$= 5\sqrt{x^2+4x+10} - 7\ln\left|x+2+\sqrt{(x+2)^2+6}\right| + C =$$

$$= 5\sqrt{x^2+4x+10} - 7\ln\left|x+2+\sqrt{x^2+4x+10}\right| + C.$$

§ 6. Zatikako integrazioa

u eta v x-rekiko bi funtzio deribagarri baldin badira, dakigunez, uv biderkaduraren diferentziala

$$d(uv) = u\,dv + v\,du$$

da. Hor integratuz zera lortuko dugu

$$uv = \int u\,dv + \int v\,du$$

edo

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du. \qquad (1)$$

Horixe da *zatikako integrazioaren formula*. Formula hori u eta dv faktoreen arteko biderkaketa gisa adieraz daitezkeen adierazpenak integratzeko erabiltzen da, v funtzioaren

lorpena, dv diferentzialean oinarrituz, eta $\int v\,du$ integralaren kalkulaketa $\int u\,dv$ integralaren kalkulaketa baino problema errazagoak direlarik.

Emandako integrazio-elementua u eta dv faktoreetan deskonposatu ahal izateko esperientzia apur bat behar da. Esperientzia hori problemak ebazten lortzen da. Ondoren adibide batzuk emango ditugu prozedura erakusteko.

1. Adibidea. $\int x \sin x\,dx$. Demagun

$$u = x, \quad dv = \sin x\,dx;$$

orduan

$$du = dx, \quad v = -\cos x.$$

Beraz

$$\int x \sin x\,dx = -x\cos x + \int \cos x\,dx = -x\cos x + \sin x + C.$$

Oharra: v funtzioa dv diferentzialetik lortzen denean edozein konstante har daiteke, horrek ez bait du azkeneko emaitzan eraginik izango [hori erraz baiezta daiteke (1) berdintzan v-ren ordez $v + C$ ipiniz]. Horregatik konstante horren balioa zero izatea komeni da.

Zatikako integrazioa kasu askotan erabiltzen da. Ondoko integral-motetan adibidez:

$$\int x^k \sin ax\,dx, \qquad \int x^k \cos ax\,dx,$$

$$\int x^k e^{ax}\,dx, \qquad \int x^k \ln x\,dx.$$

Baita alderantzizko funtzio trigonometrikoak dituztenetan ere.

2. Adibidea. Kalkulatu $\int \arctan x\,dx$. Demagun $u = \arctan x$, $dv = dx$, orduan

$$du = \frac{dx}{1+x^2}, \quad v = x.$$

Beraz,

$$\int \arctan x\, dx = x\arctan x - \int \frac{x\, dx}{1+x^2} = x\arctan x - \frac{1}{2}\ln\left|1+x^2\right| + C.$$

3. Adibidea. Kalkulatu $\int x^2 e^x\, dx$. Demagun $u = x^2$, $dv = e^x dx$, orduan

$$du = 2x\, dx, \quad v = e^x,$$

$$\int x^2 e^x\, dx = x^2 e^x - 2\int xe^x\, dx.$$

Azkeneko integrala zatika integratuz,

$$u_1 = x, \quad du_1 = dx,$$

$$dv_1 = e^x\, dx, \quad v_1 = e^x.$$

Orduan:

$$\int xe^x\, dx = xe^x - \int e^x\, dx = xe^x - e^x + C.$$

Beraz, hauxe dugu

$$\int x^2 e^x\, dx = x^2 e^x - 2(xe^x - e^x) + C = x^2 e^x - 2xe^x + 2e^x + C = e^x(x^2 - 2x + 2) + C.$$

4. Adibidea. Kalkulatu $\int (x^2 + 7x - 5)\cos 2x\, dx$. $u = x^2 + 7x - 5$ eta $dv = \cos 2x\, dx$ eginez,

$$du = (2x+7)\, dx, \quad v = \frac{\sin 2x}{2},$$

$$\int (x^2 + 7x - 5)\cos 2x\, dx = (x^2 + 7x - 5)\frac{\sin 2x}{2} - \int (2x+7)\frac{\sin 2x}{2}\, dx.$$

Azkeneko integralari zatikako integrazioaren metodoa aplikatuko diogu. $u_1 = \dfrac{2x+7}{2}$, $dv_1 = \sin 2x\, dx$ kontutan hartuz,

$$du_1 = dx, \quad v_1 = -\frac{\cos 2x}{2};$$

$$\int \frac{2x+7}{2} \sin 2x \, dx = \frac{2x+7}{2}\left(-\frac{\cos 2x}{2}\right) - \int \left(-\frac{\cos 2x}{2}\right) dx =$$

$$= -\frac{(2x+7)\cos 2x}{4} + \frac{\sin 2x}{4} + C.$$

Beraz, hauxe lortuko dugu

$$\int (x^2 + 7x - 5)\cos 2x \, dx = (x^2 + 7x - 5)\frac{\sin 2x}{2} + (2x+7)\frac{\cos 2x}{4} - \frac{\sin 2x}{4} + C.$$

5. Adibidea. $I = \int \sqrt{a^2 - x^2} \, dx$.

Integrakizuna $\sqrt{a^2 - x^2}$ faktorearekin biderkatu eta zatituko dugu.

$$\int \sqrt{a^2 - x^2} \, dx = \int \frac{a^2 - x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} \, dx = a^2 \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} - \int \frac{x^2 \, dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} =$$

$$= a^2 \arcsin \frac{x}{a} - \int x \frac{x \, dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}.$$

Azken integral horri zatikako integrazioa aplikatuko diogu ondokoa eginez:

$$u = x, \quad du = dx,$$

$$dv = \frac{x \, dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}, \quad v = -\sqrt{a^2 - x^2}.$$

Orduan,

$$\int \frac{x^2 \, dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \int x \frac{x \, dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = -x\sqrt{a^2 - x^2} + \int \sqrt{a^2 - x^2} \, dx.$$

Azken emaitza hori emandako integralean ordezkatuz, hauxe dugu:

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = a^2 \arcsin \frac{x}{a} + x\sqrt{a^2 - x^2} - \int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx.$$

Azkenik

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + C.$$

6. Adibidea. Ondoko integralak kalkulatu

$$I_1 = \int e^{ax} \cos bx\, dx \qquad \text{eta} \qquad I_2 = \int e^{ax} \sin bx\, dx.$$

Lehen integralari zatikako integrazioaren metodoa aplikatuz

$$u = e^{ax}, \quad du = ae^{ax},$$

$$dv = \cos\, bx\, dx, \quad v = \frac{1}{b} \sin bx,$$

$$\int e^{ax} \cos bx\, dx = \frac{1}{b} e^{ax} \sin bx - \frac{a}{b} \int e^{ax} \sin bx\, dx.$$

Azkeneko integralari ere zatikako integrazioaren metodoa aplikatuko diogu:

$$u = e^{ax}, \quad du = ae^{ax},$$

$$dv = \sin bx\, dx, \quad v = -\frac{1}{b} \cos bx,$$

$$\int e^{ax} \sin bx\, dx = -\frac{1}{b} e^{ax} \cos bx + \frac{a}{b} \int e^{ax} \cos bx\, dx.$$

Lortutako adierazpena aurreko berdintzan sartuz hauxe dugu:

$$\int e^{ax} \cos bx\, dx = \frac{1}{b} e^{ax} \sin bx + \frac{a}{b^2} e^{ax} \cos bx - \frac{a^2}{b^2} \int e^{ax} \cos bx\, dx.$$

Azken berdintzatik I_1 lortuko dugu:

$$\left(1+\frac{a^2}{b^2}\right)\int e^{ax}\cos bx\,dx = e^{ax}\left(\frac{1}{b}\sin bx+\frac{a}{b^2}\cos bx\right),$$

eta hortik

$$I_1=\int e^{ax}\cos bx\,dx=\frac{e^{ax}(b\sin bx+a\cos bx)}{a^2+b^2}+C.$$

Modu berean I_2 kalkulatuko dugu

$$I_2=\int e^{ax}\sin bx\,dx=\frac{e^{ax}(a\sin bx-b\cos bx)}{a^2+b^2}+C.$$

§ 7. Frakzio razionalak. Frakzio razional elementalak eta horien integrazioa

Aurrerago ikusiko dugunez edozein funtzio elementalen integrala ezin da funtzio elementalen bidez adierazi. Horregatik, beren integralak funtzio elementalen bidez adieraz daitezkeen funtzio-mota batzuk definitzea komenigarri da. Mota horietako errazenetakoa funtzio razionalena da.

Edozein funtzio razional frakzio razional gisa, hots, bi polinomioren arteko zatiketa bezala, adieraz daiteke:

$$\frac{Q(x)}{f(x)}=\frac{B_0x^m+B_1x^{m-1}+\ldots+B_m}{A_0x^n+A_1x^{n-1}+\ldots+A_n}.$$

Arrazonamenduaren orokortasuna mugatuko ez duelakoan, demagun polinomio horiek ez dituztela erro amankomunak.

Zenbakitzailearen maila izendatzailearena baino txikiagoa baldin bada frakzioari *propio* deitzen zaio; alderantzizko kasuan *ez-propio* deitzen zaio.

Frakzioa ez-propioa baldin bada, zenbakitzailea izendatzailearekin zatitzerakoan (polinomio-zatiketaren arauen arabera) emandako frakzioa polinomio eta frakzio propio baten arteko batuketa gisa adieraz daiteke:

$$\frac{Q(x)}{f(x)}=M(x)+\frac{F(x)}{f(x)},$$

non $M(x)$ polinomioa eta $\dfrac{F(x)}{f(x)}$ frakzio propioa diren.

1. Adibidea. Demagun $\dfrac{x^4-3}{x^2+2x+1}$ frakzio razional ez-propioa.

Zenbakitzailea izendatzailearekin zatitzerakoan (polinomio-zatiketaren arauen arabera) hauxe lortuko dugu:

$$\frac{x^4-3}{x^2+2x+1}=x^2-2x+3-\frac{4x-6}{x^2+2x+1}.$$

Polinomioen integrazioak ez du zailtasunik. Horregatik frakzio razionalen integrazioaren zailtasunik nagusiena frakzio razional propioen integrazioan datza.

Definizioa. Ondoko motetako frakzio razionalei:

I. $\dfrac{A}{x-a}$.

II. $\dfrac{A}{(x-a)^k}$ ($2\leq k$ zenbaki oso positiboa da).

III. $\dfrac{Ax+B}{x^2+px+q}$ (izendatzailearen erroak konplexuak dira, hau da, $\dfrac{p^2}{4}-q<0$).

IV. $\dfrac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k}$ ($2\leq k$ zenbaki oso positiboa da eta izendatzailearen erroak konplexuak dira).

I, II, III edo IV *motako frakzio sinple*, hurrenez hurren, deritze.

§ 8an frakzio razional oro frakzio elementalen arteko batuketa gisa adieraz daitekeela frogatuko dugu. Horregatik, lehenbizi frakzio sinpleen integralak aztertuko ditugu.

I, II eta III motetako frakzio sinpleen integrazioa ez da zaila; horregatik horien integrazioa aztertzerakoan ez dugu zehaztasunik emango.

I. $\displaystyle\int\frac{A}{x-a}dx=A\ln|x-a|+C.$

II. $$\int \frac{A}{(x-a)^k}\,dx = A\int (x-a)^{-k}\,dx = A\frac{(x-a)^{-k+1}}{-k+1} + C = \frac{A}{(1-k)(x-a)^{k-1}} + C.$$

III. $$\int \frac{Ax+B}{x^2+px+q}\,dx = \int \frac{\frac{A}{2}(2x+p) + \left(B - \frac{Ap}{2}\right)}{x^2+px+q}\,dx =$$

$$= \frac{A}{2}\int \frac{2x+p}{x^2+px+q}\,dx + \left(B - \frac{Ap}{2}\right)\int \frac{dx}{x^2+px+q} =$$

$$= \frac{A}{2}\ln\left|x^2+px+q\right| + \left(B - \frac{Ap}{2}\right)\int \frac{dx}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2 + \left(q - \frac{p^2}{4}\right)} =$$

$$= \frac{A}{2}\ln\left|x^2+px+q\right| + \frac{2B-Ap}{\sqrt{4q-p^2}}\arctan\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}} + C \text{ (ikus § 5).}$$

IV motako frakzio sinpleen integrazioa egiteko kalkulu korapilotsuagoak egin behar dira. Demagun mota horretako integrala kalkulatu behar dugula.

IV. $$\int \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k}\,dx.$$

Egin ditzagun ondoko aldaketak:

$$\int \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k}\,dx = \int \frac{\frac{A}{2}(2x+p) + \left(B - \frac{Ap}{2}\right)}{(x^2+px+q)^k}\,dx =$$

$$= \frac{A}{2}\int \frac{2x+p}{(x^2+px+q)^k}\,dx + \left(B - \frac{Ap}{2}\right)\int \frac{dx}{(x^2+px+q)^k}.$$

Lehen integrala ordezkapenaren metodoaz ebazten da: $x^2+px+q = t$; $(2x+p)\,dx = dt$

$$\int \frac{2x+p}{(x^2+px+q)^k}\,dx = \int \frac{dt}{t^k} = \int t^{-k}dt = \frac{t^{-k+1}}{1-k} + C = \frac{1}{(1-k)(x^2+px+q)^{k-1}} + C.$$

Bigarren integrala, I_k izendatuko dena, ondoko eran idatziko dugu:

$$I_k = \int \frac{dx}{(x^2+px+q)^k} = \int \frac{dt}{\left[\left(x+\frac{p}{2}\right)^2 + \left(q-\frac{p^2}{4}\right)\right]^k} = \int \frac{dt}{(t^2+m^2)^k},$$

ondoko aldaketa hau egin dugularik:

$$x+\frac{p}{2}=t, \quad dx=dt, \quad q-\frac{p^2}{4}=m^2$$

(egindako hipotesiaren arabera izendatzailearen erroak konplexuak dira eta beraz $q-\frac{p^2}{4}>0$). Egin dezagun ondokoa:

$$I_k = \int \frac{dt}{(t^2+m^2)^k} = \frac{1}{m^2}\int \frac{(t^2+m^2)-t^2}{(t^2+m^2)^k}dt =$$

$$= \frac{1}{m^2}\int \frac{dt}{(t^2+m^2)^{k-1}} - \frac{1}{m^2}\int \frac{t^2}{(t^2+m^2)^k}dt. \qquad (1)$$

Azkeneko integrala transformatuko dugu:

$$\int \frac{t^2dt}{(t^2+m^2)^k} = \int \frac{t\cdot t\,dt}{(t^2+m^2)^k} = \frac{1}{2}\int t\frac{d(t^2+m^2)}{(t^2+m^2)^k} = -\frac{1}{2(k-1)}\int t\,d\left(\frac{1}{(t^2+m^2)^{k-1}}\right).$$

Zatikako integrazioa eginez hauxe dugu:

$$\int \frac{t^2dt}{(t^2+m^2)^k} = -\frac{1}{2(k-1)}\left[t\frac{1}{(t^2+m^2)^{k-1}} - \int \frac{dt}{(t^2+m^2)^{k-1}}\right].$$

(1) berdintzan adierazpen hori ordezkatuz hauxe lortzen dugu:

$$I_k = \int \frac{dt}{(t^2+m^2)^k} = \frac{1}{m^2}\int \frac{dt}{(t^2+m^2)^{k-1}} + \frac{1}{m^2}\frac{1}{2(k-1)}\left[\frac{t}{(t^2+m^2)^{k-1}} - \int \frac{dt}{(t^2+m^2)^{k-1}}\right] =$$

$$= \frac{t}{2m^2(k-1)(t^2+m^2)^{k-1}} + \frac{2k-3}{2m^2(k-1)}\int \frac{dt}{(t^2+m^2)^{k-1}}.$$

Bigarren aldean I_k mota bereko integrala dugu, baina integrakizunaren izendatzailearen berretzailea, $(k-1)$, unitate bat txikiagoa da; honela I_k integrala I_{k-1} integralaren funtzio bezala adierazi dugu.

Behin eta berriro prozedura hori aplikatuz ondoko integral ezaguna lortuko dugu:

$$I_1 = \int \frac{dt}{t^2 + m^2} = \frac{1}{m} \arctan \frac{t}{m} + C.$$

t eta m beren balioez ordezkatuz IV integralaren adierazpena lortuko dugu x-ren eta emandako A, B, p eta q-ren funtzioan.

2. Adibidea.

$$\int \frac{x-1}{(x^2+2x+3)^2}\, dx = \int \frac{\frac{1}{2}(2x+2) + (-1-1)}{(x^2+2x+3)^2}\, dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{2x+2}{(x^2+2x+3)^2}\, dx - 2\int \frac{dx}{(x^2+2x+3)^2} = -\frac{1}{2}\frac{1}{(x^2+2x+3)} - 2\int \frac{dx}{(x^2+2x+3)^2}.$$

Aplika diezaiogun $x+1=t$ ordezkapena azkeneko integralari:

$$\int \frac{dx}{(x^2+2x+3)^2} = \int \frac{dx}{[(x+1)^2+2]^2} = \int \frac{dt}{(t^2+2)^2} = \frac{1}{2}\int \frac{(t^2+2)-t^2}{(t^2+2)^2}\, dt =$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t^2+2} - \frac{1}{2}\int \frac{t^2}{(t^2+2)^2}\, dt = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{2}} \arctan \frac{t}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2}\int \frac{t^2\, dt}{(t^2+2)^2}.$$

Kontutan har dezagun azkeneko integrala:

$$\int \frac{t^2 dt}{(t^2+2)^2} = \frac{1}{2}\int \frac{t\, d(t^2+2)}{(t^2+2)^2} = -\frac{1}{2}\int t\, d\left(\frac{1}{t^2+2}\right) =$$

$$= -\frac{1}{2}\frac{t}{t^2+2} + \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t^2+2} = -\frac{t}{2(t^2+2)} + \frac{1}{2\sqrt{2}} \arctan \frac{t}{\sqrt{2}}$$

(hor hautazko konstante bat sartzea alperrikakoa da; azkenean sartuko dugu).

Beraz,

$$\int \frac{dx}{(x^2+2x+3)^2} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \arctan \frac{x+1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2}\left[-\frac{x+1}{2(x^2+2x+3)} + \frac{1}{2\sqrt{2}} \arctan \frac{x+1}{\sqrt{2}} \right].$$

Azkenik hauxe lortuko dugu:

$$\int \frac{x-1}{(x^2+2x+3)^2}\, dx = -\frac{x+2}{2(x^2+2x+3)} - \frac{\sqrt{2}}{4} \arctan \frac{x+1}{\sqrt{2}} + C.$$

§ 8. Frakzio razionalen deskonposaketa frakzio sinpletan

Froga dezagun frakzio razional propio oro frakzio sinpleen arteko batuketa gisa deskonposa daitekeela.

Demagun $\dfrac{F(x)}{f(x)}$ frakzio razional propioa.

Demagun funtzio horiek osatzen dituzten polinomioen koefizienteak zenbaki errealak direla eta frakzioa laburtezina dela (hau da, izendatzaileak eta zenbakitzaileak ez dute erro amankomunik).

1. Teorema. Demagun $x = a$ izendatzailearen k ordenako erro anizkoitza dela, hau da, $f(x) = (x-a)^k f_1(x)$, non $f_1(a) \neq 0$ den (ikus VII. gaiko § 6). Orduan emandako frakzioa, $\dfrac{F(x)}{f(x)}$, bi frakzio razional propioen arteko batuketan deskonposa daiteke:

$$\frac{F(x)}{f(x)} = \frac{A}{(x-a)^k} + \frac{F_1(x)}{(x-a)^{k-1} f_1(x)}, \tag{1}$$

non A zero ez den konstantea den eta $F_1(x)$, $(x-a)^k f_1(x)$ izendatzailearen maila baino txikiagokoa den.

Frogapena. Ondoko identitatea idatz dezagun

$$\frac{F(x)}{f(x)} = \frac{A}{(x-a)^k} + \frac{F(x) - Af_1(x)}{(x-a)^k f_1(x)} \tag{2}$$

(A edozein delarik betetzen dena). A konstantea kalkulatuko dugu ondoko baldintzarekin: $F(x) - Af_1(x)$ polinomioa, $(x-a)$rekin zatigarria izan dadin. Horretarako, Bezout-en teoremaren arabera beharrezkoa eta nahikoa da

$$F(a) - Af_1(a) = 0$$

berdintza betetzea.

$f_1(a) \neq 0$, $F(a) \neq 0$ denez, A ondoko berdintzatik ateratzen da:

$$A = \frac{F(a)}{f_1(a)}.$$

A horretarako hauxe dugu:

$$F(x) - Af_1(x) = (x - a)F_1(x),$$

non $F_1(x)$, $(x-a)^{k-1} f_1(x)$ polinomioarena baino maila txikiagoko polinomioa den. (2) formulako frakzioan izendatzailea eta zenbakitzailea $(x - a)$rekin zatituz (1) berdintza lortuko dugu.

Korolarioa. (1) berdintzako

$$\frac{F_1(x)}{(x-a)^{k-1} f_1(x)}$$

frakzio razional propioari arrazonamendu berdintsua aplika diezaiokegu. Honela izendatzaileak $x = a$, k ordenako erro anizkoitza baldin badu, hauxe idatz daiteke:

$$\frac{F(x)}{f(x)} = \frac{A}{(x-a)^k} + \frac{A_1}{(x-a)^{k-1}} + \ldots + \frac{A_{k-1}}{x-a} + \frac{F_k(x)}{f_1(x)},$$

non $\dfrac{F_k(x)}{f_1(x)}$ frakzio propio laburtezina den eta frogatu berri dugun teorema aplika diezaiokegu $f_1(x)$-ek beste erro erreal batzuk baldin baditu.

Azter dezagun orain, izendatzaileak erro konplexuak ditueneko kasua. Kontutan har dezagun koefiziente errealeko polinomio baten erro konplexuak binaka konjokatuak direla (ikus VII. gaiko § 8).

Polinomio bat faktore errealetan deskonposatzen denean erro konjokatuen bikote bakoitzari $x^2 + px + q$ itxurako adierazpena dagokio. Erro konjokatuak anizkoitzak eta μ ordenakoak baldin badira dagokien adierazpena ondokoa izango da: $(x^2 + px + q)^{\mu}$.

2. Teorema. $f(x)=(x^2+px+q)^{\mu}\varphi_1(x)$ baldin bada eta $\varphi_1(x)$ polinomioa ezin baldin bada x^2+px+q adierazpenarekin zatitu, $\frac{F(x)}{f(x)}$ frakzio propioa bi adierazpen propioen arteko batuketaren bidez adieraz daiteke:

$$\frac{F(x)}{f(x)}=\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^{\mu}}+\frac{\Phi_1(x)}{(x^2+px+q)^{\mu-1}\varphi_1(x)}, \tag{3}$$

non $\Phi_1(x)$ polinomioaren maila $(x^2+px+q)^{\mu-1}\varphi_1(x)$ adierazpenarena baino txikiagoa den.

Frogapena. Idatz dezagun ondoko berdintza,

$$\frac{F(x)}{f(x)}=\frac{F(x)}{(x^2+px+q)^{\mu}\varphi_1(x)}=\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^{\mu}}+\frac{F(x)-(Mx+N)\varphi_1(x)}{(x^2+px+q)^{\mu}\varphi_1(x)}, \tag{4}$$

edozein M eta N-tarako betetzen da eta kalkula dezagun M eta N $F(x)-(Mx+N)\varphi_1(x)$ polinomioa x^2+px+q adierazpenarekin zatigarria izan dadin. Horretarako beharrezkoa eta nahikoa da

$$F(x)-(Mx+N)\varphi_1(x)=0$$

ekuazioak eta x^2+px+q polinomioak erro berdinak, $\alpha\pm i\beta$, izatea. Beraz,

$$F(\alpha+i\beta)-[M(\alpha+i\beta)+N]\varphi_1(\alpha+i\beta)=0$$

edo

$$M(\alpha+i\beta)+N=\frac{F(\alpha+i\beta)}{\varphi_1(\alpha+i\beta)}.$$

Baina, $\frac{F(\alpha+i\beta)}{\varphi_1(\alpha+i\beta)}$ zenbaki konplexu ondo zehaztua da, $K+iL$ eran idatz daitekeena, K eta L zenbaki errealak izanik. Honela

$$M(\alpha+i\beta)+N=K+iL;$$

nondik

$$M\alpha + N = K, \quad M\beta = L$$

edo

$$M = \frac{L}{\beta}, \quad N = \frac{K\beta - L\alpha}{\beta}$$

lortzen den.

M eta N koefizienteen balio horiekin, $F(x) - (Mx + N)\varphi_1(x)$ polinomioak $\alpha + i\beta$ zenbakia errotzat du eta beraz, baita $\alpha - i\beta$ erro konjokatua ere. Baina, kasu honetan polinomioa $x - (\alpha - i\beta)$ eta $x - (\alpha + i\beta)$ faktoreekin zatigarri da eta baita berauen biderkadurarekin, hots, $x^2 + px + q$.

Zatiketa horren zatidurari $\Phi_1(x)$ deituz, hauxe lortuko dugu:

$$F(x) - (Mx + N)\varphi_1(x) = (x^2 + px + q)\Phi_1(x).$$

(4) berdintzako azkeneko frakzioa $x^2 + px + q$-rekin sinplifikatuz (3) berdintza lortuko dugu. Berdintza horretan $\Phi_1(x)$ polinomioaren maila izendatzailearena baino txikiagoa da, frogatu nahi genuen bezala.

1. eta 2. teoremen emaitzak $\dfrac{F(x)}{f(x)}$ frakzio propioari aplikatuz, $f(x)$ izendatzailearen erro guztiei dagozkien frakzio sinple guztiak bereiz ditzakegu. Honela ondoko emaitza ondorioztatzen da:

$$f(x) = (x - a)^{\alpha}(x - b)^{\beta}\ldots(x^2 + px + q)^{\mu}\ldots(x^2 + lx + s)^{\nu}$$

bada $\dfrac{F(x)}{f(x)}$ ondoko erara deskonposa daiteke:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{F(x)}{f(x)} &= \frac{A}{(x-a)^{\alpha}} + \frac{A_1}{(x-a)^{\alpha-1}} + \ldots + \frac{A_{\alpha-1}}{x-a} + \\
&+ \frac{B}{(x-b)^{\beta}} + \frac{B_1}{(x-b)^{\beta-1}} + \ldots + \frac{B_{\beta-1}}{x-b} + \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&+ \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^{\mu}} + \frac{M_1x+N_1}{(x^2+px+q)^{\mu-1}} + \ldots + \frac{M_{\mu-1}x+N_{\mu-1}}{x^2+px+q} + \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&+ \frac{Px+Q}{(x^2+lx+s)^{\nu}} + \frac{P_1x+Q_1}{(x^2+lx+s)^{\nu-1}} + \ldots + \frac{P_{\nu-1}x+Q_{\nu-1}}{x^2+lx+s}.
\end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

A, A_1, ..., B, B_1, ... koefizienteak ondoko baldintzak kontutan hartuz kalkula daitezke. (5) berdintza identitate bat da; beraz, frakzio horiei izendatzaile amankomuna jartzerakoan, bi aldeetako zenbakitzaileetan polinomio bera lortzen da. x-ren berretzaile bera duten gaien koefizienteak berdinduz ekuazio-sistema bat lortuko dugu eta hortik A, A_1, ..., B, B_1, ... ezezagunak askatuko ditugu.

Koefiziente horiek ondokoa ere kontutan hartuz aska daitezke: frakzioak izendatzaile amankomunera erreduzitu ondoren berdintzaren bi aldeetan lortutako polinomioek erabat berdinak izan behar dute; beraz, polinomio horien balioak berdinak izango dira x-ren edozein baliotarako. x-ri balio desberdinak emanez koefizienteak zehazteko beharrezko ekuazioak lortuko ditugu.

Honela, edozein frakzio razional propio frakzio razional sinpleen arteko batuketa bezala adieraz daitekeela frogatu dugu.

Adibidea. $\dfrac{x^2+2}{(x+1)^3(x-2)}$ frakzioa frakzio sinpleetan deskonposatu. (5) formularen arabera hauxe dugu:

$$\frac{x^2+2}{(x+1)^3(x-2)} = \frac{A}{(x+1)^3} + \frac{A_1}{(x+1)^2} + \frac{A_2}{x+1} + \frac{B}{x-2}.$$

Izendatzaile amankomunera laburtuz eta zenbakitzaileak berdinduz hauxe dugu:

$$x^2+2 = A(x-2) + A_1(x+1)(x-2) + A_2(x+1)^2(x-2) + B(x+1)^3, \qquad (6)$$

edo

$$x^2+2 = (A_2+B)x^3 + (A_1+3B)x^2 + (A-A_1-3A_2+3B)x + (-2A-2A_1-2A_2+B).$$

x^3, x^2, x^1, x^0 (gai askea) gaien koefizienteak berdinduz koefizienteak kalkulatzeko ekuazio-sistema lortuko dugu:

$$\begin{aligned} 0 &= A_2 + B, \\ 1 &= A_1 + 3B, \\ 0 &= A - A_1 - 3A_2 + 3B, \\ 2 &= -2A - 2A_1 - 2A_2 + B. \end{aligned}$$

Sistema hori ebatziz ondokoa lortuko dugu:

$$A = -1; \quad A_1 = \frac{1}{3}; \quad A_2 = -\frac{2}{9}; \quad B = \frac{2}{9}.$$

x-rekiko identitatea den (6) berdintzatik lortzen diren ekuazioetatik ere zenbait koefiziente kalkula daitezke, x aldagaiari balio konkretuak ematen zaizkionean.

Honela, $x = -1$ eginez, $3 = -3A$ edo $A = -1$ dugu;

$$x = 2 \text{ eginez, } 6 = 27B \text{ edo } B = \frac{2}{9}.$$

Bi ekuazio horiei, x-ren berretzaile berdinen koefizienteen berdinketatik lortutako bi ekuazio gehitzen badizkiogu, lau koefiziente ezezagunak kalkulatzeko lau ekuazio izango ditugu.

Beraz, ondoko deskonposaketa dugu:

$$\frac{x^2+2}{(x+1)^3(x-2)} = -\frac{1}{(x+1)^3} + \frac{1}{3(x+1)^2} - \frac{2}{9(x+1)} + \frac{2}{9(x-2)}.$$

§ 9. Frakzio razionalen integrazioa

Demagun $\dfrac{Q(x)}{f(x)}$ frakzio razionalaren integrala kalkulatu nahi dugula, hau da,

$$\int \frac{Q(x)}{f(x)}\,dx.$$

Delako frakzioa ez-propioa baldin bada, $M(x)$ polinomio baten eta $\dfrac{F(x)}{f(x)}$ (ikus § 7) frakzio razional propioaren arteko batuketa gisa adieraziko dugu. Gero, $\dfrac{F(x)}{f(x)}$ frakzioa frakzio sinpleen arteko batuketa gisa [ikus § 8ko (5) formula] deskonposatuko dugu. Honela, edozein frakzio razional baten integrazioa, polinomio baten eta zenbait frakzio sinpleen integrazioa da. § 8an lortutako emaitzetatik, $f(x)$ izendatzailearen erroek frakzio sinpleen itxura determinatzen dutela ondorioztatzen da. Ondoko kasuak aurki daitezke:

I. kasua. Izendatzailearen erroak errealak eta desberdinak dira, hots,

$$f(x) = (x-a)(x-b)\ldots(x-d).$$

Kasu honetan $\dfrac{F(x)}{f(x)}$ frakzioa I motako frakzio sinpletan deskonposatzen da:

$$\frac{F(x)}{f(x)} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} + \ldots + \frac{D}{x-d},$$

eta orduan

$$\int \frac{F(x)}{f(x)}dx = \int \frac{A}{a-x}dx + \int \frac{B}{x-b}dx + \ldots + \int \frac{D}{x-d}dx =$$

$$= A\ln|x-a| + B\ln|x-b| + \ldots + D\ln|x-d| + C.$$

II. kasua. Izendatzailearen erroak errealak dira, baina batzuk anizkoitzak

$$f(x) = (x-a)^{\alpha}(x-b)^{\beta}\ldots(x-d)^{\delta}.$$

Kasu honetan $\dfrac{F(x)}{f(x)}$ I eta II motako frakzio sinpletan deskonposatzen da.

1. Adibidea. (ikus X. gaiko § 8ko adibidea)

$$\int \frac{x^2+2}{(x+1)^3(x-2)}dx = -\int \frac{dx}{(x+1)^3} + \frac{1}{3}\int \frac{dx}{(x+1)^2} - \frac{2}{9}\int \frac{dx}{x+1} + \frac{2}{9}\int \frac{dx}{x-2} =$$

$$= \frac{1}{2}\frac{1}{(x+1)^2} - \frac{1}{3(x+1)} - \frac{2}{9}\ln|x+1| + \frac{2}{9}\ln|x-2| + C = -\frac{2x-1}{6(x+1)^2} + \frac{2}{9}\ln\left|\frac{x-2}{x+1}\right| + C.$$

III. kasua. Izendatzaileak erro konplexu eta sinple ditu, hau da, desberdinak

$$f(x) = (x^2+px+q)(x^2+lx+s)\ldots(x-a)^{\alpha}\ldots(x-d)^{\delta}.$$

$\dfrac{F(x)}{f(x)}$ frakzioa I, II eta III motako frakzio sinpletan deskonposatzen da.

2. Adibidea. Kalkulatu ondoko integrala:

$$\int \frac{x\,dx}{(x^2+1)(x-1)}.$$

Deskonposa dezagun integrakizuneko frakzioa frakzio sinpletan [ikus X. gaiko § 8, (5)]

$$\frac{x}{(x^2+1)(x-1)} = \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{C}{x-1}.$$

Beraz,

$$x = (Ax+B)(x-1) + C(x^2+1).$$

$x=1$ eginez $1=2C$, $C=\dfrac{1}{2}$ dugu.

$x=0$ eginez $0=-B+C$, $B=\dfrac{1}{2}$ dugu.

x^2-ren koefizienteak berdinduz $0=A+C$, $A=-\dfrac{1}{2}$ dugu.

Honela,

$$\int \frac{x\,dx}{(x^2+1)(x-1)} = -\frac{1}{2}\int \frac{x-1}{x^2+1}dx + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x-1} =$$

$$= -\frac{1}{2}\int \frac{x\,dx}{x^2+1} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2+1} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x-1} = -\frac{1}{4}\ln\left|x^2+1\right| + \frac{1}{2}\arctan x + \frac{1}{2}\ln|x-1| + C.$$

IV. kasua. Izendatzaileak erro konplexu anizkoitzak ere baditu:

$$f(x)=(x^2+px+q)^{\mu}(x^2+lx+s)^{\nu}\dots(x-a)^{\alpha}\dots(x-d)^{\delta}.$$

Kasu honetan, IV motako frakzio sinpleak ere $\dfrac{F(x)}{f(x)}$ frakzioaren deskonposaketan sartzen dira.

3. Adibidea.

$$\int\frac{x^4+4x^3+11x^2+12x+8}{(x^2+2x+3)^2(x+1)}dx.$$

Ebazpena. Emandako frakzioa frakzio sinpletan deskonposatuko dugu:

$$\frac{x^4+4x^3+11x^2+12x+8}{(x^2+2x+3)^2(x+1)}=\frac{Ax+B}{(x^2+2x+3)^2}+\frac{Cx+D}{(x^2+2x+3)}+\frac{E}{x+1},$$

eta hortik

$$x^4+4x^3+11x^2+12x+8=$$

$$=(Ax+B)(x+1)+(Cx+D)(x^2+2x+3)(x+1)+E(x^2+2x+3)^2.$$

Koefizienteak determinatzeko aipatutako bi metodoak konbinatuz, hauxe dugu:

$$A=1,\quad B=-1,\quad C=0,\quad D=0,\quad E=1.$$

Beraz, ondokoa lortzen dugu:

$$\int\frac{x^4+4x^3+11x^2+12x+8}{(x^2+2x+3)^2(x+1)}dx=\int\frac{x-1}{(x^2+2x+3)^2}dx+\int\frac{dx}{x+1}=$$

$$=-\frac{x+2}{2(x^2+2x+3)}-\frac{\sqrt{2}}{4}\arctan\frac{x+1}{\sqrt{2}}+\ln|x+1|+C.$$

X. gaiko § 7ko 2. adibidean, bigarren ataleko lehen integrala kalkulatu dugu. Bigarren integrala berehala kalkulatzen da.

Egindako azterketatik, edozein funtzio razionalen integrala, funtzio elementalen kopuru finituren bidez adieraz daitekeela ondorioztatzen da, hau da:

1) logaritmoen bidez, frakzio sinpleak I motakoak baldin badira;

2) funtzio razionalen bidez, frakzio sinpleak II motakoak baldin badira;

3) logaritmo eta arku tangenteen bidez, frakzio sinpleak III motakoak baldin badira;

4) funtzio razional eta arku tangenteen bidez, frakzio sinpleak IV motakoak baldin badira.

§ 10. Ostrogradski-ren metodoa

Izendatzaileak erro anizkoitzak dituenean funtzio razional baten integrala kalkulatzeko beste metodo errazago bat erabil daiteke. Metodo honen bidez integralaren zati razionala bereiz daiteke, frakzioa elementu sinpletan deskonposatu gabe, eta gero izendatzailean erro sinpleak soilik dituen frakzio razionala integratu. Frakzio horren integrazioa ez da batere zaila, I eta III motetako frakzio sinpletan deskonposa bait daiteke. Metodo honen asmatzailea M. V. Ostrogradski (1801-1862) matematikari errusiarra izan zen eta ondoko honetan datza:

Demagun $\dfrac{F(x)}{f(x)}$ frakzio razional propioa integratu nahi dela, non

$$f(x) = (x-a)^{\alpha}(x-b)^{\beta}\ldots(x^2+px+q)^{\mu}\ldots(x^2+lx+s)^{\nu}$$

den.

§ 8ko (5) berdintzaren arabera, kasu hau lehen aipatutako lau motetako frakzio razional propioen integrazioa eginez ebazten da (ikus § 7).

Kasu honetan:

1) $\dfrac{A}{(x-a)^{\alpha}}$ motako frakzioaren integrala $\dfrac{A^*}{(x-a)^{\alpha-1}}$ motako frakzioa da.

2) $\dfrac{Mx+N}{(x^2+px+q)^{\mu}}$ motako frakzioaren integrala $\dfrac{M^*x+N^*}{(x^2+px+q)^{\mu^*}}$ motako frakzioen, $\mu^* \leq \mu - 1$ izanik, eta

$$\int \frac{N^{**}}{x^2 + px + q} dx$$

motako integral baten arteko batura da.

Oraingoz, I eta III motetako frakzioen integrazioa alde batera utziko dugu.

II eta IV motetako frakzioen integrazioaren ondoren lortutako frakzio razionalak batzerakoan $\frac{Y(x)}{Q(x)}$ motako frakzio propioa lortuko dugu, non

$$Q(x) = (x-a)^{\alpha-1}(x-b)^{\beta-1}\ldots(x^2+px+q)^{\mu-1}\ldots(x^2+lx+s)^{\nu-1}$$

den.

$Y(x)$ polinomioaren maila Q polinomioarena baino unitate bat txikiagoa da.

I eta III motetako frakzio guztien integralak batuz ($\int \frac{N^{**}}{x^2+px+q} dx$ motako integralak ere, IV motako frakzioen integraletik lortuak, kontutan hartuz) $\frac{X(x)}{P(x)}$ motako frakzio propioaren integrala lortuko dugu, non

$$P(x) = (x-a)(x-b)\ldots(x^2+px+q)\ldots(x^2+lx+s)$$

den.

Horrela

$$\int \frac{F(x)}{f(x)} dx = \frac{Y(x)}{Q(x)} + \int \frac{X(x)}{P(x)} dx \qquad (1)$$

lortuko dugu.

Hor, $X(x)$ polinomioaren maila $Q(x)$-rena baino unitate bat txikiagoa da.

Zenbakitzaileko $X(x)$ eta $Y(x)$ polinomioak kalkulatuko ditugu orain. Horretarako (1) berdintzaren bi aldeak deribatuko ditugu:

$$\frac{F(x)}{f(x)} = \frac{QY' - Q'Y}{Q^2} + \frac{X}{P}$$

edo

$$F(x)=\frac{f(x)Y'}{Q}-\frac{f(x)Q'Y}{Q^2}+\frac{f(x)X}{P}. \qquad (2)$$

Bigarren aldeko adierazpena polinomio bat dela frogatuko dugu. $f(x)=PQ$ da eta (2) berdintza ondoko eran idatziko dugu:

$$F(x)=PY'-\frac{PQ'Y}{Q}+QX. \qquad (2')$$

$-\dfrac{PQ'Y}{Q}$ adierazpena polinomio bat dela edo PQ', Q-rekin zatigarria dela frogatzea falta zaigu. Horretarako ondokoa ikusi

$$\frac{Q'}{Q}=[\ln Q]'=[(\alpha-1)\ln(x-a)+(\beta-1)\ln(x-b)+\ldots$$

$$\ldots+(\mu-1)\ln(x^2+px+q)+\ldots+(v-1)\ln(x^2+lx+s)]'=$$

$$=\frac{\alpha-1}{x-a}+\frac{\beta-1}{x-b}+\ldots+\frac{(\mu-1)(2x+p)}{x^2+px+q}+\ldots+\frac{(v-1)(2x+1)}{x^2+lx+s}.$$

P polinomioa bigarren aldeko frakzioen izendatzaile komuna izango da. Zenbakitzailea P polinomioaren maila baino txikiagoa duen polinomio bat izango da. T letraz izendatuko dugu. Honela

$$\frac{Q'}{Q}=\frac{T}{P}.$$

Beraz,

$$P\frac{Q'}{Q}Y=P\frac{T}{P}Y=TY$$

adierazpena polinomioa da. (2') berdintzak ondoko itxura hartuko du:

$$F(x)=PY'-TY+QX. \qquad (3)$$

(3) berdintzan maila berdina duten berreduren koefizienteak berdinduz, X eta Y polinomio ezezagunen koefizienteak aurkitzea ahalbidetuko duen ekuazio-sistema lortuko dugu.

Adibidea. Kalkulatu

$$\int \frac{1}{(x^3-1)^2}\,dx.$$

Ebazpena. Kasu honetan:

$$\begin{aligned} f(x) &= (x-1)^2(x^2+x+1)^2, \\ P(x) &= (x-1)(x^2+x+1) = x^3-1, \\ Q(x) &= \qquad\qquad\quad = x^3-1. \end{aligned}$$

(1) berdintza ondokoa izango da orain

$$\int \frac{dx}{(x^3-1)^2} = \frac{Ax^2+Bx+C}{x^3-1} + \int \frac{Ex^2+Fx+G}{x^3-1}\,dx. \tag{4}$$

(4) berdintzaren bi aldeak deribatuz hauxe dugu:

$$\frac{1}{(x^3-1)^2} = \frac{(x^3-1)(2Ax+B)-(Ax^2+Bx+C)3x^2}{(x^3-1)^2} + \frac{Ex^2+Fx+G}{x^3-1}.$$

Izendatzaileak kenduz

$$1 = (x^3-1)(2Ax+B)-(Ax^2+Bx+C)3x^2+(x^3-1)(Ex^2+Fx+G).$$

Bi aldeetan x-rekiko maila bera duten gaien koefizienteak berdinduz, A, B, C, E, F, G koefizienteak determinatzeko sei ekuazioko sistema lortuko dugu:

$$\begin{aligned} 0 &= E, \\ 0 &= -A+F, \\ 0 &= -2B+G, \\ 0 &= 3C-E, \\ 0 &= -2A-F, \\ 1 &= -B-G. \end{aligned}$$

Sistema horren soluzioa honako hau da:

$$E=0,\quad A=0,\quad C=0,\quad B=-\frac{1}{3},\quad F=0,\quad G=-\frac{2}{3}.$$

Koefizienteen balioak (4) berdintzan ordezkatuz hauxe lortuko dugu:

$$\int\frac{dx}{(x^3-1)^2}=\frac{-\frac{1}{3}x}{x^3-1}+\int\frac{-\frac{2}{3}}{x^3-1}dx.$$

Azkeneko integralaren izendatzaileak erro sinple besterik ez du eta beraz, integrala erraz kalkulatzen da. Hona hemen:

$$\int\frac{dx}{(x^3-1)^2}=\frac{-x}{3(x^3-1)}+\int\left[\frac{-\frac{2}{9}}{x-1}+\frac{\frac{2}{9}x+\frac{4}{9}}{x^2+x+1}\right]dx=$$

$$=-\frac{x}{3(x^2-1)}-\frac{2}{9}\ln|x-1|+\frac{1}{9}\ln(x^2+x+1)+\frac{2\sqrt{3}}{9}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C.$$

§ 11. Funtzio irrazionalen integralak

Funtzio irrazional baten integrala ezin da beti funtzio elementalen bidez adierazi. Atal honetan eta hurrengoetan, ordezkapen egokiak eginez, ezagunak diren funtzio razionalen integraletara laburtu daitezkeen funtzio irrazionalen integrazioa aztertuko dugu.

I. Demagun $\int R(x,x^{\frac{m}{n}},\dots,x^{\frac{r}{s}})\,dx$ integrala, R beren aldagaien funtzio razional bat izanik[1].

---

1) $R(x,x^{\frac{m}{n}},\dots,x^{\frac{r}{s}})$ ikurraren bidez, $x,x^{\frac{m}{n}},\dots,x^{\frac{r}{s}}$ aldagaiekin eragiketa razionalak besterik ezin direla egikaritu adierazten da.

Hemendik aurrera $R\left(x,\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m}{n}},\dots\right)$, $R\left(x,\sqrt{ax^2+bx+c}\right)$, $R(\sin x,\cos x)$, etab. motatako ikurrak aurreko era berean ulertuko dira. Honela, adibidez, $R(\sin x,\cos x)$ ikurraren bidez, $\sin x$ eta $\cos x$-rekin eragiketa razionalak besterik ezin direla egin ulertuko da.

Izan bedi k, $\frac{m}{n}$, ..., $\frac{r}{s}$ frakzioen izendatzaile komuna. Egin dezagun ondoko ordezkapena:

$$x = t^k, \quad dx = kt^{k-1}dt.$$

Honela x-ren berretzaile zatikiar bakoitza t-ren berretzaile oso bezala adieraz daiteke eta beraz, integrakizuna t-ren funtzio razional gisa adieraziko da.

1. Adibidea. Kalkulatu ondoko integrala

$$\int \frac{x^{\frac{1}{2}}\,dx}{x^{\frac{3}{4}}+1}.$$

Ebazpena. $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$ frakzioen izendatzaile komuna 4 da. Horregatik $x = t^4$, $dx = 4t^4\,dt$ ordezkapena egingo dugu; beraz,

$$\int \frac{x^{\frac{1}{2}}\,dx}{x^{\frac{3}{4}}+1} = 4\int \frac{t^2}{t^3+1}t^3\,dt = 4\int \frac{t^5}{t^3+1}dt = 4\int\left(t^2 - \frac{t^2}{t^3+1}\right)dt =$$

$$= 4\int t^2\,dt - 4\int \frac{t^2}{t^3+1}dt = 4\frac{t^3}{3} - \frac{4}{3}\ln\left|t^3+1\right| + C = \frac{4}{3}\left[x^{\frac{3}{4}} - \ln\left|x^{\frac{3}{4}}+1\right|\right] + C.$$

II. Demagun, orain, ondoko motako integrala:

$$\int R\left[x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m}{n}}, \ldots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{r}{s}}\right]dx.$$

Integrala,

$$\frac{ax+b}{cx+d} = t^k$$

ordezkapenaren bidez funtzio razional baten integralera laburtzen da. k berretzailea $\frac{m}{n}, \ldots, \frac{r}{s}$ frakzioen izendatzaile komuna izanik.

2. Adibidea. Kalkulatu ondoko integrala

$$\int \frac{\sqrt{x+4}}{x} dx.$$

Ebazpena. Egin dezagun $x+4=t^2$; $x=t^2-4$; $dx=2t\,dt$ ordezkapena. Orduan

$$\int \frac{\sqrt{x+4}}{x} dx = 2\int \frac{t^2}{t^2-4} dt = 2\int \left(1+\frac{4}{t^2-4}\right) dt = 2\int dt + 8\int \frac{dt}{t^2-4} =$$

$$= 2t + 2\ln\left|\frac{t-2}{t+2}\right| + C = 2\sqrt{x+4} + \ln\left|\frac{\sqrt{x+4}-2}{\sqrt{x+4}+2}\right| + C$$

beteko da.

§ 12. $\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right) dx$ motako integralak

Demagun ondoko integrala

$$\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right) dx. \qquad (1)$$

Integral hori Euler-en ondoko ordezkapenak eginez aldagai berriaren funtzio batenera laburtzen da.

1. Euler-en lehen ordezkapena. $a>0$ baldin bada,

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \pm\sqrt{a}x + t$$

egingo dugu.

Zehaztapen handiagorako $\sqrt{a}$ -ren aurrean "plus" zeinua hartuko dugu. Orduan,

$$ax^2 + bx + c = ax^2 + 2\sqrt{a}xt + t^2.$$

Horretatik, x, t-ren funtzio razional gisa aska dezakegu:

$$x = \frac{t^2 - c}{b - 2\sqrt{a}t}$$

(horrek dx t-ren funtzio razionala dela adierazten du), beraz

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = \sqrt{a}x + t = \sqrt{a}\,\frac{t^2 - c}{b - 2t\sqrt{a}} + t.$$

Hau da, $\sqrt{ax^2 + bx + c}$ adierazpena t-ren funtzio razionala da.

$\sqrt{ax^2 + bx + c}$, x eta dx t-ren funtzio razional gisa adierazten direnez, (1) integrala t-ren funtzio razional baten integral bihurtzen da.

1. Adibidea. Kalkulatu ondoko integrala

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + C}}.$$

Ebazpena. Hemen $a = 1 > 0$ denez, $\sqrt{x^2 + C} = -x + t$ idatziko dugu, beraz:

$$x^2 + C = x^2 - 2xt + t^2,$$

eta hortik

$$x = \frac{t^2 - C}{2t}.$$

Beraz,

$$dx = \frac{t^2 + C}{2t^2}\,dt,$$

$$\sqrt{x^2 + C} = -x + t = -\frac{t^2 - C}{2t} + t = \frac{t^2 + C}{2t}.$$

Hasierako integralera itzuliz, hauxe dugu:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+C}} = \int \frac{\frac{t^2+C}{2t^2}dt}{\frac{t^2+C}{2t}} = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C_1 = \ln\left|x+\sqrt{x^2+C}\right| + C_1$$

(ikus integralen taulako 14. formula).

2. Euler-en bigarren ordezkapena. $c>0$ baldin bada

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = xt \pm \sqrt{c}$$

izango da. Hortaz,

$$ax^2+bx+c = x^2t^2 + 2xt\sqrt{c} + c.$$

(Zehaztapen handiagorako erroaren aurretik "plus" ikurra hartu dugu)

Hortik, x aldagaia t-ren funtzio razional gisa aska daiteke:

$$x = \frac{2\sqrt{c}t - b}{a - t^2}.$$

dx eta $\sqrt{x^2+bx+c}$ t-ren funtzio razional gisa adierazten direnez, x, $\sqrt{x^2+bx+c}$ eta dx-ren balioak $\int R(x,\sqrt{x^2+bx+c})\,dx$ integralean ordezka daitezke eta azken hori t-ren funtzio razional den integral batera laburtuko dugu.

2. Adibidea. Kalkulatu ondoko integrala

$$\int \frac{(1-\sqrt{1+x+x^2})^2}{x^2\sqrt{1+x+x^2}}dx.$$

Ebazpena. Egin dezagun $\sqrt{1+x+x^2} = xt+1$, orduan

$$1+x+x^2=x^2t^2+2xt+1;\quad x=\frac{2t-1}{1-t^2};\quad dx=\frac{2t^2-2t+2}{(1-t^2)^2}dt;$$

$$\sqrt{1+x+x^2}=xt+1=\frac{t^2-t+1}{1-t^2};\quad 1-\sqrt{1+x+x^2}=\frac{-2t^2+t}{1-t^2}.$$

Lortutako adierazpenak hasierako integralean ordezkatuz, ondokoa lortuko dugu:

$$\int\frac{(1-\sqrt{1+x+x^2})^2}{x^2\sqrt{1+x+x^2}}dx=\int\frac{(-2t^2+t)^2(1-t^2)^2(1-t^2)(2t^2-2t+2)}{(1-t^2)^2(2t-1)^2(t^2-t+1)(1-t^2)^2}dx=$$

$$=+2\int\frac{t^2}{1-t^2}dt=-2t+\ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right|+C=$$

$$=-\frac{2\left(\sqrt{1+x+x^2}-1\right)}{x}+\ln\left|\frac{x+\sqrt{1+x+x^2}-1}{x-\sqrt{1+x+x^2}+1}\right|+C=$$

$$=-\frac{2\left(\sqrt{1+x+x^2}-1\right)}{x}+\ln\left|2x+2\sqrt{1+x+x^2}+1\right|+C.$$

3. Euler-en hirugarren ordezkapena. Demagun α eta β ax^2+bx+c trinomioaren erro errealak direla.

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=(x-\alpha)t$$

eginez, $ax^2+bx+c=a(x-\alpha)(x-\beta)$ izanik, hauxe dugu:

$$\sqrt{a(x-\alpha)(x-\beta)}=(x-\alpha)t,$$
$$a(x-\alpha)(x-\beta)=(x-\alpha)^2t^2,$$
$$a(x-\beta)=(x-\alpha)t^2.$$

Hortik x aldagaia t-ren funtzio razional gisa askatzen da:

$$x=\frac{a\beta-\alpha t^2}{a-t^2}.$$

dx eta $\sqrt{ax^2+bx+c}$ ere t-ren funtzio razionalak direnez, aipatu integrala t-ren funtzio razional baten integral bihurtzen da.

1. Oharra. Euler-en hirugarren ordezkapena $a<0$ denean aplikagarri da, baina baita $a>0$ denean ere; horretarako bete behar den baldintza bakarra ax^2+bx+c polinomioak erro errealak izatea da.

3. Adibidea. Kalkulatu ondoko integrala

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+3x-4}}.$$

Ebazpena. $x^2+3x-4=(x+4)(x-1)$ betetzen denez, egin dezagun

$$\sqrt{(x+4)(x-1)}=(x+4)t.$$

Orduan,

$$(x+4)(x-1)=(x+4)^2t^2,\quad x-1=(x+4)t^2,\quad x=\frac{1+4t^2}{1-t^2},\quad dx=\frac{10t}{(1-t^2)^2}dt,$$

$$\sqrt{(x+4)(x-1)}=\left[\frac{1+4t^2}{1-t^2}+4\right]t=\frac{5t}{1-t^2}.$$

Hasierako integralera itzuliz, hauxe dugu:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+3x-4}}=\int \frac{10t(1-t^2)}{(1-t^2)^2 5t}dt=\int \frac{2}{1-t^2}dt=\ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right|+C=$$

$$=\ln\left|\frac{1+\sqrt{\dfrac{x-1}{x+4}}}{1-\sqrt{\dfrac{x-1}{x+4}}}\right|+C=\ln\left|\frac{\sqrt{x+4}+\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+4}-\sqrt{x-1}}\right|+C.$$

2. Oharra. (1) integrala funtzio razional baten integralera laburtzeko Euler-en lehenengo eta hirugarren ordezkapenak besterik ez direla behar azpimarratu behar da. Demagun ax^2+bx+c trinomioa. $b^2-4ac>0$ betetzen bada trinomioaren erroak

errealak dira eta beraz, Euler-en hirugarren ordezkapena aplikagarri da. $b^2 - 4ac \leq 0$ betetzen bada

$$ax^2 + bx + c = \frac{1}{4a}[(2ax + b)^2 + (4ac - b^2)]$$

lortuko da. Eta trinomioak a-ren zeinu bera izango du. $\sqrt{ax^2 + bx + c}$ erreal izateko trinomioak positibo izan behar du eta hori kontutan hartuz, $a > 0$ izan behar du. Kasu horretan lehenengo ordezkapena erabiltzerik izango da.

§ 13. Binomio diferentzialen integrazioa

$$x^m(a + bx^n)^p\,dx$$

itxurako adierazpenari, m, n, p, a eta b konstante izanik, *binomio diferentzial* deritzo.

Teorema. Binomio diferentzialaren integrala,

$$\int x^m(a + bx^n)^p\,dx,$$

m, n eta p zenbaki razionalak baldin badira, funtzio razional baten integralera labur daiteke eta beraz, funtzio elemental gisa adieraz daiteke, ondoko hiru kasuetan:

1) p zenbaki osoa da (positibo, negatibo edo zero);

2) $\dfrac{m+1}{n}$ zenbaki osoa da (positibo, negatibo edo zero);

3) $\dfrac{m+1}{n} + p$ zenbaki osoa da (positibo, negatibo edo zero).

Frogapena. Aipatu integrala ondoko ordezkapenaren bidez aldatuko dugu

$$x = z^{\frac{1}{n}}, \qquad dx = \frac{1}{n} z^{\frac{1}{n}-1}\,dz.$$

Hortaz,

$$\int x^m(a + bx^n)^p\,dx = \frac{1}{n}\int z^{\frac{m+1}{n}-1}(a + bz)^p\,dz = \frac{1}{n}\int z^q(a + bz)^p\,dz, \qquad (1)$$

non

$$q = \frac{m+1}{n} - 1$$

den.

1. Demagun p zenbaki osoa dela. q zenbaki razional bat izanik, $\frac{r}{s}$. Kasu honetan (1) integralak $\int R(z^{\frac{r}{s}}, z)dz$ itxura hartzen du.

X. gaiko § 11n, mota horretako integrala funtzio razional batera labur daitekeela adierazi dugu; horretarako $z = t^s$ ordezkapena egin behar dugu.

2. Demagun $\frac{m+1}{n}$ zenbaki osoa dela. Orduan, $q = \frac{m+1}{n} - 1$ ere zenbaki oso bat da. p zenbakia razionala da; $p = \frac{\lambda}{\mu}$. Beraz, (1) integrala ondoko integral hau bihurtuko da:

$$\int R[z^q, (a+bz)^{\frac{\lambda}{\mu}}]\, dz.$$

Integral hori X. gaiko § 11n aztertu da. Funtzio razional baten integralera laburtu daiteke $a + bz = t^\mu$ ordezkapena eginez.

3. Demagun $\frac{m+1}{n} + p$ zenbaki osoa dela. Orduan, $\frac{m+1}{n} - 1 + p = q + p$ ere zenbaki osoa da. Transforma dezagun (1) integrala:

$$\int z^q (a+bz)^p\, dz = \int z^{q+p} \left(\frac{a+bz}{z}\right)^p dz,$$

non $q + p$ zenbaki osoa den eta $p = \frac{k}{l}$ zenbaki razionala den. Azken integral hori ondoko integral-multzokoa da

$$\int R\left[z, \left(\frac{a+bz}{z}\right)^{\frac{k}{l}}\right] dz.$$

Integral hori X. gaiko § 11n ebatzi zen. Aipatu integrala funtzio razional baten integralera laburtzen da, $\frac{a+bz}{z}=t^l$ ordezkapena eginez.

Ikus ditzagun aipatu hiru kasuen adibideak.

1. Adibidea.

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}\,(1+\sqrt[3]{x^2})}=\int x^{-\frac{2}{3}}\left(1+x^{\frac{2}{3}}\right)^{-1}dx.$$

Hemen $p=-1$ (zenbaki osoa) da. Egin dezagun $x^{\frac{2}{3}}=z$ eta berdintza transformatuko dugu, z-ren funtzioa den adierazpen lineal bat parentesi artean lortzeko:

$$\int x^{-\frac{2}{3}}\left(1+x^{\frac{2}{3}}\right)^{-1}dx=\int z^{-1}(1+z)^{-1}\frac{3}{2}z^{\frac{1}{2}}dz=\frac{3}{2}\int z^{-\frac{1}{2}}(1+z)^{-1}dz.$$

Egin dezagun

$$z^{\frac{1}{2}}=t$$

ordezkapena.

Orduan, $z=t^2$, $dz=2t\,dt$ eta

$$\int x^{-\frac{2}{3}}\left(1+x^{\frac{2}{3}}\right)^{-1}dx=\frac{3}{2}\int z^{-\frac{1}{2}}(1+z)^{-1}dz=\frac{3}{2}\int t^{-1}(1+t^2)^{-1}2t\;dt=$$

$$=3\int\frac{dt}{1+t^2}=3\arctan t+C=3\arctan\sqrt{z}+C=3\arctan\sqrt[3]{x}+C$$

lortuko da.

2. Adibidea.

$$\int\frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}dx=\int x^3(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}dx.$$

Hemen, $m=3;\ n=2;\ p=-\frac{1}{2},\ \frac{m+1}{n}=2$ (zenbaki osoa) da. Egin dezagun $x^2=z$ ordezkapena. Orduan $x=z^{\frac{1}{2}},\ dx=\frac{1}{2}z^{-\frac{1}{2}}dz$ betetzen da eta

$$\int\frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}dx=\int z^{\frac{3}{2}}(1-z)^{-\frac{1}{2}}\frac{1}{2}z^{-\frac{1}{2}}dz=\frac{1}{2}\int z(1-z)^{-\frac{1}{2}}dz.$$

Parentesien arteko adierazpena razional bihurtzeko egin dezagun $(1-z)^{\frac{1}{2}}=t$; orduan, $1-z=t^2;\ z=t^2-1;\ dz=2t\,dt$. Beraz,

$$\int\frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}dx=\frac{1}{2}\int z(1-z)^{-\frac{1}{2}}dz=\frac{1}{2}\int(t^2-1)t^{-1}2t\ dt=\int(t^2-1)\,dt=$$

$$=\frac{t^3}{3}-t+C=\frac{t}{3}(t^2-3)+C=\frac{\sqrt{1-z}}{3}(-z-2)+C=\frac{\sqrt{1-x^2}}{3}(-x^2-2)+C.$$

3. Adibidea.

$$\int\frac{dx}{x^2\sqrt{(1-x^2)^3}}=\int x^{-2}(1+x^2)^{-\frac{3}{2}}dx.$$

Hemen $m=-2,\ n=2,\ p=-\frac{3}{2}$ da eta $\frac{m+1}{n}+p=-2$ (zenbaki osoa) da.

Parentesien arteko adierazpena funtzio lineal bihurtuko dugu:

$$x^2=z;\quad x=z^{\frac{1}{2}};\quad dx=\frac{1}{2}z^{-\frac{1}{2}}dz;$$

$$\int x^{-2}(1+x^2)^{-\frac{3}{2}}dx=\int z^{-1}(1+z)^{-\frac{3}{2}}\frac{1}{2}z^{-\frac{1}{2}}dz=$$

$$=\frac{1}{2}\int z^{-\frac{3}{2}}(1+z)^{-\frac{3}{2}}dz=\frac{1}{2}\int z^{-3}\left(\frac{1+z}{z}\right)^{-\frac{3}{2}}dz.$$

Lehen faktorea funtzio razionala da. Bigarren faktorea ere razionala izateko ondoko ordezkapena egingo dugu:

$$\left(\frac{1+z}{z}\right)^{\frac{1}{2}} = t;$$

orduan,

$$\frac{1+z}{z} = t^2; \quad z = \frac{1}{t^2-1}; \quad dz = -\frac{2t\,dt}{(t^2-1)^2}.$$

Beraz,

$$\int x^{-2}(1+x^2)^{-\frac{3}{2}}dx = \frac{1}{2}\int z^{-3}\left(\frac{1+z}{z}\right)^{-\frac{3}{2}}dz = \frac{1}{2}\int (t^2-1)^3 t^{-3}\frac{-2t\,dt}{(t^2-1)^2} =$$

$$= -\int \frac{t^2-1}{t^2}dt = -t - \frac{1}{t} + C = -\left(\frac{1+z}{z}\right)^{\frac{1}{2}} - \left(\frac{z}{1+z}\right)^{\frac{1}{2}} + C =$$

$$= -\left(\frac{1+x^2}{x^2}\right)^{\frac{1}{2}} - \left(\frac{x^2}{1+x^2}\right)^{\frac{1}{2}} + C = -\frac{\sqrt{1+x^2}}{x} - \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + C.$$

Oharra: P. L. Chébishev-ek, matematikari errusiar ospetsuak, berretzaile razionaleko binomio diferentzialen integralak, aipatu hiru kasuetan besterik ezin direla funtzio elementalen bidez adierazi frogatu zuen (beti ere, $a \neq 0$ eta $b \neq 0$ baldin badira).

p, $\dfrac{m+1}{n}$, $\dfrac{m+1}{n} + p$ zenbakietako bat ere osoa ez bada, integral hori ezin da funtzio elementalen bidez adierazi.

§ 14. Funtzio trigonometrikoen integrazioa

Orain arte, integral algebraikoak (razionalak nahiz irrazionalak) besterik ez ditugu aztertu. Atal honetan zenbait funtzio ez-algebraikoren integralak aztertuko ditugu eta lehenbizi funtzio trigonometrikoak landuko ditugu.

Azter dezagun

$$\int R(\sin x, \cos x)\, dx \tag{1}$$

integrala.

Froga dezagun

$$\tan\frac{x}{2} = t \tag{2}$$

ordezkapena eginez, aipatu integrala funtzio razional baten integralera laburtzen dela beti.

Adieraz ditzagun $\sin x$ eta $\cos x$, $\tan\frac{x}{2}$ funtzioaren bidez eta, beraz, t-ren funtzioan:

$$\sin x = \frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{1} = \frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2} + \cos^2\frac{x}{2}} = \frac{2\tan\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2},$$

$$\cos x = \frac{\cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2}}{1} = \frac{\cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2} + \sin^2\frac{x}{2}} = \frac{1-\tan^2\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

Horrez gain,

$$x = 2\arctan t, \qquad dx = \frac{2\,dt}{1+t^2}.$$

Beraz, $\sin x$, $\cos x$ eta dx t-ren funtzio razionalen bidez adierazten dira. Funtzio razionalen funtzio razional bat razionala denez, lortutako adierazpenak (1) integralean ordezkatuz, integrala ondoko integral bihurtzen da:

$$\int R(\sin x, \cos x)\, dx = \int R\left[\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right]\frac{2\,dt}{1+t^2}.$$

1. Adibidea. Demagun

$$\int \frac{dx}{\sin x}$$

integrala.

Aipatu formuletan oinarrituz honako hau dugu:

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{\frac{2\,dt}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}} = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln\left|\tan\frac{x}{2}\right| + C.$$

Aipatu ordezkapenaren bidez, $R(\cos x, \sin x)$ motako edozein funtzio integra daiteke. Horregatik, batzutan, "ordezkapen trigonometriko unibertsal" deitzen zaio. Hala ere, askotan ordezkapen horren bidez ebazpen zaila duten funtzio razionalak lortzen dira. Hortaz, ordezkapen unibertsala ezezik integralaren ebazpena errazten duten beste ordezkapen batzuk ezagutzea komeni da.

1) Integralak $\int R(\sin x)\cos x\, dx$ itxura baldin badu, $\sin x = t$, $\cos x\, dx = dt$ ordezkapenaren bidez $\int R(t)\, dt$ motako integrala lortzen da.

2) Integralak $\int R(\cos x)\sin x\, dx$ itxura baldin badu, $\cos x = t$, $\sin x\, dx = dt$ ordezkapenaren bidez funtzio razional baten integralera laburtzen da.

3) Integrakizuna $\tan x$-ren funtzio besterik ez bada, $\tan x = t$, $x = \arctan t$, $dx = \dfrac{dt}{1+t^2}$ ordezkapenaren bidez, integrala ondoko integral honetara laburtzen da:

$$\int R(\tan x)\, dx = \int R(t)\frac{dt}{1+t^2}.$$

4) Integrakizunak $R(\cos x, \sin x)$ itxura baldin badu, $\sin x$ eta $\cos x$-ren berretzaileak bakoitiak direlarik,

$$\tan x = t \qquad (2')$$

ordezkapena bera erabiltzen da, $\sin^2 x$ eta $\cos^2 x$, $\tan x$-ren funtzioan adieraz bait daitezke:

$$\cos^2 x = \frac{1}{1+\tan^2 x} = \frac{1}{1+t^2}, \quad \sin^2 x = \frac{\tan^2 x}{1+\tan^2 x} = \frac{t^2}{1+t^2}, \quad dx = \frac{dt}{1+t^2}.$$

Ordezkapena burutu ondoren funtzio razional baten integrala lortuko dugu.

2. Adibidea. Kalkulatu ondoko integrala

$$\int \frac{\sin^3 x}{2+\cos x}\,dx.$$

Ebazpena. Integral hori oso erraz labur daiteke beste integral honetara: $\int R(\cos x)\sin x\ dx$.

Ikus

$$\int \frac{\sin^3 x}{2+\cos x}\,dx = \int \frac{\sin^2 x \sin x\ dx}{2+\cos x} = \int \frac{1-\cos^2 x}{2+\cos x}\sin x\ dx.$$

Egin dezagun $\cos x = z$ ordezkapena. Orduan, $\sin x\ dx = -dz$:

$$\int \frac{\sin^3 x}{2+\cos x}\,dx = \int \frac{1-z^2}{2+z}(-dz) = \int \frac{z^2-1}{z+2}\,dz = \int \left(z-2+\frac{3}{z+2}\right)dz =$$

$$= \frac{z^2}{2} - 2z + 3\ln|z+2| + C = \frac{\cos^2 x}{2} - 2\cos x + 3\ln|\cos x + 2| + C.$$

3. Adibidea. Kalkulatu $\int \frac{dx}{2-\sin^2 x}$.

Egin dezagun $\tan x = t$ ordezkapena:

$$\int \frac{dx}{2-\sin^2 x} = \int \frac{dt}{\left(2-\frac{t^2}{1+t^2}\right)(1+t^2)} = \int \frac{dt}{2+t^2} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{t}{\sqrt{2}} + C = \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{\tan x}{\sqrt{2}}\right) + C.$$

5) Demagun $\int R(\sin x, \cos x)\ dx$ itxurako integrala, non $R(\sin x, \cos x) = \sin^m x \cos^n x$ (m eta n osoak) betetzen den. Hiru kasu aztertu behar ditugu.

a) $\int \sin^m x \cos^n x\,dx$, non m eta n zenbakietako bat bakoitia den. Demagun n bakoitia dela. Egin dezagun $n = 2p+1$ eta transforma dezagun integrala:

$$\int \sin^m x \cos^{2p+1} x\, dx = \int \sin^m x \cos^{2p} x \cos x\, dx = \int \sin^m x (1-\sin^2 x)^p \cos x\, dx.$$

Egin dezagun

$$\sin x = t, \qquad \cos x\, dx = dt$$

aldagai-aldaketa.

Emandako integralean aldagai berria ordezkatuz, ondokoa lortuko dugu:

$$\int \sin^m x \cos^n x\, dx = \int t^m (1-t^2)^p\, dt,$$

hori t-ren funtzio razional baten integrala delarik.

4. Adibidea.

$$\int \frac{\cos^3 x}{\sin^4 x}\, dx = \int \frac{\cos^2 x \cos x\, dx}{\sin^4 x} = \int \frac{(1-\sin^2 x)\cos x\, dx}{\sin^4 x}.$$

Hor $\sin x = t$, $\cos x\, dx = dt$ eginez,

$$\int \frac{\cos^3 x}{\sin^4 x} dx = \int \frac{(1-t^2)\, dt}{t^4} = \int \frac{dt}{t^4} - \int \frac{dt}{t^2} - -\frac{1}{3t^3} + \frac{1}{t} + C = -\frac{1}{3\sin^3 x} + \frac{1}{\sin x} + C$$

lortuko dugu.

b) $\int \sin^m x \cos^n x\, dx$, non m eta n zenbaki ez-negatibo eta bikoitiak diren.

Egin dezagun $m = 2p$ eta $n = 2q$. Formula trigonometriko ezagunak aplikatuz:

$$\sin^2 x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x, \qquad \cos^2 x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2x, \tag{3}$$

eta integralean ordezkatuz hauxe lortuko dugu

$$\int \sin^{2p} x \cos^{2q} x\, dx = \int \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x\right)^p \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2x\right)^q dx.$$

Parentesiak garatuz, $\cos 2x$ eta berretzaile bakoiti eta bikoitia duten gaiak lortuko ditugu. Berretzaile bakoitiak dituzten gaiak a) kasuan adierazi bezala integratuko dira.

Berretzaile bikoitiak dituzten gaiak berriro laburtuko ditugu, (3) formulak erabiliz. Horrela, $\int \cos kx\, dx$ itxurako gaiak lortuko ditugu eta horien integrala erraza da.

5. Adibidea.

$$\int \sin^4 x\, dx = \frac{1}{2^2}\int (1-\cos 2x)^2\, dx = \frac{1}{4}\int (1 - 2\cos 2x + \cos^2 2x)\, dx =$$

$$= \frac{1}{4}\left[x - \sin 2x + \frac{1}{2}\int (1+\cos 4x)\, dx\right] = \frac{1}{4}\left[\frac{3}{2}x - \sin 2x + \frac{\sin 4x}{8}\right] + C.$$

c) Bi berretzaileak bikoitiak baldin badira baina bietariko bat negatibo baldin bada b) kasuan azaldutako metodoak ez du balio. Ondoko ordezkapen hau egin behar da:

$$\tan x = t \quad (\text{edo} \quad \cot x = t).$$

6. Adibidea.

$$\int \frac{\sin^2 x\, dx}{\cos^6 x} = \int \frac{\sin^2 x(\sin^2 x + \cos^2 x)^2}{\cos^6 x}\, dx = \int \tan^2 x(1+\tan^2 x)^2\, dx.$$

Egin dezagun $\tan x = t$, orduan $x = \arctan t$, $dx = \dfrac{dt}{1+t^2}$ eta hauxe lortuko dugu:

$$\int \frac{\sin^2 x}{\cos^6 x}\, dx = \int t^2(1+t^2)^2 \frac{dt}{1+t^2} = \int t^2(1+t^2)\, dt = \frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} + C = \frac{\tan^3 x}{3} + \frac{\tan^5 x}{5} + C.$$

6) Azkenik ondoko mota honetako integralak kontutan hartuko ditugu:

$$\int \cos mx \cos nx\, dx, \quad \int \sin mx \cos nx\, dx, \quad \int \sin mx \sin nx\, dx.$$

Horiek kalkulatzeko ondoko formula hauek kontutan hartu behar dira $(m \neq n)$[2]:

---

2) Formula horiek oso erraz lor daitezke ondokoa eginez:

$$\cos\,(m+n)x = \cos mx \cos nx - \sin mx \sin nx,$$
$$\cos\,(m-n)x = \cos mx \cos nx + \sin mx \sin nx.$$

$$\cos mx \cos nx = \frac{1}{2}[\cos (m+n)x + \cos (m-n)x],$$

$$\sin mx \cos nx = \frac{1}{2}[\sin (m+n)x + \sin (m-n)x],$$

$$\sin mx \sin nx = \frac{1}{2}[-\cos (m+n)x + \cos (m-n)x].$$

Ordezkatuz eta integratuz hauxe lortuko dugu:

$$\int \cos mx \cos nx \, dx = \frac{1}{2}\int [\cos (m+n)x + \cos (m-n)x] \, dx =$$

$$= \frac{\sin (m+n)x}{2(m+n)} + \frac{\sin (m-n)x}{2(m-n)} + C.$$

Beste bi integralak antzeko modura kalkulatzen dira.

7. Adibidea.

$$\int \sin 5x \sin 3x \, dx = \frac{1}{2}\int [-\cos 8x + \cos 2x] \, dx = -\frac{\sin 8x}{16} + \frac{\sin 2x}{4} + C.$$

§ 15. Zenbait funtzio irrazionalen integrazioa ordezkapen trigonometrikoez baliatuz

Har dezagun X. gaiko § 12an aipatu integrala

$$\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) \, dx. \tag{1}$$

Integral hori, aurreko atalean aztertutako ondoko integral bihurtuko dugu,

$$\int \overline{R}(\sin z, \cos z) \, dz. \tag{2}$$

Berdintza horiek gaiz gai batuz eta birekin zatituz aipatuetariko lehen formula lortuko dugu. Gaiz gai kenketa eginez eta birekin zatituz hirugarren formula lortuko dugu. Bigarren formula antzeko modura lortzen da, hau da, $\sin(m+n)x$ eta $\sin(m-n)x$ gaiei dagozkien berdintzak idatziz eta gaiz gai batuz.

Errokizunean dagoen trinomioa transformatuko dugu:

$$ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \left(c - \frac{b^2}{4a}\right).$$

$x + \dfrac{b}{2a} = t,\ dx = dt$ aldagai-aldaketa egingo dugu. Orduan,

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = \sqrt{at^2 + \left(c - \frac{b^2}{4a}\right)}.$$

Kasu posible guztiak aztertuko ditugu.

1. Izan bedi $a > 0,\ c - \dfrac{b^2}{4a} > 0.\ a = m^2,\ c - \dfrac{b}{2a} = n^2$ aldaketak eginez ondoko hau dugu:

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = \sqrt{m^2t^2 + n^2}.$$

2. Izan bedi $a > 0,\ c - \dfrac{b^2}{4a} < 0.\ a = m^2,\ c - \dfrac{b^2}{4a} = -n^2$ aldaketak eginez ondoko hau dugu:

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = \sqrt{m^2t^2 - n^2}.$$

3. Izan bedi $a < 0,\ c - \dfrac{b^2}{4a} > 0.\ a = -m^2,\ c - \dfrac{b^2}{4a} = n^2$ aldaketak eginez ondoko hau dugu:

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = \sqrt{n^2 - m^2t^2}.$$

4. Izan bedi $a < 0,\ c - \dfrac{b^2}{4a} < 0$. Kasu honetan $\sqrt{ax^2 + bx + c}$ zenbaki konplexua da x edozein izanik.

Honela, (1) integrala ondoko hauetako batera laburtu daiteke:

$$\text{I.} \quad \int R(t, \sqrt{m^2t^2 + n^2})\, dt. \tag{3.1}$$

$$\text{II.} \quad \int R(t, \sqrt{m^2t^2 - n^2})\, dt. \tag{3.2}$$

$$\text{III.} \quad \int R(t, \sqrt{n^2 - m^2t^2})\, dt. \tag{3.3}$$

(3.1) integrala (2) itxurako integral batera labur daiteke $t = \frac{n}{m}\tan z$ ordezkapena eginez.

(3.2) integrala (2) itxurako integral batera labur daiteke $t = \frac{n}{m}\sec z$ ordezkapena eginez.

(3.3) integrala (2) itxurako integral batera labur daiteke $t = \frac{n}{m}\sin z$ ordezkapena eginez.

Adibidea. Kalkulatu ondoko integrala

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(a^2 - x^2)^3}}.$$

Ebazpena. III. motako integrala da. Egin dezagun $x = a \sin z$ ordezkapena,

$$dx = a \cos z\, dz,$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(a^2 - x^2)^3}} = \int \frac{a \cos z\, dz}{\sqrt{(a^2 - a^2 \sin^2 z)^3}} = \int \frac{a \cos z\, dz}{a^3 \cos^3 z} = \frac{1}{a^2} \int \frac{dz}{\cos^2 z} =$$

$$= \frac{1}{a^2} \tan z + C = \frac{1}{a^2} \frac{\sin z}{\cos z} + C = \frac{1}{a^2} \frac{\sin z}{\sqrt{1 - \sin^2 z}} + C = \frac{1}{a^2} \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}} + C.$$

§ 16. Funtzio elementalen bidez adierazi ezin daitezkeen integralak dituzten funtzioak

X. gaiko § 1ean frogatu gabe hauxe esan dugu: (a,b) tartean jarraia den edozein $f(x)$ funtziok, jatorrizkoa badu tarte horretan, hau da, badago $F(x)$ funtzioa non $F'(x) = f(x)$ betetzen den. Hala ere, jatorrizko funtzio orok ez du zertan funtzio elementalen konbinazio finituen bidez adierazterik izan beharrik.

Honela, adibidez, aztertutako hiru motetakoren batekoak ez diren binomio diferentzialen jatorrizko funtzioak ezin dira funtzio elementalen kopuru finitu baten bidez adierazi (Chébishev-en teorema). Ondoko integralei dagozkien jatorrizko funtzioak ere esandakoaren adibide dira.

$$\int e^{-x^2}\,dx,\quad \int \frac{\sin x}{x}\,dx,\quad \int \frac{\cos x}{x}\,dx,\quad \int \sqrt{1-k^2\sin^2 x}\;dx,\quad \int \frac{dx}{\ln x}$$

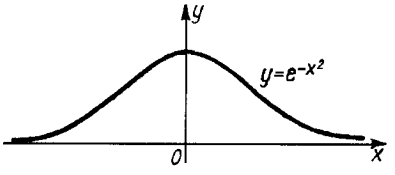
eta beste asko ere bai.

Kasu guzti horietan, jatorrizko funtzioak funtzio elementalen kopuru finitu baten konbinazioz lortzen ez den funtzioa adierazten du.

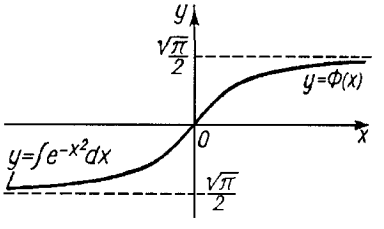
Honela, adibidez, $x=0$ baliorako anulatzen den $\int e^{-x^2}\,dx + C$ jatorrizko funtzioari *Laplace-ren funtzio* deritzo eta $\Phi(x)$ adierazten da. Hortaz,

$$\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int e^{-x^2}\,dx + C_1,\quad \Phi(0)=0 \quad \text{bada.}$$

Funtzio hori ongi ezagutzen da. x-ren balio desberdinetarako taulak daude. XVI. gaiko § 21ean, esandakoa nola buru daitekeen adieraziko da. 204. eta 205. irudietan, hurrenez hurren, $y=e^{-x^2}$ integrakizunaren grafikoa eta $y=\Phi(x)$ Laplace-ren funtzioaren grafikoa azaltzen dira.



204. IRUDIA



205. IRUDIA

x berdin zero denean zero egiten den

$$\int \sqrt{1-k^2\sin^2 x}\;dx + C_2 \quad (k<1)$$

jatorrizko funtzioari *integral eliptiko* deritzo eta $E(x)$ bidez adierazten da,

$$E(x) = \int \sqrt{1 - k^2 \sin^2 x}\ dx + C_2, \qquad E(0) = 0 \quad \text{bada.}$$

Funtzio horrek x-ren balio desberdinetarako hartzen dituen balioak ere tauletan adierazten dira.

Ariketak

Kalkulatu ondoko integralak:

1. $\int x^5 dx$. Emaitza: $\dfrac{x^6}{6} + C$.

2. $\int (x + \sqrt{x}) dx$. Em.: $\dfrac{x^2}{2} + \dfrac{2x\sqrt{x}}{3} + C$.

3. $\int \left(\dfrac{3}{\sqrt{x}} - \dfrac{x\sqrt{x}}{4} \right) dx$. Em.: $6\sqrt{x} - \dfrac{1}{10} x^2 \sqrt{x} + C$.

4. $\int \dfrac{x^2 dx}{\sqrt{x}}$. Em.: $\dfrac{2}{5} x^2 \sqrt{x} + C$.

5. $\int \left(\dfrac{1}{x^2} + \dfrac{4}{x\sqrt{x}} + 2 \right) dx$. Em.: $-\dfrac{1}{x} - \dfrac{8}{\sqrt{x}} + 2x + C$.

6. $\int \dfrac{dx}{\sqrt[4]{x}}$. Em.: $\dfrac{4}{3} \sqrt[4]{x^3} + C$.

7. $\int \left(x^2 + \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}} \right)^2 dx$. Em.: $\dfrac{x^5}{5} + \dfrac{3}{4} x^2 \sqrt[3]{x^2} + 3\sqrt[3]{x} + C$.

Ordezkapenaren bidezko integrazioa:

8. $\int e^{5x} dx$. Em.: $\dfrac{1}{5} e^{5x} + C$.

9. $\int \cos 5x\ dx$. Em.: $\dfrac{\sin 5x}{5} + C$.

10. $\int \sin ax\, dx$. Em.: $-\dfrac{\cos ax}{a} + C$.

11. $\int \dfrac{\ln x}{x} dx$. Em.: $\dfrac{1}{2}\ln^2 x + C$.

12. $\int \dfrac{dx}{\sin^2 3x}$. Em.: $-\dfrac{\cot 3x}{3} + C$.

13. $\int \dfrac{dx}{\cos^2 7x}$. Em.: $\dfrac{\tan 7x}{7} + C$.

14. $\int \dfrac{dx}{3x-7}$. Em.: $\dfrac{1}{3}\ln|3x-7| + C$.

15. $\int \dfrac{dx}{1-x}$. Em.: $-\ln|1-x| + C$.

16. $\int \dfrac{dx}{5-2x}$. Em.: $-\dfrac{1}{2}\ln|5-2x| + C$.

17. $\int \tan 2x\, dx$. Em.: $-\dfrac{1}{2}\ln|\cos 2x| + C$.

18. $\int \cot(5x-7)\, dx$. Em.: $\dfrac{1}{5}\ln|\sin(5x-7)| + C$.

19. $\int \dfrac{dy}{\cot 3y}$. Em.: $-\dfrac{1}{3}\ln|\cos 3y| + C$.

20. $\int \cot\dfrac{x}{3}\, dx$. Em.: $3\ln\left|\sin\dfrac{x}{3}\right| + C$.

21. $\int \tan\varphi \cdot \sec^2\varphi\, d\varphi$. Em.: $\dfrac{1}{2}\tan^2\varphi + C$.

22. $\int (\cot e^x)e^x\, dx$. Em.: $\ln\left|\sin e^x\right| + C$.

23. $\int\left(\tan 4S - \cot\dfrac{S}{4}\right)dS$. Em.: $-\dfrac{1}{4}\ln|\cos 4S| - 4\ln\left|\sin\dfrac{S}{4}\right| + C$.

24. $\int \sin^2 x \cos x \, dx$. Em.: $\dfrac{\sin^3 x}{3} + C$.

25. $\int \cos^3 x \sin x \, dx$. Em.: $-\dfrac{\cos^4 x}{4} + C$.

26. $\int x\sqrt{x^2+1} \, dx$. Em.: $\dfrac{1}{3}\sqrt{(x^2+1)^3} + C$.

27. $\int \dfrac{x \, dx}{\sqrt{2x^2+3}}$. Em.: $\dfrac{1}{2}\sqrt{2x^2+3} + C$.

28. $\int \dfrac{x^2 \, dx}{\sqrt{x^3+1}}$. Em.: $\dfrac{2}{3}\sqrt{x^3+1} + C$.

29. $\int \dfrac{\cos x \, dx}{\sin^2 x}$. Em.: $-\dfrac{1}{\sin x} + C$.

30. $\int \dfrac{\sin x \, dx}{\cos^3 x}$. Em.: $\dfrac{1}{2\cos^2 x} + C$.

31. $\int \dfrac{\tan x}{\cos^2 x} dx$. Em.: $\dfrac{\tan^2 x}{2} + C$.

32. $\int \dfrac{\cot x}{\sin^2 x} dx$. Em.: $-\dfrac{\cot^2 x}{2} + C$.

33. $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x \sqrt{\tan x - 1}}$. Em.: $2\sqrt{\tan x - 1} + C$.

34. $\int \dfrac{\ln(x+1)}{x+1} dx$. Em.: $\dfrac{\ln^2(x+1)}{2} + C$.

35. $\int \dfrac{\cos x \, dx}{\sqrt{2\sin x + 1}}$. Em.: $\sqrt{2\sin x + 1} + C$.

36. $\int \dfrac{\sin 2x \, dx}{(1+\cos 2x)^2} dx$. Em.: $\dfrac{1}{2(1+\cos 2x)} + C$.

37. $\int \frac{\sin 2x\, dx}{\sqrt{1+\sin^2 x}}$. Em.: $2\sqrt{1+\sin^2 x}+C$.

38. $\int \frac{\sqrt{\tan x+1}}{\cos^2 x}dx$. Em.: $\frac{2}{3}\sqrt{(\tan x+1)^3}+C$.

39. $\int \frac{\cos 2x\, dx}{(2+3\sin 2x)^3}$. Em.: $-\frac{1}{12}\frac{1}{(2+3\sin 2x)^2}+C$.

40. $\int \frac{\sin 3x\, dx}{\sqrt[3]{\cos^4 3x}}$. Em.: $\frac{1}{\sqrt[3]{\cos 3x}}+C$.

41. $\int \frac{\ln^2 x\, dx}{x}$. Em.: $\frac{\ln^3 x}{3}+C$.

42. $\int \frac{\arcsin x\, dx}{\sqrt{1-x^2}}$. Em.: $\frac{\arcsin^2 x}{2}+C$.

43. $\int \frac{\arctan x\, dx}{1+x^2}$. Em.: $\frac{\arctan^2 x}{2}+C$.

44. $\int \frac{\arccos^2 x}{\sqrt{1-x^2}}\, dx$. Em.: $-\frac{\arccos^3 x}{3}+C$.

45. $\int \frac{\operatorname{arccot} x}{1+x^2}\, dx$. Em.: $-\frac{\operatorname{arccot}^2 x}{2}+C$.

46. $\int \frac{x\, dx}{x^2+1}$. Em.: $\frac{1}{2}\ln(x^2+1)+C$.

47. $\int \frac{x+1}{x^2+2x+3}dx$. Em.: $\frac{1}{2}\ln(x^2+2x+3)+C$.

48. $\int \frac{\cos x\, dx}{2\sin x+3}$. Em.: $\frac{1}{2}\ln(2\sin x+3)+C$.

49. $\int \frac{dx}{x\ln x}$. Em.: $\ln|\ln x|+C$.

50. $\int 2x(x^2+1)^4\,dx$. Em.: $\dfrac{(x^2+1)^5}{5}+C$.

51. $\int \tan^4 x\,dx$. Em.: $\dfrac{\tan^3 x}{3}-\tan x+x+C$.

52. $\int \dfrac{dx}{(1+x^2)\arctan x}$. Em.: $\ln|\arctan x|+C$.

53. $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x\,(3\tan x+1)}$. Em.: $\dfrac{1}{3}\ln|3\tan x+1|+C$.

54. $\int \dfrac{\tan^3 x}{\cos^2 x}dx$. Em.: $\dfrac{\tan^4 x}{4}+C$.

55. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}\,\arcsin x}$. Em.: $\ln|\arcsin x|+C$.

56. $\int \dfrac{\cos 2x}{2+3\sin 2x}dx$. Em.: $\dfrac{1}{6}\ln|2+3\sin 2x|+C$.

57. $\int \cos(\ln x)\dfrac{dx}{x}$. Em.: $\sin(\ln x)+C$.

58. $\int \cos(a+bx)\,dx$. Em.: $\dfrac{1}{b}\sin(a+bx)+C$.

59. $\int e^{2x}\,dx$. Em.: $\dfrac{1}{2}e^{2x}+C$.

60. $\int e^{\frac{x}{3}}\,dx$. Em.: $3e^{\frac{x}{3}}+C$.

61. $\int e^{\sin x}\cos x\,dx$. Em.: $e^{\sin x}+C$.

62. $\int a^{x^2}x\,dx$. Em.: $\dfrac{a^{x^2}}{2\ln a}+C$.

63. $\int e^{\frac{x}{a}}\,dx$. Em.: $ae^{\frac{x}{a}}+C$.

64. $\int (e^{2x})^2\,dx$. Em.: $\dfrac{1}{4}e^{4x}+C$.

65. $\int 3^x e^x \, dx$. Em.: $\dfrac{3^x e^x}{\ln 3 + 1} + C$.

66. $\int e^{-3x} \, dx$. Em.: $-\dfrac{1}{3} e^{-3x} + C$.

67. $\int (e^{5x} + a^{5x}) \, dx$. Em.: $\dfrac{1}{5}\left(e^{5x} + \dfrac{a^{5x}}{\ln a} + C\right)$.

68. $\int e^{x^2+4x+3}(x+2) \, dx$. Em.: $\dfrac{1}{2} e^{x^2+4x+3} + C$.

69. $\int \dfrac{(a^x - b^x)^2}{a^x b^x} dx$. Em.: $\dfrac{\left(\dfrac{a}{b}\right)^x - \left(\dfrac{b}{a}\right)^x}{\ln a - \ln b} - 2x + C$.

70. $\int \dfrac{e^x \, dx}{3 + 4e^x}$. Em.: $\dfrac{1}{4} \ln (3 + 4e^x) + C$.

71. $\int \dfrac{e^{2x} \, dx}{2 + e^{2x}}$. Em.: $\dfrac{1}{2} \ln (2 + e^{2x}) + C$.

72. $\int \dfrac{dx}{1 + 2x^2}$. Em.: $\dfrac{1}{\sqrt{2}} \arctan (\sqrt{2}\, x) + C$.

73. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{1 - 3x^2}}$. Em.: $\dfrac{1}{\sqrt{3}} \arcsin (\sqrt{3}\, x) + C$.

74. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{16 - 9x^2}}$. Em.: $\dfrac{1}{3} \arcsin \dfrac{3x}{4} + C$.

75. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{9 - x^2}}$. Em.: $\arcsin \dfrac{x}{3} + C$.

76. $\int \dfrac{dx}{4 + x^2}$. Em.: $\dfrac{1}{2} \arctan \dfrac{x}{2} + C$.

77. $\int \frac{dx}{9x^2+4}$. Em.: $\frac{1}{6}\arctan\frac{3x}{2}+C$.

78. $\int \frac{dx}{4-9x^2}$. Em.: $\frac{1}{12}\ln\left|\frac{2+3x}{2-3x}\right|+C$.

79. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+9}}$. Em.: $\ln\left|x+\sqrt{x^2+9}\right|+C$.

80. $\int \frac{dx}{\sqrt{b^2x^2-a^2}}$. Em.: $\frac{1}{b}\ln\left|bx+\sqrt{b^2x^2-a^2}\right|+C$.

81. $\int \frac{dx}{\sqrt{b^2+a^2x^2}}$. Em.: $\frac{1}{a}\ln\left|ax+\sqrt{b^2+a^2x^2}\right|+C$.

82. $\int \frac{dx}{a^2x^2-c^2}$. Em.: $\frac{1}{2ac}\ln\left|\frac{ax-c}{ax+c}\right|+C$.

83. $\int \frac{x^2dx}{5-x^6}$. Em.: $\frac{1}{6\sqrt{5}}\ln\left|\frac{x^3+\sqrt{5}}{x^3-\sqrt{5}}\right|+C$.

84. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^4}}$. Em.: $\frac{1}{2}\arcsin x^2+C$.

85. $\int \frac{x\,dx}{x^4+a^4}$. Em.: $\frac{1}{2a^2}\arctan\frac{x^2}{a^2}+C$.

86. $\int \frac{e^x dx}{\sqrt{1-e^{2x}}}$. Em.: $\arcsin e^x+C$.

87. $\int \frac{dx}{\sqrt{3-5x^2}}$. Em.: $\frac{1}{\sqrt{5}}\arctan\sqrt{\frac{5}{3}}x+C$.

88. $\int \frac{\cos x\,dx}{a^2+\sin^2 x}$. Em.: $\frac{1}{a}\arctan\left(\frac{\sin x}{a}\right)+C$.

89. $\int \frac{dx}{x\sqrt{1-\ln^2 x}}$. Em.: $\arcsin(\ln x)+C$.

90. $\int \frac{\arccos x - x}{\sqrt{1-x^2}}dx$. Em.: $-\frac{1}{2}(\arccos x)^2+\sqrt{1-x^2}+C$.

91. $\int \frac{x-\arctan x}{1+x^2}dx$. Em.: $\frac{1}{2}\ln(1+x^2)-\frac{1}{2}(\arctan x)^2+C$.

92. $\int \frac{\sqrt{1+\ln x}}{x}dx$. Em.: $\frac{2}{3}\sqrt{(1+\ln x)^3}+C$.

93. $\int \frac{\sqrt{1+\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx$. Em.: $\frac{4}{3}\sqrt{(1+\sqrt{x})^3}+C$.

94. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}\sqrt{1+\sqrt{x}}}$. Em.: $4\sqrt{1+\sqrt{x}}+C$.

95. $\int \frac{e^x dx}{1+e^{2x}}$. Em.: $\arctan e^x+C$.

96. $\int \frac{\cos x\, dx}{\sqrt[3]{\sin^2 x}}$. Em.: $3\sqrt[3]{\sin x}+C$.

97. $\int \sqrt{1+3\cos^2 x}\sin 2x\, dx$. Em.: $-\frac{2}{9}\sqrt{(1+3\cos^2 x)^3}+C$.

98. $\int \frac{\sin 2x\, dx}{\sqrt{1+\cos^2 x}}$. Em.: $-2\sqrt{1+\cos^2 x}+C$.

99. $\int \frac{\cos^3 x}{\sin^4 x}dx$. Em.: $\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{3\sin^3 x}+C$.

100. $\int \frac{\sqrt[3]{\tan^2 x}}{\cos^2 x}dx$. Em.: $\frac{3}{5}\sqrt[3]{\tan^5 x}+C$.

101. $\int \frac{dx}{2\sin^2 x+3\cos^2 x}$. Em.: $\frac{1}{\sqrt{6}}\arctan\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\tan x\right)+C$.

$\int \frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}dx$ motako integralak:

102. $\int \frac{dx}{x^2+2x+5}$. Em.: $\frac{1}{2}\arctan\frac{x+1}{2}+C$.

103. $\int \frac{dx}{3x^2-2x+4}$. Em.: $\frac{1}{\sqrt{11}}\arctan\frac{3x-1}{\sqrt{11}}+C$.

104. $\int \frac{dx}{3x^2+3x+1}$. Em.: $\frac{1}{\sqrt{5}}\ln\left|\frac{2x+3-\sqrt{5}}{2x+3+\sqrt{5}}\right|+C$.

105. $\int \frac{dx}{x^2-6x+5}$. Em.: $\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-5}{x-1}\right|+C$.

106. $\int \frac{dz}{2z^2-2z+1}$. Em.: $\arctan(2z-1)+C$.

107. $\int \frac{dx}{3x^2-2x+2}$. Em.: $\frac{1}{\sqrt{5}}\arctan\frac{3x-1}{\sqrt{5}}+C$.

108. $\int \frac{(6x-7)\,dx}{3x^2-7x+11}$. Em.: $\ln\left|3x^2-7x+11\right|+C$.

109. $\int \frac{(3x-2)\,dx}{5x^2-3x+2}$. Em.: $\frac{3}{10}\ln\left|5x^2-3x+2\right|-\frac{11}{5\sqrt{31}}\arctan\frac{10x-3}{\sqrt{31}}+C$.

110. $\int \frac{3x-1}{x^2-x+1}dx$. Em.: $\frac{3}{2}\ln\left|x^2-x+1\right|+\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+C$.

111. $\int \frac{7x+1}{6x^2+x-1}dx$. Em.: $\frac{2}{3}\ln|3x-1|+\frac{1}{2}\ln|2x+1|+C$.

112. $\int \frac{2x-1}{5x^2-x+2}dx$. Em.: $\frac{1}{5}\ln\left|5x^2-x+2\right|+\frac{8}{5\sqrt{39}}\arctan\frac{10x-1}{\sqrt{39}}+C$.

113. $\displaystyle\int \frac{6x^4 - 5x^3 + 4x^2}{2x^2 - x + 1}\,dx.$

Em.: $x^3 - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{1}{4}\ln\left|2x^2 - x + 1\right| + \dfrac{1}{2\sqrt{7}}\arctan\dfrac{4x-1}{\sqrt{7}} + C.$

114. $\displaystyle\int \frac{dx}{2\cos^2 x + \sin x\cos x + \sin^2 x}.$ Em.: $\dfrac{2}{\sqrt{7}}\arctan\dfrac{2\tan x + 1}{\sqrt{7}} + C.$

$\displaystyle\int \frac{Ax + B}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}\,dx$ motako integralak:

115. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{2 - 3x - 4x^2}}.$ Em.: $\dfrac{1}{2}\arcsin\dfrac{8x+3}{\sqrt{41}} + C.$

116. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1 + x + x^2}}.$ Em.: $\ln\left|x + \dfrac{1}{2} + \sqrt{x^2 + x + 1}\right| + C.$

117. $\displaystyle\int \frac{dS}{\sqrt{2aS + S^2}}.$ Em.: $\ln\left|S + a + \sqrt{2aS + S^2}\right| + C.$

118. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{5 - 7x - 3x^2}}.$ Em.: $\dfrac{1}{\sqrt{3}}\arcsin\dfrac{6x+7}{\sqrt{109}} + C.$

119. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x(3x+5)}}.$ Em.: $\dfrac{1}{\sqrt{3}}\ln\left|6x + 5 + \sqrt{12x(3x+5)}\right| + C.$

120. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{2 - 3x - x^2}}.$ Em.: $\arcsin\dfrac{2x+3}{\sqrt{17}} + C.$

121. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{5x^2 - x - 1}}.$ Em.: $\dfrac{1}{\sqrt{5}}\ln\left|10x - 1 + \sqrt{20(5x^2 - x - 1)}\right| + C.$

122. $\displaystyle\int \frac{2ax + b}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}\,dx.$ Em.: $2\sqrt{ax^2 + bx + c} + C.$

123. $\int \frac{(x+3)\,dx}{\sqrt{4x^2+4x+3}}$. Em.: $\frac{1}{4}\sqrt{4x^2+4x+3}+\frac{5}{4}\ln\left|2x+1+\sqrt{4x^2+4x+3}\right|+C.$

124. $\int \frac{(x-3)\,dx}{\sqrt{3+66x-11x^2}}$. Em.: $-\frac{1}{11}\sqrt{3+66x-11x^2}+C.$

125. $\int \frac{(x+3)\,dx}{\sqrt{3+4x-4x^2}}$. Em.: $-\frac{1}{4}\sqrt{3+4x-4x^2}+\frac{7}{4}\arcsin\frac{2x-1}{3}+C.$

126. $\int \frac{3x+5}{\sqrt{x(2x-1)}}\,dx$. Em.: $\frac{3}{2}\sqrt{2x^2-x}+\frac{23}{4\sqrt{2}}\ln\left|4x-1+\sqrt{8(2x^2-x)}\right|+C.$

Zatikako integrazioa:

127. $\int xe^x\,dx$. Em.: $e^x(x-1)+C.$

128. $\int x\ln x\,dx$. Em.: $\frac{1}{2}x^2\left(\ln x-\frac{1}{2}\right)+C.$

129. $\int x\sin x\,dx$. Em.: $\sin x-x\cos x+C.$

130. $\int \ln x\,dx$. Em.: $x(\ln x-1)+C.$

131. $\int \arcsin x\,dx$. Em.: $x\arcsin x+\sqrt{1-x^2}+C.$

132. $\int \ln(1-x)\,dx$. Em.: $-x-(1-x)\ln(1-x)+C.$

133. $\int x^n\ln x\,dx$. Em.: $\frac{x^{n+1}}{n+1}\left(\ln x-\frac{1}{n+1}\right)+C.$

134. $\int x\arctan x\,dx$. Em.: $\frac{1}{2}[(x^2+1)\arctan x-x]+C.$

135. $\int x\arcsin x\,dx$. Em.: $\frac{1}{4}[(2x^2-1)\arcsin x+x\sqrt{1-x^2}]+C.$

136. $\int \ln(x^2+1)\,dx$. Em.: $x\ln|x+1| - 2x + 2\arctan x + C$.

137. $\int \arctan\sqrt{x}\,dx$. Em.: $(x+1)\arctan\sqrt{x} - \sqrt{x} + C$.

138. $\int \frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx$. Em.: $2\sqrt{x}\arcsin\sqrt{x} + 2\sqrt{1-x} + C$.

139. $\int \arcsin\sqrt{\frac{x}{x+1}}\,dx$. Em.: $x\arcsin\sqrt{\frac{x}{x+1}} - \sqrt{x} + \arctan\sqrt{x} + C$.

140. $\int x\cos^2 x\,dx$. Em.: $\frac{x^2}{4} + \frac{1}{4}x\sin 2x + \frac{1}{8}\cos 2x + C$.

141. $\int \frac{x\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$. Em.: $x - \sqrt{1-x^2}\arcsin x + C$.

142. $\int \frac{x\arctan x}{(x^2+1)^2}\,dx$. Em.: $\frac{x}{4(1+x^2)} + \frac{1}{4}\arctan x - \frac{1}{2}\frac{\arctan x}{1+x^2} + C$.

143. $\int x\arctan\sqrt{x^2-1}\,dx$. Em.: $\frac{1}{2}x^2\arctan\sqrt{x^2-1} - \frac{1}{2}\sqrt{x^2-1} + C$.

144. $\int \frac{\arcsin x}{x^2}\,dx$. Em.: $\ln\left|\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x}\right| - \frac{1}{x}\arcsin x + C$.

145. $\int \ln(x+\sqrt{1+x^2})\,dx$. Em.: $x\ln\left|x+\sqrt{1+x^2}\right| - \sqrt{1+x^2} + C$.

146. $\int \arcsin x\,\frac{x\,dx}{\sqrt{(1-x^2)^3}}$. Em.: $\frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1-x}{1+x}\right|$.

Hurrengo ariketetan ordezkapen trigonometrikoak erabili:

147. $\int \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x^2}\,dx$. Em.: $-\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x} - \arcsin\frac{x}{a} + C$.

148. $\int x^2\sqrt{4-x^2}\,dx$. Em.: $2\arcsin\frac{x}{2}-\frac{1}{2}x\sqrt{4-x^2}+\frac{1}{4}x^3\sqrt{4-x^2}+C$.

149. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{1+x^2}}$. Em.: $-\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}+C$.

150. $\int \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x}dx$. Em.: $\sqrt{x^2-a^2}-a\arccos\frac{a}{x}+C$.

151. $\int \frac{dx}{\sqrt{(a^2+x^2)^3}}$. Em.: $\frac{x}{a^2}\frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}+C$.

Frakzio razionalen integrazioa:

152. $\int \frac{2x-1}{(x-1)(x-2)}dx$. Em.: $\ln\left|\frac{(x-2)^3}{x-1}\right|+C$.

153. $\int \frac{x\,dx}{(x+1)(x+3)(x+5)}$. Em.: $\frac{1}{8}\ln\left|\frac{(x+3)^6}{(x+5)^5(x+1)}\right|+C$.

154. $\int \frac{x^5+x^4-8}{x^3-4x}dx$. Em.: $\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+4x+\ln\left|\frac{x^2(x-2)^5}{(x+2)^3}\right|+C$.

155. $\int \frac{x^4\,dx}{(x^2-1)(x+2)}$. Em.: $\frac{x^2}{2}-2x+\frac{1}{6}\ln\left|\frac{x-1}{(x+1)^3}\right|+\frac{16}{3}\ln|x+2|+C$.

156. $\int \frac{dx}{(x-1)^2(x-2)}$. Em.: $\frac{1}{x-1}+\ln\left|\frac{x-2}{x-1}\right|+C$.

157. $\int \frac{x-8}{x^3-4x^2+4x}dx$. Em.: $\frac{3}{x-2}+\ln\frac{(x-2)^2}{x^2}+C$.

158. $\int \frac{3x+2}{x(x+1)^3}\,dx$. Em.: $\frac{4x+3}{2(x+1)^2}+\ln\frac{x^2}{(x+1)^2}+C$.

159. $\int \frac{x^2\,dx}{(x+2)^2(x+4)^2}$. Em.: $-\frac{5x+12}{x^2+6x+8}+\ln\left(\frac{x+4}{x+2}\right)^2+C$.

160. $\int \frac{dx}{x(x^2+1)}$. Em.: $\ln\left|\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right|+C$.

161. $\int \frac{2x^2-3x-3}{(x-1)(x^2-2x+5)}dx$. Em.: $\ln\left|\frac{(x^2-2x+5)^{\frac{3}{2}}}{x-1}\right|+\frac{1}{2}\arctan\frac{x-1}{2}+C$.

162. $\int \frac{x^3-6}{x^4+6x^2+8}dx$. Em.: $\ln\left|\frac{x^2+4}{\sqrt{x^2+2}}\right|+\frac{3}{2}\arctan\frac{x}{2}-\frac{3}{\sqrt{2}}\arctan\frac{x}{\sqrt{2}}+C$.

163. $\int \frac{dx}{x^3+1}$. Em.: $\frac{1}{6}\ln\left|\frac{(x+1)^2}{x^2-x+1}\right|+\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+C$.

164. $\int \frac{3x-7}{x^3+x^2+4x+4}dx$. Em.: $\ln\frac{x^2+4}{(x+1)^2}+\frac{1}{2}\arctan\frac{x}{2}+C$.

165. $\int \frac{4\,dx}{x^4+1}$. Em.: $\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\frac{x^2+x\sqrt{2}+1}{x^2-x\sqrt{2}+1}\right|+\sqrt{2}\arctan\frac{x\sqrt{2}}{1-x^2}+C$.

166. $\int \frac{x^5\,dx}{x^3-1}$. Em.: $\frac{1}{3}\left[x^3+\ln\left|x^3-1\right|\right]+C$.

167. $\int \frac{x^3+x-1}{(x^2+2)^2}dx$. Em.: $\frac{2-x}{4(x^2+2)}+\ln\left|(x^2+2)^{\frac{1}{2}}\right|-\frac{1}{4\sqrt{2}}\arctan\frac{x}{\sqrt{2}}+C$.

168. $\int \frac{(4x^2-8x)\,dx}{(x-1)^2(x^2+1)^2}$. Em.: $\frac{3x^2-x}{(x-1)(x^2+1)}+\ln\frac{(x-1)^2}{x^2+1}+\arctan x+C$.

169. $\int \frac{dx}{(x^2-x)(x^2-x+1)^2}$. Em.: $\ln\left|\frac{x-1}{x}\right|-\frac{10}{3\sqrt{3}}\arctan\frac{2x-1}{\sqrt{3}}-\frac{2x-1}{3(x^2-x+1)}+C$.

Funtzio irrazionalen integrazioa:

170. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x^3}+1}\,dx$. Em.: $\displaystyle\frac{4}{3}\left[\sqrt[4]{x^3}-\ln\left|\sqrt[4]{x^3}+1\right|\right]+C$.

171. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x^3}-\sqrt[3]{x}}{6\sqrt[4]{x}}\,dx$. Em.: $\displaystyle\frac{2}{27}\sqrt[4]{x^9}-\frac{2}{13}\sqrt[12]{x^{13}}+C$.

172. $\displaystyle\int \frac{\sqrt[6]{x}+1}{\sqrt[6]{x^7}+\sqrt[4]{x^5}}\,dx$. Em.: $\displaystyle-\frac{6}{\sqrt[6]{x}}+\frac{12}{\sqrt[12]{x}}+2\ln|x|-24\ln\left|\sqrt[12]{x}+1\right|+C$.

173. $\displaystyle\int \frac{2+\sqrt[3]{x}}{\sqrt[6]{x}+\sqrt[3]{x}+\sqrt{x}+1}\,dx$. Em.: $\displaystyle\frac{6}{5}\sqrt[6]{x^5}-\frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}+4\sqrt{x}-6\sqrt[3]{x}+$

$\displaystyle+6\sqrt[6]{x}-9\ln\left|\sqrt[6]{x}+1\right|+\frac{3}{2}\ln\left|\sqrt[3]{x}+1\right|+3\arctan\sqrt[6]{x}+C$.

174. $\displaystyle\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\,\frac{dx}{x^2}$. Em.: $\displaystyle\ln\left|\frac{\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}}\right|-\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}+C$.

175. $\displaystyle\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\,\frac{dx}{x}$. Em.: $\displaystyle 2\arctan\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}+\ln\left|\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}\right|+C$.

176. $\displaystyle\int \frac{\sqrt[7]{x}+\sqrt{x}}{\sqrt[7]{x^8}+\sqrt[14]{x^{15}}}\,dx$. Em.: $\displaystyle 14\left[\sqrt[14]{x}-\frac{1}{2}\sqrt[7]{x}+\frac{1}{3}\sqrt[14]{x^3}-\frac{1}{4}\sqrt[7]{x^2}+\frac{1}{5}\sqrt[14]{x^5}\right]+C$.

177. $\displaystyle\int \sqrt{\frac{2+3x}{x-3}}\,dx$. Em.: $\displaystyle\sqrt{3x^2-7x-6}+\frac{11}{2\sqrt{3}}\ln\left|x-\frac{7}{6}+\sqrt{x^2-\frac{7}{3}x-2}\right|+C$.

$\displaystyle\int R(x,\sqrt{ax^2+bx+c})\,dx$ motako integralak:

178. $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-x+3}}$. Em.: $\displaystyle\frac{1}{\sqrt{3}}\ln\left|\frac{\sqrt{x^2-x+3}-\sqrt{3}}{x}+\frac{1}{2\sqrt{3}}\right|+C$.

179. $\int \frac{dx}{x\sqrt{2+x-x^2}}$. Em.: $-\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{2+x-x^2}+\sqrt{2}}{x}+\frac{1}{2\sqrt{2}}\right|+C.$

180. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+4x-4}}$. Em.: $\frac{1}{2}\arcsin\frac{x-2}{x\sqrt{2}}+C.$

181. $\int \frac{\sqrt{x^2+2x}}{x}dx$. Em.: $\sqrt{x^2+2x}+\ln\left|x+1+\sqrt{x^2+2x}\right|+C.$

182. $\int \frac{dx}{\sqrt{(2x-x^2)^3}}$. Em.: $\frac{x-1}{\sqrt{2x-x^2}}+C.$

183. $\int \sqrt{2x-x^2}\,dx$. Em.: $\frac{1}{2}[(x-1)\sqrt{2x-x^2}+\arcsin(x-1)]+C.$

184. $\int \frac{dx}{x-\sqrt{x^2-1}}$. Em.: $\frac{x^2}{2}+\frac{x}{2}\sqrt{x^2-1}-\frac{1}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2-1}\right|+C.$

185. $\int \frac{dx}{(1+x)\sqrt{1+x+x^2}}$. Em.: $\ln\left|\frac{x+\sqrt{1+x+x^2}}{2+x+\sqrt{1+x+x^2}}\right|+C.$

186. $\int \frac{(x+1)}{(2x+x^2)\sqrt{2x+x^2}}dx$. Em.: $\frac{-1}{\sqrt{2x+x^2}}+C.$

187. $\int \frac{1-\sqrt{1+x+x^2}}{x\sqrt{1+x+x^2}}dx$. Em.: $\ln\left|\frac{2+x-2\sqrt{1+x+x^2}}{x^2}\right|+C.$

188. $\int \frac{\sqrt{x^2+4x}}{x^2}dx$. Em.: $-\frac{8}{x+\sqrt{x^2+4x}}+\ln\left|x+2+\sqrt{x^2+4x}\right|+C.$

Binomio diferentzialen integrazioa:

189. $\int \frac{\sqrt{1+\sqrt[3]{x}}}{\sqrt[3]{x^2}}dx$. Em.: $2\left(1+x^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}+C.$

190. $\int x^{\frac{1}{3}}\left(2+x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{4}} dx$. Em.: $\dfrac{10x^{\frac{2}{3}}-16}{15}\left(2+x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{5}{4}}+C$.

191. $\int \dfrac{dx}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}$. Em.: $\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}+C$.

192. $\int \dfrac{dx}{x^2(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}$. Em.: $-(1+x^2)^{\frac{-1}{2}}\left(2x+\dfrac{1}{x}\right)+C$.

193. $\int \sqrt[4]{\left(1+x^{\frac{1}{2}}\right)^3}\, dx$. Em.: $\dfrac{8}{77}(7\sqrt{x}-4)(1+\sqrt{x})^{\frac{7}{4}}+C$.

194. $\int \dfrac{\sqrt{2-\sqrt[3]{x}}}{\sqrt[3]{x}} dx$. Em.: $\dfrac{2(4+3\sqrt[3]{x})(2-\sqrt[3]{x})^{\frac{3}{2}}}{5}+C$.

195. $\int x^5\sqrt[3]{(1+x^3)^2}\, dx$. Em.: $\dfrac{5x^3-3}{40}(1+x^3)^{\frac{5}{3}}+C$.

Funtzio trigonometrikoen integrazioa:

196. $\int \sin^3 x\, dx$. Em.: $\dfrac{1}{3}\cos^3 x-\cos x+C$.

197. $\int \sin^5 x\, dx$. Em.: $-\cos+\dfrac{2}{3}\cos^3 x-\dfrac{\cos^5 x}{5}+C$.

198. $\int \cos^4 x \sin^3 x\, dx$. Em.: $-\dfrac{1}{5}\cos^5 x+\dfrac{1}{7}\cos^7 x+C$.

199. $\int \dfrac{\cos^3 x}{\sin^4 x} dx$. Em.: $\operatorname{cosec} x-\dfrac{1}{3}\operatorname{cosec}^3 x+C$.

200. $\int \cos^2 x\, dx$. Em.: $\frac{x}{2} + \frac{1}{4}\sin 2x + C$.

201. $\int \sin^4 x\, dx$. Em.: $\frac{3}{8}x - \frac{\sin 2x}{4} + \frac{\sin 4x}{32} + C$.

202. $\int \cos^6 x\, dx$. Em.: $\frac{1}{16}\left(5x + 4\sin 2x - \frac{\sin^3 2x}{3} + \frac{3}{4}\sin 4x\right) + C$.

203. $\int \sin^4 x\ \cos^4 x\, dx$. Em.: $\frac{1}{128}\left(3x - \sin 4x + \frac{\sin 8x}{8}\right) + C$.

204. $\int \tan^3 x\, dx$. Em.: $\frac{\tan^2 x}{2} + \ln|\cos x| + C$.

205. $\int \cot^5 x\, dx$. Em.: $-\frac{1}{4}\cot^4 x + \frac{1}{2}\cot^2 x + \ln|\sin x| + C$.

206. $\int \cot^3 x\, dx$. Em.: $-\frac{\cot^2 x}{2} - \ln|\sin x| + C$.

207. $\int \sec^8 x\, dx$. Em.: $\frac{\tan^7 x}{7} + \frac{3\tan^5 x}{5} + \tan^3 x + \tan x + C$.

208. $\int \tan^4 x \sec^4 x\ dx$. Em.: $\frac{\tan^7 x}{7} + \frac{\tan^5 x}{5} + C$.

209. $\int \frac{dx}{\cos^4 x}$. Em.: $\tan x + \frac{1}{3}\tan^3 x + C$.

210. $\int \frac{\cos x}{\sin^2 x} dx$. Em.: $C - \operatorname{cosec} x$.

211. $\int \frac{\sin^3 x\, dx}{\sqrt[3]{\cos^4 x}}$. Em.: $\frac{3}{5}\cos^{\frac{5}{3}} x + 3\cos^{-\frac{1}{3}} x + C$.

212. $\int \sin x \sin 3x\ dx$. Em.: $-\frac{\sin 4x}{8} + \frac{\sin 2x}{4} + C$.

213. $\int \cos 4x \ \cos 7x \, dx$. Em.: $\dfrac{\sin 11x}{22} + \dfrac{\sin 3x}{6} + C$.

214. $\int \cos 2x \ \sin 4x \, dx$. Em.: $-\dfrac{\cos 6x}{12} - \dfrac{\cos 2x}{4} + C$.

215. $\int \sin \dfrac{1}{4}x \ \cos \dfrac{3}{4}x \, dx$. Em.: $-\dfrac{\cos x}{2} + \cos \dfrac{1}{2}x + C$.

216. $\int \dfrac{dx}{4 - 5\sin x}$. Em.: $\dfrac{1}{3} \ln \left| \dfrac{\tan \frac{x}{2} - 2}{2 \tan \frac{x}{2} - 1} \right| + C$.

217. $\int \dfrac{dx}{5 - 3\cos x}$. Em.: $\dfrac{1}{2} \arctan \left| 2 \tan \dfrac{x}{2} \right| + C$.

218. $\int \dfrac{\sin x \, dx}{1 + \sin x}$. Em.: $\dfrac{2}{1 + \tan \frac{x}{2}} + x + C$.

219. $\int \dfrac{\cos x \, dx}{1 + \cos x}$. Em.: $x - \tan \dfrac{x}{2} + C$.

220. $\int \dfrac{\sin 2x}{\cos^4 x + \sin^4 x} dx$. Em.: $\arctan (2\sin^2 x - 1) + C$.

221. $\int \dfrac{dx}{(1 + \cos x)^2}$. Em.: $\dfrac{1}{2} \tan \dfrac{x}{2} + \dfrac{1}{6} \tan^3 \dfrac{x}{2} + C$.

222. $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x + \tan^2 x}$. Em.: $-\dfrac{1}{2} \left[\cot x + \dfrac{1}{\sqrt{2}} \arctan \left(\dfrac{\tan x}{\sqrt{2}} \right) \right] + C$.

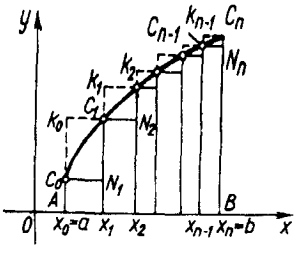
223. $\int \dfrac{\sin^2 x}{1 + \cos^2 x} dx$. Em.: $\sqrt{2} \arctan \left(\dfrac{\tan x}{\sqrt{2}} \right) - x + C$.

XI. GAIA

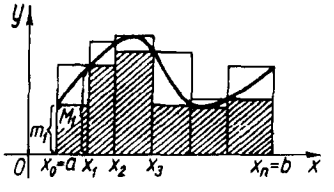
INTEGRAL MUGATUA

§ 1. Problemaren planteamendua. Behe- eta goi-baturak

Matematika, fisika, mekanika eta zientziaren beste arlotan ikerkuntzarako baliabide ahaltsu bat integral mugatua da, hau da, analisi matematikoko oinarrizko kontzeptuetako bat. Kurbek mugatutako azalerak, arkuen luzerak, bolumenak, lana, abiadura, inertzi momentuak, eta abarren kalkulua integral mugatu baten kalkulura laburtzen da.



206. IRUDIA



207. IRUDIA

Izan bedi $y = f(x)$ $[a,b]$ tartean emandako funtzio jarraia (206. eta 207. irudiak). Izenda ditzagun m eta M bere balio minimo eta maximoa, hurrenez hurren, tarte horretan. Har dezagun bere partiketa bat

$$a = x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n = b$$

puntuen bidez,

$$x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n$$

izanik, eta izan bitez

$$x_1 - x_0 = \Delta x_1, \quad x_2 - x_1 = \Delta x_2, \quad \ldots, \quad x_n - x_{n-1} = \Delta x_n.$$

Izenda ditzagun orain $f(x)$ funtzioaren balio maximoa eta minimoa

$[x_0, x_1]$ tartean m_1 eta M_1,
$[x_1, x_2]$ tartean m_2 eta M_2,
. . . . . .
$[x_{n-1}, x_n]$ tartean m_n eta M_n , hurrenez hurren.

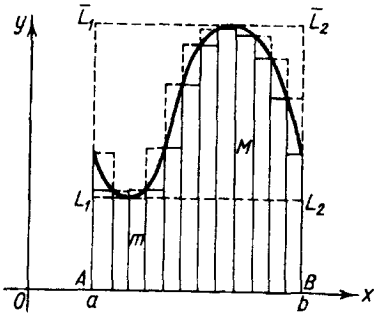
Era ditzagun ondoko baturak

$$\underline{s}_n = m_1\Delta x_1 + m_2\Delta x_2 + \ldots + m_n\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} m_i\Delta x_i, \qquad (1)$$

$$\overline{s}_n = M_1\Delta x_1 + M_2\Delta x_2 + \ldots + M_n\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} M_i\Delta x_i. \qquad (2)$$

$\underline{s}_n$ *behe-batura* deitzen da eta $\overline{s}_n$ *goi-batura.*

$f(x) \geq 0$ bada, behe-baturak "inskribatutako" $AC_0N_1C_1N_2\ldots C_{n-1}N_nBA$ irudi mailakatuaren azaleraren zenbakizko balio bera du; goi-baturak "zirkunskribatutako" $AK_0C_1K_1\ldots C_{n-1}K_{n-1}C_nBA$ irudi mailakatuaren azaleraren zenbakizko balioa bera du.



208. IRUDIA

Aipa ditzagun behe- eta goi-baturen propietate batzuk.

a) $m_i \leq M_i$ denez gero, edozein i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ izanik, (1) eta (2) formulen arabera

$$\underline{s}_n \leq \overline{s}_n$$

dugu. (Berdintza ikurra $f(x) =$ ktea. kasuari soilik dagokio).

b)

$$m_1 \geq m,\ m_2 \geq m,\ \ldots,\ m_n \geq m$$

betetzen denez, non m $f(x)$ funtzioaren balio minimoa den $[a,b]$ tartean;

$$\underline{s}_n = m_1\Delta x_1 + m_2\Delta x_2 + \ldots + m_n\Delta x_n \geq m\Delta x_1 + m\Delta x_2 + \ldots + m\Delta x_n =$$

$$= m(\Delta x_1 + \Delta x_2 + \ldots + \Delta x_n) = m(b-a)$$

daukagu. Horrela;

$$\underline{s}_n \geq m(b-a).$$

c)

$$M_1 \leq M,\ M_2 \leq M,\ \ldots,\ M_n \leq M$$

betetzen denez, non M $f(x)$ funtzioaren balio maximoa den $[a,b]$ tartean;

$$\overline{s}_n = M_1\Delta x_1 + M_2\Delta x_2 + \ldots + M_n\Delta x_n \leq M\Delta x_1 + M\Delta x_2 + \ldots + M\Delta x_n =$$

$$= M(\Delta x_1 + \Delta x_2 + \ldots + \Delta x_n) = M(b-a)$$

daukagu. Horrela,

$$\overline{s}_n \leq M(b-a).$$

Lortutako bi desberdintzak bilduz,

$$m(b-a) \leq \underline{s}_n \leq \overline{s}_n \leq M(b-a)$$

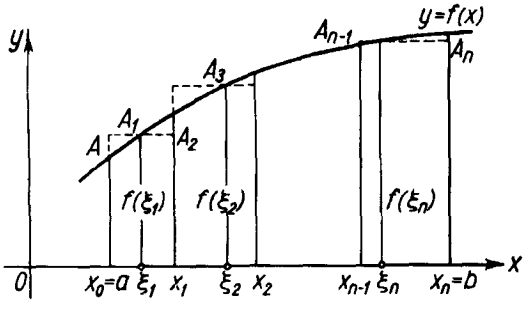
dugu.

$f(x) \geq 0$ bada, desberdintza bikoitzak adierazpen geometriko sinplea dauka (208. irudia), $m(b-a)$ eta $M(b-a)$ biderkadurak inskribatutako AL_1L_2B eta zirkunskribatutako $A\overline{L}_1\overline{L}_2B$ laukizuzenen azaleren zenbakizko balioa bera, hurrenez hurren, hartzen dutenez gero.

§ 2. Integral mugatua

Segi dezagun aurreko atalean planteatutako problema aztertzen. $[x_0, x_1]$, $[x_1, x_2]$, ..., $[x_{n-1}, x_n]$ tarteetan puntu bana aukera dezagun, hurrenez hurren, $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ izendatuko ditugunak (209. irudia),

$$x_0 < \xi_1 < x_1, \quad x_1 < \xi_2 < x_2, \quad \ldots, \quad x_{n-1} < \xi_n < x_n.$$



209. IRUDIA

Puntu horietan funtzioaren balioak kalkulatuko ditugu, $f(\xi_1), f(\xi_2), \ldots, f(\xi_n)$, eta

$$s_n = f(\xi_1)\Delta x_1 + f(\xi_2)\Delta x_2 + \ldots + f(\xi_n)\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \qquad (1)$$

batura eratuko dugu, $f(x)$ funtzioaren $[a,b]$ tarteko batura integral izena duena. Bedi ξ_i $[x_{i-1}, x_i]$ tarteko hautazko puntu bat,

$$m_i \le f(\xi_1) \le M_i$$

dugu eta $\Delta x_i > 0$ denez,

$$m_i \Delta x_i \le f(\xi_i)\Delta x_i \le M_i \Delta x_i.$$

Ondorioz,

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i \leq \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \leq \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i,$$

hau da,

$$\underline{s}_n \leq s_n \leq \bar{s}_n. \tag{2}$$

Azkeneko desberdintzen adierazpen geometrikoa hauxe da: $f(x) \geq 0$ denean, s_n azalera duen irudia inskribatutako eta zirkunskribatutako lerro mailakatuen artean dagoen lerro mailakatu batek mugatzen duela.

s_n batura $[a,b]$ tartearen $[x_{i-1}, x_i]$ tarteetako partiketaren menpe dago, baita azken horietan dauden ξ_i puntuen hautaketaren menpe ere.

Izenda dezagun $\max[x_{i-1}, x_i]$, $[x_0, x_1]$, $[x_1, x_2]$, ..., $[x_{n-1}, x_n]$ tarteen luzerarik handiena. Kontsidera ditzagun $[a,b]$ tartearen $[x_{i-1}, x_i]$ tarteetako partiketa desberdinak, $\max[x_{i-1}, x_i] \to 0$ izanik.

Bistakoa da, partiketa-prozesu horrekin, n tarteen kopuruak infiniturantz jotzen duena. Dagozkien ξ_i balioak aukeratuz, partiketa bakoitzerako

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

batura integrala era daiteke, beraz, partiketen segidaz eta dagozkien integralen segidaz hitz egin daiteke. Demagun partiketen segida baterako, $\max \Delta x_i \to 0$ izanik, batura horrek[1] I limiterantz jotzen duela.

$[a,b]$ tartearen edozein partiketatarako, $\max \Delta x_i \to 0$ delarik, ξ_i puntuak edozein direla ere, $\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$ baturak I limite berberarantz jotzen badu, $f(x)$ funtzioa $[a,b]$ tartean *integragarria* dela esango da, I limitea $f(x)$ funtzioaren $[a,b]$ tarteko *integral mugatu* deitzen da eta $\int_a^b f(x)\,dx$ idatziko. Orduan

1) Emandako kasuan, batura magnitude aldakor ordenatua da.

$$\lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = \int_a^b f(x)\,dx$$

idatz dezakegu.

a eta b zenbakiei, hurrenez hurren, integralaren *behe-muga* eta *goi-muga* deitzen zaie. $[a,b]$ tartea *integrazio-tarte* deitzen da eta x *integrazio-aldagai.*

Esan dezagun, frogapenik gabe, $y = f(x)$ funtzioa $[a,b]$ tartean jarraia bada, integragarria dela tarte berean.

Partiketen segida baterako, non $\max \Delta x_i \to 0$ den, $\underline{s}_n$ behe-batura eta $\bar{s}_n$ goi-baturen segidak aztertzen baditugu, $f(x)$ funtzio jarraia deneko kasuan, bistakoa da batura horiek I limite berberarantz joko dutena, hau da, $f(x)$ funtzioaren integral mugaturantz:

$$\lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i = \int_a^b f(x)\,dx,$$

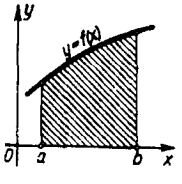
$$\lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Funtzio etenen artean badaude funtzio integragarriak eta integraezinak.

$y = f(x)$ integrakizunaren grafikoa eraikitzen badugu, $f(x) \geq 0$ kasuan,

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

integralak $y = f(x)$ kurbak, $x = a$ eta $x = b$ zuzenek eta Ox ardatzak mugatzen duten trapezio lerromakurraren Q azaleraren zenbakizko balio bera du (210. irudia).



210. IRUDIA

Hortaz, Q azalera

$$Q = \int_a^b f(x)\,dx \tag{3}$$

integralaren bidez kalkulatzen da.

1. Oharra. Aipa dezagun integral mugatua $f(x)$ funtzioaren forma eta integrazio-mugen menpe dagoela soilik, baina ez integrazio-aldagaiaren menpe. Azken hori edozein letraz izenda daiteke. Hori dela eta, integral mugatuaren balioa aldatu gabe, x letra beste edozein batez ordezka daiteke:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(t)\,dt = \ldots = \int_a^b f(z)\,dz.$$

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

integral mugatuaren kontzeptua sartzean $a < b$ dela suposatu dugu. $b < a$ bada, definizioz

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx \tag{4}$$

dugu. Horrela, adibidez,

$$\int_5^0 x^2\,dx = -\int_0^5 x^2\,dx.$$

Azkenik, $a = b$ bada, definizioz, $f(x)$ funtzio orotarako

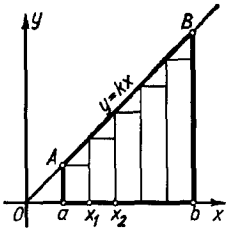
$$\int_a^a f(x)\,dx = 0 \tag{5}$$

dugu.

Hori, ikuspuntu geometrikotik ere logikoa da. Izan ere, trapezioaren oinarriaren luzera zero bait da; beraz, bere azalera ere zero izango da.

1. Adibidea. Kalkulatu $\int_a^b kx\,dx \ (b > a)$ integrala.

Ebazpena. Ikuspuntu geometrikotik, problema $y = kx$, $x = a$, $x = b$ eta $y = 0$ zuzenek mugatutako trapezioaren Q azalera kalkulatzera laburtzen da (211. irudia).



211. IRUDIA

$y = kx$ funtzioa, integral ikurpean, jarraia da. Hortaz, integral mugatua kalkulatzeko, gorago esan dugun bezala, $[a,b]$ tartearen hautazko partiketa bat egin daiteke eta tarteetako ξ_k edozein puntu aukera daiteke. Integral mugatuaren kalkuluaren emaitza ez dago batura integralaren eraketa-metodoren menpe, tarte partzial handienaren luzerak zerorantz jotzen badu.

Bana dezagun $[a,b]$ tartea n zati berdinetan. Tarte partzial bakoitzaren Δx luzera $\Delta x = \dfrac{b-a}{n}$ da. Zenbaki hori zatiketaren "urrats" deitzen zaio. Zatiketa-puntuen koordenatuak

$$a = x_0,\ x_1 = a + \Delta x,\ x_2 = a + 2\Delta x,\ \ldots,\ x_n = a + n\Delta x$$

dira. ξ_k puntutzat tarte bakoitzaren ezkerreko muturra hartuko dugu:

$$\xi_1 = a,\ \xi_2 = a + \Delta x,\ \xi_3 = a + 2\Delta x,\ \ldots,\ \xi_n = a + (n-1)\Delta x.$$

Era dezagun (1) batura integrala. $f(\xi_i) = k\xi_i$ denez gero,

$$s_n = k\xi_1\Delta x + k\xi_2\Delta x + \ldots + k\xi_n\Delta x = ka\Delta x + [k(a+\Delta x)]\Delta x + \ldots + \{k[a+(n-1)\Delta x]\}\Delta x =$$

$$= k\{a + (a+\Delta x) + (a+2\Delta x) + \ldots + [a+(n-1)\Delta x]\}\Delta x =$$

$$= k\{na + [\Delta x + 2\Delta x + \ldots + (n-1)\Delta x]\}\Delta x = k\{na + [1+2+\ldots+(n-1)]\Delta x\}\Delta x$$

dugu, non $\Delta x = \dfrac{b-a}{n}$ den.

$$1+2+\ldots+(n-1) = \frac{n(n-1)}{2}$$

dela kontutan hartuz (progresio aritmetiko baten batura)

$$s_n = k\left[na + \frac{n(n-1)}{2}\frac{b-a}{n}\right]\frac{b-a}{n} = k\left[a + \frac{n-1}{n}\frac{b-a}{2}\right](b-a)$$

daukagu.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n-1}{n} = 1$$

denez,

$$\lim_{n\to\infty} s_n = Q = k\left[a + \frac{b-a}{2}\right](b-a) = k\frac{b^2-a^2}{2}$$

da. Beraz,

$$\int_a^b kx\,dx = k\frac{b^2-a^2}{2}.$$

ABba azalera (211. irudia) oinarrizko geometriako prozedurak erabiliz ere kalkula daiteke erraz. Emaitza bera izango da.

2. Adibidea. Kalkulatu $\displaystyle\int_0^b x^2\,dx$.

Ebazpena. Emandako integrala $y=x^2$ parabolak eta $x=b$ eta $x=0$ zuzenek mugatutako trapezio lerromakurraren Q azaleraren berdina da (212. irudia).

Bana dezagun $[0,b]$ tartea n zati berdinetan

$$x_0=0,\ x_1=\Delta x,\ x_2=2\Delta x,\ldots,\ x_n=b=n\Delta x$$

puntuen bitartez, $\Delta x=\dfrac{b}{n}$ delarik.

ξ_i puntutzat, tarte bakoitzaren eskuineko muturra hartuko dugu.

Era dezagun

$$s_n=x_1^2\Delta x+x_2^2\Delta x+\ldots+x_n^2\Delta x=[(\Delta x)^2\Delta x+(2\Delta x)^2\Delta x+\ldots+(n\Delta x)^2\Delta x]=$$

$$=(\Delta x)^3[1^2+2^2+\ldots+n^2]$$

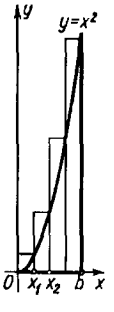
batura integrala. Dakigunez

$$1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Horregatik

$$s_n=\frac{b^3}{n^3}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}=\frac{b^3}{6}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right);$$

$$\lim_{n\to\infty}s_n=Q=\int_0^b x^2\,dx=\frac{b^3}{3}.$$



212. IRUDIA

3. Adibidea. Kalkulatu $\int_a^b m\,dx\,(m = \text{ktea.})$.

Ebazpena.

$$\int_a^b m\,dx = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} m\Delta x_i = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} m \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i =$$

$$= m \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i = m(b-a).$$

Hor, $\sum_{i=1}^{n} \Delta x_i$ $[a,b]$ tartea osatzen duten zuzenki partzialen luzeren batura da.

Zatiketa era edozein izanik ere, batura hori tartearen luzeraren berdina da: $b-a$.

4. Adibidea. Kalkulatu $\int_a^b e^x\,dx$.

Ebazpena. Bana dezagun berriro $[a,b]$ tartea n zati berdinetan:

$$x_0 = a,\ x_1 = a + \Delta x,\ \ldots,\ x_n = a + n\Delta x;\ \Delta x = \frac{b-a}{n}.$$

ξ_i puntutzat, ezkerreko muturra hartuko dugu. Era dezagun

$$s_n = e^a \Delta x + e^{a+\Delta x}\Delta x + \ldots + e^{a+(n-1)\Delta x}\Delta x = e^a(1 + e^{\Delta x} + e^{2\Delta x} + \ldots + e^{(n-1)\Delta x})\Delta x$$

batura integrala.

Parentesien artean dagoen adierazpena progresio geometrikoa da, $e^{\Delta x}$ arrazoiduna, eta bere lehen gaia 1 da; horregatik:

$$s_n = e^a \frac{e^{n\Delta x} - 1}{e^{\Delta x} - 1}\Delta x = e^a(e^{n\Delta x} - 1)\frac{\Delta x}{e^{\Delta x} - 1}.$$

Bestalde,

$$n\Delta x = b - a; \quad \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{e^{\Delta x} - 1} = 1$$

dugu (L'Hôpital-en erregelaren arabera $\lim\limits_{z \to 0} \dfrac{z}{e^z - 1} = \lim\limits_{z \to 0} \dfrac{1}{e^z} = 1$).

Horrela,

$$\lim_{n \to \infty} s_n = Q = e^a (e^{b-a} - 1) \cdot 1 = e^b - e^a,$$

hau da

$$\int_a^b e^x \, dx = e^b - e^a.$$

2. Oharra. Aztertutako adibideek erakusten dute integral mugatuen kalkulu zuzenak batura integralen limiteak bezala, oztopo handiak dituela. Integrakizunak oso sinpleak direneko kasuetan ere (kx, x^2, e^x) metodo horrek kalkulu astunak behar ditu. Funtzio konplikatuen integral mugatuen kalkulua zailagoa da. Normala da beraz integral mugatuak kalkulatzeko metodo eroso bat bilatzearen problema sortzea. Metodo horrek, Newton eta Leibniz-ek aurkitua, integrazio eta deribazioaren artean dagoen erlazio logikoa erabiltzen du.

Gai honetako hurrengo ataletan aipatu metodoa azalduko da.

§ 3. Integral mugatuaren oinarrizko propietateak

1. Propietatea. Faktore konstantea ere integral mugatuaren ikurretik kanpora atera daiteke: $A = \text{ktea.}$ bada,

$$\int_a^b Af(x) \, dx = A \int_a^b f(x) \, dx. \tag{1}$$

Frogapena.

$$\int_a^b Af(x) \, dx = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^n Af(\xi_i) \Delta x_i = A \cdot \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i = A \int_a^b f(x) \, dx.$$

2. Propietatea. Zenbait funtzioren arteko batura algebraikoaren integral mugatua batugaien integralen arteko batura algebraikoaren berdina da. Adibidez bi batugairen kasuan:

$$\int_a^b [f_1(x) + f_2(x)]\, dx = \int_a^b f_1(x)\, dx + \int_a^b f_2(x)\, dx. \tag{2}$$

Frogapena.

$$\int_a^b [f_1(x) + f_2(x)]\, dx = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} [f_1(\xi_i) + f_2(\xi_i)]\Delta x_i =$$

$$= \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \left[\sum_{i=1}^{n} f_1(\xi_i)\Delta x_i + \sum_{i=1}^{n} f_2(\xi_i)]\Delta x_i \right] =$$

$$= \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f_1(\xi_i)\Delta x_i + \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f_2(\xi_i)]\Delta x_i = \int_a^b f_1(x)\, dx + \int_a^b f_2(x)\, dx.$$

Frogapenak batugaien edozein kopurutarako balio du.
$a < b$ kasurako frogaturiko 1 eta 2 propietateek $a \geq b$ kasuan ere balio dute.
Hala ere, hurrengo propietateak $a < b$ denean soilik balio du.

3. Propietatea. $[a,b]$ tartean, $a < b$ delarik, $f(x)$ eta $\varphi(x)$ funtzioek $f(x) \leq \varphi(x)$ baldintza betetzen badute

$$\int_a^b f(x)\, dx \leq \int_a^b \varphi(x)\, dx. \tag{3}$$

Frogapena. Kontsidera dezagun ondoko diferentzia:

$$\int_a^b \varphi(x)\, dx - \int_a^b f(x)\, dx = \int_a^b [\varphi(x) - f(x)]\, dx = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} [\varphi(\xi_i) - f(\xi_i)]\Delta x_i.$$

Hor, $\varphi(\xi_i) - f(\xi_i) \geq 0$, $\Delta x_i \geq 0$ betetzen da. Hortaz, batuketaren batugai bakoitza ezezik batura osoa eta bere limitea ere ez-negatiboak dira, hau da,

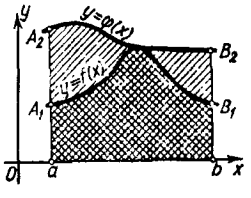
$$\int_a^b [\varphi(x) - f(x)]\, dx \geq 0$$

edo

$$\int_a^b \varphi(x)\, dx - \int_a^b f(x)\, dx \geq 0,$$

nondik (3) desberdintza ateratzen den.

$f(x) > 0$ eta $\varphi(x) > 0$ badira, 213. irudiak propietate horren adierazpen geometrikoa ematen du. $\varphi(x) \geq f(x)$ denez gero, aA_1B_1b trapezio lerromakurraren azalera ez da aA_2B_2b trapezio lerromakurrarena baino handiagoa.



213. IRUDIA

4. Propietatea. m eta M $f(x)$ funtzioaren balio minimoa eta maximoa badira $[a,b]$ tartean, hurrenez hurren, eta $a \leq b$ bada

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\, dx \leq M(b-a) \tag{4}$$

betetzen da.

Frogapena. Hipotesiz,

$$m \leq f(x) \leq M.$$

(3) propietatearen arabera,

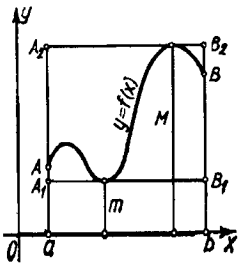
$$\int_a^b m\, dx \leq \int_a^b f(x)\, dx \leq \int_a^b M\, dx \tag{4'}$$

dugu. Baina

$$\int_a^b m\,dx = m(b-a), \qquad \int_a^b M\,dx = M(b-a),$$

(ikus XI. gaiko § 2ko 3. adibidea). Adierazpen horiek (4') desberdintzan ordezkatuz (4) desberdintza lortzen dugu.

$f(x) \geq 0$ denean, 4. propietatea 214. irudian adierazten da geometrikoki; $aABb$ trapezio lerromakurraren azalera aA_1B_1b eta aA_2B_2b laukizuzenen azaleren artean dago.



214. IRUDIA

5. Propietatea. (Batezbestekoaren teorema). $f(x)$ funtzioa jarraia bada $[a,b]$ tartean ξ puntu bat badago non

$$\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)f(\xi) \tag{5}$$

berdintza betetzen bait da.

Frogapena. Zehazteko, demagun $a < b$. m eta M, hurrenez hurren, $f(x)$ funtzioaren balio minimoa eta maximoa badira $[a,b]$ tartean, (4) formularen arabera

$$m \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \leq M$$

dugu. Hortik,

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx = \mu$$

non $m \leq \mu \leq M$ den. $f(x)$ jarraia denez gero funtzio horrek m eta M balioen arteko balio guztiak hartzen ditu. Hortaz ξ $(a \leq \xi \leq b)$ balio baterako $\mu = f(\xi)$ izango da, hau da,

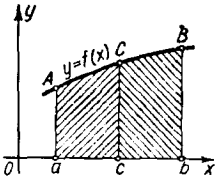
$$\int_a^b f(x)\,dx = f(\xi)(b-a).$$

6. Propietatea. Hautazko hiru zenbaki a,b,c emanik

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx \qquad (6)$$

berdintza betetzen da, hiru integral horiek existitzen direla suposatuz.

Frogapena. Lehendabizi demagun $a<c<b$, eta era dezagun $f(x)$ funtzioari $[a,b]$ tartean dagokion batura integrala.



215. IRUDIA

Batura integralaren limitea $[a,b]$ zuzenkia zatitan banatzeko eraren menpe ez dagoenez, zuzenki partzialetan zatituko dugu c zatiketa-puntua izan dadin. Gero $[a,b]$ tarteari dagokion $\sum_a^b$ batura partziala bi baturatan banatuko dugu: bata, $\sum_a^c$, $[a,c]$ tarteari dagokiona eta bestea, $\sum_c^b$, $[c,b]$ tarteari dagokiona.

Orduan:

$$\sum_a^b f(\xi_i)\Delta x_i = \sum_a^c f(\xi_i)\Delta x_i + \sum_c^b f(\xi_i)\Delta x_i.$$

Azken ekuazioan limiteak hartuz, $\max \Delta x_i \to 0$ denean, (6) berdintza lortuko dugu.

$a<b<c$ bada, frogatuaren arabera

$$\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx$$

edo

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx - \int_b^c f(x)\,dx$$

idatz dezakegu; baina, § 2ko (4) formularen arabera

$$\int_b^c f(x)\,dx = -\int_c^b f(x)\,dx$$

dugu. Beraz,

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

Antzeko eran frogatzen da 6. propietatea a, b eta c puntuen edozein beste ordenazio baterako.

215. irudiak adierazten du geometrikoki 6. propietatea $f(x) > 0$ eta $a < c < b$ kasurako: $aABb$ trapezioaren azalera $aACc$ eta $cCBb$ trapezioen azaleren baturaren berdina da.

§ 4. Integral mugatuaren kalkulua. Newton-Leibniz-en formula

Jo dezagun

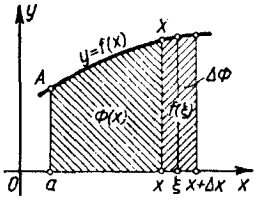
$$\int_a^b f(x)\,dx$$

integral mugatuan a behe-muga finkoa dela, goikoa, b, aldatzen den bitartean. Nabaria da integralaren balioa ere aldatuko dela, hau da, integrala bere goi-mugaren funtzioa izango da.

Ohizko idazkerak erabiltzeko, izenda dezagun x goi-muga eta nahasketa ekiditeko integrazio-aldagaia t izendatuko dugu (integralaren balioa ez dago integrazio-aldagaiaren idazkeraren menpe). Horrela $\int_a^x f(t)\,dt$ integrala lortzen dugu. a konstante izanik, integrala x bere goi-mugaren funtzioa izango da. Izenda dezagun $\Phi(x)$ funtzio hori:

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t)\,dt. \qquad (1)$$

$f(t)$ funtzio ez-negatiboa bada, $\Phi(x)$-ren balioa $aAXx$ trapezio lerromakurraren azaleraren berdina izango da (216. irudia). Jakina, azalera hori x-ren funtzioan aldatzen da. Bila dezagun $\Phi(x)$ funtzioaren x-rekiko deribatua, hau da, (1) integral mugatuaren bere goi-mugarekiko deribatua.



216. IRUDIA

1. Teorema. $f(x)$ funtzio jarraia bada eta $\Phi(x) = \int_a^x f(t)\,dt$,

$$\Phi'(x) = f(x)$$

berdintza betetzen da.

Beste hitzetan, integral mugatuaren bere goi-mugarekiko deribatua integrakizuna bera da, zeinean integrazio-aldagaia goi-mugaren balioaz ordezkatuta bait dago (integrakizuneko funtzioa jarraia deneko baldintzapean).

Frogapena. Eman diezaiogun x argumentuari Δx hautazko gehikuntza positibo edo negatiboa; integral mugatuaren 6. propietatea aplikatuz gero

$$\Phi(x+\Delta x) = \int_a^{x+\Delta x} f(t)\,dt = \int_a^x f(t)\,dt + \int_x^{x+\Delta x} f(t)\,dt$$

lortuko dugu.

$\Phi(x)$ funtzioaren gehikuntza

$$\Delta\Phi = \Phi(x+\Delta x) - \Phi(x) = \int_a^x f(t)\,dt + \int_x^{x+\Delta x} f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt$$

da, hau da,

$$\Delta\Phi = \int_x^{x+\Delta x} f(t)\,dt.$$

Aplika diezaiogun integral horri batezbestekoaren teorema (integral mugatuaren 5. propietatea).

$$\Delta\Phi = f(\xi)(x+\Delta x - x) = f(\xi)\Delta x,$$

non ξ x eta $x+\Delta x$ balioen artean bait dago.

Bila dezagun funtzioaren eta aldagaiaren gehikuntzaren arteko arrazoia:

$$\frac{\Delta\Phi}{\Delta x} = \frac{f(\xi)\Delta x}{\Delta x} = f(\xi).$$

Beraz,

$$\Phi'(x) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta\Phi}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} f(\xi).$$

Baina, $\Delta x \to 0$ denean $\xi \to x$ denez,

$$\lim_{\Delta x\to 0} f(\xi) = \lim_{\xi\to x} f(\xi)$$

eta, $f(x)$ funtzioa jarraia denez,

$$\lim_{\xi\to x} f(\xi) = f(x).$$

Horrela, $\Phi'(x) = f(x)$. Teorema frogaturik dago. Geometrikoki era sinplean adieraz daiteke (216. irudia): $\Delta\Phi = f(\xi')\Delta x$ gehikuntza Δx oinarriko trapezio

lerromakurraren azaleraren berdina da, eta $\Phi'(x) = f(x)$ deribatua xX zuzenkiaren luzeraren berdina da.

Oharra. Frogatutako teorematik ondorioztatzen da, bereziki, funtzio jarrai orok jatorrizko funtzioa onartzen duela. Izan ere, $f(x)$ funtzioa jarraia bada $[a,b]$ tartean, XI. gaiko § 2an aipatutakoaren arabera $\int_a^x f(t)\,dt$ integral mugatua existitzen da, hau da

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

funtzioa existitzen da, zeina, frogatuaren arabera, $f(x)$ funtzioaren jatorrizko funtzio bat den.

2. Teorema. $F(x)$ funtzioa $f(x)$ funtzio jarraiaren jatorrizko funtzio bat bada,

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) \tag{2}$$

betetzen da.

Formula hori *Newton-Leibniz-en formula* deitzen da[2].

Frogapena. Izan bedi $F(x)$ $f(x)$-ren jatorrizko funtzio bat. (1) teoremaren arabera, $\int_a^x f(t)\,dt$ funtzioa ere $f(x)$-ren jatorrizkoa da. Baina funtzio baten edozein bi jatorrizkoren arteko diferentzia C^* konstantea da.

Hortaz,

$$\int_a^x f(t)\,dt = F(x) + C^* \tag{3}$$

---

2) Desagun (2) formularen izendapena (Barrow-en formula ere deitua) konbentzionala dela, ez Newton-ek ez Leibniz-ek ez bait zuten zehazki formula hori eman. Baina garrantzitsuena da beraiek lehenengo aldiz integrazio eta deribazioaren arteko erlazioa eman zutela, integral mugatuen kalkulu-erregela bat enuntziatzen utzi zuena.

idaz daiteke.

C^* konstantearen aukera egokiaz, berdintza horrek x-ren balio guztietarako balio du, hots, identitatea da. C^* konstantea determinatzeko $x=a$ egingo dugu, orduan,

$$\int_a^a f(t)\,dt = F(a) + C^*,$$

hau da,

$$0 = F(a) + C^*,$$

nondik

$$C^* = -F(a).$$

Ondorioz,

$$\int_a^x f(t)\,dt = F(x) - F(a).$$

$x=b$ eginez, Newton-Leibniz-en formula lortuko dugu:

$$\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a)$$

edo, x integrazio-aldagaia itzuliz

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

Ohar gaitezen $F(b) - F(a)$ kendura ez dagoela F jatorrizko funtzioaren aukeraren menpe, jatorrizko guztien arteko diferentzia konstantea bait da, kenduran desagertzen dena.

$$F(b) - F(a) = F(x)\Big|_a^b$$

idazkera sartzen badugu[3], (2) formula

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

eran idatz daiteke.

Newton-Leibniz-en formulak integral mugatuen kalkulurako oso metodo praktikoa ematen du, integrakizunaren jatorrizko funtzio bat ezagutzen denean. Formula horren aurkikuntzak hain zuzen integral mugatuari gaur egun matematiketan duen garrantzia eman zion. Aintzinatean (Arkimedes) ere integral mugatuaren kalkuluaren antzeko prozesua, batura integralaren limite bezala, ezaguna bazen ere, metodo haren aplikazioak kasu sinpleenetan soilik aplikatzen zen, batura integralaren limitea zuzenean kalkula zitekeenean hain zuzen.

Newton-Leibniz-en formulak integral mugatuaren aplikazio-eremua nabarmenki zabaldu zuen, matematikariek problema partikular anitz ebazten uzten zuen metodo orokor bat lortu bait zuten. Formula horrek integral mugatuaren aplikazio-eremua teknika, mekanika, astronomia, eta abarretara ere zabaldu zuen.

1. Adibidea.

$$\int_a^b x\,dx = \frac{x^2}{2}\Bigg|_a^b = \frac{b^2 - a^2}{2}.$$

2. Adibidea.

$$\int_a^b x^2\,dx = \frac{x^3}{3}\Bigg|_a^b = \frac{b^3 - a^3}{3}.$$

3. Adibidea.

$$\int_a^b x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}\Bigg|_a^b = \frac{b^{n+1} - a^{n+1}}{n+1} \quad (n \neq -1).$$

---

3) Matematika-testuetan idazteko bi era baliokide erabiltzen dira:

$$F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b$$

edo

$$F(b) - F(a) = F(x)\Big|_a^b.$$

Aurrerantzean, bi idazkerak erabiliko ditugu.

4. Adibidea.

$$\int_a^b e^x\,dx = e^x\Big|_a^b = e^b - e^a.$$

5. Adibidea.

$$\int_0^{2\pi} \sin x\,dx = -\cos x\Big|_0^{2\pi} = -(\cos 2\pi - \cos 0) = 0.$$

6. Adibidea.

$$\int_0^1 \frac{x\,dx}{\sqrt{1+x^2}} = \sqrt{1+x^2}\Big|_0^1 = \sqrt{2} - 1.$$

§ 5. Aldagai-aldaketa integral mugatuan

Teorema. Suposa dezagun

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

integrala ematen dela, non $f(x)$ funtzioa jarraia den $[a,b]$ tartean. Sar dezagun t aldagai berri bat

$$x = \varphi(t)$$

formularen bidez.

Baldin

1) $\varphi(\alpha) = a$ eta $\varphi(\beta) = b$,

2) $\varphi(t)$ eta $\varphi'(t)$ jarraiak badira $[\alpha,\beta]$ tartean

3) $f[\varphi(t)]$ definiturik eta jarraia bada $[\alpha,\beta]$ tartean,

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)\,dt. \qquad (1)$$

Frogapena. $F(x)$ $f(x)$-ren jatorrizko funtzio bat bada

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C, \tag{2}$$

$$\int f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)\,dt = F[\varphi(t)] + C \tag{3}$$

berdintzak idatz ditzakegu.

Azken berdintzaren baliagarritasuna bi atalen t-rekiko deribazioaren bidez egiaztatzen da (berdintza hori X. gaiko § 4ko (2) formulatik ere ondorioztatzen da). (2)-tik

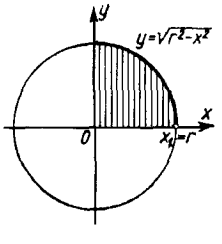
$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_b^a = F(b) - F(a)$$

daukagu. (3) berdintzatik

$$\int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)\,dt = F[\varphi(t)]\Big|_\alpha^\beta = F[\varphi(\beta)] - F[\varphi(\alpha)] = F(b) - F(a).$$

Azkeneko adierazpenen eskuineko atalak berdinak dira, hortaz ezkerrekoak ere.

Oharra. Aipa dezagun integral mugatua (1) formularen aplikazioz kalkulatzean ez dugula jatorrizko aldagaia itzultzen. (1) berdintzaren bigarren integral mugatua kalkulatzen badugu, zenbaki bat lortuko dugu; lehenengo integrala zenbaki horren berdina da, hots, (1) berdintzaren bi integralen zenbakizko balioak berdinak dira.



217. IRUDIA

Adibidea. Kalkulatu

$$\int_0^r \sqrt{r^2 - x^2}\, dx$$

integrala.

Ebazpena. Egin dezagun

$$x = r \sin t, \quad dx = r \cos t\, dt$$

aldagai-aldaketa.

Determina ditzagun integrazio-muga berriak:

$$x = 0 \quad t = 0 \quad \text{denean,}$$

$$x = r \quad t = \frac{\pi}{2} \quad \text{denean.}$$

Hortaz,

$$\int_0^r \sqrt{r^2 - x^2}\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{r^2 - r^2 \sin^2 t}\; r \cos t\, dt = r^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \sin^2 t} \cos t\, dt =$$

$$= r^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\, dt = r^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2t \right) dt = r^2 \left[\frac{t}{2} + \frac{\sin 2t}{4} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi r^2}{4}.$$

Ikuspuntu geometrikotik kalkulatutako integralak $x^2 + y^2 = r^2$ zirkunferentziak mugatutako zirkuluaren laurdenaren azalera adierazten du (217. irudia).

§ 6. Zatikako integrazioa

Demagun u eta v x-ren funtzio deribagarriak direla. Orduan,

$$(uv)' = u'v + uv'.$$

Berdintza horren bi atalak integratuz, a eta b mugen artean,

$$\int_a^b (uv)'\,dx = \int_a^b u'v\,dx + \int_a^b uv'\,dx \qquad (1)$$

lortzen dugu.

$\int (uv)'\,dx = uv + C$ denez gero $\int_a^b (uv)'\,dx = uv|_a^b$ da; horregatik (1) berdintza

$$uv|_a^b = \int_a^b v\,du + \int_a^b u\,dv$$

eran idatz daiteke, edo azkenik,

$$\int_a^b u\,dv = uv|_a^b - \int_a^b v\,du.$$

Adibidea. Kalkulatu $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx$ integrala.

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-1} x \sin x\,dx = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{\sin^{n-1} x}_{u}\ \underbrace{d\cos x}_{dv} =$$

$$= -\sin^{n-1} x \cos x|_0^{\frac{\pi}{2}} + (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x \cos x \cos x\,dx =$$

$$= (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x \cos^2 x\,dx = (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x\,(1-\sin^2 x)\,dx =$$

$$= (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x\,dx - (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx.$$

Aukeratutako idazkerekin, azkeneko berdintza

$$I_n = (n-1)I_{n-2} - (n-1)I_n$$

eran idatz daiteke, nondik

$$I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}. \qquad (2)$$

Prozedura bera erabiliz

$$I_{n-2} = \frac{n-3}{n-2} I_{n-4}$$

aurkitzen dugu, eta, beraz,

$$I_n = \frac{n-1}{n} \frac{n-3}{n-2} I_{n-4}.$$

Era berean segituz, I_0 eta I_1 lortuko dugu, n zenbakia bikoitia ala bakoitia den arabera.

Azter ditzagun bi kasuak:

1) n bikoitia bada, $n = 2m$:

$$I_{2m} = \frac{2m-1}{2m} \cdot \frac{2m-3}{2m-2} \cdots \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} I_0;$$

2) n bakoitia bada, $n = 2m+1$:

$$I_{2m+1} = \frac{2m}{2m+1} \cdot \frac{2m-2}{2m-1} \cdots \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3} I_1,$$

baina,

$$I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^0 x \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx = \frac{\pi}{2},$$

$$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \, dx = 1$$

direnez

$$I_{2m} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2m} x\, dx = \frac{2m-1}{2m} \cdot \frac{2m-3}{2m-2} \cdots \frac{5}{6} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2},$$

$$I_{2m+1} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2m+1} x\, dx = \frac{2m}{2m+1} \cdot \frac{2m-2}{2m-1} \cdots \frac{6}{7} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3}$$

izango dira.

Formula horietatik Wallis-en formula ateratzen da, zeinak $\frac{\pi}{2}$ zenbakia biderkadura infinituaren forman adierazten bait du.

Izan ere, azken berdintzetatik, atalez atal zatituz,

$$\frac{\pi}{2} = \left(\frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots 2m}{3 \cdot 5 \ldots (2m-1)} \right)^2 \frac{1}{2m+1} \frac{I_{2m}}{I_{2m+1}} \tag{3}$$

aurkituko dugu. Froga dezagun orain

$$\lim_{m \to \infty} \frac{I_{2m}}{I_{2m+1}} = 1.$$

$\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ tarteko edozein x-tarako betetzen dira

$$\sin^{2m-1} x > \sin^{2m} x > \sin^{2m+1} x$$

desberdintzak.

0tik $\frac{\pi}{2}$ra integratuz

$$I_{2m-1} \geq I_{2m} \geq I_{2m+1}$$

lortzen dugu, nondik

$$\frac{I_{2m-1}}{I_{2m+1}} \geq \frac{I_{2m}}{I_{2m+1}} \geq 1. \tag{4}$$

(2) berdintzatik

$$\frac{I_{2m-1}}{I_{2m+1}} = \frac{2m+1}{2m}$$

ateratzen da. Hortaz,

$$\lim_{m\to\infty} \frac{I_{2m-1}}{I_{2m+1}} = \lim_{m\to\infty} \frac{2m+1}{2m} = 1.$$

(4) desberdintzatik

$$\lim_{m\to\infty} \frac{I_{2m}}{I_{2m+1}} = 1$$

erdiesten dugu.

(3) formulan limiteak hartuz, Wallis-en formula lortzen dugu:

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{m\to\infty} \left[\left(\frac{2\cdot 4\cdot 6\ldots 2m}{3\cdot 5\ldots(2m-1)} \right)^2 \frac{1}{2m+1} \right].$$

Formula hori

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{m\to\infty} \left(\frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdots\frac{2m-2}{2m-1}\cdot\frac{2m}{2m-1}\cdot\frac{2m}{2m+1} \right)$$

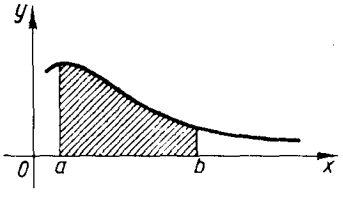
eran ere idatz daiteke.

§ 7. Integral inpropioak

1. Muga infinituko integralak. Izan bedi $f(x)$ funtzio definitua eta jarraia $a \le x < +\infty$ betetzen duten x-ren balio guztietarako. Kontsidera dezagun

$$I(b) = \int_a^b f(x)\, dx$$

integrala. Integral horrek zentzurik dauka b guztietarako, $b > a$ izanik. b aldatzen denean integralaren balioa ere aldatuko da; horregatik integrala b-ren funtzio jarraia da (ikus § 4). Azter dezagun nola aldatzen den integrala $b \to +\infty$ denean (218. irudia).



218. IRUDIA

Definizioa.

$$\lim_{b \to +\infty} \int_a^b f(x)\, dx$$

limitea existitzen bada $f(x)$ funtzioaren $[a,+\infty)$ tarteko *integral inpropio* deitzen zaio eta

$$\int_a^{+\infty} f(x)\, dx$$

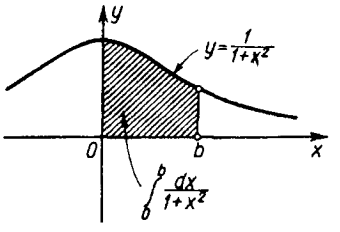
idazten da.

Beraz, definizioaren arabera,

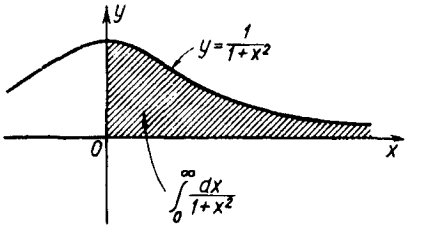
$$\int_a^{+\infty} f(x)\, dx = \lim_{b \to +\infty} \int_a^b f(x)\, dx$$

daukagu. Kasu horretan $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ integral inpropioa *existitzen dela* edo *konbergentea* dela esan ohi da. $b \to +\infty$ denean $\int_a^b f(x)\,dx$ integralak ez badu limite finiturik, $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ integrala *ez dela existitzen* edo *dibergentea* dela esan ohi da.

$f(x) \geq 0$ denean, integral inpropioaren esanahi geometrikoa definitzea erraza da: $\int_a^b f(x)\,dx$ integralak $y = f(x)$ kurbak, abzisa-ardatzak eta $x = a$ eta $x = b$ ordenatuek mugatutako eremuaren azalera adierazten badu, bidezkoa da kontsideratzea $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ integral inpropioak $y = f(x)$, $x = a$ kurben eta abzisa-ardatzaren arteko eremu infinituaren azalera adierazten duela.



219. IRUDIA



220. IRUDIA

Antzeko eran, beste tarte infinituei dagozkien integral inpropioak determinatzen dira:

$$\int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx = \lim_{\alpha\to-\infty}\int_{\alpha}^{a} f(x)\,dx,$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)\,dx + \int_{c}^{+\infty} f(x)\,dx.$$

Azkeneko berdintza honela ulertu behar da: bigarren ataleko integral inpropio bakoitza existitzen bada, lehenengo ataleko integrala, definizioaren arabera, existituko (konbergentea) da.

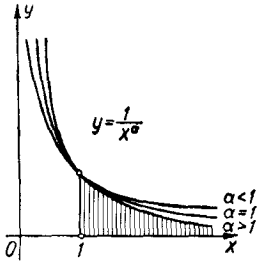
1. Adibidea. Kalkulatu $\int_{0}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}$ integrala (ikus 219. eta 220. irudiak).

Ebazpena. Integral inpropioaren definizioaren arabera

$$\int_{0}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2} = \lim_{b\to+\infty}\int_{0}^{b}\frac{dx}{1+x^2} = \lim_{b\to+\infty}\arctan x\Big|_0^b = \lim_{b\to+\infty}\arctan b = \frac{\pi}{2}$$

dugu.

Aztertutako integralak trapezio lerromakur infinitu baten azalera adierazten du. Azalera marratuta dago 220. irudian.



221. IRUDIA

2. Adibidea. Bilatu α-ren balioak (221. irudia), zeinetarako

$$\int_{1}^{+\infty}\frac{dx}{x^\alpha}$$

integrala konbergentea edo dibergentea bait da.

Ebazpena. $(\alpha \neq 1)$

$$\int_1^b \frac{dx}{x^\alpha} = \frac{1}{1-\alpha} x^{1-\alpha}\Big|_1^b = \frac{1}{1-\alpha}[b^{1-\alpha} - 1]$$

denez gero

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{b\to+\infty} \frac{1}{1-\alpha}(b^{1-\alpha} - 1)$$

daukagu. Hortaz,

$\alpha > 1$ bada, $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} = \frac{1}{\alpha - 1}$ dugu, hau da, integrala konbergentea da;

$\alpha < 1$ bada, $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} = \infty$ dugu, hots, integrala dibergentea da.

$\alpha = 1$ bada, $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} = \ln x\Big|_1^{+\infty} = \infty$ dugu, hau da, integrala dibergentea da.

3. Adibidea. Kalkulatu $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$.

Ebazpena.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{1+x^2} + \int_{0}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}.$$

Bigarren integralak $\dfrac{\pi}{2}$ balio du (ikus 1. adibidea). Kalkula dezagun lehenengo integrala:

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{\alpha\to-\infty} \int_{\alpha}^{0} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{\alpha\to-\infty} \arctan x\Big|_{\alpha}^{0} = \lim_{\alpha\to-\infty} (\arctan 0 - \arctan \alpha) = \frac{\pi}{2}.$$

Ondorioz

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi.$$

Kasu askotan nahikoa da emandako integrala konbergentea edo dibergentea den erabakitzea eta bere balioa mugatzea. Halako kasuetan hurrengo bi teoremak, erabil daitezke; frogapenik gabe eta beren aplikazioen adibideekin aipatuko ditugu.

1. Teorema. x $(x \geq a)$ guztietarako

$$0 \leq f(x) \leq \varphi(x)$$

desberdintza betetzen bada, $\int_a^{+\infty} \varphi(x)\, dx$ konbergentea izanik, $\int_a^{+\infty} f(x)\, dx$ ere konbergentea izango da eta

$$\int_a^{+\infty} f(x)\, dx \leq \int_a^{+\infty} \varphi(x)\, dx.$$

4. Adibidea. Aztertu

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2(1+e^x)}$$

integralaren konbergentzia.

Ebazpena. Ohar gaitezen $1 \leq x$ denean

$$\frac{1}{x^2(1+e^x)} < \frac{1}{x^2}$$

dela. Beraz,

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\, dx = -\frac{1}{x}\Big|_1^{+\infty} = 1$$

denez gero

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2(1+e^x)}$$

konbergentea da eta bere balioa 1 baino txikiagoa da.

2. Teorema. x $(x \geq a)$ guztietarako $0 \leq \varphi(x) \leq f(x)$ desberdintza betetzen bada, $\int_a^{+\infty} \varphi(x)\, dx$ dibergentea izanik, $\int_a^{+\infty} f(x)\, dx$ ere dibergentea izango da.

5. Adibidea. Aztertu

$$\int_1^{+\infty} \frac{x+1}{\sqrt{x^3}}\, dx$$

integralaren konbergentzia.

Kontura gaitezen

$$\frac{x+1}{\sqrt{x^3}} > \frac{x}{\sqrt{x^3}} = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

dela. Baina

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{b \to +\infty} 2\sqrt{x}\Big|_1^b = +\infty.$$

Hortaz, emandako integrala dibergentea da.

Azkeneko bi teoremetan funtzio ez-negatiboen integral inpropioak kontsideratu ditugu. Tarte infinituan zeinuz aldatzen den $f(x)$ funtzioaren kasuan, ondoko teorema dugu:

3. Teorema. $\int_a^{+\infty} |f(x)|\, dx$ integrala konbergentea bada, $\int_a^{+\infty} f(x)\, dx$ ere konbergentea da. Kasu horretan azken integrala *absolutuki konbergente* dela esaten da.

6. Adibidea. Aztertu

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^3}\, dx$$

integralaren konbergentzia.

Ebazpena. Hor integrakizuna zeinu aldakorreko funtzioa da. Ohar gaitezen

$$\left|\frac{\sin x}{x^3}\right| \le \left|\frac{1}{x^3}\right|, \quad \text{eta} \quad \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^3} = -\frac{1}{2x^2}\Bigg|_1^{+\infty} = \frac{1}{2}$$

direla. Beraz, $\int_1^{+\infty} \left|\frac{\sin x}{x^3}\right| dx$ integrala konbergentea da, nondik emandako integrala ere konbergentea dela ondorioztatzen bait da.

2. Funtzio eten baten integrala. Izan bedi $f(x)$ funtzio definitua eta jarraia $a \le x < c$ denean, baina $x = c$ puntuan etena dena. Kasu horretan ezin da $\int_a^c f(x)\, dx$ integrala batura integralen limite bezala definitu, $f(x)$ funtzioa ez bait da jarraia $[a,c]$ tartean eta limite hori ez existitzea gerta bait daiteke.

$f(x)$ funtzioaren $\int_a^c f(x)\, dx$ integrala, c puntuan etena, ondoko eran determinatzen da:

$$\int_a^c f(x)\, dx = \lim_{b \to c-0} \int_a^b f(x)\, dx.$$

Integral hori integral inpropio *konbergente* deitzen da berdintzaren bigarren ataleko limitea existitzen bada, eta *dibergente* deitzen da aurkako kasuan.

$f(x)$ funtzioa etena bada $[a,c]$ tarteko ezkerreko muturrean (hots, $x = a$ denean), definizioaren arabera:

$$\int_a^c f(x)\,dx = \lim_{b\to a+0}\int_b^c f(x)\,dx.$$

$f(x)$ funtzioa etena bada $[a,c]$ tarteko $x = x_0$ puntu batean,

$$\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^{x_0} f(x)\,dx + \int_{x_0}^c f(x)\,dx$$

dugu, bigarren ataleko integral inpropioak existituz gero.

7. Adibidea. Kalkulatu

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}}.$$

Ebazpena.

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = \lim_{b\to 1-0}\int_0^b \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = -\lim_{b\to 1-0} 2\sqrt{1-x}\Big|_0^b = -\lim_{b\to 1-0} 2\left[\sqrt{1-b}-1\right] = 2.$$

8. Adibidea. Kalkulatu $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2}$ integrala.

Ebazpena. Integrazio-tartean integrakizuna etena den $x = 0$ puntua dagoenez, integrala bi gairen batura bezala adierazi behar da:

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2} = \lim_{\varepsilon_1\to -0}\int_{-1}^{\varepsilon_1} \frac{dx}{x^2} + \lim_{\varepsilon_2\to +0}\int_{\varepsilon_2}^1 \frac{dx}{x^2}.$$

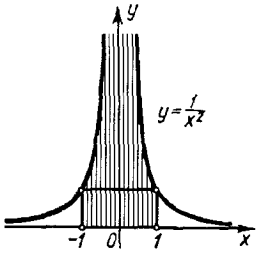
Kalkula ditzagun bereizturik limiteak:

$$\lim_{\varepsilon_1\to -0}\int_{-1}^{\varepsilon_1} \frac{dx}{x^2} = -\lim_{\varepsilon_1\to -0}\frac{1}{x}\Big|_{-1}^{\varepsilon_1} = -\lim_{\varepsilon_1\to -0}\left(\frac{1}{\varepsilon_1}-\frac{1}{-1}\right) = \infty.$$

Hortaz, $[-1,0]$ tartean integrala dibergentea da.

$$\lim_{\varepsilon_2 \to +0} \int_{\varepsilon_2}^{1} \frac{dx}{x^2} = -\lim_{\varepsilon_2 \to +0} \left(1 - \frac{1}{\varepsilon_2}\right) = \infty.$$

[0,1] tartean ere integrala dibergentea da.



222. IRUDIA

Horrela, integrala dibergentea da [-1,1] tartean. Nabari dezagun emandako integrala $x = 0$ puntuan integrakizunak duen etena kontutan hartu gabe kalkulatu izan bagenu, emaitza okerra lortuko genukeela. Izan ere,

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x}\Big|_{-1}^{1} = -\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{-1}\right) = -2,$$

ezinezkoa dena (222. irudia)

Oharra. $f(x)$ funtzioak, $[a,b]$ tartean definitua, etengune-kopuru finitua badu tarte horretan, $a_1, a_2, \ldots, a_n$, $f(x)$ funtzioaren $[a,b]$ tarteko integrala ondoko eran definitzen da:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^{a_1} f(x)\,dx + \int_{a_1}^{a_2} f(x)\,dx + \ldots + \int_{a_n}^{b} f(x)\,dx,$$

bigarren ataleko integral inpropio guztiak konbergenteak badira. Integral bat, gutxienez, dibergentea bada

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

ere dibergente izango da.

Funtzio etenen integral inpropioen konbergentzia determinatzeko eta beren balioak kalkulatzeko, muga infinituko integralen teoremen antzeko teoremak aplika daitezke maiz.

1'. Teorema. $f(x)$ eta $\varphi(x)$ funtzioak etenak badira $[a,c]$ tarteko c puntuan, tarte horretako puntu guztietan

$$\varphi(x) \geq f(x) \geq 0$$

desberdintzak betetzen direlarik, eta $\int_a^c \varphi(x)\,dx$ konbergentea bada $\int_a^c f(x)\,dx$ ere konbergentea da.

2'. Teorema. $f(x)$ eta $\varphi(x)$ funtzioak etenak badira $[a,c]$ tarteko c puntuan, tarte horretako puntu guztietan $f(x) \geq \varphi(x) \geq 0$ desberdintzak betetzen badira eta $\int_a^c \varphi(x)\,dx$ dibergentea bada $\int_a^c f(x)\,dx$ ere dibergentea izango da.

3'. Teorema. $f(x)$, $[a,c]$ tartean zeinu aldakorreko funtzioa bada eta c puntuan soilik etena, funtzio horren balio absolutuaren $\int_a^c |f(x)|\,dx$ integral inpropioa konbergentea bada $\int_a^c f(x)\,dx$ integrala ere konbergentea izango da.

Sarritan, konparatzeko funtzio bezala $\dfrac{1}{(c-x)^\alpha}$ hartzen da, integral ikurraren pean dauden funtzioekin konparatzeko erosoa bait da. Erraz egiaztatzen da $\int_a^c \dfrac{1}{(c-x)^\alpha}\,dx$ konbergentea dela $\alpha < 1$ denean eta bidergentea dela $\alpha \geq 1$ denean.

Gauza bera gertatzen da $\int_a^c \dfrac{1}{(x-a)^\alpha}\,dx$ integralarekin.

9. Adibidea. $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}+4x^3}\,dx$ integrala konbergente al da?

Ebazpena. Integrakizuna etena da $[0,1]$ tarteko ezkerreko muturrean. $\frac{1}{\sqrt{x}}$ funtzioarekin konparatuz,

$$\frac{1}{\sqrt{x}+4x^3} < \frac{1}{\sqrt{x}}$$

daukagu.

$\int_0^1 \frac{dx}{x^{1/2}}$ integral inpropioa existitzen da. Ondorioz, $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}+4x^3}\,dx$, hau da, emandako funtzioaren integral inpropioa, txikiagoa dena, ere existitzen da.

§ 8. Integral mugatuen kalkulu hurbildua

X. gaiaren amaieran esan dugu funtzio jarrai guztiek ez dutela funtzio elementalen bidez adierazgarri diren jatorrizkorik. Kasu horietan, integral mugatuen kalkulua zaila da Newton-Leibiniz-en formularen aplikazioaren bidez; hori dela eta, beste metodo batzuk erabiltzen dira integral mugatuen kalkulu hurbildua lortzeko.

Azal dezagun integrazio hurbilduaren zenbait metodo, integral mugatuaren noziotik, batura baten limite bezala, abiatuz.

I. Laukizuzenen formula. Demagun $y = f(x)$ $[a,b]$ tartean funtzio jarraia dela.

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

integral mugatua kalkulatu nahi da.

Bana dezagun $[a,b]$ tartea $a = x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n = b$ puntuen bidez Δx luzerako n zati berdinetan:

$$\Delta x = \frac{b-a}{n}.$$

Bitez $y_0, y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}, y_n$ $f(x)$ funtzioaren $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$ puntuetako balioak, hau da,

$$y_0 = f(x_0);\ \ y_1 = f(x_1);\ \ \ldots;\ \ y_n = f(x_n).$$

Era ditzagun

$$y_0\Delta x + y_1\Delta x + \ldots + y_{n-1}\Delta x,$$
$$y_1\Delta x + y_2\Delta x + \ldots + y_n\Delta x$$

baturak.

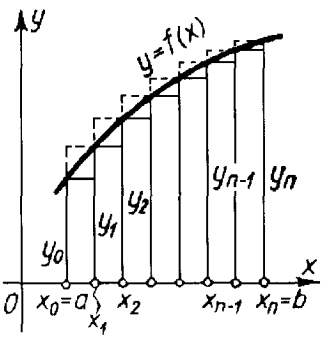
Batura horietako bakoitza $f(x)$ funtzioaren batura integrala da $[a,b]$ tartean, eta horregatik, integrala gutxi gorabehera adierazten du

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{n}(y_0 + y_1 + y_2 + \ldots + y_{n-1}), \tag{1}$$

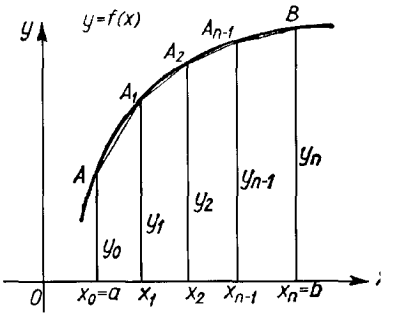
$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{n}(y_1 + y_2 + \ldots + y_n). \tag{1'}$$

Horiek dira *laukizuzenen formulak*. 223. iruditik ateratzen da $f(x)$ funtzioa positiboa eta gorakorra bada (1) formulak irudi mailakatu baten azalera adierazten duela, "barneko" laukizuzenez osatua, eta (1') formulak "kanpoko" laukizuzenez osatutako irudi mailakatuaren azalera.

n zenbakia zenbat eta handiagoa izan (hots, $\Delta x = \dfrac{b-a}{n}$ zatidura zenbat eta txikiagoa izan) integralaren laukizuzenen formularen bidezko kalkuluan egindako errorea gero eta txikiagoa izango da.



223. IRUDIA



224. IRUDIA

II. Trapezioen formula. Normala da integral mugatuaren balio hurbilagoa itxarotea, $y = f(x)$ emandako funtzioaren kurba laukizuzenen formularako erabili dugun lerro mailakatuaz ordezkatu beharrean lerro hautsi inskribatuaz ordezkatzen badugu (224. irudia).

Kasu horretan, $aABb$ trapezio lerromakurraren azaleraren ordez, goitik AA_1, A_1A_2, ..., $A_{n-1}B$ korden bidez mugatutako trapezio angeluzuzenen azaleren batura lortuko dugu. Trapezio horien azalerak $\frac{y_0 + y_1}{2}\Delta x$, $\frac{y_1 + y_2}{2}\Delta x$, eta abar dira; hortaz

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \left(\frac{y_0 + y_1}{2}\Delta x + \frac{y_1 + y_2}{2}\Delta x + \ldots + \frac{y_{n-1} + y_n}{2}\Delta x\right),$$

edo

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{n}\left(\frac{y_0 + y_n}{2} + y_1 + y_2 + \ldots + y_{n-1}\right). \qquad (2)$$

Hori da *trapezioen formula.*

n zenbakia edonola aukeratzen da. n zenbakia zenbat eta handiagoa izan eta, beraz, $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ zenbat eta txikiagoa izan, (2) berdintza hurbilduaren bigarren ataleko baturak gero eta zehaztasun handiagoz adieraziko du integralaren balioa.

III. Parabolen formula. (Simpson-en formula). Bana dezagun $[a,b]$ tartea zati berdinen kopuru bikoitian, $n = 2m$. $[x_0, x_1]$, $[x_1, x_2]$ lehenengo bi tarteei dagozkien eta emandako $y = f(x)$ kurbak goitik mugatzen duen trapezio lerromakurraren azalera,

$$M(x_0, y_0);\ M_1(x_1, y_1);\ M_2(x_2, y_2)$$

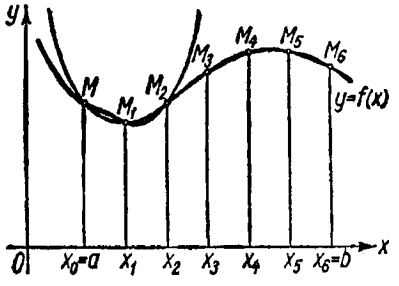
hiru puntuetatik pasatzen den 2. mailako parabolak, bere ardatza Oy ardatzarekiko paralelo duenak (225. irudia), mugatutako beste trapezio lerromakur baten azaleraz ordezkatzen da. Horrelako trapezio lerromakurra trapezio parabolikoa da.

Ardatza Oy-rekiko paralelo duen parabola baten ekuazioa

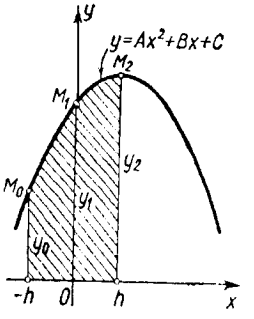
$$y = Ax^2 + Bx + C$$

da.

A, B eta C koefizienteak unibokoki determinatzen dira, parabola emandako hiru puntuetatik pasatzeko baldintzatik. Gainontzeko tarteetarako ere antzeko parabolak eraikitzen dira, trapezio parabolikoen azaleren baturak integralaren balio hurbildua ematen du. Kalkula dezagun lehendabizi trapezio paraboliko baten azalera.



225. IRUDIA



226. IRUDIA

Lema. Trapezio lerromakur bat

$$y = Ax^2 + Bx + C$$

parabolak, Ox ardatzak eta bi ordenatuk, $2h$ distantziara, mugatzen badute bere azalera

$$S = \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2) \tag{3}$$

da, non y_0 eta y_2 muturretako ordenatuak bait dira eta y_1 tarteko erdiko puntuko ordenatua bait da.

Frogapena. Koordenatu-ardatzak 226. irudian agertzen diren bezala dauzkagu. $y = Ax^2 + Bx + C$ parabolaren ekuazioaren koefizienteak hurrengo ekuazioen bidez determinatzen dira:

$$\left.\begin{array}{lll} x_0 = -h & \text{bada} & y_0 = Ah^2 - Bh + C; \\ x_1 = 0 & \text{bada} & y_1 = C; \\ x_2 = h & \text{bada} & y_2 = Ah^2 + Bh + C. \end{array}\right\} \tag{4}$$

A, B, C koefizienteak ezagunak direla kontsideratuz, determina dezagun trapezio parabolikoaren azalera integral mugatuaren bitartez,

$$S=\int_{-h}^{h}(Ax^2+Bx+C)\,dx=\left[\frac{Ax^3}{3}+\frac{Bx^2}{2}+Cx\right]_{-h}^{h}=\frac{h}{3}(2Ah^2+6C).$$

Baina, (4) ekuazioetatik

$$y_0+4y_1+y_2=2Ah^2+6C$$

ondorioztatzen da. Hortaz,

$$S=\frac{h}{3}(y_0+4y_1+y_2),$$

frogatu nahi zen bezala.

Itzul gaitezen gure problema nagusira (ikus 225. irudia). (3) formula erabiliz hurrengo berdintza hurbilduak idatz ditzakegu $(h=\Delta x)$:

$$\int_{a=x_0}^{x_2} f(x)\,dx\approx\frac{\Delta x}{3}(y_0+4y_1+y_2),$$

$$\int_{x_2}^{x_4} f(x)\,dx\approx\frac{\Delta x}{3}(y_2+4y_3+y_4),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\int_{x_{2m-2}}^{x_{2m}=b} f(x)\,dx\approx\frac{\Delta x}{3}(y_{2m-2}+y_{2m-1}+y_{2m}).$$

Atalez atal batuz, ezkerrean bilatutako integrala eta eskuinean bere balio hurbildua lortzen ditugu:

$$\int_a^b f(x)\,dx\approx\frac{\Delta x}{3}(y_0+4y_1+2y_2+4y_3+\ldots+2y_{2m-2}+4y_{2m-1}+y_{2m}), \qquad (5)$$

edo

$$\int_a^b f(x)\,dx\approx\frac{b-a}{6m}[y_0+y_{2m}+2(y_2+y_4+\ldots+y_{2m-2})+4(y_1+y_3+\ldots+y_{2m-1})].$$

Hori da *Simpson-en formula*. Hor zatiketa-puntuen kopurua, 2m, edozein da; baina zenbaki hori zenbat eta handiago izan, (5) berdintzaren bigarren ataleko baturak hainbat eta zehatzago adierazten du integralaren balioa[4].

Adibidea. Kalkulatu gutxi gorabehera

$$\ln 2 = \int_1^2 \frac{dx}{x}.$$

Ebazpena. Bana dezagun [1,2] tartea 10 zati berdinetan (227. irudia).

$$\Delta x = \frac{2-1}{10} = 0,1$$

eginez integrakizunaren balioen taula era dezagun:

x	$y = \frac{1}{x}$	x	$y = \frac{1}{x}$
$x_0 = 1,0$	$y_0 = 1,00000$	$x_6 = 1,6$	$y_6 = 0,62500$
$x_1 = 1,1$	$y_1 = 0,90909$	$x_7 = 1,7$	$y_7 = 0,58824$
$x_2 = 1,2$	$y_2 = 0,83333$	$x_8 = 1,8$	$y_8 = 0,55556$
$x_3 = 1,3$	$y_3 = 0,76923$	$x_9 = 1,9$	$y_9 = 0,52632$
$x_4 = 1,4$	$y_4 = 0,71429$	$x_{10} = 2,0$	$y_{10} = 0,50000$
$x_5 = 1,5$	$y_5 = 0,66667$		

I. (1) laukizuzenen lehenengo formularen bidez

$$\int_1^2 \frac{dx}{x} \approx 0,1(y_0 + y_1 + \ldots + y_9) = 0,1 \cdot 7,18773 = 0,71877$$

lortzen dugu.

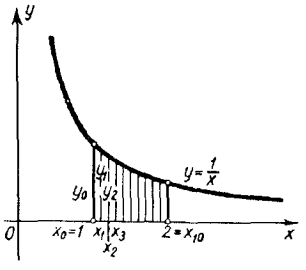
(1') laukizuzenen bigarren formularen bidez

4) Integrala aurretik jarritako doitasunez kalkulatzeko hartu behar den zatiketa-puntuen kopurua determinatzeko badaude integralaren kalkulu hurbilduan zehar egindako erroreak balioztatzeko formulak. Hemen ez ditugu balioztapen-formulak emango.

$$\int_1^2 \frac{dx}{x} \approx 0,1(y_1 + y_2 + \ldots + y_{10}) = 0,1 \cdot 6,68773 = 0,66877$$

erdiesten dugu.

227. iruditik berehala ondorioztatzen da emandako kasuan lehenengo formulak integralaren gehiagozko balioa ematen duela eta bigarrenak gutxiagozkoa.



227. IRUDIA

II. (2) trapezioen formularen bidez

$$\int_1^2 \frac{dx}{x} \approx 0,1\left(\frac{1+0,5}{2} + 6,18773\right) = 0,69377$$

ateratzen dugu.

III. Simpson-en formularen bidez

$$\int_1^2 \frac{dx}{x} \approx \frac{0,1}{3}[y_0 + y_{10} + 2(y_2 + y_4 + y_6 + y_8) + 4(y_1 + y_3 + y_5 + y_7 + y_9)] =$$

$$= \frac{0,1}{3}(1 + 0,5 + 2 \cdot 2,72818 + 4 \cdot 3,45955) = 0,69315$$

daukagu.

Errealitatean, $\ln 2 = \int_1^2 \frac{dx}{x} = 0,6931472$ (zazpi zifra hamartar zehatzez).

Ondorioz, [1,2] tartea 10 zati berdinetan banatzean hauxe lortu dugu:

- Simpson-en formularen bidez, bost zifra hamartar zehatzak;
- Trapezioen formularen bidez, hiru zifra hamartar zehatzak soilik;
- Laukizuzenen formularen bidez zifra hamartar bakar bat ziurta dezakegu.

§ 9. Chebyshev-en formula

Kalkulu teknikoetan maiz erabiltzen da Chebyshev-en integrazio hurbilduaren formula.

Demagun $\int_a^b f(x)\,dx$ kalkulatu nahi dela.

Ordezka dezagun integrakizuna Lagrange-ren $P(x)$ interpolazio-polinomioaz (VII. gaiko, § 9), $[a,b]$ tartean funtzioaren $f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n)$ n balioak hartuz, non $x_1, x_2, \ldots, x_n$ $[a,b]$ tarteko hautazko puntuak bait dira:

$$P(x) = \frac{(x-x_2)(x-x_3)\ldots(x-x_n)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)\ldots(x_1-x_n)} f(x_1) +$$

$$+ \frac{(x-x_1)(x-x_3)\ldots(x-x_n)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)\ldots(x_2-x_n)} f(x_2) +$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$+ \frac{(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_{n-1})}{(x_n-x_1)(x_n-x_2)\ldots(x_n-x_{n-1})} f(x_n). \tag{1}$$

Ondoko integrazio-formula hurbildua lortuko dugu:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \int_a^b P(x)\,dx, \tag{2}$$

eragiketa batzuk egin ondoren,

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx C_1 f(x_1) + C_2 f(x_2) + \ldots + C_n f(x_n) \tag{3}$$

itxura hartzen duena, non C_i koefizienteak

$$C_i = \int_a^b \frac{(x-x_1)\ldots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\ldots(x-x_n)}{(x_i-x_1)\ldots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\ldots(x_i-x_n)}\,dx \tag{4}$$

formulen bidez kalkulatzen diren.

(3) formula konplikatu eta deserosoa da kalkuluetarako, C_i koefizienteak zatiki konplikatuen bitartez bait daude adierazita. Chebyshev-ek alderantzizko problema planteatu zuen, hau da, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ abzisen ordez, $C_1, C_2, \ldots, C_n$ koefizienteak emanik $x_1, x_2, \ldots, x_n$ abzisak determinatu.

C_i koefizienteak ematen dira (3) formulak adierazpen sinpleena izan dezan. Nabaria da hori lortzen dela C_i koefiziente guztiak berdinak direnean:

$$C_1 = C_2 = \ldots = C_n.$$

Izan bedi C_n koefizientea $C_1, C_2, \ldots, C_n$ koefizienteen balio komuna, orduan (3) formulak

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx C_n[f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_n)] \tag{5}$$

itxura hartzen du.

(5) formulak orokorrean berdintza hurbildua adierazten du, baina $f(x)$ $(n-1)$ baino maila handiagoa ez duen polinomioa bada, berdintza zehatza lortuko dugu. Gertaera horrek C_n, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ magnitudeak determinatzen uzten du.

Integrazio-tarte orotarako formula eroso bat lortzeko asmoz $[a,b]$ tartea [-1,1] tarte bihur dezagun. Horretarako

$$x = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}t$$

egingo dugu; orduan

$$t = -1 \quad \text{denean} \quad x = a,$$
$$t = 1 \quad \text{denean} \quad x = b.$$

Ondorioz,

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{b-a}{2}\int_{-1}^{1} f\left(\frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}t\right)dt = \frac{b-a}{2}\int_{-1}^{1} \varphi(t)\,dt,$$

non $\varphi(t)$ integral ikurraren pean dagoen t-ren funtzioa den. Beraz, $f(x)$ funtzioaren integrazioa $[a,b]$ tartean, $\varphi(t)$ beste funtzio baten [-1,1] tarteko integraziora beti labur daiteke.

Problema

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = C_n[f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_n)] \tag{6}$$

formulan $C_n, x_1, x_2, \ldots, x_n$ zenbakiak aukeratzera pasa da,

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_{n-1} x^{n-1} \tag{7}$$

itxurako $f(x)$ funtzio orotarako formula hori zehatza izan dadin.

Ohar gaitezen

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = \int_{-1}^{1} (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_{n-1} x^{n-1})\,dx =$$

$$= \begin{cases} 2\left(a_0 + \dfrac{a_2}{3} + \dfrac{a_4}{5} + \dfrac{a_6}{7} + \ldots + \dfrac{a_{n-1}}{n}\right), & n \text{ bakoitia bada;} \\ 2\left(a_0 + \dfrac{a_2}{3} + \ldots + \dfrac{a_{n-2}}{n-1}\right), & n \text{ bikoitia bada.} \end{cases} \tag{8}$$

Bestalde, (6) berdintzaren bigarren ataleko batura, (7) dela eta,

$$C_n[na_0 + a_1(x_1 + x_2 + \ldots + x_n) + a_2(x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2) +$$

$$+ \ldots + a_{n-1}(x_1^{n-1} + x_2^{n-1} + \ldots + x_n^{n-1})] \tag{9}$$

da.

(8) eta (9) adierazpenak berdinduz, edonolako $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$ baliotarako balio behar duen berdintza lortuko dugu,

$$2\left(a_0 + \frac{a_2}{3} + \frac{a_4}{5} + \frac{a_6}{7} + \ldots\right) =$$

$$= C_n[na_0 + a_1(x_1 + x_2 + \ldots + x_n) +$$

$$+ a_2(x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2) + \ldots + a_{n-1}(x_1^{n-1} + x_2^{n-1} + \ldots + x_n^{n-1})].$$

Berdintzaren bi ataletan $a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{n-1}$ balioen koefizienteak berdinduz,

$$\left.\begin{aligned} 2 = C_n n \quad \text{edo} \quad C_n &= \frac{2}{n}; \\ x_1 + x_2 + \ldots + x_n &= 0; \\ x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 &= \frac{2}{2C_n} = \frac{n}{3}; \\ x_1^3 + x_2^3 + \ldots + x_n^3 &= 0; \\ x_1^4 + x_2^4 + \ldots + x_n^4 &= \frac{2}{5C_n} = \frac{n}{5}; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right\} \qquad (10)$$

daukagu.

Horrela azkeneko n ekuazioetatik $x_1, x_2, \ldots, x_n$ abzisak aurkitzen ditugu. Chebyshev-ek n-ren balio desberdinetarako soluzioak aurkitu zituen. Tarteko puntuen n kopurua 3, 4, 5, 6, 7 edo 9 deneko kasuetarako berak aurkitutako soluzioak emango ditugu:

n puntuen kopurua	C_n koefizientea	$x_1, x_2, \ldots, x_n$ abzisen balioak
3	$\frac{2}{3}$	$x_1 = -x_3 = 0,707107$ $x_2 = 0$
4	$\frac{1}{2}$	$x_1 = -x_4 = 0,794654$ $x_2 = -x_3 = 0,187592$
5	$\frac{2}{5}$	$x_1 = -x_5 = 0,882498$ $x_2 = -x_4 = 0,374541$ $x_3 = 0$
6	$\frac{1}{3}$	$x_1 = -x_6 = 0,866247$ $x_2 = -x_5 = 0,422519$ $x_3 = -x_4 = 0,266635$
7	$\frac{2}{7}$	$x_1 = -x_7 = 0,883862$ $x_2 = -x_6 = 0,529657$ $x_3 = -x_5 = 0,323912$ $x_4 = 0$

n puntuen kopurua	C_n koefizientea	$x_1, x_2, \ldots, x_n$ abzisen balioak
9	$\frac{2}{9}$	$x_1 = -x_9 = 0{,}911589$ $x_2 = -x_8 = 0{,}601019$ $x_3 = -x_7 = 0{,}528762$ $x_4 = -x_6 = 0{,}167906$ $x_5 = 0$

Ondorioz, integralaren kalkulu hurbildua [-1,1] tartean, ondoko Chebyshev-en formularen bidez egiten da:

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = \frac{2}{n}[f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_n)],$$

non n 3, 4, 5, 6, 7 edo 9 zenbakietako bat den eta $x_1, \ldots, x_n$ taulan emandakoak diren. Ezin dira 8 edo 9 baino zenbaki handiagoak hartu (10) ekuazio-sistemak soluzio irudikariak ematen bait ditu. Emandako integralaren integrazio-mugak a eta b direnean, Chebyshev-en formulak

$$\int_{a}^{b} f(x)\,dx = \frac{b-a}{n}[f(X_1) + f(X_2) + \ldots + f(X_n)]$$

itxura hartzen du, non $X_i = \frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2} x_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, eta x_i taulan emandako balioak bait dira.

Eman dezagun integral baten kalkuluaren adibidea Chebyshev-en formularen laguntzaz.

Adibidea. Kalkulatu $\int_{1}^{2} \frac{dx}{x}$ $(= \ln 2)$.

Ebazpena. Dagokion aldagai-aldaketaren bitartez, integral horretatik –1 eta 1 integrazio-mugak dituen beste integral batera pasatuko dugu.

$$x = \frac{1+2}{2} + \frac{2-1}{2}t = \frac{3}{2} + \frac{t}{2} = \frac{3+t}{2},$$

$$dx = \frac{dt}{2}.$$

Beraz,

$$\int_1^2 \frac{dx}{x} = \int_{-1}^1 \frac{dt}{3+t}.$$

Chebyshev-en formula aplikatuz azkeneko integrala kalkulatuko dugu, $n = 3$ aukeratuz:

$$\int_{-1}^1 f(t)\,dt = \frac{2}{3}[f(0,707107) + f(0) + f(-0,707107)].$$

$$f(0,707107) = \frac{1}{3+0,707107} = \frac{1}{3,707107} = 0,269752,$$

$$f(0) = \frac{1}{3+0} = 0,333333,$$

$$f(-0,707107) = \frac{1}{3-0,707107} = \frac{1}{2,292893} = 0,436130$$

direnez gero

$$\int_{-1}^1 \frac{dt}{3+t} = \frac{2}{3}(0,269752 + 0,333333 + 0,436130) = \frac{2}{3} \cdot 1,039215 = 0,692810 \approx 0,693$$

dugu.

Emaitza hori laukizuzenen, trapezioen eta Simpson-en formularen bidez lortutako emaitzekin alderatuz (ikusi aurreko ataleko adibidea), ohartuko gara Chebyshev-en formularen bitartez lortutako emaitza, (tarteko hiru punturekin) trapezioen formularen bidez (tarteko bederatzi punturekin) lortutakoa baino zehatzagoa dela eta integralaren balio errealetik gertuago dagoela.

Integralen kalkulu hurbilduaren teoria, besteen artean, A.N. Krilov (1863-1945) akademikoaren lanetan aurki daiteke.

§ 10. Parametro baten menpeko integralak

Parametro baten menpeko integralen deribazioa. Izan bedi

$$I(\alpha) = \int_a^b f(x, \alpha)\, dx \tag{1}$$

integrala, zeinean integrakizuna α parametro baten menpean dagoen. α parametroa aldatzen bada integral mugatuaren balioa ere aldatuko da. Hori dela eta, integral mugatua α-ren funtzioa da; horregatik $I(\alpha)$ izenda dezakegu.

1. Demagun $f(x, \alpha)$ eta $f'_\alpha(x, \alpha)$ funtzio jarraiak direla,

$$c \leq \alpha \leq d \quad \text{eta} \quad a \leq x \leq b \tag{2}$$

izanik.

Bila dezagun integralaren deribatua α-rekiko:

$$\lim_{\Delta\alpha \to 0} \frac{I(\alpha + \Delta\alpha) - I(\alpha)}{\Delta\alpha} = I'_\alpha(\alpha).$$

Deribatu hori bilatzeko ohar gaitezen

$$I(\alpha + \Delta\alpha) = \int_a^b f(x, \alpha + \Delta\alpha)\, dx$$

dela eta, hortaz,

$$I(\alpha + \Delta\alpha) - I(\alpha) = \int_a^b f(x, \alpha + \Delta\alpha)\, dx - \int_a^b f(x, \alpha)\, dx =$$

$$\int_a^b [f(x, \alpha + \Delta\alpha) - f(x, \alpha)]\, dx;$$

$$\frac{I(\alpha + \Delta\alpha) - I(\alpha)}{\Delta\alpha} = \int_a^b \frac{f(x, \alpha + \Delta\alpha) - f(x, \alpha)}{\Delta\alpha}\, dx.$$

Integrakizunari Lagrange-ren teorema aplikatuz

$$\frac{f(x,\alpha+\Delta\alpha)-f(x,\alpha)}{\Delta\alpha}=f'_\alpha(x,\alpha+\theta\Delta\alpha)$$

dugu, $0<\theta<1$ izanik.

$f'_\alpha(x,\alpha)$ (2) eremu itxian jarraia denez gero,

$$f'_\alpha(x,\alpha+\theta\Delta\alpha)=f'_\alpha(x,\alpha)+\varepsilon,$$

non $x,\alpha,\Delta\alpha$ balioen menpe dagoen ε magnitudeak zerorantz jotzen bait du, $\Delta\alpha\to 0$ denean.

Hori dela eta:

$$\frac{I(\alpha+\Delta\alpha)-I(\alpha)}{\Delta\alpha}=\int_a^b[f'_\alpha(x,\alpha)+\varepsilon]\,dx=\int_a^b f'_\alpha(x,\alpha)\,dx+\int_a^b \varepsilon\,dx.$$

Limiteak hartuz, $\Delta\alpha\to 0$ denean,

$$\lim_{\Delta\alpha\to 0}\frac{I(\alpha+\Delta\alpha)-I(\alpha)}{\Delta\alpha}=I'_\alpha(\alpha)=\int_a^b f'_\alpha(x,\alpha)\,dx$$

edo

$$\left[\int_a^b f(x,\alpha)\,dx\right]'_\alpha=\int_a^b f'_\alpha(x,\alpha)\,dx$$

lortuko dugu[5)] .

---

5) $\int_a^b \varepsilon\,dx$ integralaren integrakizunak zerorantz jotzen du, $\Delta\alpha\to 0$ denean. Puntu bakoitzean integrakizunak zerorantz jotzetik ez da beti ondorioztatzen integralak ere zerorantz jotzen duenik. Hala ere, emandako kasuan, $\int_a^b \varepsilon\,dx$ integralak zerorantz jotzen du, $\Delta\alpha\to 0$ denean, hemen frogapenik gabe onartuko dugularik.

Azkeneko formula *Leibniz-en formula* deitzen da.

2. Jo dezagun orain (1) integralean a eta b integrazio-mugak α-ren funtzio direla:

$$I(\alpha)=\Phi[\alpha,a(\alpha),b(\alpha)]=\int_{a(\alpha)}^{b(\alpha)} f(x,\alpha)\,dx. \qquad (1')$$

$\Phi[\alpha,a(\alpha),b(\alpha)]$ α-ren funtzio konposatua da, a eta b tarteko aldagaiak direlarik. $I(\alpha)$-ren deribatua bilatzeko aplika dezagun aldagai anitzeko funtzio konposatuaren deribazio-erregela (ikus VIII. gaiko § 10):

$$I'(\alpha)=\frac{\partial\Phi}{\partial\alpha}+\frac{\partial\Phi}{\partial a}\frac{da}{d\alpha}+\frac{\partial\Phi}{\partial b}\frac{db}{d\alpha}. \qquad (3)$$

Integral mugatuaren bere goi-mugarekiko deribazioari buruzko teoremaren arabera (ikus § 4ko (1) formula)

$$\frac{\partial\Phi}{\partial b}=\frac{\partial}{\partial b}\int_a^b f(x,\alpha)\,dx.=f[b(\alpha),\alpha],$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial a}=\frac{\partial}{\partial a}\int_a^b f(x,\alpha)\,dx=-\frac{\partial}{\partial a}\int_b^a f(x,\alpha)\,dx=-f[a(\alpha),\alpha]$$

daukagu. Azkenik, $\dfrac{\partial\Phi}{\partial\alpha}$ kalkulatzeko, lehenago lortu dugun Leibniz-en formula aplikatuko dugu:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\alpha}=\int_a^b f'_\alpha(x,\alpha)\,dx.$$

(3) formulan lortutako deribatuen adierazpenak sartuz,

$$I'_\alpha(\alpha)=\int_{a(\alpha)}^{b(\alpha)} f'_\alpha(x,\alpha)\,dx+f[b(\alpha),\alpha]\frac{db}{d\alpha}-f[a(\alpha),\alpha]\frac{da}{d\alpha} \qquad (4)$$

dugu.

Leibniz-en formulak integral mugatu batzuk erraz kalkulatzen uzten du.

Adibidea. Kalkulatu

$$\int_0^\infty e^{-x} \frac{\sin \alpha x}{x}\, dx$$

integrala.

Ebazpena. Kontura gaitezen integral hori ezin dela zuzenean kalkulatu, $e^{-x} \dfrac{\sin \alpha x}{x}$ funtzioaren jatorrizkoa ez bait da funtzio elementalen bidez adierazgarri. Integral hori kalkulatzeko kontsidera dezagun α parametroaren funtzio bezala:

$$I(\alpha) = \int_0^\infty e^{-x} \frac{\sin \alpha x}{x}\, dx.$$

Orduan, bere deribatua α-rekiko Leibniz-en formularen bidez kalkulatzen da[6]:

$$I'(\alpha) = \int_0^\infty \left[e^{-x} \frac{\sin \alpha x}{x} \right]'_\alpha dx = \int_0^\infty e^{-x} \cos \alpha x\, dx.$$

Azkeneko integrala erraz kalkulatzen da funtzio elementalen bidez eta $\dfrac{1}{1+\alpha^2}$ da. Hortaz,

$$I'(\alpha) = \frac{1}{1+\alpha^2}.$$

Lortutako identitatea integratuz $I(\alpha)$ aurkituko dugu:

$$I(\alpha) = \arctan \alpha + C. \qquad (5)$$

---

6) Leibniz-en formula a eta b integrazio-mugak finituak direneko kasuan lortu da. Hala ere, Leibniz-en formulak integrazio-mugetako bat infinitua denean ere balio du.

Orain C determinatu behar da. Horretarako, ohar gaitezen

$$I(0)=\int_0^\infty e^{-x}\frac{\sin(0\cdot x)}{x}dx=\int_0^\infty 0\,dx=0$$

dela.

Horrez gain, $\arctan 0=0$.

(5) berdintzan $\alpha=0$ eginez,

$$I(0)=\arctan 0+C$$

lortuko dugu, nondik $C=0$. Hortaz, α-ren balio orotarako

$$I(\alpha)=\arctan\alpha$$

berdintza betetzen da, hau da,

$$\int_0^\infty e^{-x}\frac{\sin\alpha x}{x}\,dx=\arctan\alpha.$$

§ 11. Aldagai errealeko funtzio konplexuaren integrazioa

VII. gaiko § 4an x aldagai errealaren funtzio konplexu bat kontsideratu dugu:

$$\tilde{f}(x)=u(x)+iv(x), \tag{1}$$

baita bere deribatua ere:

$$\tilde{f}'(x)=u'(x)+iv'(x). \tag{2}$$

Definizioa. $\tilde{F}(x)=U(x)+iV(x)$ funtzioa x aldagai errealaren $\tilde{f}(x)$ funtzio konplexuaren jatorrizko funtzio deitzen da, baldin

$$\tilde{F}'(x)=\tilde{f}(x), \tag{3}$$

hau da,

$$U'(x) + iV'(x) = u(x) + iv(x) \tag{4}$$

betetzen bada.

(4) berdintzatik,

$$U'(x) = u(x),$$
$$V'(x) = v(x)$$

ondorioztatzen da, hots, $U(x)$ $u(x)$-ren jatorrizkoa da eta $V(x)$ $v(x)$-ren jatorrizkoa.

Definiziotik eta azken oharretik ondorioztatzen da $\tilde{F}(x) = U(x) + iV(x)$ $\tilde{f}(x)$-ren jatorrizkoa bada $\tilde{f}(x)$-ren edozein jatorrizkok $\tilde{F}(x) + C$ itxura duela, non C konstante konplexu hautazkoa bait da.

$\tilde{F}(x) + C$ adierazpena aldagai errealeko funtzio konplexuaren integral mugagabe deitzen da eta

$$\int \tilde{f}(x)\, dx = \int u(x)\, dx + i\int v(x)\, dx = \tilde{F}(x) + C \tag{5}$$

idatzi.

Aldagai errealeko funtzio konplexuaren integral mugatua ondoko eran determinatzen da:

$$\tilde{f}(x) = u(x) + iv(x)$$

bada

$$\int_a^b \tilde{f}(x)\, dx = \int_a^b u(x)\, dx + i\int_a^b v(x)\, dx \tag{6}$$

dugu.

Definizio hori bat dator integral mugatuaren definizioarekin, batura baten limite bezala.

Ariketak

Kalkulatu hurrengo integral mugatuak s_n baturen limite bezala kontsideratuz:

1. $\int_a^b x^2\,dx.$

Oharra. $[a,b]$ tartea $x_i = aq^i\,(i = 0,1,2,\ldots,n)$ puntuen bidez n zatitan banatu, $q = \sqrt[n]{\frac{b}{a}}$ izanik. Emaitza: $\frac{b^3 - a^3}{3}$.

2. $\int_a^b \frac{dx}{x}$, non $0 < a < b$ den. Em.: $\ln\frac{b}{a}$.

Oharra. $[a,b]$ tartearen partiketa aurreko ariketan bezala egin.

3. $\int_a^b \sqrt{x}\,dx$. Em.: $\frac{2}{3}(b^{3/2} - a^{3/2})$.

Oharra. Ikusi aurreko ariketa.

4. $\int_a^b \sin x\,dx$. Em.: $\cos a - \cos b$.

Oharra. Lehendabizi

$$\sin a + \sin(a+h) + \sin(a+2h) + \ldots + \sin[a+(n-1)h] =$$

$$= \frac{\cos\left(a + \frac{h}{2}\right) - \cos\left[a + nh - \frac{h}{2}\right]}{2\sin\frac{h}{2}}$$

identitatea egiaztatu; horretarako, lehenengo ataleko gai guztiak $\sin\frac{h}{2}$ faktoreaz zatitu eta biderkatu eta sinuen biderkadurak kosinuen kenduraz ordezkatu egin behar dira.

5. $\int_a^b \cos x\,dx$. Em.: $\sin b - \sin a$.

Newton-Leibniz-en formulaz baliatuz kalkulatu ondorengo integral mugatuak:

6. $\int_0^1 x^4\,dx$. Em.: $\frac{1}{5}$.

7. $\int_0^1 e^x\,dx$. Em.: $e-1$.

8. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx$. Em.: 1.

9. $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$. Em.: $\frac{\pi}{4}$.

10. $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$. Em.: $\frac{\pi}{4}$.

11. $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \tan x\,dx$. Erantzuna: $\ln 2$.

12. $\int_1^e \frac{dx}{x}$. Em.: 1.

13. $\int_1^x \frac{dt}{t}$. Em.: $\ln x$.

14. $\int_0^x \sin t\,dt$. Em.: $2\sin^2\frac{x}{2}$.

15. $\int_{\sqrt[3]{a}}^x t^2\,dt$. Em.: $\frac{x^3-a}{3}$.

16. $\int_1^z \frac{dx}{2x-1}$. Em.: $\ln(2z-1)$.

17. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x\,dx$. Em.: $\frac{\pi}{4}$.

18. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\,dx$. Em.: $\frac{\pi}{4}$.

Kalkulatu ondoko integralen balioak, emandako ordezkapenak erabiliz:

19. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cos^2 x\, dx,\ \cos x = t.$ Em.: $\frac{1}{3}.$

20. $\int_0^{\pi} \frac{dx}{3 + 2\cos x},\ \tan\frac{x}{2} = t.$ Em.: $\frac{\pi}{\sqrt{5}}.$

21. $\int_1^4 \frac{x\, dx}{\sqrt{2 + 4x}},\ 2 + 4x = t^2.$ Em.: $\frac{3\sqrt{2}}{2}.$

22. $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{(1 + x^2)^2},\ x = \tan t.$ Em.: $\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}.$

23. $\int_1^5 \frac{\sqrt{x-1}}{x}\, dx,\ x - 1 = t^2.$ Em.: $2(2 - \arctan 2).$

24. $\int_{\frac{3}{4}}^{\frac{4}{3}} \frac{dz}{z\sqrt{z^2 + 1}},\ z = \frac{1}{x}.$ Em.: $\ln\frac{3}{2}.$

25. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos\varphi\, d\varphi}{6 - 5\sin\varphi + \sin^2\varphi},\ \sin\varphi = t.$ Em.: $\ln\frac{4}{3}.$

Frogatu:

26. $\int_0^1 x^m (1 - x)^n\, dx = \int_0^1 x^n (1 - x)^m\, dx\ \ (m > 0, n > 0).$

27. $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(a+b-x)\,dx$.

28. $\int_0^a f(x^2)\,dx = \frac{1}{2}\int_{-a}^a f(x^2)\,dx$.

Kalkulatu hurrengo integral inpropioak:

29. $\int_0^1 \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$. Em.: 1.

30. $\int_0^\infty e^{-x}\,dx$. Em.: 1.

31. $\int_0^\infty \frac{dx}{a^2+x^2}$. Em.: $\frac{\pi}{2a}$ $(a>0)$.

32. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$. Em.: $\frac{\pi}{2}$.

33. $\int_1^\infty \frac{dx}{x^5}$. Em.: $\frac{1}{4}$.

34. $\int_0^1 \ln x\,dx$. Em.: -1.

35. $\int_0^\infty x\sin x\,dx$. Em.: Integral dibergentea da.

36. $\int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}}$. Em.: Integral dibergentea da.

37. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+2x+2}$. Em.: π.

38. $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$. Em.: $\dfrac{3}{2}$.

39. $\displaystyle\int_{0}^{2} \frac{dx}{x^3}$. Em.: Integral dibergentea da.

40. $\displaystyle\int_{1}^{\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$. Em.: $\dfrac{\pi}{2}$.

41. $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x^4}$. Em.: Integral dibergentea da.

42. $\displaystyle\int_{0}^{\infty} e^{-ax} \sin bx\, dx \ (a>0)$. Em.: $\dfrac{b}{a^2-b^2}$.

43. $\displaystyle\int_{0}^{\infty} e^{-ax} \cos bx\, dx \ (a>0)$. Em.: $\dfrac{b}{a^2+b^2}$.

Kalkulatu hurrengo integralen balio hurbilduak:

44. $\ln 5 = \displaystyle\int_{1}^{5} \frac{dx}{x}$, trapezioen eta Simpson-en formulen bidez $(n=12)$. Em.: 1,6182 (trapezioen formulaz); 1,6098 (Simpson-en formulaz).

45. $\displaystyle\int_{1}^{11} x^3\, dx$, trapezioen eta Simpson-en formulen bidez $(n=10)$. Em.: 3690; 3660.

46. $\int_0^1 \sqrt{1-x^3}\,dx$, trapezioen formularen bidez $(n=6)$. Em.: 0,8109.

47. $\int_1^3 \frac{dx}{2x-1}$, Simpson-en formularen bidez $(n=4)$. Em.: 0,8111.

48. $\int_1^{10} \log_{10} x\,dx$, trapezioen eta Simpson-en formulen bidez $(n=10)$. Em.: 6,0656; 6,0896.

49. Kalkulatu π balioa, $\frac{\pi}{4}=\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$ berdintzatik abiatuz, Simpson-en formularen bidez $(n=10)$. Em.: 3,14159.

50. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x}\,dx$, Simpson-en formularen bidez $(n=10)$. Em.: 1,371.

51. $\int_0^{\infty} e^{-\alpha x}\,dx=\frac{1}{\alpha}$, $\alpha>0$ izanik, berdintzatik abiatuz $\int_0^{\infty} e^{-x}x^n\,dx$, $n>0$ eta osoa, integralaren balioa aurkitu. Em.: $n!$.

52. $\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^2+a}=\frac{\pi}{2\sqrt{a}}$ berdintzatik abiatuz, $\int_0^{\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^{n+1}}$ integralaren balioa aurkitu.

Em.: $\frac{\pi}{2}\frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-1)}{2^n n!}$.

53. $\int_0^{\infty} \frac{1-e^{-\alpha x}}{xe^x}\,dx$ integrala kalkulatu. Em.: $\ln(1+\alpha)$ $(\alpha>-1$ izanik$)$.

54. $\int_0^1 x^{n-1}\,dx = \frac{1}{n}$ berdintza erabiliz, $\int_0^1 x^{n-1}(\ln x)^k\,dx$ integrala kalkulatu.

Em.: $(-1)^k \frac{k!}{n^{k+1}}$.

XII. GAIA

INTEGRAL MUGATUEN APLIKAZIO GEOMETRIKO ETA MEKANIKOAK

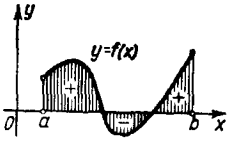
§ 1. Azaleren kalkulua koordenatu angeluzuzenetan

Biz $y = f(x)$, $[a,b]$ tartean definituriko funtzio erreal bat, non $f(x) \geq 0$ $\forall x \in [a,b]$ bait da. Dakigun bezala (XI. gaiko § 2), $y=f(x)$ funtzioak, $x=a$, $x=b$ zuzenek eta Ox ardatzak mugatutako trapezio kurbatuaren azalera (210. irudia), ondoko formula honen bidez adierazten da:

$$Q = \int_a^b f(x)\, dx. \qquad (1)$$

$[a,b]$ tartean $f(x) \leq 0$ bada, $\int_a^b f(x)\, dx$ integral mugatua ere ez da positiboa izango. Integral horren balio absolutuak, $f(x)$ funtzioari dagokion trapezio kurbatuaren azalera adierazten du.

$$-Q = \int_a^b f(x)\, dx.$$

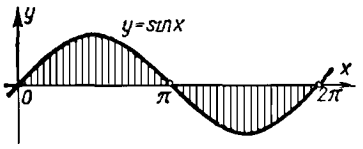


228. IRUDIA

$[a,b]$ tartean $f(x)$ funtzioaren zeinua aldi-kopuru finitutan aldatzen bada, $[a,b]$ tarteko integrazioa tarte partzialetako integralen baturan bana dezakegu. $f(x) \geq 0$ den tarteetan integrala positiboa izango da eta $f(x) \leq 0$ denetan, negatiboa. Emandako tarte guztira zabaldutako integrala, Ox ardatzaren gainetik eta azpitik dauden azaleren arteko kendura da (228. irudia). Azaleren arteko batura lortzeko, tarte partzialetako integralen balio absolutuen arteko batura egin beharra dago edo bestela ondoko integral hau kalkulatu behar da:

$$Q = \int_a^b |f(x)|\, dx.$$

1. Adibidea. Kalkulatu $y = \sin x$ sinusoideak eta Ox ardatzak mugatutako Q azalera, $0 \le x \le 2\pi$ denean (229. irudia).



229. IRUDIA

Ebazpena. $0 \le x \le \pi$ denean, $\sin x \ge 0$ eta $\pi < x \le 2\pi$ denean, $\sin x \le 0$ denez,

$$Q = \int_0^{\pi} \sin x \, dx + \left| \int_{\pi}^{2\pi} \sin x \, dx \right| = \int_0^{2\pi} |\sin x| \, dx,$$

$$\int_0^{\pi} \sin x \, dx = -\cos x \Big|_0^{\pi} = -(\cos \pi - \cos 0) = -(-1-1) = 2,$$

$$\int_{\pi}^{2\pi} \sin x \, dx = -\cos x \Big|_{\pi}^{2\pi} = -(\cos 2\pi - \cos \pi) = -2.$$

Beraz, $Q = 2 + |-2| = 4$.

$y = f_1(x)$ eta $y = f_2(x)$ kurbek, $f_1(x) \ge f_2(x)$ izanik, eta $x = a$, $x = b$ ordenatuek mugatutako azalera kalkulatu nahi bada (230. irudia), ondoko hau egin beharra dago:

$$Q = \int_a^b f_1(x) \, dx - \int_a^b f_2(x) \, dx = \int_a^b [f_1(x) - f_2(x)] \, dx. \qquad (2)$$

2. Adibidea. Kalkulatu ondoren adierazten diren kurbek mugatutako azalera (231. irudia):

$$y = \sqrt{x}, \quad y = x^2.$$

Ebazpena. Bila ditzagun kurba horien arteko ebaki-puntuak: $\sqrt{x} = x^2$, $x = x^4$, orduan: $x_1 = 0$, $x_2 = 1$.

Beraz,

$$Q=\int_0^1 \sqrt{x}\,dx-\int_0^1 x^2dx=\int_0^1(\sqrt{x}-x^2)\,dx=\frac{2}{3}x^{3/2}\Big|_0^1-\frac{x^3}{3}\Big|_0^1=\frac{2}{3}-\frac{1}{3}=\frac{1}{3}.$$

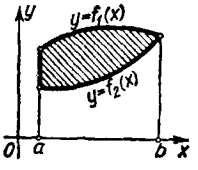
Kalkula dezagun orain ekuazio parametrikotan emandako kurba batek mugatzen duen trapezio kurbatuaren azalera (232. irudia):

$$x=\varphi(t),\quad y=\psi(t), \tag{3}$$

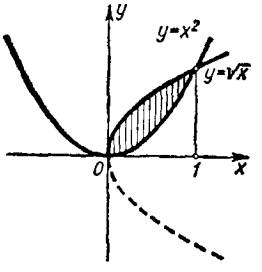
non

$$\alpha\le t\le\beta \qquad \text{eta} \qquad \varphi(\alpha)=a,\quad \varphi(\beta)=b$$

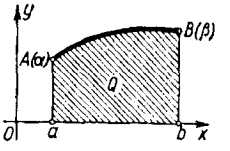
bait dira.



230. IRUDIA



231. IRUDIA



232. IRUDIA

Demagun orain (3) ekuazioek $[a,b]$ tartean $y=f(x)$ funtzioa definitzen dutela eta beraz dagokion trapezio kurbatuaren azalera ondoko formularen bidez kalkula daitekeela:

$$Q=\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^b y\,dx.$$

Alda dezagun integral horretan aldagaia: $x=\varphi(t)$; $dx=\varphi'(t)\,dt$. (3) ekuazioen ondorioz, $y=f(x)=f[\varphi(t)]=\psi(t)$ lortzen dugu. Beraz,

$$Q=\int_\alpha^\beta \psi(t)\varphi'(t)\,dt. \tag{4}$$

Hori da koordenatu parametrikoetan emandako kurba batek mugatzen duen trapezio kurbatuaren azalera kalkulatzeko formula.

3. Adibidea. Kalkulatu ondoko elipseak mugatutako eremuaren azalera:

$$x = a\cos t, \quad y = b\sin t.$$

Ebazpena. Elipsearen goiko erdiaren azalera kalkulatuko dugu, eta gero azalera hori bikoiztu. x aldagaia $-a$-tik a-ra doa, beraz t π-tik 0ra,

$$Q = 2\int_{\pi}^{0}(b\sin t)(-a\sin t\,dt) = -2ab\int_{\pi}^{0}\sin^2 t\,dt = 2ab\int_{0}^{\pi}\sin^2 t\,dt =$$

$$= 2ab\int_{0}^{\pi}\frac{1-\cos 2t}{2}dt = 2ab\left[\frac{t}{2}-\frac{\sin 2t}{4}\right]_0^{\pi} = \pi ab.$$

4. Adibidea. Kalkulatu Ox ardatzak eta ondoren adierazten den zikloidearen arkuak mugatzen duten azalera,

$$x = a(t-\sin t), \quad y = a(1-\cos t).$$

Ebazpena. t 0tik 2π-ra doanez, x 0tik $2\pi a$-ra doa. (4) formularen arabera:

$$Q = \int_0^{2\pi} a(1-\cos t)a(1-\cos t)\,dt = a^2\int_0^{2\pi}(1-\cos t)^2\,dt =$$

$$= a^2\left[\int_0^{2\pi}dt - 2\int_0^{2\pi}\cos t\,dt + \int_0^{2\pi}\cos^2 t\,dt\right];$$

$$\int_0^{2\pi}dt = 2\pi; \quad \int_0^{2\pi}\cos t\,dt = 0; \quad \int_0^{2\pi}\cos^2 t\,dt = \int_0^{2\pi}\frac{1+\cos 2t}{2}dt = \pi.$$

Eta azkenik,

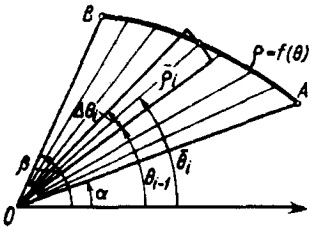
$$Q = a^2(2\pi+\pi) = 3\pi a^2.$$

§ 2. Koordenatu polarretan emandako sektore kurbatu baten azalera

Izan bedi $\rho = f(\theta)$ kurba baten ekuazioa koordenatu polarretan, non $f(\theta)$ funtzioa jarraia bait da $\alpha \le \theta \le \beta$ balioetarako.

Kalkula dezagun $\rho = f(\theta)$ kurbak eta $\theta = \alpha$, $\theta = \beta$ erradio bektoreek mugatutako OAB sektorearen azalera.

Bana dezagun gainazala n zatitan $\theta_0 = \alpha, \theta = \theta_1, \ldots, \theta_n = \beta$ erradio bektoreen bidez eta $\Delta\theta_1, \Delta\theta_2, \ldots, \Delta\theta_n$ erradio bektore horiek eratutako angeluak izanik (233. irudia).



233. IRUDIA

Biz $\overline{\rho}_i$, θ_{i-1} eta θ_i arteko edozein angeluri, $\overline{\theta}_i$, dagokion erradio bektore baten luzera.

Har dezagun, $\overline{\rho}_i$ erradioa eta $\Delta\theta_i$ angelu zentrala dituen sektore zirkularra. Sektore horren azalera ondoko hau da

$$\Delta Q_i = \frac{1}{2}\overline{\rho}_i^2 \Delta\theta_i .$$

Eta guztien batura

$$Q_n = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \overline{\rho}_i^2 \Delta\theta_i = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} [f(\overline{\theta}_i)]^2 \Delta\theta_i$$

mailatutako sektorearen azalera da. Aurreko batura $\alpha \le \theta \le \beta$ tartean $\rho^2 = [f(\theta)]^2$ funtzioari dagokion batura integrala denez, beraren limitea, $\max \Delta\theta_i \to 0$ denean, ondoko integral mugatua izango da

$$\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} \rho^2 d\theta .$$

$\Delta\theta_i$ angeluan hartutako $\overline{\rho}_i$ erradio bektorea aldatuz, integral horren balioa berdina mantentzen denez, limitea irudiaren azalera bezala hartzen da[1].

Honelatan bada, OAB azalera

$$Q = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} \rho^2 d\theta \tag{1}$$

edo

$$Q = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} [f(\theta)]^2 d\theta \tag{1'}$$

da.

Adibidea. Kalkulatu ondoko lemniskatak mugatutako azalera (234. irudia).

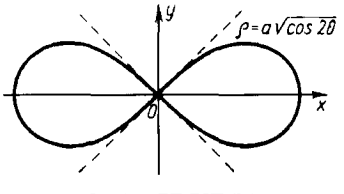
$$\rho = a\sqrt{\cos 2\theta}.$$

Ebazpena. θ 0tik $\frac{\pi}{4}$-ra doanean, erradio bektoreak kalkulatu nahi dugun azaleraren laurdena ibiltzen du. Orduan,

$$\frac{1}{4}Q = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \rho^2 d\theta = \frac{1}{2}a^2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2\theta \, d\theta = \frac{a^2}{2}\frac{\sin 2\theta}{2}\Bigg|_0^{\pi/4} = \frac{a^2}{4},$$

beraz,

$$Q = a^2.$$



234. IRUDIA

1) Froga daiteke azaleraren definizio horrek ez duela aurretik emandako definizioa kontraesaten; hau da, sektore kurbatuaren azalera, trapezio kurbatuen metodoa erabiliz kalkulatuko bagenu, emaitza bera lortuko genuke.

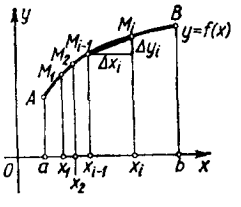
§ 3. Kurba-arku baten luzera

1. Koordenatu angeluzuzenetan emandako kurba-arku baten luzera. Izan bedi $y=f(x)$ kurba baten ekuazioa koordenatu angeluzuzenetan.

Bila dezagun $x=a$ eta $x=b$ zuzenen artean aurkitzen den kurba horren AB arkuaren luzera (235. irudia).

VI. gaian (§ 1), arku baten luzeraren definizioa eman dugu. Gogora dezagun. Har ditzagun AB arkuaren gainean A, M_1, M_2, ..., M_i, ..., B puntuak, beraien abzisak $x_0=a$, x_1, x_2, ..., x_i, ..., $b=x_n$ izanik. Marra ditzagun AM_1, M_1M_2, ..., $M_{n-1}B$ kordak, beraien luzerak Δs_1, Δs_2, ..., Δs_n izanik. Modu horretan AB arkuan inskribatutako $AM_1M_2...M_{n-1}B$ lerro poligonala lortzen da. Lerro poligonal horren luzera ondoko hau da:

$$s_n=\sum_{i=1}^{n}\Delta s_i.$$



235. IRUDIA

Esandako lerro poligonalaren alderik handienaren luzerak zerorantz jotzen badu, lerro poligonal inskribatuaren luzerak limite baterantz joko du. Limite hori *AB arkuaren s luzera* deitzen da. Hau da,

$$s=\lim_{\max \Delta s_i \to 0}\sum_{i=1}^{n}\Delta s_i. \qquad (1)$$

Ikus dezagun orain, $f(x)$ eta beraren deribatua $f'(x)$ $a\le x\le b$ tartean jarraiak baldin badira, limite hori existitzen dela; eta bide batez, arku baten luzera kalkulatzeko metodoa lortuko dugu.

Izan bedi:

$$\Delta y_i=f(x_i)-f(x_{i-1}).$$

Orduan,

$$\Delta s_i = \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\right)^2}\,\Delta x_i.$$

Lagrange-ren teoremaren arabera:

$$\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i} = \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}} = f'(\xi_i),$$

non

$$x_{i-1} < \xi_i < x_i$$

bait da. Honelatan bada,

$$\Delta s_i = \sqrt{1 + [f'(\xi_i)]^2}\,\Delta x_i.$$

Horrela, lerro poligonal inskribatuaren luzera ondoko hau da:

$$s_n = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + [f'(\xi_i)]^2}\,\Delta x_i.$$

Hipotesiaren arabera, $f'(x)$ jarraia da eta beraz,

$$\sqrt{1 + [f'(x)]^2}$$

funtzioa ere jarraia izango da. Horregatik, idatzitako batura integralak limitea du, limite hori integral mugatua izanik; hau da,

$$s = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + [f'(\xi_i)]^2}\,\Delta x_i = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\,dx.$$

Honelatan bada, arku baten luzera kalkulatzeko formula lortu dugu:

$$s = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\,dx = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx. \qquad (2)$$

1. Oharra. Azkeneko formulatik hasita arkuaren luzeraren abzisarekiko deribatua kalkula daiteke. Integralaren goi-muga aldakorra kontsideratuz eta x izkiaz adieraziz, s arkuaren luzera x-ren funtzioan lortzen dugu:

$$s(x) = \int_a^x \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt.$$

Integral hori, goi-mugarekiko deribatuz:

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}. \qquad (3)$$

Formula hori, VI. gaiko § 1ean lortu dugu dagoeneko, beste hipotesietan oinarriturik.

1. Adibidea. Kalkulatu ondoko zirkunferentziaren luzera.

$$x^2 + y^2 = r^2.$$

Ebazpena. Kalkula dezagun lehendabizi lehenengo zirkulu-laurdenari dagokion zirkunferentziaren laurdenaren luzera. AB arkuaren ekuazioa, ondoko hau da:

$$y = \sqrt{r^2 - x^2},$$

orduan,

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{\sqrt{r^2 - x^2}}.$$

Beraz,

$$\frac{1}{4}s = \int_0^r \sqrt{1 + \frac{x^2}{r^2 - x^2}}\, dx = \int_0^r \frac{r}{\sqrt{r^2 - x^2}}\, dx = r \arcsin\frac{x}{r}\Big|_0^r = r\frac{\pi}{2}.$$

Zirkunferentziaren luzera, $s = 2\pi r$ da.

Kalkula dezagun orain koordenatu parametrikoetan emandako kurba-arku baten luzera:

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad (\alpha \le t \le \beta), \tag{4}$$

non $\varphi(t)$ eta $\psi(t)$, emandako tartean funtzio jarraiak eta deribatu jarraidunak bait dira eta emandako $[\alpha,\beta]$ tartean $\varphi'(t) \neq 0$ bait da.

Kasu honetan, (4) ekuazioek $y = f(x)$ funtzio jarraia finkatzen dute, beroren deribatua ere jarraia delarik:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}.$$

Izan bitez $a = \varphi(\alpha)$, $b = \varphi(\beta)$. Kurba-arku baten luzeraren (2) formulan, ondoko ordezkapen hau egingo dugu:

$$x = \varphi(t), \quad dx = \varphi'(t)dt.$$

Orduan,

$$s = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{1 + \left|\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\right|^2}\ \varphi'(t)\ dt.$$

Beraz,

$$s = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2}\ dt. \tag{5}$$

2. Oharra. Froga daiteke (5) formula zuzen bertikalek puntu bat baino gehiagotan mozten dituzten kurbetarako ere (kurba itxietarako bereziki) baliagarria dela, kurbaren puntu guztietan $\varphi'(t)$ eta $\psi'(t)$ jarraiak baldin badira.

2. Adibidea. Kalkulatu ondoko hipozikloidearen (astroidearen) luzera:

$$x = a\cos^3 t, \quad y = a\sin^3 t.$$

Ebazpena. Kurba hori koordenatu-ardatzekiko simetrikoa denez, kalkula dezagun kurba horren luzera lehenengo koadrantean, ez beste.

$$\frac{dx}{dt} = -3a\cos^2 t \sin t, \quad \frac{dy}{dt} = 3a\sin^2 t \cos t.$$

t parametroa 0tik $\frac{\pi}{2}$-raino doanez,

$$\frac{1}{4}s = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{9a^2\cos^4 t\sin^2 t + 9a^2\sin^4 t\cos^2 t}\ dt = 3a\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos^2 t\sin^2 t}\ dt =$$

$$= 3a\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t\cos t\ dt = 3a\frac{\sin^2 t}{2}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{3a}{2};\quad s = 6a.$$

3. Oharra. Biz, espazioan beraren ekuazio parametrikoek definiturik dagoen ondoko kurba

$$x = \varphi(t),\quad y = \psi(t),\quad z = \chi(t), \tag{6}$$

non $\alpha \le t \le \beta$ bait da (ikus IX. gaiko § 1). Beraren arku baten luzera (kurba launetarako bezala) era honetan definitzen da: lerro poligonal inskribatuaren luzeraren limitea da, lerro poligonalaren alderik handienaren luzerak zerorantz jotzen duenean. $\varphi(t)$, $\psi(t)$ eta $\chi(t)$ funtzioak eta beraien deribatuak $[\alpha,\beta]$ tartean jarraiak badira, kurbak luzera finko bat du (hau da, kurba horretarako goian aipatutako limitea existitzen da) eta ondoko formularen bidez kalkulatzen da

$$s = \int_\alpha^\beta \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2 + [\chi'(t)]^2}\ dt. \tag{7}$$

Azkeneko emaitza hori frogatu gabe onartuko dugu.

3. Adibidea. Kalkulatu $x = a\cos t$, $y = a\sin t$, $z = amt$ helize-arkuaren luzera, t 0tik 2π-ra doanean.

Ebazpena. Emandako ekuazioetatik zera lortzen dugu

$$dx = -a\sin t\,dt,\quad dy = a\cos t\,dt,\quad dz = am\,dt.$$

(7) formulan ordezkatuz:

$$s = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2\sin^2 t + a^2\cos^2 t + a^2m^2}\ dt = a\int_0^{2\pi} \sqrt{1+m^2}\ dt = 2\pi a\sqrt{1+m^2}.$$

2. Koordenatu polarretan emandako kurba-arku baten luzera. Izan bedi

$$\rho = f(\theta) \tag{8}$$

koordenatu polarretan emandako kurba baten ekuazioa, non ρ erradioa eta θ angelu polarra bait dira.

Koordenatu polarren eta cartesiarren arteko erlazioak ondoko hauek dira:

$$x = \rho\cos\theta, \quad y = \rho\sin\theta.$$

ρ, θ-ren funtzioan duen (8) adierazpenaz ordezkatzerakoan ondoko ekuazioak lortzen dira

$$x = f(\theta)\cos\theta, \quad y = f(\theta)\sin\theta.$$

θ parametrotzat hartzen badugu, aurreko adierazpenak kurbaren ekuazio parametrikotzat kontsidera daitezke; eta (5) formula aplika dezakegu arkuaren luzera kalkulatzeko.

Egin ditzagun horretarako θ-rekiko x eta y-ren deribatuak:

$$\frac{dx}{d\theta} = f'(\theta)\cos\theta - f(\theta)\sin\theta; \quad \frac{dy}{d\theta} = f'(\theta)\sin\theta + f(\theta)\cos\theta.$$

Orduan,

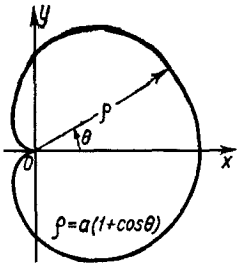
$$\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2 = [f'(\theta)]^2 + [f(\theta)]^2 = \rho'^2 + \rho^2.$$

Beraz,

$$s = \int_{\theta_0}^{\theta_1} \sqrt{\rho'^2 + \rho^2}\, d\theta.$$

4. Adibidea. Kalkulatu ondoan emandako kardiodearen luzera (236. irudia)

$$\rho = a(1 + \cos\theta).$$



236. IRUDIA

Ebazpena. θ angelua 0tik π-raino joatean bilatutako luzeraren erdia lortzen da. Hemen $\rho' = -a\sin\theta$ da. Beraz,

$$s = 2\int_0^{\pi} \sqrt{a^2(1+\cos\theta)^2 + a^2\sin^2\theta}\, d\theta = 2a\int_0^{\pi} \sqrt{2+2\cos\theta}\, d\theta =$$

$$= 4a\int_0^{\pi} \cos\frac{\theta}{2}\, d\theta = 8a\sin\frac{\theta}{2}\Big|_0^{\pi} = 8a.$$

5. Adibidea. Kalkulatu ondoko elipsearen luzera

$$\left.\begin{aligned} x &= a\cos t, \\ y &= b\sin t, \end{aligned}\right\} \; 0 \le t \le 2\pi,$$

$a > b$ dela suposatuz.

Ebazpena. (5) formula erabiliko dugu. Arkuaren laurdena kalkulatuko dugu, hau da, arkuaren luzera t parametroa 0tik $\frac{\pi}{2}$-raino doanean.

$$\frac{s}{4}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t}\ dt=$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{a^2(1-\cos^2 t)+b^2\cos^2 t}\ dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{a^2-(a^2-b^2)\cos^2 t}\ dt=$$

$$=a\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\frac{a^2-b^2}{a^2}\cos^2 t}\ dt=a\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-k^2\cos^2 t}\ dt,$$

non $k=\dfrac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}<1$ bait da. Beraz,

$$s=4a\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-k^2\cos^2 t}\ dt.$$

Gelditzen zaigun gauza bakarra, azken integral hori kalkulatzea da. Baina jakina denez integral hori ezin da funtzio elementalen bidez adierazi (ikus X. gaiko § 16) eta hurbilketa-metodoen bidez soilik kalkula daiteke (Simpson-en metodoa adibidez).

Bereziki, elipsearen ardatzerdi handienaren luzera 5ekoa bada eta ardatzerdi txikienarena 4koa, $k=\dfrac{3}{5}$ eta elipsearen luzera ondoko hau izango da:

$$s=4\cdot 5\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\left(\frac{3}{5}\right)^2\cos^2 t}\ dt.$$

Azkeneko integral hori Simpson-en formularen bidez kalkulatzen badugu ($\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ tartea lau zatitan banatuz), integralaren ondoko balio hurbildua lortuko dugu:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\frac{3}{5}\cos^2 t}\ dt\approx 1{,}298;$$

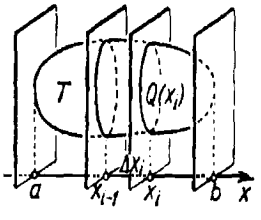
beraz, elipse osoaren luzera gutxi gorabehera ondoko hau izango da:

$$s \approx 25,96 \quad \text{luzera-unitate.}$$

§ 4. Gorputz baten bolumenaren kalkulua, sekzio paraleloen azaleren funtzioan

Izan bedi gorputz bat, T, eta demagun Ox ardatzarekiko perpendikularra den plano batek ebakitako edozein sekzioren azalera ezagutzen dela (237. irudia). Azalera hori plano ebakitzailearen posizioaren menpe dago, hau da, x-ren funtzioa da:

$$Q = Q(x).$$



237. IRUDIA

Demagun $Q(x)$ x-ren funtzio jarraia dela eta kalkula dezagun gorputz horren bolumena. Marra ditzagun $x = x_0 = a, x = x_1, x = x_2, \ldots, x = x_n = b$ planoak. Plano horiek gorputza xaflatan ebakitzen dute. $x_{i-1} \le x \le x_i$ tarte partzial bakoitzean ξ_i hautazko puntu bat aukeratzen da eta $i = 1, 2, \ldots, n$ balio bakoitzerako gorputz zilindriko bat eraikitzen da, zeinaren sortzailea Ox ardatzaren paraleloa bait da eta zuzentzailea T gorputzean $x = \xi_i$ planoak egindako sekzioaren mugaldea bait da.

Zilindro elemental horren bolumena, zilindroaren altuera Δx_i eta oinarriaren azalera $Q(\xi_i)$ $(x_{i-1} \le \xi_i \le x_i)$ izanik, $Q(\xi_i)\Delta x_i$ izango da. Beraz, zilindro guztien bolumena

$$v_n = \sum_{i=1}^{n} Q(\xi_i)\Delta x_i$$

da. $\max \Delta x_i \to 0$ denean, batura horren limiteak (existitzen bada) emandako gorputzaren bolumena adierazten du:

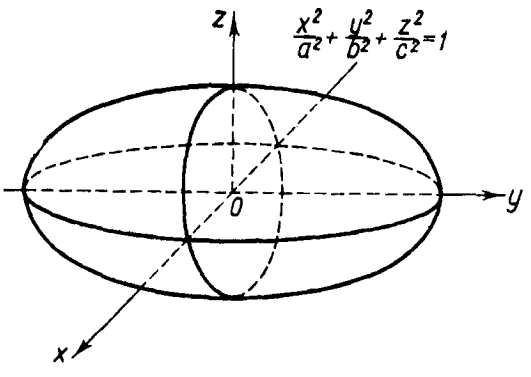
$$v = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} Q(\xi_i)\Delta x_i .$$

Horrez gain, v_n adierazpena $Q(x)$ funtzio jarraiaren batura integrala da $a \le x \le b$ tartean, beraz, esandako limitea existitzen da, eta ondoko integral mugatuaren bidez adierazten da:

$$v = \int_a^b Q(x)\, dx.$$

Adibidea. Kalkulatu ondoan ematen den elipsoidearen bolumena (238. irudia)

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$



238. IRUDIA

Ebazpena. Oyz planotik x distantziara eta esandako planoarekiko paraleloa den plano batek ebakitako sekzioa, ondoko elipse hau da:

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{x^2}{a^2},$$

edo

$$\frac{y^2}{\left[b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\right]^2} + \frac{z^2}{\left[c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\right]^2} = 1,$$

non beraren ardatzerdiak

$$b_1 = b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}; \quad c_1 = c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}$$

bait dira. Baina elipse horren azalera $\pi b_1 c_1$ denez (ikus § 1eko 3. adibidea),

$$Q(x) = \pi bc\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right).$$

Beraz, elipsoidearen bolumena hauxe da:

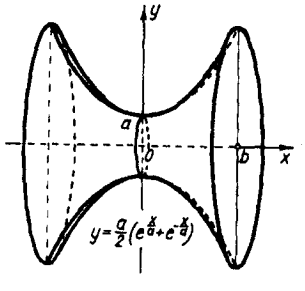
$$v = \pi bc\int_{-a}^{a}\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)dx = \pi bc\left(x-\frac{x^3}{3a^2}\right)\Bigg|_{-a}^{a} = \frac{4}{3}\pi abc.$$

$a=b=c$ kasu berezian, elipsea esfera bihurtzen da eta bolumena

$$v = \frac{4}{3}\pi a^3.$$

§ 5. Biraketa-gorputzen bolumena

Izan bedi $aABb$ trapezio kurbatuak Ox ardatzarekiko biratzean sortutako biraketa-gorputza. $y=f(x)$ kurbak, Ox ardatzak eta $x=a$, $x=b$ zuzenek mugatzen dute trapezioa.



239. IRUDIA

Kasu honetan, abzisa-ardatzarekiko elkartzuta den plano batek egindako edozein sekzio zirkulu bat da, beraren azalera

$$Q = \pi y^2 = \pi[f(x)]^2$$

izanik.

Bolumenak kalkulatzeko [§ 4, (1)] formula orokorra aplikatuz, biraketa-gorputzen bolumena kalkulatzeko formula lortzen da; hau da,

$$v = \pi \int_a^b y^2 dx = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx.$$

Adibidea. Kalkulatu Ox inguruan biratzean

$$y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)$$

kanetariak $0 \le x \le b$ tartean sortutako gorputzaren bolumena (239. irudia).

Ebazpena.

$$v = \pi \frac{a^2}{4} \int_0^b \left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)^2 dx = \frac{\pi a^2}{4} \int_0^b \left(e^{\frac{2x}{a}} + 2 + e^{-\frac{2x}{a}}\right) dx =$$

$$= \frac{\pi a^2}{4}\left[\frac{a}{2} e^{\frac{2x}{a}} + 2x - \frac{a}{2} e^{-\frac{2x}{a}}\right]_0^b = \frac{\pi a^3}{8}\left(e^{\frac{2b}{a}} - e^{-\frac{2b}{a}}\right) + \frac{\pi a^2 b}{2}.$$

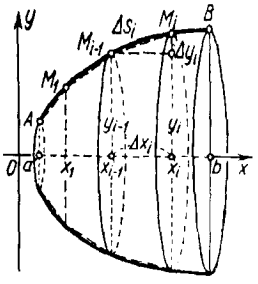
§ 6. Biraketa-gorputzen azalera

Izan bedi Ox ardatzaren inguruan $y = f(x)$ kurbaren biraketak sortutako gainazala. Kalkula dezagun $0 \le x \le b$ tartean gainazal horren azalera. Demagun $f(x)$ funtzioa jarraia dela eta $[a,b]$ tarteko puntu guztietan deribatu jarraia duela.

§ 3 atalean egin dugun bezala, marra ditzagun $AM_1, M_1M_2, \ldots, M_{n-1}B$ kordak, zeintzuen luzerak $\Delta s_1, \Delta s_2, \ldots, \Delta s_n$ bait dira (240. irudia).

Beraren biraketan Δs_i $(i = 1, 2, \ldots n)$ luzera duen korda bakoitzak kono-enbor bat sortzen du, ΔP_i azalera

$$\Delta P_i = 2\pi \frac{y_{i-1} + y_i}{2} \Delta s_i \quad \text{delarik.}$$



240. IRUDIA

Baina

$$\Delta s_i = \sqrt{\Delta x_i^2 + \Delta y_i^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\right)^2}\,\Delta x_i.$$

Lagrange-ren teorema aplikatuz

$$\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i} = \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}} \equiv f'(\xi_i), \quad x_{i-1} < \xi_i < x_i$$

izanik. Beraz

$$\Delta s_i = \sqrt{1 + f'^2(\xi_i)}\,\Delta x_i,$$

$$\Delta P_i = 2\pi \frac{y_{i-1} + y_i}{2} \sqrt{1 + f'^2(\xi_i)}\,\Delta x_i.$$

Honelatan bada, lerro poligonalak eratutako azalera ondoko hau izango da:

$$P_n = 2\pi \sum_{i=1}^{n} \frac{y_{i-1} + y_i}{2} \sqrt{1 + f'^2(\xi_i)}\,\Delta x_i,$$

edo

$$P_n = \pi \sum_{i=1}^{n} \left[f(x_{i-1}) + f(x_i)\right] \sqrt{1 + f'^2(\xi_i)}\,\Delta x_i, \qquad (1)$$

non batura poligonalaren maila guztietara zabaltzen bait da. Batura horren limitea, (Δs_i) lerro poligonalaren alderdirik handienak zerorantz jotzen duenean, *biraketa-gainazalaren azalera* deitzen da.

(1) batura ez da

$$2\pi f(x)\sqrt{1+f'(x)^2} \tag{2}$$

funtzioaren batura integral bat, zeren $[x_{i-1}, x_i]$ tarteari dagokion batugaian, tartearen zenbait puntu bait dago: x_{i-1}, x_i, ξ_i alegia. Hala eta guztiz ere, (1) baturaren limitea eta (2) funtzioaren batura integralaren limitea berdinak direla froga daiteke, hau da,

$$P = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \pi \sum_{i=1}^{n} \left[f(x_{i-1}) + f(x_i) \right] \sqrt{1+f'(\xi_i)^2}\, \Delta x_i =$$

$$= \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \pi \sum_{i=1}^{n} 2f(\xi_i)\, \sqrt{1+f'(\xi_i)^2}\, \Delta x_i,$$

edo

$$P = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1+f'(x)}\; dx. \tag{3}$$

Adibidea. Kalkulatu $y^2 = 2px$ parabolak, Ox ardatzaren inguruan biratzean, $0 \le x \le a$ tartean sortzen duen paraboloidearen azalera.

Ebazpena.

$$y = \sqrt{2px}, \quad y' = \frac{\sqrt{2p}}{2\sqrt{x}}, \quad \sqrt{1+y'^2} = \sqrt{1+\frac{2p}{4x}} = \sqrt{\frac{2x+p}{2x}}.$$

(3) formula aplikatuz,

$$P = 2\pi \int_0^a \sqrt{2px}\sqrt{\frac{2x+p}{2x}}\; dx = 2\pi\sqrt{p}\int_0^a \sqrt{2x+p}\; dx =$$

$$= 2\pi\sqrt{p}\,\frac{2}{3}(2x+p)^{3/2}\frac{1}{2}\Big|_0^a = \frac{2\pi\sqrt{p}}{3}\left[(2a+p)^{3/2} - p^{3/2}\right].$$

§ 7. Lanaren kalkulua integral mugatuaren bidez

Demagun, F indarraren eraginez, M puntu materiala Os zuzenean zehar desplazatzen dela eta indarraren norabidea, mugimenduaren norabidearekin bat datorrela. $s=a$ posiziotik $s=b$ posiziora M puntuaren desplazamenduan F indarrak egiten duen lana kalkulatu nahi da.

1) F indarra konstante bada, A lana F indarraren eta M puntuak ibilitako bidearen arteko biderkadura bezala adieraziko da:

$$A = F(b-a).$$

2) Demagun F indarra aldakorra dela eta puntu materialaren posizioaren funtzioan, era jarraian, aldatzen dela, hau da, $F(s)$ funtzio jarraia dela $a \le s \le b$ tartean.

Bana dezagun $[a,b]$ tartea hautazko n zatitan, beraien luzerak

$$\Delta s_1, \Delta s_2, \ldots, \Delta s_n \quad \text{izanik.}$$

Aukera dezagun orain ξ_i, edozein puntu, $[s_{i-1}, s_i]$ tarte partzial bakoitzean eta ordezka dezagun $F(s)$ indarrak, Δs_i $(i=1,2\ldots n)$ tartean egiten duen lana, ondoko biderkadura honetaz

$$F(\xi_i)\Delta s_i.$$

Horrela, tarte partzial bakoitzean F indarra konstante bezala hartzen dugu, hau da, $F = F(\xi_i)$. Kasu honetan, $F(\xi_i)\,\Delta s_i$ adierazpenak, Δs_i nahikoa txikia izanik, F indarrak Δs_i tartean egiten duen lanaren balio hurbildua adieraziko du eta

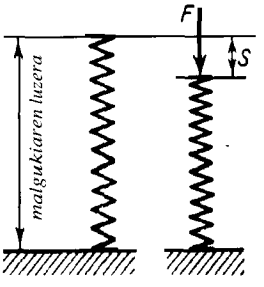
$$A_n = \sum_{i=1}^{n} F(\xi_i)\Delta s_i$$

batura F indarrak $[a,b]$ tarte osoan egiten duen lanaren adierazpen hurbildua izango da.

Argi dago A_n-k $F = F(s)$ funtzioaren batura integrala adierazten duela $[a,b]$ tartean. Batura horren limitea, $\max(\Delta s_i) \to 0$ denean, existitzen da, eta $s=a$-tik $s=b$-raino doan bidean, $F(s)$ indarrak egindako lana adierazten du:

$$A = \int_a^b F(s)ds. \tag{1}$$

1. Adibidea. Malguki helikoidal baten S konpresioa bere gain eragiten duen F indarrarekiko proportzionala da. Kalkulatu malgukia 5 cm konprimitzerakoan, F indarrak egiten duen lana, malgukia 1 cm konprima dadin 1 kg-ko indarra aplikatu behar bada (241. irudia).



241. IRUDIA

Ebazpena. Hipotesiaren arabera F indarra eta S desplazamendua, $F = kS$ ekuazioaz loturik daude, k konstantea izanik. Eman dezagun S metrotan eta F kilogramotan. $S = 0{,}01$ bada $F = 1$, hau da, $1 = k \cdot 0{,}01$; beraz, $k = 100$, $F = 100S$.

(1) formularen bidez:

$$A = \int_0^{0,05} 100S\, dS = 100\frac{S^2}{2}\Bigg|_0^{0,05} = 0{,}125 \text{ kg}.$$

2. Adibidea. Bata bestearekiko r distantziara kokaturik dauden zeinu berdineko e_1 eta e_2 bi karga elektrikoen arteko aldaratze-indarra, ondoko formula honen bidez adierazten da:

$$F = k\frac{e_1 e_2}{r^2},$$

non k konstantea bait da.

Kalkulatu A_1 puntutik A_2 punturaino e_2 karga desplazatzeko F indarrak egindako lana, A_1 eta A_2 puntuak e_1 kargatik r_1 eta r_2 distantzietara, hurrenez hurren, kokaturik badaude. e_1 karga jatorritzat hartutako A_0 puntuan kokaturik dagoela suposatuko dugu.

Ebazpena. (1) ekuazioaren arabera:

$$A = \int_{r_i}^{r_2} k\frac{e_1 e_2}{r^2}\, dr = -ke_1e_2\frac{1}{r}\Bigg|_{r_1}^{r_2} = ke_1e_2\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)$$

$r_2 = \infty$ kasurako:

$$A = \int_{r_1}^{\infty} \frac{ke_1e_2}{r^2}\,dr = \frac{ke_1e_2}{r_1}.$$

$e_2 = 1$ denean $A = k\dfrac{e_1}{r_1}$. Azkeneko magnitude horri e_1 kargak sortutako *eremuaren potentzial* deritzo.

§ 8. Grabitate-zentruaren koordenatuak

Biz Oxy planoan ondoko puntu materialen sistema

$$P_1(x_1, y_1),\ P_2(x_2, y_2), \ldots, P_n(x_n, y_n),$$

beraien masak $m_1, m_2, \ldots, m_n$ hurrenez hurren direlarik.

$x_i m_i$ eta $y_i m_i$ biderkadurei, Oy eta Ox ardatzekiko m_i masaren *momentu estatiko* deritze.

Emandako sistemaren grabitate-zentruaren koordenatuak, x_c eta y_c izendatuko ditugu. Puntu materialen sistemaren grabitate-zentruaren koordenatu horiek ondoko formulen bidez kalkulatzen dira:

$$x_c = \frac{x_1m_1 + x_2m_2 + \ldots + x_nm_n}{m_1 + m_2 + \ldots + m_n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i m_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}, \tag{1}$$

$$y_c = \frac{y_1m_1 + y_2m_2 + \ldots + y_nm_n}{m_1 + m_2 + \ldots + m_n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i m_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}. \tag{2}$$

Erabil ditzagun formula horiek zenbait gorputz eta irudiren grabitate-zentruak bilatzeko.

1. Kurba laun baten grabitate-zentrua. Demagun $y = f(x)$, $a \le x \le b$ ekuazioak AB kurba material bat definitzen duela.

Biz γ kurba material horren dentsitate lineala[2]. Bana dezagun kurba n zatitan, luzerak $\Delta s_1, \Delta s_2, \ldots, \Delta s_n$ izanik. Zati horien masak, dentsitatearen eta dagokien luzeren arteko biderkadurak izango dira (γ dentsitatea konstante delarik): $\Delta m_i = \gamma \Delta s_i$. Har dezagun kurbaren Δs_i zati bakoitzean ξ_i edozein abzisadun puntua. Kurbaren Δs_i zati bakoitzean $\gamma \Delta s_i$ masa duen $P_i[\xi_i, f(\xi_i)]$ puntu materiala hartuz eta (1) eta (2) formuletan x_i eta y_i, hurrenez hurren, ξ_i eta $f(\xi_i)$ balioez ordezkatuz eta baita m_i, $\gamma \Delta s_i$ (Δs_i zatiaren masa) balioaz ere, kurbaren grabitate-zentrua kalkulatzeko formula hurbilduak lortuko ditugu:

$$x_c \approx \frac{\sum \xi_i \gamma \Delta s_i}{\sum \gamma \Delta s_i}, \quad y_c \approx \frac{\sum f(\xi_i) \gamma \Delta s_i}{\sum \gamma \Delta s_i}.$$

$y = f(x)$ funtzioa eta bere funtzio deribatua jarraiak badira, zatiki bietan zenbakitzaile eta izendatzaileko baturen limiteek, $\max \Delta s_i \to 0$ denean, dagokien batura integralen limiteetara jotzen dute. Honela, kurbaren grabitate-zentruaren koordenatuak ondoko integral mugatuen bidez adierazten dira:

$$x_c = \frac{\int_a^b x\, ds}{\int_a^b ds} = \frac{\int_a^b x\sqrt{1 + f'^2(x)}\, dx}{\int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)}\, dx}, \tag{1'}$$

$$y_c = \frac{\int_a^b f(x)\, ds}{\int_a^b ds} = \frac{\int_a^b f(x)\sqrt{1 + f'^2(x)}\, dx}{\int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)}\, dx}, \tag{2'}$$

1. Adibidea. Kalkulatu, Ox ardatzaren gainetik kokaturik dagoen $x^2 + y^2 = a^2$ zirkunferentzierdiaren grabitate-zentruaren koordenatuak.

Ebazpena. Kalkula dezagun grabitate-zentruaren abzisa:

---

2) Dentsitate linealak kurbaren luzera-unitate baten masa adierazten du. Kurbaren puntu guztietan dentsitate lineala berdina dela suposatuko dugu.

$$y=\sqrt{a^2-x^2},\quad \frac{dy}{dx}=-\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}},\quad ds=\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx=\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx,$$

$$x_c=\frac{a\displaystyle\int_{-a}^{a}\frac{x\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}}}{a\displaystyle\int_{-a}^{a}\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}}=\frac{-a\sqrt{a^2-x^2}\Big|_{-a}^{a}}{a\arcsin\dfrac{x}{a}\Big|_{-a}^{a}}=\frac{0}{\pi a}=0.$$

Kalkula dezagun orain grabitate-zentruaren ordenatua:

$$y_c=\frac{\displaystyle\int_{-a}^{a}\sqrt{a^2-x^2}\,\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx}{\pi a}=\frac{a\displaystyle\int_{-a}^{a}dx}{\pi a}=\frac{2a^2}{\pi a}=\frac{2a}{\pi}.$$

2. Irudi laun baten grabitate-zentrua. Demagun $y=f_1(x)$, $y=f_2(x)$, $x=a$, $x=b$ kurbek irudi laun material bat mugatzen dutela. Gainazal-dentsitatea (gainazalaren azalera-unitate baten masa) irudi osoan konstante dela suposatuko dugu, bere balioa δ izanik.

Zatika dezagun emandako irudia xafla paraleloetan $x=a, x=x_1, \ldots, x=x_n=b$, zuzenen bidez, xaflen zabalerak $\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_n$ izanik.

Xafla bakoitzaren masa dagokion azaleraren eta δ dentsitatearen arteko biderkadura izango da. Xafla bakoitza Δx_i oinarria eta $f_2(\xi_i)-f_1(\xi_i)$ altuera dituen laukizuzenaz ordezkatuz (242. irudia),

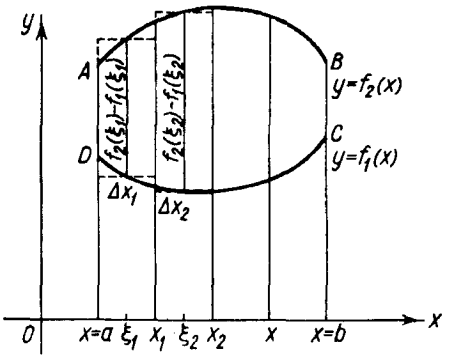
$$\xi_i=\frac{x_{i-1}+x_i}{2}$$

izanik, xafla horren masa ondoko hau izango da gutxi gora-behera:

$$\Delta m_i=\delta\left[f_2(\xi_i)-f_1(\xi_i)\right]\Delta x_i \qquad (i=1,2,\ldots,n).$$

Xafla horren grabitate-zentrua, gutxi gora-behera, dagokion laukizuzenaren zentruan egongo da:

$$(x_i)_c=\xi_i;\qquad (y_i)_c=\frac{f_2(\xi_i)+f_1(\xi_i)}{2}.$$



242. IRUDIA

Xafla bakoitza puntu material batez ordezkatuz eta xafla bakoitzaren masa dagokion grabitate-zentruan kokatuz, irudiaren grabitate-zentruaren koordenatuen balio hurbilduak lortuko ditugu ((1) eta (2) formulen arabera):

$$x_c \approx \frac{\sum \xi_i \delta[f_2(\xi_i) - f_1(\xi_i)]\Delta x_i}{\sum \delta[f_2(\xi_i) - f_1(\xi_i)]\Delta x_i},$$

$$y_c = \frac{\frac{1}{2}\sum [f_2(\xi_i) + f_1(\xi_i)]\delta[f_2(\xi_i) - f_1(\xi_i)]\Delta x_i}{\sum \delta[f_2(\xi_i) - f_1(\xi_i)]\Delta x_i}.$$

Limitera pasatuz $\Delta x_i \to 0$ denean, emandako irudiaren grabitate-zentruaren koordenatu zehatzak lortuko ditugu:

$$x_c = \frac{\int_a^b x[f_2(x) - f_1(x)]dx}{\int_a^b [f_2(x) - f_1(x)]dx};$$

$$y_c = \frac{\frac{1}{2}\int_a^b [f_2(x) + f_1(x)][f_2(x) - f_1(x)]dx}{\int_a^b [f_2(x) - f_1(x)]dx}.$$

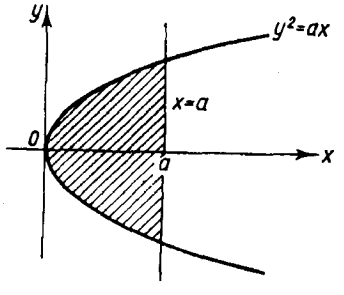
Formula horiek irudi laun homogeno (puntu guztietan dentsitatea konstante duena) guztietarako balio dute. Ikusten den bezala, grabitate-zentruaren koordenatuak ez daude δ irudiaren dentsitatearen menpe (δ kalkulu-prozesuan ezabatu da).

2. Adibidea. Aurkitu $x = a$ zuzenak mugatutako $y^2 = ax$ parabolaren segmentuaren grabitate-zentruaren koordenatuak (243. irudia).

Ebazpena. Emandako kasuan $f_2(x) = \sqrt{ax}, f_1(x) = -\sqrt{ax}$; beraz:

$$x_c = \frac{2\int_0^a x\sqrt{ax}\,dx}{2\int_0^a \sqrt{ax}\,dx} = \frac{\frac{2}{5}2\sqrt{a}x^{5/2}\Big|_0^a}{2\sqrt{a}\frac{2}{3}x^{3/2}\Big|_0^a} = \frac{\frac{4}{5}a^3}{\frac{4}{3}a^2} = \frac{3}{5}a,$$

eta $y_c = 0$ (segmentua Ox ardatzarekiko simetrikoa bait da).



243. IRUDIA

§ 9. Lerro, zirkulu eta zilindroen inertzi momentuen kalkulua integral mugatuaren bidez

Biz Oxy planoan puntu materialen sistema bat

$$P_1(x_1, y_1),\ P_2(x_2, y_2),\ \ldots,\ P_n(x_n, y_n),$$

dagozkien masak $m_1, m_2, \ldots, m_n$ izanik.

Mekanikaren arabera, puntu materialen sistema baten O puntuarekiko inertzi momentua ondoko era honetan aurkitzen da:

$$I_O = \sum_{i=1}^{n} (x_i^2 + y_i^2) m_i \tag{1}$$

edo

$$I_O = \sum_{i=1}^{n} r_i^2 m_i, \tag{1'}$$

$$r_i = \sqrt{x_i^2 + y_i^2} \quad \text{izanik.}$$

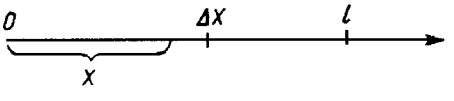
AB kurba, § 8an bezala, $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$ ekuazioaren bidez emana dago.

Suposa dezagun AB kurba materiala dela eta bere dentsitate lineala γ dela. Bana dezagun berriro lerroa $\Delta s_1, \Delta s_2, ..., \Delta s_n$ luzerak dituzten n zatitan,

$$\Delta s_i = \sqrt{\Delta x_i^2 + \Delta y_i^2}$$

delarik. Zati horien masak dentsitatearen eta dagokien luzeraren arteko biderkadurak dira: $\Delta m_i = \gamma \Delta s_i$.

Har dezagun zati bakoitzean ξ_i abzisa duen hautazko puntu bat. Puntu horren ordenatua ondoko hau izango da $\eta_i = f(\xi_i)$.



243'. IRUDIA

O jatorriarekiko kurbaren inertzi momentua, (1) formularen arabera, ondoko hau izango da gutxi gora-behera:

$$I_O \approx \sum_{i=1}^{n} (\xi_i^2 + \eta_i^2) \gamma \Delta s_i. \tag{2}$$

$y = f(x)$ funtzioa eta $f'(x)$ deribatua jarraiak baldin badira, $\max \Delta s_i \to 0$ denean (2) baturak limitea du. Limite hori integral mugatu baten bidez adierazten da eta lerro materialaren inertzi momentua adierazten du.

$$I_0 = \gamma \int_a^b \left[x^2 + f(x)^2\right] \sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx. \qquad (3)$$

***l* luzerako barra homogeno baten inertzi momentua, bere muturrarekiko.** Egin dezagun bat barra Ox ardatzaren segmentuarekin $(0 \le x \le l)$ (243'. irudia).

Kasu honetan

$$\Delta s_i = \Delta x_i, \qquad \Delta m_i = \gamma \Delta x_i, \qquad r_i^2 = x_i^2.$$

(3) formulak ondoko forma hartzen du:

$$I_{Ol} = \gamma \int_0^l x^2\, dx = \gamma \frac{l^3}{3}. \qquad (4)$$

Barraren M masa ezagutzen bada, $\gamma = \dfrac{M}{l}$ da, eta (4) formula honela idazten da:

$$I_{Ol} = \frac{1}{3} M l^2. \qquad (5)$$

***r* erradioko eraztun baten inertzi momentua zentruarekiko.** Eraztunaren puntuak a zentruarekiko r distantziara daudenez eta eraztunaren masa $m = 2\pi r \gamma$ denez, eraztunaren inertzi momentua hauxe izango da:

$$I_{Oa} = mr^2 = \gamma 2\pi r \cdot r^2 = \gamma 2\pi r^3. \qquad (6)$$

***R* erradioko zirkulu homogeno baten inertzi momentua zentruarekiko.** Biz δ zirkuluaren azalera-unitatearen masa. Zatika dezagun zirkulua n eraztunetan (243". irudia).

Eraztun bat kontsideratuko dugu. Bira r_i bere barneko erradioa eta $r_i + \Delta r_i$ kanpokoa. Eraztun horren masa Δm_i, ondokoa izango da

$$\Delta m_i = \delta 2\pi r_i \Delta r_i,$$

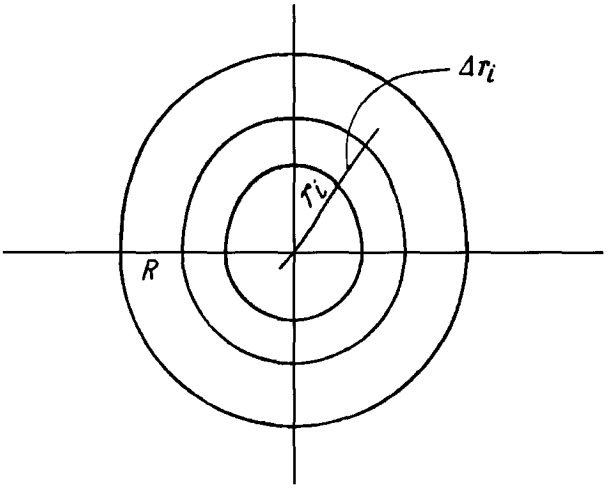
errorea Δr_i baino ordena handiagoko infinitesimoa izanik.

(6) formularen arabera zentruarekiko bere masaren inertzi momentua gutxi gora--behera ondokoa izango da:

$$(\Delta J_0)_i \approx \delta 2\pi r_i \Delta r_i \cdot r_i^2 = \delta 2\pi r_i^3 \Delta r_i .$$

Zirkulu osoaren inertzi momentua, eraztun guztien multzoa bezala kontsideratuz, ondoko formula honen bidez adieraziko da:

$$J_0 \approx \sum_{i=1}^{n} \delta 2\pi r_i^3 \Delta r_i . \tag{7}$$



243". IRUDIA

Limitera pasatuz $\max \Delta r_i \to 0$ denean zirkuluaren gainazalaren inertzi momentua lortuko dugu bere zentruarekiko:

$$J_0 = \delta 2\pi \int_0^R r^3 dr = \pi\delta \frac{R^4}{2}. \tag{8}$$

Zirkuluaren M masa ezagutzen bada, δ gainazal-dentsitatea ondokoa izango da:

$$\delta = \frac{M}{\pi R^2}.$$

Balio hori (8) formulan sartuz, azken adierazpen hau lortzen dugu:

$$J_0 = M\frac{R^2}{2}. \qquad (9)$$

Bistakoa da, R erradioko eta M masako zilindro zuzena badugu, ardatzarekiko inertzi momentua (9) formularen bidez adieraziko dela.

Ariketak

Azaleren kalkulua

1. Kalkulatu $y^2 = 9x$, $y = 3x$ kurbek mugatutako irudiaren azalera. Emaitza: $\frac{1}{2}$.

2. Kalkulatu $xy = a^2$ hiperbola aldeberdinak, Ox ardatzak eta $x = a$, $x = 2a$ zuzenek mugatutako irudiaren azalera. Em.: $a^2 \ln 2$.

3. Kalkulatu $y = 4 - x^2$ kurbak eta Ox ardatzak mugatutako irudiaren azalera. Em.: $10\frac{2}{3}$.

4. Kalkulatu $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ hipozikloideak mugatutako irudiaren azalera. Em.: $\frac{3}{8}\pi a^2$.

5. Kalkulatu $y = \frac{a}{2}(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}})$ katenariak, Ox eta Oy ardatzek eta $x = a$ zuzenak mugatutako irudiaren azalera. Em.: $\frac{a^2}{2e}(e^2 - 1)$.

6. Kalkulatu $y = x^3$ kurbak, $y = 8$ zuzenak eta Oy ardatzak mugatutako irudiaren azalera. Em.: 12.

7. Kalkulatu sinusoidearen uhinerdi batek eta abzisa-ardatzak mugatutako eremuaren azalera. Em.: 2.

8. Kalkulatu $y^2 = 2px$ eta $x^2 = 2py$ parabolek mugatutako eremuaren azalera.

Em.: $\frac{4}{3}p^2$.

9. Kalkulatu $y = x^3$, $y = 2x$, $y = x$ kurbek mugatutako irudiaren azalera totala.

Em.: $\frac{3}{2}$.

10. Kalkulatu $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ zikloidearen arku batek eta abzisa--ardatzak mugatutako eremuaren azalera. Em.: $3\pi a^2$.

11. Kalkulatu $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$ hipozikloideak mugatutako irudiaren azalera.

Em.: $\frac{3}{8}\pi a^2$.

12. Kalkulatu $\rho^2 = a^2 \cos 2\varphi$ lemniskatak mugatutako eremuaren azalera totala. Em.: a^2.

13. Kalkulatu $\rho = a\sin 2\varphi$ kurbaren bigizta batek mugatutako eremuaren azalera.

Em.: $\frac{1}{8}\pi a^2$.

14. Kalkulatu $\rho = a(1 - \cos\varphi)$ kardiodeak mugatutako eremuaren azalera totala.

Em.: $\frac{3}{2}\pi a^2$.

15. Kalkulatu $\rho = a\cos\varphi$ kurbak mugatutako eremuaren azalera. Em.: $\frac{\pi a^2}{4}$.

16. Kalkulatu $\rho = a\cos 2\varphi$ kurbak mugatutako eremuaren azalera. Em.: $\frac{\pi a^2}{2}$.

17. Kalkulatu $\rho = \cos 3\varphi$ kurbak mugatutako eremuaren azalera. Em.: $\frac{\pi}{4}$.

18. Kalkulatu $\rho = a\cos 4\varphi$ kurbak mugatutako eremuaren azalera. Em.: $\dfrac{\pi a^2}{2}$.

Bolumenen kalkulua

19. Kalkulatu $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ elipseak Ox ardatzaren inguruan biratzean sortutako biraketa-gorputzaren bolumena. Em.: $\dfrac{4}{3}\pi ab^2$.

20. Koordenatu-jatorria (a,b) puntuarekin lotzen duen zuzenaren segmentua Oy ardatzarekiko biratzen da. Kalkulatu sortarazitako konoaren bolumena. Em.: $\dfrac{1}{3}\pi a^2 b$.

21. Kalkulatu $x^2 + (y-b)^2 = a^2$ zirkuluak Ox ardatzaren inguruan biratzean sortutako toruaren bolumena ($b \geq a$ suposatu). Em.: $2\pi^2 a^2 b$.

22. Kalkulatu $y^2 = 2px$ eta $x = a$ kurbek mugatutako irudiak Ox ardatzaren inguruan biratzean sortutako biraketa-gorputzaren bolumena. Em.: $\pi p a^2$.

23. Kalkulatu $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ hipozikloideak mugatutako irudiak Ox ardatzaren inguruan biratzean sortutako biraketa-gorputzaren bolumena. Em.: $\dfrac{32\pi a^3}{105}$.

24. Kalkulatu $y = \sin x$ sinusoidearen arku batek eta Ox ardatzak mugatutako irudiak, Ox ardatzaren inguruan biratzean sortutako biraketa-gorputzaren bolumena. Em.: $\dfrac{\pi^2}{2}$.

25. Kalkulatu $y^2 = 4x$ parabolak eta $x = 4$ zuzenak mugatutako irudiak Ox ardatzaren inguruan biratzean sortutako biraketa-gorputzaren bolumena. Em.: 32π.

26. Kalkulatu $y = xe^x$ kurbak eta $y = 0$, $x = 1$ zuzenek mugatutako irudiak Ox ardatzaren inguruan biratzean sortutako biraketa-gorputzaren bolumena. Em.: $\frac{\pi}{4}(e^2 - 1)$.

27. Kalkulatu $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ zikloidearen arku batek eta Ox ardatzak mugatutako irudiak Ox ardatzaren inguruan biratzean sortutako biraketa-gorputzaren bolumena. Em.: $5\pi^2 a^3$.

28. Kalkulatu 27. ariketako irudiak Oy ardatzarekiko inguruan biratzean sortutako biraketa-gorputzaren bolumena. Em.: $6\pi^3 a^3$.

29. 27. ariketan emandako irudia Oy ardatzarekiko paraleloa den eta zikloidearen erpinetik pasatzen den zuzenaren inguruan biratzen da. Kalkulatu sortutako biraketa--gorputzaren bolumena. Em.: $\frac{\pi a^3}{6}(9\pi^2 - 16)$.

30. 27. ariketan emandako irudia Ox ardatzarekiko paraleloa den eta zikloidearen erpinetik pasatzen den zuzenaren inguruan biratzen da. Kalkulatu sortutako biraketa--gorputzaren bolumena. Em.: $7\pi^2 a^3$.

31. R erradioko zilindro bat bere oinarriaren diametro batetik pasatzen den plano batekin ebakitzen da, plano horrek oinarriaren planoarekin osatutako angelua α izanik. Kalkulatu moztutako gorputzaren bolumena. Em.: $\frac{2}{3}R^3 \tan\alpha$.

32. Kalkulatu $x^2 + y^2 = R^2$, $y^2 + z^2 = R^2$ bi zilindroen bolumen komuna. Em.: $\frac{16}{3}R^3$.

33. Karratu baten diagonalen elkargunea a erradioko zirkunferentzia baten diametroan zehar desplazatzen da; karratuaren planoa zirkuluaren planoarekiko elkartzut mantentzen da beti, karratuaren bi aurkako erpinak zirkunferentzia batean euskarritzen

diren bitartean (argi dago mugimenduan karratuaren magnitudea aldatzen dela).

Kalkulatu karratu mugikor horrek sortzen duen gorputzaren bolumena. Em.: $\frac{8}{3}a^3$.

34. Kalkulatu $\frac{y^2}{2p}+\frac{z^2}{2q}=x$ paraboloide eliptikoa $x=a$ planoarekin ebakitzerakoan lortzen den segmentuaren bolumena. Em.: $\pi a^2\sqrt{pq}$.

35. Kalkulatu $z=0,\ y=0$ planoek, $x^2=2py,\ z^2=2px$ gainazal zilindrikoek eta $x=a$ planoak mugatzen duten gorputzaren bolumena. Em.: $\frac{a^3\sqrt{2a}}{7\sqrt{p}}$ (lehenengo triedroan).

36. Zuzen bat Oyz planoarekiko paraleloki mugitzen da $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ elipsetan euskarrituz, elipscak hurrenez hurren Oxy eta Oxz planoetan kokaturik daudelarik. Kalkulatu lortutako gorputzaren bolumena. Em.: $\frac{8}{3}abc$.

Arkuen luzeren kalkulua

37. Kalkulatu $x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}$ hipozikloidearen luzera totala. Em.: $6a$.

38. Kalkulatu koordenatu-jatorriaren eta $x=5a$ abzisako puntuaren artean dagoen $ay^2=x^3$ parabola erdikubikoaren arkuaren luzera. Em.: $\frac{335}{27}a$.

39. Kalkulatu koordenatu-jatorriaren eta (x,y) puntuaren artean dagoen $y=\frac{a}{2}(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}})$ katenariaren arkuaren luzera. Em.: $\frac{a}{2}(e^{\frac{x}{a}}-e^{-\frac{x}{a}})=\sqrt{y^2-a^2}$.

40. Kalkulatu $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ zikloidearen arku baten luzera. Em.: $8a$.

41. Kalkulatu $y = \ln x$ kurbaren arkuaren luzera, $x = \sqrt{3}$, $x = \sqrt{8}$ mugen artean.

Em.: $1 + \frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}$.

42. Kalkulatu $y = 1 - \ln\cos x$ kurbaren arkuaren luzera, $x = 0$, $x = \frac{\pi}{4}$ mugen artean.

Em.: $\ln\tan\frac{3\pi}{8}$.

43. Kalkulatu $\rho = a\varphi$ Arkimedes-en kiribilaren lehenengo kiribilaren luzera, polotik

hasita. Em.: $\pi a\sqrt{1+4\pi^2} + \frac{a}{2}\ln(2\pi + \sqrt{1+4\pi^2})$.

44. Kalkulatu $\rho = e^{\alpha\varphi}$ kiribil logaritmikoaren luzera polotik (ρ, φ) punturaino.

Em.: $\frac{\sqrt{1+\alpha^2}}{\alpha}e^{\alpha\varphi}$ edo $\frac{\rho}{\alpha}\sqrt{1+\alpha^2}$.

45. Kalkulatu $\rho = a\sin^3\frac{\varphi}{3}$ kurbaren luzera totala. Em.: $\frac{3}{2}\pi a$.

46. Kalkulatu $x = \frac{c^2}{a}\cos^3 t$; $y = \frac{c^2}{b}\sin^3 t$ elipsearen ebolutaren luzera.

Em.: $\frac{4(a^3 - b^3)}{ab}$.

47. Kalkulatu $\rho = a(1 + \cos\varphi)$ kardioidearen luzera. Em.: $8a$.

48. Kalkulatu $x = a(\cos\varphi + \varphi\sin\varphi)$, $y = a(\sin\varphi - \varphi\cos\varphi)$ zirkuluaren bilkariaren

arkuaren luzera $\varphi = 0$tik $\varphi = \varphi_1$-eraino. Em.: $\frac{1}{2}a\varphi_1^2$.

Biraketa-gorputzen gainazalen azaleren kalkulua

49. Kalkulatu $y^2 = 4ax$ parabolak Ox ardatzaren inguruan biratzean sortutako gainazalaren azalera, O koordenatu-jatorritik $x = 3a$ abzisako punturaino.

    Em.: $\frac{56}{3}\pi a^2$.

50. Kalkulatu $x = 0$ eta $x = 2$ tartean mugatutako $y = 2x$ zuzenaren segmentuak sortzen duen konoaren gainazalaren azalera:

    a) Ox ardatzaren inguruan biratzean. Em.: $8\pi\sqrt{5}$.

    b) Oy ardatzaren inguruan biratzean. Em.: $4\pi\sqrt{5}$.

51. Kalkulatu $x^2 + (y-b)^2 = a^2$ zirkuluak Ox ardatzaren inguruan biratzean sortutako toruaren gainazalaren azalera. Em.: $4\pi^2 ab$.

52. Kalkulatu kardioideak Ox ardatzaren inguruan biratzean sortutako gorputzaren gainazalaren azalera. Kardioidearen ekuazio parametrikoak $x = a(2\cos\varphi - \cos 2\varphi)$, $y = a(2\sin\varphi - \sin 2\varphi)$ dira. Em.: $\frac{128}{5}\pi a^2$.

53. Kalkulatu $x = a(t - \sin t)$; $y = a(1 - \cos t)$ zikloidearen arku batek Ox ardatzaren inguruan biratzean sortutako gorputzaren gainazalaren azalera. Em.: $\frac{64\pi a^2}{3}$.

54. Zikloidearen arkua (ikus 53. ariketa) Oy ardatzaren inguruan biratzen da. Kalkulatu sortutako biraketa-gorputzaren gainazalaren azalera. Em.: $16\pi^2 a^2$.

55. Zikloidearen arkua (ikus 53. ariketa) bere erpinetik pasatzen den eta Ox ardatzarekiko paraleloa den ukitzailearen inguruan biratzen da. Kalkulatu sortutako biraketa-gorputzaren gainazalaren azalera. Em.: $\frac{32\pi a^2}{3}$.

56. $x = a\sin^3 t$, $y = a\cos^3 t$ astroidea Ox ardatzaren inguruan biratzen da. Kalkulatu sortutako biraketa-gorputzaren gainazalaren azalera. Em.: $\dfrac{12\pi a^2}{5}$.

57. $y = \sin x$ sinusoidearen arkua, $x = 0$ baliotik $x = 2\pi$ balioraino, Ox ardatzaren inguruan biratzen da. Kalkulatu sortutako biraketa-gorputzaren gainazalaren azalera. Em.: $4\pi\left[\sqrt{2} + \ln(\sqrt{2}+1)\right]$.

58. $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ $(a > b)$ elipsea Ox ardatzaren inguruan biratzen da. Kalkulatu sortutako biraketa-gorputzaren gainazalaren azalera. Em.: $2\pi b^2 + 2\pi ab\dfrac{\arcsin e}{c}$, $e = \dfrac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$ izanik.

Integral mugatuaren zenbait aplikazio

59. Kalkulatu $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ $(x \geq 0, y \geq 0)$ elipsearen koadrantearen gainazalaren grabitate-zentrua. Em.: $\dfrac{4a}{3\pi}; \dfrac{4b}{3\pi}$.

60. Kalkulatu $x^2 + 4y - 16 = 0$ parabolak eta Ox ardatzak mugatzen duten irudiaren grabitate-zentrua. Em.: $\left(0, \dfrac{8}{5}\right)$.

61. Kalkulatu esferaerdiaren bolumenaren grabitate-zentrua. Em.: Simetri ardatzean, oinarritik $\dfrac{3}{8}R$-ko distantziara.

62. Kalkulatu esferaerdiaren gainazalaren grabitate-zentrua. Em.: Simetri ardatzean, oinarritik $\frac{R}{2}$-ko distantziara.

63. Kalkulatu kono zuzen zirkular baten gainazalaren grabitate-zentrua, oinarriaren erradioa R eta altuera h izanik. Em.: Simetri ardatzean, oinarritik $\frac{h}{3}$-ko distantziara.

64. Kalkulatu $y = \sin x$ $(0 \le x \le \pi)$, $y = 0$ kurbek mugatutako irudiaren gainazalaren grabitate-zentrua. Em.: $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{8}\right)$.

65. Kalkulatu $y^2 = 20x$, $x^2 = 20y$ parabolek mugatutako irudiaren gainazalaren grabitate-zentrua. Em.: (9; 9).

66. Kalkulatu zirkulu-sektore baten gainazalaren grabitate-zentrua, angelu zentrala 2α eta erradioa R izanik. Em.: Simetri ardatzean, sektorearen erpinetik $\frac{2}{3}R\frac{\sin\alpha}{\alpha}$-ko distantziara.

67. Kalkulatu uretan bertikalki murgildurik dagoen laukizuzen baten gain eragiten den presioa, oinarria 8 m-koa eta altuera 12 m-koa baldin badira. Goiko oinarria uraren gainazal askearekiko paraleloa da eta 5 m-ko sakoneran dago. Em.: 1056 tona.

68. Ataka baten goiko ertzak karratuaren forma du, aldea 8 m-koa izanik eta uraren ganazalarekin berdindua dago. Karratua bere diagonal batez erdibitzean bi triangelu lortzen dira. Kalkulatu triangelu bakoitzean eragiten den presioa. Em.: 85333,33 kg eta 170666,67 kg.

69. Kalkulatu 20 m-ko diametro duen esferaerdi itxurako ontzi batetik ura ponpatzeko behar den lana. Em.: $2{,}5 \cdot 10^6 \pi$ kgm.

70. Gorputz bat linealki mugitzen da $x = ct^3$ legearen arabera, non x, t denboran ibilitako distantzia bait da eta c konstantea. Ingurunearen erresistentzia abiaduraren karratuarekiko proportzionala da, k proportzionaltasun-koefizientea izanik. Kalkulatu erresistentziak eragindako lana, gorputza $x = 0$ puntutik $x = a$ punturaino desplazatzen denean. Em.: $\frac{27}{7} k \sqrt[3]{c^2 a^7}$.

71. Kalkulatu erpina berantz zuzendutako kono itxura duen ontzi batetik γ dentsitateko likidoa ponpatzeko behar den lana. H konoaren altuera eta R oinarriaren erradioa dira. Em.: $\frac{\pi \gamma R^2 H^2}{12}$.

72. Forma zilindrikoa duen egurrezko boia ur gainean dago. Zilindroaren H altuera 50 cm-koa da eta S oinarriaren azalera 4.000 cm^2-koa. Zein da egin behar den lana boia uretatik ateratzeko? (Egurraren pisu espezifikoa 0,8 da). Em.: $\frac{\gamma^2 H^2 S^2}{2} = 32$ kgm.

73. Kalkulatu trapezio aldekide forma duen presa batean urak eragindako presio totala. Presaren goiko oinarriak $a = 6,4$ m neurtzen du eta behekoak $b = 4,2$ m; H altuera 3m-koa da. Em.: 22,2 tona.

74. Kalkulatu galdara baten hondo esferikoan lurrinak eragiten duen presio totalaren P (kg) osagai axiala. Galdararen zati zilindrikoaren diametroa D mm-koa da. Galdaran lurrin-presioa P kg/cm^2-koa da. Em.: $P = \frac{\pi P D^2}{400}$.

75. r erradioko ardatz bertikal baten muturra oinarri laun batean euskarritzen da. Ardatzaren P pisua euskarriaren gainazal osotik uniformeki banatzen da. Kalkulatu ardatzaren biraketa batean marruskadura-indarrak egindako lan totala. Marruskadura--koefizientea μ da. Em.: $\frac{4}{3} \pi \mu P r$.

76. Ardatz bertikal bat kono-enbor forman bukatzen da. Oinarrian ardatzaren presio espezifikoa konstante da eta P baliokoa. Kono-enborraren goiko diametroa D da eta behekoa d. Konoaren erpinean angelua 2α da. Marruskadura-koefizientea μ

da. Kalkulatu ardatzaren biraketa batean marruskadura-indarrak egindako lana.

Em.: $\dfrac{\pi^2 P\mu}{6\sin\alpha}(D^3 - d^3)$.

77. l luzerako ziri prismatikoa 0tik P-ra geldiro handitzen den indarrarekin tinkatzen da, aldiune bakoitzean tentsio-indarra ziriaren elastizitate-indarrarekin orekatuta dagoelarik. Kalkulatu A tentsio-indarrak egindako lana, ziriaren luzaketa bere elastizitate-muga barruan egiten dela suposatuz. Ziriaren zeharreko sekzioaren azalera F da. Materialaren elastizitate-modulua E da.

Iradokizuna: Ziriaren luzapena x bada eta f dagokion indar aplikatua, $f = \dfrac{FE}{l}x$ beteko da. P indarraren eraginez lortutako luzapena $\Delta l = \dfrac{Pl}{EF}$ da.

Em.: $A = \dfrac{P\Delta l}{2} = \dfrac{P^2 l}{2EF}$.

78. Bertikalki zintzilikaturik dagoen barra prismatiko bati, bere beheko muturrean P tentsio-indarra aplikatzen zaio. Kalkulatu barraren luzapena, bere pisuaren eta P indarraren eraginez, barraren luzera pausaturik dagoenean l, zeharreko sekzioaren azalera F, barraren pisua Q eta materialaren elastizitate-modulua E baldin badira.

Em.: $\Delta l = \dfrac{(Q + 2P)l}{2EF}$.

79. Kalkulatu H altueraraino beteta eta forma prismatikoa duen ontzia husteko behar den denbora. Ontziaren zeharreko sekzioaren azalera F da eta zuloarena f. Zulotik ateratzen den likidoaren abiadura $v = \mu\sqrt{2gh}$ formularen bidez emana dator, non μ biskositate-koefizientea, g grabitatearen azelerazioa eta h zulotik likidoaren mailarainoko distantzia bait dira. Em.: $T = \dfrac{2FH}{\mu f\sqrt{2gH}} = \dfrac{F}{\mu f}\sqrt{\dfrac{2H}{g}}$.

80. Kalkulatu ur-emaria (hustutako ura denbora-unitate bateko) sekzio angeluzuzena duen zuloan zehar. Zuloaren altuera h eta zabalera b dira. Em.: $Q = \dfrac{2}{3}\mu bh\sqrt{2gh}$.

81. Kalkulatu a altuera eta b zabalera duen alboko zulo angeluzuzen batetik ateratzen den ur-emaria, uraren gainazal askearen altuera zuloaren beheko ertzaren gainetik H baldin bada. Em.: $Q = \dfrac{2b\mu\sqrt{2g}}{3}\left[H^{3/2} - (H-a)^{3/2}\right]$.

AURKIBIDE ALFABETIKOA

Abiadura 74
(Funtzioaren) adierazpen analitikoa 10
(Zenbaki konplexuen) adierazpen geometrikoa 306
(Funtzioaren) adierazpen grafikoa 10
(Funtzioen adierazpen parametrikoa 121-123
(Zenbaki konplexuen) adierazpen trigonometrikoa 307
(Kurbaren) ahurtasuna 235, 236
Aldagai beherakorra 7
Aldagai bornatua 7
Aldagai gorakorra 7
Aldagai independentea 8
Aldagai independentearen diferentziala 135, 136
Aldagai ordenatua 7
Aldagai-aldaketa 480
Aldagai-aldaketaren bidezko integrazioa 480-483
Alderantzizko funtzioa 108-113
Alderantzizko funtzioaren deribatua 110
Algebraren oinarrizko teorema 322
(Kontingentzi) angelua 274
(Zenbakizko) ardatza 1
Ardatz irudikaria 307
Ardatz erreala 307
Ardatz polarra 19
Argumentua 8
(Tarteko) argumentua 96
(Zenbaki konplexuen) argumentua 307
Arkimedes-en kiribila 20, 282, 302, 650
Arkuaren diferentziala 273
Arku-luzera 271, 621-629
(Koordenatu polarretako) arku-luzera 626
Asintota 242
Astroidea 127, 257, 624
Atzerapen-puntua 418, 420
Azalera 615-620
(Biraketa-gainazalen) azalera 634
(Biraketa-gorputzen) azalera 632
(Gainazalen) azalera 900
Azelerazioa 149
Azpinormala 153
Azpiukitzailea 153
Balio absolutua 3
(Eremuaren) barne-puntua 340
Batuketaren deribatua 90
Batura integrala 553
(Behe- eta goi-)batura integrala 551
Bektorearen hodografoa 430
Bektoreen deribazioa 441-443
Bernstein-en polinomioa 336
Bezout-en teorema 321
Biderkaketaren deribatua 91
Bihurdura 458
Bihurdura-erradioa 458
Bilkaria 287, 293
Binomio diferentziala 517, 521
Binormala 456
Biraketa-gainazala 634
Biraketa-gainazalen azalera 634
Biraketa-gorputzen azalera 632
Biraketa-paraboloidea 634
Bolumena 629, 631
Briggs-en logaritmoak 55

Cauchy-ren teorema 183
Chebishev-en formula 600
Chebishev-en polinomioa 336

Deribatua 77
(Alderantzizko funtzioaren) deribatua 110
(Batuketaren) deribatua 90
(Biderkaketaren) deribatua 91
(Funtzio bektorialaren) deribatua 434, 444
(Funtzio inplizituaren) deribatua 102, 145, 368-373
(Funtzio konplexuen) deribatua 318
(Funtzio konposatuaren) deribatua 95
(Konstantearen) deribatua 88
(n. ordenako) deribatua 142-143
(Parametrikoki emandako funtzioaren) deribatua 127, 147
(Zatiketaren) deribatua 93
Deribatuaren adierazpen geometrikoa 79-81
Deribatuaren adierazpen mekanikoa 79, 149
Deribatu logaritmikoa 108
Deribatu partziala 350-352

(n. ordenako) deribatu partziala 373-378
Deribatu totala 368
Deribazioa 77
(Bektoreen) deribazioa 441-443
(Oinarrizko) deribazio-formulen taula 119
Descartes-en orria 257
(Frakzio razionalen) deskonposaketa frakzio sinpletan 497-502
Dibergentzia 980
Diferentziala 134-139
(Aldagai independentearen) diferentziala 135, 356
(Arkuaren) diferentziala 273
(Funtzio konposatuaren) diferentziala 139
(n. ordenako) diferentziala 145
Diferentzialaren formaren inbariantza 139
Diferentzial totala 353

e zenbakia 52
Eboluta 286, 290-294
Ekuazio algebraikoa 295, 322
(Lerro baten) ekuazio bektoriala 430
Ekuazio binomikoa 314
Ekuazio parametrikoak 121, 430
Elipsea 124, 154, 288, 618, 627, 629
Elipsoidea 630
(Definizio-)eremua 6
(Eskalare-)eremua 379
(Funtzioaren definizio-)eremua 9, 11, 340
Eremu irekia 341
Eremu itxia 341
(Bihurdura-)erradioa 458
(Ingurune baten) erradioa 7
(Kurbadur) erradioa 283, 449
Erradio bektorea 429
(Ekuazioaren) erroa 295
(Funtzioaren) erroa 179
(Polinomioaren) erroa 321-326
(Ekuazioen) erro errealen kalkulu hurbildua 295-299
Errorea 360-365
Esferaren bolumena 631
Eskalare-eremua 379
Etengunea 60
Euler-en formula 319
Euler-en ordezkapenak 512-517

(Zenbaki konplexuen) forma esponentziala 320
Frakzio razionala 492
Frakzio razionalen deskonposaketa frakzio sinpletan 497-502
Frakzio razionalen integrazioa 492-497, 502-506
Funtzioa 8
(Aldagai anitzeko) funtzioa 339
(Aldagai konplexuaren) funtzioa 315
(Alderantzizko) funtzioa 108-113
(Bi aldagaiko) funtzioa 339
(Heaviside-ren unitate) funtzioa
(Taulen bidez emaniko) funtzioak 9
Funtzioaren adierazpen analitikoa 10
Funtzioaren adierazpen grafikoa 10
Funtzioaren definizio-eremua 9, 11, 340
(Alderantzizko) funtzioaren deribatua 110
(Parametrikoki emandako) funtzioaren deribatua 127, 147
Funtzioaren gehikuntza 56, 345, 352
Funtzioaren gorapena eta beherapena 210
Funtzioaren grafikoa 10, 248-254
Funtzioaren periodoa 14
Funtzioen adierazpen parametrikoa 121-123
Funtzioen hurbilketa hoberena 335
Funtzioen maximo eta minimoa 62, 212-218, 227, 232-234, 390-408
Funtzio algebraikoa 17
Funtzio bakoitia 249
Funtzio beherakorra 9
Funtzio bektoriala 433
Funtzio bektorialaren deribatua 434, 444
Funtzio bikoitia 249
Funtzio bornagabea 35
Funtzio bornatua 32-37
Funtzio deribagarria 81
Funtzio elementalak 16, 59
(Oinarrizko) funtzio elementalak 12
Funtzio elementalen integralen taula 474
Funtzio esponentziala 12, 104, 315
Funtzio etena 60
Funtzio gorakorra 9
Funtzio hiperbolikoak 130-134
Funtzio homogenoa 674
Funtzio inplizitua 102-104
Funtzio inplizituaren deribatua 102, 145, 368-373
Funtzio irrazionala 18
Funtzio irrazionalen integrazioa 510-512
Funtzio jarraia 56, 59-62, 347
Funtzio koadratikoa 18
Funtzio konplexuaren deribatua 318
Funtzio konposatua 15

Funtzio konposatuaren deribatua 96, 365
Funtzio konposatuaren diferentziala 139
Funtzio lineala 17
Funtzio logaritmikoa 12, 94
Funtzio multiformea 9
Funtzio periodikoa 14
Funtzio polinomikoa 17
Funtzio logaritmikoa 12, 94
Funtzio multiformea 9
Funtzio periodikoa 14
Funtzio polinomikoa 17
Funtzio potentziala 12, 104
Funtzio razional osoa 17, 321
Funtzio razional zatikiarra 18
Funtzio transzendentea 19
Funtzio trigonometrikoak 14
(Alderantzizko) funtzio trigonometrikoak 12, 114-119
Funtzio trigonometrikoen integrazioa 521-527
Funtzio uniformea 9

(Taylor-en formulako) gai osagarria 197
Gai osagarriaren Lagrange-ren formula 199
Gainazala 634
(Biraketa-)gainazala 634
(Maila-)gainazala 379
(Biraketa-)gainazalen azalera 634
Gainazal helikoidala 432
(Kurbaren) ganbiltasuna 235, 236
Gauss-en kurba 239
(Funtzioaren) gehikuntza 56, 345, 352
Gehikuntza partziala 344
Gehikuntza totala 344, 353
(Biraketa-)gorputzen azalera 632
Grabitate-zentrua 637-639
Gradientea 383-387, 467
(Funtzioaren) grafikoa 10, 248-254

Helikoidea 432
Helizea 431, 436, 437, 453, 462
Hipozikloidea 645, 649
(Bektorearen) hodografoa 430
(Funtzioen) hurbilketa hoberena 335

Infinitesimoa 37-41, 64-68, 185
Inflexio-puntua 238, 239
Ingurunea 7, 346
Ingurunearen erradioa 7
Ingurunearen zentrua 7
Integrakizuna 473, 554
(Parametro baten menpeko) integrala 602-606
(Funtzio elementalen) integralen taula 474
Integraletako ordezkapen trigonometrikoak 527
Integral inpropioa 579
Integral inpropioen konbergentzia absolutua 584
Integral mugagabea 473
Integral mugagabearen oinarrizko propietateak 477
Integral mugatua 554
Integral mugatuaren kalkulu hurbildua 589-594
Integral mugatuaren oinarrizko propietateak 561-566
Integrazioa 473
(Aldagai-aldaketaren bidezko) integrazioa 480-483
(Frakzio razionalen) integrazioa 492-497, 502-506
(Funtzio irrazionalen) integrazioa 510-512
(Funtzio trigonometrikoen) integrazioa 521-527
(Ostrogradski-ren metodoaren bidezko) integrazioa 506-510
(Zatikako) integrazioa 487-492, 574-578
Integrazio-elementua 473
Interpolazioa 328-331
Interpolazioaren Lagrange-ren formula 331
Iragapen-modulua 56

Jatorrizkoa 471

Kardioidea 24, 302, 646, 651
Katenaria 632, 645, 649
(Arkimedes-en) kiribila 20, 282, 302, 650
Kiribil hiperbolikoa 23
Kiribil logaritmikoa 23
(Integral inpropioen) konbergentzia absolutua 584
Konstante absolutua 5
Konstantearen deribatua 88
Kontingentzi angelua 274
Koordenatu polarrak 19
Korden metodoa 295
Kosinua 14, 86, 203
Kosinu hiperbolikoa 131-134
Kotangentea 14, 99
Kotangente hiperbolikoa 131-134
Kurbadura 274-281, 444, 456

Kurbadur erradioa 283, 449
Kurbadur zentrua 283
Kurbadur zirkulua 284
(Gai osagarriaren) Lagrange-ren formula 199
(Interpolazioaren) Lagrange-ren formula 331
Lagrange-ren teorema 181
Lana 635-637
Laplace-ren funtzioa 530
Laukizuzenen formula 590
(Newton-)Leibniz-en formula 569
Leibniz-en formulak 143, 604
Lemniskata 23, 302, 620
(Maila-)lerroa 380
L'Hôpital-en erregela 185
Limitea 25, 28-32, 41-47, 346
Limite indeterminatuen kalkulua 185-195
(Briggs-en) logaritmoak 55
Logaritmo arrunta 55
Logaritmo nepertarra 55
(Arku-)luzera 271, 621-629
(Koordenatu polarretako arku-)luzera 626

Maclaurin-en formula 199
Magnitude aldakorra 5
Magnitude konstantea 5
Magnitude monotonoa 7
Magnitude mugagabeki handia 27, 37, 188
(Funtzioen) maximo eta minimoa 62, 212-218, 227, 232-234, 390-408
Maximo eta minimo baldintzatuak 402
Menpekotasun funtzionala 8
Minimax 398
Modulua 3
(Iragapen-)modulua 56
(Zenbaki konplexuen) modulua 307
Moivre-ren formula 312
Momentu estatikoa 637
(Eremuaren) muga 341
Muturra 213, 390-402
Mutur baldintzatua 402

Newton-en metodoa (ukitzaileen metodoa) 298
Newton-Leibniz-en formula 569
Norabidezko deribatua 381
Normala 152, 437, 466
Normal nagusia 449

(Integraletako) ordezkapen trigonometrikoak 527

Oskulazio-puntua 332
Ostrogradski-ren metodoa 506-510

Parabola 11, 286, 287, 302
Parabolen formula 591
(Biraketa-)paraboloidea 634
Parametroa 121
Parametro baten menpeko integralak 602-606
(Funtzioaren) periodoa 14
Plano normala 437-440
Plano oskulatzailea 456
Plano ukitzailea 462-467
Polinomioa 321
(Bernstein-en) polinomioa 336
(Chebishev-en) polinomioa 336
Polinomioaren maila 321
Poloa 19
(Atzerapen-)puntua 418, 420
(Eremuaren barne-)puntua 340
(Inflexio-)puntua 332
Puntu bikoitza 417
Puntu kritikoak 216, 393
Puntu singularra 415, 439, 463
Puntu singular isolatua 421

Rolle-ren teorema

Serret-Frenet-en formula 461
Simpson-en formula 594
Sinua 12, 86, 202
Sinu funtzioaren irudia 1186-1188
Sinu hiperbolikoa 131-134

Tangentea 12, 99
Tangente hiperbolikoa 131-134
Tartea 6
Tarte itxia 6
Taylor-en formula 195-199, 387-390
Taylor-en formulako gai osagarria 197
Traktrizea 303
Trapezioen formula 591
Trapezio lerromakurra 555

(Kurbarekiko) ukitzailea 79, 151, 432, 462
(Kurbarekiko) ukitzaileen metodoa 298
Unitate irudikaria 306

Wallis-en formula 578
Weierstrass-en teorema 335

Zati erreala 306

Zati irudikaria 306
Zatiketaren deribatua 93
Zenbakia 1
Zenbakizko ardatza 1
Zenbaki erreala 1
Zenbaki irrazionala 1, 2
Zenbaki konplexua 306, 308-315
Zenbaki konplexuen adierazpen geometrikoa 306
Zenbaki konplexuen adierazpen trigonometrikoa 307
Zenbaki konplexuen argumentua 307
Zenbaki konplexuen forma esponentziala 320
Zenbaki konplexuen modulua 307
Zenbaki konplexu konjokatuak 306
Zenbaki razionala 1, 2
(Grabitate-)zentrua 637-639
(Ingurunearen) zentrua 7
(Kurbadur) zentrua 283
Zikloidea 125, 280, 289, 618, 646, 648
(Kurbadur) zirkulua 284
Zirkunferentzia 20, 123, 275, 301, 574, 623