EKUAZIO DIFERENTZIALAK
Aplikazioak eta ariketak

Ernesto Martínez Sagarzazu
Itzultzailea: Elena Agirre

udako euskal unibertsitatea

eman ta zabal zazu
universidad del país vasco
euskal herriko unibertsitatea

EKUAZIO DIFERENTZIALAK

Aplikazioak eta ariketak

EKUAZIO DIFERENTZIALAK
Aplikazioak eta ariketak

Ernesto Martínez Sagarzazu
Itzultzailea: Elena Agirre

ISBN: 84-86967-63-5
Lege-gordailua: BI-2442-94

Inprimategia: BOAN, S.A. Padre Larramendi 2. BILBO

Azala: Julio Pardo

Banatzaileak: UEU. General Concha 25, 6. BILBO
Zabaltzen: Igerabide, 88 DONOSTIA

GAI-ZERRENDA

GAZTELANIAKO BERTSIOAREN HITZAURREA

Ekuazio Diferentzialetako apunte hauek, oraingo Ikasketa-Planaren arau, Euskal Herriko Unibertsitateko Industri Ingeniaritza Teknikorako Unibertsitate-Eskoletan irakasten den Matematikaren Gehipena asignaturaren zati bat osotzen dute.

Lan honen helburu nagusiena ondokoa da: gure Eskoletako ikasleei oinarrizko informazioa ematea, praktikoa, eta Ingeniaritzako lehen zikloko ikasketen espezifikotasunean euskarritua, gainontzeko bibliografia ugaria kontsultatzea eragotzi gabe, noski. Asmoa, honakoa izan da: kontzeptuak eta beraien interpretazioak Ingeniaritzako alor ezberdinetan ekuazio diferentzialek dituzten aplikazioekin konektatzea.

Zentzu honetan, aplikazioekin konektatzeko beharrezkoak diren oinarrizko kontzeptuak eta beraien interpretazio ezberdinak azpimarratu dira. Ondorioz, gogortasun teorikoa ekidin da, interes pedagogiko eta kontzeptual handieneko teorema eta formulak frogatu direlarik soilik.

Ekuazio diferentzial arruntak eta ekuazio diferentzialetako sistemak integratzeko dauden metodo klasikoez aparte, Fourier-en serieei buruzko gaia dago. Hau baino lehen praktikan interesgarria den Laplace-ren Transformatuaren bidezko eragile-kalkulua garatu da. Eta gero, berredura-serieen bidez eta zenbakizko kalkuluaren bidezko integrazio-metodoak aztertu ondoren, programaren bukaeran lehen ordenako deribatu partzialetako ekuazioez ari da.

Gaien edukinaren ulermena errazteko asmoz, adibide argigarriak eta ariketa ebatzi eta proposatuak erantsi dira, hauetariko zenbait asignaturaren ebaluazioko probetan eskatu izan direnak.

Bilbon, 1991ko Irailean

EUSKARAKO BERTSIOAREN HITZAURREA

Duela urte bat, Euskal Herriko Unibertsitateko Bilboko Industri Ingeniaritza Teknikorako Unibertsitate-Eskolan, gaur egun dauden Ikasketa-Planen barne, Matematikaren Gehipena asignatura euskaraz ikasteko posibilitatea dagoela. Urte horretan zehar liburu honen itzulpenean lanean aritu izan naiz, guztiz beharrezkoa iruditzen baitzait euskal adarreko ikasleek bibliografia ere euskaraz izatea.

Bestalde, liburu hau martxan jarriko diren Ikasketa-Plan berrietan ere guztiz erabilgarria da. Duen izaera espezifiko eta praktikoak, Ingeniaritzako arlo ezberdinetako ikasleentzat lagungarria egiten du, bertan Matematika eta Ingeniaritzaren arteko konexioa nabari daitekeelarik.

Bukatzeko eskerrak eman nahi nizkieke liburuaren egileari, Ernesto Martínez Sagarzazuri, euskararekiko duen borondate onagatik, eta Martxel Ensunza eta Jose Ramon Etxebarriari, irakatsitakoagatik.

Bilbon, 1994ko Abenduan

I. GAIA: EKUAZIO DIFERENTZIAL ARRUNTAK ETA EKUAZIO DIFERENTZIALETAKO SISTEMAK.

1. EKUAZIO DIFERENTZIAL ARRUNTAK. OROKORTASUNAK

2. LEHEN ORDENA ETA MAILAKO EKUAZIO DIFERENTZIALAK

3. LEHEN ORDENA ETA GOI-MAILAKO EKUAZIOAK

4. n. ORDENAKO EKUAZIO DIFERENTZIAL LINEALAK

1. EKUAZIO DIFERENTZIAL ARRUNTAK. OROKORTASUNAK

1.1 Definizioak

Deribatuak edo diferentzialak dituen edozein ekuaziori ekuazio diferentzial deritzo. Deribatu edo diferentzial hauei, aldagai bakar baten menpe badaude, **ekuazio diferentzial arruntak**, eta zenbait aldagairen menpekoak badira, **deribatu partzialetako ekuazio diferentzialak** deritze.

Ekuazio diferentzial baten ordena, ekuazioko ordena nagusiko deribatuaren ordena da.

Ekuazio diferentzialaren maila, ekuazioko ordena nagusiko deribatuaren berretzailea da.

Bestalde, funtzio eta bere deribatuekiko linealtasuna gordetzen duen ekuazio diferentzialari, ekuazio diferentzial lineala deritzo. n. mailako ekuazio diferentzial linealek aplikazio praktiko garrantzitsuak dituzte. Ondoko adierazpen orokorra dute:

$$a_0(x)\, y^{(n)} + a_1(x)\, y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(x)\, y' + a_n(x)\, y = f(x).$$

Adibidea.- Sailkatu ondoko ekuazioak:

a) $(x + 1)^2 y'' + 3(x + 1)y' + 2y = x + 2$;

b) $x''' + (a + b\cos 2t)x' = 0$; c) $y'' - y'^2 - 1 = 0$;

d) $x'' + x' + \cos x = e^t$; e) $y = 2x(y' + y'^2)$.

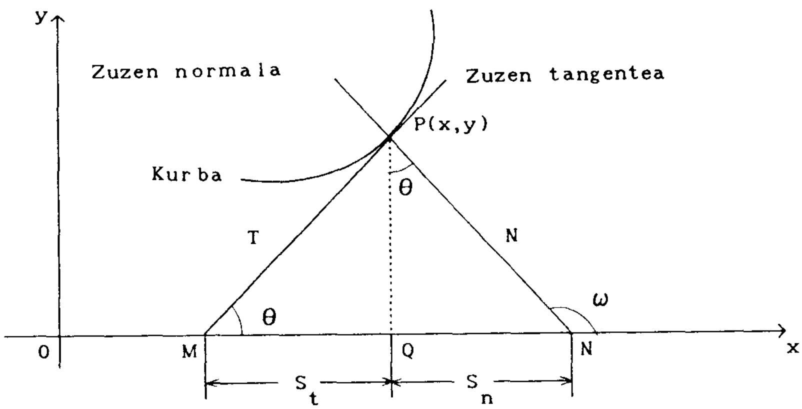
E: a) bigarren ordenako ekuazio lineala; b) hirugarren ordenako ekuazio lineala; c) eta d) bigarren ordenako ekuazio ez-linealak; e) lehen ordena eta bigarren mailako ekuazio ez-lineala.

1.2 Ekuazio diferentzialen jatorria

Deribatuaren interpretazio ezberdinen arabera, ekuazio diferentzialen jatorria ondoko oinarrizko problemei asoziaturik dago:

1.2.1 Problema geometrikoak.

Planoko kurben propietateei buruzko problemetan, zuzen tangente eta normala, puntu baten kurbadura, eta abar, guztiak deribatuez erlazionaturiko magnitudeak dira. Kurba hauei buruzko magnitude horiek aztertzean, ekuazio diferentzial arruntak sortuko dira. Gogora ditzagun magnitude horietariko batzu.



$$tg\theta = y' \qquad ; \qquad tg\omega = -1/y'$$

Zuzen tangentea P(x,y) puntuan: $Y - y = y'(X - x)$.

Zuzen normala P(x,y) puntuan: $Y - y = -1/y'(X - x)$.

Azpitangentearen luzera: $S_t = \overline{MQ} \Rightarrow S_t = |y/y'|$.

Azpinormalaren luzera: $S_n = \overline{QN} \Rightarrow S_n = |yy'|$.

Tangentearen luzera: $T = \overline{PM} \Rightarrow T = |y/y'|(1 + y'^2)^{1/2}$.

Normalaren luzera: $N = \overline{PN} \Rightarrow N = |y|(1 + y'^2)^{1/2}$.

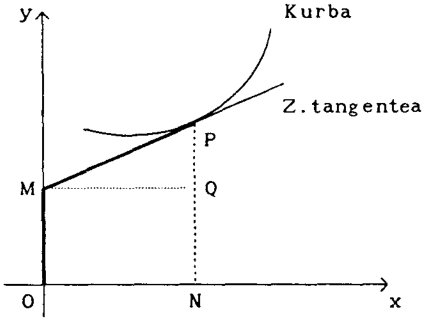
Kurbadura-erradioa: $R = (1 + y'^2)^{3/2}/|y''|$.

Adibidea.- Kalkulatu, kasu bakoitzean, ondoko propietateak betetzen dituzten kurbei dagozkien ekuazio diferentzialak:

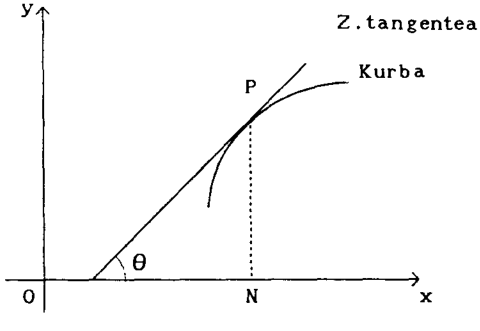
a) "Bira kurba bat eta kurbarekiko zuzen tangentea P(x,y) puntuan. Kurbak ordenatu-ardatzean duen ebakidura-puntutik P(x,y) puntura dagoen distantzia, ebakidura-puntu horretatik koordenatu-jatorrira dagoen distantziaren berdina da".

b) "Edozein P(x,y) puntuko kurbadura-erradioa, puntu horretako zuzen tangenteak eta abzisa-ardatzaren norabide positiboak osotzen duten angeluaren sekantearen balioa da ".

E: a) Lehenengo irudiaren arabera, kurbek beteko duten propietatea ondokoa da: $\overline{PM} = \overline{MO}$.



a) irudia



b) irudia

$\overline{MO}$ luzera kalkulatzeko, zuzen tangentearen ekuazioan X=0 egin, eta ondorioz hurrengoa beteko da:

$$Y - y = y'(X - x); \quad X = 0 \Rightarrow Y \equiv \overline{MO} = y - xy'.$$

Bestalde, a) irudiko (PQM) triangelu zuzenetik,

$$\overline{PM} = [\overline{MQ}^2 + \overline{PQ}^2]^{1/2} = [\overline{MQ}^2 + (\overline{PN}^2 - \overline{MO}^2)]^{1/2} \Rightarrow$$

$$\overline{PM} = [x^2 + (y - y + xy')^2]^{1/2} = x(1 + y'^2)^{1/2}$$

ondorioztatzen da. Beraz, $\overline{PM} = \overline{MO}$ izan behar denez, ondokoa dugu:

$$\overline{PM} = \overline{MO} \longrightarrow x(1 + y'^2)^{1/2} = y - xy' \longrightarrow x^2(1 + y'^2) = (y - xy')^2 \longrightarrow$$

$$2xyy' + x^2 - y^2 = 0.$$

---

b) kasua:

$$\text{tag}\theta = y' \longrightarrow \sec\theta = (1 + \text{tg}^2\theta)^{1/2} = (1 + y'^2)^{1/2}$$

Enuntziatuaren arabera, hurrengo ekuazioa ondoriozta daiteke:

$$R = \sec\theta \longrightarrow (1 + y'^2)^{3/2}/|y''| = (1 + y'^2)^{1/2} \longrightarrow$$

$$1 + y'^2 = y''.$$

1.2.2 Problema fisikoak.

Sistema fisiko bat, denboraren araberakoa den aldagai edo koordenatu bakar batez guztiz definiturik badago, sistema fisikoa askatasun-gradu bakarrekoa dela diogu. $x_i(t)$ $(i = 1,2,\ldots,n)$, n koordenatu ezagunak badira, sistema n askatasun-gradutakoa da.

Deribatuaren interpretazio fisikoaren arabera, $x'(t)$ deribatuak x aldagaiak t aldagaiarekiko duen aldakuntza-indizea, hots, bere aldiuneko abiadura adierazten du. Sarritan, sistema fisiko asko arautzen duten legeek, edo saiakuntzetatik sortzen diren printzipioek, aldagaien arteko erlazioak ezarriko dituzte, non $x'(t)$ aldakuntza-indizeak parte hartuko duen. Askatasun-gradu bakarreko sistemen kasurako, emaitza sistemako "eredu matematiko" deritzon ekuazio diferentzial arrunta izango da.

Adibidea.- Newton-en hozketa-legeak dioenez, T_0 tenperatura konstantepeko ingurune batetan murgildu den gorputz baten tenperaturaren aldakuntza-indizea, gorputzaren eta ingurunearen arteko aldiuneko tenperaturen arteko diferentziarekiko zuzenki proportzionala da.

Printzipio hau adierazten duen ekuazio diferentziala ondokoa da:

$$T'(t) = K(T_0 - T),$$

non

$T(t)$.....gorputzaren t aldiuneko tenperatura,

$T'(t)$....tenperaturaren aldakuntza-indizea (hozte zein berotzearen abiadura),

K........datu experimental batez kalkulagarria eta gorputz bakoitzaren espezifikoa den proportzionaltasun-konstantea

baitira.

Adibidea.- Erreakzio kimiko batetan **M** eta **N** substantziek **Q** substantzia lortzeko erreakzionatzen dute, **M** substantziaren **m** gramok **N** delakoaren **n** gramoz erreakzionatzean, **Q**-ren $\mathbf{q = m + n}$ gramo sortzen direlarik. **Q**-ren aldiuneko erakuntza-abiadura erreakzionatzaileen transformatu gabeko kantitateen biderkaketarekiko proportzionala da. Idatzi fenomeno honi dagokion ekuazio diferentziala.

E: Hurrenez hurren, **M**, **N** eta **Q** substantzien x, y eta z kantitateak t aldiunean ondokoak dira:

$$z = x + y = \frac{mz}{m + n} + \frac{nz}{m + n}.$$

Adibideko enuntziatuaren arabera, sistema hori deskribatuko duen ekuazioa hurrengoa da:

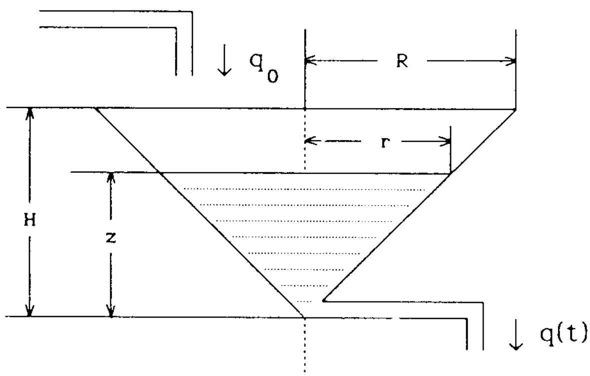
$$z'(t) = K\left(x_0 - \frac{mz}{m + n}\right)\left(y_0 - \frac{nz}{m + n}\right),$$

non x_0 eta y_0, **M** eta **N** substantzien hasierako kantitateak, eta K proportzionaltasun-konstantea baitira. Ondorioz, hauxe dugu:

$$z'(t) = \frac{m.n.K}{(m + n)^2}\left(\frac{m + n}{m} x_0 - z\right)\left(\frac{m + n}{n} y_0 - z\right).$$

Adibidea.- Ur-isurketaren ekuazio diferentziala.

Biz irudiko **R** erradio eta **H** altuerako ontzi konikoa. Baldintza konstantepean (denbora-unitateko q_0 bolumen-unitate isuriz), goiko aldetik ura sartu, eta beheko aldeko hodi luze eta mehe batetatik ura aterako da.



Ontziko ur-bolumenaren **V'(t)** aldakuntza-indizeak jarraitzen duen lege fisikoa, gehienetan denboraren araberako **q(t)** kaudalaren bidez baino, ur-mailaren funtzioko **q(z)** kaudalaz errazago adieraziko da. Horrela, adibidez, ondoko erlazioak ezarriko dira:

$q(z) = -K.z$ (hodi luze eta mehe batetan zeharreko isurketa)

$q(z) = -K.\sqrt{z}$ (horma mehe batetako zulo batetan zeharreko isurketa)

Isurketaren fenomenoa deskribatzen duen ekuazio diferentziala:

$$V'(t) = q_0 - q(z).$$

Bestalde, **V** delakoa ontziko ur-maila izanik, ondokoa idaz daiteke:

$$V'(t) = V'(z)\ z'(t) = q_0 - q(z).$$

Gainera, $V(z) = \int_0^z S(z)dz \longrightarrow V'(z) = S(z)$, eta ordezkatuz,

$$S(z)z'(t) = q_0 - q(z) \quad \Rightarrow \quad z'(t) = [q_0 - q(z)]/S(z)$$

ur-isurketa adierazten duen aldagai banangarrietako ekuazio diferentziala lortuko da. Ekuazio hau aplikatzeko beharrezkoak dira **q(z)** legea eta ur-mailaren altueran kokaturiko sekzio horizontalaren **S(z)** azalera.

Adibidea.- Ohm-en legeak ondokoa dio: "Zirkuitu bati aplikaturiko **e(t)** tentsioa, zirkuituko elementuetan emaniko tentsio-erorketen baturaren berdina da".

LRC zirkuitu bakun batetarako tentsio-erorketak hurrengoak dira:

L autoinduktantzian: $Li'(t)$,

R erresistentzian: $Ri(t)$,

C kondentsadorean: $(1/C)\int_0^t i(t)dt,$

non **i(t)** zirkuitutik doan denborarekiko korronte-intentsitatea baita.

Ohm-en legea aplikatuta, ondoko ekuazio diferentziala lor daiteke:

$$Li'(t) + Ri(t) + (1/C)\int_0^t i(t)dt = e(t),$$

zein

$$\int_0^t i(t)dt = Q(t) \longrightarrow i(t) = Q'(t) \longrightarrow i'(t) = Q''(t)$$

ordezkaketa eginda bigarren ordenako beste ekuazio diferentzial hau bilakatuko baita:

$$LQ''(t) + RQ'(t) + (1/C)Q(t) = e(t).$$

Adibidea.- Newton-en legeak dioenez, t denbora, $\bar{\mathbf{r}}(t)$ posizioa eta $\bar{\mathbf{r}}'(t)$ abiaduraren araberako $\bar{\mathbf{F}}$ indar baten menpean dagoen m masadun puntu materialaren higiduraren ekuazioa, ondoko hau da:

$$m\,\bar{\mathbf{a}} = \bar{\mathbf{F}} \quad \Rightarrow \quad m\,\bar{\mathbf{r}}''(t) = \bar{\mathbf{F}}[t, \mathbf{r}(t), \mathbf{r}'(t)].$$

1.2.3 Hautazko konstanteen ezabapena.

Hautazko konstanteak dituen aldagaien arteko edozein erlaziori, jatorrizkoa deritzo. Jatorrizkoaren adierazpenean ahal den konstante-kopuru txikiena erabiltzen denean, konstante esentzialak ditugula esango dugu.

Adibidez, $y = Ae^{x} + Be^{-x} + Cxe^{-x}$ jatorrizkoan, hiru A, B, C konstanteak esentzialak dira.

Baina, $y = Ae^{x+B} + C + Ln(Dx)$ jatorrizkoan, lau konstanteetatik esentzialak soilik bi dira. Hau da:

$$y = Ae^{B}e^{x} + C + LnD + Lnx = Me^{x} + N + Lnx.$$

Orokorrean, demagun hautazko n konstantez osoturiko jatorrizkoa:

$$F(x,\ y,\ C_1,\ C_2,\ C_3,\ \ldots\ldots\ldots,\ C_{n-1},\ C_n) = 0. \qquad [1]$$

Teoriatik, n konstanteak n+1 ekuaziotako sistema batetan ebaz daitezke, sistema hori jatorrizkoaz eta jatorrizkoaren lehenengo n ondoz-ondoko deribatuez osotuta egongo delarik, hots,

$$\partial F/\partial x + (\partial F/\partial y)y' = 0 \;\Rightarrow\; F_1(x,\ y,\ y',\ C_1,\ C_2,\ldots,C_n) = 0, \qquad [2]$$

$$\partial^2F/\partial x^2 + (2\partial^2F/\partial x\partial y)y' + (\partial^2F/\partial y^2)y'^2 + (\partial F/\partial y)y'' = 0 \;\Rightarrow$$

$$F_2(x,\ y,\ y',\ y'',C_1,\ C_2,\ldots,C_n) = 0. \qquad [3]$$

----

n. deribaturako, ondokoa lortuko da:

$$F_n(x,\ y,\ y',\ldots,y^{(n)},C_1,\ldots,C_n) = 0. \quad [n+1]$$

Eta

$$F_1 = 0\ ,\ \ F_2 = 0\ ,\ \ldots,\ F_n = 0$$

sistema C_1, C_2, ..., C_n konstanteekiko ebatzi ondoren, eta konstante horiek [1] ekuazioan ordezkatuta gero, orokorrean jatorrizkoari asoziaturiko n. ordenako ekuazio diferentzial bat lortuko da, hauxe alegia:

$$f\ [x,\ y,\ y',\ y'',\ \ldots\ldots,\ y^{(n-1)},\ y^{(n)}] = 0.$$

Ekuazio hau jatorrizkoari asoziatuta dago, eta geometrikoki [1] adierazpeneko kurbez osoturiko familia n-infinituak betetzen dituen propietateak dauzka. Jarraitutako prozeduran jatorrizkoaren hautazko konstante esentzialen kopurua eta lortutako ekuazio diferentzialaren ordena berdinak direla nabari daiteke.

Adibidea.- Jatorrizko hauei asoziaturiko ekuazio diferentzialak kalkulatu, deribazio eta konstanteen ezabapena aplikatuz:

a) $y = Ae^x + Be^{2x} + x^2e^x$, b) $y = C - \mathrm{Ln}\,[\cos(x + D)]$.

E: a) Bi aldiz deribatu, eta **A** eta **B** parametroak ezabatuko dira:

$y' = Ae^x + 2Be^{2x} + (x^2 + 2x)e^x$, $y'' = Ae^x + 4Be^{2x} + (x^2 + 4x + 2)e^x$

$y' - y = Be^{2x} + 2xe^x \longrightarrow Be^{2x} = y' - y - 2xe^x$,

$y'' - 2y' = -Ae^x + (2 - x^2)e^x \longrightarrow Ae^x = 2y' - y'' + (2 - x^2)e^x$.

Jatorrizkoan ordezkatuta, ondoko ekuaziora helduko da:

$$y'' - 3y' + 2y = 2(1 - x)e^x.$$

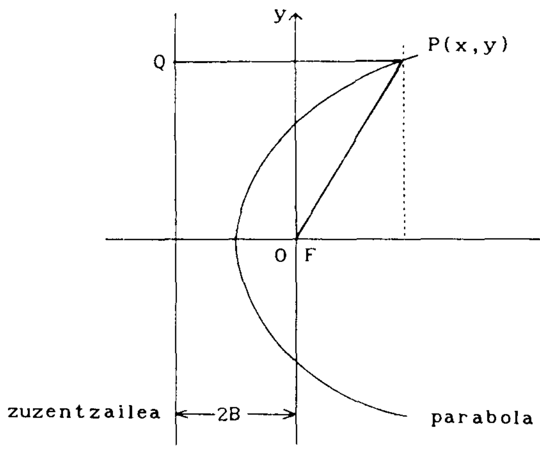
E: b) Era berean ebatziko da:

$$y' = \mathrm{tg}(x + D) \longrightarrow y'' = 1/\cos^2(x + D) = 1 + \mathrm{tg}^2(x + D) \Rightarrow$$

$$y'' = 1 + y'^2.$$

Adibidea.- Kalkula bedi, fokua koordenatu-jatorrian eta ardatza OX-en dituen parabola-sortaren ekuazio diferentziala.

E: Lehenengo, parabola-sortaren ekuazioa (jatorrizkoa) finkatu behar da. Beheko irudian, enuntziatutako hipotesiak betetzen dituzten paraboletariko bat dugu:



Parabola, foku eta zuzentzailetik distantzia berberera dauden puntuez osoturiko leku geometrikoa da. Ondokoa ondoriozta daiteke:

$$\overline{PQ} = \overline{PF} \longrightarrow x + 2B = (x^2 + y^2)^{1/2} \longrightarrow (x + 2B)^2 = x^2 + y^2 \Rightarrow$$

$$y^2 = 4B(B + x).$$

Jatorrizkoa behin deribatu eta B parametroa ezabatuz, hurrengo ekuazio diferentziala lortuko da:

$$2yy' = 4B \longrightarrow y^2 = 2yy'(yy'/2 + x) \Rightarrow$$

$$yy'^2 + 2xy' - y = 0.$$

1.3 Ekuazio diferentzial baten soluzioak

Demagun n. ordenako ondoko ekuazio diferentziala:

$$f\,[x,\ y,\ y',\ y'',\ \ldots\ldots,\ y^{(n-1)},\ y^{(n)}] = 0.$$

Definizioa: $y = y(x)$ funtzioa ekuazioaren soluzioa dela diogu, bera eta beraren n deribatuak ekuazioan ordezkatu ondoren identitate bat badugu.

Ikus ditzagun soluzio-mota ezberdinetarako beste definizio batzu.

1.3.1 Jatorrizkoa, soluzio orokorra edo integral-sorta.

n hautazko konstante esentzial dituen edozein soluzio da.

Era explizituan: $y = y(x,\ C_1,\ C_2,\ \ldots\ldots,\ C_n).$

Era inplizituan: $F(x,\ y,\ C_1,\ C_2,\ \ldots\ldots,\ C_n) = 0.$

1.3.2 Soluzio partikularra edo kurba integrala.

Soluzio orokorrean hautazko konstanteen balioak finkatutakoan lor daitekeen soluzioa da.

1.3.3 Soluzio singularra edo kurba integrala.

Hauek ondokoak dira: hautazko konstanteen balioak finkatu arren, soluzio orokorretik ondorioztaezinak direnak.

Adibidea.- Sailka bitez, hurrengo ekuazio diferentzialetarako emanik datozen soluzioak:

a) $x^2(Lnx - 1)y'' - xy' + y = 0,\ y_1 = Ax + BLnx,\ y_2 = 3x - 2Lnx.$

b) $y'^2 - xy' + y = 0,\ \ y_1 = Cx - C^2,\ \ y_2 = 3(x - 3),\ \ y_3 = x^2/4.$

c) $2x^3dx + y(3x^2 + y^2)dy = 0$, $\quad (y^2 + x^2)^2 - A(y^2 + 2x^2) = 0$.

d) $y'' = 1 + y'^2$, $\quad y + Ln[\cos(x + B)] = A$, $\quad y_1 = 1 + Ln(\sec x)$.

E: a) Froga dezagun y_1 soluzio bat dela. Bi aldiz deribatu eta ekuazioan ordezkatu behar da:

$$y_1 = Ax + BLnx \longrightarrow y_1' = A + B/x \longrightarrow y_1'' = -B/x^2 \Rightarrow$$

$$x^2(Lnx - 1)(-B/x^2) - x(A + B/x) + Ax + BLnx \equiv 0$$

lortzen da. Bi konstante esentzial dituenez, soluzio orokorra da.

Bestalde, $y_2 = 3x - 2Lnx$ delakoa ere, soluzio partikularra da, y_1 soluzioan $A = 3$ eta $B = -2$ eginez lortzen delako.

---

b) y_1 soluzio partikularra da eta, horrez gain, orokorra, hautazko konstante bat duelako.

$$y_1 = Cx - C^2 \longrightarrow y_1' = C \Rightarrow C^2 - xC + Cx - C^2 \equiv 0.$$

$C = 3$ denerako, $y_2 = 3(x - 3)$ soluzio partikularra da.

$y_3 = x^2/4$ soluzio singularra da. Soluzioa da, noski, eta soluzio orokorreko C konstanteari balioak eman arren ondorioztaezina denez, singularra dugu.

---

c) A konstantea bakanduta duen jatorrizkoa diferentziatuz,

$$(y^2 + x^2)^2/(y^2 + 2x^2) = A \xrightarrow{d}$$

$$\frac{4x(y^2 + x^2)(y^2 + 2x^2) - 4x(y^2 + x^2)^2}{(y^2 + 2x^2)^2}\,dx +$$

$$+ \frac{4y(y^2 + x^2)(y^2 + 2x^2) - 2y(y^2 + x^2)^2}{(y^2 + 2x^2)^2}\,dy = 0$$

lortuko da. Hortik, eragin eta bakanduta gero, ondoko ekuazio diferentziala ondoriozta daiteke:

$$[4x(y^2 + 2x^2) - 4x(y^2 + x^2)]dx + 4y(y^2 + 2x^2) - 2y(y^2 + x^2)]dy = 0$$

$$2x^3dx + y(y^2 + 3x^2)dy = 0.$$

Beraz, enuntziatuan emandakoa soluzio orokorra da.

---

d) Bi parametroren menpeko jatorrizkoa soluzio orokor bat da. Nahikoa da deribatu eta ekuazioa betetzen duela frogatzea.

$$y + \mathrm{Ln}[\cos(x + B)] = A \longrightarrow y' = \mathrm{tg}(x + B) \longrightarrow y'' = 1/\cos^2(x + B),$$

$$y'' = 1 + y'^2 \quad \longrightarrow \quad 1/\cos^2(x + B) \equiv 1 + \mathrm{tg}^2(x + B).$$

$y_1 = 1 + \mathrm{Ln}(\sec x)$ delakoa, soluzio partikular bat da, zein ekuazio orokorrean $A = 1$ eta $B = 0$ eginez lor baitaiteke.

$$y + \mathrm{Ln}[\cos(x + B)] = A \xrightarrow{A=1,\ B=0} y + \mathrm{Ln}(\cos x) = 1 \longrightarrow$$

$$y = 1 - \mathrm{Ln}(\cos x) = 1 + \mathrm{Ln}(\cos x)^{-1} = 1 + \mathrm{Ln}(\sec x).$$

---

2. LEHEN ORDENA ETA MAILAKO EKUAZIO DIFERENTZIALAK

Lehen maila eta lehen ordenako ekuazio diferentzialek ondoko adierazpenak onar ditzakete:

Era orokorra: $f(x,y,y') = 0$ (lehen maila y'-arekiko),

Era diferentziala: $X(x,y)dx + Y(x,y)dy = 0$,

Era normala: $y' = g(x,y)$.

2.1 Existentziaren eta bakartasunaren teoremaren enuntziatua

Biz $y'= g(x,y)$ ekuazio diferentziala era normalean.

"$g(x,y)$ eta $\partial g/\partial y$ funtzioak $P_0(x_0,y_0)$ puntuaren ingurune batetan jarraiak badira, $y = \psi(x)$ funtzio analitiko bakar bat existituko da, zeinek ekuazio diferentziala bete eta $x = x_0$ denean y_0 balioa hartuko duen".

Integrazio-tekniken bidez, hautazko C konstantearen menpeko $F(x,y,C) = 0$ soluzio orokorra lortuko da. $F(x, y, C_0) = 0$ soluzio partikular bat lortzeko, $y(x_0) = y_0$ hastapen-baldintza behar da, soluzio orokorrari erantsita C_0 balioa ezagutzea ahalbidetuko duelarik.

Problema geometrikoetan, baldintza horrek kurba integrala planoko $P_0(x_0,y_0)$ puntu jakin batetatik pasatzen dela esan nahi du normalean. Problema fisikoetan baldintza horrek $y(t)$ magnitudea $t = t_0$ aldiunean finkatuko du.

2.1.1 Kontsiderazio geometrikoak. Kurba isoklinoak.

Era normalean adierazitako lehen ordenako $y' = g(x,y)$ ekuazio diferentzialak, $P(x,y)$ puntuaren eta puntu horretatik pasatzen den kurba integralarekiko zuzen tangentearen maldaren arteko erlazioa ezartzen du. $g(x,y)$ funtzioa unibokoa bada, $P(x_0,y_0)$ puntu bakoitzetik pasatuko den soluzioaren adierazpen analitikoa ezagutu gabe, badakigu kurba integralaren malda $g(x_0,y_0)$ dela.

Ondorioz, $g(x,y) = K$ ekuazioak kurba-sorta bat definitzen du, zeinen puntu bakoitzetik pasatzen den kurba integralaren malda K konstantea den. Kurba hauei **kurba isoklinoak,** hots, malda berekoak deritze. Isoklina bakoitzaren gainean K maldako segmentu txiki eta paraleloz osoturiko multzo bat irudikatzen bada, elementu linealetako **norabide-eremua** deritzona lortuko da. Honek integral-sortaren hurbilketa diren kurbak lortzea ahalbidetuko du, era horretan integral-sortaren ikuspen intuikorra izan dezakegularik.

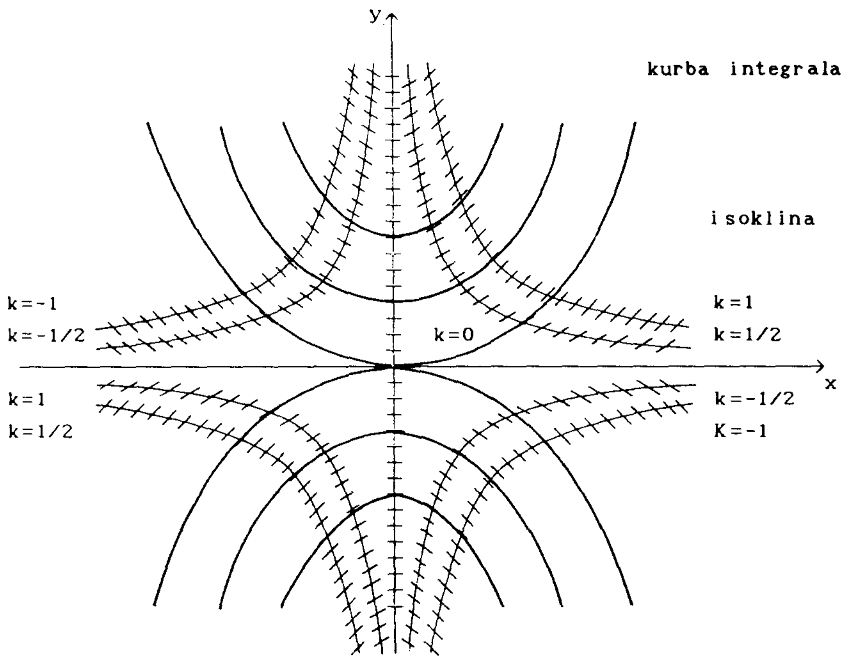
Adibidea.- Aztertu $y' = 2xy$ ekuazioaren norabide-eremua eta irudikatu kurba integralen zirriborroa.

E: Kurba isoklinoak: $2xy = K$ (hiperbola aldeberdinetako familia).

Hurrengo isoklinak kontutan hartuz,

K = 1 denerako	:	$xy = 1/2$	$\Rightarrow$	$\theta = 45^\circ$,
K = 1/2 denerako	:	$xy = 1/4$	$\Rightarrow$	$\theta = \mathrm{arctg}(1/2)$,
K = 0 denerako	:	$x = 0;\ y = 0$	$\Rightarrow$	$\theta = 0^\circ$,
K = -1/2 denerako	:	$xy = -1/4$.	$\Rightarrow$	$\theta = \mathrm{arctg}(-1/2)$,
K = -1 denerako	:	$xy = -1/2$	$\Rightarrow$	$\theta = 135^\circ$,

ondoko irudia lortuko dugu:



Irudian isoklinak eta norabide-eremua definitzen dituzten elementuak adierazi dira. Norabide-eremu horretan $y = A\exp(x^2)$ ekuazioko kurba integralak irudikatu dira.

2.2 Aldagai banangarrietako ekuazioak

Koadratura bakar batez integragarriak, eta funtzio elementalen bidez adierazitako soluzioak dituzten ekuazio diferentzialak gutxi dira. Horregatik, metodo hurbilduak eta konputazio-teknika modernoetan oinarritutako garapenak, oso interesgarriak dira orokorrean, ekuazio diferentzialen azterketarako.

Hala ere, teknikan interesgarriak diren zenbait ekuazio diferentzial ebaztea ahalbidetzen duten eta kontzeptualki garrantzizkoak diren integrazio-metodo klasiko batzu landuko ditugu. Dena den, ekuazio bati integrazio sinplearen metodoa aplikatu baino lehen, ekuazioa aldagai banangarrietako kasura laburtu, eta gero jatorrizkoa kalkulatu behar da.

Kasu errazena ondokoa da:

$$f(x)dx + g(y)dy = 0.$$

$\int$ eragilearen aplikazioak soluzio orokorrera garamatza:

$$\boxed{\int f(x)dx + \int g(y)dy = C.}$$

Gainera,

$$f(x)G(y)dx + g(y)F(x)dy = 0$$

motako ekuazioak F(x)G(y) funtzioaz zatituz, aurreko kasura laburtzen dira:

$$\boxed{\int \frac{f(x)}{F(x)}\,dx + \int \frac{g(y)}{G(y)}\,dy = C.}$$

Dena den, kasu honetan aurreko soluzioan eduki gabeko zenbait soluzio posible aztertzea beharrezkoa da, adibidez, F(x)G(y) biderkaketaren anulaziotik ondorioztatutakoak.

Adibidea.- Hurrengo ekuazioaren integral orokorra kalkulatu:

$$2xydx - dy = 0.$$

E: $2xdx - dy/y = 0 \xrightarrow{\int} x^2 - \mathrm{Ln}|y| = A \xrightarrow{\exp}$

$$|y| = \exp(x^2 - A) = B\exp(x^2), \qquad B = \exp(-A) > 0 \qquad \Rightarrow$$

$$y = \pm B\exp(x^2) = C\exp(x^2), \qquad C \neq 0.$$

$2xydx - dy = 0$ ekuazio diferentziala zati y egin ondoren, $C = 0$ denerako, $y = 0$ delakoa beste soluzio bat da. Beraz, kasu hau erantsiz gero, soluzio orokorra hurrengoa izango da:

$$y = D\exp(x^2), \qquad D \in \mathbb{R}.$$

Oharra: Soluzio hau lehen aipatutako norabide-eremuei buruzko adibideko integral-sorta da.

Adibidea.- Ebatzi hastapen-baldintzatako problema hau:

$$y' - 2y\cot g x = 0, \qquad y(\pi/2) = 2.$$

E: $dy/y - 2\cot g x dx = 0 \xrightarrow{\int} \mathrm{Ln}|y| - 2\mathrm{Ln}|\sin x| = C \xrightarrow{\exp}$

$y/\sin^2 x = B$. Soluzio orokorra: $y = B\sin^2 x$.

B-ren kalkulua: $y(\pi/2) = 2 \Rightarrow 2 = B\sin^2(\pi/2) = B$.

Soluzio partikularra: $y = 2\sin^2 x$.

Adibidea.- Kalkula bedi 21. orriko erreakzio kimikoei buruzko ekuazio diferentziala, ondoko datuak jakinik:

- **M** eta **N** substantzi kantitateak 2:1 pisu-proportzioan daude,

- hasieran $x_0 = 40$, $y_0 = 20$ dira, eta

- erreakzioa hasi eta 10 minututara eratutako **Q**-ren kantitatea, 20 gramotakoa da.

Zer denbora pasatu behar da, **Q** produktuaren kantitate osoaren bi heren eratu baino lehen?

E: $x_0 = 40$, $y_0 = 20$, $m = 2n$ datuak,

$$z'(t) = \frac{m.n.K}{(m+n)^2}\left(\frac{m+n}{m}x_0 - z\right)\left(\frac{m+n}{n}y_0 - z\right)$$

ekuazioan ordezkatu ondoren, hurrengoa ondoriozta dezakegu:

$$z'(t) = \frac{2n.n.K}{(2n+n)^2}\left(\frac{2n+n}{2n}40 - z\right)\left(\frac{2n+n}{n}20 - z\right) = \frac{2K}{9}(60-z)^2$$

$$\rightarrow \quad dz/(60-z)^2 = 2Kdt/9 \quad \xrightarrow{\int} \quad 1/(60-z) = 2Kt/9 + C. \qquad [1]$$

<u>C-ren kalkulua:</u> $z(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad C = 1/60.$

<u>K-ren kalkulua:</u> $z(10) = 20 \Rightarrow 1/40 = 20K/9 + 1/60 \Rightarrow K = \dfrac{3}{800}.$

Orduan, [1] ekuazioan ordezkatuz,

$$z(t) = \frac{60t}{t+20} \qquad [2]$$

soluzioa lor dezakegu.

Q produktuaren kantitate osoaren bi herenak $(40 + 20)2/3 = 40$ dira. [2] adierazpenean $z = 40$ ordezkatuz, (t) kalkula daiteke.

$$40(t+20) - 60t = 0 \quad \Rightarrow \quad t = 40 \text{ minutu.}$$

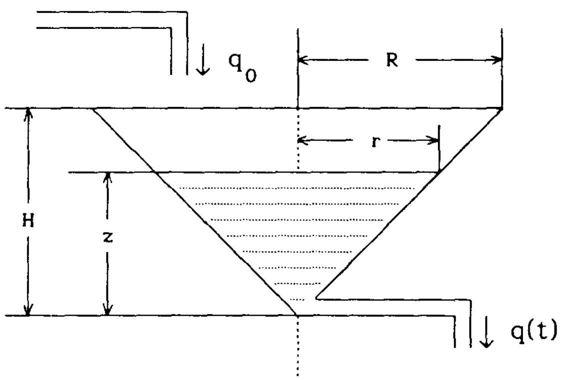
Adibidea.- 22. orriko ur-isurketaren kasuan, **R** erradio eta **H** altuerako ontzi konikoak elikadurarik ez duela kontsideratuko dugu orain, ($q_0 = 0$), eta likidoaren hasierako altuera $z(0) = z_0$ dela.

Zer denbora izango da beharrezkoa ontzia husteko, isurketa hasi eta 5 minututara likido-maila hasierako mailatik bi heren jeitsi bada?

E: Kasu honetarako ondoko erlazioak beteko dira:

$q(z) = -K.z$ (hodi mehe eta luze batetan zeharreko isurketa).

$$S(z) = \pi r^2 = \pi(Rz/H)^2 = \pi R^2(z/H)^2 \quad \text{(ikus irudia).}$$



Isurketaren ekuazio diferentzialean ordezkatu ondoren,

$$z'(t) = q(z)/S(z) = -H^2Kz/\pi R^2z^2 = -H^2K/\pi R^2z$$

lortuko da. Aldagaiak banandu eta integratuz, hurrengoa ondoriozta daiteke:

$$2zdz = (-2H^2K/\pi R^2)dt \xrightarrow{\int} z^2 = (-2H^2K/\pi R^2)t + C.$$

C-ren kalkulua:

$$z(0) = z_0 \quad \Rightarrow \quad z_0^2 = C.$$

Hortik, $z = \sqrt{z_0^2 - (2H^2K/\pi R^2)t}$ dugu.

K kalkulatzeko:

$$z(5) = 2z_0/3 \longrightarrow 2z_0/3 = \sqrt{z_0^2 - 10H^2K/\pi R^2} \longrightarrow 10H^2K/\pi R^2 = 5z_0^2/9.$$

K ordezkatuz gero, ondoko soluzio partikularra kalkula daiteke:

$$z(t) = \sqrt{z_0^2 - z_0^2\, t/9} = z_0\sqrt{(9 - t)/9}.$$

Hustura-denbora kalkulatzeko $z(t) = 0$ egin behar da:

$$0 = z_0\sqrt{(9 - t)/9} \quad \Rightarrow \quad t = 9 \text{ minutu.}$$

2.2.1 Aldagai banangarrietara labur daitezkeen ekuazioak.

Hurrengo kasuak nabaritu behar dira:

a) $y' = f(ax + by + c)$ [1], b) $y' = f(y/x)$. [2]

Lehenengoan $ax + by + c = z$ eginez gero, behin diferentziatuz, $a + by' = z'$ berdintza lortu, eta [1]-ean ordezkatu ondoren, hurrengoa ondoriozta daiteke:

$$(z' - a)/b = f(z) \longrightarrow z' = a + bf(z) \longrightarrow dz/[a + bf(z)] - dx = 0$$

$\int$ eragilea aplikatuz,

$$\int \frac{dz}{a + bf(z)} - x = C$$

lor dezakegu, non $z = ax + by + c$ den.

Bigarren kasuan $y/x = z$ aldagai-aldaketa egingo da.

$y/x = z \longrightarrow y = xz \longrightarrow y' = z + xz'$. Beraz, [2] kasurako

$z + xz' = f(z) \longrightarrow dz/[f(z) - z] - dx/x = 0 \Rightarrow$

$$\int \frac{dz}{f(z) - z} - \text{Ln } x = C$$

ondorioztа dezakegu, non $z = y/x$ baita.

Adibidea.- Ebatzi $y' = (8x + 2y + 1)^2$ ekuazio diferentziala.

E: $8x + 2y + 1 = z \longrightarrow 8 + 2y' = z' \longrightarrow (z' - 8)/2 = z^2 \longrightarrow$

$z' = 2z^2 + 8 \longrightarrow dz/(z^2 + 4) - 2dx = 0 \xrightarrow{\int} [\text{arctg } z/2]/2 - 2x = C$

y aldagaira itzuliz, ondokoa lortuko da:

$$z/2 = \text{tg}(4x + 2C) \Rightarrow 8x + 2y + 1 = 2\text{tg}(4x + B).$$

2.3 Ekuazio diferentzial homogenoak

Definizioa: $X(x,y)$ eta $Y(x,y)$ direlakoak m. homogenotasun-mailako funtzio homogenoak badira, hots,

$$X(xt,yt) = t^m X(x,y), \qquad Y(xt,yt) = t^m Y(x,y)$$

berdintzak betetzen badira, orduan ondoko lehen ordenako ekuazio diferentzialari ekuazio homogeno deritzo:

$$X(x,y)dx + Y(x,y)dy = 0.$$

Ekuazioa era normalean emanik badator, hots,

$$y' = - X(x,y)/Y(x,y) \equiv f(x,y),$$

orduan, $f(x,y)$, homogenotasun-maila bereko bi funtzioren zatiketa izateagatik, zero homogenotasun-mailako funtzioa izango da. Hortik, honakoa ondoriozta daiteke:

$$y' = f(x,y) = f(xt,yt) \xrightarrow{t=1/x} y' = f(1,y/x) \equiv g(y/x).$$

Aurreko ataleko (b) kasuan bezala, $y'= g(y/x)$ ekuazioa aldagai banangarrietara labur daiteke, beraren soluzio orokorra ondokoa izanik:

$$\boxed{\int \frac{dz}{g(z) - z} - Lnx = C, \qquad z = y/x.}$$

Adibidea.- Ebatzi hastapen-baldintzatako ekuazio diferentzial hau:

$$(x^4 + y^4)dx - 2x^3ydy = 0, \qquad y(1) = 0.$$

E: $$y' = \frac{x^4 + y^4}{2x^3y} = \frac{1 + (y/x)^4}{2(y/x)} .$$

$y = xz$, $y' = z + xz'$ eginez, aldagai banangarrietako

$$z + xz' = \frac{1 + z^4}{2z} \longrightarrow xz' = \frac{(z^2 - 1)^2}{2z}$$

ekuazioa ondorioztatuko da, beraren soluzioa hurrengoa delarik:

$$\int \frac{2zdz}{(z^2 - 1)^2} - Lnx = C \Rightarrow \frac{-1}{(z^2 - 1)} - Lnx = C.$$

Aldagai-aldaketa deseginez gero,

$$x^2/(x^2 - y^2) - Lnx = C$$

soluzio orokorra lor daiteke.

<u>Integral partikularra:</u>

$y(1) = 0 \longrightarrow 1/1 - Ln1 = C \longrightarrow C = 1 \Rightarrow x^2/(x^2 - y^2) - Lnx = 1.$

y^2 gaia bakanduz gero,

$x^2/(x^2 - y^2) = Ln(ex) \longrightarrow y^2 = x^2[1 - 1/Ln(ex)] \Rightarrow$

$$y^2 = x^2[Ln(ex) - 1]/Ln(ex)$$

ondoriozta dezakegu.

2.3.1 Ekuazio homogenogarriak.

$$y' = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right)$$ adierazpenekoak dira.

$$\left\{\begin{array}{lll} x = X + h & \longrightarrow & dx = dX \\ y = Y + k & \longrightarrow & dy = dY \end{array}\right. \Rightarrow \quad y' = Y'$$

aldagai-aldaketaren bidez, hurrengo ekuazioa ondoriozta daiteke:

$$Y' = f\left(\frac{a_1X + b_1Y + a_1h + b_1k + c_1}{a_2X + b_2Y + a_2h + b_2k + c_2}\right).$$

Ekuazio honen homogenotasunak,

$$a_1h + b_1k + c_1 = 0, \qquad a_2h + b_2k + c_2 = 0$$

ondorioztatzera garamatza. Sistema hau bateragarria bada, **h** eta **k** konstanteen balioak kalkulatuz, ondoko ekuazio homogenoa lor daiteke:

$$Y' = f\left(\frac{a_1X + b_1Y}{a_2X + b_2Y}\right).$$

Geometrikoki, egindako ordezkapenak (h,k) bektorearen araberako translazio bat adierazten du, (h,k) puntua

$$a_1x + b_1y + c_1 = 0, \qquad a_2x + b_2y + c_2 = 0$$

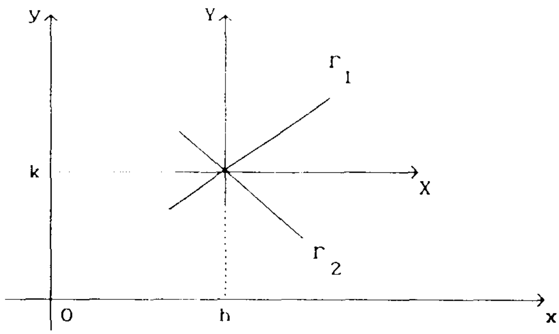
zuzenen ebakidura-puntua izanik. Bi zuzenen ekuazioez osoturiko sistema bateraezina bada, orduan

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0 \quad \longrightarrow \quad a_1/a_2 = b_1/b_2 = \lambda \quad \longrightarrow \quad \begin{cases} a_1 = \lambda . a_2 \\ b_1 = \lambda . b_2 \end{cases}$$

eta, kasu honetan, $a_2 x + b_2 y = z \longrightarrow a_2 + b_2 y' = z'$ ordezkapenak aldagai banangarrietako kasura laburtuko du ekuazioa zuzenki:

$$y' = f\left(\frac{\lambda(a_2 x + b_2 y) + c_1}{(a_2 x + b_2 y) + c_2}\right) \Rightarrow z' = a_2 + b_2 f\left(\frac{\lambda z + c_1}{z + c_2}\right) = g(z).$$

Geometrikoki, sistema bateraezina bada, zuzenak paraleloak izango dira; honegatik, aurreko translazioa ezinezkoa da.



Ordezkapenaren adierazpen geometrikoa

Adibidea.- Integratu $y' = \dfrac{x - y + 5}{x + y - 1}$ ekuazio diferentziala.

E: $x - y + 5 = 0, \quad x + y - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad x \equiv h = -2, \quad y \equiv k = 3.$

Ordezkapena: $x = X - 2, \quad y = Y + 3, \quad y' = Y' \quad \Rightarrow \quad Y' = \dfrac{X - Y}{X + Y}$.

Aldaketa: $Y = Xz, \quad Y' = z + Xz' \Rightarrow$

$$z + Xz' = \frac{1 - z}{1 + z} \longrightarrow Xz' = \frac{1 - 2z - z^2}{1 + z} \longrightarrow \frac{(1 + z)dz}{1 - 2z - z^2} = \frac{dX}{X} \Rightarrow$$

$$\int \frac{(1 + z)dz}{1 - 2z - z^2} - \int \frac{dX}{X} = 0 \longrightarrow \mathrm{Ln}|z^2 + 2z - 1| + 2\mathrm{Ln}|X| = C \Rightarrow$$

$$(z^2 + 2z - 1)X^2 = A.$$

Hasierako aldagaietara itzuliz, $z = \frac{Y}{X} = \frac{y - 3}{x + 2}$, $X = x + 2$ aldaketa deseginez, ondoko soluzio orokorrera iritsiko gara:

$$\left[\left(\frac{y - 3}{x + 2} \right)^2 + 2\,\frac{y - 3}{x + 2} - 1 \right](x + 2)^2 = A \Rightarrow$$

$$(y - 3)^2 + 2(x + 2)(y - 3) - (x + 2)^2 = A.$$

2.4 Ekuazio diferentzial zehatzak

Definizioa: $X(x,y)dx + Y(x,y)dy = 0$ ekuazioa zehatza da $\mathbb{D}$ eremu laun batetan, baldin eta eremu horretan $U(x,y)$ funtzio bat existitzen bada, zeinek ondoko berdintza beteko duen:

$$d[U(x,y)] = X(x,y)dx + Y(x,y)dy.$$

Kasu horretan, ekuazio diferentziala $d[U(x,y)] = 0$ idatz daiteke, eta beraren soluzio orokorra hurrengoa da:

$$\boxed{d[U(x,y)] = 0 \xrightarrow{\int} U(x,y) = C.}$$

Teorema: $\mathbb{D}$ eremuan, X(x,y), Y(x,y), $\partial Y/\partial x$ eta $\partial X/\partial y$ funtzioak jarraiak badira, orduan ekuazio diferentziala zehatza izango da, baldin eta soilik baldin, $\partial Y/\partial x = \partial X/\partial y$ (deribatu gurutzatuen berdintza) betetzen bada:

$$\boxed{\exists\ U(x,y):\ dU = Xdx + Ydy \quad \Longleftrightarrow \quad \partial Y/\partial x = \partial X/\partial y.}$$

Dakusagun **beharrezko baldintza** ($\Rightarrow$):

Hipotesiak dioenez, $dU = Xdx + Ydy$.

Definizioz, $dU = (\partial U/\partial x)dx + (\partial U/\partial y)dy$.

Adierazpen biak berdindu ondoren, ondokoa beteko da:

$$X(x,y) = \partial U/\partial x \qquad [1], \qquad Y(x,y) = \partial U/\partial y. \qquad [2]$$

[1] ekuazioa y-rekiko eta [2]-a x-ekiko deribatuz, eta Schwartz-en teorema aplikatuz, ondokoa izango dugu:

$$\partial X/\partial y = \partial^2 U/\partial x\partial y, \quad \partial Y/\partial x = \partial^2 U/\partial y\partial x,$$

$$\partial^2 U/\partial x\partial y = \partial^2 U/\partial y\partial x \quad \Rightarrow \quad \partial Y/\partial x = \partial X/\partial y.$$

Dakusagun orain **baldintza nahikoa** ($\Leftarrow$):

Hipotesia: $\partial Y/\partial x = \partial X/\partial y.$ [3]

Teoremaren hipotesiak betetzen dituen U(x,y) funtzio bat aurkitu behar da, zeinek $dU = Xdx + Ydy$ bete behar duen.

U funtzioak [1] eta [2] baldintzak beteko ditu. [1]-etik,

$$U(x,y) = \int_{x_0}^{x} X(x,y)dx + \psi(y) \qquad [4]$$

dugu, non $\psi(y)$ delakoa U funtzioak [2] baldintza bete dezan funtzio laguntzailea baita, hau da,

$$\partial U/\partial y = Y(x,y) = \int_{x_0}^{x} (\partial X/\partial y)dx + \psi'(y). \qquad [5]$$

[3] hipotesia erantsiz gero, hurrengoa lor daiteke:

$$Y(x,y) = \int_{x_0}^{x} (\partial Y/\partial x)dx + \psi'(y) = \left| Y(x,y) \right|_{x_0}^{x} + \psi'(y) \qquad \Rightarrow$$

$$Y(x,y) = Y(x,y) - Y(x_0,y) + \psi'(y) \quad \longrightarrow \quad \psi'(y) = Y(x_0,y) \qquad \Rightarrow$$

$$\psi(y) = \int_{y_0}^{y} Y(x_0,y)dy. \qquad [6]$$

[6] baldintza [4]-an ordezkatuz, **U** funtzioa ondorioztatuko da,

$$U(x,y) = \int_{x_0}^{x} X(x,y)dx + \int_{y_0}^{y} Y(x_0,y)dy, \qquad [7]$$

non $P_0(x_0,y_0)$ puntua $X(x,y)$ eta $Y(x,y)$ funtzioen jarraitasun-eremukoa baita. Puntu hau finkatu egingo dugu integralen kalkulua errazteko.

$U(x,y)$ ezaguturik, ekuazioaren soluzio orokorra ondokoa da:

$$\boxed{\int_{x_0}^{x} X(x,y)dx + \int_{y_0}^{y} Y(x_0,y)dy = C.} \qquad [8]$$

Adibidea.- Kalkulatu hurrengo ekuazioaren soluzio partikularra,

$$[(2x - y)\exp(y/x)]dx + [3y^2 + x\exp(y/x)]dy = 0,$$

$y(2) = 0$ hastapen-baldintza beteko duelarik.

E: Ekuazio diferentzial zehatza da. Ikus dezagun.

$$\partial Y/\partial x = \exp(y/x) - (y/x)\exp(y/x) \qquad = (1 - y/x)\exp(y/x),$$

$$\partial X/\partial y = [(2x - y)/x]\exp(y/x) - \exp(y/x) = (1 - y/x)\exp(y/x).$$

Soluzio orokorra: Formularen aplikazioan integrazio-aldagaiak permutatu eta $x_0 = 1$, $y_0 = 0$ balioak hartzen baditugu, kalkuluak errazagoak izango dira, ondoko emaitza lortuko delarik:

$$\int_{y_0}^{y}[3y^2 + x\exp(y/x)]dy + \int_{x_0}^{x}(2x - y_0)\exp(y_0/x)dx = C \quad \longrightarrow$$

$$|y^3 + x^2\exp(y/x)|_0^y + |x^2|_1^x = C \Rightarrow y^3 + x^2\exp(y/x) - x^2 + x^2 - 1 = C$$

$$y^3 + x^2\exp(y/x) = A.$$

Soluzio partikularra: $y(2) = 0 \longrightarrow 4\exp(0/2) = A \longrightarrow A = 4 \quad \Rightarrow$

$$y^3 + x^2\exp(y/x) = 4.$$

2.4.1 Ekuazio zehazgarriak. Integrazio-faktorea.

Biz hurrengo ekuazio diferentzial ez-zehatza,

$$X(x,y)dx + Y(x,y)dy = 0,$$

non $\partial Y/\partial x$ eta $\partial X/\partial y$ deribatuak jarraiak baitira $\mathbb{D}$ eremuan.

Definizioa: Biz $\mathbb{D}$ eremuan deribatu partzial jarraiak dituen $z = z(x,y)$ funtzioa.

$z(x,y)X(x,y)dx + z(x,y)Y(x,y)dy = 0$ zehatza bada, $z = z(x,y)$ funtzioa $Xdx + Ydy = 0$ ekuazioaren integrazio-faktorea da.

Integrazio-faktoreen kalkulua:

$z(x,y)X(x,y)dx + z(x,y)Y(x,y)dy = 0$ ekuazio zehatza denez, hots,

$$\frac{\partial}{\partial y}(zX) = \frac{\partial}{\partial x}(zY) \longrightarrow X\frac{\partial z}{\partial y} + z\frac{\partial X}{\partial y} = Y\frac{\partial z}{\partial x} + z\frac{\partial Y}{\partial x},$$

lehen ordenako deribatu partzialetako

$$Y\frac{\partial z}{\partial x} - X\frac{\partial z}{\partial y} = z\left(\frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x}\right)$$

ekuazioa lortuko da, zeinen integrazioak $z = z(x,y)$ faktorea aurkitzea ahalbidetuko duen.

Integrazio-faktore bakunak.- Aurreko ekuazioaren integrazioa, deribatu partzialetako ekuazioei buruzko gaian aztertuko da. Orain, kasu sinpleenak, hots, aldagai bakar baten menpeko integrazio-faktoreei dagozkienak ikusiko dira.

$z = z(x)$ erako integrazio-faktoreak.

Kasu honetan, $\partial z/\partial x \equiv dz/dx$, $\partial z/\partial y = 0$ berdintzak ditugu. Beraz, kasu honetarako deribatu partzialetako ekuazioa

$$z'(x) = z \frac{\partial X/\partial y - \partial Y/\partial x}{Y}$$

izango da, $[\partial X/\partial y - \partial Y/\partial x]/Y \equiv \phi(x)$ delarik. Integratu ondoren, hurrengo emaitzara hel daiteke:

$$\boxed{z(x) = A\exp \int \frac{\partial X/\partial y - \partial Y/\partial x}{Y}\,dx \equiv A\exp \int \phi(x)dx.}$$

$z = z(y)$ erako integrazio-faktoreak.

Oraingoan, $\partial z/\partial x = 0$ eta $\partial z/\partial y \equiv dz/dy$ dira. Beraz,

$$z'(y) = z \frac{\partial Y/\partial x - \partial X/\partial y}{X}$$

dugu, $[\partial Y/\partial x - \partial X/\partial y]/X \equiv \psi(y)$ delarik. Orduan, $z = z(y)$ faktorea existituko da, zeinek ondoko adierazpena baitu:

$$\boxed{z(y) = A\exp \int \frac{\partial Y/\partial x - \partial X/\partial y}{X}\,dy \equiv A\exp \int \psi(y)dy.}$$

Ekuazio homogenotarako integrazio-faktoreak.

$X(x,y)dx + Y(x,y)dy = 0$ ekuazio homogenorako integrazio-faktorea hurrengoa da:

$$z(x,y) = \frac{1}{x.X(x,y) + y.Y(x,y)} . \qquad [1]$$

Frogapena: $z(x,y)X(x,y)dx + z(x,y)Y(x,y)dy = 0$ ekuazioa zehatza da, hots, $z(x,y)$ integrazio-faktorea dugu.

$$\frac{X(x,y)}{x.X(x,y) + y.Y(x,y)} dx + \frac{Y(x,y)}{x.X(x,y) + y.Y(x,y)} dy = 0 \xrightarrow{\text{ED zehatza}}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{X}{x.X + y.Y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{Y}{x.X + y.Y}\right).$$

Deribatuak garatuz, ondokoa ondoriozta daiteke:

$$\frac{\frac{\partial X}{\partial y}\left(xX+yY\right) - X\left(x\frac{\partial X}{\partial y} + y\frac{\partial Y}{\partial y} + Y\right)}{(xX + yY)^2} = \frac{\frac{\partial Y}{\partial x}\left(xX+yY\right) - Y\left(x\frac{\partial X}{\partial x} + y\frac{\partial Y}{\partial x} + X\right)}{(xX + yY)^2} .$$

Zenbakitzaileak berdindu eta sinplifikatu ondoren, hurrengoa dugu:

$$Y\left(x\frac{\partial X}{\partial x} + y\frac{\partial X}{\partial y}\right) = X\left(x\frac{\partial Y}{\partial x} + y\frac{\partial Y}{\partial y}\right) \qquad [2]$$

Hipotesiak dioenez, $X(x,y)$ eta $Y(x,y)$ maila bereko funtzio homogenoak dira (m. mailakoak, adibidez), eta ondorioz Euler-en teorema beteko dute:

$$x\frac{\partial X}{\partial x} + y\frac{\partial X}{\partial y} = mX \qquad [3], \qquad x\frac{\partial Y}{\partial x} + y\frac{\partial Y}{\partial y} = mY. \qquad [4]$$

[3] eta [4] adierazpenak [2] ekuazioan ordezkatuz gero, $YmX \equiv XmY$ identitatea ondorioztatuko da, honela [1] adierazpena ekuazioaren integrazio-faktorea dela frogatuko delarik.

Adibidea.- Ebatz bitez hurrengo ekuazioak, integrazio-faktore bakunak erabiliz:

a) $y\sin(xy)dx + [x\sin(xy) - \cos(xy)/y]dy = 0.$

b) $(x^4 + y^4)dx - xy^3dy = 0.$

E: a) Ekuazio honek $z = z(y)$ integrazio-faktorea onartuko du.

$$\frac{\partial Y/\partial x - \partial X/\partial y}{X} = \frac{\sin xy + xy\cos xy + \sin xy - \sin xy - xy\cos xy}{y\sin xy} = \frac{1}{y}$$

$$\longrightarrow \quad z(y) = A\exp[\textstyle\int dy/y] = Ay \quad \longrightarrow \quad \mathbf{z(y) = y} \qquad (A = 1).$$

Ekuazioa integrazio-faktoreaz biderkatu, eta $x_0 = y_0 = 0$ balioak hartuz, hurrengo soluzioa lortuko da:

$$y^2\sin(xy)dx + [xy\sin(xy) - \cos(xy)]dy = 0 \qquad \xrightarrow{\int}$$

$$\int_0^x y^2\sin(xy)dx - \int_0^y dy = C \quad \longrightarrow \quad |-y\cos(xy)|_0^x - |y|_0^y = C \quad \longrightarrow$$

$$-y\cos(xy) + y - y = C \qquad \longrightarrow \qquad y\cos(xy) = A.$$

---

b) Kasu honetan, x-en menpeko integrazio-faktore bat daukagu:

$$\frac{\partial X/\partial y - \partial Y/\partial x}{Y} = (4y^3 + y^3)/(-xy^3) = -5/x \qquad \longrightarrow$$

$$z(x) = A\exp[\int -5dx/x] = A\exp[-5Lnx] = Ax^{-5} \longrightarrow z(x) = x^{-5}.$$

Beste kasuan bezala, eta $x_0 = 1$, $y_0 = 0$ eginez, ondokoa dugu:

$$(x^{-1} + x^{-5}y^4)dx - x^{-4}y^3dy = 0 \xrightarrow{\int}$$

$$\int_1^x (x^{-1} + x^{-5}y^4)dx - \int_0^y y^3dy = C \longrightarrow \left|Lnx - x^{-4}y^4/4\right|_1^x - y^4/4 = C$$

$$Lnx - (y/x)^4/4 + y^4/4 - y^4/4 = C \longrightarrow y^4 = 4x^4Lnx + Ax^4.$$

Oharra: Ekuazio homogenotarako integrazio-faktorea erabiliz gero, integrazio-faktore bera ondoriozta daiteke:

$$z(x,y) = 1/(x.X + y.Y) = 1/(x^5 + xy^4 - xy^4) = 1/x^5.$$

2.5 Ekuazio diferentzial linealak

Lehen ordenako ekuazio diferentzial linealak ondokoak dira:

$$a_0(x)y' + a_1(x)y = f(x).$$

Edo, a_0 funtzioaz zatituz gero, adierazpen hau onartuko dute:

$$y' + P(x)y = Q(x).$$

Integrazioa errazteko, x-en menpeko integrazio-faktoreak erabil daitezke. Horretarako, ekuazioa era diferentzialean idatziko da:

$$[P(x)y - Q(x)]dx + dy = 0,$$

$$[\partial X/\partial y - \partial Y/\partial x]/Y = P(x) \quad \Rightarrow \quad z(x) = \exp[\textstyle\int P(x)dx].$$

Ekuazioa integrazio-faktoreaz biderkatu ondoren,

$$y'\exp[\textstyle\int P(x)dx] + y\exp[\textstyle\int P(x)dx]P(x) = Q(x)\exp[\textstyle\int P(x)dx]$$

berdintzaren ezker-aldea, $y\exp[\int P(x)dx]$ biderkaketaren deribatua dela nabari daiteke. Horrela, ondoko erlazioa ondorioztatuko da:

$$d/dx\left[y\exp[\textstyle\int P(x)dx]\right] = Q(x)\exp[\textstyle\int P(x)dx].$$

dx faktoreaz biderkatu eta $\int$ eragilea aplikatuz, hurrengoa dugu:

$$y\exp[\textstyle\int P(x)dx] = \displaystyle\int Q(x)\exp[\textstyle\int P(x)dx]dx + C.$$

y aldagaia bakanduz gero, ondoko soluzioa kalkula daiteke:

$$\boxed{\mathbf{y = \exp[-\textstyle\int P(x)dx]\left[\displaystyle\int Q(x)\exp[\textstyle\int P(x)dx]dx + C\right].}}$$

Ekuazio diferentziala x-en menpekoa bada, hots,

$$x' + P(y)x = Q(y),$$

beraren soluzio orokorra hurrengo hau da:

$$\boxed{\mathbf{x = \exp[-\textstyle\int P(y)dy]\left[\displaystyle\int Q(y)\exp[\textstyle\int P(y)dy]dy + C\right].}}$$

Kasu partikularrak:

a) $$y' + P(x)y = Q(x)$$

ekuazio linealaren soluzio partikular bat ezaguna bada, soluzio orokorrera heltzeko koadratura bakarra behar dugu. Hau da, $y_1(x)$ soluzio bat bada, orduan hurrengoa beteko da:

$$y_1' + P(x)y_1 = Q(x).$$

Ekuazio bien arteko kenketa egin eta integratu ondoren, ondokoa lor daiteke:

$$y' - y_1' + (y - y_1)P(x) = 0 \longrightarrow \frac{d}{dx}(y - y_1) = -(y - y_1)P(x),$$

$$Ln(y - y_1) = -\int P(x)dx + C \quad \longrightarrow \quad y - y_1 = A\exp[-\int P(x)dx].$$

b) $y_1(x)$ eta $y_2(x)$ bi soluzio ezagunak badira, soluzio orokorra koadraturarik gabe kalkula daiteke. Beraz, aurreko emaitza aplikatuta,

$$y_2 - y_1 = B\exp[-\int P(x)dx],$$

eta gaiz gai zatituz, hurrengo emaitza ondoriozta dezakegu:

$$(y - y_1)/(y_2 - y_1) = C.$$

2.5.1 Ekuazio linealgarriak.

a) Bernouilli-ren ekuazioa.- Ondoko erakoa da:

$$y' + P(x)y = Q(x)y^n.$$

Ekuazio hau lineal bilaka dadin, hurrengo ordezkapena egingo da:

$$y^{(1-n)} = z \quad \longrightarrow \quad (1-n)y^{-n}y' = z' \quad \longrightarrow \quad y^{-n}y' = z'/(1-n).$$

Ekuazioa (y^{-n}) faktoreaz biderkatu eta ordezkatu ondoren,

$$y^{-n}y' + P(x)y^{1-n} = Q(x) \quad \longrightarrow \quad z' + (1-n)P(x)z = (1-n)Q(x)$$

ekuazio lineala dugu, beraren soluzio orokorra ondokoa delarik:

$$\boxed{z = y^{(1-n)} = \exp[\int(n-1)Pdx]\left[\int(1-n)Q\,\exp[\int(1-n)Pdx]dx + A\right].}$$

b) Ricatti-ren ekuazioa.- Ondoko erakoa da:

$$y' + P(x)y + Q(x)y^2 = f(x).$$

y_1 soluzio partikular ezagun batez, ekuazioa lineal bilakatuko da. Ondoko aldaketaren bidez, Bernouilli-ren ekuazio bihur daiteke:

$$y = y_1 + z \quad \longrightarrow \quad y' = y_1' + z',$$

$$y_1' + z' + P(x)[y_1 + z] + Q(x)[y_1^2 + 2y_1z + z^2] = f(x) \quad \longrightarrow$$

$$y_1' + P(x)y_1 + Q(x)y_1^2 + z' + P(x)z + Q(x)z^2 + 2Q(x)y_1z = f(x).$$

Baina, $y_1' + P(x)y_1 + Q(x)y_1^2 \equiv f(x)$ denez, sinplifikatuz:

$$z' + [P(x) + 2Q(x)y_1]z = -Q(x)z^2.$$

$z^{-1} = w$ aldaketa eginez, Bernouilli-ren ekuazio hau lineal bihurtuko da. Ondorioz, Ricatti-ren ekuazioa hurrengo ordezkapen honen bidez lineal bilakatuko da zuzenean:

$$y = y_1 + z^{-1} \quad \Rightarrow \quad y' = y_1' - z^{-2}z'.$$

Bestalde, bira y_1 eta y_2 bi soluzio ezagun. Ondoko ordezkapena eginez gero, Ricatti-ren ekuazioa lineala izango da:

$$z = \frac{y - y_1}{y - y_2} \quad \longrightarrow \quad y = \frac{y_2 z - y_1}{z - 1},$$

$$y' = \frac{(y_2'z + y_2 z' - y_1')(z - 1) - z'(y_2 z - y_1)}{(z - 1)^2}.$$

Ariketa proposatua: Froga ezazu lortutako ekuazioaren soluzio orokorra hurrengo hau dela:

$$\frac{y - y_1}{y - y_2} = A\exp\int Q(y_2 - y_1)dx.$$

Halaber, y_1, y_2 eta y_3 hiru soluzio ezagun badaude, Ricatti-ren ekuazioaren soluzio orokorra, koadraturarik gabe aurreko emaitza aplikatuz lor daitekeela:

$$\frac{y_3 - y_1}{y_3 - y_2} : \frac{y - y_1}{y - y_2} = C.$$

Adibidea.- Ebatzi $y' = y/(x^2 Lny - x)$ ekuazio diferentziala.

E: x aldagai independentetzat hartuz, Ricatti-ren ekuazioa dugu.

$$x' = (x^2 Lny - x)/y \quad \longrightarrow \quad x' + (1/y)x = (Lny/y)x^2.$$

$x^{-1} = z$ ordezkaketa eginez, soluzio orokorra hurrengoa da:

$$z = x^{(1-n)} = \exp[\textstyle\int(n-1)Pdy]\left[\displaystyle\int[(1-n)Q \exp\textstyle\int(1-n)Pdy]\,dy + A\right],$$

non $P(y) = 1/y$, $Q(y) = Lny/y$ eta $n = 2$ baitira. Eragiketak eginez,

$$x^{-1} = \exp[\textstyle\int(1/y)dy]\left[\displaystyle\int[(-Lny/y) \exp\textstyle\int(-1/y)dy]\,dy + A\right] \qquad \longrightarrow$$

$$x^{-1} = y\left[\int(-Lny/y)y^{-1}dy + A\right] = y[(Lny + 1)/y + A] = Lny + Ay + 1 \rightarrow$$

$$x(Lny + Ay + 1) = 1$$

soluziora iritsi gara.

Adibidea.- Integratu $y' = y^2 - 2/x^2$ ekuazioa, $y_1 = 1/x$ soluzioa ezagutuz.

E: Ricatti-ren ekuazio hau lineal bilaka daiteke, hurrengo ordezkapena eginez:

$$y = x^{-1} + z^{-1} \quad \longrightarrow \quad y' = -x^{-2} - z^{-2}z',$$

$$-x^{-2} - z^{-2}z' = x^{-2} + 2x^{-1}z^{-1} + z^{-2} - 2x^{-2} \quad \Rightarrow \quad z' + 2x^{-1}z = -1.$$

Azken honen soluzio orokorra ondokoa da:

$$z = \exp[\int(-2x^{-1})dx]\left[\int[-\exp\int(2x^{-1})dx]dx + C\right] =$$

$$= x^{-2}[\int(-x^2)dx + C] = -x/3 + Cx^{-2}.$$

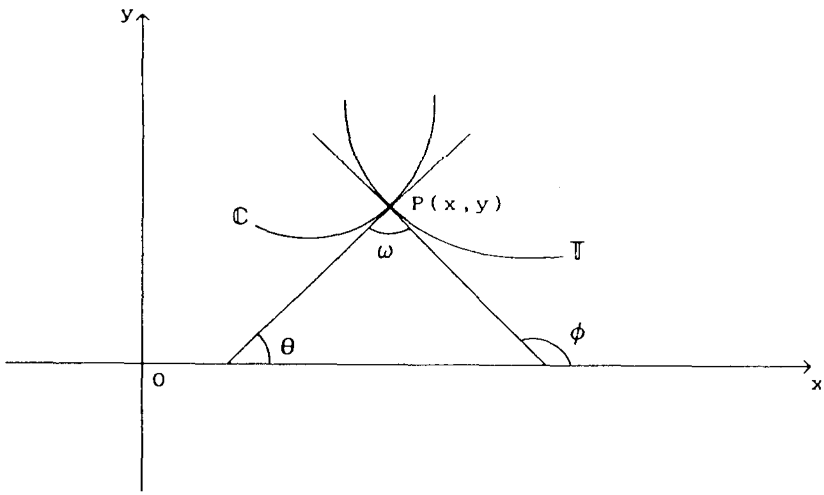
$z = x/(xy-1)$ aldaketa deseginez, ekuazioaren soluzioa lor daiteke.

$$x/(xy - 1) = -x/3 + C/x^2 \quad \Rightarrow \quad y = 1/x + 3x^2/(A - x^3).$$

2.6 Aplikazio geometrikoak. Ibilbide isogonalak

Definizioa: $F(x,y,C) = 0$ kurba-sortarekin ω^o-ko angelu konstantea osotzen duten kurbei, kurba-sortaren ω^o-ko angeluko ibilbide isogonalak deritze. $\omega^o = 90^o$-koa den kasuan, ibilbide ortogonalak dauzkagu.

Kurben zuzen tangenteek ebakidura-puntuan osotzen duten ω^o-ko angeluari, ebakidura-angelua deritzo. Bira **C** $F(x,y,C) = 0$ sortako kurba bat eta **T** ibilbide isogonala. Dakusagun bi zuzenen malden arteko erlazioa zein den $P(x,y)$ puntuan.



$$\operatorname{tg}\theta = \operatorname{tg}(\phi - \omega) = \frac{\operatorname{tg}\phi - \operatorname{tg}\omega}{1 + \operatorname{tg}\phi \operatorname{tg}\omega} \Rightarrow y'_c = \frac{y'_t - \operatorname{tg}\omega}{1 + y'_t \operatorname{tg}\omega},$$

$\operatorname{tg}\theta = y'_c$ eta $\operatorname{tg}\phi = y'_t$ izanik.

Ondorioz, $F(x,y,C) = 0$ kurba-sortarekiko ibilbide isogonalen ekuazio diferentziala lortzeko, sortaren ekuazio diferentzialean, y'_c-ren adierazpenean y' deribatua ordezkatzea nahikoa izango da.

Eskematikoki:

$$\left\{\begin{array}{l} F(x, y, C) = 0 \\ \partial F/\partial x + (\partial F/\partial y)y'_c = 0 \end{array}\right. \xrightarrow{\text{C ezabatuz}} f(x, y, y'_c) = 0 \quad \text{sortaren EDa}$$

$$\Rightarrow f\left(x, y, \frac{y'_t - \operatorname{tg}\omega}{1 + y'_t \operatorname{tg}\omega} \right) = g(x, y, y'_t) = 0 \quad \text{ED isogonala} \quad \xrightarrow{\int}$$

$$G(x, y, C) = 0 \qquad \text{sorta isogonala.}$$

Ibilbide **ortogonalen** kasurako, malden arteko erlazioa ondokoa da:

$$y'_c = -1/y'_t.$$

Adibidea.- Frogatu

$$2x^3dx + y(3x^2 + y^2)dy = 0$$

ekuazio diferentziala,

$$x(x^2 + y^2) - Cy^2 = 0$$

kurba-sortaren ibilibide ortogonalen adierazpena dela, eta ondoren, kalkulatu beraren integral orokorra.

E: Hasteko, emandako kurba-sortaren ekuazio diferentziala kalkulatu behar da. Horretarako, C konstantea bakandu eta lortutako berdintza deribatuko dugu.

$$C = \frac{x(x^2 + y^2)}{y^2} \longrightarrow 0 = \frac{(3x^2 + y^2 + 2xyy')y^2 - 2yy'x(x^2 + y^2)}{y^4}$$

y' deribatuarekiko ebatzita: $y' = (3x^2y + y^3)/2x^3$.

y' gaia -1/y' aldagaiaz ordezkatuz, sorta ortogonalaren ekuazio diferentziala kalkulatuko da:

$$-1/y' = (3x^2y + y^3)/2x^3 \Rightarrow 2x^3dx + y(3x^2 + y^2)dy = 0.$$

Ekuazio homogeno hau integratu baino lehen,

$$y = xu \longrightarrow dy = udx + xdu$$

aldagai-aldaketa aplikatuko dugu, ondoko ekuazioa lortuko delarik:

$$2x^3dx + xu(3x^2 + x^2u^2)(udx + xdu) = 0.$$

Aldagaiak banandu, integratu eta hurrengoa izango dugu:

$$(u^4 + 3u^2 + 2)dx + (u^3 + 3u)xdu = 0 \Rightarrow \int \frac{(u^3 + 3u)du}{u^4 + 3u^2 + 2} + \text{Ln}x = C.$$

Frakzio sinpleen deskonposaketa kontutan hartuz,

$$\frac{u^3 + 3u}{u^4 + 3u^2 + 2} = \frac{2u}{u^2 + 1} - \frac{u}{u^2 + 2},$$

$$\int \frac{2udu}{u^2 + 1} - \int \frac{udu}{u^2 + 2} + \text{Ln}x = \text{Ln}(u^2 + 1) - \frac{1}{2}\,\text{Ln}(u^2 + 2) + \text{Ln}x = C$$

ondoriozta dezakegu.

Eragiketak egin eta hasierako aldagaietara itzuliz,

$$\frac{(u^2 + 1)^2 x^2}{u^2 + 2} = A \xrightarrow{u=y/x} (y^2 + x^2)^2 - A(y^2 + 2x^2) = 0$$

kurba-sorta ortogonalaren ekuazioa kalkula dezakegu.

---

3. LEHEN ORDENA ETA GOI-MAILAKO EKUAZIOAK

3.1 Kontsiderazio orokorrak

Biz lehen ordena eta goi-mailako ondoko ekuazio diferentziala:

$$F(x, y, y') = 0, \qquad \text{edo} \qquad F(x, y, p) = 0, \qquad [1]$$

non y' = p baita.

Existentziaren eta bakartasunaren teorema enuntziatu aurretik, beharrezkoa da mota honetako ekuazioen soluzioei buruzko aurrekontsiderazio batzu egitea.

Horrela, izate-eremuko $P(x_0,y_0)$ puntu bakoitzetik ekuazioaren kurba integral bat baino gehiago pasatuko da. Orduan, m. mailako [1] ekuazioa y' deribatuarekiko ebatziz gero, era normalean adierazitako lehen maila eta ordenako

$$y' = p = f_i(x,y), \qquad (i = 1,2,\ldots,m) \qquad [2]$$

ekuazioak lortuko dira, hauen soluzioak halaber [1]-en soluzioak direlarik. Ondorioz, $f_i(x,y)$ funtzio bakoitzak existentzia eta bakartasunaren teoremako hipotesiak betetzen baditu, orduan [2] adierazpendun ekuazio bakoitzerako $y(x_0) = y_0$ hastapen-baldintza beteko duen soluzio bakar bat existituko da. Beraz, goi-mailako ekuazio baten soluzioaren bakartasunari buruz ari garenean, ondokoa diogu: $P(x_0,y_0)$ puntu bakoitzetik eta kontsideratutako $[y'_i(x_0)]$ norabidetik [1] ekuazioaren kurba integral bat besterik ez dela pasatuko. Hau da, puntu finko bakoitzetik

$$y'_1(x_0) \neq y'_2(x_0) \neq y'_3(x_0) \neq \ldots \neq y'_m(x_0)$$

malda desberdineko kurba integralak pasatzen badira, bakartasuna izango dugu.

3.2 Existentzia eta bakartasunaren teoremaren enuntziatua

" (x_0,y_0,y'_1) puntuaren ingurune batetan hurrengo baldintzak betetzen badira,

a) $F(x,y,y')$ funtzioa argumentu guztietan jarraia da,

b) $\partial F/\partial y' \equiv \partial F/\partial p$ deribatua existitzen da eta ez-nulua da,

c) $\partial F/\partial y$ existitzen da, eta $|\partial F/\partial y| \leq N$ da,

orduan, [1] ekuaziorako $y = y(x)$ soluzio bakarra existituko da, zeinak $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y'_1$ beteko duen, y'_1 deribatua $F(x_0,y_0,y') = 0$ ekuazioaren erro errealetariko bat izanik.

Oharra: Baldintza hauek nahikoak dira, baina ez beharrezkoak.

3.2.1 Soluzio singularrak.

Teoremaren baldintzak betetzen ez dituzten $P(x,y)$ puntuek **multzo singularra** deritzona osotuko dute. Praktikan ohikoa da a) eta c) baldintzak betetzea, baina ez b). Horregatik, ekuazio edo kurba p-diskriminatzailea aztertzea interesgarria izango da, beraren azterketak ekuazio diferentzialaren zenbait soluzio ondorioztatuko baititu.

$$\left\{\begin{array}{l} F(x,y,p) = 0 \\ \partial F/\partial p = 0 \end{array}\right. \xrightarrow{\text{p ezabatuz}} \phi(x,y) = 0 \text{ (Kurba p-diskriminatzailea).}$$

Kurba p-diskriminatzailearen multzo singularreko $y = \psi(x)$ adar bat [1] ekuazioaren soluzio bada, orduan horri soluzio integral edo kurba integral singular deritzo.

3.2.2 G(x,y,C) = 0 kurba-sortaren inguratzailea.

$\mathbb{L}$ kurba $G(x,y,C) = 0$ sortaren inguratzailea da, baldin eta $\mathbb{L}$ kurbako puntu bakoitza sortaren kurba batekiko tangentea bada. Ondorioz, segmentu bat sortaren infinitu kurbekiko tangentea da.

Dakusagun integral-sortaren $\mathbb{L}$ inguratzailearen eta ekuazio diferentzial asoziatuaren soluzioen arteko erlazioa.

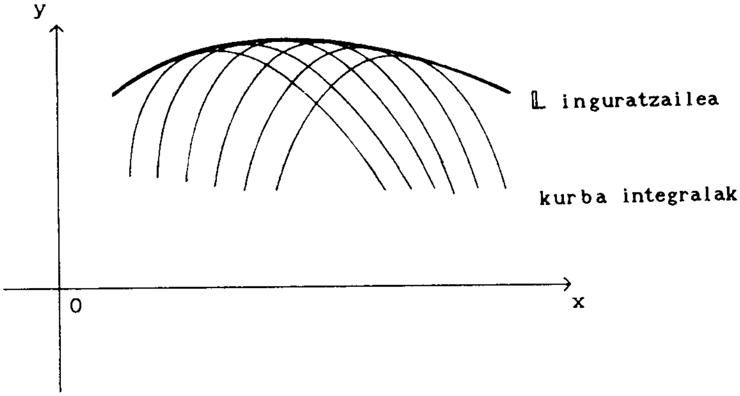
Biz $G(x,y,C) = 0$ delakoa, $g(x,y,y') = 0$ ekuazio diferentzialaren integral orokorra. Aurreko definizioaren arabera, $G(x,y,C) = 0$ integral-sortak inguratzaile bat onartuz gero, orduan inguratzaile hori ekuazio diferentzialaren kurba integral bat izango da.

Halaber, $\mathbb{L}$ kurbarako ondoko baldintzak beteko dira:

1) $\mathbb{L}$ kurbako puntu bakoitza integral-sortako kurba batekiko tangentea da. Beraz, $\mathbb{L}$ kurbako puntu bakoitzean ekuazio diferentziala beteko da, eta ondorioz, $\mathbb{L}$ kurba integrala da.

2) $\mathbb{L}$ kurbako puntu bakoitzetik malda bereko bi kurba integral pasatuko dira gutxienez: bera eta tangentea den kurba integrala. Honegatik, ez dago soluzio bakarrik, eta beraz, $\mathbb{L}$ delakoa integral singularra da.

Irudian integral-sorta jakin baten $\mathbb{L}$ inguratzailea adierazi da.



Kurba-sorta baten inguratzailea

Inguratzailearen ezaugarritasun honek ekuazio diferentzialaren soluzio singularrak aztertzeko zeharkako metodo bat emango du, zeina integral-sorta ezagunaren inguratzailearen existentzia aztertzean datzan.

G(x,y,C) = 0 sortak inguratzailea onartzen badu, inguratzailea kurba C-diskriminatzailean edukita egon behar dela froga daiteke.

$$\begin{cases} G(x,y,C) = 0 \\ \partial G/\partial C = 0 \end{cases} \xrightarrow{\text{C ezabatuz}} \omega(x,y) = 0 \text{ (Kurba C-diskriminatzailea).}$$

Inguratzaileaz gain, kurba C-diskriminatzailean sortaren beste zenbait puntu-multzo nabarmen aurki daitezke. Adibidez, puntu anizkoitzak, atzerapen-puntuak, etab. Kurba C-diskriminatzailearen adar bat inguratzailea izan dadin, baldintza nahikoa da beraren puntuetan ondoko baldintzak betetzea:

1) $\partial G/\partial x$ eta $\partial G/\partial y$ deribatuak existitzea, non $|\partial G/\partial x| \le N_1$, eta $|\partial G/\partial y| \le N_2$ diren.

2) $\partial G/\partial x \ne 0$, $\partial G/\partial y \ne 0$.

3.3 Zenbait integrazio-kasu

Goi-mailako ekuazio baten integrazio arrunta oinarrizko hiru kasutan bana daiteke, y', y edo x argumentuekiko ebaztearen arabera.

3.3.1 y' aldagaiarekiko ekuazio ebazgarriak.

Sarreran azaldutako moduan, m. mailako $F(x,y,y') = 0$ ekuazioa deribatuarekiko ebazgarria bada, orduan orokorrean lehen ordena eta mailako m ekuazio diferentzial lortuko dira:

$$y' = p = f_i(x,y), \qquad (i = 1,2,\ldots,m),$$

zeintzuen soluzioak, halaber, goi-mailako ekuazioaren soluzioak diren.

Kasu aipagarria: Biz $y' = p$ deneko m. mailako ondoko ekuazioa:

$$p^m + Q_1(x,y)p^{m-1} + Q_2(x,y)p^{m-2} + \ldots + Q_{m-1}(x,y)p + Q_m(x,y) = 0.$$

Ekuazio hau p aldagaiko polinomiotzat hartuz gero, lehen adierazitako m erroak kalkulatuko dira, eta ondorioz, ekuazioa

$$(p - f_1)(p - f_2)\ldots(p - f_i)\ldots(p - f_m) = 0$$

eran faktorizatuko da, honen soluzioak hurrengoak direlarik:

$$p - f_i(x,y) = 0 \xrightarrow{\int} G_i(x,y,C) = 0, \qquad i = 1,2,\ldots,m.$$

Era inplizituan adierazitako eta C hautazko konstante bakarra duten m soluzio hauen biderkaketa, hots,

$$G_1(x,y,C)G_2(x,y,C)\ldots G_m(x,y,C) = 0$$

adierazpena, ekuazioaren integral orokorra da.

Adibidea.- Aurkitu ondoko ekuazioaren jatorrizkoa:

$$xyy'^2 - (y^2 - x^2)y' - xy = 0.$$

E: y'= p egin eta bigarren mailako

$$xyp^2 - (y^2 - x^2)p - xy = 0$$

ekuazioa ebatziz, hurrengo emaitzak ditugu:

$$p = \frac{(y^2 - x^2) \pm \sqrt{y^4 - 2x^2y^2 + x^4 + 4x^2y^2}}{2xy} = \frac{(y^2 - x^2) \pm (y^2 + x^2)}{2xy}$$

$$\longrightarrow \qquad p_1 = y/x, \qquad p_2 = -x/y.$$

Lehenengo mailako ekuazio hauen soluzioak,

$$y' = y/x \longrightarrow dy/y - dx/x = 0 \Rightarrow y - Cx = 0,$$

$$y' = -x/y \longrightarrow ydy + xdx = 0 \Rightarrow y^2 + x^2 - C = 0$$

dira, era horretan ekuazioaren integral orokorra ondokoa delarik:

$$(y - Cx)(y^2 + x^2 - C) = 0.$$

Soluzio singular posibleak aztertzeko, kurba p-diskriminatzailea aztertu behar da.

$$\left\{\begin{array}{l} xyp^2 - (y^2 - x^2)p - xy = 0 \\ 2xyp - (y^2 - x^2) = 0 \end{array}\right. \xrightarrow{\text{p ezabatuz}} x^2 + y^2 = 0.$$

Multzo singularra $x = 0$, $y = 0$ puntuaz osoturikoa da. Beraz, ez dago soluzio singularrik.

3.3.2 y aldagaiarekiko ekuazio ebazgarriak.

Hauek $y = f(x,y')$ erakoak dira.

Integraziorako ondoko adierazpen parametrikoa erabiliko da:

$$y = f(x,p), \qquad y' = p.$$

Hurrengo erlazioa aplikatuz,

$$dy = y'dx \longrightarrow dy = (\partial f/\partial x)dx + (\partial f/\partial p)dp \longrightarrow y' = \partial f/\partial x + (\partial f/\partial p)\,\frac{dp}{dx}$$

eta honetan $y' = p$ eginez, x eta p aldagaiekiko lehen ordena eta lehen mailako hurrengo ekuaziora iritsiko gara:

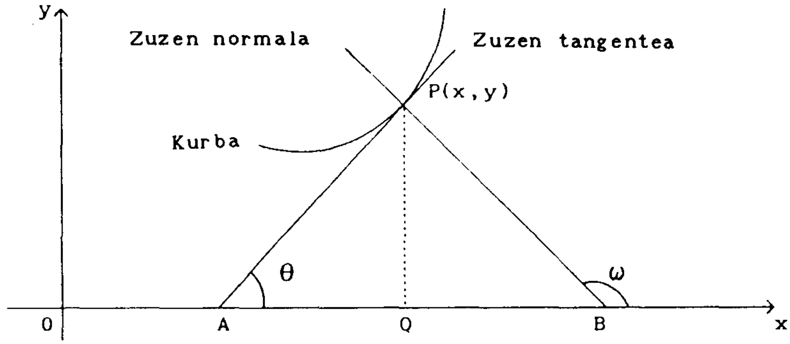
$$p = \partial f/\partial x + (\partial f/\partial p)\,\frac{dp}{dx}\ .$$

Froga daitekeenez, ekuazio honen integral orokorrak ($F(x,p,C)=0$ delakoak) eta $y = f(x,p)$ adierazpenak, emandako ekuazioaren jatorrizkoa osotuko dute. Adierazpen hau era parametrikoan dator, baina p parametroa ezabatuz gero, koordenatu cartesiarretako soluziora garamatza.

Soluzioa koor. parametrikoetan — Soluzioa koor. cartesiarretan

$$\left\{\begin{array}{l} y = f(x,p) \\ F(x,p,C) = 0 \end{array}\right. \xrightarrow{\text{p ezabatuz}} \quad g(x,y,C) = 0$$

Adibidea.- Aurki bitez ondoko propietatea betetzen duten planoko kurbak: " *Biz P, A, B erpinetako triangelua, non P kurbako edozein P(x,y) puntu, eta A eta B zuzen tangenteak eta zuzen normalak OX ardatzarekin dituzten ebakidura-puntuak diren, hurrenez hurren. Triangelu honen azalera, puntuaren koordenatuen biderkaketaren berdina da".*



$\overline{OA}$ eta $\overline{OB}$ segmentuen luzerak, P(x,y) puntuan kurbarekiko zuzen tangentea eta normala abzisa-ardatzaz ebakiz kalkulatuko dira.

$$Y - y = y'(X - x) \xrightarrow{Y=0} X \equiv \overline{OA} = x - y/y',$$

$$Y - y = -1/y'(X - x) \xrightarrow{Y=0} X \equiv \overline{OB} = x + yy'.$$

Irudiaren arabera, ondokoa dugu:

$$\overline{AB} = \overline{OB} - \overline{OA} = |x + yy' - x + y/y'| = |yy' + y/y'|.$$

P, A, B erpinetako triangeluaren Ω azaleraren kalkulua:

$$\Omega = \frac{1}{2}\,\overline{AB}\;\overline{PQ} = \frac{1}{2}\,|(yy' + y/y')y|.$$

Enuntziatuko propietatearen arabera, kurbei asoziaturiko ekuazio diferentziala ondokoa da:

$$\Omega = xy \longrightarrow \frac{1}{2}(yy' + y/y')y = xy \longrightarrow yy'^2 - 2xy' + y = 0.$$

Ekuazio hau y aldagaiarekiko ebazgarria denez, y'= p ordezkatu, y-rekiko eragiketak egin, deribatu eta sinplifikatu ondoren,

$$y = \frac{2xp}{p^2+1} \longrightarrow y' = p = \frac{2(p + x\ dp/dx)(p^2+1) - 4xp^2dp/dx}{(p^2+1)^2} \longrightarrow$$

$$p(p^2+1)^2 = 2p(p^2+1) + 2x(1-p^2)dp/dx \longrightarrow$$

$$p(p^2+1)(1-p^2) + 2x(1-p^2)dp/dx = 0 \quad \Rightarrow$$

$$p(p^2+1) + 2x\ dp/dx = 0 \qquad [1], \qquad 1 - p^2 = 0 \qquad [2]$$

berdintzak ondoriozta ditzakegu.

Orduan, lehen mailako [1] ekuazio diferentzial laguntzailera helduko gara, zeinaren jatorrizkoa hurrengoa den:

$$2dp/p(p^2+1) + dx/x = 0 \longrightarrow \int[2/p - 2p/(p^2+1)]dp + \int dx/x = 0 \longrightarrow$$

$$2Lnp - Ln(p^2+1) + Lnx = C \longrightarrow p^2x/(p^2+1) = A.$$

Beraz, soluzioa koordenatu parametrikoetan ondokoa da:

$$\begin{cases} yp^2 - 2xp + y = 0, \\ p^2x/(p^2+1) = A. \end{cases}$$

p parametroa ezabatuz gero, soluzioaren adierazpen cartesiarra lortuko da. Bigarren ekuazioa p aldagaiarekiko ebatzi eta lehenengo ekuazioan ordezkatu ondoren, OX ardatzeko eta (A,0) erpineko parabola-familia ondoriozta daiteke:

$$p^2x - A(p^2+1) = p^2(x-A) - A = 0 \longrightarrow p = \pm\left(\frac{A}{x-A}\right)^{1/2} \Rightarrow$$

$$\frac{Ay}{x-A} \pm 2x\left(\frac{A}{x-A}\right)^{1/2} + y = 0 \longrightarrow \left(\frac{xy}{x-A}\right)^2 = \frac{4Ax^2}{x-A} \qquad \Rightarrow$$

$$y^2 = 4A(x - A).$$

[2] ekuazioaz eraginez, beste soluzio batzu kalkula ditzakegu:

$$\begin{cases} yp^2 - 2xp + y = 0, \\ p^2 - 1 = 0, \end{cases} \xrightarrow[p=\pm 1]{p \text{ ezabatuz}} \begin{cases} y - x = 0, \\ y + x = 0. \end{cases}$$

Soluzio hauek singularrak dira, soluzio orokorretik ezin direlako ondorioztatu. Gainera, integral-sortaren zuzen inguratzaileak dira. Horrela, kurba A-diskriminatzailea ondokoa dugu:

$$\begin{cases} y^2 = 4A(x - A) \\ 0 = 4x - 8A \end{cases} \xrightarrow[A=x/2]{A \text{ ezabatuz}} y^2 = x^2 \quad \Rightarrow \quad y = \pm x.$$

Halaber, kurba p-diskriminatzailea erabiliz, emaitza horretara hel gaitezke:

$$\begin{cases} yp^2 - 2xp + y = 0 \\ 2yp - 2x = 0 \end{cases} \xrightarrow[p=x/y]{p \text{ ezabatuz}} -x^2 + y^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad y = \pm x$$

3.3.3 x aldagaiarekiko ekuazio ebazgarriak.

Ekuazio hauek $x = f(y,y')$ erakoak dira, edo, era parametrikoan $x = f(y,p)$ adierazpena dute, non $y' = p$ den.

Hemendik, p eta y aldagaiekiko ekuazio laguntzailea ondoriozta daiteke:

$$dy = y'dx \longrightarrow dy = p[(\partial f/\partial y)dy + (\partial f/\partial p)dp] \longrightarrow \frac{1}{p} = \partial f/\partial y + \partial f/\partial p \frac{dp}{dy}$$

Hasierako ekuaziotik abiaturik eta y-rekiko deribatuz, emaitza berera iritsiko ginateke.

Ekuazio honen integrala $F(y,p,C) = 0$ bada, aurreko kasuan bezala, ondoko soluzioak kalkula daitezke:

Soluzioa koor. parametrikoetan		Soluzioa koor. cartesiarretan
$\begin{cases} x = f(y,p) \\ F(y,p,C) = 0 \end{cases}$	$\xrightarrow{\text{p ezabatuz}}$	$g(x,y,C) = 0.$

Adibidea.- Ebatzi aurreko adibideko ekuazio diferentziala x aldagaiarekiko.

E: Orain x aldagaia bakandu eta y-rekiko deribatu behar da.

$$2x = \frac{y(p^2+1)}{p} \longrightarrow \frac{2}{p} = \frac{(p^2 + 1 + 2yp\ dp/dy)p - y(p^2+1)dp/dy}{p^2}$$

$$\longrightarrow 2p = p^3 + p + y(p^2 - 1)dp/dy \longrightarrow 0 = (p^2 - 1)[p + y\ dp/dy] \Rightarrow$$

$$p + y\ dp/dy = 0 \qquad [1], \qquad p^2 - 1 = 0. \qquad [2]$$

[1] ekuazioaren jatorrizkoa hurrengoa da:

$$dp/p + dy/y = 0 \longrightarrow Lnp + Lny = A \longrightarrow py = B.$$

Ekuazio honek eta enuntziatukoak soluzio orokorra definituko dute:

$$\begin{cases} yp^2 - 2xp + y = 0 \\ py = B \end{cases} \xrightarrow[p=B/y]{\text{p ezabatuz}} y^2 = B(2x - B).$$

B = 2A eginez, aurreko kasuko soluzioaren baliokidea da.

3.4 Zenbait ekuazio nabarmen

Kontutan hartzekoak dira y aldagaiarekiko ebazgarriak diren hurrengo ekuazioak:

$y = xf(y') + g(y')$, edo, $y = xf(p) + g(p)$ **Lagrange-ren ekuazioa,**

$y = xy' + g(y')$, edo, $y = xp + g(p)$ **Clairut-en ekuazioa.**

Bigarren hau $f(p) = p$ denerako lehenengoaren kasu partikularra da.

Lagrange-ren ekuazioaren soluzioa:

$y' = p$ eta beraren x-ekiko deribatua ordezkatuz gero,

$$y = xf(p) + g(p) \longrightarrow y' = p = f(p) + [xf'(p) + g'(p)]\,\frac{dp}{dx} \Rightarrow$$

$$\frac{dx}{dp} - \frac{f'(p)}{p - f(p)}\,x = \frac{g(p)}{p - f(p)}, \qquad p - f(p) \neq 0,$$

ekuazio diferentziala lortuko da, non x aldagai dependente eta y aldagai independenteak baitira.

$x = \alpha(p) + C\,\beta(p)$ delakoa ekuazio honen jatorrizkoa bada, soluzioa hurrengoa izango da, koordenatu parametrikoetan:

$$\begin{cases} x = \alpha(p) + C\,\beta(p), \\ y = [\alpha(p) + C\,\beta(p)]f(p) + g(p). \end{cases}$$

Bestalde, x-en funtzioko ekuazio linealera iristeko, (dp/dx) gaiaz zatitu behar da. Honegatik, (dp/dx) = 0 denerako soluzio posibleak aztertu behar lirateke. Beraz,

$$p - f(p) = [xf'(p) + g'(p)]\,\frac{dp}{dx}$$

ekuazio laguntzailean $p = A_i$ (kte) guztiak $(dp/dx) = 0$ ekuazioaren soluzioak badira, halaber ekuazio laguntzailearen soluzioak, eta aldi berean, $p - f(p) = 0$ ekuazioaren erroak izango dira. Hau da, ekuazio honek $p = p_i$ erro errealak baditu, orduan soluzio orokorrari soluzio hauek erantsi behar zaizkio:

$$\begin{cases} p = p_i \\ y = xf(p) + g(p) \end{cases} \xrightarrow{\text{p ezabatuz}} y = xf(p_i) + g(p_i),$$

zuzen hauek integral-sortaren inguratzaileak direlarik.

Clairut-en ekuazioaren soluzioak:

Aurreko kasuan bezala, ekuazio laguntzailea ondorioztatuz,

$$y = xp + g(p) \longrightarrow y' = p = p + [x + g'(p)]\,\frac{dp}{dx} \qquad \Rightarrow$$

$$[x + g'(p)]\,\frac{dp}{dx} = 0,$$

beraren soluzioak,

$$\frac{dp}{dx} = 0 \longrightarrow p = C \qquad [1], \qquad x + g'(p) = 0 \qquad [2]$$

alegia, kalkulatuko dira.

Lehenengoak soluzio orokorrera garamatza,

$$\begin{cases} p = C \\ y = xp + g(p) \end{cases} \xrightarrow{\text{p ezabatuz}} y = Cx + g(C)$$

adierazpenera alegia, parametro bakarreko zuzen-familia bat delarik. Ohar moduan, Clairut-en ekuazioaren soluzio orokorra, ekuazioan deribatua konstante batez ordezkatuz zuzenean kalkula daitekeela esan behar da.

Bestalde, [2] soluziotik integral singularra ondorioztа daiteke:

$$\begin{cases} y = xp + g(p), \\ 0 = x + g'(p), \end{cases}$$

zeina kurba p-diskriminatzailea izateaz gain, integral orokorraren kurba inguratzailea den. Era honetan, zuzen-familiaren kurba C-diskriminatzailea, hots,

$$\begin{cases} F(x,y,C) = 0 \\ \partial F/\partial C = 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} y = Cx + g(C), \\ 0 = x + g'(C), \end{cases}$$

C = p ordezkaketa egin ondoren, kurba p-diskriminatzailea da.

Adibidea.- Ebatz bedi hurrengo ekuazio diferentziala:

$$y'^2 - 2xy' + 2y = 0.$$

Aurki bitez A(3,5/2) puntutik pasatzen diren kurba integralak, eta irudika bedi kurba integralaren zirriborroa.

E: Ekuazio hau Clairut-en ekuazio bat dugu. y-rekiko ebatziz, ondokoa lor daiteke:

$$y = xy' - y'^2/2, \quad \text{edo,} \quad y = xp - p^2/2.$$

Dagokion integral-sorta, parametro bakarreko

$$y = Cx - C^2/2$$

zuzen-familia da. Ekuazio diferentzialean y' deribatua C delakoaz ordezkatuz kalkula daiteke familia hori.

A puntutik pasatuko diren soluzioak kalkulatzeko, $y(3) = 5/2$ baldintza ordezkatu eta C-ren balioa aterako da:

$$y = Cx - C^2/2 \xrightarrow{y(3)=5/2} C^2 - 6C + 5 = 0 \longrightarrow C = 1\ ,\ C = 5.$$

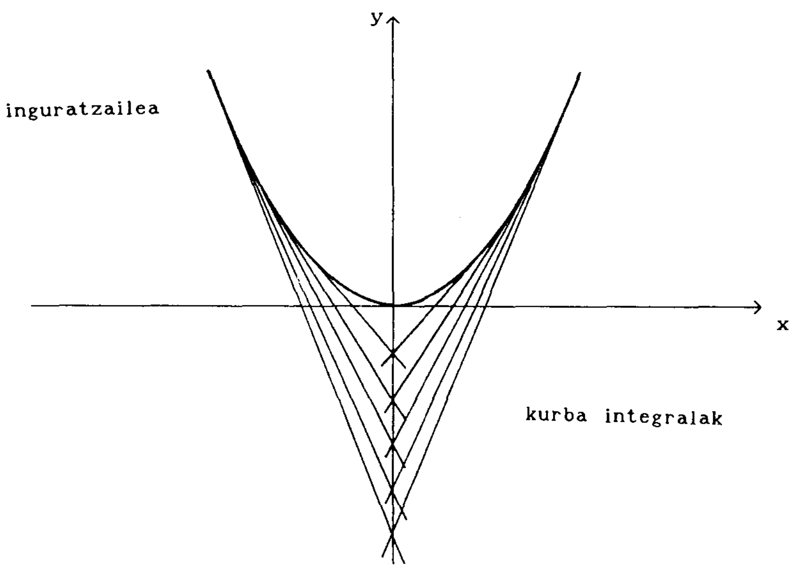
Horrela, integral partikularrak ondoko zuzenak dira:

$$y_1 = x - 1/2\ , \qquad y_2 = 5x - 25/2.$$

Soluzio singularrak (inguratzaileak) aztertzeko, edozein kurba diskriminatzaile planteatuko da, emaitza ondoko kurba izango delarik:

$$\left\{ \begin{array}{l} y = Cx - C^2/2 \\ 0 = x - C \end{array} \right. \xrightarrow{\text{C ezabatuz}} y = x^2/2.$$

Soluzio singular hau (singularra da, soluzio orokorretik ondorioztaezina delako), OY ardatzeko eta (0,0) erpineko parabola da, parametro bakarreko integral-sortaren zuzenekiko tangentea delarik. Beraz, grafikoan ikus dezakegunez, integral orokorraren kurba inguratzailea da.



4. n. ORDENAKO EKUAZIO DIFERENTZIAL LINEALAK

4.1 Sarrera eta definizioak

n. ordenako ekuazio diferentzial linealek integrazio sinpleena duen ekuazio-multzoa osotzen dute, eta matematika teknikoan garrantzi handikoak dira, ingeniaritzako sistema ezberdinei asoziaturiko zenbait eredu matematikotan parte hartuko baitute.

Ondoko erakoak dira:

$$a_o y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + ... + a_{n-2} y'' + a_{n-1} y' + a_n y = f(x), \quad [1]$$

funtzioa eta beraren deribatuekiko linealtasuna adierazten delarik.

[1] ekuazioari ez-homogeno edo osotua deritzo. Aldiz, $f(x) = 0$ bada, homogeno edo ez-osotua izango da.

Halaber, koefizienteetariko bat gutxienez x-en menpekoa denean, koefiziente aldakorretakoa dela esan ohi da, eta koefiziente guztiak konstanteak badira, koefiziente konstanteetakoak deritze.

4.2 P(D) polinomio eragile diferentziala. Propietateak

D deribatu eragilea elkarren segidan n aldiz aplikatuz, hots,

$$D(y) \equiv y', \; D[D(y)] \equiv D^2(y) \equiv y'',....., \; D[D^{n-1}(y)] \equiv D^n(y) \equiv y^{(n)},$$

[1] ekuazioak hurrengo adierazpena onartuko du:

$$[a_o D^n + a_1 D^{n-1} + ... + a_{n-2} D^2 + a_{n-1} D + a_n](y) = f(x). \quad [2]$$

Kortxete arteko baturari polinomio eragile diferentziala deritzogu, eta $\mathbf{P}_n\mathbf{[D]}$ idatziko dugu. Definizio honen arabera, [1] ekuazioaren adierazpena $\mathbf{P}_n\mathbf{[D]}(y) = f(x)$, edo era laburragoan,

P[D]y = f(x) bihurtu ohi da.

P[D] eragilearen propietate garrantzitsuenetariko bat linealtasuna da. **D**-ren linealtasunaren arabera, ondokoa betetzen da:

a) $P[D](y_1 + y_2) = P[D]y_1 + P[D]y_2$, b) $P[D](Cy) = CP[D]y$.

Orokorrean, hurrengoa ondoriozta daiteke:

$$P[D]\left(\sum_1^n C_i y_i\right) = \sum_1^n C_i P[D]y_i = C_1 P[D]y_1 + C_2 P[D]y_2 + \dots + C_n P[D]y_n .$$

Erraz froga daitekeenez, x(t) funtzioa n aldiz deribagarria eta $x'(t) \neq 0$ badira, $x = x(t)$ aldaketa egiten denean, ekuazio diferentzialaren linealtasuna eta homogenotasuna mantendu egingo dira.

4.3 Ekuazio diferentzial homogenoaren soluzio orokorra

Biz ondoko n. ordenako ekuazio diferentzial homogenoa:

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{n-2} y'' + a_{n-1} y' + a_n y = 0, \qquad [3]$$

zein sinbolikoki $P[D]y = 0$ idatziko baita.

Teorema. "y_1, y_2, ..., y_n ekuazio diferentzial homogeno baten soluzioak badira, beraien artean hautazko konstanteen bidez egin daitezkeen konbinazio lineal guztiak ere soluzioak dira". Hau da:

$$P[D]y_i = 0, \quad i = 1,2,\dots,n \quad \longrightarrow \quad P[D]\left(\sum_1^n C_i y_i\right) = 0.$$

Frogapena: Linealtasunaren propietate eta hipotesiaren arabera,

$$P[D]\left(\sum_{1}^{n} C_i y_i\right) = \sum_{1}^{n} C_i P[D]y_i = 0 \text{ dugu,} \qquad P[D]y_i = 0 \text{ baita.}$$

Ondorioz,

$$y = \sum_{1}^{n} C_i y_i = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots + C_n y_n$$

konbinazio linealak [3] adierazpena beteko du, eta beraz, soluzioa da.

4.3.1 Soluzioen dependentzia eta independentzia lineala.

Definizioa: $\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ soluzio-multzoa linealki independentea da, baldin eta

$$C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots + C_n y_n = 0 \qquad [4]$$

berdintza, $C_1 = C_2 = \dots = C_n = 0$ denean soilik betetzen bada, non $C_1, C_2, \dots, C_n$ konstanteak diren.

Bestalde, [4] adierazpena betetzen duen C_i konstanteetariko bat ez-nulua bada, orduan dependentzia lineala izango dugu. Kasu honetan, y_i bakoitza beste soluzioen konbinazio lineal modura idatz daiteke.

Ondoren, gogora dezagun funtzioen dependentzia lineala aztertzea ahalbidetuko duen teorema:

Teorema: " $\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ funtzio-multzoa $\mathbb{E}$ eremuan linealki dependentea bada, $W[y_1, y_2, \dots, y_n]$ wronskiarra eremu horretan nulua da".

$$\exists C_i \neq 0 : C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots + C_n y_n = 0 \Rightarrow W[y_1, y_2, \dots, y_n] = 0.$$

Wronskiarra ondoko determinante funtzionala da:

$$W[y_1, y_2, \ldots, y_n] = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y'_1 & y'_2 & \cdots & y'_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} \qquad [5]$$

Teoremaren ondorioz, independentziaren kasuan, konbinazio linealeko hautazko konstanteak esentzialak dira.

4.3.2 Soluzioetako oinarrizko sistema.

Definizioa: Biz n. ordenako ekuazio diferentzial homogeno bat. y_1, y_2, ..., y_n funtzioak ekuazio horren soluzio linealki independenteak badira, $\{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$ multzoari soluzioetako oinarrizko sistema deritzo.

Teorema: " $\{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$ multzoa n. ordenako ekuazio diferentzial homogeno baten soluzioetako oinarrizko sistema bada, orduan soluzio orokorra soluzio horien eta hautazko konstanteen konbinazio lineala da. Beste era batetan esanda,

$\forall i = 1, 2, \ldots,$ n-tarako $P[D]y_i = 0$ bada, $W[y_1, y_2, \ldots, y_n] \neq 0$ izango da, eta $P_n[D]y = 0$ ekuazioaren soluzio orokorra ondokoa izango da:

$$\boxed{y_h = C_1y_1 + C_2y_2 + \ldots + C_ny_n.}$$

y_h delakoa soluzioen konbinazio lineala denez, frogatuta dago ekuazio homogenoaren soluzioa dela. Gainera, erraz ikus daitekeenez, konstanteen partikularizazioaz beste edozein soluzio lor daiteke. Beraz, y_h soluzio orokorra da.

Azkenik, gogora dezagun jatorrizkoen deribazio eta hautazko konstanteen bidezko ekuazio diferentzialen iturriari buruz aritzean, n konstante esentzialetako jatorrizko bati n. ordenako ekuazio bat dagokiola. Kasu honetan, y_h delakoa n aldiz deribatuz, (n+1) ekuazio eta n ezezagunetako ondoko sistema eratuko da:

$$
\begin{array}{lcccccccc}
y_h & = & C_1y_1 & + & C_2y_2 & + & \cdots & + & C_ny_n \\
y'_h & = & C_1y'_1 & + & C_2y'_2 & + & \cdots & + & C_ny'_n \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & & & \vdots \\
y_h^{(n-1)} & = & C_1y_1^{(n-1)} & + & C_2y_2^{(n-1)} & + & \cdots & + & C_ny_n^{(n-1)} \\
y_h^{(n)} & = & C_1y_1^{(n)} & + & C_2y_2^{(n)} & + & \cdots & + & C_ny_n^{(n)}
\end{array}
$$

Hipotesiz, $\{y_1, y_2, .., y_n\}$ delakoa soluzioetako oinarrizko sistema da. Orduan, $W[y_1, y_2, \ldots, y_n]$ wronskiarra, lehenengo n ekuazioen koefizienteetako determinantea alegia, ez-nulua da. Ondorioz, lehenengo n ekuazioez osoturiko sistema, bateragarri determinatua da. Horrela, sistema $C_1, C_2, \ldots, C_n$ konstanteekiko ebazten badugu, (n+1). ekuazioan ordezkatutakoan y_h-ri asoziaturiko ekuazio diferentziala lor daiteke.

4.4 Ekuazio diferentzial osotuaren soluzio orokorra

Teorema: "Biz ondoko ekuazio diferentzial ez-homogeno edo osotua:

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{n-2} y'' + a_{n-1} y' + a_n y = f(x). \qquad [1]$$

Honen soluzio orokorra, ekuazio homogenoaren soluzio orokorra eta ekuazio osotuaren soluzio partikular baten arteko batura da".

Ekuazio osotu eta homogeno asoziatuaren adierazpen sinbolikoak, ondokoak dira:

Ekuazio osotua		Ekuazio homogeno asoziatua
$P_n[D]y = f(x)$	$\xrightarrow{f(x)=0}$	$P_n[D]y = 0$

Aipaturiko soluzioak hurrengoak badira,

$y_h = C_1y_1 + C_2y_2 + \dots + C_ny_n : P_n[D]y_h = 0$, homogenoaren soluzioa,

$Y : P_n[D]Y = f(x)$, osotuaren sol. partikularra,

orduan, $y = y_h + Y$ delakoa ekuazio osotuaren soluzioa dela frogatu behar da. Ikus dezagun.

$$P_n[D]y = P_n[D](y_h + Y) = P_n[D]y_h + P_n[D]Y = 0 + f(x) \equiv f(x).$$

Bestalde, y aldagaiak y_h-ren n konstante esentzialak bere barnean dituenez, y delakoa soluzio orokorra da.

$$\boxed{P_n[D]y = f(x) \xrightarrow{\text{sol orokorra}} y = y_h + Y = C_1y_1 + C_2y_2 + \dots + C_ny_n + Y}$$

4.4.1 Soluzio partikularrak.

Funtzioak eta bere lehenengo (n-1) deribatuek x_0 puntuan hartzen dituzten balioak (Cauchy-ren hastapen-baldintzak) ezagunak badira, orduan soluzio orokorreko hautazko konstanteak kalkula daitezke. Era honetan, ondoko hastapen-baldintzak ditugu:

$$y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y_{10},\ y''(x_0) = y_{20}, \dots,\ y^{(n-1)}(x_0) = y_{(n-1)0}\ .$$

Soluzio orokorra (n-1) aldiz deribatu eta hasierako baldintzak erantsiz, hurrengo sistema lortuko da:

$$\begin{aligned}
y_0 - Y(x_0) &= \sum_1^n C_i y_i(x_0) \\
y_{10} - Y'(x_0) &= \sum_1^n C_i y_i'(x_0) \\
&\ \vdots \\
y_{(n-1)0} - Y^{(n-1)}(x_0) &= \sum_1^n C_i y_i^{(n-1)}(x_0)
\end{aligned}$$

$y_1,\ y_2,\ \dots,\ y_n$ linealki independenteak direnez, C_i koefizienteez osoturiko $W[y_1,\ y_2,\ \dots,\ y_n]$ determinantea ez-nulua da. Beraz, sistema bateragarri determinatua dugu.

Sistema ebatzitakoan, C_{i0} balioak soluzio orokorrean idatziko dira, soluzio partikularra kalkulatuta geratuko delarik.

Adibidea.- Kalkulatu ondoko ekuazioaren soluzioa,

$$x^3y''' - 3x^2y'' + 6xy' - 6y = 2x^4,$$

horretarako $y(1) = 4/3$, $y'(1) = 1/3$, $y''(1) = 2$ baldintzak beterik, $x^4/3$ delakoa ekuazioaren soluzio bat izanik, eta $y_1 = x$, $y_2 = x^2$, eta $y_3 = x^3$ homogeno asoziatuaren soluzioak ezagutuz.

E: y_1, y_2 eta y_3 linealki independenteak dira, ondokoa baitugu:

$$W[y_1, y_2, y_3] = \begin{vmatrix} x & x^2 & x^3 \\ 1 & 2x & 3x^2 \\ 0 & 2 & 6x \end{vmatrix} = 2x^3 \neq 0, \quad x \neq 0 \text{ bada.}$$

Beraz, soluzio homogenoa ondokoa da:

$$y_h = Ax + Bx^2 + Cx^3.$$

$Y = x^4/3$ soluzio partikularra ezagutuz, ekuazio osotuaren integral orokorra ondoriozta daiteke:

$$y = y_h + Y = Ax^3 + Bx^2 + Cx + x^4/3.$$

Soluzio partikularra kalkulatzeko, integral orokorra bi aldiz deribatu eta hastapen-baldintzak erantsiko dira:

$$y = Ax^3 + Bx^2 + Cx + x^4/3 \xrightarrow{y(1)=4/3} 4/3 = A + B + C + 1/3,$$

$$y' = 3Ax^2 + 2Bx + C + 4x^3/3 \xrightarrow{y'(1)=1/3} 1/3 = 3A + 2B + C + 4/3,$$

$$y'' = 6Ax + 2B + 4x^2 \xrightarrow{y''(1)=2} 2 = 6A + 2B + 4.$$

Sistema honen soluzioa: $A = 1$, $B = -4$, $C = 4$.

Balio hauek integral orokorrera eramanez, ondokoa lor daiteke:

$$y = x^3 - 4x^2 + 4x + x^4/3.$$

4.5 Ekuazio diferentzial homogenoen integrazioa

Hasteko, koefiziente konstanteetako ekuazioak kontsideratuko dira, zeintzuen integrazioa n. mailako polinomio baten erroak kalkulatzea besterik ez baita. Orain arte adierazitakoaren arabera, soluzioetako oinarrizko sistema bat, hots, n soluzio linealki independente aurkitzean datza problemaren ebazpena.

Biz koefiziente konstanteetako n. ordenako ekuazioa:

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{n-2} y'' + a_{n-1} y' + a_n y = 0. \qquad [1]$$

D eragilea behin eta berriro aplikatuz gero, funtzio exponentzialak ondorioztatzen dira. Horregatik, $y = e^{rx} \equiv \exp(rx)$ erako soluzioez egin daiteke aproba. Funtzio hau n aldiz deribatu eta [1] ekuazioan ordezkatuz gero, honakoa ondorioztatuko da:

$$y = e^{rx} \longrightarrow D[y] = re^{rx} \longrightarrow D^2[y] = r^2e^{rx} \longrightarrow \dots D^n[y] = r^ne^{rx}$$

$$\xrightarrow{[1]} \quad e^{rx}[a_0r^n + a_1r^{n-1} + \dots + a_{n-2}r^2 + a_{n-1}r + a_n] = 0.$$

x-en edozein balio finitutarako $e^{rx} \neq 0$ izanik, biderkaketa hori nulua bada, polinomioa derrigorrez nulua izango da. Azken honi, ekuazio diferentzialaren polinomio karakteristikoa edo ekuazio karakteristikoa deritzo. Ekuazio karakteristikoa, $P_n[D]$ eragile diferentzialean D eragilea r gaiaz ordezkatuta lor daiteke. Hortaz,

$$P_n[r] = a_0r^n + a_1r^{n-1} + \dots + a_{n-2}r^2 + a_{n-1}r + a_n = 0$$

ekuazio karakteristikoaren ebazpen algebraikotik n erro ondorioztatu, eta hauetatik abiatuz, ekuazio diferentzialaren soluzioak aurki daitezke:

$$r_1, r_2, \dots, r_n \quad \xrightarrow{y=\exp(rx)}$$

$$y_1 = \exp(r_1x),\ y_2 = \exp(r_2x),\ \ldots,\ y_n = \exp(r_nx).$$

Hurrengo kuestioa, lortutako n soluzioak oinarrizko sistema osotzen duten aztertzea da, hots, soluzioak linealki independenteak diren ikustea. Azterketa hurrengo wronskiarraren bidez egingo da:

$$W[y_1,y_2,\ldots,y_n] = \begin{vmatrix} \exp(r_1x) & \exp(r_2x) & \cdots & \exp(r_nx) \\ r_1\exp(r_1x) & r_2\exp(r_2x) & \cdots & r_n\exp(r_nx) \\ r_1^2\exp(r_1x) & r_2^2\exp(r_2x) & \cdots & r_n^2\exp(r_nx) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ r_1^{(n-1)}\exp(r_1x) & r_2^{(n-1)}\exp(r_2x) & \cdots & r_n^{(n-1)}\exp(r_nx) \end{vmatrix}$$

Determinanteen propietateen arabera, zutabe bakoitzeko gaietan dauden $\exp(r_1x)$, $\exp(r_2x)$,..., $\exp(r_nx)$ biderkagai amankomunak Vandermonde-ren determinante bat biderkatzera pasatuko dira,

$$W = \exp[(r_1 + r_2 + \ldots + r_n)x] \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ r_1 & r_2 & \cdots & r_n \\ r_1^2 & r_2^2 & \cdots & r_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ r_1^{(n-1)} & r_2^{(n-1)} & \cdots & r_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

alegia, zeinaren soluzioa

$$W = \exp[(r_1 + r_2 + \dots + r_n)x]\Big((r_2 - r_1)(r_3 - r_1)..(r_n - r_1)(r_3 - r_2)..$$

$$\dots(r_n - r_2)\dots(r_{n-1} - r_{n-2})(r_n - r_{n-2})(r_n - r_{n-1})\Big)$$

den. Soluzioaren biderkagaietariko batetan, bigarren lerroko elementu bakoitzak bere aurreko guztiez dituen kenketen arteko biderkaketa posible guztiak azaltzen dira. Era honetan, soluzioen dependentziaren azterketa, ekuazio karakteristikoaren erroen anizkoiztasuna aztertzean datza. Beraz, erro guztiak desberdinak badira, kasu horretan, **W** $\neq$ 0 denez, asoziaturiko soluzioak linealki independenteak dira. Gutxienez erro anizkoitz bat existitzen bada, [**W** = 0], eta beraz soluzioak dependenteak dira. Ondoko kasuak izan ditzakegu:

A) Erro bakunak.

Ekuazio karakteristikoaren erro guztiak desberdinak badira, wronskiarra ez-nulua da, eta ondorioz, asoziaturiko soluzioek oinarrizko sistema bat osotuko dute. Bereiz ditzagun azpikasuak:

a_1) Erro erreal bakunak.

Soluzio orokorra, asoziaturiko n soluzioen konbinazio lineala da, zeinaren adierazpena ondokoa dugun:

$$\boxed{y = C_1\exp(r_1x) + C_2\exp(r_2x) + \dots\dots + C_n\exp(r_nx).}$$

a_2) Erro irudikari bakunak.

Bira $r_{1,2} = a \pm bi$ erro irudikari konjokatuak. Hauei ondoko soluzioak dagozkie:

$$y_1 = \exp[(a + bi)x] = \exp(ax)\exp(ibx) \equiv e^{ax}e^{ibx},$$

$$y_2 = \exp[(a - bi)x] = \exp(ax)\exp(-ibx) \equiv e^{ax}e^{-ibx}.$$

Praktikan, exponentzial konplexuak funtzio trigonometrikoen bidez idaztea, interes handikoa da. Horretarako, Euler-en ondoko formulak erabiliko dira:

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta, \qquad e^{-i\theta} = \cos\theta - i\sin\theta \longrightarrow$$

$$y_1 = e^{ax}[\cos bx + i\sin bx], \qquad y_2 = e^{ax}[\cos bx - i\sin bx].$$

i unitate irudikariaren izaera konstantea kontutan hartuz, soluzio hauen konbinazio lineala hurrengo eran idatziko da integral orokorrean:

$$y = C_1y_1 + C_2y_2 = e^{ax}[(C_1 + C_2)\cos bx + i(C_1 - C_2)\sin bx],$$

non $C_1 + C_2 = A$ eta $i(C_1 - C_2) = B$ eginez,

$$\boxed{y = e^{ax}(A\cos bx + B\sin bx)}$$

ondorioztatuko den.

B) **Erro anizkoitzak.**

Kasu honetan, erroen anizkoiztasunak wronskiarra nulua izatea ondorioztatuko du, hots, soluzioen dependentzia lineala. Aurreko atalean bezala, erro erreal eta irudikariak bereizi behar dira.

b_1) **Erro erreal anizkoitzak.**

Bira, alde batetik, $r = k$ delakoa $P[r] = 0$ ekuazioaren m anizkoiztasuneko erro erreal bat eta, bestetik, $y_1 = e^{kx}$ berari dagokion soluzio bakarra. Arazoa ekuazio diferentzialaren beste (m-1) soluzioak aurkitzea da, m soluzioetako sistema hori oinarrizko sistema izan dadin. Froga daitekeenez, y_1 soluzioaz aparte, ondoko funtzioak ere soluzioak dira:

$$\mathbf{r = k\ (m)\ erroa} \xrightarrow[\text{asoziatuak}]{\text{soluzio}} e^{kx},\ xe^{kx},\ x^2e^{kx},\ \ldots,\ x^{(m-1)}e^{kx}.$$

Gainera, hauek linealki independenteak ditugu.

Azkenik, erro erreal anizkoitz bati dagozkion soluzioen konbinazio linealean, exponentzialak x-ekiko koefiziente indeterminatuetako (m-1). mailako polinomio bat biderkatuko du:

$$\boxed{y = [C_1 + C_2x + \ldots\ldots + C_mx^{m-1}]e^{kx}.}$$

b_2) **Erro irudikari anizkoitzak.**

Bira $(a \pm bi)$ direlakoak m. aniztasuneko erro irudikariak. Aurreko kasuan bezala, soluzio independenteak $e^{ax}\cos bx$ eta $e^{ax}\sin bx$ ditugu soilik, beste (2m-2) kalkulatu behar direlarik. Halaber, $e^{ax}\cos bx$ eta $e^{ax}\sin bx$ direlakoak x-en (m-1).-erainoko berredurez biderkatuz geroko funtzioak, soluzioak izango dira:

$$\mathbf{a\pm bi\ (m)\ erroa:} \xrightarrow{\text{soluzioak}} \begin{cases} e^{ax}\cos bx,\ xe^{ax}\cos bx, \ldots, e^{ax}x^{(m-1)}\cos bx \\ e^{ax}\sin bx,\ xe^{ax}\sin bx, \ldots, e^{ax}x^{(m-1)}\sin bx \end{cases}$$

2m soluzio hauen konbinazio lineala

$$\boxed{y = e^{ax}[P_{m-1}(x) \cos bx + Q_{m-1}(x) \sin bx]}$$

adierazpenaz emanik dator, non $P_{m-1}(x)$ eta $Q_{m-1}(x)$ koefiziente indeterminatuetako (m-1). mailako polinomioak diren.

Adibidea.- Aurkitu ondoko funtzioen jatorrizkoak:

a) $x^{IV} - 2x''' - 11x'' + 12x' + 36x = 0.$

b) $y^{V} + 8y''' + 16y' = 0.$

c) $y^{VI} - 5y^{V} + 7y^{IV} + 3y''' - 10y'' = 0.$

E: a) Ekuazio karakteristikoa ondokoa da:

$$P[r] = 0 \quad \longrightarrow \quad r^4 - 2r^3 - 11r^2 + 12r + 36 = 0.$$

Erro osoak existitzen badira, zero mailako gaiaren zatitzaileak izan behar dute. Horregatik 36 zenbakiaren r_i zatitzaileez egin daiteke aproba, eta Ruffini-ren erregela aplikatuz, polinomioa behin eta berriro $(r-r_i)$ erako gaiez zatituko da. Kasu konkretu honetan, ekuazioak bi erro erreal bikoitz ditu: r = -2 eta r = 3.

	1	-2	-11	12	36
-2		-2	8	6	-36
	1	-4	-3	18	0
-2		-2	12	-18	
	1	-6	9	0	
3		3	-9		
	1	-3	0		
3		3			
	1	0			

Erro hauen funtzioan, polinomioa biderkaketa faktorialaren eran idatz daiteke:

$$P[r] = r^4 - 2r^3 - 11r^2 + 12r + 36 = (r + 2)^2(r - 3)^2.$$

Beraz, ekuazio diferentzialaren soluzioa ondokoa da:

$$x(t) = (A + Bt)e^{-2t} + (C + Dt)e^{3t}.$$

---

b)

$$r^5 + 8r^3 + 16r = r(r^4 + 8r^2 + 16) = r(r^2 + 4)^2 = 0$$

ekuazio karakteristikoaren erroak ondokoak dira: $r = 0$ (erreal bakuna) eta $r = \pm\ 2i$ (irudikari bikoitzak).

Dagokien soluzio orokorra hurrengoa da:

$$y(x) = A + (B + Cx)\cos 2x + (D + Ex)\sin 2x.$$

---

c) Orain,

$$P[r] = r^6 - 5r^5 + 7r^4 + 3r^3 - 10r^2 = r^2(r^4 - 5r^3 + 7r^2 + 3r - 10)$$

polinomio karakteristikoak $r = 0$ erro erreal bikoitza dauka. Laugarren mailako polinomioaren beste erroak kalkulatzeko, 10 zenbakiaren zatitzaile osoak hartuko dira.

	1	-5	7	3	-10
-1		-1	6	-13	10
	1	-6	13	-10	0
2		2	-8	10	
	1	-4	5	0	

Lau erro errealen menpeko polinomioaren deskonposaketa ondokoa da:

$$P[r] = r^2(r + 1)(r - 2)(r^2 - 4r + 5).$$

Azkeneko faktorearen erroak irudikari konjokatuak dira:

$$r^2 - 4r + 5 = 0 \longrightarrow r = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 20}}{2} = 2 \pm i.$$

Behin erro guztiak lortuta, ekuazioaren soluzio orokorra hauxe da:

$$y(x) = C_1 + C_2x + C_3e^{-x} + C_4e^{2x} + e^{2x}(C_5\cos x + C_6\sin x).$$

4.6 Ekuazio diferentzial ez-homogeno edo osotuen integrazioa

Biz koefiziente konstanteetako n. ordenako

$$a_0y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + \dots + a_{n-2}y'' + a_{n-1}y' + a_ny = f(x) \qquad [1]$$

ekuazio lineal ez-homogeno edo osotua.

Homogeno asoziatua ebatzita gero, osotuaren soluzio partikular bat aurkitu behar da. Horretarako, ondoren deskribatuko diren metodoak erabiliko dira.

4.6.1 Koefiziente indeterminatuen metodoa.

Metodo murriztailea da. Beraren aplikazioa ekuazio osotuko $f(x)$ funtzioaren araberakoa da. Orokorrean, deribatu eragilea aplikatzean, $f(x)$-en adierazpenak ez du aldatu behar. Era horretan koefiziente indeterminatuez biderkatutako mota bereko soluzioez aproba egitea ahalbidetuko du. Soluzioa ekuazio diferentzialean ordezkatu, eta identifikazioz koefizienteak kalkulatuko dira.

Gehien ematen diren aplikazio-kasuak funtzio polinomiko, exponentzial arrunt eta trigonometrikoen biderkaketen konbinazioak izaten dira.

Hurrengo taulan hauetariko kasu batzu ageri dira, alboan bakoitzari dagokion aprobarako soluzioa dagoelarik:

f(x)	Frogarako Y soluzioa
$e^{ax}P_m(x)$	$e^{ax}Q_m(x)$
$e^{ax}(A\cos bx + B\sin bx)$	$e^{ax}(C\cos bx + D\sin bx)$
$P_m(x)\cos bx$	$R_m(x)\cos bx + S_m(x)\sin bx$
$P_m(x)\sin bx$	$R_m(x)\cos bx + S_m(x)\sin bx$
$e^{ax}[P_m(x)\cos bx + Q_n(x)\sin bx]$	$e^{ax}[R_N(x)\cos bx + S_N(x)\sin bx]$

Azken kasu hau orokorrena da, eta aurrekoak barnean dauzka. Koefiziente indeterminatuetako $R_N(x)$ eta $S_N(x)$ polinomioak, N mailakoak dira, $N \equiv \max\{m,n\}$ izanik.

f(x) funtzioa

$$y_h = C_1y_1 + C_2y_2 + \ldots + C_ny_n$$

ekuazio homogeno asoziatuaren soluzio bat bada, koefizienteen identifikazioa ez da posible izango, Y delakoa ekuazio homogenoaren y_i soluzio baten berdina izanez gero, $P_n[D]Y$ aplikazioa nulua izango baita, era honetan identifikazioa eragotziko delarik.

Kasu hauetan, frogarako soluzioa x-en berredura txikienaz biderkatuko da, eta horrela ez da kointzidentziarik egongo.

Soluzioen gainezarmenaren printzipioa.

$f(x)$ kontsideratutako kasuetako funtzioen batura bada, hots,

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_m(x),$$

orduan hurrengo soluzio partikularraz egingo da aproba:

$$Y = Y_1 + Y_2 + \dots + Y_m ,$$

Y_1, Y_2, ..., Y_m direlakoak kasu bakoitzerako soluzioak izanik. Beraz,

$$P_n[D]Y = P_n[D]Y_1 + P_n[D]Y_2 + \dots + P_n[D]Y_m = f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_m(x)$$

berdintzak koefizienteen identifikazioa ahalbidetuko du.

Adibidea.- Aurkitu ondoko ekuazioaren jatorrizkoa:

$$y'' - 2y' + 2y = e^x \sin x.$$

E: Homogeno asoziatuaren soluzioa hurrengo hau da:

$$r^2 - 2r + 2 = 0 \longrightarrow r = 1 \pm i \longrightarrow y_h = e^x(C_1 \cos x + C_2 \sin x).$$

$f(x) = e^x \sin x$ ekuazio homogenoaren soluzio bat da. Horregatik, $Y = e^x(A\cos x + B\sin x)$ ekuazioaz aproba egin ordez,

$$Y = xe^x(A\cos x + B\sin x)$$

adierazpenaz egingo dugu.

Bi aldiz deribatuz eta ekuazioan ordezkatuz, ondokoa lor daiteke:

$$Y' = (1 + x)e^x(A\cos x + B\sin x) + xe^x(-A\sin x + B\cos x) =$$
$$= e^x[(A + B)x\cos x + (B - A)x\sin x + A\cos x + B\sin x].$$

$$Y'' = e^x[(A + B)x\cos x + (B - A)x\sin x + A\cos x + B\sin x +$$
$$+ (A + B)(\cos x - x\sin x) + (B - A)(\sin x + x\cos x) - A\sin x + B\cos x]$$
$$= e^x[2Bx\cos x - 2Ax\sin x + (2A + 2B)\cos x + (2B - 2A)\sin x].$$

$$Y'' - 2Y' + 2Y = e^x\sin x \longrightarrow$$

$$e^x[(2B - 2A - 2B + 2A)x\cos x + (-2A - 2B + 2A + 2B)x\sin x +$$
$$+ (2A + 2B - 2A)\cos x + (2B - 2A - 2B)\sin x] = e^x\sin x \longrightarrow$$

$$e^x[2B\cos x - 2A\sin x] = e^x\sin x \longrightarrow 2B\cos x - 2A\sin x = \sin x.$$

Funtzio trigonometrikoen koefizienteak identifikatu ondoren, hots,

$$2B = 0,\ -2A = 1 \longrightarrow \mathbf{B = 0,\ A = -1/2},$$

soluzio partikularra eta orokorra ondorioztatuko ditugu:

$$Y = -\frac{xe^x\cos x}{2} \Rightarrow y = y_h + Y = e^x(C_1\cos x + C_2\sin x) - \frac{xe^x\cos x}{2}.$$

Adibidea.- Ebatzi ondoko hastapen-baliotako problema:

$$x''' + x' = \sin t + 2, \quad x(0) = x'(0) = 0,\ x''(0) = 2.$$

E: Ekuazio homogeno asoziatuaren soluzioa:

$$r^3 + r = 0 \longrightarrow r = 0,\ r = \pm i \Rightarrow x_h = C_1 + C_2\cos t + C_3\sin t.$$

Aproba egiteko X soluzio partikularra,

$X = A\sin t + B\cos t + C$ funtzioaren ordez,

$$X = t(A\sin t + B\cos t + C)$$

hartu beharko da, f(t) delakoa x_h-ren batugai bat baita.

Aurreko adibidean bezala eraginez, hurrengoa lor daiteke:

$X' = (A - Bt)\sin t + (B + At)\cos t + C,$

$X'' = (-2B - At)\sin t + (2A - Bt)\cos t,$

$X''' = (-3A + Bt)\sin t + (-3B - At)\cos t,$

$X''' + X' = \sin t + 2 \longrightarrow -2A\sin t - 2B\cos t + C = \sin t + 2 \Rightarrow$

$$\mathbf{A = -1/2, \quad B = 0, \quad C = 2} \quad \Rightarrow \quad X = -t\sin t/2 + 2t.$$

Sol. orokorra: $x(t) = x_h + X = C_1 + C_2\cos t + (C_3 - t/2)\sin t + 2t$

Soluzio partikularra aurkitzeko, orokorra bi aldiz deribatu, hasierako baldintzak erantsi eta ondorioztatutako sistema hautazko konstanteekiko ebatzi behar da.

$x(t) = C_1 + C_2\cos t + (C_3 - t/2)\sin t + 2t,$

$x'(t) = -C_2\sin t + C_3\cos t - 1/2\sin t - t\cos t/2 + 2,$

$x''(t) = -C_2\cos t - C_3\sin t - \cos t + t\sin t/2,$

$$\begin{array}{lll} x(0) = 0 & \longrightarrow & 0 = C_1 + C_2 \\ x'(0) = 0 & \longrightarrow & -2 = C_3 \quad \Rightarrow \\ x''(0) = 2 & \longrightarrow & 3 = -C_2 \end{array}$$

$\mathbf{C_1 = 3, \quad C_2 = -3, \quad C_3 = -2} \longrightarrow x = 2t + 3 - 3\cos t + (2 - t/2)\sin t$

4.6.2 Parametroen aldakuntzaren metodoa

Hautazko konstanteen aldakuntzaren metodoa izenaz ere ezaguna den metodo honek, aurrekoarekiko bi abantaila ditu:

1) Koefiziente aldakor zein konstanteetako edozein ekuazio diferentzial lineali aplika dakioke, aldez aurretik ekuazio homogeno asoziatuaren soluzio orokorra ezagutu behar delarik.

2) Ekuazio diferentzial osotuaren f(x) funtzio-motari dagokionez, ez du murrizketarik.

Laburbilduz, metodoaren oinarri teorikoak ondokoak dira:

Bira

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{n-2} y'' + a_{n-1} y' + a_n y = f(x) \qquad [1]$$

ekuazio diferentzial lineal ez-homogenoa, eta

$$y_h = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots + C_n y_n \qquad [2]$$

ekuazio homogeno asoziatuaren soluzio orokor ezaguna.

[2] adierazpenean oinarrituz, [1]-en soluzio orokor gisa, ondokoa planteatuko dugu,

$$y = L_1(x) y_1 + L_2(x) y_2 + \dots + L_n(x) y_n = \sum_1^n L_i(x) y_i \ , \qquad [3]$$

non $L_1(x)$, $L_2(x)$, ..., $L_n(x)$ direlakoak kalkulurako funtzio laguntzaile ezezagunak diren.

Metodoa, y-ren (n-1) lehen deribatuei (n-1) baldintza murriztaile ezartzean datza. n. baldintza, [3] adierazpena [1] ekuazioaren soluzioa dela ondorioztatutakoan aterako da:

$$y' = \sum_{1}^{n} L'_i y_i + \sum_{1}^{n} L_i y'_i = \sum_{1}^{n} L_i y'_i \quad , \quad \sum_{1}^{n} L'_i y_i = 0 \quad \text{bada,} \qquad [1]$$

$$y'' = \sum_{1}^{n} L'_i y'_i + \sum_{1}^{n} L_i y''_i = \sum_{1}^{n} L_i y''_i \quad , \quad \sum_{1}^{n} L'_i y'_i = 0 \quad \text{bada,} \qquad [2]$$

....

$$y^{(n-1)} = \sum_{1}^{n} L'_i y_i^{(n-2)} + \sum_{1}^{n} L_i y_i^{(n-1)} = \sum_{1}^{n} L_i y_i^{(n-1)},$$

$$\sum_{1}^{n} L'_i y_i^{(n-2)} = 0 \quad \text{bada.} [n-1]$$

....

n. deribatua, hurrengo adierazpenaz emanik dator:

$$y^{(n)} = \sum_{1}^{n} L'_i y_i^{(n-1)} + \sum_{1}^{n} L_i y_i^{(n)}.$$

Funtzioa eta beraren deribatuak [1] ekuaziora eramanez, $L_i y_i^{(k)}$ erako gaiak sinplifikatu egingo dira, y_h delakoa ekuazio homogeno asoziatuaren soluzioa baita. Horrela, lortuko den n. baldintza ondokoa izango da:

$$\sum_{1}^{n} L'_i y_i^{(n-1)} = f(x)/a_0 \qquad [n]$$

Era honetan, $L'_i(x)$ funtzioek n ekuaziotako hurrengo sistema osotuko dute:

$$\sum_{1}^{n} L'_i\, y_i = 0, \qquad [1]$$

$$\sum_{1}^{n} L'_i\, y'_i = 0, \qquad [2]$$

$$\sum_{1}^{n} L'_i\, y''_i = 0, \qquad [3]$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

$$\sum_{1}^{n} L'_i\, y_i^{(n-2)} = 0, \qquad [n-1]$$

$$\sum_{1}^{n} L'_i\, y_i^{(n-1)} = f(x)/a_0. \qquad [n]$$

Sistema bateragarri determinatua da, beraren koefizienteetako determinantea (y_1, y_2, ..., y_n funtzio linealki independenteez osoturiko $W[y_1, y_2, ..., y_n]$ wronskiarra) ez-nulua delako.

Cramer-en erregelaz, zein beste prozedura bat erabiliz, sistemaren soluzioak ondoriozta daitezke:

$$L'_i(x) = \phi_i(x), \qquad i = 1, 2, ..., n.$$

$\int$ eragilea aplikatuz, $L_i(x)$ funtzio laguntzaileak aurki daitezke:

$$L_i(x) = \int \phi_i(x)dx + A_i, \qquad i = 1, 2, ..., n.$$

Hauek [3] ekuazioan ordezkatuz, soluzio orokorrera garamatzate:

$$y = \sum_{1}^{n} L_i(x)y_i = \sum_{1}^{n} \left[\int \phi_i(x)dx + A_i \right] y_i.$$

Adierazpen honetatik ekuazio osotuaren soluzio partikular bat, ondoriozta daiteke:

$$y = \sum_{1}^{n} A_i y_i + \sum_{1}^{n} y_i \int \phi_i(x)dx = y_h + Y \longrightarrow Y = \sum_{1}^{n} y_i \int \phi_i(x)dx.$$

Adibidea.- Ebatz bedi ondoko ekuazio diferentziala:

$$y'' + 2y' + y = e^{-x}Lnx.$$

E: Ekuazio homogeno asoziatuaren soluzioa:

$P[r] = 0 \longrightarrow r^2 + 2r + 1 = 0 \longrightarrow r = -1(\text{bikoitza}) \Rightarrow y_h = (C_1 + C_2 x)e^{-x}.$

Ekuazio osotuaren soluzio orokorra:

$$y = [L_1(x) + xL_2(x)]e^{-x}. \qquad [1]$$

$L'_1(x)$ eta $L'_2(x)$ funtzioek ondoko sistema beteko dute:

$$\begin{cases} e^{-x}L'_1(x) + \quad xe^{-x}L'_2(x) = 0, \\ \\ -e^{-x}L'_1(x) + (1-x)e^{-x}L'_2(x) = e^{-x}Lnx. \end{cases}$$

Honen soluzioak, hurrengoak dira:

$$L'_1(x) = -xLnx, \qquad L'_2(x) = Lnx.$$

Zatikako integrazioaz, $L_1(x)$ eta $L_2(x)$ funtzioak aurkituko dira:

$$L_1(x) = -x^2Lnx/2 + x^2/4 + A, \qquad L_2(x) = xLnx - x + B.$$

Hauek [3] ekuazioan ordezkatuta, soluzio orokorra lortuko da:

$$y = (A + Bx)e^{-x} + x^2e^{-x}(2Lnx - 3)/4.$$

4.7 Koefiziente aldakorretako ekuazioak

Funtzio elementalen bidezko soluzioak dituzten koefiziente aldakorretako ekuazio diferentzial linealak, gutxi dira. Orokorrean, ekuazioa koefiziente konstanteetako kasura laburtzeko, edo ekuazioaren ordena beheratzeko, ordezkapenak egingo dira, era hauetan integrazioa erraztuko delarik. Koefiziente konstanteetara laburtzearen adibide aipagarri bat, ondoren deskribatuko den Euler-en ekuazioa deritzona da.

4.7.1 Euler-en ekuazioak.

Ondoko erakoak dira:

$$a_0(ax+b)^ny^{(n)} + a_1(ax+b)^{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(ax+b)y' + a_ny = f(x),$$

non koefiziente aldakorrak (ax+b) gaiaren berredurak, eta beraien berretzaileak biderkatzen dituzten deribatuen ordenen berdinak diren.

$$ax + b = e^t \longleftrightarrow t = Ln(ax + b), \qquad ax + b > 0$$

ordezkaketaren bidezko aldagai independentearen aldaketak, Euler-en ekuazioa koefiziente konstanteetako ekuazio bilakatuko du, hurrengo deribaketa eta ordezkaketaren bidez:

$$dy/dx = \frac{dy/dt}{dx/dt} = ae^{-t}dy/dt$$

Orain t-rekiko deribatuz gero, hurrengoa lor daiteke:

$$d^2y/dx^2(e^t/a) = ae^{-t}(d^2y/dt^2 - dy/dt) \longrightarrow$$

$$d^2y/dx^2 = a^2e^{-2t}(d^2y/dt^2 - dy/dt).$$

Era berean, hirugarren deribaturako, ondokoa dugu:

$$d^3y/dx^3 = a^3e^{-3t}(d^3y/dt^3 - 3d^2y/dt^2 + 2dy/dt).$$

n-rainoko ondoz-ondoko deribatuak aplikatuz gero, hurrengo erako adierazpena lortuko da n. deribaturako:

$$d^ny/dx^n = a^ne^{-nt}(c_nd^ny/dt^n + ... + c_2d^2y/dt^2 + c_1dy/dt),$$

non c_1, c_2, ..., c_n koefiziente konstanteak diren.

Ordezkapena egin eta gero, $(ax + b)^m \equiv e^{mt}$ eta e^{-mt} faktoreetako biderkaketak sinplifikatu egingo dira, bukaerako emaitza ondoko motako ekuazioa delarik,

$$h_0y^{(n)} + h_1y^{(n-1)} + ... + h_{n-2}y'' + h_{n-1}y' + h_ny = f[(e^t - b)/a] \equiv g(t)$$

non h_0, h_1, ..., h_n konstanteak diren.

Gogora dezagun, ekuazio homogeno asoziatua ebazteko, aproba egiteko $y(t) = e^{rt}$ erako soluzioak hartzen direla. Horregatik, Euler-en ekuaziorako, zuzenean $y(x) = (ax + b)^r$ motako soluzioez balia gaitezke. Beraz, alderantzizko ordezkapenaren arabera,

$$y = e^{rt} \xrightarrow{t=Ln(ax+b)} y = e^{rLn(ax+b)} \equiv (ax + b)^r$$

dugu. Modu honetan eragiketak eginez gero, zuzenean koefiziente konstanteetako homogenoaren ekuazio karakteristikora iritsiko gara. Erro anizkoitzei dagozkien soluzioak, t aldagaia Ln(ax + b) adierazpenaz ordezkatuta lortuko dira. Adibidez, r = k delakoa m. anizkoiztasuneko erro erreala bada, orduan Euler-en ekuaziorako asoziaturiko soluzioak hurrengoak dira:

$$y_1 = e^{kt},\quad y_2 = te^{kt},\ \ldots,\ y_m = t^{m-1}e^{kt} \quad \xrightarrow{t=Ln(ax+b)}$$

$$y_1 = (ax+b)^k,\ y_2 = [Ln(ax+b)](ax+b)^k,\ \ldots,\ y_m = [Ln(ax+b)]^{m-1}(ax+b)^k.$$

Ekuazio osotuaren soluzio orokorra aurkitzeko, normalean parametroen aldakuntzaren metodoa erabiliko da. Hala ere, kasu interesgarrietan koefiziente indeterminatuen metodoa erabiltzea aukera daiteke. Euler-en ekuazioan aproba egiteko soluzio partikular moduan, koefiziente konstanteetako ekuazioan lortutako dugun soluzioaren irudia har dezakegu.

Koefiziente konstanteetako ek.		Euler-en ekuazioa
$Y(t)$	$\xrightarrow{t=Ln(ax+b)}$	$Y[Ln(ax + b)]$

Adibidea.- Aurki bedi ondoko ekuazio diferentzialaren jatorrizkoa:

$$(x + 2)^2y'' - (x + 2)y' + y = 3x + 4. \qquad [1]$$

E: Ekuazioa koefiziente konstanteetako ekuazio bilakatzeko, ondoko aldagai-aldaketa egingo da:

$$x + 2 = e^t \longleftrightarrow t = Ln(x + 2), \qquad x + 2 > 0.$$

Lehen eta bigarren deribatuak, hurrengo hauek dira:

$$dy/dx = e^{-t}dy/dt, \qquad d^2y/dx^2 = e^{-2t}(d^2y/dt^2 - dy/dt).$$

Ekuazioan ordezkatu eta sinplifikatu ondoren, koefiziente konstanteetako hurrengo ekuazioa dugu:

$$y'' - 2y' + y = 3e^t - 2. \qquad [2]$$

[2] ekuazioaren soluzio orokorra:

$$r^2 - 2r + r = 0 \longrightarrow r = 1 \text{ (bikoitza)} \Rightarrow y_h = (C_1 + C_2 t)e^t.$$

[2] ekuazioaren aprobarako soluzio partikularra:

$$Y = At^2e^t + B \longrightarrow Y' = A(t^2 + 2t)e^t \longrightarrow Y'' = A(t^2 + 4t + 2)e^t \Rightarrow$$

$$Y'' - 2Y' + Y = 2Ae^t + B \equiv 3e^t - 2 \longrightarrow A = 3/2,\ B = -2 \longrightarrow$$

$$Y = 3t^2e^t/2 - 2 \Rightarrow y = y_h + Y \longrightarrow y = (C_1 + C_2 t)e^t + \frac{3t^2e^t}{2} - 2.$$

[1] ekuazioaren soluzio orokorra:

[2] ekuazioaren soluzioan $t = \mathrm{Ln}(x + 2)$ egin, eta soluzio orokorra lortuko da:

$$y = [C_1 + C_2\mathrm{Ln}(x + 2)](x + 2) + \frac{3}{2}(x + 2)\mathrm{Ln}^2(x + 2) - 2.$$

[1] ekuazioaren ebazpen zuzena:

Ekuazio homogenorako, ondokoaz egingo da aproba:

$$y = (x + 2)^r \longrightarrow y' = r(x + 2)^{r-1} \longrightarrow y'' = r(r - 1)(x + 2)^{r-2} \Rightarrow$$

$$(x + 2)^2y'' - (x + 2)y' + y = (x + 2)^r[r^2 - 2r + 1] = 0 \longrightarrow$$

$$r = 1 \text{ (bikoitza)} \Rightarrow y_h = (x + 2)[C_1 + C_2\mathrm{Ln}(x + 2)].$$

Soluzio orokortzat hurrengoa hartuko da:

$$Y = At^2e^t + B \xrightarrow{t=Ln(x+2)} Y = A(x+2)Ln^2(x+2) + B \longrightarrow$$

$$Y' = A[Ln^2(x+2) + 2Ln(x+2)] \longrightarrow Y'' = \frac{A[2Ln(x+2)+2]}{x+2} \longrightarrow$$

$$(x+2)^2Y'' - (x+2)Y' + Y = 3x + 4 \quad \Rightarrow$$

$$2A(x+2)[Ln(x+2)+1] - A(x+2)[Ln^2(x+2) + 2Ln(x+2)] +$$

$$+ A(x+2)Ln^2(x+2) + B = 2A(x+2) + B \equiv 3x + 4 \quad \Rightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{lll} 2A = 3 & \longrightarrow & A = 3/2 \\ 4A + B = 4 & \longrightarrow & B = -2 \end{array}\right. \longrightarrow$$

$$Y = \frac{3(x+2)}{2} Ln^2(x+2) - 2.$$

4.8 Ordena beheragarriko zenbait kasu

Adierazi denez, zenbait ekuazio-motaren integrazioa, posible denean, ordezkapen egoki batez edo ordenaren aurretiko beherapen batez erraztu egingo da.

Hurrengo kasu aipagarriak ditugu:

4.8.1. Aldagai dependenterik gabeko ekuazioak.

Biz era inplizituan idatzitako ondoko ekuazio diferentziala:

$$f[x, y', y'', \dots, y^{(n-1)}, y^{(n)}] = 0. \qquad [1]$$

y aldagai dependentea falta denez,

$$y' = z \longrightarrow y'' = z' \longrightarrow \ldots \longrightarrow y^{(n-1)} = z^{(n-2)} \longrightarrow y^{(n)} = z^{(n-1)}$$

aldaketaren bidez, ordena unitate bat beheratuko da:

$$f[x, z, z', \ldots, z^{(n-2)}, z^{(n-1)}] = 0. \qquad [2]$$

[2] ekuazioaren [3] jatorrizkoa lortutakoan,

$$z = g(x, C_1, C_2, \ldots, C_{n-1}), \qquad [3]$$

koadratura berri baten bidez [1] ekuazioaren jatorrizkoa aurki daiteke:

$$y = \int z dx \longrightarrow y = \int g(x, C_1, C_2, \ldots, C_{n-1})dx + C_n.$$

Aldagai independenteaz gain, y', y'', ..., $y^{(m-1)}$ deribatuak ere falta badira, hots, ekuazioko lehenengo deribatua $y^{(m)}$ bada,

$$f[x, y^{(m)}, y^{(m+1)}, \ldots, y^{(n-1)}, y^{(n)}] = 0, \qquad [4]$$

orduan, ondoko aldaketaz ordena m unitate beheratuko da:

$$y^{(m)} = z \longrightarrow y^{(m+1)} = z' \longrightarrow y^{(m+2)} = z'' \longrightarrow \ldots \longrightarrow y^{(n)} = z^{(n-m)} \Rightarrow$$

$$f[x, z, z', z'', \ldots, z^{(n-m)}] = 0. \qquad [5]$$

[5] ekuazioaren jatorrizkoa ondokoa dugu:

$$z = g(x, C_1, C_2, \ldots, C_{n-m}), \qquad [6]$$

m koadratura kontsekutiboren bidez, [4] ekuazioaren soluzio orokorra ondorioztatuko da.

$$y^{(m-1)} = \int g(x,C_1,C_2,\ldots,C_{n-m})dx + C_{n-m+1} \;..\; \xrightarrow{\int} \;..\; y = \int y'dx + C_n.$$

Adibidea.-Ebatzi hastapen-baliotako hurrengo problema:

$$(x - 1)y''' - y'' = 0, \qquad y(2) = 2y'(2) = 2y''(2) = 2.$$

E: y eta y' aldagaiak falta direnez, ondokoa dugu:

$$y'' = z \longrightarrow y''' = z' \quad \Rightarrow \quad (x - 1)z' - z = 0.$$

Lehenengo ordenako ekuazio hau aldagai banangarrietakoa da:

$$dz/z - dx/(x - 1) = 0 \quad \xrightarrow{\int} \quad z/(x - 1) = A \longrightarrow z = A(x - 1).$$

Koadratura berri batek y' delakoa kalkulatzea ahalbidetuko du:

$$y' = \int z dx = \int A(x - 1)dx = Ax^2/2 - Ax + B.$$

Azkenik, y' gaia integratuz, hurrengoa ondoriozta daiteke:

$$y = \int y' dx = \int (Ax^2/2 - Ax + B)dx = Ax^3/6 - Ax^2/2 + Bx + C.$$

Soluzio partikularra kalkulatzeko, eta problemako baldintzen arabera, ondoko emaitza lortuko da:

$$\left\{\begin{array}{ll} y(2) & = 2 \longrightarrow 4A/3 - 2A + 2B + C = 2 \\ y'(2) & = 1 \longrightarrow 2A - 2A + B = 1 \\ y''(2) & = 1 \longrightarrow A = 1 \end{array}\right. \qquad \longrightarrow \quad A = 1,\ B = 1,\ C = 2/3$$

$$\longrightarrow \qquad y = (x^3 - 3x^2 + 6x + 4)/6.$$

4.8.2 Aldagai independenterik gabeko ekuazioak.

Biz x aldagai independenterik gabeko ekuazio diferentzial hau:

$$f[y,\ y',\ y'',\ \ldots,\ y^{(n-1)},\ y^{(n)}] = 0. \qquad [1]$$

Kasu honetan, y'= z(y) ordezkapenak, [1] ekuazioa (n-1). ordenako ekuazio bihurtuko du. Beraz, x-ekiko deribatuz, hurrengoa dugu:

$$y' = z(y) \xrightarrow{D} y'' = \frac{dz}{dy}\,y' = \frac{dz}{dy}\,z \xrightarrow{D}$$

$$y''' = \frac{d^2z}{dy^2}\,y'z + \frac{dz}{dy}\frac{dz}{dy}\,y' = \frac{d^2z}{dy^2}\,z^2 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2 z, \qquad \text{etab.}$$

Emaitza hauek [1] ekuazioan ordezkatuz,

$$g[y,\ z,\ z',\ \ldots,\ z^{(n-2)},\ z^{(n-1)}] = 0 \qquad [2]$$

erako ekuazioa lor dezakegu. Ondoren, [2] ekuazioaren jatorrizkoa,

$$z = G(y,\ C_1,\ C_2,\ \ldots,\ C_{n-1}) \qquad [3]$$

alegia, lortu eta koadratura berri bat egin ondoren, [1] ekuazioaren soluzioa ondorioztatuko da.

$$y' = z(y) \longrightarrow dy/z(y) = dx \xrightarrow{\int} \int \frac{dy}{G(y,\ C_1,\ C_2,\ \ldots\ldots,\ C_{n-1})} = x + C_n.$$

Adibidea.- Determina ezazu M(0,1) puntutik pasatuko den kurba, ondoko datuak jakinik: tangentea lehenengo koadranteko erdikariarekiko paraleloa da, eta kurbako puntu bakoitzean kurbadura-erradioa normalaren luzeraren kuboaren berdina da.

E: Gogora ditzagun hurrengo magnitude hauen balioak:

Kurbadura-erradioa: $\rho \equiv (1 + y'^2)^{3/2}/y''$.

Normalaren luzera: $\overline{N} \equiv y(1 + y'^2)^{1/2}$.

Enuntziatutako propietatearen arabera, kurbek bigarren ordenako ondoko ekuazio diferentziala beteko dute:

$$\rho = (\overline{N})^3 \longrightarrow (1 + y'^2)^{3/2}/y'' = y^3(1 + y'^2)^{3/2} \Rightarrow y''y^3 = 1.$$

Azken hau, ordezkapenaren bidez, lehen mailako bihurtuko da:

$$y' = z(y) \xrightarrow{D} y'' = \frac{dz}{dy}\, y' = \frac{dz}{dy}\, z \Rightarrow \frac{dz}{dy}\, zy^3 = 1.$$

$\int$ eragilea aplikatuz, hurrengoa ondoriozta daiteke:

$$zdz - dy/y^3 = 0 \xrightarrow{\int} z^2 + 1/y^2 = A \Rightarrow z = \pm(Ay^2 - 1)^{1/2}/y.$$

Eta berriro integratuz, soluzio orokorrera iritsiko gara:

$$y' = z(y) \longrightarrow dy/z(y) - dx = 0 \longrightarrow \pm ydy/(Ay^2 - 1)^{1/2} - dx = 0 \xrightarrow{\int}$$

$$\pm(Ay^2 - 1)^{1/2}/A - x = B \longrightarrow (Ay^2 - 1) = A^2(x + B)^2.$$

Integral partikularra ondoko baldintzetatik ondorioztatuko dugu:

M(0,1) puntutik pasatzeagatik, $y(0) = 1$.

M puntuan tangentearen malda unitatea denez, $y'(0) = z(1) = 1$.

$y(0) = 1 \rightarrow A - 1 = A^2B^2$; $y'(0) = 1 \rightarrow 1^2 + 1/1^2 = A \Rightarrow A = 2,\ B = 1/2$

Balioak integral orokorrean ordezkatuz, emaitza hau lortuko da:

$$2y^2 - 1 = 4(x + 1/2)^2 \longrightarrow y^2 = 2x^2 + 2x + 1.$$

4.8.3 Ekuazio homogeno asoziatuaren soluzio partikular bat ezaguna duteneko ekuazio linealak.

Biz hurrengo ekuazio diferentzial lineala,

$$P_n[D]y = f(x), \quad \text{non} \quad P_n[D]u = 0 \text{ den.}$$

Hots, $u = u(x)$ homogeno asoziatuaren soluzio partikularrá da.

$$y = uz \longrightarrow y' = u'z + uz' \longrightarrow y'' = u''z + 2u'z' + uz''\ldots$$

ordezkapenak z aldagai dependenterik gabeko ekuazio batetara garamatza, $z' = w$ eginez, ekuazio honen ordena unitate bat beheratuko delarik.

Metodoa, bigarren ordenako ekuazio diferentzialetarako garatuko dugu, ekuazio hauek garrantzi berezikoak baitira.

Biz $u = u(x)$ ondoko ekuazioaren soluzio partikular ezagun bat:

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0.$$

$y = uz$ aldaketa eginez, hurrengoa ondorioztatuko da:

$$u''z + 2u'z' + uz'' + P(u'z + uz') + Quz = 0 \longrightarrow$$

$$(u''+ Pu'+ Qu)z + uz''+ (2u' + Pu)z' = 0 \longrightarrow uz'' + (2u' + Pu)z'= 0$$

Orain, $z' = w$, $z'' = w'$ aldaketen bidez, hurrengoa lor daiteke:

$$uw' + (2u' + Pu)w = 0 \longrightarrow dw/w + (2u'/u + P)dx = 0 \xrightarrow{\int}$$

$$Lnw + 2Lnu + \int Pdx = A \Rightarrow wu^2 = B\exp[-\int Pdx] \longrightarrow w = B\exp[-\int Pdx]/u^2.$$

Beste koadratura batez, ondoko soluzio orokorra kalkulatu da:

$$z = \int wdx = B\int \exp[-\int Pdx]dx/u^2 + C \xrightarrow{y=uz} y = Bu\int \exp[-\int Pdx]dx/u^2 + Cu.$$

Hortik, ekuazio homogenoaren beste soluzio bat ondoriozta daiteke:

$$\boxed{v = u\int \exp[-\int P dx] dx/u^2 \equiv u\int \frac{e^{-\int P(x)dx}}{u^2}\, dx.}$$

Oharra: Ez dago arazo handirik u eta v-ren arteko independentzia lineala frogatzeko. Hain zuzen,

$$W[u,\ u\int \exp[-\int P dx]dx/u^2] = \begin{vmatrix} u & u\int \exp[-\int P dx]dx/u^2 \\ u' & u'\int \exp[-\int P dx]dx/u^2 + u\exp[-\int P dx]/u^2 \end{vmatrix}$$

$$\equiv uu'\int \frac{e^{-\int P(x)dx}}{u^2}\, dx + e^{-\int P(x)dx} - uu'\int \frac{e^{-\int P(x)dx}}{u^2}\, dx = e^{-\int P(x)dx} \neq 0.$$

Ekuazio homogenoaren soluzio orokorra ezaguturik, ekuazio osotuaren soluzioa aurkitzeko, parametroen aldakuntzaren metodoa aplikatuko da.

Adibidea.- Aurki ezazu ondoko ekuazioaren integral orokorra,

$$(x + 1)y'' - (3x + 4)y' + 3y = (3x + 2)e^{3x},$$

$u = e^{3x}$ ekuazio homogeno asoziatuaren soluzioa dela jakinik.

E: Ekuazio homogenoaren soluzio orokorra

$$y_h = C_1u + C_2u\int\frac{e^{-\int P(x)dx}}{u^2}dx$$

da, non $u = e^{3x}$ eta $P(x) = -\dfrac{3x + 4}{x + 1}$ diren.

Bi koadratura eginez gero, emaitza lor daiteke:

$$-\int P(x)dx = \int\frac{3x + 4}{x + 1}dx = \int\left(3 + \frac{1}{x + 1}\right)dx = 3x + Ln(x + 1) \longrightarrow$$

$$\exp[-\int Pdx] = \exp[3x + Ln(x + 1)] = (x + 1)\exp(3x) \longrightarrow$$

$$v = u\int\frac{e^{-\int P(x)dx}}{u^2}dx = e^{3x}\int(x + 1)e^{-3x}dx = -(3x + 4)/9 \Rightarrow$$

$$y_h = C_1e^{3x} + C_2(3x + 4).$$

<u>Parametroen aldakuntzaren metodoa</u>: Ekuazio osotuaren soluzio orokortzat

$$y = e^{3x}L_1(x) + (3x + 4)L_2(x)$$

hartuko da, non $L_1'(x)$ eta $L_2'(x)$ deribatuek

$$e^{3x}L_1'(x) + (3x + 4)L_2'(x) = 0, \qquad 3e^{3x}L_1'(x) + 3L_2'(x) = \frac{(3x + 2)e^{3x}}{x + 1}$$

sistema beteko duten. Sistemaren soluzioak hauexek dira:

$$L_1' = \frac{9x^2 + 18x + 8}{9(x + 1)^2}, \qquad L_2' = -\frac{(3x + 2)e^{3x}}{9(x + 1)^2}.$$

$\int$ eragilea aplikatuz, $L_1(x)$ eta $L_2(x)$ kalkulatuko dira:

$$L_1 = \int \frac{9x^2 + 18x + 8}{9(x+1)^2}\, dx = \int \left(1 - \frac{1}{9(x+1)^2}\right) dx = x + \frac{1}{9(x+1)} + A.$$

$$L_2 = -\int \frac{(3x+2)e^{3x}}{9(x+1)^2}\, dx = \frac{(3x+2)e^{3x}}{9(x+1)} - \frac{e^{3x}}{3} + B = \frac{-e^{3x}}{9(x+1)} + B.$$

Azken integralari zatikako integrazioa aplikatuko zaio:

$$(3x+2)e^{3x} = u \rightarrow 9(x+1)e^{3x}dx = du; \quad \frac{-dx}{9(x+1)^2} = dv \rightarrow \frac{1}{9(x+1)} = v$$

Horrela, soluzio orokorra ondoko hau da:

$$y = e^{3x}L_1(x) + (3x+4)L_2(x) = Ae^{3x} + B(3x+4) + (3x-1)e^{3x}/3 \Rightarrow$$

$$y = (C + x)e^{3x} + B(3x+4).$$

---

5. EKUAZIO DIFERENTZIALETAKO SISTEMAK

5.1 Ideia orokorrak. Sistema linealak

Ekuazio diferentzialak, aldagai bakarraren menpeko funtzioen eta dagozkien deribatu edo diferentzialez osoturiko ekuazio-multzoak dira. Era orokorrean, lehenengo ordenako n ekuaziotako sistema ondoko eran idatz daiteke:

$$F_i(t, x_1, x_2, \ldots, x_n, x'_1, x'_2, \ldots, x'_n) = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Lehen ordenako sistema bat era normalean idatzita dagoela diogu, deribatuak explizituki adierazita daudenean, hots,

$$x'_i = f_i(t, x_1, x_2, ..., x_n), \qquad i = 1, 2, ..., n$$

eran.

Ekuazio arrunten kasuan bezala, ingeniaritzako problema-kopuru handi batetarako eredu matematikotzat har daitezkeenez, sistema linealek interes berezia dute. Era normalean ondoko idazkera dute,

$$x'_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_j + f_i(t), \qquad i = 1, 2, ..., n,$$

non a_{ij} koefiziente aldakorrak ala konstanteak diren.

$x = x_i(t)$, $i = 1, 2, ..., n$ funtzio-multzoa sistemaren soluzioa da, baldin eta beraiek eta beraien deribatuak sisteman ordezkatutakoan, ekuazioak identitate bihurtzen badira. Lehen ordenako n ekuazio diferentzialetako sistemaren kasuan, soluzioak n hautazko konstante esentzial baditu, hots,

$$x = x_i(t, C_1, C_2, ..., C_n), \qquad i = 1, 2, ..., n,$$

orduan, soluzio horri soluzio orokorra deritzo.

5.2 Ekuazio diferentzialetako sistemen jatorria

Aurreko ekuazioen kasuan esandakoaren hedapen gisa, sistemen jatorria ondoren deskribatuko diren problema ezberdinez erlazionatu ohi da.

5.2.1 Problema fisikoak.

Askatasun-gradu anitzetako sistema fisikoen kasuan, hau da, beraien analisirako koordenatu edo menpeko aldagai ezberdinak ezagutzea behar duten sistemen kasuan, normalean $x_i(t)$ aldagai horiek denbora adierazten duen t aldagai bakarraren menpekoak dira.

Fisikoki, deribatua koordenatu baten aldakuntza-indizea da. Lege fisiko edo saiakuntzetako emaitzetan koordenatuen deribatuek parte hartzen badute, orduan fenomeno fisikoari dagokion planteamendu matematikoak ekuazio diferentzialetako sistema bat sortaraziko du. Adibide bat: m masako puntu material baten $\bar{\mathbf{F}}(t, \bar{\mathbf{r}}, d\bar{\mathbf{r}}/dt)$ indarraren menpeko higiduraren ekuazioa, non t denbora, $\bar{\mathbf{r}}(t)$ puntuaren posizioa eta $d\bar{\mathbf{r}}/dt$ abiadura diren. Newton-en legearen arabera, $P[x(t), y(t), z(t)]$ puntuaren posizioa, erreferentzi ardatzen gain projektatu ondoren, bigarren mailako ekuazioetako hurrengo sistemaren baldintzapean dago:

$$\begin{cases} mx'' = X(t, x, y, z, x', y', z') \\ my'' = Y(t, x, y, z, x', y', z') \\ mz'' = Z(t, x, y, z, x', y', z') \end{cases}$$

Aurrerago, Newton eta Ohm-en legeen bidez, sistema linealek problema mekaniko eta elektrikoen analisirako dituzten beste aplikazio batzu ikusiko ditugu.

5.2.2 Jatorrizko funtzioen jatorria.

Biz n ekuaziotako hurrengo multzoa,

$$G_i(t, x_1, x_2, \dots, x_n, C_1, C_2, \dots, C_n) = 0, \qquad i = 1, 2, \dots, n,$$

non $x_1, x_2, \dots, x_n$ aldagaiak t-ren menpeko funtzioak diren.

t-rekiko deribatuz, hurrengo sistema ondorioztatuko da:

$$\partial G_i/\partial t + \sum_{j=1}^{n} (\partial G_i/\partial x_j)(dx_j/dt) = 0, \qquad i = 1,2, \dots, n.$$

Sistema bien artean $C_1, C_2, \dots, C_n$ hautazko konstanteak ezabatuta gero, emaitza lehen ordenako n ekuaziotako sistema izango da. Ideiak finkatzeko, demagun ondoko ekuazio-sistema,

$$\begin{cases} F(x, y, z, C_1, C_2) = 0, \\ G(x, y, z, C_1, C_2) = 0, \end{cases} \qquad [1]$$

zeinak hiru aldagaietatik bi era inplizituan definituko dituen, (adibidez y eta z, x-en funtzioan). Horretaz aparte, beraren interpretazio geometrikoa, espazioko kurba-familia bat alegia, C_1 eta C_2 konstanteekiko ebatz daiteke:

$$\begin{cases} C_1 = f(x, y, z), \\ C_2 = g(x, y, z). \end{cases} \qquad [2]$$

Orduan, [1] edo [2] adierazpenak kurba-kongruentzia bat definituko du, era honetan kontsideratutako eremuko puntu bakoitzetik kongruentziako kurba bakar bat pasatuko delarik.

C_1 eta C_2 parametroen ezabapena zuzenean gertatuko da, [2] kongruentzia x aldagai independentearekiko deribatu ondoren:

$$\begin{cases} 0 = \dfrac{\partial f}{\partial x} + \dfrac{\partial f}{\partial y} y' + \dfrac{\partial f}{\partial z} z', \\[2ex] 0 = \dfrac{\partial g}{\partial x} + \dfrac{\partial g}{\partial y} y' + \dfrac{\partial g}{\partial z} z'. \end{cases}$$

Deribatuak bakanduz, era normalera irits daiteke:

$$y' = \frac{\begin{vmatrix} \partial f/\partial z & \partial f/\partial x \\ \partial g/\partial z & \partial g/\partial x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \partial f/\partial y & \partial f/\partial z \\ \partial g/\partial y & \partial g/\partial z \end{vmatrix}} \equiv \frac{\dfrac{D(f,g)}{D(z,x)}}{\dfrac{D(f,g)}{D(y,z)}} = \phi_1(x,y,z),$$

$$z' = \frac{\begin{vmatrix} \partial f/\partial x & \partial f/\partial y \\ \partial g/\partial x & \partial g/\partial y \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \partial f/\partial y & \partial f/\partial z \\ \partial g/\partial y & \partial g/\partial z \end{vmatrix}} \equiv \frac{\frac{D(f,g)}{D(x,y)}}{\frac{D(f,g)}{D(y,z)}} = \phi_2(x,y,z).$$

Eta hortik era kanonikoa deritzon ondoko adierazpenera,

$$\frac{dx}{\frac{D(f,g)}{D(y,z)}} = \frac{dy}{\frac{D(f,g)}{D(z,x)}} = \frac{dz}{\frac{D(f,g)}{D(x,y)}} \Leftrightarrow \frac{dx}{X(x,y,z)} = \frac{dy}{Y(x,y,z)} = \frac{dz}{Z(x,y,z)},$$

zeinaren integrazioa lehen ordenako deribatu partzial linealetako ekuazioen ebazpenerako baliagarria izango den.

5.3 Ekuazio diferentzialetako sistemen integrazioa

Ebazpen-teknika ezberdinen artean, aipagarrienak ondokoak dira:

a) Laburtze-metodoa.

Metodo orokorra dugu. Ekuazio algebraikoak ebazteko erabiltzen denaren antzeko metodoa eta koordenatu batekiko goi-mailakoa den ekuazio diferentzial bakar batetara laburtzean datza. Horretarako, geroago garatuko den ondoz-ondoko deribazio eta ordezkapen metodoa segituko da.

Sistemako ekuazioak **D** eragilea erabiliz idazten badira, n ekuazio eta n ezezagunetako sistema baten ebazpen algebraikoarekin antzekotasun handia nabarituko da, sarritan **D** eragilearen propietateak koefiziente bat bailitzen erabiltzea permitituko baitute.

b) Metodo matriziala.

Sistema linealetarako, sistema osoa ekuazio diferentzial matrizial bakartzat hartzean datza. Gero, kalkulu matrizialeko tekniken bidezko ebazpenak, koordenatu guztiak aurkitzea ahalbidetuko du.

c) Eragile-metodoa.

Hurrengo gaian garatuko den prozedura hau, Laplace-ren transformatua deritzon eragilea aplikatuz, ekuazio diferentzialetako sistema, sistema algebraiko bihurtzean datza. Azkeneko sistema honen ebazpenak eta alderantzizko eragilearen geroko aplikazioak soluzioa aurkitzera eramango gaituzte, hastapen-baldintzatako problemetan, soluzio partikularra zuzenean kalkulatzeko abantaila duelarik.

5.3.1 Laburtze-metodoa.

Biz ondoko ekuazio diferentzialetako sistema, era normalean:

$$\begin{aligned} x_1' &= f_1(t, x_1, x_2, \ldots, x_n), \\ x_2' &= f_2(t, x_1, x_2, \ldots, x_n), \\ &\vdots \\ x_n' &= f_n(t, x_1, x_2, \ldots, x_n). \end{aligned} \qquad [1]$$

Hasteko, sistema edozein koordenaturekiko ebatz daiteke. Adibidez, x_1 lortzeko, [1]-eko lehenengo ekuazioa deribatu egingo da:

$$x_1'' = \partial f_1/\partial t + \sum_1^n (\partial f_1/\partial x_i)x_i'. \qquad [2]$$

Ondoren [1] sistemako x_i' balioak ordezkatuko dira.

Emaitza, x_1-ekiko bigarren mailako ekuazio bat izango da, zeinak gainerako beste koordenatu guztiak edukita dauzkan:

$$x_1'' = F_2(t, x_1, x_2, \ldots, x_n). \tag{3}$$

[3] ekuazioa n. ordenaraino deribatu eta kasu bakoitzean x_i' deribatuak [1] adierazpenaz ordezkatuz gero, orduan, ondoko n ekuaziotako sistema lortuko dugu:

$$\begin{aligned}
x_1' &= f_1(t, x_1, x_2, \ldots, x_n),\\
x_1'' &= F_2(t, x_1, x_2, \ldots, x_n),\\
&\vdots\\
x_1^{(n-1)} &= F_{n-1}(t, x_1, x_2, \ldots, x_n),\\
x_1^{(n)} &= F_n(t, x_1, x_2, \ldots, x_n).
\end{aligned} \tag{4}$$

[4] adierazpeneko lehenengo (n-1) ekuazioak kontsideratuz, orokorrean x_2, x_3, ..., x_n koordenatuak besteekiko ebatz ditzakegu:

$$\begin{aligned}
x_2 &= g_2(t, x_1, x_1', \ldots, x_1^{(n-1)}),\\
x_3 &= g_3(t, x_1, x_1', \ldots, x_1^{(n-1)}),\\
&\vdots\\
x_n &= g_n(t, x_1, x_1', \ldots, x_1^{(n-1)}).
\end{aligned} \tag{5}$$

Balio hauek [4] delakoaren n. ekuaziora eraman ondoren, x_1 koordenatuarekiko n. ordenako hurrengo ekuazio diferentziala lortuko da,

$$x_1^{(n)} = \phi(t, x_1, x_1', x_1'', \ldots, x_1^{(n-1)}), \qquad [6]$$

eta honen integrazioak

$$x_1 = \psi_1(t, C_1, C_2, \ldots, C_n) \qquad [7]$$

erantzuna emango du.

Gainontzeko koordenatuak koadraturarik gabe lor daitezke. Nahikoa da [7] adierazpena (n-1) aldiz deribatu eta [5]-ean ordezkatzea. Honela, ondokoa dugu:

$$\left\{\begin{array}{l} x_2 = \psi_2(t, C_1, C_2, \ldots\ldots, C_n), \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \\ x_n = \psi_n(t, C_1, C_2, \ldots\ldots, C_n), \end{array}\right. \qquad [8]$$

$x_1(t_0) = x_{10}$, $x_2(t_0) = x_{20}$, ... , $x_n(t_0) = x_{n0}$ hastapen baldintzak betetzen dituen [1] sistemaren soluzio partikularra kalkulatu nahi bada, nahikoa da [7]-[8] soluzio orokorrean baldintzak ordezkatzea.

Behin C_{10} , C_{20} , ... , C_{n0} balioak ezagutu ondoren, soluzio partikularra lortzeko, [7]-[8] adierazpenetan ordezkatuko dira.

$$x_1 = \psi_1(t, C_{10}, C_{20}, \ldots\ldots, C_{n0}),$$

$$x_2 = \psi_2(t, C_{10}, C_{20}, \ldots\ldots, C_{n0}),$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$x_n = \psi_n(t, C_{10}, C_{20}, \ldots\ldots, C_{n0}).$$

Diogun, bestalde, laburtze-metodoa goi-ordenako ekuazioetako sister kasuetan ere aplika daitekeela. Kasu horretan, soluzio orokorrak duen konstante-kopurua sistemako ekuazioen ordenen batura da.

Adibidea.- Kalkula bedi ondoko sistemaren soluzio partikularra:

$$\begin{cases} x' = y & [1], \\ y' = -x - z + t - 1 & [2], \\ z' = -y + t^2 + t & [3], \end{cases} \quad \text{non: } x(0) = y(0) = 0,\ z(0) = -3.$$

E: x(t)-rekiko ebatziko dugu. Horretarako, [1] deribatu eta y' gaia [2] ekuazioan ordezkatuko da:

$$x'' = y' \xrightarrow{[2]} x'' = -x - z + t - 1. \qquad [4]$$

Berriro deribatu eta z' deribatua [3] ekuazioan ordezkatuz, ondokoa dugu:

$$x''' = -x' - z' + 1 \xrightarrow{[3]} x''' = -x' + y - t^2 - t + 1. \qquad [5]$$

Segidan, [1]-[4] sistema y eta z-rekiko ebatzi behar da:

$$\begin{cases} x' = y, \\ x'' = -x - z + t + 1, \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} y = x', & [6] \\ z = -x'' - x + t + 1, & [7] \end{cases}$$

eta ekuazio hauek [5] delakoan ordezkatuko dira. Ondoren hirugarren ordenako ekuazioa ondorioztatuko da,

$$x''' = -t^2 - t + 1 \qquad [8]$$

alegia, eta honen soluzio orokorrerako, x, x' eta x'' gaiak falta direnez, hiru integrazio kontsekutibo behar dira. Bestela, metodo orokorraren arabera, ondoko eran ebatziko litzateke:

Ekuazio homogenoaren soluzioa:

$$x''' = 0 \longrightarrow r^3 = 0 \longrightarrow r = 0 \text{ (hirukoitza)} \Rightarrow x_h = C_1 + C_2 t + C_3 t^2.$$

Ekuazio osotuaren soluzio partikularra:

$$X = t^3(At^2 + Bt + C) \longrightarrow X' = 5At^4 + 4Bt^3 + 3Ct^2 \longrightarrow$$

$$X'' = 20At^3 + 12Bt^2 + 6Ct \longrightarrow X''' = 60At^2 + 24Bt + 6C \Rightarrow$$

$$X''' = -t^2 - t + 1 \longrightarrow 60At^2 + 24Bt + 6C = -t^2 - t + 1 \Rightarrow$$

$$A = -1/60, \quad B = -1/24, \quad C = 1/6 \longrightarrow X = -t^5/60 - t^4/24 + t^3/6.$$

x(t)-rekiko soluzio orokorra ondokoa da:

$$x(t) = x_h + X \longrightarrow x(t) = C_1 + C_2 t + C_3 t^2 + t^3/6 - t^4/24 - t^5/60. \quad [9]$$

[9] adierazpena bi aldiz deribatuz, y eta z koordenatuak [6] eta [7]-tik lortuko dira, ondoren adieraziko den moduan:

$$x' = C_2 + 2C_3 t + t^2/2 - t^3/6 - t^4/12 \longrightarrow x'' = 2C_3 + t - t^2/2 - t^3/3 \Rightarrow$$

$$\begin{cases} y(t) = C_2 + 2C_3 t + t^2/2 - t^3/6 - t^4/12, & [10] \\ z(t) = -1 - C_1 - 2C_3 - C_2 t + (1/2 - C_3)t^2 + t^3/6 + t^4/24 + t^5/60. & [11] \end{cases}$$

Hastapen-baldintzak integral orokorrera eramanez,

$$x(0) = 0 \longrightarrow 0 = C_1, \quad y(0) = 0 \longrightarrow 0 = C_2, \quad z(0) = -3 \longrightarrow C_3 = 1$$

eta azkenik [9], [10] eta [11]-n ordezkatuta gero, lortuko den emaitza ondokoa da:

$$\begin{cases} x(t) = t^2 + t^3/6 - t^4/24 - t^5/60, \\ y(t) = 2t + t^2/2 - t^3/6 - t^4/12, \\ z(t) = -3 - t^2/2 + t^3/6 + t^4/24 + t^5/60. \end{cases}$$

---

6. SISTEMA ETA EKUAZIOEN APLIKAZIOAK

Ingeniaritzan duten interesagatik, zenbait sistema fisiko klasiko deskribatuko dira ondoren. Aztertuko direnak, gehienak zenbait askatasun-gradutako sistema elektriko eta mekanikoak dira, teknologi adar ezberdinen barneko fenomeno fisikoen analisirako ekuazio eta sistema linealen garrantziaren nolabaiteko ideia emateko asmoz.

Bestalde, guztiz ezberdinak diren fenomenoez osoturiko sistema fisikoen analisirako, erabat antzekoak diren eredu matematikoak erabil daitezkeela nabarmendu behar da. Funtsezko identitate matematiko honek, itxuraz ezberdinak diren koordenatuen artean zenbait antzekotasun fisiko ezartzea ahalbidetuko du, honek aurrerapena ekarriko duelarik.

Adibidez, malguki batetatik zintzilikatuta dagoen pisu baten higidura bibrakorra eta zirkuitu elektriko bakun batetan zeharreko korronte-zirkulazioa, hain ezberdinak izan arren, eredu matematiko gisa bigarren ordenako ekuazio diferentzial bera onartuko dute.

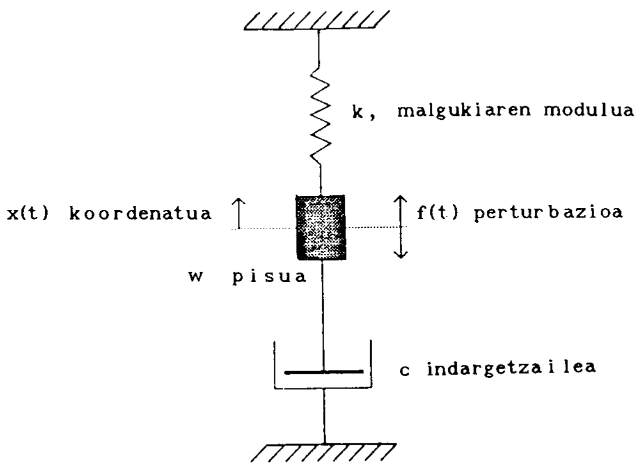
Analogia kuantitatiboa denez, nahikoa da bihurketa egokiak egitea, sistema mekaniko konplexuen analisitik zirkuitu elektriko baliokideen azterketara pasatzeko, azken hauek eraikitzeko askoz errazagoak eta neurriak erregistratzerakoan prezisio handiagokoak baitira.

6.1 Askatasun-gradu bakarreko sistema fisikoen analisia

Eredu matematiko beraz analisa daitezkeen sistemen arteko erabilgarrienak, hauexek dira:

a) Translazio-sistema mekanikoa.

Mutur bat finko duen k moduluko malguki batez osoturik dago. Malgukitik w pisua zintzilikatuko dugu, honen f(t) indar perturbatzailepeko x(t) higidura bertikalak sistemaren koordenatua definituko duelarik.



Translazio-sistema mekanikoa

Demagun malgukiaren masa arbuiagarria dela, eta higidura bertikala izanik, pisuaren posizioa oreka-egoeratik neurtzen dela. Sistema honen analisia Newton-en legean oinarrituko da:

$$\textbf{(masa)x(azelerazioa) = indarren batukaria} \longrightarrow \frac{w}{g}\, x''(t) = \sum \overline{F}.$$

Eragingo duten indarrak ondokoak izango dira:

Indar grabitatorioa: $-w$. *Indar elastikoa:* $w - kx$.

Marruskadura-indarra: $-cx'$. *Aplikatutako indarra:* $f(t)$.

Abiadura txikietarako marruskadura-indarra $x'(t)$ abiadurarekiko proportzionala dela suposatu dugu, eta goranzko higidura zeinu positibokotzat hartu dugu. Legearen aplikazioak koefiziente konstanteetako bigarren ordenako ekuazio diferentzial lineal bat ondorioztatuko du:

$$mx'' = -w + (w - kx) - cx' + f(t) \longrightarrow$$

$$\boxed{mx''(t) + cx'(t) + kx(t) = f(t).} \qquad [1]$$

Problemako hastapen-baldintzak, $x(0) = x_0$ eta $x'(0) = x_{10}$ alegia, pisuaren hasierako posizioa eta abiadura dira, hurrenez hurren. Baldintza hauek integrazio-konstanteak kalkulatzea eta higiduraren legea ondorioztatzea ahalbidetuko digute.

Ekuazio homogeno asoziatuaren soluzioak, sistemaren higidura askea edo naturala deritzona deskribatuko du. Higidura honi, kanpoko perturbaziorik jasango ez duenez, higidura askea deritzo. Ekuazio karakteristikoaren erroen motaren arabera,

$$mr^2 + cr + k = 0 \longrightarrow r = \frac{-c \pm (c^2 - 4mk)^{1/2}}{2m},$$

higidura askeak ondoko sailkapena onartuko du:

(I) Higidura gainindargetua.

Erro erreal bakunen kasua da, hots, $c^2 - 4mk > 0$ denekoa. Ekuazio homogenoaren soluzioa ondoko motakoa da:

$$x_h = C_1 e^{at} + C_2 e^{bt}.$$

Posizio geldikorrean ($t \longrightarrow \infty$), pisua oreka egoerara [$x(t) \longrightarrow 0$] doa, a) eta b) erro negatiboak baitira.

(II) Higidura kritikoki indargetua.

Orain, $c^2 - 4mk = 0 \longrightarrow c = 2\sqrt{mk}$ da, eta ekuazio karakteristikoak $r = -c/2m$ erro erreal bikoitza du. Homogenoaren soluzioak,

$$x_h = (C_1 + C_2 t)e^{rt}$$

alegia, ekuazioak posizio geldikorra aurreko atalekoa dela eta sistemaren c indargetzea txikiagoa direla adieraziko digu.

(III) Higidura azpiindargetua.

Erro irudikarien kasua da. Hurrengo egoera dagokio:

$$c^2 - 4mk < 0 \longrightarrow r_{1,2} = \frac{-c}{2m} \pm \frac{(4km - c^2)^{1/2}}{2m} i \equiv a \pm bi,$$

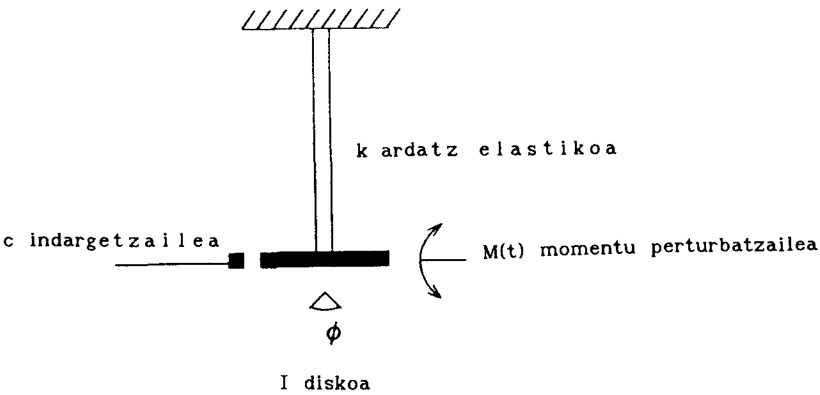
$$x_h = e^{at}(C_1 \cos bt + C_2 \sin bt).$$

Horrela deskribatutako higidura askea, aperiodikoa da, $t \longrightarrow \infty$ doanean, $e^{at} \longrightarrow 0$ baitoa. Hala ere, oszilakorra dela ohar daiteke, sistema $x(t) = 0$ oreka egoeratik ($C_1 \cos bt + C_2 \sin bt$) biderkagai trigonometrikoa anulatuko duten $t = n\pi/b$, $n = 1, 2, \ldots,$ denbora-tarte bakoitzean pasatuko baita.

Sistemaren gain $f(t)$ kanpoko perturbazio bat badugu, hots, higidura bortxatua bada, orduan ekuazio osotuaren soluzio partikularrak aztertu behar dira. Gehienetan, $f(t)$ perturbazioa periodikoa ($f(t) = F_0 \cos\omega t$ erakoa) izango da. Orduan, aproba egiteko $X = A\cos\omega t + B\sin\omega t$ soluzioa hartuko da.

---

b) Biraketa-sistema mekanikoa.



Biraketa-sistema mekanikoa

Mutur bat finko duen k moduluko ardatz elastikoari, beste muturrean I inertzi momentuko diskoa lotuko zaio. Sistema honen gainean M(t) tortsio-momentuko kanpo-perturbazioak eragingo du, diskoaren $\phi(t)$ posizio angeluarra, sistemaren koordenatua izango delarik. Kasu honetan, ardatz baten inguruan higitzean solido zurrunari dagokion Newton-en legea aplikatuko da:

(inertzi momentua)x(azel.angeluarra) ≡ ∑ bihurdura-momentuak.

Sistemaren gainean eragiten duten momentuak hurrengoak dira:

Tortsio-momentu elastikoa: $-k\phi(t)$.

Marruskaduragatiko tortsio-momentua: $-c\phi'(t)$.

Kanpoko tortsio-momentua: M(t).

Biz $\phi''(t)$ azelerazio angeluarra. Newton-en legea ondoko eran aplikatuko da:

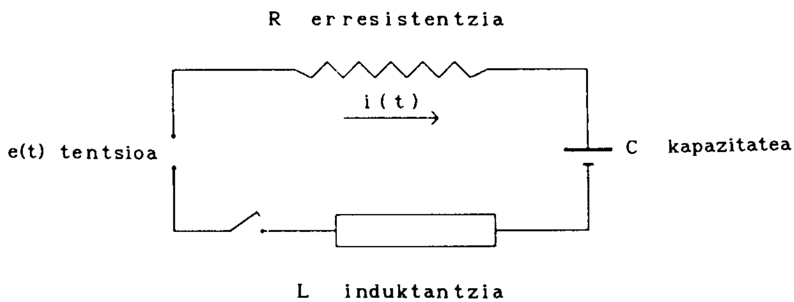
$$\boxed{I\phi''(t) + c\phi'(t) + k\phi(t) = M(t).} \qquad [2]$$

Kasu honetan, $\phi(0) = \phi_0$ eta $\phi'(0)= \phi_{10}$ hastapen-baldintzak, hasierako posizio eta abiadura angeluarrei dagozkienak dira, hurrenez hurren.

Sistemaren emaitzaren azterketa translaziozko kasuaren antzera egingo da.

c) Serie-sistema elektrikoa.

Irudiko serie-zirkuitu elektrikoan e(t) tentsioa, L induktantzia, R erresistentzia eta C kondentsadorea ditugu.



Serie-zirkuitu elektrikoa

Hasteko, ondokoa suposatuko da: sistema definituko duen koordenatua, zirkuitutik dabilen i(t) intentsitatea dela. Zirkuituaren analisia Ohm-en legearen bidez egingo da, zeinaren arabera, hornituriko tentsioa zirkuituko elementuetan gertatutako tentsio-erorketen baturaren baliokidea den. Tentsio edo potentzial-diferentziak hurrengoak dira:

Induktantzian: $Li'(t)$. *Erresistentzian:* $Ri(t)$.

Kondentsadorean : $\frac{1}{C}\int_0^t i(t)dt$. *Aplikatutako tentsioa:* e(t).

Ohm-en legeak ondokoa dio:

$$\boxed{Li'(t) + Ri(t) + \frac{1}{C}\int_0^t i(t)dt = e(t).} \qquad [3]$$

Laplace-ren transformatuari buruzko gaian aztertuko denez, ekuazio integro-diferentzial hau eragile-teknikaren bidez zuzenki ebatz daiteke. Hemen, ordezkaketaren bidez, bigarren ordenako ekuazio diferentzial izatera pasatuko da:

$$\int_0^t i(t)dt = Q(t) \longrightarrow i(t) = Q'(t) \longrightarrow i'(t) = Q''(t) \qquad \Rightarrow$$

$$\boxed{LQ''(t) + RQ'(t) + Q(t)/C = e(t),} \qquad [4]$$

sistemako koordenatua kondentsadoreko karga delarik.

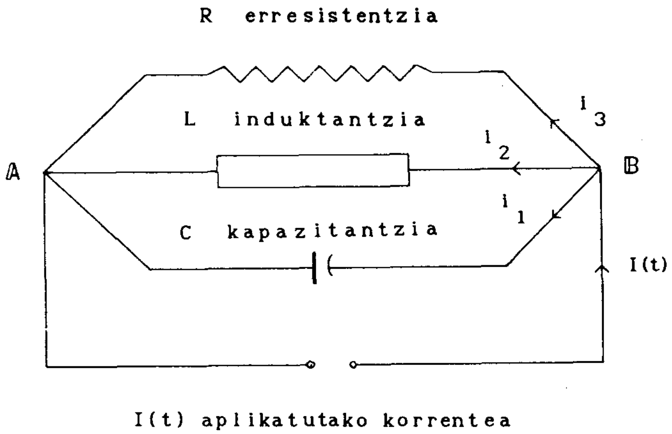
Problemaren hastapen-baldintzak, $Q(0) = Q_0$ eta $Q'(0) = i(0) = i_0$, hasierako karga eta intentsitatea dira, hurrenez hurren.

Sistema mekaniko baten portaerari buruzko emaitzak zirkuitu elektriko baten kasura heda daitezke, sistema bietako ekuazio diferentzialen koefizienteen artean existitzen den korrespondentziaren bidez.

---

d) Paralelo-zirkuitu elektrikoa.

Kasu honetan, irudikaturiko sistema elektrikoaren koordenatua A eta B korapiloen arteko potentzial-diferentzia da.



Paralelo-zirkuitu elektrikoa

Kirchoff-en lehenengo legeak dioenez, "edozein korapilotarantz doazen intentsitateen batura algebraikoa nulua da".

B korapilorantz doazen intentsitateak hauexek dira:

$i_1(t)$ *intentsitatea kondentsadorean:* $Ce'(t)$.

$i_2(t)$ *intentsitatea induktantzian:* $\frac{1}{L}\int_0^t e(t)dt$.

$i_3(t)$ *intentsitatea erresistentzian:* $e(t)/R$.

Aplikaturiko intentsitatea: $I(t)$.

Kirchoff-en legearen ondorioz, $i_1 + i_2 + i_3 - I = 0$ eta

$$\boxed{Ce'(t) + e(t)/R + \frac{1}{L}\int_0^t e(t)dt = I(t).} \qquad [5]$$

Aurreko kasuan bezala, ekuazio integro-diferentzial hau bigarren ordenako ekuazio diferentzial bilakatuko da, hurrengo ordezkapena egin ondoren:

$$\int_0^t e(t)dt = U(t) \longrightarrow e(t) = U'(t) \longrightarrow e'(t) = U''(t) \Rightarrow$$

$$\boxed{CU''(t) + U'(t)/R + U(t)/L = I(t),} \qquad [6]$$

$U(0) = U_0$ eta $U'(0) = e(0) = e_0$ hastapen-baldintzak direlarik.

Oharra: [3] eta [5] ekuazio integro-diferentzialak, deribatu eragilea aplikatuta, bigarren ordenako ekuazio diferentzial bihur daitezke. Hau da:

$$\boxed{LI''(t) + RI'(t) + I(t)/C = e'(t),} \qquad [7]$$

$$\boxed{Ce''(t) + e'(t)/R + e(t)/L = I'(t).} \qquad [8]$$

6.1.1 Zenbait analogia fisiko.

Komentatutako ekuazio diferentzialen artean existitzen den matematikako oinarrizko identitateak, beren koefizienteez adierazita datozen magnitudeak elkarrekin konparatzea eta beraien arteko analogia fisikoak ezartzea ahalbidetuko du. Horrela, adibidez translazio-sistema mekanikoaren [1] ekuazioa, serie-sistema elektrikoaren [3] eta [4] ekuazioekin konparatuz gero, ondoko analogia fisikoak nabari daitezke:

$$x(t) \text{ desplazamendua} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} i(t) \text{ korronte-intentsitatea,} & [3] \\ Q(t) \text{ kondentsadoreko karga,} & [4] \end{cases}$$

m masa $\Longleftrightarrow$ *L induktantzia*

c marruskadura mekanikoa $\Longleftrightarrow$ *R erresistentzi elektrikoa*

k malgukiaren modulua $\Longleftrightarrow$ *1/C elastantzia elektrikoa*

f(t) aplikaturiko indarra $\Longleftrightarrow$ *e(t) aplikaturiko tentsioa*

Materialen erresistentziaren arloko beste aplikazio bat, karga-mota ezberdinak dituzten habeen flexioaren azterketa da. Mekanikan froga daitekeenez, habearen kurba elastiko edo deflexio-kurbak (habearen ardatz horizontalari dagokion fibrak hartutako posizioak, alegia) ondoko ekuazioa beteko du:

$$EI/R = M, \qquad [1]$$

non

E ≡ *habearen materialaren Young-en elastikotasun-modulua,*

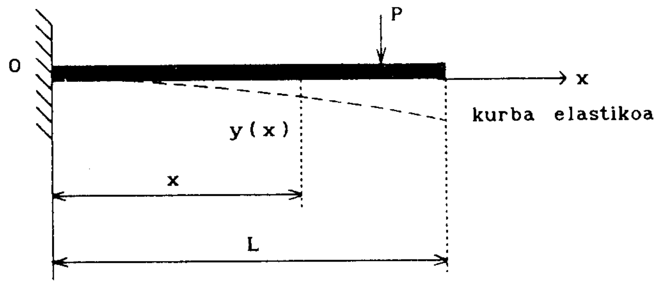
I ≡ *habearen sekzioak zuzen neutroarekiko duen inertzi momentua,*

R ≡ *habearen kurba elastikoaren kurbadura-erradioa,*

M ≡ *flexio-momentua, zeharkako sekzioak bananduriko habearen bi aldeetako edozeinetan eragiten duten kanpo-indarrei dagokiena, habearen zeharkako sekzioaren eta beraren gainazal neutroaren arteko ebakidura-lerroarekiko kalkulaturik*

baitira.

Laburtzeko, demagun habea y = y(x) kurba elastikoaz eta beraren zeharkako sekzioa P(x,y) puntu batez ordezkatuko direla, habearen ezkerreko muturra erreferentzia errektangeluar baten jatorri bihurtu delarik eta deflexioa ("gezia") ordenatu-ardatzeko zentzu negatiboan neurtuko delarik. Irudiko adibidean, bere mutur batetan finkaturiko habe bat kontsideratuko dugu, zeharkako P kanpo-karga jasango duelarik.



Kurba elastikoaren maldaren zenbakizko balioa, y'(x), txikia da puntu guztietan. Honek R kurbadura-erradioari buruzko ondoko estimazioa egitea ahalbidetuko digu:

$$R = (1 + y'^2)^{3/2}/y'' \longrightarrow R \simeq 1/y''.$$

Hurbilketa hau [1] ekuazioan ordezkatuz, kurba elastikorako hurrengo bigarren ordenako ekuazio diferentziala lortuko dugu:

$$E\ I\ y'' = M. \qquad [2]$$

Aplikazio arrunt gehienetan x aldagaiaren funtzio explizitua den P(x) puntuarekiko M flexio-momentua honelaxe definituko da: x abzisako sekzioaren alde berean aplikatutako indar guztien momentuen batura algebraikoa. Hastapen-baldintzak ezartzeko, muturrak nola dauden euskarrituta aztertu behar da (habe giltzatuak, landatuak, euskarri sinpledunak).

Zeharkako kargak soilik jasaten dituzten eta flexio-zurruntasun konstantea (EI) duten habeen kasuan, kurba elastikoak ondoko ekuazio diferentzialak beteko dituela froga daiteke:

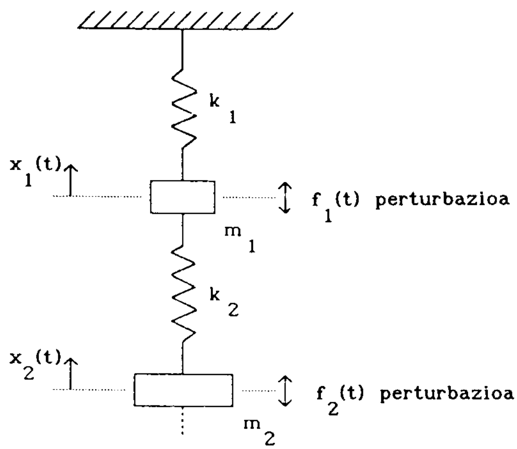
$$E\ I\ y''' = V(x) \quad \text{[Zeharkako kargen batura]}$$

$$E\ I\ y^{IV} = W(x) \quad \text{[Luzera-unitateko karga]}$$

6.2 Zenbait askatasun-gradutako sistemak

Zirkuitu mekaniko eta elektrikoen kasuak, masa eta sare elektriko ezberdinak dituzten sistema fisikoei dagozkie, hurrenez hurren. Asoziaturiko eredu matematikoak (ekuazio diferentzialetako sistemak), Newton eta Kirchoff-en legeen bidez aurkituko dira, zirkuitu bakunen kasuetan bezala. Adibide gisa, ondoko problemak kontsideratuko ditugu:

a) Bi masa eta bi malgukidun translazio-sistema.



Demagun irudian ageri den malguki eta masez osoturiko sisteman, marruskadura eta malgukien masak nuluak direla, non $x_1(t)$ eta $x_2(t)$ koordenatuak masen desplazamenduak diren. Baldintza hauetan, kanpo-perturbazioez aparte, masen gain eragiten duten indar bakarrak, grabitatea eta malgukiek transmitituko dituztenak dira. Luzapen edo elongazioen ondorio diren azken hauek, ondokoak dira:

m_1-en gaineko indarra: $-k_1x_1 + k_2(x_2 - x_1)$.

m_2-ren gaineko indarra: $-k_2(x_2 - x_1)$.

Masa bakoitzari Newton-en legea aplikatuz gero, hurrengo ekuazio diferentzialetako sistema ondorioztatuko da:

$$m_1x_1'' = -k_1x_1 + k_2(x_2 - x_1) + f_1(t), \quad m_2x_2'' = -k_2(x_2 - x_1) + f_2(t).$$

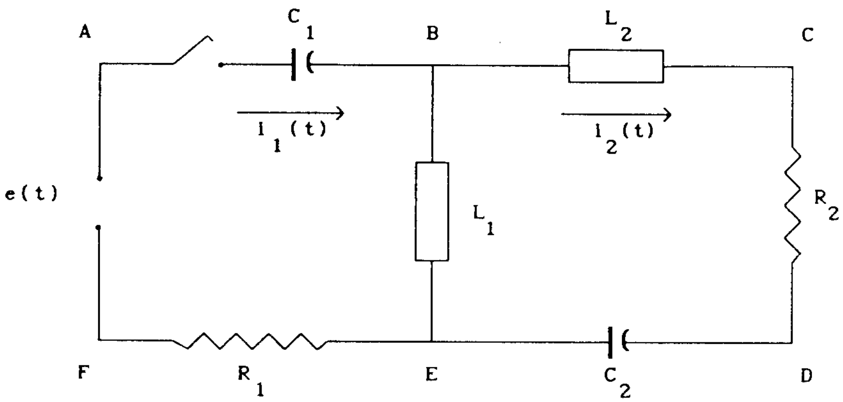
Azkenik, higiduraren legeak ondorioztatzeko, hurrengo baldintzak behar dira:

Masen hasierako posizioak: $x_1(0) = x_{10}$, $x_2(0) = x_{20}$.

Masen hasierako abiadurak: $x_1'(0) = x_{11}$, $x_2'(0) = x_{21}$.

---

b) Bi saretako RLC zirkuitu elektrikoa.



Irudiko zirkuituko sare bakoitzari Kirchoff-en bigarren legea aplikatuta, ondoko sistema integro-diferentziala lortuko da:

$$L_1(i_1' - i_2') + R_1i_1 + (1/C_1)\int_0^t i_1\,dt = e(t) \qquad \text{ABEF SAREA,}$$

$$L_1(i_2' - i_1') + L_2i_2' + R_2i_2 + (1/C_2)\int_0^t i_2\,dt = 0 \qquad \text{BCDE SAREA,}$$

non sareetan zeharreko $i_1(t)$ eta $i_2(t)$ korronte-intentsitateak sistemaren koordenatuak diren.

Sistema honen analisi zuzena Laplace-ren transformatuaren eragileen bidez egin daiteke. Bigarren ordenako ekuazio diferentzialetako sistema batetan laburtzea nahi izanez gero,

$$\int_0^t i_1(t)dt = Q_1(t) \longrightarrow i_1(t) = Q'_1(t) \longrightarrow i'_1(t) = Q''_1(t)$$

$$\int_0^t i_2(t)dt = Q_2(t) \longrightarrow i_2(t) = Q'_2(t) \longrightarrow i'_2(t) = Q''_2(t)$$

ordezkapenak egin behar dira, era horretan $Q_1(t)$ eta $Q_2(t)$ koordenatu berrietarako hurrengoa lortuko delarik:

$$L_1(Q''_1 - Q''_2) + R_1Q'_1 + Q_1/C_1 = e(t) \qquad \text{ABEF SAREA,}$$

$$L_1(Q''_2 - Q''_1) + L_2Q''_2 + R_2Q'_2 + Q_2/C_2 = 0 \qquad \text{BCDE SAREA.}$$

Kasu honetan, problemaren hastapen-baldintzak,

$$Q_1(0) = Q_{10},\ Q_2(0) = Q_{20},\ Q'_1(0) = i_1(0) = i_{10},\ Q'_2(0) = i_2(0) = i_{20}$$

alegia, etengailua ixtean dauden kargak eta intentsitateak dira.

II. GAIA: FOURIER-EN SERIEAK.

1. FOURIER-EN SERIEEN BIDEZKO GARAPENAK

2. FOURIER-EN TRANSFORMATURAKO SARRERA

1. FOURIER-EN SERIEEN BIDEZKO GARAPENAK

1.1. Sarrera eta definizioak

Funtzio bat sinu eta kosinuen konbinazio lineal moduan adierazteko ideia, XIX. mendearen hasieran Fourier-ek iragarri zuen. Teoria honi buruzko geroko azterketek, gaur eguneko analisi matematikoaren garapenean eragin handia izan dute.

Gaur egun, Fourier-en serieak perturbazio periodikoez eragindako sistema fisikoetako bibrazioen azterketarako oso interesgarriak dira, eta matematika aplikatuaren adar ezberdinetako beste problema askoren ebazpenean parte hartzen dute.

Aurrera segitu baino lehen, gogora dezagun f(t) delakoa T periododun funtzio periodikoa dela, baldin eta t-ren edozein baliotarako ondokoa betetzen bada:

$$f(t) = f(t + T). \qquad [1]$$

Berdintza hau beteko duen T konstantearen balio txikienari, funtzioaren periodo propio edo oinarrizko periodoa deritzo. Definiziotik, [1] adierazpena errepikatuz, hurrengoa lor daiteke:

$$f(t) = f(t + nT), \qquad \forall n \in Z. \qquad [2]$$

Fourier-en serieen teoriak, f(t) funtzio periodiko orokorra serie trigonometriko eran idaztea planteatuko du, honelaxe hain zuzen:

$$\boxed{f(t) = a_0/2 + \sum_1^{\infty} (a_k \cos kt + b_k \sin kt).} \qquad [3]$$

Fourier-en analisia, f(t) funtzioak [3] adierazpena identitate izateko bete behar dituen baldintzetan eta seriearen kalkuluan datza. Maiztasun ezberdinetako harmonikoen (hots, 2π periododun funtzio sinusoidalen) baturaren bidezko funtzioaren adierazpenak, interes handia du ingeniaritzan erabili ohi diren matematiketan. Hasteko, aplikazio bat

$$ax''(t) + bx'(t) + cx(t) = f(t)$$

motako ekuazio diferentzialak aztertzea da, non f(t) funtzioak perturbazio periodiko bat adierazten duen. Hau zenbait sistema elektriko eta mekanikotarako eredu matematikoa izango da. Gainera, f(t) serie trigonometriko batez ordezkatuz, orduan serie trigonometrikoa osotuko duten batugaietako bakoitzari, sinu eta kosinu arrunten kasuan aplikatutako metodoak aplika dakizkioke.

Horretaz gain, serie trigonometrikoek berredura-serieekiko abantailak dituzte. Adibidez, zenbait kasutan gaiz gai deribatu eta integratzea ahalbidetzen dute.

1.2. Koefizienteen kalkulua. Euler-en formulak

Demagun 2π periododun funtzio periodiko baten adierazpena [3] serie trigonometrikoa dela. Hau da, $(-\pi, \pi)$ tartean serieak funtziora konbergituko du.

Halaber, [3] delakoari gaiz gai integral mugatu eragilea aplika dakiokeenez,

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt = \int_{-\pi}^{\pi} a_0 dt/2 + \sum_{1}^{\infty} \left[\int_{-\pi}^{\pi} a_k \cos kt dt + \int_{-\pi}^{\pi} b_k \sin kt dt \right]$$

ondorioztatuko da.

Batukariko integralak nuluak dira. Hau da:

$$\int_{-\pi}^{\pi} a_k \cos kt dt = \left| a_k \sin kt/k \right|_{-\pi}^{\pi} = 0, \quad \int_{-\pi}^{\pi} b_k \sin kt dt = \left| -\cos kt/k \right|_{-\pi}^{\pi} = 0.$$

Beraz, a_o koefizientea kalkula daiteke:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt = \int_{-\pi}^{\pi} a_0 dt/2 = \pi a_0 \quad \longrightarrow \quad a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt. \qquad [4]$$

Gainontzeko a_k eta b_k koefizienteen kalkulurako, aldez aurretik azter ditzagun

$$I_1 = \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{cos}kt\mathrm{cos}mt dt, \quad I_2 = \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{cos}kt\mathrm{sin}mt dt, \quad I_3 = \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{sin}kt\mathrm{sin}mt dt$$

integralak, k eta m indize arrunten balio ezberdinetarako.

---

a) <u>$k \neq m$ kasua</u>:

Hiru integralen balioak nuluak dira. Hau da, biderkaketetarako

$$\mathrm{cos}kt\mathrm{cos}mt = [\cos(k+m)t + \cos(k-m)t]/2,$$

$$\mathrm{cos}kt\mathrm{sin}mt = [\sin(k+m)t - \sin(k-m)t]/2,$$

$$\mathrm{sin}kt\mathrm{sin}mt = [\cos(k-m)t - \cos(k+m)t]/2$$

formula trigonometrikoak aplikatu eta integraletan ordezkatu ondoren, hurrengo balioak ondoriozta daitezke:

$$I_1 = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}[\cos(k+m)t + \cos(k-m)t]dt = \frac{1}{2}\left|\frac{\sin(k+m)t}{k+m} + \frac{\sin(k-m)t}{k-m}\right|_{-\pi}^{\pi} = 0,$$

$$I_2 = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}[\sin(k+m)t - \sin(k-m)t]dt = \frac{1}{2}\left|\frac{-\cos(k+m)t}{k+m} + \frac{\cos(k-m)t}{k-m}\right|_{-\pi}^{\pi} = 0,$$

$$I_3 = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}[\cos(k-m)t - \cos(k+m)t]dt = \frac{1}{2}\left|\frac{\sin(k-m)t}{k-m} - \frac{\sin(k+m)t}{k+m}\right|_{-\pi}^{\pi} = 0.$$

b) k = m kasua:

Oraingoan, integralen balioak hauexek dira:

$$I_1 = \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 kt dt = \left| \frac{t}{2} + \frac{\sin 2kt}{4k} \right|_{-\pi}^{\pi} = \pi,$$

$$I_2 = \int_{-\pi}^{\pi} \cos kt \sin kt dt = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \sin 2kt dt = \left| \frac{-\cos 2kt}{4k} \right|_{-\pi}^{\pi} = 0,$$

$$I_3 = \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 kt dt = \left| \frac{t}{2} - \frac{\sin 2kt}{4k} \right|_{-\pi}^{\pi} = \pi.$$

Oharra: Emaitza hauek

1, $\cos\omega t$, $\cos 2\omega t$, ... , $\cos n\omega t$, ... $\sin\omega t$, $\sin 2\omega t$, ... , $\sin n\omega t$ ..

funtzio sinusoidalek $(-\pi, \pi)$ tartean duten ortogonaltasuna frogatzen dute.

---

a_k-ren kalkulua $(k \neq 0)$:

[3] adierazpena cosmt faktoreaz biderkatu, eta $(-\pi)$-tik π-rako integral eragilea aplikatuko da:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos mt dt = \int_{-\pi}^{\pi} a_0 \cos mt dt/2 +$$

$$+ \sum_{1}^{\infty} \left[\int_{-\pi}^{\pi} a_k \cos kt \cos mt dt + \int_{-\pi}^{\pi} b_k \sin kt \cos mt dt \right].$$

Gero, I_1, I_2 eta I_3-ren emaitzak ordezkatuz, batukariko integral guztiak anulatu egingo dira, k = m kasukoa izan ezik.

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos kt\,dt = \int_{-\pi}^{\pi} a_k \cos^2 kt\,dt = \pi a_k \longrightarrow a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos kt\,dt. \quad [5]$$

---

b_k-ren kalkulua (k ≠ 0):

Orain, [3] adierazpena sinmt faktoreaz biderkatu, eta gero (-π)-tik π-ra integratuko da, honakoa ondorioztа daitekeelarik:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin mt\,dt = \int_{-\pi}^{\pi} a_0 \sin mt\,dt/2 +$$

$$+ \sum_{1}^{\infty} \left[\int_{-\pi}^{\pi} a_k \cos kt \sin mt\,dt + \int_{-\pi}^{\pi} b_k \sin kt \sin mt\,dt \right].$$

Kasu honetan, hurrengoa dugu:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin kt\,dt = \int_{-\pi}^{\pi} b_k \sin^2 kt\,dt = \pi b_k \longrightarrow b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin kt\,dt. \quad [6]$$

Beraz, koefizienteen kalkulurako formulak, [4], [5] eta [6] adierazpenak alegia, hauexek dira:

$$\boxed{a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,dt,} \quad [4]$$

$$\boxed{a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos kt\,dt,} \qquad [5]$$

$$\boxed{b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin kt\,dt.} \qquad [6]$$

Aurrekoei Euler-en formulak deritze, eta dagokien serieari, hots,

$$\boxed{f(t) = a_0/2 + \sum_{1}^{\infty} (a_k\cos kt + b_k\sin kt)} \qquad [3]$$

berdintzari, f(t) funtzioaren Fourier-en seriea deritzo.

Oharra: a_0 koefizientea, indeterminazioak izan ezik, a_k-ren kasu partikularra da, k = 0 denerako.

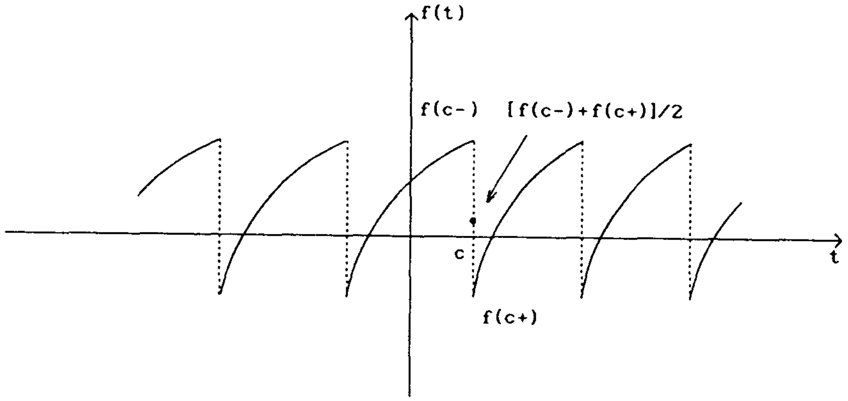
1.2.1. Dirichlet-en baldintzak.

Euler-en formulak kalkulatzeko, Fourier-en seriea existitzen dela eta [3] seriea gaiz gai integra daitekeela suposatu dugu. Seriearen existentzia eta f(t) funtzio sortzaileranzko konbergentziari buruzko kuestioen azterketa teorikoa, nahiko zaila da. Horregatik ez dugu frogatuko ondoren enuntziatuko den Dirichlet-en teorema. Teorema honek funtzio bat Fourier-en seriearen bidez idazteko baldintzak eta arazo praktikoen ebazpena ezagutzea ahalbidetuko ditu.

Teorema: "Biz f(t) edozein periodotako funtzio quasijarraia, hots, maximo, minimo eta etenguneen kopurua finitua duena. f(t)-ren Fourier-en serieak f(t) funtziora joko du tarte osoan, etengunetan izan ezik, azken hauetan serieak albo-limiteen baturaerdira joko duelarik".

Hots, c delakoa f(t)-ren etengune bat bada, hurrengoa beteko da:

$$S(c) = \frac{1}{2}\,[\lim_{t \to c-} f(t) + \lim_{t \to c+} f(t)].$$

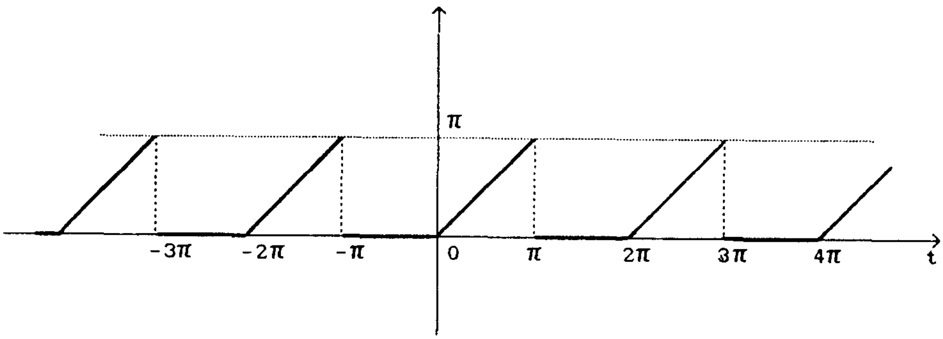


Adibidea.-Biz $[-\pi, \pi]$ tartean

$$f(t) = \begin{cases} 0, & -\pi \le t \le 0, \\ t, & 0 < t \le \pi, \end{cases}$$

eran definiturik dagoen funtzio periodikoa. Aurki bedi horri dagokion Fourier-en seriea. Adieraz bedi funtzioak etenguneetan nora konbergituko duen. Kalkula bedi zenbakizko seriearen balioa, $t = 0$ denean.

E: Funtzio periodiko honek ondoko adierazpen grafikoa du:



Fourier-en seriearen koefizienteak hurrengo eran kalkula daitezke:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} tdt = \frac{\pi}{2}\ ,$$

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos kt dt = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} t\cos kt dt = \frac{1}{\pi}\left|\frac{t\sin kt}{k} + \frac{\cos kt}{k^2}\right|_0^{\pi} = \frac{\cos k\pi - 1}{\pi k^2}\ .$$

k bakoitia bada, $a_k = -2/\pi k^2$ da.

k bikoitia bada, $a_k = 0$ dugu.

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin kt dt = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} t\sin kt dt = \frac{1}{\pi}\left|\frac{-t\cos kt}{k} + \frac{\sin kt}{k^2}\right|_0^{\pi} = -\ \frac{\cos k\pi}{k}\ .$$

k bakoitia bada, $b_k = 1/k$ da, eta k bikoitia bada, $b_k = -1/k$.

[3] adierazpenean ordezkatuta, ondoko seriea lor daiteke:

$$f(t) = \frac{\pi}{4} + \sum_{1}^{\infty} \left[\frac{\cos k\pi - 1}{\pi k^2} \cos kt - \frac{\cos k\pi}{k} \sin kt \right].$$

Edo, k konstantea (2n-1) balioaz ordezkatu eta seriea beste bitan deskonposatuz gero, orduan hurrengoa ondoriozta dezakegu:

$$f(t) = \frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi} \sum_{1}^{\infty} \frac{\cos(2n-1)t}{(2n-1)^2} + \sum_{1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \sin nt}{n}.$$

Seriea garatzen badugu, hasierako gaiak hauexek izango dira:

$$f(t) = \frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi} \left(\cos t/1^2 + \cos 3t/3^2 + \cos 5t/5^2 + \ldots\ldots \right) +$$

$$+ \left(\sin t/1 - \sin 2t/2 + \sin 3t/3 - \ldots\ldots \right).$$

Dirichlet-en teoremaren arabera, serieak f(t) funtziora konbergituko du ardatz osoan, $t = \pm(2n-1)\pi$ etenguneetan izan ezik, non albo-limiteen baturaerdira ($(\pi+0)/2 = \pi/2$-ra) joko duen.

$t = 0$ puntu jarrairako, ondoko zenbakizko seriea lortuko da:

$$f(0) = 0 = \frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi} \sum_{1}^{\infty} 1/(2n-1)^2 \longrightarrow \sum_{1}^{\infty} 1/(2n-1)^2 = \frac{\pi^2}{8},$$

non $t = 0$ kasurako $\cos(2n-1)t = 1$ eta $\sin(2n-1)t = 0$ diren.

1.2.2 Integrazio-tartearen aldaketa.

f(t) funtzioa 2p periododun funtzio periodikoa bada, orduan edozein m-tarako hurrengo berdintza beteko da:

$$\boxed{\int_{-p}^{p} f(t)dt = \int_{m}^{m+2p} f(t)dt.} \qquad [7]$$

m egokia aukeratuz, propietate honek Fourier-en koefizienteen kalkulua sinplifikatzea ahalbidetuko du.

[7] emaitza frogatzeko, integrazio-tartea hurrengo eran deskonposatuko da:

$$\int_{m}^{m+2p} f(t)dt = \int_{m}^{-p} f(t)dt + \int_{-p}^{p} f(t)dt + \int_{p}^{m+2p} f(t)dt = I_1 + I_2 + I_3,$$

eta $I_1 + I_3 = 0$ dela frogatu behar da.

Biz $I = \int_{c}^{d} f(t)dt$. I integralean

$$t = x - 2p \longrightarrow dt = dx, \quad t = c \longrightarrow x = c + 2p, \quad t = d \longrightarrow x = d + 2p$$

ordezkaketa eginez, eta $f(x) = f(x-2p)$ dela kontutan hartuz gero, $f(t)$ funtzioa 2p periododuna denez, hurrengoa lortuko dugu:

$$\int_{c}^{d} f(t)dt = \int_{c+2p}^{d+2p} f(x-2p)dx = \int_{c+2p}^{d+2p} f(x)dx \equiv \int_{c+2p}^{d+2p} f(t)dt.$$

$c = -p$ eta $d = m$ balioetarako, ondokoa ondoriozta daiteke:

$$\int_{-p}^{m} f(t)dt = \int_{p}^{m+2p} f(t)dt \longrightarrow \int_{m}^{-p} f(t)dt + \int_{p}^{m+2p} f(t)dt = 0.$$

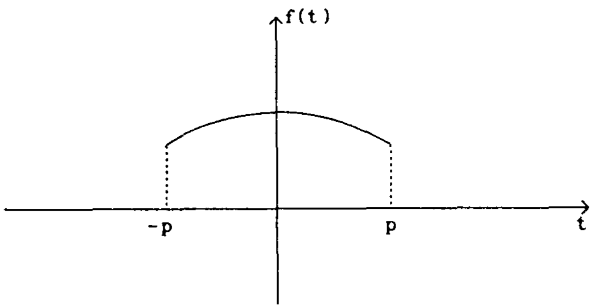
Eta $2p = 2\pi$ den kasuan, propietatea hurrengoa izango da:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt = \int_{m}^{m+2\pi} f(t)dt. \qquad [8]$$

1.3 Funtzio bakoiti eta bikoitien garapena

Gogora ditzagun hauen definizio eta propietateak.

A) $f(t) \equiv$ FUNTZIO BIKOITIA $\Leftrightarrow$ $f(-t) = f(t)$.



FUNTZIO BIKOITIA

Funtzioaren grafikoak ordenatu-ardatzarekiko simetria adierazten du. Beraz,

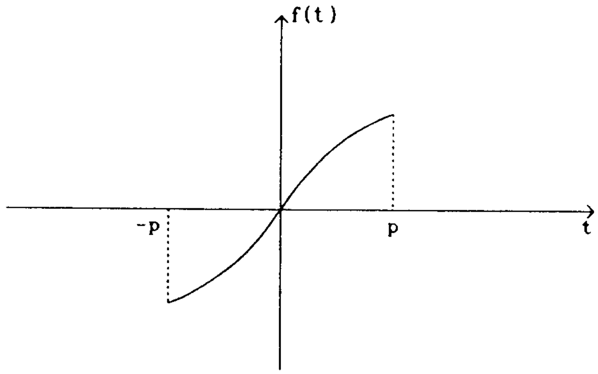
$$\boxed{\int_{-p}^{p} f(t)dt = 2\int_{0}^{p} f(t)dt} \qquad [9]$$

beteko da. Froga dezagun.

$$\int_{-p}^{p} f(t)dt = \int_{-p}^{0} f(t)dt + \int_{0}^{p} f(t)dt = \int_{0}^{p} f(-t)dt + \int_{0}^{p} f(t)dt = 2\int_{0}^{p} f(t)dt$$

B) $f(t) \equiv$ FUNTZIO BAKOITIA $\iff f(-t) = -f(t).$

Funtzio bakoitiaren grafikoa erreferentzi ardatzen jatorriarekiko simetrikoa da.



FUNTZIO BAKOITIA

Ondokoa beteko da:

$$\boxed{\int_{-p}^{p} f(t)dt = 0.} \qquad [10]$$

Froga dezagun.

$$\int_{-p}^{p} f(t)dt = \int_{-p}^{0} f(t)dt + \int_{0}^{p} f(t)dt = -\int_{0}^{-p} f(t)dt + \int_{0}^{p} f(t)dt =$$

$$= \int_{0}^{-p} f(-t)dt + \int_{0}^{p} f(t)dt = -\int_{0}^{p} f(t)dt + \int_{0}^{p} f(t)dt = 0.$$

Horretaz aparte, funtzio bakoiti eta bikoitien arteko biderkaketak hurrengo propietateak ditu:

[F.BIK]x[F.BIK] ≡ [F.BIK], [F.BAK]x[F.BAK] ≡ [F.BIK],

[F.BIK]x[F.BAK] ≡ [F.BAK], [F.BAK]x[F.BIK] ≡ [F.BAK].

Propietate hauek eta [9] eta [10] adierazpenek koefizienteen kalkulua sinplifikatuko dute.

FUNTZIO BIKOITIEN GARAPENA

Kasu honetan: f(t) ≡ F.BIK, coskt ≡ F.BIK, sinkt ≡ F.BAK ⇒

f(t)coskt ≡ FUNTZIO BIK, f(t)sinkt ≡ FUNTZIO BAK.

[9] eta [10] integralen arabera, koefizienteak kalkulatzeko [4], [5] eta [6] adierazpenak ondokoak dira:

$$\boxed{a_0 = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(t)dt, \quad a_k = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(t)\cos kt\,dt, \quad b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin kt\,dt = 0.}$$

Hau da, funtzio periodiko BIKOITI baten Fourier-en garapenak kosinu motako harmonikoak edukiko ditu soilik.

$$\boxed{f(t) = a_0/2 + \sum_1^{\infty} a_k \cos kt.} \qquad [11]$$

FUNTZIO BAKOITIEN GARAPENA

Orain, f(t) funtzioa bakoitia bada,

$$f(t)\cos kt \equiv \text{FUNTZIO BAK,} \qquad f(t)\sin kt \equiv \text{FUNTZIO BIK.}$$

izango dira, serieko koefizienteak ondokoak direlarik:

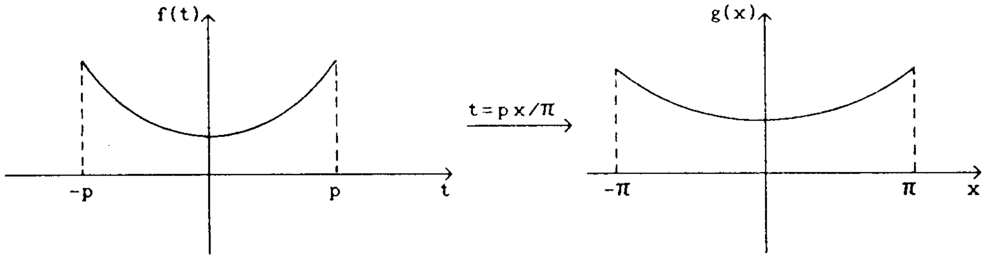
$$\boxed{a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt = 0, \quad a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos kt dt = 0, \quad b_k = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(t)\sin kt dt}$$

Hau da, funtzio BAKOITI baten Fourier-en garapenak, sinu motako harmonikoak edukiko ditu soilik.

$$\boxed{f(t) = \sum_1^{\infty} b_k \sin kt.} \qquad [12]$$

1.4 2p periododun funtzio periodikoaren Fourier-en seriea

Euler-en formulak ateratzeko 2p periododun funtzio periodikoak kontsideratu dira. 2p periododun funtzio periodikoetarako hedapena, abzisa-ardatzean egindako eskala-aldaketa soil batez lortuko da.



Biz f(t) delakoa 2p periododun funtzio periodikoa [-p,p] tartean.

$t = px/\pi \longrightarrow dt = pdx/\pi$; $t = -p$ bada, $x = -\pi$; $t = p$ bada, $x = \pi$

ordezkaketak, f(t) delakoa $[-\pi,\pi]$ tartean definitutako 2π periododun g(x) funtzio bilakatuko du.

Beraz, $g(x) = f(px/\pi)$ denerako, hurrengoa beteko da:

$$f(t) = f(t + 2p) \longrightarrow f(px/\pi) = f(px/\pi + 2p) = f[p(x + 2\pi)/\pi] \Rightarrow$$

$$g(x) = g(x + 2\pi).$$

$f(px/\pi)$ kasurako Fourier-en seriea,

$$f(px/\pi) = a_0/2 + \sum_{1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \qquad [13]$$

da, non koefizienteak

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(px/\pi)dx \quad [14], \qquad a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(px/\pi)\cos kx dx, \quad [15]$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(px/\pi)\sin kx dx \qquad [16]$$

diren.

Ordezkaketa desegiteko $x = \pi t/p$ eginez, orduan 2p periododun f(t) funtzio periodikorako Fourier-en

$$\boxed{f(t) = a_0/2 + \sum_{1}^{\infty} \left(a_k \cos\frac{k\pi t}{p} + b_k \sin\frac{k\pi t}{p} \right)} \qquad [17]$$

seriea lortuko da, zeinaren koefizienteak hurrengo hauek diren:

$$\boxed{a_0 = \frac{1}{p}\int_{-p}^{p} f(t)dt \qquad [18], \qquad a_k = \frac{1}{p}\int_{-p}^{p} f(t)\cos\frac{k\pi t}{p}dt, \qquad [19]}$$

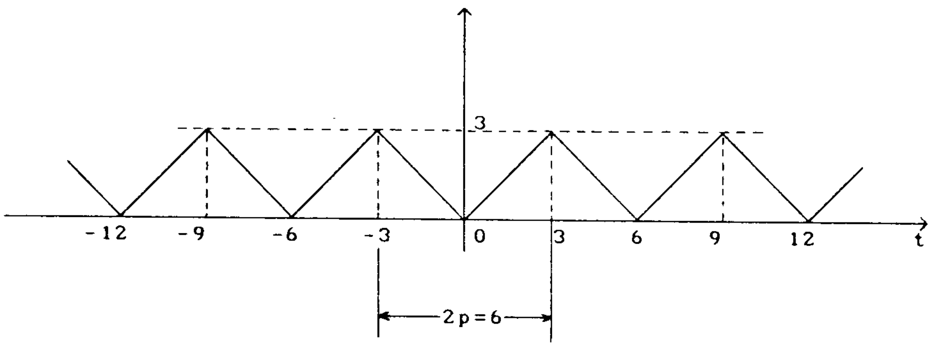
$$\boxed{b_k = \frac{1}{p}\int_{-p}^{p} f(t)\sin\frac{k\pi t}{p}dt.} \qquad [20]$$

Adibidea.- Lor bedi (-3, 3) tartean definituriko ondoko funtzio periodikoaren Fourier-en seriezko garapena:

$$f(t) = \begin{cases} -t, & -3 < t < 0, \\ t, & 0 \leq t < 3. \end{cases}$$

....

E: 2p = 6 periododun funtzio periodikoa da, beraren adierazpen grafikoa ondokoa delarik:



Funtzio bikoitia denez, hots, ordenatu-ardatzarekiko simetrikoa, garapenak kosinu motako harmonikoak (b_k = 0) dauzka soilik. Funtzio bikoitietarako [18]-[19] formulazioa ondokoa da:

$$a_0 = \frac{2}{p}\int_0^p f(t)dt = \frac{2}{3}\int_0^3 tdt = \frac{1}{3}\left|t^2\right|_0^3 = 3,$$

$$a_k = \frac{2}{p}\int_0^p f(t)\cos\frac{k\pi t}{p}dt = \frac{2}{3}\int_0^3 t\cos\frac{k\pi t}{3}dt = \frac{2}{3}\left|\frac{3t}{k\pi}\sin\frac{k\pi t}{3} + \frac{9}{k^2\pi^2}\cos\frac{k\pi t}{3}\right|_0^3$$

$$\longrightarrow a_k = 6(\cos k\pi - 1)/k^2\pi^2 \longrightarrow a_k = \begin{cases} -12/k^2\pi^2, & \text{k bakoitia denean,} \\ 0, & \text{k bikoitia denean.} \end{cases}$$

[17] seriean ordezkatu ondoren,

$$f(t) = \frac{3}{2} + \sum_1^{\infty} [6(\cos k\pi - 1)/k^2\pi^2]\cos\frac{k\pi t}{3}$$

ondoriozta daiteke.

Edo, beste era batetan, k = 2n-1 eginez,

$$f(t) = \frac{3}{2} - 12/\pi^2 \sum_{1}^{\infty} [1/(2n-1)^2]\cos \frac{(2n-1)\pi t}{3}$$

t = 0 denerako, aurreko adibideko zenbakizko seriearen balioa ondorioztatuko da:

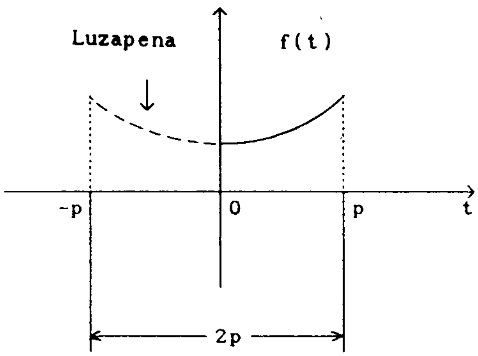
$$t = 0 \longrightarrow f(0) = 0 = 3/2 - 12/\pi^2 \sum_{1}^{\infty} 1/(2n-1)^2 \longrightarrow \sum_{1}^{\infty} 1/(2n-1)^2 = \pi^2/8.$$

1.5 Funtzio aperiodikoen garapena

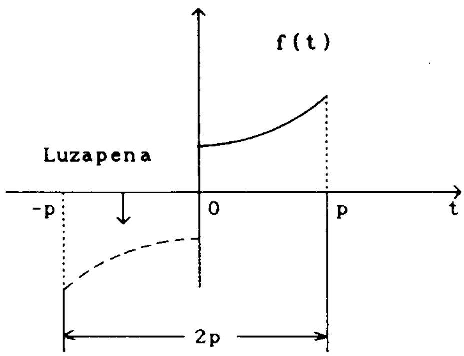
Demagun problema jakin batetako baldintzek, f(t) funtzio aperiodiko batek [0, p] tartean dituen balioak kontutan hartzea eskatzen dutela soilik. Era honetan izanik, funtzioaren periodikotasun-baldintzek eta [0, p] tartetik kanpo hartuko dituen balioek ez dute eraginik izango probleman. Orduan, f(t) funtzioa [0, p] tartean gehien komeni zaigun moduan defini dezakegu, eta horrela 2p periododun funtzio periodiko baten Fourier-en garapenaz balia gaitezke. [-p, 0] tartean egindako f(t)-ren definizioari f(t) funtzioaren **luzapena** deritzo. Era horretan, "kosinu" ala "sinu" harmonikoetako seriezko garapena komeni den arau, **bakoitia** ala **bikoitia** izango da, hurrenez hurren.

Dirichlet-ek dioenez, garbi dago Fourier-en garapenak [0, p] tartetik kanpo funtzio periodiko laguntzailera joko duela. Dena den, hedapen-mota kontutan hartu gabe, serieak [0, p] tartean emandako funtzioa adieraziko du.

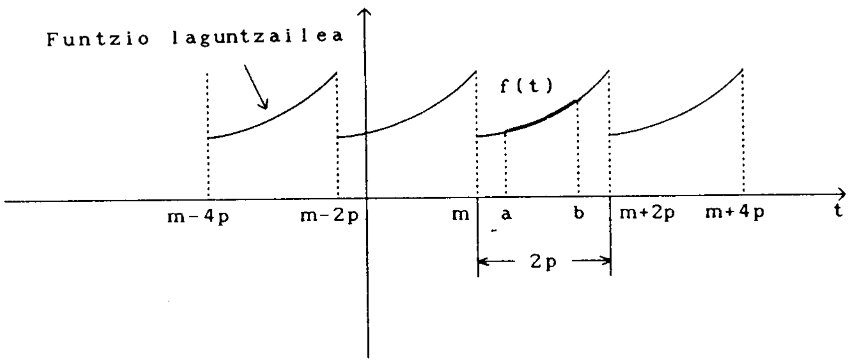
Orokorrean, f(t) funtzioa [a,b] tarte jakin batetan ezagutu behar bada, nahikoa izango da $2p \geq |b-a|$ periododun funtzio periodiko laguntzailea planteatzea, [a,b] tartean f(t) bera izango delarik. Dirichlet-en teoremaren arabera, lortuko den Fourier-en serieak funtziora konbergituko du, kontsideratutako tartean. Adierazitako luzapenak, grafikoki ondoko irudietan azaltzen dira:



LUZAPEN BIKOITIA



LUZAPEN BAKOITIA



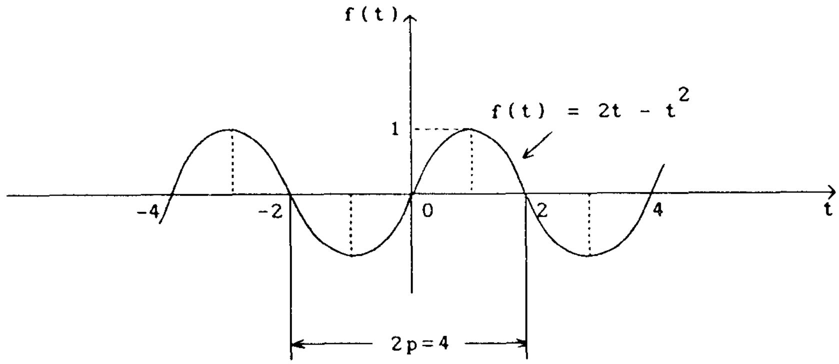
[a,b] TARTEAN f(t) BARNEAN DAUKAN FUNTZIO PERIODIKO LAGUNTZAILEA

Adibidea.- Aurkitu (0,2) tartean $f(t) = 2t - t^2$ parabolara konbergituko duten sinu eta kosinuetako seriezko garapenak.

---

a) <u>Sinuetako seriezko garapena</u>

(-2,0) tartera egindako luzapen batez, (-2,2) tartean definitutako $2p = 4$ periododun funtzio periodiko bat erabiliko da.



LUZAPEN BAKOITIA

p = 2 kasuko funtzio bakoitietarako formulak aplikatu behar dira.

$$a_0 = a_k = 0, \qquad b_k = \frac{2}{p}\int_0^p f(t)\sin\frac{k\pi t}{p}\,dt = \int_0^2 (2t-t^2)\sin\frac{k\pi t}{2}\,dt =$$

$$= \left| \frac{-2(2t-t^2)}{k\pi}\cos\frac{k\pi t}{2} + \frac{8(1-t)}{k^2\pi^2}\sin\frac{k\pi t}{2} - \frac{16}{k^3\pi^3}\cos\frac{k\pi t}{2} \right|_0^2 \longrightarrow$$

$$b_k = \frac{16(1-\cos k\pi)}{k^3\pi^3} = \begin{cases} \dfrac{32}{k^3\pi^3}, & k = 2n-1 \text{ denean, } n = 1,2,3, \ldots \\ 0, & k = 2n \text{ denean, } n = 1,2,3, \ldots \end{cases}$$

[17] serie trigonometrikoan ordezkatu ondoren,

$$f(t) = \sum_1^\infty b_k \sin\frac{k\pi t}{2} = \frac{16}{\pi^3}\sum_1^\infty \frac{1-\cos k\pi}{k^3}\sin\frac{k\pi t}{2}$$

lor daiteke.

Edo, k delakoa (2n-1) balioaz ordezkatuz gero,

$$f(t) = \frac{32}{\pi^3} \sum_{1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^3} \sin \frac{(2n-1)\pi t}{2}$$

ondoriozta dezakegu.

Emaitza osagarri gisa, t=1 kasu konkreturako, hurrengo zenbakizko seriea lortuko da:

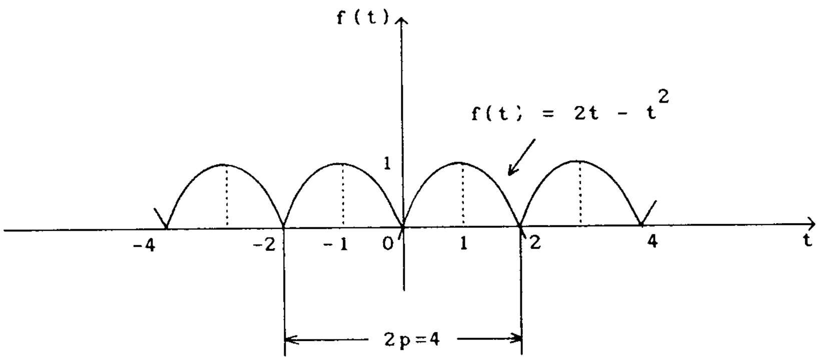
$$f(1) = 1 = \frac{32}{\pi^3} \sum_{1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^3} \sin \frac{(2n-1)\pi}{2} = \frac{32}{\pi^3} \sum_{1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)^3} \longrightarrow$$

$$\sum_{1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)^3} = \frac{\pi^3}{32} .$$

---

a) Kosinuetako seriezko garapena

Orain, irudiak adierazten duenez, luzapen bikoitia egin da.



LUZAPEN BIKOITIA

Koefizienteak ondoko hauek dira:

$$b_k = 0, \qquad a_0 = \frac{2}{p}\int_0^p f(t)dt = \int_0^2 (2t - t^2)dt = \left|t^2 - t^3/3\right|_0^2 = \frac{4}{3},$$

$$a_k = \frac{2}{p}\int_0^p f(t)\cos\frac{k\pi t}{p}\,dt = \int_0^2 (2t - t^2)\cos\frac{k\pi t}{2}\,dt =$$

$$= \left| \frac{2(2t - t^2)}{k\pi}\sin\frac{k\pi t}{2} + \frac{8(1 - t)}{k^2\pi^2}\cos\frac{k\pi t}{2} + \frac{16}{k^3\pi^3}\sin\frac{k\pi t}{2} \right|_0^2 \quad \longrightarrow$$

$$a_k = \frac{-8(1+\cos k\pi)}{k^2\pi^2} = \begin{cases} \dfrac{-16}{k^2\pi^2}, & k = 2n \text{ denean}, \quad n = 1,2,3,\ldots \\ 0, & k = 2n-1 \text{ denean}, \ n = 1,2,3,\ldots \end{cases}$$

Lortuko den Fourier-en seriea, ondokoa da:

$$f(t) = a_0/2 + \sum_1^\infty a_k\cos\frac{k\pi t}{2} = \frac{2}{3} - \frac{8}{\pi^2}\sum_1^\infty \frac{1+\cos k\pi}{k^2}\cos\frac{k\pi t}{2}.$$

k delakoa 2n balioaz ordezkatu ondoren, hurrengo eran idatziko da:

$$f(t) = \frac{2}{3} - \frac{4}{\pi^2}\sum_1^\infty \frac{1}{n^2}\cos n\pi t.$$

Kasu honetan, t = 0 eginez, ondoko emaitzara irits gaitezke:

$$f(0) = 0 = \frac{2}{3} - \frac{4}{\pi^2}\sum_1^\infty \frac{1}{n^2} \quad \longrightarrow \quad \sum_1^\infty \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

2. FOURIER-EN TRANSFORMATURAKO SARRERA

2.1. Fourier-en seriearen beste adierazpen batzu

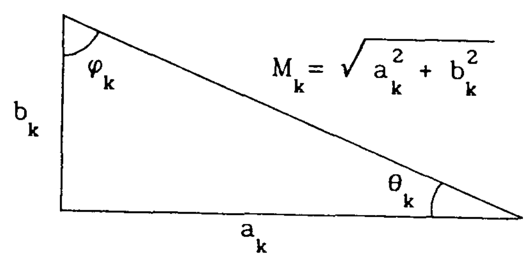
[3] jatorrizko adierazpen trigonometrikoaz gain, Fourier-en serieak beste adierazpen batzu onartuko ditu, zeintzuek zenbait bibrazio-problemetarako abantailak ekarriko dituzten. Gainera, Fourier-en eta Laplace-ren integral transformatuak eta eragile kalkuluaren metodo modernoak definitzeko bideak irekiko dituzte.

2.1.1 Bigarren era trigonometrikoa.

Bigarren era hau aurkitzeko, nahikoa da 2p periododun funtzio periodikoetarako jatorrizko serie trigonometrikoaren maiztasun bereko sinu eta kosinu harmonikoen batura aurkitzea.

$$f(t) = a_0/2 + \sum_1^{\infty} (a_k \cos\frac{k\pi t}{p} + b_k \sin\frac{k\pi t}{p}). \qquad [17]$$

Horretarako irudiko φ_k eta θ_k fase-angeluak definitu behar dira modu honetan:



$$\cos\theta_k = a_k/M_k, \quad \sin\theta_k = b_k/M_k, \quad \cos\varphi_k = b_k/M_k, \quad \sin\varphi_k = a_k/M_k.$$

$k\pi/p$ maiztasun bereko harmonikoen baturarako, ondokoa izango dugu:

$$a_k \cos\frac{k\pi t}{p} + b_k \sin\frac{k\pi t}{p} = M_k\left[(a_k/M_k)\cos\frac{k\pi t}{p} + (b_k/M_k)\sin\frac{k\pi t}{p}\right] =$$

$$= M_k\left[\cos\frac{k\pi t}{p}\cos\theta_k + \sin\frac{k\pi t}{p}\sin\theta_k\right] = M_k\left[\cos\frac{k\pi t}{p}\sin\varphi_k + \sin\frac{k\pi t}{p}\cos\varphi_k\right].$$

Orduan, identitate trigonometrikoak aplikatuz, [17] seriea hurrengo adierazpenaren bidez idatz daiteke,

$$f(t) = M_0 + \sum_1^{\infty} M_k \cos\left(\frac{k\pi t}{p} - \theta_k\right) \equiv M_0 + \sum_1^{\infty} M_k \cos(k\omega t - \theta_k), \qquad [21]$$

$$f(t) = M_0 + \sum_1^{\infty} M_k \sin\left(\frac{k\pi t}{p} + \varphi_k\right) \equiv M_0 + \sum_1^{\infty} M_k \sin(k\omega t + \varphi_k), \qquad [22]$$

non

$M_0 = a_0/2,\quad M_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2}$ $\equiv$ *k. harmonikoaren anplitudea,*

$\theta_k = tg^{-1}(b_k/a_k)$ $\equiv$ *k. harmonikoaren uhin kosinuidal puru batekiko atzerapena neurtzen duen fase-angelua,*

$\varphi_k = tg^{-1}(a_k/b_k) = \frac{\pi}{2} - \theta_k$ $\equiv$ *k. harmonikoaren uhin sinusoidal puru batekiko aurrerapena neurtzen duen fa_ se-angelua, eta*

$\omega = \pi/p$ $\equiv$ *oinarrizko maiztasun angeluarra*

baitira.

2.1.2 Era exponentzial konplexua.

Ingeniaritzarako zenbait aplikaziotan, Elektroteknia eta sistemen kontroleko problemetan adibidez, komenigarria da Fourier-en serieak $e^{\pm kiw}$ exponentzial konplexuen funtzioan idaztea. Horretarako, [17] seriean funtzio trigonometrikoak beren exponentzial baliokideez ordezkatzea nahikoa da:

$$\cos k\omega t = (e^{kiwt} + e^{-kiwt})/2, \qquad \sin k\omega t = (e^{kiwt} - e^{-kiwt})/2i.$$

Era honetan, honakoa ondoriozta daiteke:

$$f(t) = a_0/2 + \sum_1^{\infty} (a_k \cos k\omega t + b_k \sin k\omega t), \quad \omega = \pi/p \quad \longrightarrow$$

$$f(t) = a_0/2 + \sum_1^{\infty} \left[a_k \frac{e^{kiwt} + e^{-kiwt}}{2} + b_k \frac{e^{kiwt} - e^{-kiwt}}{2i} \right] =$$

$$= a_0/2 + \sum_1^{\infty} \left[\frac{a_k - ib_k}{2} e^{kiwt} + \frac{a_k + ib_k}{2} e^{-kiwt} \right].$$

Koefizienteak finkatutakoan,

$$c_0 = a_0/2\,, \qquad c_k = \frac{a_k - ib_k}{2}\,, \qquad c_{-k} = \frac{a_k + ib_k}{2}\,, \qquad [23]$$

orduan, f(t)-ren Fourier-en seriearen era exponentzial konplexua lortuko dugu. Hau da:

$$f(t) = c_0 + \sum_1^{\infty} \left[c_k e^{kiwt} + c_{-k} e^{-kiwt} \right] = c_0 + \sum_1^{\infty} c_k e^{kiwt} + \sum_{-1}^{-\infty} c_k e^{kiwt} \Rightarrow$$

$$\boxed{f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{kiwt}.} \qquad [24]$$

[17] serie trigonometrikoaren a_0, a_k eta b_k koefizienteen araberako definizioetatik, c_0 eta c_k koefizienteak zuzenean baliozta ditzakegu.

$$\boxed{c_0 = a_0/2 = \frac{1}{2p}\int_{-p}^{p} f(t)dt.} \qquad [25]$$

$$c_k = (a_k - ib_k)/2 = \frac{1}{2p}\int_{-p}^{p} f(t)\cos k\omega t dt - \frac{i}{2p}\int_{-p}^{p} f(t)\sin k\omega t dt =$$

$$\frac{1}{2p}\int_{-p}^{p} f(t)[\cos k\omega t - i\sin k\omega t]dt \longrightarrow \boxed{c_k = \frac{1}{2p}\int_{-p}^{p} f(t)e^{-kiwt}dt.} \qquad [26]$$

$$c_{-k} = (a_k + ib_k)/2 = \frac{1}{2p}\int_{-p}^{p} f(t)\cos k\omega t dt + \frac{i}{2p}\int_{-p}^{p} f(t)\sin k\omega t dt =$$

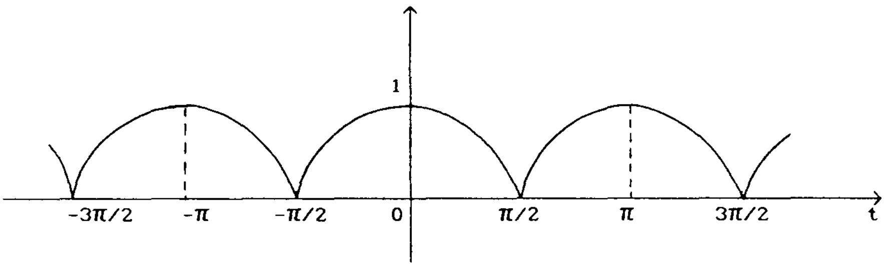
$$\frac{1}{2p}\int_{-p}^{p} f(t)[\cos k\omega t + i\sin k\omega t]dt \longrightarrow \boxed{c_{-k} = \frac{1}{2p}\int_{-p}^{p} f(t)e^{kiwt}dt.} \qquad [27]$$

Serie konplexuaren koefizienteak, [25], [26] eta [27] direlakoak alegia, formula bakar batetan konbina daitezke, edozein azpiindizetarako, ondoko eran kalkula ditzakegularik:

$$c_k = \frac{1}{2p}\int_{-p}^{p} f(t)e^{-kiwt}dt, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm \ldots \qquad [28]$$

Adibidea.- Aurki bedi ondoko funtzioa luzatu ondoren lortutako funtzio periodikoaren Fourier-en seriearen era konplexua:

$$f(t) = \cos t, \qquad -\pi/2 < t < \pi/2.$$



E: Serie konplexuaren formulazioa ondokoa da:

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{kiwt}, \qquad c_k = \frac{1}{2p}\int_{-p}^{p} f(t)e^{-kiwt}dt.$$

Garatzeko funtzioa, kosinu funtzioa da. Periodoa $2p = \pi$ denez, maiztasuna $\omega = \pi/p = 2$ da. Ondorioz, hurrengoa dugu:

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{2kit}, \qquad c_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} f(t)e^{-2kit}dt.$$

f(t) era exponentzial konplexuan idatziz gero,

$$f(t) = \cos t = (e^{it} + e^{-it})/2$$

alegia, c_k-ren balioa kalkula daiteke, hots,

$$c_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos t\ e^{-2kit}dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} (e^{it} + e^{-it})e^{-2kit}dt =$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} (e^{(1-2k)it} + e^{-(1+2k)it})dt = \frac{1}{2\pi}\left| \frac{e^{(1-2k)it}}{(1-2k)i} - \frac{e^{-(1+2k)it}}{(1+2k)i} \right|_{-\pi/2}^{\pi/2} =$$

$$\frac{1}{2\pi}\left[\frac{e^{(1-2k)i\pi/2} - e^{-(1-2k)i\pi/2}}{(1-2k)i} - \frac{e^{-(1+2k)i\pi/2} - e^{(1+2k)i\pi/2}}{(1+2k)i} \right].$$

Exponentzial hauek sinplifikatzeko, Euler-en formulak erabiliko dira, hau da,

$$e^{wi} = \cos w + i\sin w, \qquad e^{-wi} = \cos w - i\sin w \quad \Rightarrow$$

$$e^{(1-2k)i\pi/2} = e^{\pi i/2}e^{-k\pi i} = (\cos\pi/2+i\sin\pi/2)(\cos\pi-i\sin\pi)^k = i(-1)^k,$$

$$e^{-(1-2k)i\pi/2} = e^{-\pi i/2}e^{k\pi i} = (\cos\pi/2-i\sin\pi/2)(\cos\pi+i\sin\pi)^k = -i(-1)^k,$$

$$e^{-(1+2k)i\pi/2} = e^{-\pi i/2}e^{-k\pi i} = (\cos\pi/2-i\sin\pi/2)(\cos\pi-i\sin\pi)^k = -i(-1)^k,$$

$$e^{(1+2k)i\pi/2} = e^{\pi i/2}e^{k\pi i} = (\cos\pi/2+i\sin\pi/2)(\cos\pi+i\sin\pi)^k = i(-1)^k.$$

Modu honetan, hurrengoa ondoriozta daiteke:

$$c_k = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{2(-1)^k i}{(1-2k)i} + \frac{2(-1)^k i}{(1+2k)i}\right] = \frac{1}{\pi}\,\frac{(-1)^k[1+2k+1-2k]}{1-4k^2} = \frac{2(-1)^k}{\pi(1-4k^2)}$$

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{2kit} = \frac{2}{\pi}\sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{1-4k^2}\, e^{2kit}.$$

Funtzio honi dagokion serie trigonometrikoa lortu nahi bada, nahikoa da [23] ekuazioa a_k eta b_k koefizienteekiko ebaztea, hots,

$$a_0 = 2c_0\ , \qquad a_k = c_k + c_{-k}\ , \qquad b_k = i(c_k - c_{-k}),$$

eta balioak ordezkatuz, ondokoa lor daiteke:

$$c_0 = \frac{2}{\pi}\ , \qquad c_k = \frac{2(-1)^k}{\pi(1-4k^2)}\ , \qquad c_{-k} = \frac{2(-1)^{-k}}{\pi(1-4k^2)} = c_k.$$

Honela, [17] serierako hurrengoa ondorioztatu da:

$$a_0 = \frac{4}{\pi}\ , \qquad a_k = \frac{4(-1)^k}{\pi(1-4k^2)}\ , \qquad b_k = 0 \qquad \Rightarrow$$

$$f(t) = a_0/2 + \sum_{1}^{\infty} (a_k \cos \frac{k\pi t}{p} + b_k \sin \frac{k\pi t}{p}) = \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi}\sum_{1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(1-4k^2)} \cos 2kt.$$

Ariketa osagarri gisa, froga bitez ondoko erlazioak:

$$a_0 = \frac{4}{\pi}\int_0^{\pi/2} \cos t\,dt = \frac{4}{\pi}\ , \qquad a_k = \frac{4}{\pi}\int_0^{\pi/2} \cos t \cos 2kt\ dt = \frac{4(-1)^k}{\pi(1-4k^2)}\ .$$

2.2 Fourier-en integraleranzko bilakaera

Fourier-en integralak, ingeniaritzako problemetan sarritan agertzen diren perturbazio aperiodikoen menpeko sistemen analisia ahalbidetuko du. Fourier-en integralera heltzeko, periodoa infinitura doaneko funtzio periodikoen Fourier-en seriezko garapenaren limitearen ideia kontsideratu da.

Orientazio gisa, dakusagun nola hel daitekeen funtzio aperiodiko baten Fourier-en seriezko garapenera, f(t) funtzio periodiko baten Fourier-en seriearen era exponentzial konplexutik hasita.

$$f(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_k e^{kiwt} \quad [24], \qquad c_k = \frac{1}{2p}\int_{-p}^{p} f(t)e^{-kiwt}dt, \quad [28]$$

[28]-a $t \equiv x$ aldagai laguntzaileaz [24]-an ordezkatuz eta 2p periodoa $2\pi/\omega$ balioaz aldatuz gero, honakoa ondoriozta daiteke:

$$f(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-p}^{p} f(x)e^{-kiwx}dx \right] \omega e^{kiwt}. \qquad [29]$$

Demagun orain, 2p periodoa mugagabe haziz doala, eta ondorioz, $\omega = \pi/p$ harmoniko jarraien arteko $\Delta\omega$ maiztasun-diferentziak zerora joko duela. Edozein harmonikoren maiztasunari, hots, edozein $k\omega \equiv k\Delta\omega$ delakori, $(k\Delta\omega \longrightarrow \omega)$ espektro jarraiaren maiztasun aldagai orokorra dagokio.

Hau da, $p \longrightarrow \infty$ doaneko limitea aplikatuz, $\Delta\omega \longrightarrow d\omega$, f(t) funtzio aperiodikorako hurrengoa idatz daiteke:

$$f(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-p}^{p} f(x)e^{-kiwx}dx \right] e^{kiwt}\Delta\omega \quad \xrightarrow{p \to \infty}$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-iwx}dx \right] e^{iwt}d\omega. \qquad [30]$$

Defini dezagun $F(\omega)$:

$$\boxed{F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-iwt}dt.} \qquad [31]$$

Orduan, f(t) funtzioari dagokion adierazpena ondokoa da:

$$\boxed{f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{iwt}d\omega.} \qquad [32]$$

[31]-[32] ekuazioek f(t)-ren Fourier-en transformazioa definituko dute. [31] transformatu zuzenak, funtzioa maiztasun-eremuan (maiztasun-espektro jarraietako multzoan) definituko du. [32] alderantzizko transformatua, ordea, denborarekiko adierazpena da.

Ondoko notazioa oso erabilia da:

$$F(\omega) = \mathfrak{F}\,[f(t)]\,, \qquad f(t) = \mathfrak{F}^{-1}[F(\omega)].$$

Fourier-en transformazioaren aplikazio praktikoan, lan espezializatuetan bilduriko transformatu-pareetako taulak erabili ohi dira.

III. GAIA: ERAGILE-KALKULUA. LAPLACE-REN TRANSFORMATUA.

1. ERAGILE-KALKULURAKO SARRERA. DEFINIZIOAK

2. LAPLACE-REN TRANSFORMATU ZUZENA. PROPIETATEAK

3. LAPLACE-REN ALDERANTZIZKO TRANSFORMATUA

4. LAPLACE-REN TRANSFORMATUAREN APLIKAZIO NAGUSIAK

1. ERAGILE-KALKULURAKO SARRERA. DEFINIZIOAK

1.1 Sarrera eta bilakaera historikoa

Laplace-ren transformatua ingeniaritzako problema askoren tratamendurako interes handiko tresna matematikoa da. Honek, ingeniaritzako problema horiei asoziaturiko eredu matematikoen ebazpena, nabarmenki sinplifikatuko du.

Laplace-ren transformazio integrala definitzen duten eragileak aplikatuta sortuko den kalkuluari, Eragile-Kalkulua deritzo. Beraren aitzindaritzat Oliver Heaviside (1850-1925) matematikari eta fisikari ingelesa kontsidera dezakegu, berak oinarri matematiko sendorik gabe, "On operators in mathematical physics" (1893) lanean eragile-kalkulua proposatu baitzuen. Orokorki, emaitza zehatzak lortu zituen. Urte batzu beranduago, Carson-ek eragile-metodoen justifikazio-printzipio bat lortu zuen (Physical Review, 1917), eta geroago Bromwick eta Wagner izango ziren alderantzizko transformatuaren formulazioa proposatuko zutenak. Gaur egun, eragile-metodoa Laplace-ren kasu partikularra den Fourier-en transformazioaren bidez justifika daiteke.

1.2 Fourier-en transformatuarekiko lotura

Eskematikoki eta orientazio gisa, ikus dezagun Fourier-en transformatutik Laplace-ren transformaturanzko eboluzioa zertan datzan.

Fourier-en transformatua, Fourier-en serieen bidez azterrezina den perturbazio aperiodikoen analisitik sortzen da (perturbazio aperiodikoa barnean daukan funtzio periodikoaren Fourier-en seriearen limitea periodoa infinitura doanean kontsideratzetik).

Fourier-en seriearen era exponentzial konplexua:

$$f(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} C_n e^{jn\pi t/p} \iff C_n = 1/2p \int_{-p}^{p} e^{-jn\pi t/p} f(t)dt.$$

Fourier-en transformatuaren formulazioa:

Aurreko adierazpenetan $p \longrightarrow \infty$ doaneko limitea hartu eta $\omega = n\pi/p$ egin ondoren, ondoko formuletara iritsiko gara:

Alderantzizko transformatua		Transformatu zuzena
$f(t) = 1/2\pi \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega t} F(\omega) d\omega$	$\Longleftrightarrow$	$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega t} f(t) dt$

Transformatu honetatik Laplace-ren transformaturanzko eboluzioa bi urratsetan oinarrituko da. Hasteko, $t < 0$ denean identikoki nuluak diren izaera denboraleko funtzioen kasua aztertzean, Fourier-en transformazio unilatero delakorantz garamatza. $F(\omega)$ funtzioaren behe-limitean zero ordezkatuta, hurrengoa ondoriozta daiteke:

$$f(t) = 1/2\pi \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega t} F(\omega) d\omega \quad \Longleftrightarrow \quad F(\omega) = \int_{0}^{\infty} e^{-j\omega t} f(t) dt.$$

Bigarren urrats batetan, $F(\omega)$ integralaren konbergentzi problemek Laplace-ren transformaziorantz eramango gaituzte. Adibidez, Heaviside-ren $u_0(t)$ funtzioak ez du Fourier-en transformaturik onartzen, zeren kasu honetarako

$$F(\omega) = \int_{0}^{\infty} e^{-j\omega t} dt = \left| \frac{\cos\omega t - j \sin\omega t}{-j\omega} \right|_{0}^{\infty}$$

integrala zentzugabea baita. Murrizketa hau eta beste batzu ekiditeko, $f(t)$-ren $e^{-\sigma t}$($\sigma > 0$) motako faktore indargetzailea erantsiko da, zeinak integralaren konbergentziari lagunduko baitio. Horrela, hurrengo definizioak ondorioztatuko dira:

$$F(\omega) = \int_{0}^{\infty} e^{-j\omega t}[e^{-\sigma t} f(t)] dt = \int_{0}^{\infty} e^{-(\sigma + j\omega)t} f(t) dt = F(\sigma + j\omega),$$

$$f(t) = 1/2\pi \int_{-\infty}^{\infty} e^{(\sigma+j\omega)t} F(\sigma + j\omega) d\omega.$$

Azkenik, $\sigma + j\omega = p$, $d\omega = dp/j$ ordezkaketa eginda, adierazpen hauetara irits gaitezke:

Transformatu zuzena	Alderantzizko transformatua
$F(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t)dt,$	$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma - j\omega}^{\sigma + j\omega} e^{pt} F(p)dp,$

zeintzuek Laplace-ren transformazio unilateroa eragile-kalkulu modernoaren oinarritzat definituko duten. Eskuineko integralari Mellin-Fourier-en inbertsio konplexuko integrala deritzo.

1.3 Definizioak eta notazioa

Transformatu zuzena.- Biz f(t) edozein $t > 0$-tarako definitutako aldagai errealeko funtzioa, non $t < 0$ denean $f(t) = 0$ den. Orduan, ondoko integralaren bidez lortutako F(p) funtzioari, Laplace-ren transformatua deritzo, hots,

$$\mathcal{L}[f(t)] = F(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t)dt,$$

non p parametroa (normalean konplexua, $p = \sigma + j\omega$), t-rekiko independentea baita.

f(t) funtzioa **sortzailea, jatorrizkoa** edo **objektua** da, eta F(p) funtzioa **transformatua** edo **irudia**. Ohi denez, funtzio sortzailea minuskulaz, eta transformatua dagokion majuskulaz idatziko ditugu.

Alderantzizko transformatua.- Inbertsio konplexuaren bidezko ondoko integralaz emanik dator:

$$\mathfrak{L}^{-1}[F(p)] = f(t) = \frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma-j\omega}^{\sigma+j\omega} e^{pt}F(p)dp.$$

Integral honek konplexuen alorrean balioztatzeko dituen zailtasunak kontutan hartuz, formula honen aplikazioa garrantzizkoa izango da. Praktikan, problema hau Laplace-ren transformazioari dagozkion funtzio asoziatuez osoturiko tauletara joaz (transformatu-pareen kodifikazioaz) ebatziko da.

Erabili ohi den notazioa hurrengoa da:

Transformatu zuzena: $f(t) \xrightarrow{\mathfrak{L}} F(p).$

Alderantzizko transformatua: $F(p) \xrightarrow{\mathfrak{L}^{-1}} f(t).$

Azkenik, eragile-kalkuluaren alternatiba moduan, **Carson**-en transformazio funtzionala dugu. Honek baditu abantailak, baina Laplace-ren transformatua baino gutxiago erabiltzen da.

Carson-en transformatua:

$$\boxed{\mathfrak{L}_c[f(t)] = p\int_0^{\infty} e^{-pt}f(t)dt = p\mathfrak{L}[f(t)] = pF(p).}$$

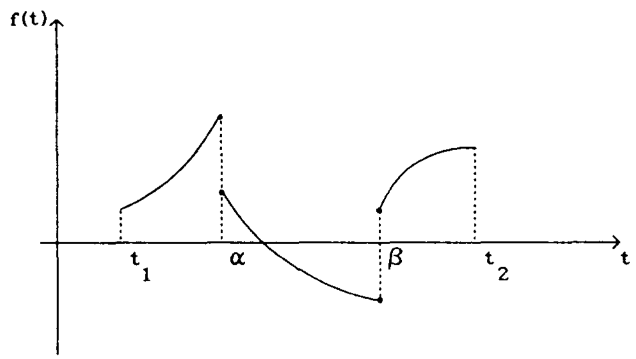
Transformatu bien arteko ezberdintasun bakarra, parametroa eta Laplace-ren integralaren arteko biderkaketan datza.

1.4. Transformatuaren existentzia

Laplace-ren transformatuaren existentzia, definizioko integral inpropioaren konbergentziaz baldintzatuta dago. Konbergentzia hau bermatuko duten baldintzak aztertu baino lehen, ikus ditzagun bi definizio hauek:

1.4.1. Funtzio quasijarraiak.- f(t) funtzioa quasijarraia edo zatika erregularra da $[t_1, t_2]$ tartean, baldin eta tarte horretan bornaturik badago, eta beraren maximoen, minimoen eta etenguneen kopurua gehienez finitua bada.

Ondoko grafikoan funtzio-mota honetako adibide bat dugu, non etenguneak bi barne-puntu diren.



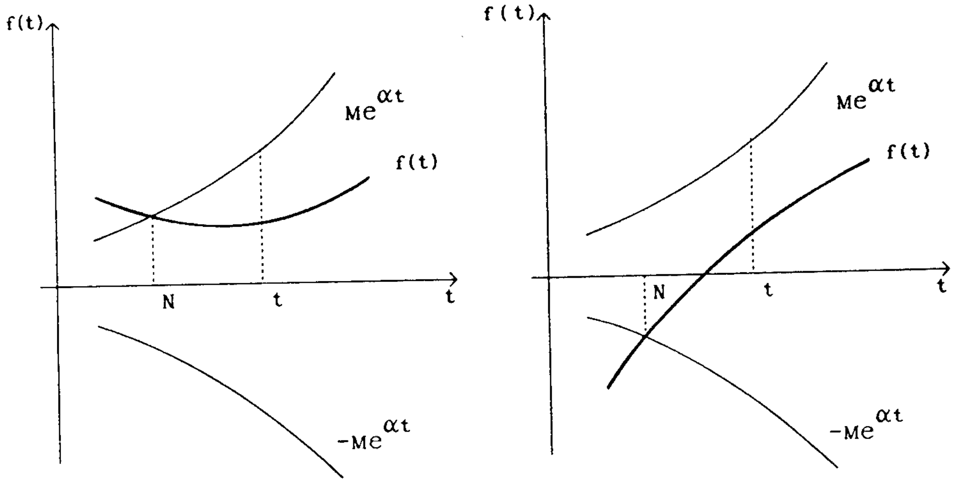
1.4.2. Ordena exponentzialeko funtzioak.- f(t) funtzioa ordena exponentzialekoa dela diogu, baldin eta existitzen badira α, $M > 0$ eta $N > 0$ konstanteak, zeintzuek

$$|e^{-\alpha t}f(t)| = e^{-\alpha t}|f(t)| < M, \quad \forall t > N \iff \lim_{t \to \infty} e^{-\alpha t}|f(t)| = M$$

beteko duten.

Hots, $\forall t > N$ -tarako, $-Me^{\alpha t} < f(t) < Me^{\alpha t}$ beteko da.

Beraz, funtzio bat ordena exponentzialekoa bada, $t \longrightarrow \infty$ doanean ez da beharrezkoa bornaturik egotea, baina ez da haziko funtzio exponentzial arrunt baten anizkoitz bat baino abiadura handiagoz. Bornapen hau ondoko grafikoetan ikus dezakegu:



Bestalde,

$e^{-\alpha t}|f(t)| < M$ bada, orduan $\forall\beta > \alpha$ -tarako $e^{-\beta t}|f(t)| < M$ izango dugu. Ezberdintza hau betetzen duten β balioen multzoaren α_0 behe-muturrari, f(t) funtzioaren **konbergentzi abzisa** deritzo.

1.4.3. Existentziaren teorema.- f(t) delakoa funtzio quasijarraia eta ordena exponentzialekoa bada, orduan beraren integralaren transformatuak,

$$F(p) = \int_0^\infty e^{-pt} f(t)dt$$

alegia, konbergentzi abzisa baino handiagoa den edozein p baliotarako absolutuki konbergituko du.

Frogapena: Limitearen existentzia frogatu behar da:

$$\lim_{b\to\infty} |F(p)| = \lim_{b\to\infty} \int_0^b |e^{-pt}f(t)|dt = \lim_{b\to\infty} \int_0^b e^{-pt}|f(t)|dt.$$

$f(t)$ funtzioa ordena exponentzialekoa denez,

$\forall t > N$ -tarako, $\exists\alpha > \alpha_0$, $M_1 > 0$, $N > 0$, non $|f(t)| < M_1e^{\alpha t}$ den.

$f(t)$ funtzioa $[0, N]$ tartean quasijarraia denez, hurrengoa dugu:

$\exists M_2 > 0$: $|f(t)| < M_2 = (M_2e^{-\alpha t})e^{\alpha t}$, $0 \le t \le N$ izanik.

Biz $M = \max\{ M_1, M_2, M_2e^{-\alpha N} \}$. Orduan, ondoko bornapena beteko da,

$$|f(t)| < Me^{\alpha t}, \quad \forall t > 0 \text{ -tarako,}$$

zeinak $|f(t)|$ delakoaren majorante bat emango digun. Gainera, ondokoa idatz dezakegu:

$$I = \int_0^b e^{-pt}|f(t)|dt \le \int_0^b e^{-pt}(Me^{\alpha t})dt = M|e^{-(p-\alpha)t}/(\alpha - p)|_0^b \longrightarrow$$

$$I \le \frac{M}{p - \alpha}\left[1 - e^{-(p-\alpha)b}\right].$$

Beraz, adierazpen hau b-rekiko monotono gorakorra denez eta $p > \alpha$ denerako goi-bornaturik egongo denez, $p - \alpha > 0$ ($p > \alpha$) denerako hurrengo limitea existituko da:

$$\lim_{b\to\infty} \int_0^b e^{-pt}|f(t)|dt \le \lim_{b\to\infty} \frac{M}{p - \alpha}\left[1 - e^{-(p-\alpha)b}\right] = \frac{M}{p - \alpha}.$$

Ondorioz, teoremako baldintzetan, transformatuaren integralaren konbergentzia absolutua frogatuta dago.

Ondorio nabarmen bat: f(t) transformagarria bada, orduan p parametroak infiniturantz jotzen duenean, F(p) transformatuak zerorantz joko du. Hau da:

$$|F(p)| \leq M/(p - \alpha) \quad \Rightarrow \quad \lim_{p \to \infty} F(p) = 0.$$

1.4.4 Transformatuen bakartasunaz.

$\forall t < 0$ -tarako $f_1(t) \neq f_2(t)$ eta $\forall t > 0$ -tarako $f_1(t) = f_2(t)$ badira, orduan

$$f(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ f_1(t) = f_2(t), & t > 0 \end{cases}$$

izango da.

Horrela, $t < 0$ denean, funtzio objektu ezberdinek F(p) transformatu ezberdinak izango dituzte; bestela, alderantzizko transformatuaren kasurako ez litzateke bakartasunik izango.

Halaber, f(t) + n(t) motako funtzio objektu quasiidentikoetako edozein familia funtzio bakartzat hartuko da, hau da

$$\mathcal{L}[f(t) + n(t)] = \mathcal{L}[f(t)] = F(p),$$

n(t) edozein funtzio nulu delarik, hots, edozein λ baliotarako

$$\int_0^\lambda n(t)dt = 0$$

delarik.

---

2. LAPLACE-REN TRANSFORMATU ZUZENA. PROPIETATEAK

2.1 Oinarrizko propietateak eta teoremak

Laplace-ren transformatuaren erabilgarritasuna ekuazio diferentzial, integral eta integro-diferentzialak ebazteko, ondoren azalduko diren hiru oinarrizko propietateetan euskarrituko da. Propietate hauek $\mathfrak{L}$ eragilearen linealtasunari, eta deribatu eta integralen transformatuei buruzkoak dira. Notazioa sinplifikatzeko, f(t)-ren transformatua F(p) idatziko dugu.

2.1.1 Linealtasun-propietatea.

$$\boxed{\mathfrak{L}\left[\sum_{1}^{n} C_i f_i(t)\right] = \sum_{1}^{n} C_i F_i(p).}$$

Integral mugagabe delako eragileak duen linealtasun-propietatearen ondorioa da.

$$\mathfrak{L}\left[\sum_{1}^{n} C_i f_i(t)\right] = \int_0^{\infty} e^{-pt}\left[\sum_{1}^{n} C_i f_i(t)\right]dt = \sum_{1}^{n}\left[\int_0^{\infty} C_i e^{-pt} f_i(t)dt\right] =$$

$$= \sum_{1}^{n} C_i\left[\int_0^{\infty} e^{-pt} f_i(t)dt\right] = \sum_{1}^{n} C_i F_i(p).$$

2.1.2 Deribatuaren transformatua.

Bira f(t) eta f'(t) ordena exponentzialeko funtzio jarraiak eta $\lim_{t\to 0^+} f(t) = f(0^+)$. Orduan, ondoko hau izango dugu:

$$\boxed{\mathcal{L}[f'(t)] = pF(p) - f(0^+), \qquad p > \alpha_0 .}$$

Frogapena: Definizio eta zatikako integrazioaren bidez,

$$e^{-pt} = u \longrightarrow du = -pe^{-pt}dt, \qquad f'(t)dt = dv \longrightarrow v = f(t),$$

$$\mathcal{L}\ [f'(t)] = \int_0^\infty e^{-pt}f'(t)dt = \left|e^{-pt}f(t)\right|_0^\infty + p\int_0^\infty e^{-pt}f(t)dt =$$

$$= \lim_{t\to\infty} [e^{-pt}f(t)] - f(0^+) + pF(p) = -f(0^+) + pF(p)$$

ondoriozta daiteke.

Sarritan gertatuko den $f(0^+) = 0$ kasu partikularrean, hauxe dugu:

$$\mathcal{L}[f'(t)] = pF(p), \qquad p > \alpha_0 .$$

Hau da, funtzio baten deribatuari $\mathcal{L}$ eragilea aplikatuta, funtzio horren transformatuaren eta p parametroaren arteko biderkaketa lortuko da.

n. deribaturako hedapena

Bigarren deribaturako ondokoa dugu:

$$\mathcal{L}[f''(t)] = p^2F(p) - pf(0^+) - f'(0^+).$$

Aurreko emaitza bi aldiz aplikatuz, hurrengoa ondoriozta daiteke:

$$\mathcal{L}[f''(t)] = p\mathcal{L}[f'(t)] - f'(0^+) = p[pF(p) - f(0^+)] - f'(0^+) =$$

$$= p^2F(p) - pf(0^+) - f'(0^+).$$

Berriro aplikatuz, hirugarren deribatuaren transformatua izango dugu.

$$\mathcal{L}[f'''(t)] = p^3F(p) - p^2f(0^+) - pf'(0^+) - f''(0^+).$$

Indukzioz, erraz froga daiteke hurrengo hau:

$$\mathcal{L}[f^{(n)}(t)] = p^nF(p) - p^{(n-1)}f(0^+) - p^{(n-2)}f'(0^+) - \ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots - p^2f^{(n-3)}(0^+) - pf^{(n-2)}(0^+) - f^{(n-1)}(0^+).$$

2.1.3 Integralaren transformatua.

f(t) ordena exponentzialeko funtzio jarraia bada, ondokoa beteko da:

$$\boxed{\mathcal{L}\left[\int_a^t f(t)dt\right] = \frac{1}{p}\left[F(p) + \int_a^0 f(t)dt\right].}$$

Frogapena:

Biz $\int_a^t f(x)dx = g(t)$. Orduan, $g'(t) = f(t)$, $g(0) = \int_a^0 f(x)dx$. $g'(t)$ delakoari $\mathcal{L}$ aplikatuta, $\mathcal{L}[g'(t)] = p\mathcal{L}[g(t)] - g(0^+)$ lortuko da.

$\mathcal{L}[g(t)]$-rekiko ebatziz, hurrengoa ondorioztatuko dugu:

$$\mathcal{L}[g(t)] = \mathcal{L}\left[\int_a^t f(t)dt\right] = \frac{1}{p}\left[F(p) + \int_a^0 f(t)dt\right].$$

Oharra: Definizioko integralari zatikako integrazioa aplikatuz, emaitza bera ondorioztа daiteke.

$$I = \mathfrak{L}\left[\int_a^t f(t)dt\right] = \int_0^\infty e^{-pt}\left[\int_a^t f(x)dx\right]dt.$$

Sarritan emango den kasu partikularra, a = 0 balioari dagokiona da. Kasu horretan ondokoa dugu:

$$\mathfrak{L}\left[\int_0^t f(t)dt\right] = F(p)/p.$$

2.1.4 Hasierako balioaren teorema.

Bira f(t) eta f'(t) ordena exponentzialeko funtzio quasijarraiak. Orduan,

$$\boxed{\lim_{p\to\infty} pF(p) = \lim_{t\to 0^+} f(t) = f(0^+)}$$

beteko da.

Praktikan, teorema honek f(t) funtzio sortzaile ezezagun batek jatorrian duen portaera, p infiniturantz doaneko F(p) transformatuak duenaren funtzioan azaltzen du.

Frogapena. f'(t) deribatuaren transformatuaren adierazpenean p infinitura doaneko limiteak aplikatu dira. Hau da:

$$\mathfrak{L}[f'(t)] = pF(p) - f(0^+) \longrightarrow \lim_{p\to\infty} \mathfrak{L}[f'(t)] = \lim_{p\to\infty} [pF(p) - f(0^+)].$$

Baina, f'(t) funtzioak transformatua onartzen badu, existentziaren teoremaren arabera, $\lim_{p\to\infty} \mathfrak{L}[f'(t)] = 0$ izango da. Ondorioz,

$$\lim_{p\to\infty} [pF(p) - f(0^+)] = 0 \longrightarrow \lim_{p\to\infty} pF(p) = f(0^+) = \lim_{t\to 0^+} f(t).$$

2.1.5 Bukaerako balioaren teorema.

Bira f(t) eta f'(t) ordena exponentzialeko funtzio quasijarraiak.

$\lim_{p\to 0} pF(p)$ eta $\lim_{t\to\infty} f(t)$ limiteak existitzen badira, orduan

$$\boxed{\lim_{p\to 0} pF(p) = \lim_{t\to\infty} f(t)}$$

beteko da.

Praktikan, denbora infinitura doaneko funtzio baten posizio geldikorra, p = 0 puntuaren ingurunean funtzio transformatuak duen portaeraren arabera adieraziko du teorema honek.

Frogapena. f'(t)-ren transformatuaren adierazpenean t parametroa zerorantz doaneko limiteak aplikatuko dira. Era horretan,

$$\mathfrak{L}[f'(t)] = pF(p) - f(0^+) = \int_0^\infty e^{-pt} f'(t)dt \qquad \xrightarrow{\lim}$$

$$\lim_{p\to 0} \mathfrak{L}[f'(t)] = \lim_{p\to 0} [pF(p) - f(0^+)] = \lim_{p\to 0} \int_0^\infty e^{-pt} f'(t)dt =$$

$$= \int_0^\infty \lim_{p\to 0} [e^{-pt} f'(t)]dt = \int_0^\infty f'(t)dt = \lim_{t\to\infty} \int_0^t f'(t)dt =$$

$$= \lim_{t\to\infty}[f(t) - f(0^+)] \longrightarrow \lim_{p\to 0}[pF(p) - f(0^+)] = \lim_{t\to\infty}[f(t) - f(0^+)]$$

ondoriozta daiteke.

Beraz, hurrengoa beteko da:

$$\lim_{p\to 0} pF(p) = \lim_{t\to\infty} f(t).$$

2.2 Funtzio elementalen transformatuak

Definizioa eta linealtasuna aplikatuz, hurrengo emaitzak erraz ondoriozta daitezke:

$$\mathfrak{L}[\sin at] = \int_0^\infty e^{-pt}\sin at\,dt = \left| e^{-pt}(-p\sin at - a\cos at)/(p^2 + a^2)\right|_0^\infty \Rightarrow$$

$$\boxed{\mathfrak{L}[\sin at] = a/(p^2 + a^2).}$$

$$\mathfrak{L}[\cos at] = \int_0^\infty e^{-pt}\cos at\,dt = \left| e^{-pt}(a\sin at - p\cos at)/(p^2 + a^2)\right|_0^\infty \Rightarrow$$

$$\boxed{\mathfrak{L}[\cos at] = p/(p^2 + a^2).}$$

$$\mathfrak{L}[e^{-at}] = \int_0^\infty e^{-pt}e^{-at}dt = \left| -e^{-(p+a)t}/(p + a)\right|_0^\infty \Rightarrow$$

$$\boxed{\mathfrak{L}[e^{-at}] = 1/(p + a), \qquad p + a > 0.}$$

$$\mathcal{L}[\mathrm{Shat}] = \mathcal{L}\,[(e^{at} - e^{-at})/2] = [1/(p - a) - 1/(p + a)]/2 \quad \Rightarrow$$

$$\boxed{\mathcal{L}[\mathrm{Shat}] = a/(p^2 - a^2).}$$

$$\mathcal{L}[\mathrm{Chat}] = \mathcal{L}\,[(e^{at} + e^{-at})/2] = [1/(p - a) + 1/(p + a)]/2 \quad \Rightarrow$$

$$\boxed{\mathcal{L}[\mathrm{Chat}] = p/(p^2 - a^2).}$$

t^n-ren transformatuaren integrala zatika ebatziz kalkula daiteke, edo, are hobeto, $t = z/p$, $dt = dz/p$ ordezkapenaren bidez gamma integral bat ebatziz kalkula daiteke.

$$\mathcal{L}[t^n] = \int_0^\infty e^{-pt}t^n dt = \int_0^\infty e^{-z}(z/p)^n(dz/p) = \frac{1}{p^{(n+1)}}\int_0^\infty e^{-z}z^n dz =$$

$$= \Gamma(n + 1)/p^{(n+1)} = n!/p^{(n+1)}, \quad n \in Z^+ \text{ izanik} \quad \Rightarrow$$

$$\boxed{\mathcal{L}[t^n] = \frac{\Gamma(n + 1)}{p^{(n+1)}} = \frac{n!}{p^{(n+1)}}, \quad n \in Z^+ \text{ izanik.}}$$

$$u_0(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t > 0 \end{cases}$$ Heaviside-ren funtzioaren transformatua

hurrengoa da:

$$\boxed{\mathcal{L}[u_0(t)] = \int_0^{\infty} e^{-pt}dt = 1/p.}$$

2.3 Beste propietate nabarmen batzu

Laplace-ren transformatuak eragile-kalkulurako lagungarriak diren beste propietate batzu ditu, emaitzak era azkarrean ondorioztatzea ahalbidetuko dutelarik. Horretarako, transformatu-pareez osoturiko taula zabalak eratuko dira.

2.3.1 Eskala-aldaketa.

$$\boxed{\mathcal{L}[f(at)] = \frac{1}{a}\, F(p/a).}$$

Frogapena: Integralean $z = at$, $dz = adt$ ordezkatuta, ondokoa izango dugu:

$$\mathcal{L}[f(at)] = \int_0^{\infty} e^{-pt}f(at)dt = \frac{1}{a}\int_0^{\infty} e^{-(p/a)z}f(z)dz = \frac{1}{a}\, F(p/a).$$

2.3.2 Translazioa edo desplazamendua.

$$\boxed{\mathcal{L}[e^{-at}f(t)] = F(p + a).}$$

Frogapena: Definizioa aplikatuz, zuzenki frogatuta dago:

$$\mathcal{L}[e^{-at}f(t)] = \int_0^{\infty} e^{-pt}[e^{-at}f(t)]dt = \int_0^{\infty} e^{-(p+a)t}f(t)dt = F(p + a).$$

Aplikazio-adibideak:

$$\mathcal{L}[e^{-at}\sin bt] = \frac{b}{(p + a)^2 + b^2}, \qquad \mathcal{L}[e^{-at}\cos bt] = \frac{p + a}{(p + a)^2 + b^2},$$

$$\mathcal{L}[e^{-at}\mathrm{Sh}bt] = \frac{b}{(p + a)^2 - b^2}, \qquad \mathcal{L}[e^{-at}\mathrm{Ch}bt] = \frac{p + a}{(p + a)^2 - b^2},$$

$$\mathcal{L}[e^{-at}t^n] = \frac{\Gamma(n + 1)}{(p + a)^{(n+1)}} = \frac{n!}{(p + a)^{(n+1)}}, \quad n \in Z^+ \text{ izanik.}$$

2.3.3 Transformatuaren deribazioa.

$$\boxed{\mathcal{L}[t^n f(t)] = (-1)^n d^n F/dp^n.}$$

Frogapena: Definizioko integrala n aldiz deribatuz, hurrengoa ondorioztatuko dugu:

$$d^nF(p)/dp^n = d^n/dp^n\left[\int_0^\infty e^{-pt}f(t)dt\right] = \int_0^\infty d^n/dp^n\ [e^{-pt}]f(t)dt =$$

$$\int_0^\infty [(-1)^n t^n e^{-pt}]f(t)dt = (-1)^n\int_0^\infty e^{-pt}[t^n f(t)]dt = (-1)^n\mathcal{L}\ [t^n f(t)].$$

Berdintzako alde biak $(-1)^n$ faktoreaz biderkatuz, lortu nahi den emaitza ondorioztatu daiteke.

Aplikazio-adibideak:

$\mathcal{L}[t\sin at] = -d/dp\ [a/(p^2 + a^2)] = 2ap/(p^2 + a^2)^2,$

$\mathcal{L}[t^2\sin at] = -d/dp\ [2ap/(p^2 + a^2)^2] = -2a(a^2 - 3p^2)/(p^2 + a^2)^3,$

$\mathcal{L}[t\cos at] = -d/dp\ [p/(p^2 + a^2)] = (p^2 - a^2)/(p^2 + a^2)^2,$

$\mathcal{L}[t\mathrm{Sh}at] = -d/dp\ [a/(p^2 - a^2)] = 2ap/(p^2 - a^2)^2,$

$\mathcal{L}[t\mathrm{Ch}at] = -d/dp\ [p/(p^2 - a^2)] = (p^2 + a^2)/(p^2 - a^2)^2,$

$\mathcal{L}[te^{-at}] = -d/dp\ [1/(p + a)] = 1/(p + a)^2.$

2.3.4 t-rekiko zatiketa.

Biz f(t) ordena exponentzialeko funtzio jarraia. Orduan, $\lim_{t\to 0^+} f(t)/t$ existitzen bada, ondokoa beteko da:

$$\boxed{\mathcal{L}[f(t)/t] = \int_p^{\infty} F(u)du.}$$

Frogapena: Definizioko integralari $\int_0^{\infty}$ eragilea aplikatuko zaio:

$$F(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t)dt \longrightarrow \int_p^{\infty} F(p)dp = \int_p^{\infty}\left[\int_0^{\infty} e^{-pt} f(t)dt\right]dp.$$

Hipotesiak kontutan hartuz, integrazio-ordena alda daiteke. Beraz,

$$\int_p^\infty F(p)dp = \int_0^\infty \left[\int_p^\infty e^{-pt} f(t)dp \right] dt = \int_0^\infty f(t)dt \int_p^\infty e^{-pt} dp =$$

$$\int_0^\infty f(t) \left| -e^{-pt}/t \right|_p^\infty dt = \int_0^\infty f(t) \lim_{b\to\infty} \left[\frac{e^{-pt} - e^{-bt}}{t} \right] dt = \int_0^\infty f(t) \frac{e^{-pt}}{t} dt \Rightarrow$$

$$\int_p^\infty F(p)dp = \int_0^\infty e^{-pt} [f(t)/t] dt = \mathfrak{L}[f(t)/t]$$

lortuko da.

Aplikazio-adibideak:

$$\mathfrak{L}\,[(e^{-at} - e^{-bt})/t] = \int_p^\infty \left(\frac{1}{p + a} - \frac{1}{p + b} \right) dp =$$

$$\left| \operatorname{Ln} \frac{p + a}{p + b} \right|_p^\infty = \lim_{u\to\infty} \left[\operatorname{Ln} \frac{u + a}{u + b} - \operatorname{Ln} \frac{p + a}{p + b} \right] = \operatorname{Ln} \frac{p + b}{p + a}\,.$$

$$\mathfrak{L}[(\cos at - \cos bt)/t] = \int_0^\infty \left(\frac{p}{p^2 + a^2} - \frac{p}{p^2 + b^2} \right) dp = \frac{1}{2} \operatorname{Ln} \frac{p^2 + b^2}{p^2 + a^2}$$

2.3.5 Transformatuen arteko biderkaketa.

f(t) eta g(t) funtzioen konboluzioa ondoko konposizio-legearen bidez definituko da:

$$f(t)*g(t) = \int_0^t f(t-u)g(u)du.$$

Teorema: f(t) eta g(t) funtzioen konboluzioaren transformatua, transformatuen arteko biderkaketa da:

$$\boxed{\mathcal{L}[f(t)*g(t)] = \mathcal{L}\int_0^t f(t-u)g(u)du = F(p)G(p).}$$

Frogapena: Froga dezagun

$$F(p)G(p) = \left[\int_0^\infty e^{-pu}f(u)du\right]\left[\int_0^\infty e^{-pv}g(v)dv\right]$$

transformatuen arteko biderkaketa konboluzioaren transformatua dela, biderkaketa hori ondoko integral bikoitzaren baliokidea delarik:

$$I = F(p)G(p) = \int_0^\infty\int_0^\infty e^{-p(u+v)}f(u)g(v)dudv.$$

Hasteko (berrikus integral bikoitzen gaia), I integralean ondoko aldagai-aldaketa aplikatuko da:

$$u = u, \quad t = u + v, \quad J(u,v) = \begin{vmatrix} \partial u/\partial u & \partial u/\partial t \\ \partial v/\partial u & \partial v/\partial t \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 1.$$

Orduan integral bikoitzetarako aldagai-aldaketaren teoriaren arabera,

$$I = \iint_{D_{uv}} e^{-p(u+v)} f(u)g(v)dudv = \iint_{D_{ut}} e^{-pt} f(u)g(t-u)\,|J(u,v)|\,dudt$$

dugu, non

D_{uv} , jatorrizko integrazio-eremua ($u > 0$, $v > 0$ koadrantean),

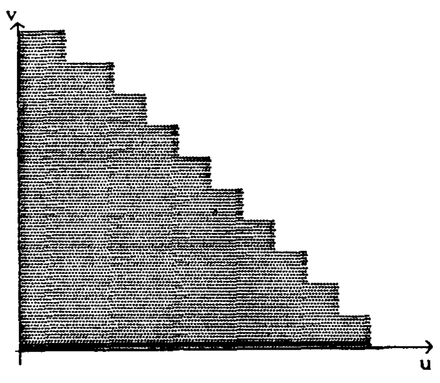
D_{ut} , irudi eremua ($u > 0$, $t > u$ koadranterdian),

$J(u,v)$, transformazioaren jacobiarra

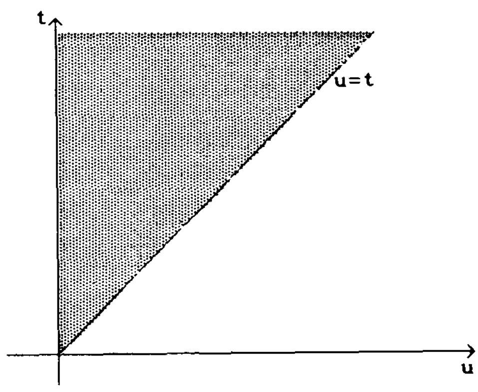
baitira.

D_{uv} eremua mugatzen duten $u = 0$, $v = 0$ lerroak, aldaketaren ondoren, D_{ut} eremuko $u = 0$, $t = u$ lerro mugatzaileei dagozkienak dira. Ikus ditzagun irudiak:

$$u = 0 \xrightarrow{T} u \equiv u = 0, \qquad v = 0 \xrightarrow{T} t = u + v = u.$$



$\Longleftrightarrow$



D_{uv} jatorrizko eremua

D_{ut}, irudi-eremua

Azkeneko integralean u aldagaia lehenengo integrazio-aldagaitzat hartuz gero,

$$I = \iint_{D_{ut}} e^{-pt} f(u)g(t-u)\,|J(u,v)|\,du dt = \int_0^{\infty} e^{-pt}\left[\int_0^t f(u)g(t-u)du\right]dt$$

beteko da, eta teorema frogatuta dago, eskuineko adierazpena konboluzioaren transformatua baita, hots,

$$I = F(p)G(p) = \mathfrak{L}\int_0^t f(u)g(t-u)du.$$

Teorema garrantzitsu honek propietate trukakorra betetzen du. Hori frogatzeko, nahikoa da ondoko ordezkaketa egitea:

$$t - u = \lambda, \quad -du = d\lambda, \quad u = 0 \longrightarrow \lambda = t, \quad u = t \longrightarrow \lambda = 0,$$

$$\mathfrak{L}\,[f(t)*g(t)] = \mathfrak{L}\int_0^t f(t-u)g(u)du = \mathfrak{L}\int_t^0 f(\lambda)g(t-\lambda)[-d\lambda] =$$

$$= \mathfrak{L}\int_0^t g(t-\lambda)f(\lambda)d\lambda = \mathfrak{L}\,[g(t)*f(t)].$$

Adibidea: Aurki bedi $\int_0^t u^2\cos 2(t-u)du$ integralaren transformatua.

E: Konboluzio-funtzioak eta beraien transformatuak ondokoak dira:

$$f(t) = t^2,\ g(t) = \cos 2t \longrightarrow F(p) = 2/p^3,\ G(p) = p/(p^2 + 4).$$

Teoremaren arabera, hurrengoa beteko da:

$$\mathcal{L}\int_0^t u^2\cos2(t-u)du = \frac{2}{p^2(p^2+4)}.$$

2.3.6 Funtzio periodikoen transformatuak.

Biz f(t), $t > 0$ denerako, $a > 0$ periododun funtzio periodikoa, hots, $f(t + na) = f(t)$, $\forall n \in Z^+$-tarako. Orduan, f(t) funtzioaren transformatua hurrengoa da:

$$\boxed{\mathcal{L}[f(t)] = \frac{\int_0^a e^{-pt}f(t)dt}{1 - e^{-pa}}.}$$

Frogapena: $\mathcal{L}[f(t)] = \int_0^\infty e^{-pt}f(t)dt$ integralean integrazio-tartea a anplitudeko azpitartetan zatikatuz,

$$I = \mathcal{L}[f(t)] = \int_0^a e^{-pt}f(t)dt + \int_a^{2a} e^{-pt}f(t)dt + \int_{2a}^{3a} e^{-pt}f(t)dt + \ldots.$$

$$\ldots + \int_{(n-1)a}^{na} e^{-pt}f(t)dt + \int_{na}^{(n+1)a} e^{-pt}f(t)dt + \ldots.$$

bete, eta hurrenez hurren,

$t = z$, $t = z + a$, $t = z + 2a$ ... $t = z + (n-1)a$, $t = z + na$, ..

ordezkaketak eginez gero,

$$I = \int_0^a e^{-pz}f(z)dz + e^{-pa}\int_0^a e^{-pz}f(z)dz + e^{-2pa}\int_0^a e^{-pz}f(z)dz + \ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots + e^{-(n-1)pa}\int_0^a e^{-pz}f(z)dz + e^{-npa}\int_0^a e^{-pz}f(z)dz + \ldots\ldots =$$

$$= \left(1 + e^{-pa} + e^{-2pa} + \ldots + e^{-(n-1)pa} + e^{-npa} + \ldots\right)\int_0^a e^{-pt}f(t)dt$$

ondoriozta daiteke, non funtzioaren periodikotasunagatik

$$f(z) = f(z + a) = f(z + 2a) = \ldots = f[z + (n-1)a] = f(z + na) = \ldots$$

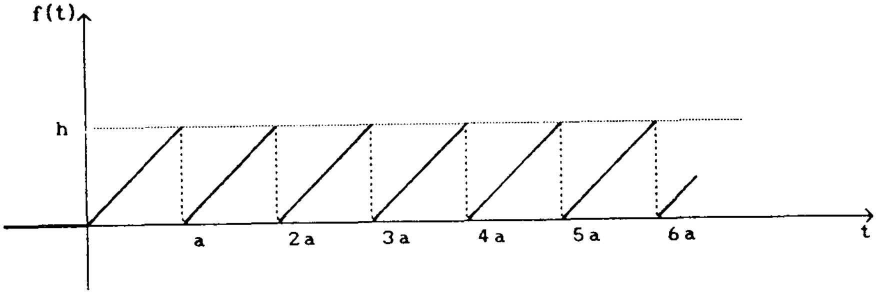
den.

Kortxeteen arteko adierazpena $r = e^{-pa} > 0$ arrazoidun serie geometriko konbergentea dugu, beraren batura $S = 1/(1 - e^{-pa})$ delarik. Ondorioz,

$$\mathcal{L}[f(t)] = \frac{\int_0^a e^{-pt}f(t)dt}{1 - e^{-pa}}\ .$$

Aplikazio-adibideak:

1.- Zerra-hortz erako uhin-funtzioaren transformatua.



Zerra-hortz erako uhina

$0 < t < a$ periodoan $f(t) = ht/a$ da.

Formula aplikatu eta zatika integratuz, hurrengoa lor daiteke:

$$\mathcal{L}[f(t)] = [1/(1 - e^{-pa})]\int_0^a e^{-pt}(ht/a)dt = [1/(1 - e^{-pa})]\ I,$$

$$t = u \longrightarrow dt = du, \quad e^{-pt}dt = dv \longrightarrow v = -e^{-pt}/p,$$

$$I = \frac{h}{a}\left[\ \left|-e^{-pt}t/p\right|_0^a + \frac{1}{p}\int_0^a e^{-pt}dt\ \right] = \frac{h}{a}\ \left|-e^{-pt}t/p - e^{-pt}/p^2\right|_0^a =$$

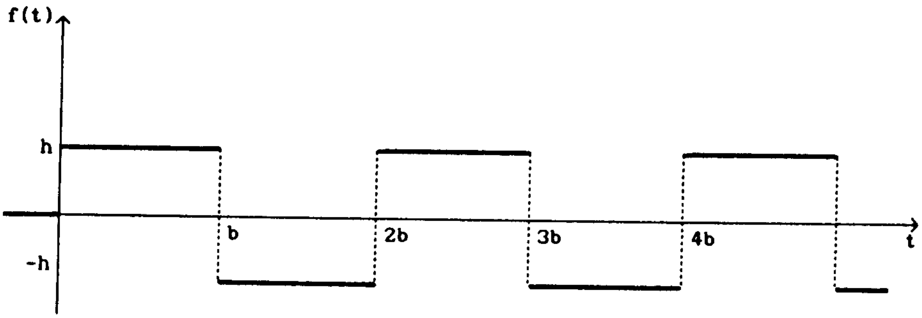
$$= \frac{h[1 - e^{-pa}(pa + 1)]}{ap^2} = \frac{h[(1 - e^{-pa}) - ape^{-pa}]}{ap^2} .$$

I integralean ordezkatu ondoren, hurrengoa ondoriozta daiteke:

$$\mathcal{L}[f(t)] = [1/(1 - e^{-pa})]\ I = \frac{h[(1 - e^{-pa}) - ape^{-pa}]}{ap^2(1 - e^{-pa})} \qquad \Rightarrow$$

$$\mathcal{L}[f(t)] = \frac{h}{ap^2} - \frac{he^{-pa}}{p(1 - e^{-pa})} .$$

2.- Uhin errektangeluarra deritzon funtzioaren transformatua.



Uhin errektangeluarra

Kasu honetan, f(t)-ren definizioa, $0 < t < 2b$ periodoan, hauxe da:

$$f(t) = \begin{cases} h, & 0 < t < b, \\ -h, & b < t < 2b. \end{cases}$$

$$\mathfrak{L}[f(t)] = [1/(1 - e^{-2pb})]\int_0^{2b} e^{-pt} f(t)\, dt = [1/(1 - e^{-2pb})]\ I.$$

I-ren balioa kalkulatu eta ordezkatuta gero, hurrengoa dugu:

$$I = \int_0^b e^{-pt} h dt - \int_b^{2b} e^{-pt} h dt = \frac{h}{p} \left| -e^{-pt} \right|_0^b + \frac{h}{p} \left| e^{-pt} \right|_b^{2b} =$$

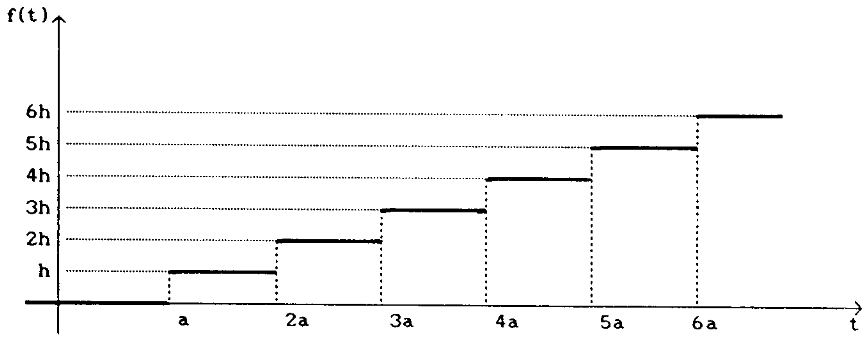
$$= \frac{h}{p} [-2e^{-pb} + e^{-2pb} + 1] = \frac{h}{p} (1 - e^{-pb})^2 \qquad \Rightarrow$$

$$\mathfrak{L}[f(t)] = \frac{h(1 - e^{-pb})^2}{p(1 - e^{-2pb})} = \frac{h(1 - e^{-pb})^2}{p(1 + e^{-pb})(1 - e^{-pb})} = \frac{h(1 - e^{-pb})}{p(1 + e^{-pb})} =$$

$$= \frac{h(e^{pb} - 1)}{p(e^{pb} + 1)} = \frac{h}{p}\,\mathrm{Th}(pb/2) \qquad \Rightarrow$$

$$\mathcal{L}[f(t)] = \frac{h}{p}\,\mathrm{Th}(pb/2).$$

3.- Eskilara funtzioa deritzonaren transformatua.



Eskilara funtzioa

Funtzio hau aperiodikoa denez, beraren transformatua ondoko funtzio laguntzailetik hasita kalkula daiteke,

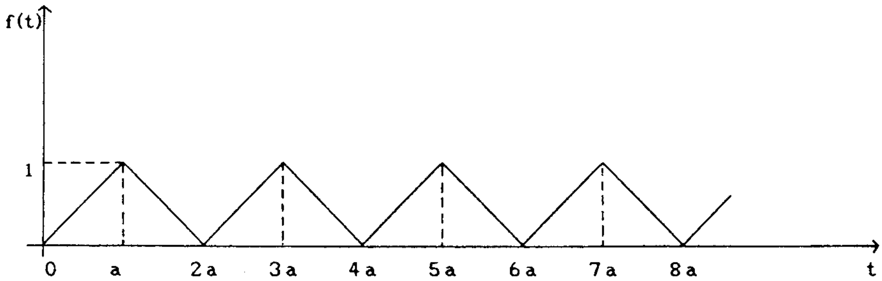
$$f(t) = (h/a)t - g(t),$$

non g(t) funtzioa zerra-hortz erako uhina baita. $\mathcal{L}$ eragilea aplikatuz, hurrengoa lortuko da:

$$\mathcal{L}[f(t)] = \mathcal{L}[(h/a)t] - \mathcal{L}[g(t)] = \frac{h}{ap^2} - \frac{h}{ap^2} + \frac{he^{-pa}}{p(1 - e^{-pa})} \qquad \Rightarrow$$

$$\mathcal{L}[f(t)] = \frac{he^{-pa}}{p(1 - e^{-pa})}.$$

4.- Uhin triangeluar deritzon funtzioaren transformatua.



Uhin triangeluarra

2a periododun funtzio periodiko honen adierazpen analitikoa, $0 < t < 2a$ denean, ondokoa da:

$$f(t) = \begin{cases} t/a, & 0 < t < a, \\ 2 - t/a, & a < t < 2a. \end{cases}$$

Beste kasuetan bezala eginez, ondoko emaitzara iritsiko gara:

$$\mathfrak{L}[f(t)] = (1/ap^2)\mathrm{Th}(ap/2).$$

---

3. LAPLACE-REN ALDERANTZIZKO TRANSFORMATUA

Adierazi genuenez, Laplace-ren alderantzizko transformatuak, F(p) aldagai konplexuko irudi-funtzioari f(t) aldagai errealeko funtzio sortzailea asoziatuko dio, ondoko inbertsio konplexuko integralaren bidez:

$$\mathfrak{L}^{-1}[F(p)] = f(t) = 1/2\pi j \int_{\sigma - j\omega}^{\sigma + j\omega} e^{pt}F(p)dp.$$

Alderantzizko transformatuaren existentziari eta bakartasunari buruz, hurrengoa esango dugu: f(t) funtzioak bere F(p) transformatuaren existentziaren teoremako eta (1.4.4.) atalean egindako bakartasunari buruzko baldintzak betetzen baditu, orduan F(p)-ren alderantzizko transformatua, f(t) alegia, bakarra da.

3.1 Propietate garrantzitsuenak

Propietate hauek transformatu zuzenekoei alderantzizko $\mathfrak{L}^{-1}$ eragilea aplikatuz justifika daitezke. Beraien euskarri teorikoa ondokoa da: elkarrekiko alderantzizkoak diren bi eragile aplikatzean, oinarria mantentzen da, hots,

$$\mathfrak{L}\left[\mathfrak{L}^{-1}[G(p)]\right] = G(p) \qquad \mathfrak{L}^{-1}\left[\mathfrak{L}[g(t)]\right] = g(t).$$

3.1.1 Linealtasun-propietatea.

$$\boxed{\mathfrak{L}^{-1}\left[\sum_{1}^{n} C_i F_i(p)\right] = \sum_{1}^{n} C_i f_i(t).}$$

3.1.2 Eskala-aldaketa.

$$\boxed{\mathfrak{L}^{-1}[F(ap)] = \frac{1}{a}\, f(t/a).}$$

3.1.3 Translazio-propietatea.

$$\boxed{\mathfrak{L}^{-1}[F(p+a)] = e^{-at}f(t).}$$

Aplikazio-adibideak:

$$\mathfrak{L}^{-1}\left[\frac{1}{(p+a)^{n+1}}\right] = \frac{e^{-at}t^n}{n!},$$

$$\mathfrak{L}^{-1}\left[\frac{p+a}{(p+a)^2+b^2}\right] = e^{-at}\cos bt,$$

$$\mathfrak{L}^{-1}\left[\frac{p+a}{(p+a)^2-b^2}\right] = e^{-at}\mathrm{Ch}\,bt,$$

$$\mathfrak{L}^{-1}\left[\frac{1}{(p+a)^2+b^2}\right] = \frac{e^{-at}\sin bt}{b},$$

$$\mathfrak{L}^{-1}\left[\frac{1}{(p+a)^2-b^2}\right] = \frac{e^{-at}\mathrm{Sh}\,bt}{b}.$$

Gehien erabiliko diren alderantzizkoak hauexek dira:

$$\mathfrak{L}^{-1}\left[\frac{Mp + N}{(p + a)^2 + b^2}\right] = \mathfrak{L}^{-1}\left[\frac{M(p + a) + (N - Ma)}{(p + a)^2 + b^2}\right] =$$

$$= M(e^{-at}\cos bt) + \frac{N - Ma}{b}\, e^{-at}\sin bt\ ,$$

$$\mathfrak{L}^{-1}\left[\frac{Mp + N}{(p + a)^2 - b^2}\right] = \mathfrak{L}^{-1}\left[\frac{M(p + a) + (N - Ma)}{(p + a)^2 - b^2}\right] =$$

$$= M(e^{-at}\mathrm{Ch}bt) + \frac{N - Ma}{b}\, e^{-at}\mathrm{Sh}bt.$$

3.1.4 Deribatuaren alderantzizko transformatua.

$$\boxed{\mathfrak{L}^{-1}\left[\, d^nF/dp^n \,\right] = (-1)^n t^n f(t)].}$$

Aplikazio-adibidea:

$$\mathfrak{L}^{-1}[p/(p^2 + a^2)] = \cos at, \quad \frac{d}{dp}\,[p/(p^2 + a^2)] = \frac{a^2 - p^2}{(p^2 + a^2)^2} \Rightarrow$$

$$\mathfrak{L}^{-1}\left[\frac{a^2 - p^2}{(p^2 + a^2)^2}\right] = -t\cos at.$$

3.1.5 Integralaren alderantzizko transformatua.

$$\mathfrak{L}^{-1}\left[\int_p^{\infty} F(u)du\right] = f(t)/t.$$

3.1.6 p-rekiko biderkaketa.

$$\mathfrak{L}^{-1}[pF(p) - f(0^+)] = f'(t).$$

$f(0^+) = 0$ bada, orduan $\mathfrak{L}^{-1}[pF(p)] = f'(t)$ da.

Aplikazio-adibidea:

$$\mathfrak{L}^{-1}\left[\frac{p}{(p+2)^4}\right] = \mathfrak{L}^{-1}\left[p\frac{1}{(p+2)^4}\right] = \frac{d}{dt}\left[\frac{e^{-2t}t^3}{6}\right] = \frac{(3t^2 - 2t^3)e^{-2t}}{6}$$

Kalkula bedi $\mathfrak{L}^{-1}[p/(p^2 + a^2)^2]$,

$\mathfrak{L}\,[(\text{sinat} - \text{atcosat})/2a^3] = 1/(p^2 + a^2)^2$ dela jakinik.

$$\mathfrak{L}^{-1}[p/(p^2 + a^2)^2] = \frac{d}{dt}\,[(\text{sinat} - \text{atcosat})/2a^3] = \frac{\text{tsinat}}{2a}.$$

3.1.7 p-rekiko zatiketa.

$$\mathfrak{L}^{-1}[F(p)/p] = \int_0^t f(u)du.$$

Aplikazio-adibidea:

$$\mathfrak{L}^{-1}[1/p(p + 2)^2] = \int_0^t \mathfrak{L}^{-1}[1/(p + 2)^2]du = \int_0^t ue^{-2u}du =$$

$$= \frac{1 - (2t + 1)e^{-2t}}{4}.$$

3.1.8 Konboluzio-propietatea.

$$\mathfrak{L}^{-1}[F(p)G(p)] = \int_0^t f(t-u)g(u)du.$$

Aplikazio-adibideak:

1. Kalkula bedi $W(p) = \dfrac{p}{(p + a)(p^2 + b^2)}$ funtzioaren alderantzizko transformatua.

E: $\mathfrak{L}^{-1}\left[\dfrac{1}{(p+a)}\right] = e^{-at}$, $\mathfrak{L}^{-1}\left[\dfrac{p}{(p^2+b^2)}\right] = \text{cosbt}$ beteko

direla jakinik, propietatea aplikatuz hurrengo emaitza ondoriozta daiteke:

$$\mathfrak{L}^{-1}\left[\frac{1}{(p+a)}\,\frac{p}{(p^2+b^2)}\right] = \int_0^t e^{-a(t-u)}\text{cosbudu} = e^{-at}\int_0^t e^{au}\text{cosbudu} =$$

$$= \frac{e^{-at}}{a^2+b^2}\left|e^{au}(\text{bsinbu} + \text{acosbu}\right|_0^t = \frac{\text{bsinbt} + \text{acosbt} - ae^{-at}}{a^2+b^2}.$$

---

2. Aurkitu $W(p) = \dfrac{p^2}{(p^2+a^2)^2}$ delakoaren funtzio sortzailea.

E: Kasu honetarako hurrengoa dugu:

$$F(p) = G(p) = \frac{p}{p^2+a^2} \xrightarrow{\mathfrak{L}^{-1}} \text{cosat} \Rightarrow$$

$$\mathfrak{L}^{-1}\left[\frac{p^2}{(p^2+a^2)^2}\right] = \mathfrak{L}^{-1}\left[\frac{p}{p^2+a^2}\,\frac{p}{p^2+a^2}\right] = \int_0^t \text{cosa}(t-u)\text{cosaudu} =$$

$$\frac{1}{2}\int_0^t [\text{cosat} + \cos(at-2au)]du = \left|\frac{\text{ucosat}}{2} - \frac{\text{sina}(t-2u)}{4a}\right|_0^t \Rightarrow$$

$$\mathfrak{L}^{-1}\left[\frac{p^2}{(p^2+a^2)^2}\right] = (\text{atcosat} + \text{sinat})/2a.$$

Ariketa proposatu moduan, beste emaitza interesgarri batzu, hauexek dira:

$$\mathfrak{L}^{-1}\left[\frac{1}{(p^2 + a^2)^2}\right] = (\text{sinat} - \text{atcosat})/2a^3,$$

$$\mathfrak{L}^{-1}\left[\frac{p}{(p^2 + a^2)^2}\right] = \text{tsinat}/2a,$$

$$\mathfrak{L}^{-1}\left[\frac{p^3}{(p^2 + a^2)^2}\right] = \text{cosat} - \text{atsinat}/2,$$

$$\mathfrak{L}^{-1}\left[\frac{1}{(p^2 - a^2)^2}\right] = (\text{atChat} - \text{Shat})/2a^3,$$

$$\mathfrak{L}^{-1}\left[\frac{p}{(p^2 - a^2)^2}\right] = \text{tShat}/2a,$$

$$\mathfrak{L}^{-1}\left[\frac{p^2}{(p^2 - a^2)^2}\right] = (\text{Shat} + \text{atChat})/2a,$$

$$\mathfrak{L}^{-1}\left[\frac{p^3}{(p^2 - a^2)^2}\right] = \text{Chat} + \text{atShat}/2.$$

3.2 Transformatu-pareen kodifikazioa

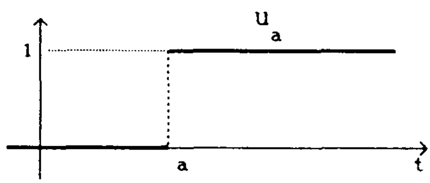
Eragile-kalkuluan dugun bizkortasuna, zuzen eta alderantzizko eragileen aplikazio egokiaren eta transformatu-pareetako taula zabal baten erabileraren araberakoa da. Bibliografia espezializatuan transformatu-pare asko aurki ditzakegu. Dena den, liburu honetako eranskinean ohiko problemetarako nahikoak izango diren pareak idatzi ditugu.

3.3 Zenbait funtzio bereziren transformatuak

Denboraren araberako sistema fisiko askotan, beraien gain eragiten duten perturbazioek ez dute era jarraian eragiten, denbora-tarte jakinetan baizik. Orain, funtzio-mota honi Laplace-ren eragilea aplikatuta gero, atera diren emaitza nabarienak azalduko dira.

3.3.1 Maila-funtzioa edo unitate-maila deritzon funtzioa.

$$u_a(t) \equiv u(t-a) = \begin{cases} 0, & t < a, \\ 1, & t > a. \end{cases}$$

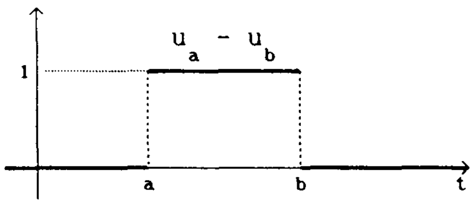


$$\boxed{\mathcal{L}\,[u_a f(t)] = \int_0^{\infty} e^{-pt} u(t)dt = \int_a^{\infty} e^{-pt} dt = \frac{e^{-pa}}{p} .}$$

3.3.2 Pultsu-funtzio errektangeluarra.

Pultsu errektangeluarra, edo iragazki-funtzioaren adierazpenak:

$$u_a - u_b = \begin{cases} 0, & t < a, \\ 1, & a < t < b, \\ 0, & b < t. \end{cases}$$



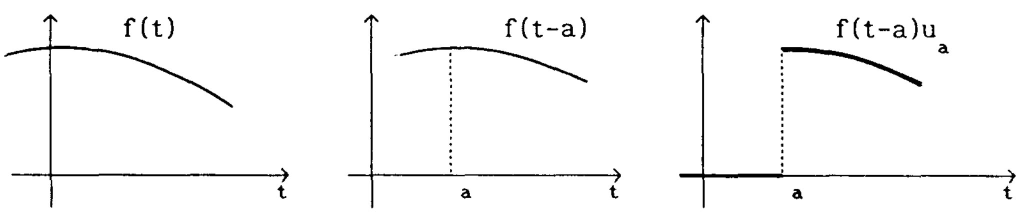
$\mathfrak{L}$ eragilea lineala denez, hurrengo transfomatua du:

$$\boxed{\mathfrak{L}\,[u_a - u_b] = \frac{e^{-pa} - e^{-pb}}{p}\,.}$$

3.3.3 Transladatu eta ebakitako funtzioa.

$$f(t - a)\,u_a = \begin{cases} 0, & t < a, \\ f(t-a), & t > a. \end{cases}$$

Grafikoki, f(t-a) funtzioa t ardatzean eskuin-alderantz a unitateetako translazioa eginda lortuko da. Aldiz, f(t-a) delakoa $0 < t < a$ tartean ebaki ondoren, $f(t-a)u_a$ funtzioa ondorioztatuko dugu.



$$\mathfrak{L}[f(t-a)u_a] = \int_0^\infty e^{-pt}f(t-a)u_a\,dt = \int_a^\infty e^{-pt}f(t-a)dt.$$

Gero, $t - a = z$, $dt = dz$ ordezkaketa egin ondoren, $t = a \longrightarrow z = 0$ kasuan hurrengoa dugu:

$$\mathfrak{L}[f(t-a)u_a] = \int_0^\infty e^{-p(a+z)}f(z)dz = e^{-pa}\int_0^\infty e^{-pz}f(z)dz = e^{-pa}F(p) \quad \Rightarrow$$

$$\mathfrak{L}[f(t - a)u_a] = e^{-pa}\mathfrak{L}[f(t)] = e^{-pa}F(p).$$

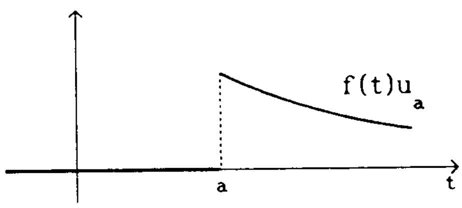
Alderantzizko eragilea aplikatuz, ondokoa ondoriozta daiteke:

$$\boxed{\mathfrak{L}^{-1}[e^{-pa}F(p)] = f(t - a)u_a.}$$

Praktikan, emaitza hau, faktore exponentzial arruntez biderkaturik dauden funtzioen alderantzizkoak kalkulatzeko oso erabilgarria da.

3.3.4 t < a denerako anulatutako funtzioa.

$$f(t)u_a = \begin{cases} 0, & t < a, \\ f(t), & t > a. \end{cases}$$



Definizioa aplikatuz, $t = z + a$ egingo da. Orduan,

$$\mathfrak{L}[f(t)u_a] = \int_a^\infty e^{-pt}f(t)dt = e^{-pa}\int_0^\infty e^{-pz}f(z + a)dz \quad \Rightarrow$$

$$\boxed{\mathfrak{L}[f(t)u_a] = e^{-pa}\mathfrak{L}[f(t + a)].}$$

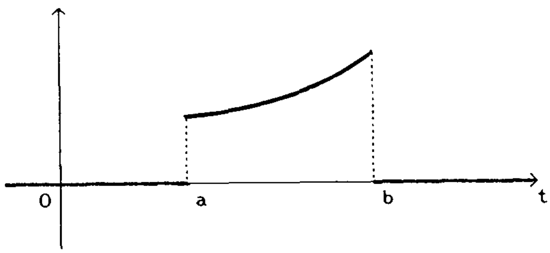
ondorioztatuko dugu. (Formula hau aurrekoaren osagarria da).

3.3.5 a > t > b denerako anulatutako funtzioa.

Funtzio bat $u_a - u_b$ pultsu errektangeluarraz biderkatuz gero, orduan funtzio hori nulua da, [a,b] tartean izan ezik.

Adierazpen analitikoa eta grafikoa:

$$f(t)[u_a - u_b] = \begin{cases} 0, & t < a, \\ f(t), & a < t < b, \\ 0, & b < t. \end{cases}$$



Aurreko emaitzaren arabera, ondoko hau dugu:

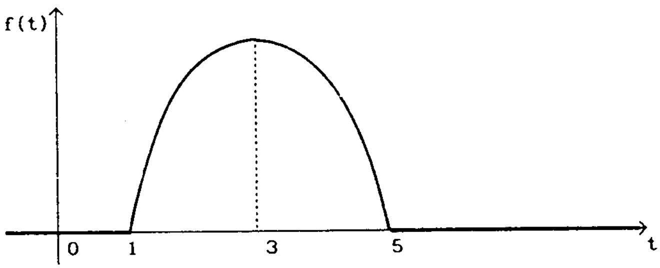
$$\boxed{\mathfrak{L}[f(t)(u_a - u_b)] = e^{-pa}\mathfrak{L}[f(t + a)] - e^{-pb}\mathfrak{L}[f(t + b)].}$$

Aplikazio-adibideak:

a) Pultsu parabolikoaren transformatua:

$$f(t) = \begin{cases} 0, & 0 < t < 1, \\ -t^2 + 6t - 5, & 1 < t < 5, \\ 0, & 5 < t. \end{cases}$$

E: Beraren adierazpen grafikoa hauxe dugu:



Definizioz, $\mathfrak{L}[f(t)] = \int_1^5 e^{-pt}(-t^2 + 6t - 5)dt$ da.

Edo, aurreko puntuan lortutako emaitzaren arabera, beste hau:

$$\mathfrak{L}[f(t)] = \mathfrak{L}[(-t^2 + 6t - 5)(u_1 - u_5)] =$$

$$= e^{-p}\mathfrak{L}[-(t + 1)^2 + 6(t + 1) - 5] - e^{-5p}\mathfrak{L}[-(t + 5)^2 + 6(t + 5) - 5]$$

$$= e^{-p}\mathfrak{L}[-t^2 + 4t] - e^{-5p}\mathfrak{L}[-t^2 - 4t] =$$

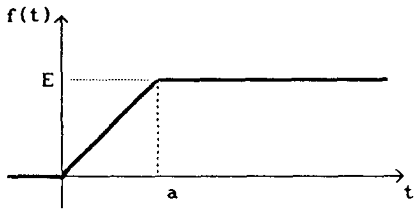
$$= e^{-p}[-2/p^3 + 4/p^2] - e^{-5p}[-2/p^3 - 4/p^2] \quad \Rightarrow$$

$$\mathcal{L}[f(t)] = \frac{(-2 + 4p)e^{-p}}{p^3} + \frac{(2p + 4p^2)e^{-5p}}{p^3} .$$

---

b) Bilatu ondoko funtzioaren transformatua:

$$f(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ Et/a, & 0 < t < a, \\ E, & a < t. \end{cases}$$



E: f(t) delakoa, maila-funtzioen bidez idatziz, eta gero $\mathcal{L}$ eragilea aplikatuz, hurrengo emaitza lortuko da:

$$f(t) = (Et/a)[u_0 - u_a] + Eu_a = (Et/a)u_0 + [E - Et/a]u_a \quad \longrightarrow$$

$$\mathcal{L}[f(t)] = E/ap^2 + e^{-pa}\left[E/p - (E/a)\mathcal{L}[t+a] \right] =$$

$$= E/ap^2 + e^{-pa}\left[E/p - (E/a)[1/p^2 + a/p] \right] \quad \Rightarrow$$

$$\mathcal{L}[f(t)] = E(1 - e^{-pa})/ap^2.$$

---

4. LAPLACE-REN TRANSFORMATUAREN APLIKAZIO NAGUSIAK

Zenbait askatasun-mailatako sistema fisikoen azterketarako eragile-metodoek, ondoko pausuak segitzen dituzte:

1.- Sistema fisikoaren **eredu matematikoa** finkatzea, hastapen baldintzak zehaztuz. Eredu horretan, ekuazio diferentzial edo integro-diferentzial linealak, ekuazio-sistemak, etab. azal daitezke.

2.- **Ereduaren algebrizazioa**, Laplace-ren eragilea aplikatuz. Gogora dezagun, transformatuaren bidez deribatzea p parametroaz biderkatzeari dagokiola, eta integratzea p delakoaz zatitzeari.

$$\mathcal{L}[f'(t)] = pF(p) - f(0^+), \qquad \mathcal{L}\int_0^t f(t)dt = F(p)/p.$$

3.- Transformatutako funtzioekiko **ebazpen algebraikoa.**

4.- **Sistemako koordenatuen kalkulua**, Laplace-ren alderantzizko eragilea aplikatuz.

Jarraian, ingeniaritzako problemen azterketarako interesgarrienak diren oinarrizko aplikazio batzu deskribatuko dira.

4.1. Ekuazio diferentzial linealen ebazpena

Laplace-ren eragilea hastapen-baldintzetako ekuazio diferentzial linealen azterketan aplikatuz gero, ondoko abantail nagusiak nabarituko dira:

a) X(p) transformatuarekiko ebazpen algebraikoa.

b) Soluzio partikularra zuzenean lortzea.

Ikus dezagun nola egiten den hori. Bira

$$a_0 x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + \dots + a_{n-2} x'' + a_{n-1} x' + a_n x = f(t)$$

ekuazio diferentzial lineala, eta

$$x(0) = x_{10},\quad x'(0) = x_{20},\quad x''(0) = x_{30},\ \dots\ ,\ x^{(n-1)}(0) = x_{n0}$$

hastapen-baldintzak.

Laplace-ren eragilea aplikatu eta lortutako ekuazio algebraikoa ebatzi ondoren, X(p) transformatuarekiko adierazpen arrazional bat ondorioztatuko da. Beraz, linealtasun-propietateak eta $\mathfrak{L}$ eragileak deribatuetan duten aplikazioa kontutan hartuz, hastapen-baldintzak ordezkatuz, hurrengoa lortuko da:

$$a_0\left[p^n X(p) - p^{(n-1)} x_{10} - \dots - p^2 x_{(n-2)0} - p x_{(n-1)0} - x_{(n)0} \right] +$$

$$a_1\left[p^{(n-1)} X(p) - p^{(n-2)} x_{10} - \dots - p x_{(n-2)0} - x_{(n-1)0} \right] + \dots +$$

$$a_{n-2}\left[p^2 X(p) - p x_{10} - x_{20} \right] + a_{n-1}\left[pX(p) - x_{10} \right] + a_n X(p) = F(p).$$

X(p)-rekiko ebatziz gero, ondoko motako adierazpen batetara helduko gara:

$$X(p)\phi_n(p) + \Psi_{n-1}(p) = F(p) \quad\Rightarrow\quad X(p) = \frac{F(p) - \Psi_{n-1}(p)}{\phi_n(p)},$$

non

$$\phi_n(p) \equiv a_0\, p^n + a_1\, p^{n-1} + \ldots + a_{n-2}\, p^2 + a_{n-1}\, p + a_n$$

ekuazio diferentzialaren polinomio karakteristikoa,

$\Psi_{n-1}(p) \equiv$ (p)-rekiko (n-1). mailako polinomioa, eta $F(p) = \mathfrak{L}[f(t)]$ diren.

Alderantzizko eragilearen aplikazioak soluzio honetara garamatza:

$$x(t) = \mathfrak{L}^{-1}[X(p)\} \quad \Rightarrow \quad x(t) = \mathfrak{L}^{-1}\left[\frac{F(p) - \Psi_{n-1}(p)}{\Phi_n(p)}\right].$$

Konkretuki, hastapen-baldintzak nuluak badira, hots,

$$x(0) = x'(0) = x''(0) = \ldots\ x_{n-2}(0) = x_{n-1}(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad \Psi_{n-1}(p) = 0,$$

orduan, soluzioa erraz kalkula daiteke:

$$x(t) = \mathfrak{L}^{-1}\left[\frac{F(p)}{\phi_n(p)}\right].$$

Funtzio arrazionalen alderantzizkoak kalkulatzeko, izendatzaileko polinomioaren erroen arabera, lehenengo frakzio sinpleetan deskonposatuko da, eta gero, transformatu-tauletara joko da. Kasu batzutan, interesgarriak izango dira $\mathfrak{L}^{-1}$ eragilearen beste propietate batzu, transformatuen biderkaketarena (konboluzio teorema) bereziki.

Oharrak:

Hastapen-baldintzak t = a (a = 0) puntuari buruzkoak badira, orduan deribatuen transformatuetako

$$x(0),\ x'(0),\ x''(0),\ \dots\ ,\ x^{(n-2)}(0),\ x^{(n-1)}(0)$$

balioak konstantetzat hartu behar dira, eta x(t) koordenatua lortutakoan, t = a kasurako ondoko baldintzak erabil daitezke:

$$x(a),\ x'(a),\ x''(a),\ \dots\ ,\ x^{(n-2)}(a),\ x^{(n-1)}(a).$$

Halaber, Laplace-ren transformatua, berreketa-motako koefiziente aldakorretako ekuazio diferentzialen kasu batzutan aplika daiteke, horietan transformatuaren deribaketari buruzko propietatea erabiliko delarik,

$$\mathfrak{L}[t^m\ x^{(n)}(t)] = (-1)^m d^m/dp^m \left[\mathfrak{L}[x^{(n)}(t)]\right]$$

alegia. Emandako ekuazioa, lehenengo ordenako ekuazio diferentzial bihurtuko da, hots,

$$G[p,\ X(p),\ X'(p)] = 0,$$

beronen integraziotik X(p) lor daitekeelarik, eta $x(t) = \mathfrak{L}^{-1}[X(p)]$ ondoriozta daitekeelarik. (Ikusi 47 ariketa).

Aplikazio-adibideak:

a) Ebatz bedi hastapen-baldintzatako problema hau:

$$x'''(t) + x(t) = te^t, \qquad x(0) = x'(0) = x''(0) = 0.$$

E: $\Psi_{n-1}(p) = 0\ ,\qquad \phi_n(p) = p^3 + 1\ ,\qquad F(p) = \dfrac{1}{(p-1)^2}\ ,$

$$X(p) = \frac{F(p)}{\phi_n(p)} = \frac{1}{(p^3+1)(p-1)^2}\ .$$

X(p) transformatu sinpleetan deskonposatuz, hau da,

$$X(p) = \frac{1}{(p-1)^2(p+1)(p^2-p+1)} = \frac{A}{(p-1)^2} + \frac{B}{p-1} + \frac{C}{p+1} + \frac{Dp + E}{p^2-p+1}$$

eginez, izendatzaile amankomunera laburtuz, eta zenbakitzaileak identifikatuz, hurrengoa ondoriozta daiteke:

$$1 = A(p^3+1) + B(p-1)(p^3+1) + C(p^2-p+1)(p-1)^2 + (Dp+E)(p-1)^2(p+1),$$

$$A = 1/2, \quad B = -3/4, \quad C = 1/12, \quad D = 2/3, \quad E = -1/3.$$

Era honetan,

$$X(p) = \frac{1/2}{(p - 1)^2} - \frac{3/4}{p - 1} + \frac{1/12}{p + 1} + \frac{2p/3 - 1/3}{p^2 - p + 1},$$

eta alderantzizko $x(t) = \mathfrak{L}^{-1}[X(p)]$ eragilea aplikatu ondoren,

$$x(t) = \frac{1}{2}\,\mathfrak{L}^{-1}\frac{1}{(p - 1)^2} - \frac{3}{4}\,\mathfrak{L}^{-1}\frac{1}{p - 1} + \frac{1}{12}\,\mathfrak{L}^{-1}\frac{1}{p + 1} + \frac{2}{3}\,\mathfrak{L}^{-1}\frac{p - 1/2}{p^2 - p + 1}$$

berdintza dugu. Azkenik, $p^2 - p + 1 = (p - 1/2)^2 + (\sqrt{3}/2)^2$ eginez, emaitzara iritsiko gara:

$$x(t) = te^t/2 - 3e^t/4 + e^{-t}/12 + 2/3\ e^{t/2}\cos(\sqrt{3}t/2).$$

---

b) Frogatu $\quad x(t) = \dfrac{1}{8}\displaystyle\int_0^t [e^{2u} - \cos 2u - \sin 2u]\, f(t-u)du$ adierazpena,

$$x''' - 2x'' + 4x' - 8x = f(t)$$

ekuazio diferentzialaren integral partikularra dela, non $x(0) = 0$, $x'(0) = x''(0) = 0$ hastapen-baldintzak beteko diren.

Kalkula bedi x(t), funtzioa $f(t) = 16e^{2t}$ denean.

E: $\mathfrak{L}$ aplikatu eta X(p)-rekiko ebatziz, ondokoa beteko da:

$$(p^3 - 2p^2 + 4p - 8)X(p) = F(p) \Rightarrow X(p) = \frac{F(p)}{(p-2)(p^2+4)} \equiv F(p)G(p)$$

Gero, g(t) funtzioa kalkulatuko dugu, transformatuen biderkaketaren alderantzizkoaren propietatea aplikatzeko. Horretarako, G(p) transformatua frakzio sinpleetan deskonposatu eta $\mathfrak{L}^{-1}$ eragilea aplika dakioke.

$$G(p) = \frac{1}{(p-2)(p^2+4)} = \frac{1/8}{p-2} - \frac{p/8 + 1/4}{p^2+4} \xrightarrow{\mathfrak{L}^{-1}}$$

$$g(t) = e^{2t}/8 - \cos 2t/8 - \sin 2t/8 = (e^{2t} - \cos 2t - \sin 2t)/8.$$

Azaldutako propietatearen arabera,

$$\mathfrak{L}^{-1}[F(p)G(p)] = \int_0^t f(t-u)g(u)\,du$$

dugu. Beraz, probleman eskatutakoa frogaturik dago. Hau da,

$$x(t) = \mathfrak{L}^{-1}\left[\frac{F(p)}{(p-2)(p^2+4)}\right] = \frac{1}{8}\int_0^t (e^{2u} - \cos 2u - \sin 2u)f(t-u)du$$

$f(t) = 16e^{2t}$ kasu partikularrean,

$$x(t) = \frac{1}{8}\int_0^t (e^{2u} - \cos 2u - \sin 2u)\, 16e^{2(t-u)}\,du =$$

$$= 2e^{2t}\int_0^t [1 - (\cos 2u - \sin 2u)e^{-2u}]du$$

bete, eta zatikako integrazioa aplikatuz hurrengoa lor daiteke:

$$x(t) = (2t - 1)e^{2t} + \cos 2t.$$

Beste era batetan,

$$X(p) = \frac{1}{(p-2)^2(p^2+4)} = \frac{2}{(p-2)^2} - \frac{1}{p-2} + \frac{p}{p^2+4}$$

deskonposaketaren bidez, emaitza bera ondorioztatuko da.

4.2. Ekuazio diferentzial linealetako sistemen ebazpena

Hastapen-baldintzatako ekuazio diferentzial linealetako sistema bati Laplace-ren eragilea aplikatzen bazaio, koordenatuak

$$x_1(t),\ x_2(t),\ x_3(t),\ \ldots,\ x_{(n-1)}(t),\ x_n(t)$$

izanik, aurreko koordenatuen transformatuak diren

$$X_1(p),\ X_2(p),\ X_3(p),\ \ldots,\ X_{(n-1)}(p),\ X_n(p)$$

ezezagunetako sistema lineala lortuko da, hurrenez hurren. Sistema honen ebazpen algebraikoak eta geroko alderantzizko eragilearen aplikazioak ekuazio diferentzialetako sistemaren emaitza ondorioztatuko dute, koordenatu bakoitza independenteki lortu ahal izango delarik.

Aplikazio-adibidea:

$$x' = k_1(a - x - y), \qquad y' = k_2(a - x - y)$$

ekuazio diferentzialetako sistema ondoko prozesuari dagokion eredu matematikoa da: "A substantzia B eta C substantziak eratzeko deskonposatuko da, hauen aldiuneko erakuntza-abiadurak A-ren aldiuneko substantzi kantitatearekiko proportzionalak direlarik".

Prozesua hasi eta ordubetera, B eta C-ren eratutako kantitateak $x = a/8$ eta $y = 3a/8$ dira, hurrenez hurren, non a delakoa A-ren hasierako kantitatea baita.

Aurki bitez B eta C-ren erakuntza-legeak, hots, x(t) eta y(t). Zer denbora pasatu behar da A-ren hasierako kantitatea laurdenera laburtzeko?

E: Bira $x(0) = y(0) = 0$ hastapen-baldintzak, hasieran B eta C substantziarik ez baitago. Baldintza hauek sistemari erantsi eta Laplace-ren eragilea aplikatuko zaio:

$$pX(p) - x(0) = k_1[a/p - X(p) - Y(p)],$$

$$pY(p) - y(0) = k_2[a/p - X(p) - Y(p)].$$

Ondoren, sistema ordenatu, eta X(p) eta Y(p)-rekiko ebatziko da:

$$\begin{cases} (p + k_1)X(p) + k_1\,Y(p) = k_1a/p, \\ k_2\,X(p) + (p + k_2)Y(p) = k_2a/p. \end{cases}$$

$$X(p) = \frac{\begin{vmatrix} k_1a/p & k_1 \\ k_2a/p & p+k_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} p+k_1 & k_1 \\ k_2 & p+k_2 \end{vmatrix}} = \frac{k_1a}{p(p + k_1 + k_2)} = \frac{k_1a}{k_1 + k_2}\left[\frac{1}{p} - \frac{1}{p + k_1 + k_2}\right]$$

$$Y(p) = \frac{\begin{vmatrix} p+k_1 & k_1 a/p \\ k_2 & k_2 a/p \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} p+k_1 & k_1 \\ k_2 & p+k_2 \end{vmatrix}} = \frac{k_2 a}{p(p + k_1 + k_2)} = \frac{k_2 a}{k_1 + k_2} \left[\frac{1}{p} - \frac{1}{p + k_1 + k_2} \right]$$

<u>Koordenatuen kalkulua:</u>

$$x(t) = \mathfrak{L}^{-1}[X(p)] = \frac{k_1 a}{k_1 + k_2} \left[1 - \exp[-(k_1 + k_2)t] \right],$$

$$y(t) = \mathfrak{L}^{-1}[Y(p)] = \frac{k_2 a}{k_1 + k_2} \left[1 - \exp[-(k_1 + k_2)t] \right].$$

k_1 eta k_2 proportzionaltasun-konstanteak kalkulatzeko, hurrengo datuak erabiliko dira:

$$x(1) = a/8 \longrightarrow a/8 = \frac{k_1 a}{k_1 + k_2} \left[1 - \exp[-(k_1 + k_2)] \right],$$

$$y(1) = 3a/8 \longrightarrow 3a/8 = \frac{k_2 a}{k_1 + k_2} \left[1 - \exp[-(k_1 + k_2)] \right].$$

Bi berdintzak zatitu, eta x(1) adierazpenean ordezkatuko da.

$$y(1)/x(1) = 3 = k_2/k_1 \longrightarrow k_2 = 3k_1 \longrightarrow a/8 = a/4\ [1 - \exp(-4k_1)]$$

$$\longrightarrow 1/2 = 1 - \exp(-4k_1) \longrightarrow \exp(-4k_1) = 1/2 \xrightarrow{Ln}$$

$$k_1 = \frac{Ln2}{4} \qquad \Rightarrow \qquad k_2 = 3k_1 = \frac{3Ln2}{4}.$$

Konstante hauek x(t) eta y(t)-ren adierazpenetan ordezkatzen badira, B eta C-ren t-rekiko erakuntza-legeak izango ditugu:

$$x(t) = \frac{a}{4}\,[1 - e^{(-Ln2)t}] = \frac{a}{4}\,[1 - 2^{-t}], \qquad y(t) = \frac{3a}{4}\,[1 - 2^{-t}].$$

Azken galderari erantzutea falta da. A-ren hasierako kantitatea, a alegia, laurdena bihurtzea, eta B eta C-ren eratutako kantitateen batura a-ren hiru laurdenak izatea, baliokideak dira. Beraz, emaitza hurrengoa da:

$$x(t) + y(t) = 3a/4 \longrightarrow a\,[1 - 2^{-t}] = 3a/4 \longrightarrow 2^{-t} = 1/4 = 2^{-2} \longrightarrow$$

$$t = 2 \text{ ordu}.$$

4.3 Ekuazio integralak

Problema ugaritarako aplikagarria denez, konboluzio-motako ekuazio integrala bereizgarria da. Honek ondoko adierazpena du:

$$x(t) = f(t) + \int_0^t g(t-u)x(u)du.$$

Eragile-metodoa konboluzio-teoreman datza. Eragilea aplikatuz,

$$X(p) = F(p) + G(p)X(p) \quad \Rightarrow \quad X(p) = \frac{F(p)}{1 - G(p)} \quad \xrightarrow{\mathfrak{L}^{-1}}$$

$$\boxed{x(t) = \mathfrak{L}^{-1}\left[\frac{F(p)}{1 - G(p)}\right]}$$

ondorioztatuko dugu.

Aplikazio-adibidea:

Ebatzi $x(t) = e^t + \int_0^t x(\lambda)\, e^{t-\lambda} d\lambda$ ekuazio integrala.

E: Integrala konboluzio-motakoa da. $\mathfrak{L}$ aplikatuta ebatziko dugu.

$$X(p) = 1/(p-1) + X(p)\, \mathfrak{L}[e^t] = 1/(p-1) + X(p)/(p-1) = \frac{1 + X(p)}{p - 1} \longrightarrow$$

$$X(p) = 1/(p-2) \xrightarrow{\mathfrak{L}^{-1}} x(t) = e^{2t}.$$

4.4 Ekuazio integro-diferentzialak

Aplikazio interesgarri hau, eragileak deribatuarekiko eta integralarekiko dituen propietateen ondorioa da. Aurreko kasuetan bezala, lehenengo eragile zuzena aplikatuko da, gero ondorioztatutako ekuazioa funtzioaren transformatuarekiko ebatziko da, eta azkenik, alderantzizko eragilea aplikatuko da.

Aplikazio-adibidea:

Hasieran pasiboa [i(0) = 0] den **RLC** zirkuitu baten ekuazioa, hots,

$$Li'(t) + Ri(t) + \frac{1}{C}\int_0^t i(t)dt = e(t),$$

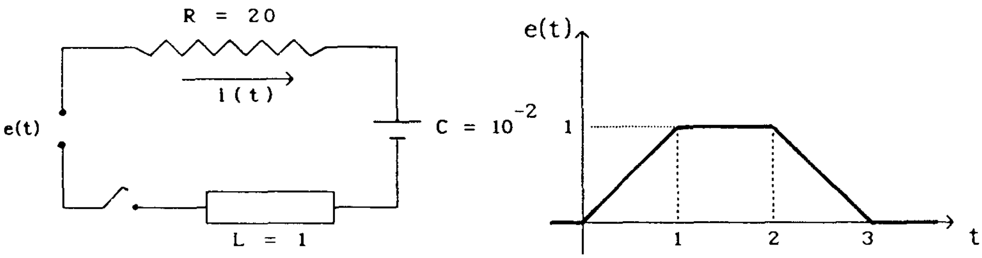
ondoko ekuazio algebraiko bilakatuko da:

$$LpI(p) + RI(p) + I(p)/Cp = E(p).$$

Hortik hurrengoa ondoriozta daiteke:

$$i(t) = \mathfrak{L}^{-1}\left[\frac{CpE(p)}{LCp^2 + RCp + 1}\right].$$

Adibide praktiko moduan, har dezagun hasieran pasiboa den irudiko zirkuitu elektrikoa, zeinari grafikoan deskribatutako e(t) tentsioa aplikatuko zaion. Behin etengailua itxiz gero, aurki bedi sistemaren erantzuna i(t)-rekiko, non i(t) zirkuituko korronte intentsitatea den.



e(t) pultsu trapezoidalaren adierazpen analitikoa, ondokoa da:

$$e(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ t, & 0 < t < 1, \\ 1, & 1 < t < 2, \\ 3-t, & 2 < t < 3, \\ 0, & 3 < t. \end{cases}$$

Edo, maila-funtzioen bidez, hurrengo idazkera du:

$$e(t) = t[u_0 - u_1] + [u_1 - u_2] + (3 - t)[u_2 - u_3] =$$

$$= tu_0 + (1 - t)u_1 + (2 - t)u_2 + (t - 3)u_3.$$

$\mathcal{L}[f(t)u_a] = e^{-ap}\mathcal{L}[f(t + a)]$ propietatea aplikatuz, ondokoa dugu:

$$\mathcal{L}[e(t)] = \mathcal{L}[t] + e^{-p}\mathcal{L}[-t] + e^{-2p}\mathcal{L}[-t] + e^{-3p}\mathcal{L}[t] \quad \Rightarrow$$

$$\mathcal{L}[e(t)] = [1 - e^{-p} - e^{-2p} + e^{-3p}]/p^2.$$

Bestalde, zirkuituaren ekuzio integro-diferentziala hurrengoa da:

$$Li'(t) + Ri(t) + \frac{1}{C}\int_0^t i(t)dt = e(t), \quad i(0) = 0.$$

Datuak sartu eta $\mathcal{L}$ eragilea aplikatu ondoren,

$$pI(p) - i(0) + 20I(p) + 100I(p)/p = [1 - e^{-p} - e^{-2p} + e^{-3p}]/p^2$$

lor dezakegu. Bakanduz, I(p)-ren adierazpena kalkula daiteke:

$$(p^2 + 20p + 100)I(p)/p = [1 - e^{-p} - e^{-2p} + e^{-3p}]/p^2 \quad \Rightarrow$$

$$I(p) = [1 - e^{-p} - e^{-2p} + e^{-3p}]/p(p + 10)^2.$$

Alderantzizkoa kalkulatzeko erabili den propietatea hurrengoa da:

$$\mathcal{L}^{-1}[e^{-ap}F(p)] = f(t-a)u_a.$$

Hori baino lehen, konboluzio-teoremaren bidez, ondokoa dugu:

$$\mathcal{L}^{-1}[1/p(p + 10)^2] = \int_0^t ue^{-10u}du = \left| -(10u + 1)e^{-10u}/100 \right|_0^t =$$

$$= [1 - e^{-10t}(10t + 1)]/100.$$

Gero, propietatea I(p)-ren adierazpeneko batugai bakoitzari aplikatuko zaio.

$$i(t) = \frac{1 - e^{-10t}(10t + 1)}{100} - \frac{1 - e^{-10(t-1)}(10t - 9)}{100} u_1 -$$

$$- \frac{1 - e^{-10(t-2)}(10t - 19)}{100} u_2 + \frac{1 - e^{-10(t-3)}(10t - 29)}{100} u_3.$$

4.5 Deribatu partzialetako ekuazioak

Eragile-metodoak, mugalde-baldintza eta koefiziente konstanteetako deribatu partzialetako zenbait ekuazio lineal ebazteko ere, oso erabilgarriak dira.

Sarrera gisa, $u(x,t)$ delakoa $t > 0$ eta $a \leq x \leq b$ tartean definituriko funtzioa bada, eta x parametro modura hartzen badugu, definizioa aplikatuz hurrengoa ondoriozta daiteke:

$$\mathcal{L}\,[u(x,t)] = U(x,p) = \int_0^\infty e^{-pt} u(x,t)dt.$$

Deribatu partziala kalkulatzen badugu eta $\mathcal{L}$ eragilea aplikatzen badugu, kasu honetan, ondokoa lortuko da:

$$\mathcal{L}[\partial u/\partial t] = pU(x,p) - u(x,0),$$

$$\mathcal{L}[\partial u/\partial x] = \int_0^\infty e^{-pt} \partial u/\partial x \; dt = \partial/\partial x \int_0^\infty e^{-pt} u(x,t)dt = dU/dx.$$

Aurreko emaitzak erabiliz, bigarren deribatuetarako ondokoa izango dugu:

$$\mathcal{L}[\partial^2 u/\partial t^2] = p^2U(x,p) - pu(x,0) - \partial u/\partial x\big|_{(x,0)} ,$$

$$\mathcal{L}[\partial^2 u/\partial x^2] = d^2U/dx^2.$$

Transformatu hauen bidez, deribatu partzialetako ekuazioa x aldagai independentedun U(x,p)-rekiko ekuazio arrunt bihurtu da. Hau ebatzitakoan, alderantzizko eragilea aplikatuz, deribatu partzialetako emaitzara iritsiko gara:

$$u(x,t) = \mathfrak{L}^{-1}[U(x,p)].$$

4.6 Integral mugatuen ebaluazioa

Existentziaren teoremak dioenez, transformatua definitzen duen

$$\mathfrak{L}[f(t)] = F(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t)dt$$

integrala $\forall p > \alpha_0$-tarako konbergentea da.

Integral honetan p parametroaren balioa finkatzen bada, 0 eta ∞ limiteen arteko integral mugatu askoren emaitzak lortuko dira.

Aplikazio-adibideak.- Kalkulatu ondoko integralen balioak:

$$I_1 = \int_0^{\infty} e^{at} \cos bt dt, \qquad I_2 = \int_0^{\infty} e^{-t} t^n dt,$$

$$I_3 = \int_0^{\infty} e^{-2t} t \sin 3t dt, \qquad I_4 = \int_0^{\infty} \frac{\cos 3t - \cos t}{t} dt.$$

E: I_1-en balioa, $\mathfrak{L}[\cos bt]$ adierazpenean $p = -a$ ordezkaketa eginez lortuko da:

$$I_1 = \left| p/(p^2 + b^2) \right|_{p=-a} = -a/(a^2 + b^2).$$

I_2-rena, $\mathfrak{L}[t^n]$ adierazpenean p = 1 eginez:

$$I_2 = \left| n!/p^{(n+1)} \right|_{p=1} = n!.$$

I_3-rako, $\mathfrak{L}[tsinat]$ transformatuan p = 2 eta a = 3 hartuko dira:

$$I_3 = \left| \frac{2ap}{(p^2 + a^2)^2} \right|_{p=2,a=3} = 12/169.$$

I_4-rako, f(t) = (cosat - cosbt)/t funtzioaren transformatuan p = 0 a = 3, b = 1 ordezkatuko ditugu:

$$I_4 = \left| \frac{1}{2} \operatorname{Ln} \frac{p^2 + b^2}{p^2 + a^2} \right|_{p=0,a=3,b=1} = \frac{1}{2} \operatorname{Ln} \frac{1}{9}.$$

4.7 Sistema fisikoen analisia

Demagun sistema fisiko jakin batetan "sarrerako seinale" deritzon kitzikapen batek eragiten duela, beraren adierazpen analitikoa, e(t) alegia, ordena exponentzialeko funtzio quasijarraia delarik. Sistemak kitzikapenari erantzuten badio, s(t) adierazpeneko "irteerako seinale" deritzon erantzuna sortaraziko du.

Halaber, demagun sistema hasieran orekan dagoela, hau da, sarrerako seinalearekiko hastapen-baldintzak nuluak direla. Sistemari asoziaturiko fenomeno fisikoa deskribatzen duten ekuazioak ezartzean, oinarrizko lege zein aurretiko saiakuntza baten bidez, sistemarako eredu matematikoa lortuko da. Oro har, eredu honi Laplace-ren transformatua aplika dakioke. Honela bada, eragile-tekniken bidez aldez aurretiko kitzikapenarekiko erantzun moduan sistema fisikoaren irteerako seinalea lortu ahal izango dugu.

Hurrengo atalak laburki sistema baten indize-erantzuna eta pultsu-erantzuna deritzenei buruz arituko dira.

4.7.1 Transferentziaren eta indize-admitantziaren funtzioak.

Ereduko ekuazioei Laplace-ren eragilea aplikatu eta ondorioztatutako ekuazio algebraikoak S(p)-rekiko ebatziz gero, hots, s(t) irteerako seinalearen transformatuarekiko, orduan ondoko erako adierazpen batetara iritsiko gara:

$$\mathcal{L}[s(t)] = T(p)\mathcal{L}[e(t)], \quad \text{edo}, \quad S(p) = T(p)E(p).$$

Transferentzi funtzioa deritzon T(p) funtzioak, sarrerako eta irteerako seinaleen transformatuen arteko arrazoia adierazten du. T(p) sistemaren barrutiko ezaugarri bat da.

$$\boxed{T(p) = \frac{\mathcal{L}[\text{sarrera}]}{\mathcal{L}[\text{irteera}]} = \frac{S(p)}{E(p)} .}$$

Dagokion eskema funtzionala, hurrengoa izango da:

$$E(p) \longrightarrow \boxed{T(p)} \longrightarrow S(p)$$

Sistema linealen kasuan, T(p) delakoa p-rekiko bi polinomioen arteko zatiketa da. Adibidez, zirkuitu elektrikoen kasuan, T(p)-ren alderantzizkoa sarearen Z(p) inpedantzia besterik ez da.

4.7.1.1 Sistema baten indize-erantzuna.

T(p) transferentzi funtziodun sistema bati sarrerako seinale gisa $u_0(t)$ unitate-maila deritzon funtzioa aplikatzen bazaio, erantzunari a(t) **indize-admitantzia** deritzo. Orduan,

$$e(t) = u_0(t), \quad s(t) \equiv a(t) \longrightarrow E(p) = 1/p, \quad S(p) \equiv A(p),$$

$$S(p) = T(p)E(p) \longrightarrow A(p) = T(p)/p \longrightarrow a(t) = \mathcal{L}^{-1}[T(p)/p]$$

ondoriozta daiteke. Orain, edozein e(t) sarrerako seinaletarako ondokoa idaz daiteke:

$$\mathcal{L}[s(t)] = T(p)\mathcal{L}[e(t)] = p\,\frac{T(p)}{p}\,\mathcal{L}[e(t)] = p\,\mathcal{L}[a(t)]\,\mathcal{L}[e(t)].$$

f'(t)-ren transformatuan $f(0^+) = 0$ denean, hurrengoa dugu:

$$\mathcal{L}[f'(t)] = pF(p) - f(0^+) = pF(p) \longrightarrow \mathcal{L}^{-1}[pF(p)] = f'(t).$$

$\mathcal{L}[s(t)]$ adierazpenean p faktoreak parte hartzen duenez, orduan

$$s(t) = \mathcal{L}^{-1}\Big[p[A(p)E(p)]\Big] = d/dt\Big[\mathcal{L}^{-1}[A(p)E(p)]\Big],$$

eta konboluzio-propietatea aplikatuz, ondokoa lortuko da:

$$s(t) = d/dt\left[\int_0^t a(t-u)e(u)du\right] = d/dt\left[\int_0^t a(u)e(t-u)du\right].$$

Gogora dezagun parametro bakar baten menpeko integraletarako deribazio-erregela:

$$d/dt\left[\int_{m(t)}^{n(t)} G(t,u)du\right] = \int_{m(t)}^{n(t)} \frac{\partial G}{\partial t}\,du + G[t,n(t)]\,\frac{dn}{dt} - G[t,m(t)]\,\frac{dm}{dt}\,.$$

Beraz, irteerako seinalea ondokoa da:

$$s(t) = \int_0^t a'(t-u)e(u)du + a(0)e(t) = \int_0^t a(u)e'(t-u)du + a(t)e(0).$$

Hasieran sistema pasiboa denez, $a(0) = 0$ alegia, $t-u = \tau$ aldagai-aldaketak Duhamel-en formulak ondorioztatzera garamatza:

$$\boxed{s(t) = \int_0^t a'(\tau)e(t-\tau)d\tau = \int_0^t a(t-\tau)e'(\tau)d\tau + a(t)e(0).}$$

Formula hauek sistemak $e(t)$ sarrerako seinale orokorrarekiko duen erantzuna idaztea ahalbidetuko dute, erantzuna $a(t)$ indize-admitantziaren menpekoa izango delarik. Duhamel-en formulen abantailik oinarrizkoena hurrengo hau da: hasieran pasiboa den sistema maila-funtzio batek kitzikatzen duen kasuan, erantzun indiziala experimentalki aurkitzeko erraztasuna.

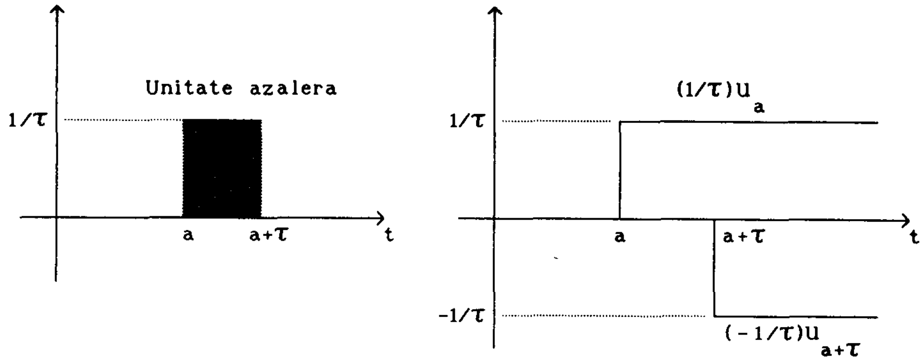
4.7.2 Dirac-en delta-funtzioa. Propietateak eta aplikazioak.

Sistema baten erantzuna bere pultsu-erantzunaren menpe idatzi baino lehen, beharrezkoa da Dirac-en pultsu-funtzioa edo delta-funtzioa definitzea. Ikuspegi matematiko zorrotz batetatik hutsune edo kontraesan batzu izan arren, funtzio honek matematika aplikatuan erabilgarritasun handia du.

Bira $g(t)$ pultsu errektangeluarra eta $(1/\tau)$ intentsitate konstantepeko kitzikapena, $t = a$ unean aplikatuz gero, $t = a + \tau$ aldiunean (τ denbora-unitatetan zehar eragin ondoren), bat-batean geldituko delarik. Ohartzekoa da, funtzioa bere iraupen-denboraz biderkatuz lortzen den emaitza unitatea dela.

Irudietan ikus daitekeenez, pultsua, maila-funtzioen bidez idatz daiteke:

$$g(t) = \frac{u_a - u_{a+\tau}}{\tau} .$$



Aplikazio-tartea oso txikia egiten bada, kitzikapenaren balioa oso haundia izan behar da. Demagun denbora infinitesimal batetan zehar eragiten duen nahi adinako handia den funtzio kitzikatzailea existitzen dela, τ delakoa zerorantz doanean intentsitatea eta iraupenaren arteko biderkaketa unitatea izango delarik.

Ideia honen emaitza, Dirac-en pultsu-funtzioa edo delta-funtzioa da, beraren adierazpena hurrengoa delarik:

$$\delta(t-a) \equiv \delta_a(t) \equiv \delta_a = \begin{cases} 0, & t \neq a \\ \infty, & t = a \end{cases} \quad , \quad \int_a^{a+\tau} \delta_a(t)dt = 1.$$

Dagokion Laplace-ren transformatua ondokoa da:

$$\mathfrak{L}[\delta_a] = \int_0^\infty e^{-pt}\delta_a dt = \lim_{\tau\to 0} \int_a^{a+\tau} e^{-pt}(1/\tau)dt = \lim_{\tau\to 0} (1/\tau)\left|-e^{-pt}/p\right|_a^{a+\tau} =$$

$$= \lim_{\tau\to 0} \frac{1}{\tau}\left[\frac{e^{-pa} - e^{-p(a+\tau)}}{p}\right] = e^{-pa}\lim_{\tau\to 0}\left[\frac{1 - e^{-\tau p}}{\tau p}\right] = e^{-pa} \quad \Rightarrow$$

$$\boxed{\mathfrak{L}[\delta_a(t)] = e^{-pa} \xrightarrow{a=0} \mathfrak{L}[\delta_0(t)] = 1.}$$

Emaitza hau garrantzitsua da, konstanteen alderantzizko kalkulua posible egiten duelako.

Beraren propietate nabarmenenak ondokoak dira:

a) Konstanteen alderantzizko transformatuak kalkulatzea ahalbidetzen du.

b) $$\int_0^\infty e(t)\delta_a(t)dt = e(a)$$

formularen bidez, $e(t)$ funtzioak $t = a$ puntu konkretuan duen balioa kalkula daiteke.

Ingeniaritza elektriko eta mekanikoaren arloetan, Dirac-en funtzioak bi aplikazio aipagarri ditu.

Biz hasieran pasiboa den zirkuitu elektrikoa, soilik E_m tentsio iturri eta C kapazitatea dauzkalarik. Zirkuitu honetarako

$$\frac{1}{C}\int_0^t i(t)\,dt = E_m$$

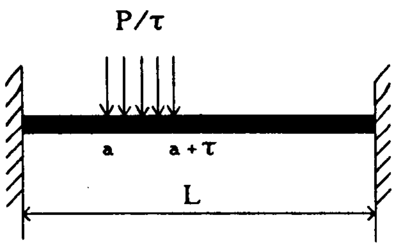
ekuazio diferentziala beteko da.

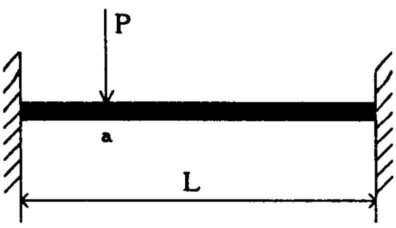
Bestalde, Laplace-ren eragilea aplikatuz,

$$I(p)/Cp = E_m/p \longrightarrow I(p) = CE_m \xrightarrow{\mathfrak{L}^{-1}} i(t) = CE_m\delta_0$$

lor daiteke. Aparteko kasu honetarako, jotze edo eraunspen elektrikoa deritzon sistemaren erantzuna Dirac-en funtzioaren menpekoa da. Zirkuituko kondentsadorea bat-batean kargatzeko gai den infinitu gisa uler daiteke.

Materialen erresistentziaren arloan, Dirac-en pultsu funtzioak habe batetako puntu batetan kontzentraturiko P karga deskribatuko du, τ zerorantz doanean, $a < x < a + \tau$ habeko tartean uniformeki banaturik dagoen P/τ magnitudeko kargaren limitea intuitiboki planteatzean.





Limitean, luzera-unitateko karga ondokoa izango da:

$$\omega(x) = \begin{cases} 0, & x \neq a, \\ \infty, & x = a, \end{cases} \qquad \int_0^L \omega(x)dx = P.$$

4.7.2.1 Sistema baten pultsu-erantzuna.

Demagun hasieran pasiboa den sistema bati, pultsu-unitatea deritzon kitzikapena aplikatuko zaiola. Sistemaren erantzunari kasu honetan pultsu-erantzuna deritzo, eta h(t) idatziko da.

Indize-erantzunaren eta pultsu-erantzunaren arteko erlazioa:

$$\mathfrak{L}[h(t] = T(p)\mathfrak{L}[\delta_0(t)] = T(p) \longrightarrow \mathfrak{L}[h(t)] = p\,\frac{T(p)}{p} = p\mathfrak{L}[a(t)].$$

Beraz, transformatuaren propietateetatik ondokoa lor daiteke:

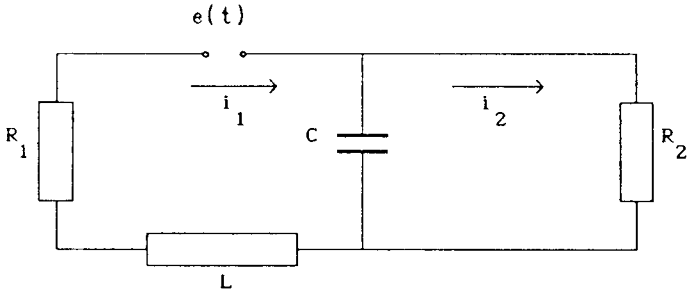
$$h(t) = a'(t).$$

Hau da, sistema batek pultsu-unitatearekiko duen erantzuna, maila-funtzio batekiko erantzunaren deribatua da. Emaitza hau Duhamel-en formuletan ordezkatzen bada,

$$\boxed{s(t) = \int_0^t h(\tau)e(t-\tau)d\tau}$$

ondorioztatuko da. Adierazpen honek sistemaren sarrerako seinale orokor batekiko erantzuna adieraziko du, pultsu-erantzunaren funtzioan egongo delarik.

Adibidea.- q(t) delakoa kondentsadoreko karga bada, eta $i_1(t)$ eta $i_2(t)$ direlakoak hasieran pasiboa den zirkuitu elektrikoaren korronteak badira, aurki bitez a(t) indize-erantzuna eta h(t) pultsu-erantzuna ezkerreko saretik doan $i_1(t)$ intentsitaterako, aplikatutako e(t) tentsioa sarrerako seinale modura hartuko delarik. Kalkulatu irteerako erantzuna e(t) = 500sin10t denean.



$$R_1 = R_2 = 10\ \Omega\ ,\quad L = 1\ H\ ,\quad C = 0{,}01\ F.$$

Kirchoff-en legeak aplikatuz, hurrengo sistema ondorioztatuko da:

$$\begin{cases} R_1 i_1(t) + L\ i_1'(t) + R_2 i_2(t) = e(t), & [1] \\ R_2 i_2(t) + \dfrac{1}{C}\displaystyle\int_0^t [i_2(t) - i_1(t)]dt = 0. & [2] \end{cases}$$

Indize-erantzuna lortzeko, demagun e(t) = $u_0(t)$ maila-tentsioa aplikatu dela. Zenbakizko balioak ordezkatuz, $i_1(0) = 0$ eginez, eta $\mathfrak{L}$ aplikatuz, hurrengoa dugu:

$$\begin{cases} 10i_1 + i_1' + 10i_2 = u_0(t), \\ \\ i_2 + 10\displaystyle\int_0^t (i_2 - i_1)dt = 0, \end{cases} \xrightarrow{\mathfrak{L}} \begin{cases} 10I_1 + pI_1 + 10I_2 = \dfrac{1}{p}, \\ \\ I_2 + \dfrac{10}{p}(I_2 - I_1) = 0, \end{cases} \longrightarrow$$

$$\begin{cases} (10+p)I_1(p) + \quad 10I_2(p) = \dfrac{1}{p}, & [3] \\ \\ -10I_1(p) + (p+10)I_2(p) = 0. & [4] \end{cases}$$

Sistema honen soluzioa ondoko hau da:

$$I_1 = \frac{p+10}{p(p^2+20p+200)} \quad [5], \qquad I_2 = \frac{10}{p(p^2+20p+200)}. \qquad [6]$$

[5] eta [6] adierazpenen alderantzizkoak, $i_1(t)$ eta $i_2(t)$-rekiko indize-erantzunak dira.

$$I_1(p) = \frac{p+10}{p(p^2+20p+200)} = \frac{1}{20}\left[\frac{1}{p} - \frac{p+10}{(p+10)^2 + 100} + \frac{10}{(p+10)^2 + 100}\right] \longrightarrow$$

$$i_1(t) \equiv a_1(t) = \mathfrak{L}^{-1}[I_1(p)] = \frac{1 - e^{-10t}\cos 10t + e^{-10t}\sin 10t}{20}. \quad [7]$$

Deribatuz, pultsu-erantzuna lortuko da:

$$h_1(t) = a_1'(t) = e^{-10t}\cos 10t. \qquad [8]$$

Duhamel-en formularen arabera, hautazko e(t) sarrerako seinalearekiko sistemaren erantzuna $i_1(t)$ aldagaiaren funtzioan ondokoa da:

$$i_1(t) = \int_0^t h_1(\tau)e(t-\tau)d\tau = \int_0^t e^{-10\tau}\cos 10\tau \; e(t-\tau)d\tau. \qquad [9]$$

$e(t) = 500\sin 10t$ tentsiorako,

$$i_1(t) = 500\int_0^t e^{-10\tau}\cos 10\tau \; \sin 10(t-\tau)d\tau \qquad [10]$$

izango da. Eta integral hau ebazteko, funtzio trigonometrikoen propietateak aplikatuko dira:

$$i_1(t) = 500\int_0^t e^{-10\tau}\cos 10\tau(\sin 10t\cos 10\tau - \cos 10t\sin 10\tau)d\tau =$$

$$= 500\sin 10t\int_0^t e^{-10\tau}\cos^2 10\tau d\tau - 500\cos 10t\int_0^t e^{-10\tau}\cos 10\tau\sin 10\tau d\tau =$$

$$= 250\sin 10t\int_0^t e^{-10\tau}(1 + \cos 20\tau)d\tau - 250\cos 10t\int_0^t e^{-10\tau}\sin 20\tau d\tau.$$

Integral hauek zatikako integrazioaren bidez ebatziko dira, hots,

$$i_1(t) = 250\sin 10t\left| \frac{-e^{-10\tau}}{10} + \frac{e^{-10\tau}}{500}\left(-10\cos 20\tau + 20\sin 20\tau\right)\right|_0^t -$$

$$- 250\cos 10t\left| \frac{e^{-10\tau}}{500}\left(-10\sin 20\tau - 20\cos 20\tau\right)\right|_0^t =$$

$$= 5\sin 10te^{-10t}(-5 - \cos 20t + 2\sin 20t) + 30\sin 10t +$$

$$+ 5\cos 10te^{-10t}(\sin 20t + 2\cos 20t) - 10\cos 10t =$$

$$= 30\sin 10t - 10\cos 10t + 10e^{-10t}(\sin 10t \sin 20t + \cos 10t \cos 20t) -$$

$$- 5e^{-10t}(\sin 10t \cos 20t - \cos 10t \sin 20t) - 25e^{-10t}\sin 10t \quad \longrightarrow$$

$$i_1(t) = 30\sin 10t - 10\cos 10t + 10e^{-10t}(\cos 10t - 2\sin 10t). \quad [11]$$

Oharra: Zirkuitua beste era batetan ebatzita dago 57. ariketan.

IV. GAIA: BERREDURA-SERIEEN BIDEZKO INTEGRAZIOA.

1. SARRERA ETA DEFINIZIOAK

2. EKUAZIO DIFERENTZIAL NABARMENAK

1. SARRERA ETA DEFINIZIOAK

1.1 Aurrekontsiderazioak

Aurreko gaietan ikusi denez, n. ordenako

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = f(x)$$

ekuazio diferentzial baten integrazioa, ekuazio homogeno asoziatuaren n soluzio linealki independente eta ekuazio osotuaren soluzio partikular bat aurkitu eta batzean datza.

Halaber, funtzio elementalen bidez ebatz daitezkeen salbuespenak nabarmendu dira. Zailtasun hau gainditzeko, normalean zenbakizko metodoen bidezko integrazio hurbildura jotzen dugu. Alternatiba gisa, gai hauetan aztertuko den berredura-serieen bidezko soluzioekin ere egin ohi dira aprobak. Horretarako, serie funtzional hauen definizio eta propietateak gogoratu behar dira.

1.2 Berredura-serieen propietateak

Ondoko serie funtzionalari a puntuan zentraturiko berredura-serie deritzo:

$$\sum_0^\infty a_n(x-a)^n = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \dots + a_n(x-a)^n + \dots \quad [1]$$

Lehenengo n gaien batura partziala eta seriearen hondarra, ondokoak dira, hurrenez hurren:

$$S_n(x) = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \dots + a_{n-1}(x-a)^{n-1}, \quad [2]$$

$$R_n(x) = a_n(x-a)^n + a_{n+1}(x-a)^{n+1} + a_{n+2}(x-a)^{n+2} + \dots \quad [3]$$

Ondorioz, seriea hurrengo eran idatz daiteke:

$$S(x) = \sum_{0}^{\infty} a_n(x-a)^n = S_n(x) + R_n(x).$$

a = 0 kasua sarri aplikatuko da, berredura-seriea ondokoa delarik:

$$\sum_{0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots \qquad [4]$$

Konbergentziaren definizioa. Konbergentzi tarteak.

Baldin existitzen bada

$$\lim_{n\to\infty} S_n(c) = S(c) \longleftrightarrow \forall n > N\text{-tarako}, \ |S_n(c) - S(c)| = |R_n(c)| < \varepsilon,$$

orduan seriea $x = c$ puntuan konbergentea da, seriearen balioa $S(c) = \sum_{0}^{\infty} a_n(c-a)^n$ izango delarik.

Seriea konbergentea deneko puntu-multzoa, seriearen konbergentzi tartea da. Bestalde, $x = a$ puntuan zentraturiko edozein berredura-serie, puntu horretan konbergentea da, izan ere, ondokoa baitugu:

$$S(x) = \sum_{0}^{\infty} a_n(x-a)^n \longrightarrow S(a) = a_0 + a_1 0 + a_2 0 + \dots = a_0.$$

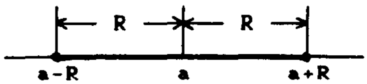
Gainera, seriea beste puntu batzuetan ere konbergentea izan daiteke. Hurrengo kasuak izan ditzakegu:

1. Serieak soilik $x = a$ puntuan konbergituko du.

2. Serieak ardatz erreal osoan konbergituko du.

3. Seriea $|x-a| < R$ tartean konbergentea da eta $|x-a| > R$ denean dibergentea da.

R zenbakiari seriearen konbergentzi erradioa deritzo, konbergentzi tartea a puntuan zentraturiko eta R erradioko tarte irekia delarik.

$a - R < x < a + R \quad \longrightarrow$ 

Aurreko biak hirugarrenaren kasu partikularrak dira, lehenengoan $R = 0$ eta bigarrenean $R = \infty$ harturik.

Konbergentzi erizpideak:

Gehien erabiltzen direnak hauexek dira:

Erroaren erizpidea: $\quad 1/R = \lim_{n\to\infty} |a_n|^{1/n}.$

Arrazoiaren erizpidea: $\quad 1/R = \lim_{n\to\infty} |a_{n+1}/a_n|.$

Tartearen muturretan, hots, (a-R) eta (a+R) puntuetan, konbergentziaren azterketa puntuala egin behar da.

Adibidea.- Kalkulatu ondoko serieen konbergentzi erradioak:

a) $\sum_0^\infty n^n x^n,$ $\quad$ b) $\sum_0^\infty (n/2^n)x^n,$ $\quad$ c) $\sum_0^\infty x^n/n!.$

E: a) kasuan erroaren erizpidea aplikatuko da, eta b) eta c) kasuetan arrazoiarena.

a) $1/R = \lim_{n\to\infty} |a_n|^{1/n} = \lim_{n\to\infty} n = \infty \quad \longrightarrow \quad R = 0.$

b) $1/R = \lim_{n\to\infty} |a_{n+1}/a_n| = \lim_{n\to\infty} \dfrac{(n+1)/2^{n+1}}{n/2^n} = \lim_{n\to\infty} \dfrac{n+1}{2n} = \dfrac{1}{2} \longrightarrow \quad R = 2.$

c) $1/R = \lim_{n\to\infty} |a_{n+1}/a_n| = \lim_{n\to\infty} \dfrac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n\to\infty} \dfrac{1}{n+1} = 0 \quad \longrightarrow \quad R = \infty.$

Berredura-serieen oinarrizko propietateak.

Ekuazio diferentzialen ebazpen eta jatorrizkoen kalkulurako berredura-serieen aplikazioa aztertu baino lehen, hurrengo teoreman biltzen diren propietateak aipatu behar dira:

"$y = \sum_{0}^{\infty} a_n(x-a)^n$ serieak $R > 0$ konbergentzi erradioa badu,

$$y' = \sum_{0}^{\infty} na_n(x-a)^{n-1} = a_1 + 2a_2(x-a) + 3a_3(x-a)^2 + 4a_4(x-a)^3 + \ldots$$

serie deribatua eta,

$$\int y\,dx = \sum_{0}^{\infty} \frac{a_n(x-a)^{n+1}}{n+1} = a_0(x-a) + \frac{a_1(x-a)^2}{2} + \frac{a_2(x-a)^3}{3} + \ldots$$

serie integrala, konbergentzi erradio bereko funtzio jarraiak dira".

Halaber,

$$y'' = \sum_{0}^{\infty} n(n-1)a_n(x-a)^{n-2}, \qquad y''' = \sum_{0}^{\infty} n(n-1)(n-2)a_n(x-a)^{n-3}, \ \ldots$$

ondoz-ondoko deribatuak, erradio berekoak eta konbergenteak dira. Edozein kasutan, tartearen muturretan, (a-R) eta (a+R) puntuetan alegia, konbergentzia puntualki aztertu behar izango da.

Azkenik,

$$\text{B.S.O.:} \qquad (x-a)^r \sum_{0}^{\infty} a_n(x-a)^n = \sum_{0}^{\infty} a_n(x-a)^{n+r} \qquad [5]$$

adierazpenari (x-a)-ren berreduretako serie orokortua (B.S.O.) deritzo. a puntuan zentraturiko seriea $(x-a)^r$ gaiaz biderkatuta lortuko den emaitza da.

1.3 Bigarren ordenako ekuazio diferentzialak

Serieen bidezko integrazioan, ekuazio diferentzialen soluziotzat berredura-serie bat hartuko dugu. Seriea eta beraren deribatuak ekuazioan ordezkatu eta gero, serie horren koefizienteak identifikazioz lortuko dira. Baina, lehenago soluzio hauek zein baldintzatan existituko diren jakin behar da, eta existituz gero, zein den beraien konbergentzi eremua. Azterketa honen zailtasun teorikoa ekiditeko, oinarrizko teoremak enuntziatzera mugatuko gara. Oraindik gehiago, aplikazio praktiko handikoak direnez, soilik bigarren ordenako ekuazioetarako berredura-serieen bidez emaniko soluzioen konbergentzia eta existentzia aztertuko ditugu.

Metodo honek emango dituen soluzioetatik, batzu oso interesgarriak eta funtzio berriak definitzeko oinarri dira, funtzio berri hauen ezagumenak eta tabulazioak aplikazio anitz ahalbidetu izan dituztelarik ingeniaritza-arloan.

Biz bigarren ordenako hurrengo ekuazio diferentziala,

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0, \qquad [1]$$

non x, y aldagaiak eta P(x) eta Q(x) funtzioak errealak diren.

[1] ekuazioaren berredura-serieen bidezko soluzioak aztertzean, P(x) eta Q(x) koefizienteek a puntuan duten portaera aztertu behar da, soluzioa a puntu horretan zentratuta garatuko delarik.

Soluzioen existentziaren teoremak enuntziatu baino lehen, ikus ditzagun aldez aurretik definizio batzu.

1 definizioa: f(x) funtzioak (a-R, a+R) tarte irekian konbergentea den

$$f(x) = \sum_{0}^{\infty} a_n (x-a)^n \qquad [2]$$

berredura-serieetako garapena onartzen badu, orduan f(x) delakoa funtzio analitikoa da.

2 definizioa: $P(x)$ eta $Q(x)$ koefizienteak $x = a$ puntuan analitikoak badira, $x = a$ delakoari [1] ekuazioaren **puntu arrunta** deritzo. Kontrako kasuan, **puntu singularra** deritzogu.

3 definizioa: $x = a$ puntuari **singular erregularra** deritzo, ondoko baldintzak betetzen badira: $x = a$ singularra, eta $(x-a)P(x)$ eta $(x-a)^2Q(x)$ funtzioak puntu horretan analitikoak dira. Kontrako kasuan $x = a$ **puntu singular irregularra** izango litzateke.

Ondoko teoremetan ikusiko dugunez, a puntu bat arrunta ala singular erregularra izatea, berredura-serieetako soluzioen existentziarekin erlazionaturik dago.

1.3.1 Serieen bidezko soluzioen existentziari buruzko teoremak.

1 teorema: "$P(x)$ eta $Q(x)$ funtzioak $(a-R, a+R)$ tartean analitikoak badira, hots, $x = a$ [1] ekuazio diferentzialaren puntu arrunta bada, orduan tarte horretan analitikoak diren $(x-a)$-ren berreduretako serieen bidezko bi soluzio independente existituko dira".

Ondorioz, [1]-aren soluzioa

$$\boxed{y(x) = \sum_{0}^{\infty} a_n (x-a)^n} \qquad [2]$$

seriearen bidez adieraz daiteke, zeinaren konbergentzi erradioa a-tik puntu singular hurbilenera dagoen distantzia baita.

Gainera, $y(a) = y_0$, $y'(a) = y_{10}$ hastapen-baldintzak beteko dituen berredura-serieen bidezko soluzio bakar bat existituko da, lehenengo koefizienteetarako $a_0 = y_0$, $a_1 = y_{10}$ beteko delarik.

2 teorema: " $x = a$ delakoa [1] ekuazioaren puntu singular erregular bat bada, soluzio ez-nabari bat existituko da,

$$\boxed{y = (x-a)^r \sum_0^{\infty} a_n (x-a)^n = \sum_0^{\infty} a_n (x-a)^{n+r}} \qquad [3]$$

alegia, (x-a)-ren berreduretako serie orokortua izango dena. Serie hau (a-R, a+R) tartean konbergentea dugu, R erradioa a puntutik ekuazioaren puntu singular hurbilenera dagoen distantzia izanik.

a delakoa puntu singular irregularra bada, orokorrean [1] ekuazio diferentzialerako ez da existituko soilik (x-a)-ren berreduren bidez garaturiko soluziorik.

Normalean, a puntu arrunta ala singular erregularra den arau, [2] ala [3] motako serieak aukeratuko dira, serie horiek [1] adierazpena identitate bihurtuko dutelarik. Soluzio den seriea konbergentea bada eta gaiz gai deriba badaiteke, orduan benetan nahi genuen soluzioa dela ziurta dezakegu.

Praktikan erabilgarria da (x-a)-ren ordez x-en berreduretako serie diren soluzioekin aproba egitea:

$$\boxed{y(x) = \sum_0^{\infty} a_n x^n \quad [4], \qquad y(x) = x^r \sum_0^{\infty} a_n x^n = \sum_0^{\infty} a_n x^{n+r}. \quad [5]}$$

Kasu honetara pasatzeko, nahikoa da ekuazio diferentzialean (x-a)-ren ordez t idaztea, eta soluzioa aurkitu ondoren, berriro x aldagaira itzultzea.

Adibideak.- Integratu ondoko ekuazioak berredura-serieen bidez:

a) $y'' - x^2 y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 2,$

b) $x^2(1 - x)y'' - x(1 + x)y' + y = 0,$

aldez aurretik puntu singularren existentzia eztabaidatuz.

E: $P(x) = 0$ eta $Q(x) = -x^2$ ardatz osoan analitikoak direnez, puntu guztiak arruntak dira. Horregatik, x-en berreduretako serie den soluzio batez egin daiteke aproba.

$$y(x) = \sum_0^\infty a_n x^n \longrightarrow y'(x) = \sum_0^\infty n a_n x^{n-1} \longrightarrow y''(x) = \sum_0^\infty n(n-1) a_n x^{n-2}.$$

Balio hauek ekuazioan ordezkatuz, hurrengoa dugu:

$$\sum_0^\infty n(n-1) a_n x^{n-2} - \sum_0^\infty a_n x^{n+2} = 0.$$

Batukari bietan x-en berretzaileak berdintzeko, bigarrenean n gaia (n-4)-balioaz aldatuko dugu, era horretan behe-indizea n = 4 zenbakian hasiko delarik:

$$\sum_0^\infty n(n-1) a_n x^{n-2} - \sum_4^\infty a_{n-4} x^{n-2} = 0.$$

Batukariak biltzeko behe-indizeak doitu behar dira, bietan n = 4 lortuz. Nahikoa da lehenengo batukariko lehenengo lau batugaiak banantzea. Orduan, hurrengoa lor daiteke:

$$2(1)a_2 + 3(2)a_3 x + \sum_4^\infty n(n-1) a_n x^{n-2} - \sum_4^\infty a_{n-4} x^{n-2} = 0 \qquad \longrightarrow$$

$$2a_2 + 6a_3 x + \sum_4^\infty [n(n-1)a_n - a_{n-4}] x^{n-2} = 0.$$

Ondorioz, x-en edozein baliotarako ondokoa dugu:

$$a_2 = a_3 = 0, \qquad n(n-1)a_n - a_{n-4} = 0.$$

Era honetan hurrengo errepikapen-legera iritsi gara:

$$a_2 = a_3 = 0, \qquad a_n = \frac{1}{n(n-1)} a_{n-4}, \quad n = 4,5,6, \ldots$$

n-ri balioak emanez, beste koefiziente guztiak determinatuko dira. a_0 eta a_1 konstanteen funtzioan idatz daitezke, hauek biak integrazio-konstante indeterminatuak direlarik.

a_2 eta a_3 nuluak direnez, hurrengoa ondorioztatuko da:

$$a_2 = 0 \longrightarrow a_6 = a_{10} = a_{14} = a_{18} = \ldots = a_{4n+2} = \ldots = 0, \ n = 1,2,3..$$

$$a_3 = 0 \longrightarrow a_7 = a_{11} = a_{15} = a_{19} = \ldots = a_{4n+3} = \ldots = 0, \ n = 1,2,3..$$

Koefiziente ez-nuluak beste hauek dira:

$$n = 4 \longrightarrow a_4 = \frac{1}{4.3} a_0, \qquad n = 5 \longrightarrow a_5 = \frac{1}{5.4} a_1,$$

$$n = 8 \longrightarrow a_8 = \frac{1}{8.7.4.3} a_0, \qquad n = 9 \longrightarrow a_9 = \frac{1}{9.8.5.4} a_1,$$

$$n = 12 \longrightarrow a_{12} = \frac{1}{12.11.8.7.4.3} a_0, \ n = 13 \rightarrow a_{13} = \frac{1}{13.12\ 9.8.5.4} a_1.$$

Kontutan hartu behar da ondoko legea:

$$a_{4n} = \frac{1}{4n(4n-1)(4n-4)(4n-5)\ldots 8.7.4.3} a_0, \qquad n = 1,2,3, \ldots$$

$$a_{4n+1} = \frac{1}{(4n+1)4n(4n-3)(4n-4)\ldots 9.8.5.4} a_1, \qquad n = 1,2,3, \ldots$$

Laburbilduz, soluzio orokorra berretzaile bikoiti eta bakoitietako bi serie independenteren arteko konbinazio lineala da, serie bakoitza soluzio bat izanik. Beraz, soluzio orokorraren idazkera ondokoa da:

$$y(x) = a_0\left[1 + \frac{x^4}{4.3} + \frac{x^8}{8.7.4.3} + \frac{x^{12}}{12.11.8.7.4.3} + \frac{x^{16}}{16.15.12\ldots 4.3} + ..\right]$$

$$+ a_1\left[x + \frac{x^5}{5.4} + \frac{x^9}{9.8.5.4} + \frac{x^{13}}{13.12.9.8.5.4} + \frac{x^{17}}{17.16.13...5.4} + ..\right].$$

Gai orokorra ordezkatu ondoren, beste adierazpen hau dugu:

$$y(x) = a_0\left[1 + \sum_0^\infty \frac{x^{4n}}{4n(4n-1)(4n-4)(4n-5)...8.7.4.3}\right] +$$

$$+ a_1\left[x + \sum_0^\infty \frac{x^{4n+1}}{(4n+1)4n(4n-3)(4n-4)...9.8.5.4}\right].$$

Soluzio partikularra kalkulatzeko, problemaren

$$y(0) = 1 \longrightarrow 1 = a_0, \qquad y'(0) = 2 \longrightarrow 2 = a_1$$

hastapen-baldintzak kontutan hartuko dira.

Adibideko bigarren ekuazioarako,

b) $$x^2(1 - x)y'' - x(1 + x)y' + y = 0$$

alegia, azter ditzagun puntuen ezaugarriak.

$P(x) = \dfrac{1+x}{x(x-1)}$ eta $Q(x) = \dfrac{1}{x^2(1-x)}$ funtzioak analitikoak dira, $x = 0$ eta $x = 1$ puntuetan izan ezik, non beraien balioa infinitua den. Froga dezagun puntu singular hauek erregularrak direla. $x = 0$ punturako $xP(x) = \dfrac{1+x}{x-1}$, $x^2Q(x) = \dfrac{1}{1-x}$ funtzioak analitikoak dira, -1 eta 1 balioak hartzen dituztelarik, hurrenez hurren. Ondorioz, puntu singular erregularra dugu.

$x = 1$ denean, $(x-1)P(x) = \dfrac{1+x}{x}$, $(x-1)^2Q(x) = (1-x)/x^2$ funtzioak analitikoak dira, 0 eta 2 balioak hartzen dituztelarik, hurrenez hurren. Horrela, puntu hau ere singular erregularra da.

Beraz, ekuazioaren soluzioak bilatzeko 0 eta 1 ez diren puntuetan zentraturiko berredura-serieez egin daiteke aproba, eta 0 eta 1 puntuetarako serie orokortuak kontsideratuko dira.

Egin dezagun aproba x-en berreduretako serie orokortu batez.

$$y = \sum_0^\infty a_n x^{n+r} \rightarrow y' = \sum_0^\infty (n+r)a_n x^{n+r-1} \rightarrow y'' = \sum_0^\infty (n+r)(n+r-1)a_n x^{n+r-2}$$

Ekuazio diferentzialean ordezkatuz, ondokoa lortuko da:

$$x^2(1 - x)y'' - x(1 + x)y' + y = 0 \longrightarrow \sum_0^\infty (n+r)(n+r-1)a_n x^{n+r} -$$

$$\sum_0^\infty (n+r)(n+r-1)a_n x^{n+r+1} - \sum_0^\infty (n+r)a_n x^{n+r} - \sum_0^\infty (n+r)a_n x^{n+r+1} + \sum_0^\infty a_n x^{n+r} = 0$$

Batukari guztietan x-ek (n+r) berretzaile bera izateko, bigarren eta laugarren batukarietan n idatzi ordez (n-1) idatziko da, dagozkien behe-indizeak 0-tik 1-era pasatuko direlarik.

$$\sum_0^\infty (n+r)(n+r-1)a_n x^{n+r} - \sum_1^\infty (n+r-1)(n+r-2)a_{n-1} x^{n+r} - \sum_0^\infty (n+r)a_n x^{n+r} -$$

$$\sum_1^\infty (n+r-1)a_{n-1} x^{n+r} + \sum_0^\infty a_n x^{n+r} = 0.$$

Orain, batukariak biltzeko, beraien behe-indizeak doitu behar dira. Lehen, hirugarren eta bosgarren batukarietatik lehenengo gaia banandu eta behe-indizeari 1 balioa emango zaio,

$$r(r-1)a_0 x^r - ra_0 x^r + a_0 x^r + \sum_1^\infty \Big([(n+r)(n+r-1) - (n+r) + 1]a_n -$$

$$- [(n+r-1)(n+r-2) + (n+r-1)]a_{n-1}\Big\} x^{n+r} = 0$$

delarik.

Demagun $a_0 \neq 0$ dela. Ekuazioaren lehenengo hiru gaiak anulatuta, ekuazio indizial deritzon hurrengo ekuazioa dugu:

$$r(r-1)a_0x^r - ra_0x^r + a_0x^r = (r^2-2r+1)a_0x^r = 0 \xrightarrow{\forall x} r^2 - 2r + 1 = 0,$$

non $r = 1$ erro bikoitza ondoriozta daitekeen.

Koefizienteen kalkulurako errepikapen-legea ekuazioaren batukaria anulatuta lortuko da. Hau da, edozein x-etarako hurrengoa izango dugu:

$$[(n+r)(n+r-1) - (n+r) + 1]a_n - [(n+r-1)(n+r-2) + (n+r-1)]a_{n-1} = 0 \longrightarrow$$

$$a_n = \frac{(n+r-1)(n+r-2)+(n+r-1)}{(n+r)(n+r-1)-(n+r)+1} a_{n-1}, \quad n = 1,2,3, \ldots$$

$r = 1$ kasua:

$$a_n = \frac{n(n-1)+n}{(n+1)n-(n+1)+1} a_{n-1} \quad \Rightarrow \quad a_n = a_{n-1}, \quad n = 1,2,3, \ldots$$

Koefiziente guztiak a_0-ren berdinak dira.

$$a_1 = a_0,\ a_2 = a_0,\ a_3 = a_0,\ \ldots,\ a_n = a_0 = \ldots$$

Orduan, ekuazio diferentzialaren soluzioa x arrazoiko serie geometriko bat izango da, hots,

$$y = x^r \sum_0^\infty a_n x^n = a_0 x[1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^n + \ldots],$$

$|x| < 1$ denerako konbergentea eta beraren batura $\frac{1}{1-x}$ delarik. Hortik, ondoko soluzioa dugu:

$$y_1 = a_0 \frac{x}{1 - x}.$$

Demagun y_2 beste soluzio independente ezezagun bat dela. y_2 lortzeko, $y_2 = y_1 u$ aldagai-aldaketa egingo da, honakoa ondoriozta daitekeelarik:

$$y_2 = y_1 \int \frac{\exp[-\int P(x)dx]}{y_1^2} dx.$$

$$P(x) = \frac{-(1+x)}{x(1-x)} \longrightarrow -\int P(x)dx = \int \frac{1+x}{x(1-x)} dx = \int \left(\frac{1}{x} + \frac{2}{1-x}\right) dx = \mathrm{Ln} \frac{x}{(1-x)^2}$$

y_2-ren adierazpenean ordezkatuz, hurrengo emaitzara irits gaitezke:

$$y_2 = \frac{x}{1-x} \int \frac{x/(1-x)^2}{[x/(1-x)]^2} dx = \frac{x}{1-x} \mathrm{Ln}x.$$

Azkenik, bi soluzio independente ezagunak izanik, soluzio orokorra ondokoa da:

$$y = Ay_1 + By_2 \longrightarrow y = \frac{x}{1-x} \left(A + B\mathrm{Ln}x\right).$$

---

2. EKUAZIO DIFERENTZIAL NABARMENAK

Bigarren ordenako deribatu partzialen bidezko eredu matematikoak dituzten sistema fisiko ugarik, adibidez uhin eta beroaren barreiapenaren ekuazioak, ekuazio arruntetako adierazpena onartuko dute. Horretarako aldagai-banaketa erabiliko da, zeinaren bidez Hermite, Legendre eta Bessel-en ekuazioak bezain garrantzitsuak diren ekuazio linealak lortuko diren. Dakusagun, aurreko gaian ikasitakoaren arabera, kasu hauetarako berredura-serieen bidezko soluzioak nola determina daitezkeen.

2.1. Hermite-ren ekuazioa

Ondoko erakoa da:

$$\boxed{y'' - 2xy' + 2\alpha y = 0,}$$

non α parametro erreala den. Ekuazio honen kasuan puntu guztiak arruntak dira. Horregatik, soluzioa edozein a puntutan zentraturiko berredura-serieen bidez adieraz daiteke. Dakusagun soluzioa x-en berreduretako serieen bidez.

$$y(x) = \sum_0^\infty a_n x^n \longrightarrow y'(x) = \sum_0^\infty na_n x^{n-1} \longrightarrow y''(x) = \sum_0^\infty n(n-1)a_n x^{n-2}.$$

Aurreko adibideetan bezala, ordezkatuz eta eragiketak eginez,

$$\sum_0^\infty n(n-1)a_n x^{n-2} - \sum_0^\infty 2na_n x^n + \sum_0^\infty 2\alpha a_n x^n = 0$$

ondoriozta daiteke.

Lehenengo batukarian n gaia (n+2) balioaz aldatuko da.

$$\sum_{-2}^\infty (n+2)(n+1)a_{n+2} x^n - \sum_0^\infty 2na_n x^n + \sum_0^\infty 2\alpha a_n x^n = 0.$$

$n = -1$ eta $n = -2$ kasuetan lehenengo batukariko gaiak nuluak dira. Beraz,

$$\sum_{0}^{\infty} [(n+2)(n+1)a_{n+2} - 2(n-\alpha)a_n]x^n = 0 \rightarrow (n+2)(n+1)a_{n+2} - 2(n-\alpha)a_n = 0$$

ondorioztatuko da, hurrengo errepikapen-legera iritsiko garelarik:

$$a_{n+2} = \frac{2(n-\alpha)}{(n+2)(n+1)} a_n, \quad n = 0,1,2,3, \ldots$$

Lehenengo koefizienteak hauexek dira:

$$n = 0 \rightarrow a_2 = \frac{-2\alpha}{2.1} a_0, \qquad n = 1 \rightarrow a_3 = \frac{2(1-\alpha)}{3.2} a_1,$$

$$n = 2 \rightarrow a_4 = \frac{2^2(2-\alpha)(-\alpha)}{4.3.2.1} a_0, \qquad n = 3 \rightarrow a_5 = \frac{2^2(3-\alpha)(1-\alpha)}{5.4.3.2} a_1,$$

$$n = 4 \rightarrow a_6 = \frac{2^3(4-\alpha)(2-\alpha)(-\alpha)}{6.5.4.3.2.1} a_0, \; n = 5 \rightarrow a_7 = \frac{2^3(5-\alpha)(3-\alpha)(1-\alpha)}{7.6.5.4.3.2} a_1.$$

Koefiziente bikoitiak a_0-ren funtzioan eta bakoitiak a_1-en funtzioan idatziko dira:

$$a_{2n} = \frac{2^n[2(n-1)-\alpha][2(n-2)-\alpha][2(n-3)-\alpha]\ldots[2-\alpha][-\alpha]}{(2n)!} a_0, \; n = 1,2,3..$$

$$a_{2n+1} = \frac{2^n[2n-1-\alpha][2n-3-\alpha][2n-5-\alpha]\ldots[3-\alpha][1-\alpha]}{(2n+1)!} a_1, \qquad n = 1,2,3..$$

Serie biak, berretzaile bikoiti zein bakoitietarakoak, independenteak dira. Beraz, soluzio orokorra honelaxe idatziko da:

$$y = a_0\left[1 + \sum_{1}^{\infty} a_{2n}x^{2n} \right] + a_1\left[x + \sum_{1}^{\infty} a_{2n+1}x^{2n+1} \right].$$

α zenbaki positibo osoa bada, errepikapen-legeak $n = \alpha$ indizetik hasita,

$$a_{n+2}, \quad a_{n+4}, \quad a_{n+6}, \ldots$$

koefizienteak nuluak direla adieraziko du. Ondorioz, soluzio diren serieak, polinomioak izango dira. α bikoitia bada, $\alpha = 2k$, $2k$ mailako polinomio bikoitiak, eta α bakoitia bada, $\alpha = 2k+1$, soluzioak $(2k+1)$ mailako polinomio bakoitiak izango dira. a_0 eta a_1 konstanteak ondokoak badira,

$$a_0 = (-1)^k \frac{(2k)!}{k!}, \quad a_1 = (-1)^k \frac{2(2k)!}{k!},$$

ondorioztatutako soluzioei Hermite-ren polinomioak deritze.

2.2 Legendre-ren ekuazioa

Ondoko erakoa da:

$$\boxed{(1 - x^2)y'' - 2xy' + p(p + 1)y = 0,}$$

non p parametro erreala den.

Ekuazio honen azterketa fisika matematikoaren beste ekuazio batzuren analisirako baliagarria da. Adibide gisa, koordenatu esferikoetan Laplace-ren ekuazioa aldagai-banaketaren metodoaz laburtutakoan, Legendre-ren ekuazioa ondorioztatuko da. Aurreko kasuan bezala, ekuazio honek propietate interesgarriak dituen soluzio polinomikoak ditu.

$x = \pm 1$ ez-arruntak diren puntu bakarrak dira, zeintzuetarako $P(x)$ eta $Q(x)$ funtzioek etengune infinitua duten. Puntu singular erregularrak dira. Hauetarako serie orokortuekin egin behar da aproba. Beraz, ondoko egoeran gaude:

$P(x) = -2x/(1-x^2)$, $Q(x) = p(p+1)/(1-x^2) \longrightarrow 1-x^2 = 0 \Rightarrow x = \pm 1$.

$(x-1)P(x) = 2x/(x+1)$, $(x-1)^2Q(x) = p(p+1)(1-x)/(1+x)$ funtzioak $x = 1$ puntuan jarraiak direnez, puntu hau singular erregularra da.

Era berean, $(x+1)P(x) = 2x/(x-1)$, $(x+1)^2Q(x) = p(p+1)(1+x)/(1-x)$ $x = -1$ puntuan jarraiak dira. Beraz, hau ere erregularra da.

$P(x)$ eta $Q(x)$ funtzioak $-1 < x < 1$ tartean analitikoak direnez, Legendre-ren ekuazioak x-en berreduretako serieen bidezko soluzioa onartzen du, tarte horretan konbergentea delarik. -1 eta 1 muturretan seriea dibergentea dela froga daiteke.

Hermite-ren ekuazioan eragindako moduan, ondokoa dugu:

$$y(x) = \sum_0^\infty a_n x^n \longrightarrow y'(x) = \sum_0^\infty n a_n x^{n-1} \longrightarrow y''(x) = \sum_0^\infty n(n-1)a_n x^{n-2},$$

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + p(p+1)y = 0 \longrightarrow \sum_0^\infty n(n-1)a_n x^{n-2} - \sum_0^\infty n(n-1)a_n x^n -$$

$$- \sum_0^\infty 2na_n x^n + \sum_0^\infty p(p+1)a_n x^n = 0.$$

Lehenengo batugaian n gaia (n+2) balioaz ordezkatuz, ondokoa dugu:

$$\sum_{-2}^\infty (n+2)(n+1)a_{n+2} x^n - \sum_0^\infty n(n-1)a_n x^n - \sum_0^\infty 2na_n x^n + \sum_0^\infty p(p+1)a_n x^n = 0.$$

$n = -1$ eta $n = -2$ direnean, batukari horretako lehenengo gaiak nuluak dira. Ekuazioa batukari bakar batetara laburbilduz,

$$\sum_0^\infty \Big[(n+2)(n+1)a_{n+2} - [n(n-1) + 2n - p(p+1)]a_n\Big] x^n = 0$$

dugu, eta hurrengo errepikapen-legea lortuko da:

$$a_{n+2} = \frac{n(n-1) + 2n - p(p+1)}{(n+2)(n+1)} a_n = \frac{n^2 + n + np - p^2 - p - np}{(n+2)(n+1)} a_n$$

$$\longrightarrow \quad \boxed{a_{n+2} = -\frac{(p-n)(n+p+1)}{(n+2)(n+1)} a_n, \qquad n = 0,1,2,3,\ldots}$$

eta honek a_{2n} koefiziente bikoitiak a_0-ren funtzioan eta a_{2n+1} koefiziente bakoitiak a_1-en funtzioan idaztea ahalbidetuko du. Orduan, soluzioa hurrengo eran idatziko da:

$$y(x) = a_0 u(x) + a_1 v(x).$$

u(x) eta v(x) funtzioak x-en berreduretako serieen bidezko soluzio linealki independenteak dira, bikoiti eta bakoitiak hurrenez hurren, eta R = 1 konbergentzi erradiokoak. Ondorioz, errepikapen formulatik hurrengo koefizienteak ondoriozta daitezke:

$$a_0 = a_0, \qquad a_1 = a_1,$$

$$a_2 = -\frac{p(p+1)}{2!} a_0, \qquad a_3 = -\frac{(p+2)(p-1)}{3!} a_1,$$

$$a_4 = +\frac{(p+1)(p+3)p(p-2)}{4!} a_0, \qquad a_5 = +\frac{(p+2)(p+4)(p-1)(p-3)}{5!} a_1.$$

Azkenik, soluzio orokorraren adierazpena ondoko hau izango da:

$$y = a_0\left(1 - \frac{p(p+1)}{2!} x^2 + \frac{(p+1)(p+3)p(p-2)}{4!} x^4 - \ldots \right) +$$

$$+ a_1\left(x - \frac{(p+2)(p-1)}{3!} x^3 + \frac{(p+2)(p+4)(p-1)(p-3)}{5!} x^5 - \ldots \right).$$

2.2.1 Legendre-ren polinomioak. Propietateak.

Sarritan p parametroa zenbaki positibo osoa da. Kasu hauetan errepikapen-formulak, u(x) eta v(x) serieak gai-kopuru finitura laburtuko direla adieraziko digu. Gai hauei Legendre-ren polinomioak deritze. p bikoitia (p = 2m) bada, u(x) seriea 2m mailako polinomioa da, eta p bakoitia (p = 2m+1) bada, v(x) seriea (2m+1) mailako polinomioa da.

Polinomio hauen era normala a_0 eta a_1 koefizienteak determinatuz lortuko da, u(1) = v(1) = 1 izanik. Era honetan, edozein n-tarako, Legendre-ren polinomioen formulara iritsiko gara:

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{r} \frac{(-1)^k (2n-2k)!}{k!(n-k)!(n-2k)!} x^{n-2k},$$

non r ≤ (n/2) den zenbaki oso handiena den. Hau da:

n bikoitia bada: r = n/2, n bakoitia bada: r = (n-1)/2.

Formula honen bidez determinaturiko Legendre-ren lehenengo zazpi polinomioak, hauexek dira:

$$P_0(x) = 1,$$

$$P_1(x) = x,$$

$$P_2(x) = (3x^2 - 1)/2,$$

$$P_3(x) = (5x^3 - 3x)/2,$$

$$P_4(x) = (35x^4 - 30x^2 + 3)/8,$$

$$P_5(x) = (63x^5 - 70x^3 + 15x)/8,$$

$$P_6(x) = (693x^6 - 945x^4 + 315x^2 - 15)/48.$$

Bestalde, Legendre-ren polinomioen propietate nabarmenen artean, ondokoak ditugu:

1.- $P_n(x)$ Legendre-ren ekuazioa betetzen duen polinomio bakarra da. Gainera, $P_n(1) = 1$ da.

2.- $P_n(x)$ funtzio polinomikoaren bikoititasuna n-renaren berdina da, $P_n(-x) = (-1)^n P(x)$ betetzen da alegia.

3.- Legendre-ren polinomioak funtzio ortogonalak dira. Era algebraikoan ondokoa betetzen dute:

$$\int_{-1}^{1} P_n(x)P_m(x)dx = \begin{cases} 0, & n \neq m, \\ 2/(2n-1), & n = m. \end{cases}$$

Halaber, era trigonometrikoan hurrengoa dugu:

$$\int_{0}^{\pi} P_n(\cos\phi)P_m(\cos\phi)\sin\phi d\phi = \begin{cases} 0, & n \neq m, \\ 2/(2n-1), & n = m. \end{cases}$$

4.- n. mailako edozein polinomio, Legendre-ren lehenengo (n+1) polinomioen konbinazio lineal moduan idatz daiteke. Hau da:

$$f(x) = \sum_{0}^{n} C_m P_m(x), \qquad \text{non} \qquad C_m = \frac{2m+1}{2} \int_{-1}^{1} f(x)P_m(x)dx.$$

5.- Legendre-ren polinomioek Rodrigues-en formula betetzen dute. Hau da:

$$P_n(x) = \frac{2^{-n}}{n!} d^n[x^2 - 1]^n/dx^n.$$

2.3 Bessel-en ekuazioa

p ordenako Bessel-en ekuazioa ondoko erakoa da:

$$\boxed{x^2y'' + xy' + (x^2 - p^2)y = 0.}$$

Zenbait problemaren azterketarako garrantzitsua da, horien artean simetria zilindrikoaz asoziaturiko fenomenoak aipa daitezkeelarik. Beraien soluzioetariko batzuk, lehen eta bigarren mailako Bessel-en funtzioek hain zuzen, garrantzizko propietateak dituzte eta beraien balioak kontu handiz tabulaturik daude. Gainera, Bessel-en ekuaziora labur daitezkeen ekuazio diferentzialak, hots, Bessel-en funtzioen bidez ebaz daitezkeenak, ugariak dira.

Bessel-en ekuaziorako P(x) eta Q(x) funtzioak,

$$P(x) = 1/x \ , \qquad Q(x) = (x^2 - p^2)/x^2$$

alegia, analitikoak dira puntu guztietan, $x = 0$ puntuan izan ezik. $x = 0$ puntua singular erregularra da,

$$xP(x) = 1, \qquad x^2Q(x) = x^2 - p^2$$

funtzioak analitikoak baitira. Orduan, 2 teoremak ziurtatzen duenez, gutxienez x-en berreduretako serie orokortuen bidezko soluzio ez-nabari bat existituko da. Dakusagun koefizienteen kalkulurako errepikapen-formula.

Ordezka ditzagun seriea eta beraren lehenengo bi deribatuak ekuazio diferentzialean:

$$y = \sum_0^\infty a_n x^{n+r} \rightarrow y' = \sum_0^\infty (n+r)a_n x^{n+r-1} \rightarrow y'' = \sum_0^\infty (n+r)(n+r-1)a_n x^{n+r-2}$$

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - p^2)y = 0 \quad \longrightarrow$$

$$\sum_{0}^{\infty} (n+r)(n+r-1)a_n x^{n+r} + \sum_{0}^{\infty} (n+r)a_n x^{n+r} + \sum_{0}^{\infty} a_n x^{n+r+2} - \sum_{0}^{\infty} p^2 a_n x^{n+r} = 0$$

Hirugarren batukarian n gaia n-2 balioaz ordezkatuz, ondokoa dugu:

$$\sum_{0}^{\infty} (n+r)(n+r-1)a_n x^{n+r} + \sum_{0}^{\infty} (n+r)a_n x^{n+r} + \sum_{2}^{\infty} a_{n-2} x^{n+r} - \sum_{0}^{\infty} p^2 a_n x^{n+r} = 0$$

Behe-indizeak doitzeko, lehen, bigarren eta laugarren batukarietako lehenengo bi gaiak bananduko dira. Horrela, batura batukari bakarrera laburtuko da.

$$r(r-1)a_0 x^r + (1+r)ra_1 x^{1+r} + ra_0 x^r + (1+r)a_1 x^{1+r} - p^2 a_0 x^r - p^2 a_1 x^{1+r}$$

$$+ \sum_{2}^{\infty} \left([(n+r)(n+r-1) + (n+r) - p^2]a_n + a_{n-2} \right) x^{n+r} = 0.$$

Ekuazio hau identitatea izan dadin, ondokoa bete behar da:

$$\begin{cases} [r(r-1) + r - p^2]a_0 x^r + [(1+r)r + (1+r) - p^2]a_1 x^{1+r} = 0, \\ [(n+r)(n+r-1) + (n+r) - p^2]a_n + a_{n-2} = 0. \end{cases}$$

Demagun lehenengo koefizientea, a_0 alegia, ez-nulua dela. Orduan, hurrengo ekuazioak izango ditugu:

$$\begin{cases} r^2 - p^2 = 0, \\ [(1+r)^2 - p^2]a_1 = 0, \\ [(n+r)^2 - p^2]a_n + a_{n-2} = 0. \end{cases}$$

Lehenengoak, ekuazio diferentziala deritzonak, $r = \pm p$ erroak ditu. Hauetarako bigarren ekuazioak $a_1 = 0$ balioa ondorioztatuko du. Hirugarren ekuazioak koefizienteak kalkulatzeko errepikapen formula bat emango digu. Eztabaida ditzagun $r = \pm p$ erroetarako soluzio posibleak.

I) $r = p > 0, \quad a_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad a_n = -\dfrac{1}{n(n+2p)} a_{n-2} \quad n = 2,3,4, \dots$

$a_1 = 0$ denez, koefiziente bakoitiak nuluak izango dira. Koefiziente bikoitietarako errepikapen-formula aplikatuz gero, ondokoa lor daiteke:

$$a_2 = -\frac{1}{2^2(1+p)} a_0,$$

$$a_4 = +\frac{1}{2^4 2!(p+1)(p+2)} a_0,$$

$$a_6 = -\frac{1}{2^6 3!(p+1)(p+2)(p+3)} a_0,$$

....

$$a_{2n} = \frac{(-1)^n}{2^{2n}\ n!(p+1)(p+2)(p+3)\dots\dots(p+n)} a_0.$$

Azken honen izendatzailea p! gaiaz biderkatu eta, p-ren balio osoetarako (n+p)! balioa ondorioztatuko da. Baina, p parametroa ez denez derrigorrez osoa, faktoriala orokorrean Euler-en gamma funtzioa besterik ez da. Horrela, $p! = \Gamma(p+1)$ $(n+p)! = \Gamma(p+n+1)$ berdintzak kontutan hartuz, hurrengoa dugu:

$$a_{2n} = \frac{(-1)^n \Gamma(p+1)}{2^{2n} n! \Gamma(p+n+1)} a_0.$$

r = p kasuari dagokion Bessel-en ekuazioaren soluzioa ondokoa da:

$$y(x) = x^p \sum_0^\infty a_{2n} x^{2n} = \sum_0^\infty a_{2n} x^{2n+p} = \sum_0^\infty \frac{(-1)^n \Gamma(p+1)}{2^{2n} n! \Gamma(p+n+1)} a_0 x^{2n+p} \longrightarrow$$

$$y(x) = 2^p \Gamma(p+1) a_0 \sum_0^\infty \frac{(-1)^n}{n! \Gamma(p+n+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+p}.$$

Hautazko konstanteari $a_0 = 2^{-p}/\Gamma(p+1)$ balioa emango zaio, honela batukaria biderkatzen ari den faktorea unitatea izango delarik. Azkenik, hurrengoa lortuko da:

$$\boxed{y(x) = J_p(x) = \sum_0^\infty \frac{(-1)^n}{n! \Gamma(p+n+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+p}.}$$

$J_p(x)$ funtzioari **p ordenako lehenengo mailako Bessel-en funtzioa** deritzo.

Bessel-en ekuazioko puntu singular bakarra x = 0 denez, $J_p(x)$ delakoa x-en edozein baliotarako konbergentea izango da.

Bi. kasua:

II) $r = -p < 0, \quad a_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad a_n = -\frac{1}{n(n-2p)} a_{n-2}, \; n = 2,3,4,\ldots$

Aurreko kasuan bezala, $a_0 = 2^p/\Gamma(-p+1)$ balioa ordezkatuz, **-p ordenako lehenengo mailako Bessel-en funtzioa** ondorioztatuko da. Hau da:

$$y(x) = J_{-p}(x) = \sum_{0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\Gamma(-p+n+1)} \left(\frac{x}{2} \right)^{2n-p}.$$

Bessel-en funtzioen ezaugarritasun bat: x-en balio txikietarako azkar konbergituko dute, honek funtzio hauen tabulazioa erraztu eta zenbakizko kalkulurako erabilgarriak egingo dituelarik.

Eztabaida dezagun Bessel-en funtzio hauen dependentzia lineala parametroaren balio ezberdinetarako:

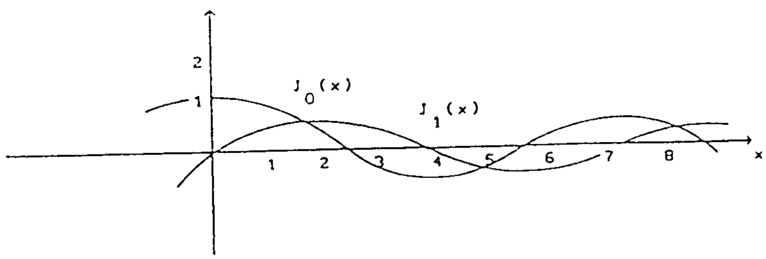
A) p ez-nulua den zenbaki ez-osoa bada, $J_p(x)$ eta $J_{-p}(x)$ funtzioak linealki independenteak dira, $J_{-p}(x)$ delakoak $J_p(x)$-ek ez dituen berretzaile negatiboetako berredurak dauzkalako. Ondorioz, Bessel-en ekuazioaren soluzio orokorraren adierazpena hau da:

$$y(x) = AJ_p(x) + BJ_{-p}(x).$$

B) p nulua bada, soluzio biak 0 ordenako Bessel-en funtzioak dira, hau da,

$$y(x) = J_0(x) = \sum_{0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\Gamma(n+1)} \left(\frac{x}{2} \right)^{2n},$$

betetzen da, eta beste soluzio independente bat behar da. Ondoko irudian $J_0(x)$ eta $J_1(x)$-en grafiko hurbilduak adierazten dira:



C) Azkenik, p zenbaki osoa bada, Bessel-en funtzioak linealki dependenteak izango dira. Ondokoa erraz froga daiteke:

$$J_{-p}(x) = (-1)^n J_p(x).$$

Aurreko kasuan bezala, beste soluzio independente bat behar dugu. Gogora dezagun

$$y_2 = y_1 \int \frac{\exp[-\int P(x)dx]}{y_1^2} dx$$

delakoa bigarren soluzioa dela, $P(x) = 1/x \longrightarrow \exp[-\int P(x)dx] = 1/x$ eta $y_1 = J_p(x)$ direlarik. Beraz, bigarren soluzioa

$$\boxed{y_2 = J_p(x) \int \frac{dx}{x J_p^2(x)}}$$

da. **Bessel-en bigarren mailako funtzioa** deritzon soluzio honek hurrengo adierazpena du:

$$Y_p(x) = J_p(x) \,\mathrm{Ln}x + x^{-p} \sum_0^\infty b_n x^n,$$

non b_n koefizienteak identifikazioz kalkula baitaitezke.

Kasu honetarako soluzio orokorra ondokoa dugu:

$$y(x) = AJ_p(x) + BY_p(x).$$

Bestalde, Bessel-en ekuazio bilaka daitezkeen ekuazioetatik, ondokoak nabarmendu behar dira:

I) $$x^2y'' + xy' + (m^2x^2 - p^2)y = 0.$$

$t = mx \longrightarrow y' = mdy/dt$, $y'' = m^2d^2y/dt^2$ aldaketa eginez, t aldagai indenpendentearekiko Bessel-en ekuazioa lor daiteke. Hau da:
Hau da:

$$t^2y'' + ty' + (t^2 - p^2)y = 0$$

II) $$x^2y'' + xy' - (x^2 + p^2)y = 0.$$

Bessel-en ekuazio modifikatu izenaz ezaguna den ekuazio hau, I ekuazioan m = i eginda ondoriozta daiteke. Bere soluzioa hauxe da:

$$y(x) = AJ_p(ix) + BJ_{-p}(ix).$$

Dena den, kalkuluak sinplifikatzeko asmoaz, unitate irudikaria desagertarazteko, funtzio hauek i^{-p} konstanteaz biderkatuko ditugu. Honela, hurrengo emaitza lortuko da:

$$(i^{-p})J_p(ix) = (i^{-p})\sum_0^\infty \frac{(-1)^n}{n!\Gamma(p+n+1)}(ix/2)^{2n+p} = \sum_0^\infty \frac{1}{n!\Gamma(p+n+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n+p}.$$

i balioaren ezabapena hurrengo sinplifikaziotik ondorioztatuko da:

$$(i^{-p})(-1)^n(i)^{2n+p} \equiv (i)^{2n}(-1)^n \equiv (-1)^n(-1)^n \equiv (-1)^{2n} \equiv 1.$$

Lortuko diren soluzioei Bessel-en funtzio modifikatuak deritze. Gai guztiak, alternatuak ordez, positiboak dituzte, eta ondorioz, ez dute portaera oszilakorrik, mota exponentzialekoa baizik.

V GAIA: ZENBAKIZKO METODOEN BIDEZKO INTEGRAZIOA.

1. SARRERA ETA DEFINIZIOAK

2. LEHEN ORDENAKO EKUAZIO DIFERENTZIALAK

3. GOI-ORDENAKO SISTEMA ETA EKUAZIOAK

1. SARRERA ETA DEFINIZIOAK

1.1 Sarrera

Aurreko gaietan adierazi denez, ingeniaritzara aplikatutako matematiketan sarritan oinarrizko funtzioen bidez ebaztezinak diren ekuazio diferentzialak aurkituko ditugu. Kasu hauetan zenbakizko metodoek soluzioen balio hurbilduak emango dituzte. Honek eta konputagailu elektrikoen erabileraren gorakadak, zenbakizko metodoak matematika aplikatuko problemen ebazpenerako tresna interesgarriak izatea ondorioztatu dute.

1.2 Hurbilketa-errorea

Ohizko metodoak kontsideratu baino lehen, errore-mota desberdinak aztertuko dira, metodoaren hautapena soluzio hurbilduaren zehaztasunaren araberakoa izango baita.

1.2.1 Biribiltze-errorea.

Erabilitako programaren ezaugarriekin asoziaturik dago. Orokorrean, makinak bil ditzakeen digitu esangarriak baino gehiago dituen zenbakizko datu baten tratamenduak, biribildutako balio batez hurbildua izatea eskatzen du. Horrela, biribiltze-errorea deritzona sortuko da. Ebaluazio zailekoa da, lengoaia beraren, erabilitako zehaztasunaren, eta neurri handi batetan, algoritmoa garatzeko ezarritako ordenaren araberakoa izango baita.

1.2.2 Mozte-errorea.

Kalkuluan erabiltzen diren hurbilketen ondorio zuzena da, funtsean serie infinitu bat ber gai-kopuru finitu batez ordezkatzen denean, (seriearen mozketa). Lehenengo metodotik bereizteko, errore hau aplikatuko den zenbakizko metodoaren araberakoa izango da, eta ez erabilitako kalkulu-makinaren araberakoa.

1.2.3 Hedatze-errorea.

Kalkulu-prozesuan zehar eginiko aurreko erroreen pilatzearen ondorioa da.

1.2.4 Behatutako erroreak.

Orain arte aipatutako errore-iturrien arabera, behatutako erroreak ondoko motakoak izan daitezke:

A) **Errore lokala:** kalkulu-prozesuko pausu bakoitzean emango dena da.

B) **Errore globala:** soluzio zehatzaren eta kalkulatutako balioaren arteko diferentzia da.

2. LEHEN ORDENAKO EKUAZIO DIFERENTZIALAK

Biz hastapen-baliotako ondoko problema:

$$y' = f(x,y) \quad [1] , \qquad y(x_0) = y_0 , \quad [2]$$

beraren soluzioa $P_0(x_0,y_0)$ puntutik pasatzen den integral-sortako kurba bat izanik.

Orokorrean, zenbakizko soluzioa, benetako $y = g(x)$ soluzioa oinarri-puntuetarako kopuru finitu batez hurbiltzean datza, soluzioaren deribatuaren aldez aurreko estimaziotik hasita oinarri-puntuez bananduriko azpitarteetan.

Praktikan, aurrez finkatutako (x_0,x_n) tarte batetako n puntu distantzikide hartuko dira. Azpitarte bakoitzaren h luzerari urratsa deritzo.

$$h = (x_n - x_0)/n$$

deribatua $P_i[x_i,g(x_i)]$ puntuan, era honetan hurbilduko da,

$$f[x_i,g(x_i)] \simeq f(x_i,y_i), \qquad [3]$$

$g(x_i)$ funtzioaren balio zehatza, aurretik kalkulatu den y_i balio hurbilduaz ordezkatuz. Era honetan, ekuazioaren zenbakizko soluzioa, n oinarri-puntuei dagozkien funtzioaren balioez osotutako balio-taula izango da.

2.1 Zenbakizko metodoen sailkapena

Soluzioa den kurbaren jatorrizko puntu bati dagokion y_{i+1} balioa kalkulatzeko dugun informazioaren arabera, bi kategoria nagusi ezberdinduko dira:

2.1.1 Urrats bakarreko edo urrats arrunteko metodoa.

Metodo hauetan y_{i+1} balioa kalkulatzeko, aurreko P_i puntuari buruzko informazioa behar da soilik. Funtzioaren Taylor-en garapena erabiltzen da, h^k berredurarainoko gaiak aukeraturik eta mozte-errorea h^{k+1} gaia izanik.

Metodoaren ordena deritzon k zenbaki osoa, zenbakizko hurbilketaren kalitatearen adierazlea da. Dena den, ordena handiagotzean, beharrezkoak diren kalkulu-eragiketen kopurua handitu egingo da, eta ondorioz, erabiliko den ordenadoreak memoria-ahalmen handiagoa beharko du.

Urrats bakarreko metodoaren formulazioa ondokoa da,

$$y_{i+1} = y_i + \phi h, \qquad [4]$$

non y_{i+1} balio aktuala, y_i aurreko baliotik lortuko den, horretarako kurba integralaren maldaren hurbilketa modura, (hots, deribatu modura) ϕ balioa harturik.

Urrats arrunteko metodoek ez dute deribaturik kalkulatzen, baina funtzioa puntu ezberdinetan ebaluatzea behar dute. Komenigarria bada, kalkulu-prozesua hasita h urratsa alda daiteke. Honek kalkulu-prozesua berriro hastea ekarriko du. Metodo hauen artean, ordena ezberdinetako Euler eta Runge-Kutta-renak nabarmendu behar dira.

2.1.2 Zuzentzaile-aurresale metodoak, edo zenbait urratsetakoak.

Metodo hauek y_{i+1} puntu berri baten kalkulurako aldez aurreko puntuei buruzko informazioa eta ekuazio zuzentzaile eta ekuazio aurresale deritzen bi formula erabiliko dituzte. Prozesua hurrengo lerrotan aipatuko dena da.

Hasteko ekuazio aurresalea aplikatuko da, eta n puntutatik hasita, P_{n+1} puntuaren oso fina ez den y^p_{n+1} estimazio egina eta

$$y'_{n+1} = f(x_{n+1}, y^p_{n+1}) \qquad [5]$$

deribatua determinatuko da.

Jarraian, ekuazio zuzentzailearen bidez eta aurreko formula erabiliz, y^c_{n+1} balio hobetua lortuko da, eta honekin berriro estimatuko da deribatua:

$$y'^{*}_{n+1} = f(x_{n+1}, y^c_{n+1}). \qquad [6]$$

[5] eta [6] balioen arteko kendura nahiko txikia bada, orduan y_{n+1} kalkulatzeko, beraietariko edozein erabiliko da. Kontrako kasuan, [6] balioaren bidez funtzioaren balio hobetu berri bat kalkulatu eta prozesua errepikatu egingo da.

Orokorrean, metodo hauek urrats bakarrekoekin konparatuz duten abantaila, kalkulu-kopuru txikiagoa behar izatea da. Dena den, aipatzekoak diren bi desabantail dituzte:

a) Soilik $y(x_0)$ hastapen-balioa ezagutzen bada, orduan kalkuluaren hasierari urrats arrunteko metodo batek lagundu behar dio.

b) Kalkulu-prozesua hasita dagoela, zaila da h urratsa aldatzea.

Talde honen barruan, aipagarriak dira Milne, Hamming eta Adams-Bashforth-en metodoak.

2.2 Euler-en metodoa

Metodo arruntena da, baina kasu praktiko gehienetan ez da gomendagarria izango, lortuko duen zehaztasuna nahiko mugatua delako. Hala ere, interes didaktiko handikoa da.

Kontsidera dezagun berriro ere lehenago ikusitako hastapen-baliotako hurrengo problema:

$$y' = f(x,y) \qquad [1], \qquad y(x_0) = y_0 . \qquad [2]$$

x_0 puntutik hasita, $y = g(x)$ soluzioaren Taylor-en seriezko garapena,

$$y(x_0 + h) = y(x_0) + hf[x_0,y(x_0)] + \frac{h^2}{2!} f'[x_0,y(x_0)] + \ldots \qquad [3]$$

adierazpenaz emanik dator.

Urratsaren balioa behar den besteko txikia bada, [3] adierazpenean bat baino handiagoko maila duten gaiak arbuiatu ondoren, hurrengo hurbilketa ondorioztatuko da:

$$y(x_0 + h) = y(x_0) + hf[x_0,y(x_0)]. \qquad [4]$$

Aztertzen ari garen $[x_0, x_n]$ tartean, h urrats txikiko

$$x_i = x_0 + ih, \qquad i = 0, 1, 2, \ldots, n$$

distantzikideak diren oinarri-puntuetako sistema kontsideratuz gero, [4] hurbilketatik Euler-en algoritmoaren formulazioa ondorioztatuko da:

$$\boxed{y_1 = y(x_0) + hf[x_0, y(x_0)],} \qquad [5]$$

$$\boxed{y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i), \qquad i \geq 1.} \qquad [6]$$

Honen arabera, x_i puntuan maldaren hurbilketa $\phi = f(x_i, y_i)$ deribatuaren balioa izango da, non y_i delakoa aurreko urratsean estimaturiko soluzioaren balioa den.

Metodo hau lehenengo ordenakoa da, eta beraren errorea Taylor-en serieko lehen maila baino altuagoko gaiak arbuiatzetik ondorioztatuko da. h-ren balio txikietarako mozte-errore lokalak ondokoak dira:

$$|e_t| \cong \frac{h^2}{2!} |f'[\alpha, y(\alpha)]|, \qquad \alpha \in (x_i, x_{i+1}).$$

Taylor-en serieak errore lokalaren hurbilketa bat emango digu, baina ez du hedapen-neurri ez mozte-errore globalik emango. Gainera, problema errealetan erabiltzen diren funtzioetan errorea ebaluatzeko zaila izaten da Taylor-en seriearen bidezko deribatuak kalkulatzea.

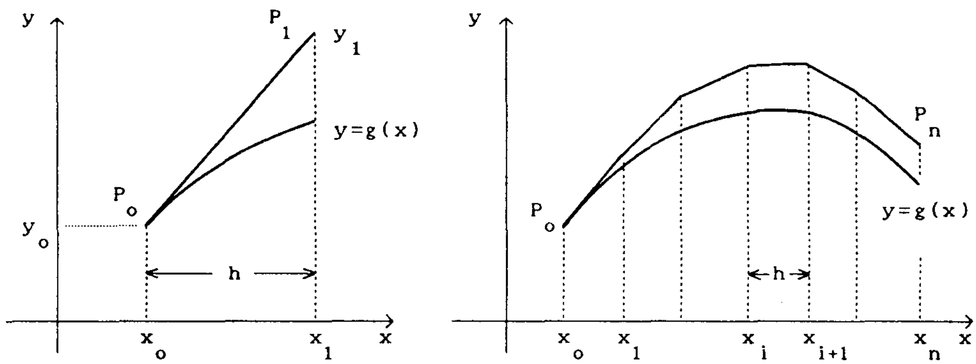
Hala eta guztiz ere, murrizketa hauek izan arren, Taylor-en serieak Euler-en algoritmoaren portaerari buruzko ideia baliagarria emango digu. Nahiz eta errore lokala bigarren ordenakoa (h^2-rekiko proportzionala) izan, errore lokalen hedapenaren azterketak mozte-errore globala lehen ordenakoa dela frogatuko du, (h-rekiko proportzionala).

Azkenik, h urratsaren neurria estutuz, errorea txikiago egin daitekeela adierazi behar da. Hala ere, errore-maila moderatuetarako, kalkulua egitean esfortzu handia behar da. Beraz, praktikan goi-ordenako algoritmoetara joko dugu, berauek kalkulu baliokideetarako soluzio zehatzagoak ondorioztatuko baitituzte.

2.2.1. Interpretazio geometrikoa.

Algoritmoaren lehenengo formula, [5]-a alegia, kurba integralak $P_0(x_0, y_0)$ puntuan duen zuzen tangentearen ekuazioa da. Hots, soluzioaren hurbilketa (x_0, x_1) azpitartean, kurba integrala P_0-rekiko tangenteaz ordezkatutakoan ondorioztatuko da (1 irudia).

i = 1, 2, ..., n balioetarako, [6] adierazpena aplikatuz, zenbakizko balioa kalkulatuko da. Hau, grafikoki Euler-en poligonoa deritzonaren bidez adieraziko da, zeinaren aldeek P_i erpin bakoitzean duten malda, puntu horretatik pasatzen den kurba integralarenaren berdina den.(2 irudia).



1 irudia 2 irudia

2.3 Euler-en metodo hobetua

Euler-en algoritmoaren errore-iturri nagusia honetan datza, alegia, (x_i, x_{i+1}) tarte partzialaren mutur-puntu batetan eginiko deribatuaren estimazioa, tarte osoan zehar aldakuntzarik gabe aplikatzean. Euler-en metodoa jarraian bi aldiz aplikatuz gero, deribatuaren ebaluazioa findu egingo da, eta ondorioz, algoritmoaren hobekuntza lortuko da. Lehenengo aplikazioan soluzioaren hasierako hurbilketa bat aurkituko da, hots,

$$\boxed{y^*_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i),} \qquad [7]$$

honetatik hasita $f(x_{i+1}, y^*_{i+1})$ malda P_{i+1} puntuan ebaluatuko delarik. Maldak tartean duen baliotzat, mutur-puntuetako hurbilketen batezbestekoa hartuko da.

Horrela, ondoko estimazioa ondoriozta daiteke:

$$\boxed{y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}\,[f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y^*_{i+1})].} \qquad [8]$$

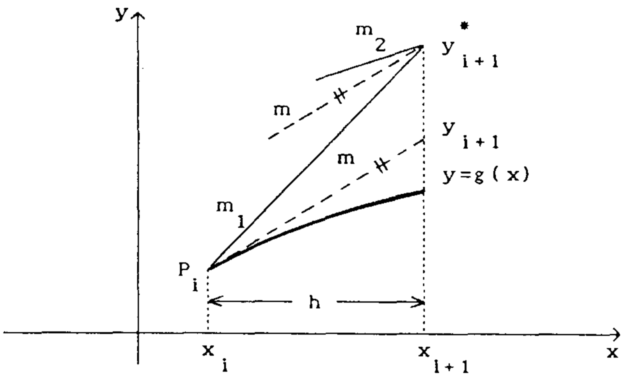
[7] eta [8] ekuazioek Euler-en metodo hobetuaren algoritmoa osotuko dute, halaber Heun-en metodoa deritzona. Berez, urrats bakarreko metodo zuzentzaile-aurresale bat da, [7] adierazpenak tarteko eskuin-muturren deribatuak duen balioa hobetzeko balioko duen y_{i+1}-en bitarteko bat emango baitu. Hortik, hobekuntza eginda, muturretako balioen batezbestekoaren bidez, [8] ekuazio zuzentzailean aplikatuko dugu.

2.3.1 Interpretazio geometrikoa.

[7] ekuazio aurresalean y^*_{i+1} balioa, P_i puntutik pasatzen den

$m_1 = f(x_i, y_i)$ maldako zuzenaren x_{i+1}-en duen ordenatua da. [8] ekuazio zuzentzailearen y_{i+1} balioa, P_i-tik pasatzen den zuzenaren ordenatua da, zuzen horren m malda ondoko batezbestekoa delarik:

$$m_1 = f(x_i,\ y_i), \quad m_2 = f(x_{i+1},\ y^*_{i+1}), \quad \longrightarrow \quad m = (m_1 + m_2)/2.$$



3 irudia. Euler-en algoritmo hobetua.

2.4 Euler-en metodo modifikatua

Euler-en algoritmo hobetuan bezala, hemen ere bi aldiz jarraian Euler-en algoritmoa aplikatuko da. Lehenengoan, $(x_i,\ x_{i+1})$ tarteko $(x_i + 0{,}5h)$ puntu zentralean soluzioak duen aurresana ondorioztatuko da.

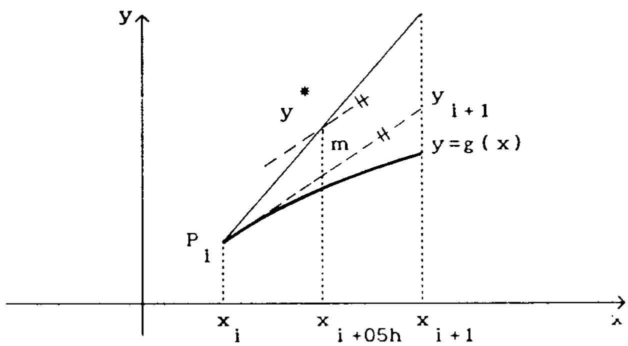
$$\boxed{y^*_{i+1/2} = y_i + 0{,}5hf(x_i,\ y_i).} \qquad [9]$$

Tarteko erdiko puntuan maldak duen estimazio bat lortzeko balio du. Ondorioztatutako balio hobetua, tarte osoan batezbesteko modura erabiliko da, Euler-en algoritmoaren aplikazio berri batetan, hau da:

$$\boxed{y_{i+1} = y_i + hf[x_i + 0{,}5h,\ y_i + 0{,}5hf(x_i,\ y_i)].} \qquad [10]$$

2.4.1. Interpretazio geometrikoa.

Kasu honetan, y_{i+1} estimazioa, P_i puntutik pasatzen den zuzenak x_{i+1}-en duen ordenatua da. Zuzenaren malda, $(x_i + 0{,}5h)$ delakoa, tartearen zentrua abzisatzat eta $(y^*_{i+1/2})$ ordenatutzat dituen kurba integralaren malda da.



4 irudia. Euler-en algoritmo modifikatua.

2.5 Runge-Kutta-ren algoritmoak

k. ordenako algoritmoak determinatzeko Taylor-en serieen aplikazioak, hots, h^k berredura duen serieko gaian moztean, praktikan ez dauka interesik, orokorrean goi-ordenako deribatuen kalkulua ez baita erraza.

Hala eta guztiz ere, soilik lehen ordenako deribatuen kalkulua behar duten urrats arrunteko algoritmoak lor daitezke, horrelakoen zehaztasuna Taylor-en formulan oinarritutako goi-ordenako metodoen baliokidea izango delarik.

"Runge-Kutta-ren (RK-ren) algoritmoak" izen orokorraren barnean, batez ere 2., 3. eta 4. ordenako ekuazio diferentzialen zenbakizko ebazpenari buruzko metodo-familia bat adierazi ohi da, hots, soluzioaren Taylor-en seriezko garapenaren baliokideak diren hurbilketak, h^2, h^3 eta h^4 gaiak barne dituztelarik, hurrenez hurren. Algoritmo hauen adierazpen orokorra hurrengoa dugu,

$$y_{i+1} = y_i + \phi(x_i,y_i,h)\, h, \qquad [11]$$

non $\phi(x_i,y_i,h)$ gehikuntza-funtzioak maldak $(x_i,\ x_{i+1})$ tartean duen batezbesteko hurbilketa bat adieraziko duen. Era egokian aukeratu beharko dugu, noski.

ϕ funtzioaren adierazpen orokorra ondokoa da:

$$\phi(x_i,y_i,h) = a_1k_1 + a_2k_2 + a_3k_3 + a_4k_4 + \ldots [12]$$

[12]-aren batugai-kopurua algoritmoaren ordenaren berdina da. a_1, a_2, a_3, a_4, ...koefizienteak konstanteak dira, eta k_1, k_2, k_3, ... direlakoak $(x_i,\ x_{i+1})$ tarteko puntu ezberdinetan deribatuak dituen hurbilketak dira. Azken hauek, metodoaren ordenaren arabera, [11]-[12] adierazpenak, h-ren berreduratako gaietarainoko Taylor-en formularen garapenaz berdinduz kalkulatuko dira. Horrela, k_j-rako errepikapen-formulak ondokoak dira:

$k_1 = f(x_i, y_i),$

$k_2 = f(x_i + m_1h, y_i + n_{11}k_1h),$

$k_3 = f(x_i + m_2h, y_i + n_{21}k_1h + n_{22}k_2h),$

$k_4 = f(x_i + m_3h, y_i + n_{31}k_1h + n_{32}k_2h + n_{33}k_3h).$

Hurrengo atalean ikusiko dugunez, Euler-en lehen eta bigarren ordenako algoritmo modifikatu eta hobetuek RK-ren kasu partikularrak dira.

2.5.1 Bigarren ordenako algoritmoak.

Kasu honetarako [11]-[12] adierazpenaren formulazioa hurrengoa da:

$$y_{i+1} = y_i + (a_1k_1 + a_2k_2)h, \qquad [13]$$

$$k_1 = f(x_i, y_i); \qquad k_2 = f(x_i + m_1h, y_i + n_{11}k_1h). \qquad [14]$$

Koefizienteak kalkulatzeko, y_{i+1} Taylor-en bigarren ordenako garapenaz berdinduko da. Horrela,

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i) + \frac{h^2}{2!} f'(x_i,y_i) \qquad [15]$$

dugu, non $f'(x_i,y_i) = \dfrac{\partial f}{\partial x} + \dfrac{\partial f}{\partial y} y'$ den.

[13] eta [15]-eko gaiak identifikatuz, y_{i+1} delakoaren adierazpen biak baliokideak izan daitezen, koefizienteen lotura-ekuazioak ezarriko dira, hau da,

$$a_1 + a_2 = 1, \qquad a_2 + m_1 = 1/2, \qquad a_2 + n_{11} = 1/2, \qquad [16]$$

infinitu soluzio dituen hiru ekuazio eta lau ezezagunetako sistema osotzeko dutelarik. Bigarren ordenako algoritmo horietariko bat determinatzeko nahikoa izango da koefiziente bat finkatzea eta [16] sistemaren gainontzeko soluzioak kalkulatzea.

Hurrengo koefizienteetarako, Euler-en bigarren ordenako algoritmoak Runge-Kutta-renak dira:

Euler-en algoritmo hobetua ($a_2 = 1/2$):

$$y_{i+1} = y_i + \left(f(x_i, y_i) + f[x_{i+1}, y_i + hf(x_i, y_i)]\right) \frac{h}{2}, \qquad [7]\text{-}[8]$$

$$a_2 = 1/2, \quad a_1 = 1/2, \quad m_1 = 1, \quad n_{11} = 1.$$

Euler-en algoritmo modifikatua ($a_2 = 1$):

$$y_{i+1} = y_i + f[x_i + 0{,}5h,\ y_i + 0{,}5hf(x_i, y_i)]h, \qquad [10]$$

$$a_2 = 1, \quad a_1 = 0, \quad m_1 = 0{,}5, \quad n_{11} = 0{,}5.$$

Bigarren ordenako gainontzeko algoritmoen artean, Ralston-ena aipatu behar da. $a_2 = 2/3$ hartuta lortuko da, eta mozte-errorearen limite minimoa emango du.

Ralston-en algoritmoa.

$$a_2 = 2/3, \quad a_1 = 1/3, \quad m_1 = 3/4, \quad n_{11} = 3/4.$$

$$\boxed{y_{i+1} = y_i + (k_1/3 + 2k_2/3)h,} \qquad [17]$$

$$\boxed{k_1 = f(x_i, y_i); \quad k_2 = f(x + 3h/4, \ y_i + 3k_1 h/4).} \qquad [18]$$

2.5.2 Hirugarren ordenako algoritmoak.

Orain, [11]-[12] adierazpenen formulazioa ondokoa da:

$$y_{i+1} = y_i + (a_1k_1 + a_2k_2 + a_3k_3)h, \qquad [19]$$

$$\begin{cases} k_1 = f(x_i, y_i), \\ k_2 = f(x_i + m_1h, \ y_i + n_{11}k_1h), \\ k_3 = f(x_i + m_2h, \ y_i + n_{21}k_1h + n_{22}k_2h). \end{cases} \qquad [20]$$

[19] adierazpena Taylor-en hirugarren ordenako garapenaz identifikatu eta gero, sei ekuazio eta zortzi ezezagunetako sistema bat ondorioztatuko da. Koefizientetariko bi finkatutakoan, beste guztiak determina daitezke. Hirugarren ordenako algoritmoen artean, erabiliena hurrengoa dugu:

$$\boxed{y_{i+1} = y_i + (k_1 + 4k_2 + k_3)h/6,} \qquad [21]$$

k hurbilketetarako ondoko balioak hartuko direlarik:

$$
\boxed{\begin{aligned}
k_1 &= f(x_i, y_i),\\
k_2 &= f(x_i + 0.5h,\ y_i + 0.5k_1h),\\
k_3 &= f(x_i + h,\ y_i - k_1h + 2k_2h).
\end{aligned}} \qquad [22]
$$

Oharra: f funtzioa aldagai bakarrekoa bada, orduan algoritmo honen kasu partikularra den Simpson-en integrazio-erregela lortzen da.

2.5.3 Laugarren ordenako algoritmoak.

Algoritmo hauek praktikan gehien erabiltzen direnak dira. Aurreko kasuetan bezala, bertsio ugari dago. Ezagunena hurrengoa da:

$$
\boxed{y_{i+1} = y_i + [k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4]h/6,} \qquad [23]
$$

$$
\boxed{\begin{aligned}
k_1 &= f(x_i,\ y_i),\\
k_2 &= f(x_i + 0.5h,\ y_i + 0.5k_1h),\\
k_3 &= f(x_i + 0.5h,\ y_i + 0.5k_2h),\\
k_4 &= f(x_i + h,\ y_i + k_3h).
\end{aligned}} \qquad [24]
$$

Adibidea.- Erabil bitez urrats arrunteko hurrengo algoritmoak,

a) Euler-ena, b) Euler-en hobetua,

c) Euler-en modifikatua, d) Ralston-ena,

e) hirugarren ordenako Runge-Kutta-rena,

f) laugarren ordenako RK-rena,

hastapen-baliotako

$$y' = \frac{1 + xy}{1 + x^2}, \qquad y(0) = 1$$

problema, zenbakizko metodoen bidez ebazteko $0 \leq x \leq 1$ tartean eta urratsa $h = 0{,}1$ izanik.

E: Ekuazio lineal hau ariketen atalean ebatzita dago eta beraren soluzio zehatza ondokoa da:

$$y = \sqrt{1 + x^2} + x.$$

Beraren zenbakizko tratamendua 286 serieko ordenadore pertsonal batez, zehaztasun bikoitzeko Basic programen bidez egin da, kasu bakoitzean dagozkien algoritmoak erabili direlarik.

Hurbilketen kalitatearen kontrastea, kasu bakoitzari dagozkion errore-zutabeak konparaturik ikus daiteke.

```
10 REM "EULER-EN METODOA"
15 DEFDBL A-H,O-Z
20 CLS
30 DIM X(100), Y(100), YP(100), YE(100)
40 PRINT "HASTAPEN-BALDINTZA"
50 INPUT " X0    = BALIOA", X(1) : INPUT" Y(X0) = BALIOA", Y(1)
60 INPUT "PUNTU-KOPURUA = ", N : N = N + 1
70 INPUT "URRATSAREN LUZERA = ", H
80 DEF FNG(X) = SQR(1 + X*X) + X
90 DEF FND(X, Y) = (1 + X*Y)/(1 + X*X)
100 FOR I = 1 TO N
110 YP(I) = FND(X(I), Y(I)) : YE(I) = FNG(X(I))
120 X(I + 1) = X(I) + H
130 Y(I + 1) = Y(I) + H*YP(I)
140 NEXT : PRINT
150 PRINT TAB(0) " X BALIOA"; TAB(11) "Y HURBILDUA";
160 PRINT TAB(26) "Y ZEHATZA"; TAB(41) "ERRORE ABS"
170 PRINT "------------------------------";
180 PRINT "----------------------"
190 FOR I = 1 TO N
200 PRINT TAB(0) USING "##.#"; X(I); : PRINT TAB(11) USING "##.##
    ####^^^^"; Y(I); : PRINT TAB(25) USING "##.######^^^^"; YE(I);
210 PRINT TAB(40) USING "##.######^^^^"; ABS(YE(I) - Y(I))
220 NEXT I
230 END
```

```
XO BALIOA     =  0        PUNTU-KOPURUA      =  10
Y(XO) BALIOA  =  1        URRATSAREN LUZERA  =  .1
```

X BALIOA	Y HURBILDUA	Y ZEHATZA	ERRORE ABS
0.0	1.000000D+00	1.000000D+00	0.000000D+00
0.1	1.100000D+00	1.104988D+00	4.987597D-03
0.2	1.209901D+00	1.219804D+00	9.902892D-03
0.3	1.329322D+00	1.344031D+00	1.470850D-02
0.4	1.457652D+00	1.477033D+00	1.938079D-02
0.5	1.594123D+00	1.618034D+00	2.391111D-02
0.6	1.737888D+00	1.766190D+00	2.830258D-02
0.7	1.888089D+00	1.920656D+00	3.256682D-02
0.8	2.043905D+00	2.080625D+00	3.671987D-02
0.9	2.204583D+00	2.245362D+00	4.077914D-02
1.0	2.369452D+00	2.414214D+00	4.476147D-02

```
10 REM "EULER-EN METODO HOBETUA"
15 DEFDBL A-H,O-Z
20 CLS
30 DIM X(100), Y(100), YP(100), YE(100)
40 PRINT "HASTAPEN-BALDINTZA"
50 INPUT " XO  = BALIOA", X(1) : INPUT " Y(XO) = BALIOA", Y(1)
60 INPUT "PUNTU-KOPURUA = ", N : N = N + 1
70 INPUT "URRATSAREN LUZERA  ", H
80 DEF FNG(X) = SQR(1 + X*X) + X
90 DEF FND(X, Y) = (1 + X*Y)/(1 + X*X)
100 FOR I = 1 TO N
110  YP(I) = FND(X(I), Y(I)) : YE(I) = FNG(X(I))
120  X(I + 1) = X(I) + H
130  Y(I + 1) = Y(I) + H/2*(YP(I) + FND(X(I + 1), Y(I) + H*YP(I)))
140 NEXT I : PRINT
150 PRINT TAB(0) " X BALIOA"; TAB(11) "Y HURBILDUA";
160 PRINT TAB(26) "Y ZEHATZA"; TAB(41) "ERRORE ABS"
170 PRINT "------------------------------";
180 PRINT "---------------------"
190 FOR I = 1 TO N
200 PRINT TAB(0) USING "##.#"; X(I); : PRINT TAB(11) USING "##.###
    ###^^^^"; Y(I); : PRINT TAB(25) USING "##.######^^^^"; YE(I);
210 PRINT TAB(40) USING "##.######^^^^"; ABS(YE(I) - Y(I))
220 NEXT I
230 END
```

```
XO BALIOA     =  0           PUNTU-KOPURUA     =  10
Y(XO) BALIOA  =  1           URRATSAREN LUZERA =  .1
```

X BALIOA	Y HURBILDUA	Y ZEHATZA	ERRORE ABS
0.0	1.000000D+00	1.000000D+00	0.000000D+00
0.1	1.104950D+00	1.104988D+00	3.710242D-05
0.2	1.219684D+00	1.219804D+00	1.197255D-04
0.3	1.343791D+00	1.344031D+00	2.396512D-04
0.4	1.476647D+00	1.477033D+00	3.861015D-04
0.5	1.617485D+00	1.618034D+00	5.488552D-04
0.6	1.765471D+00	1.766190D+00	7.191089D-04
0.7	1.919765D+00	1.920656D+00	8.907144D-04
0.8	2.079565D+00	2.080625D+00	1.059796D-03
0.9	2.244138D+00	2.245362D+00	1.224235D-03
1.0	2.412830D+00	2.414214D+00	1.383203D-03

```
10 REM "EULER-EN METODO MODIFIKATUA"
15 DEFDBL A-H,O-Z
20 CLS
30 DIM X(100), Y(100), YP(100), YE(100)
40 PRINT "HASTAPEN-BALDINTZA"
50 INPUT " XO = BALIOA", X(1) : INPUT " Y(XO) = BALIOA", Y(1)
60 INPUT "PUNTU-KOPURUA = ", N : N = N + 1
70 INPUT "URRATSAREN LUZERA = ", H
80 DEF FNG(X) = SQR(1 + X*X) + X
90 DEF FND(X, Y) = (1 + X*Y)/(1 + X*X)
100 FOR I = 1 TO N
110 YP(I) = FND(X(I), Y(I)) : YE(I) = FNG(X(I))
120 X(I + 1) = X(I) + H
130 Y(I + 1) = Y(I) + H*FND(X(I) + .5*H, Y(I) + .5*H*YP(I))
140 NEXT I : PRINT
150 PRINT TAB(0) " X BALIOA"; TAB(11) "Y HURBILDUA";
160 PRINT TAB(26) "Y ZEHATZA"; TAB(41) "ERRORE ABS"
170 PRINT "-----------------------------";
180 PRINT "---------------------"
190 FOR I = 1 TO N
200 PRINT TAB(0) USING "##.#"; X(I); : PRINT TAB(11) USING "##.###
    ###^^^^"; Y(I); : PRINT TAB(25) USING "##.######^^^^"; YE(I);
210 PRINT TAB(40) USING "##.######^^^^"; ABS(YE(I) - Y(I))
220 NEXT I
230 END
```

```
XO BALIOA     =  0        PUNTU-KOPURUA      =  10
Y(XO) BALIOA  =  1        URRATSAREN LUZERA  =  .1
```

X BALIOA	Y HURBILDUA	Y ZEHATZA	ERRORE ABS
0.0	1.000000D+00	1.000000D+00	0.000000D+00
0.1	1.104988D+00	1.104988D+00	6.629345D-08
0.2	1.219804D+00	1.219804D+00	2.714956D-07
0.3	1.344030D+00	1.344031D+00	9.523407D-07
0.4	1.477031D+00	1.477033D+00	1.963952D-06
0.5	1.618031D+00	1.618034D+00	3.444040D-06
0.6	1.766185D+00	1.766190D+00	5.111082D-06
0.7	1.920649D+00	1.920656D+00	6.913704D-06
0.8	2.080616D+00	2.080625D+00	8.782821D-06
0.9	2.245352D+00	2.245362D+00	1.060656D-05
1.0	2.414201D+00	2.414214D+00	1.232161D-05

```
10 REM " RALSTON-EN METODOA "
15 DEFDBL A-H,O-Z
20 CLS
30 DIM X(100), Y(100), YP(100), YE(100)
40 PRINT "HASTAPEN-BALDINTZA "
50 INPUT " X0  = BALIOA", X(1) : INPUT " Y(X0) = BALIOA", Y(1)
60 INPUT "PUNTU-KOPURUA = ", N : N = N + 1
70 INPUT "URRATSAREN LUZERA = ", H
80 DEF FNG(X) = SQR(1 + X*X) + X
90 DEF FND(X, Y) = (1 + X*Y)/(1 + X*X)
100 FOR I = 1 TO N
110 K1 = FND(X(I), Y(I)):K2 = FND(X(I) + .75*H, Y(I) + .75*K1*H)
120 YE(I) = FNG(X(I))
130 X(I + 1) = X(I) + H
140 Y(I + 1) = Y(I) + H*(K1/3 + 2*K2/3)
150 NEXT I : PRINT
160 PRINT TAB(0) " X BALIOA"; TAB(11) "Y HURBILDUA";
170 PRINT TAB(26) "Y ZEHATZA"; TAB(41) "ERRORE ABS"
180 PRINT "------------------------------";
190 PRINT "---------------------"
200 FOR I = 1 TO N
210 PRINT TAB(0) USING "##.#"; X(I); : PRINT TAB(11) USING "##.###
    ###^^^^"; Y(I); : PRINT TAB(25) USING "##.######^^^^"; YE(I);
220 PRINT TAB(40) USING "##.######^^^^"; ABS(YE(I) - Y(I))
230 NEXT I
240 END
```

```
X0 BALIOA      =  0           PUNTU-KOPURUA      =  10
Y(X0) BALIOA  =  1           URRATSAREN LUZERA =  .1
```

X BALIOA	Y HURBILDUA	Y ZEHATZA	ERRORE ABS
0.0	1.000000D+00	1.000000D+00	0.000000D+00
0.1	1.104972D+00	1.104988D+00	1.556873D-05
0.2	1.219750D+00	1.219804D+00	5.435944D-05
0.3	1.343918D+00	1.344031D+00	1.126289D-04
0.4	1.476848D+00	1.477033D+00	1.849651D-04
0.5	1.617768D+00	1.618034D+00	2.662420D-04
0.6	1.765839D+00	1.766190D+00	3.517866D-04
0.7	1.920217D+00	1.920656D+00	4.383564D-04
0.8	2.080101D+00	2.080625D+00	5.238533D-04
0.9	2.244755D+00	2.245362D+00	6.070495D-04
1.0	2.413526D+00	2.414214D+00	6.874681D-04

```
10 REM " RUNGE-KUTTA-REN HIRUGARREN ORDENAKO METODOA"
15 DEFDBL A-H,O-Z
20 CLS
30 DIM X(100), Y(100), YP(100), YE(100)
40 PRINT "HASTAPEN-BALDINTZA "
50 INPUT " X0 = BALIOA", X(1) : INPUT " Y(X0) = BALIOA", Y(1)
60 INPUT "PUNTU-KOPURUA = ", N : N = N + 1
70 INPUT "URRATSAREN LUZERA = ", H
80 DEF FNG(X) = SQR(1 + X*X) + X
90 DEF FND(X, Y) = (1 + X*Y)/(1 + X*X)
100 FOR I = 1 TO N
110 K1 = FND(X(I), Y(I)) : K2 = FND(X(I) + .5*H, Y(I) + .5*K1*H)
120 K3 = FND(X(I) + H, Y(I) - K1*H + 2*K2*H)
130 YE(I) = FNG(X(I))
140 X(I + 1) = X(I) + H
150 Y(I + 1) = Y(I) + H*(K1 + 4*K2 + K3)/6
160 NEXT I : PRINT
170 PRINT TAB(0) "X BALIOA"; TAB(11) "Y HURBILDUA";
180 PRINT TAB(26) "Y ZEHATZA"; TAB(41) "ERRORE ABS"
190 PRINT "------------------------------";
200 PRINT "----------------------"
210 FOR I = 1 TO N
220 PRINT TAB(0) USING "##.#"; X(I); : PRINT TAB(11) USING "##.###
    ###^^^^"; Y(I); : PRINT TAB(25) USING "##.######^^^^"; YE(I);
230 PRINT TAB(40) USING "##.######^^^^"; ABS(YE(I) - Y(I))
240 NEXT I
250 END
```

```
X0 BALIOA     =  0          PUNTU-KOPURUA     =  10
Y(X0) BALIOA  =  1          URRATSAREN LUZERA =  .1
```

X BALIOA	Y HURBILDUA	Y ZEHATZA	ERRORE ABS
0.0	1.000000D+00	1.000000D+00	0.000000D+00
0.1	1.104992D+00	1.104988D+00	4.045169D-06
0.2	1.219812D+00	1.219804D+00	7.796288D-06
0.3	1.344042D+00	1.344031D+00	1.084010D-05
0.4	1.477046D+00	1.477033D+00	1.326402D-05
0.5	1.618049D+00	1.618034D+00	1.493295D-05
0.6	1.766207D+00	1.766190D+00	1.616478D-05
0.7	1.920673D+00	1.920656D+00	1.704693D-05
0.8	2.080643D+00	2.080625D+00	1.767476D-05
0.9	2.245381D+00	2.245362D+00	1.823107D-05
1.0	2.414232D+00	2.414214D+00	1.881123D-05

```
10 REM " RUNGE-KUTTA-REN LAUGARREN ORDENAKO METODOA"
15 DEFDBL A-H,O-Z
20 CLS
30 DIM X(100), Y(100), YP(100), YE(100)
40 PRINT "HASTAPEN-BALDINTZA "
50 INPUT " X0  = BALIOA", X(1) : INPUT " Y(X0) = BALIOA", Y(1)
60 INPUT "PUNTU-KOPURUA = ", N  : N = N + 1
70 INPUT "URRATSAREN LUZERA = ", H
80 DEF FNG(X) = SQR(1 + X*X) + X
90 DEF FND(X, Y) = (1 + X*Y)/(1 + X*X)
100 FOR I = 1 TO N
110 K1 = FND(X(I), Y(I)) :
120 K2 = FND(X(I) + .5*H, Y(I) + .5*K1*H)
130 K3 = FND(X(I) + .5*H, Y(I) + .5*K2*H)
140 K4 = FND(X(I) + H, Y(I) + K3*H)
150 YE(I) = FNG(X(I))
160 X(I + 1) = X(I) + H
170 Y(I + 1) = Y(I) + H*(K1 + 2*K2 + 2*K3 + K4)/6
180 NEXT I : PRINT
190 PRINT TAB(0) "X BALIOA"; TAB(11) "Y HURBILDUA";
200 PRINT TAB(26) "Y ZEHATZA"; TAB(41) "ERRORE ABS"
210 PRINT "-----------------------------";
220 PRINT "---------------------"
230 FOR I = 1 TO N
240 PRINT TAB(0) USING "##.#"; X(I); : PRINT TAB(11) USING "##.###
    ###^^^^"; Y(I); : PRINT TAB(25) USING "##.######^^^^"; YE(I);
250 PRINT TAB(40) USING "##.######^^^^"; ABS(YE(I) - Y(I))
260 NEXT I
270 END
```

```
     X0 BALIOA      =   0          PUNTU-KOPURUA       =   10
     Y(X0) BALIOA =   1          URRATSAREN LUZERA =   .1
```

X BALIOA	Y HURBILDUA	Y ZEHATZA	ERRORE ABS
0.0	1.000000D+00	1.000000D+00	0.000000D+00
0.1	1.104988D+00	1.104988D+00	1.589457D-08
0.2	1.219804D+00	1.219804D+00	9.536743D-08
0.3	1.344031D+00	1.344031D+00	1.271566D-07
0.4	1.477033D+00	1.477033D+00	2.463659D-07
0.5	1.618034D+00	1.618034D+00	2.463659D-07
0.6	1.766191D+00	1.766190D+00	2.861023D-07
0.7	1.920656D+00	1.920656D+00	3.099442D-07
0.8	2.080625D+00	2.080625D+00	3.019969D-07
0.9	2.245363D+00	2.245362D+00	3.019969D-07
1.0	2.414214D+00	2.414214D+00	3.417333D-07

3. GOI-ORDENAKO SISTEMA ETA EKUAZIOAK

3.1 Era normalean adierazitako sistemak

Ekuazio arruntetarako erabilitako urrats bakarreko algoritmoak, era normalean adierazita, ekuazio-sistemen kasurako ere erabilgarriak dira; ekuazio bakoitzari aplikatzea besterik ez dago. Ingeniaritzarako praktikan, sarritan ekuazio-kopuru handiko sistemak daude. Horrek zenbakizko ebazpen-planteamenduak eskatzen ditu. Gaia kokatzeko asmoz, bi ekuaziotako kasua aztertuko dugu, errazena baita. Horretarako Runge-Kutta-ren laugarren ordenako algoritmo klasikoa erabiliko dugu.

Bira era normalean adierazitako bi ekuazioz osoturiko hurrengo sistema:

$$y' = f(x,y,z), \qquad z' = g(x,y,z) \qquad [1]$$

eta

$$y(0) = y_0, \qquad z(0) = z_0 \qquad [2]$$

hastapen-baldintzak.

[23] eta [24]-ren arabera, RK-ren algoritmoaren formulazioa ondokoa da:

$$\boxed{y_{i+1} = y_i + [k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4]h/6,} \qquad [25]$$

$$\boxed{z_{i+1} = z_i + [p_1 + 2p_2 + 2p_3 + p_4]h/6,} \qquad [26]$$

non

$$k_1 = f(x_i, y_i, z_i),$$

$$p_1 = g(x_i, y_i, z_i),$$

$$k_2 = f(x_i + 0.5h, y_i + 0.5k_1h, z_i + 0.5p_1h),$$

$$p_2 = g(x_i + 0.5h, y_i + 0.5k_1h, z_i + 0.5p_1h),$$

$$k_3 = f(x_i + 0.5h, y_i + 0.5k_2h, z_i + 0.5p_2h),$$

$$p_3 = g(x_i + 0.5h, y_i + 0.5k_2h, z_i + 0.5p_2h),$$

$$k_4 = f(x_i + h, y_i + k_3h, z_i + p_3h),$$

$$p_4 = g(x_i + h, y_i + k_3h, z_i + p_3h)$$

diren.

Ekuazio-kopurua handia bada, aldaketak ezartzerakoan zailtasunak izango ditugu, emandako biribiltze-errorea kontrolatzea zaila izanik. Egoera honetan beste prozedura batzutara joko dugu, adibidez Gill-enera, prozedura hauek RK-ren algoritmoa aldatuko dutelarik.

3.2 Goi-ordenako ekuazio diferentzialak

Urrats arrunteko algoritmoa goi-ordenako ekuazioetarako aplikatzea hurrengoan datza: posible denean, ekuazioa sistema baliokide bilakatzean.

Adibidez, biz bigarren ordenako ondoko ekuazio diferentziala,

$$y'' = g(x, y, y'),$$

$y(x_0) = y_0$, $y'_0(x_0) = z_0$ hastapen-baldintzak izanik.

$y = z$ ordezkapenak emandako ekuazioa hurrengo sistema bilakatuko du,

$$y' = z, \qquad z' = g(x, y, z),$$

hastapen-baldintzak

$$y(x_0) = y_0, \qquad z(x_0) = z_0$$

direlarik.

Orain, aurreko puntuan deskribatutako algoritmoa aplikagarria da.

Adibidea.- Integratu hurrengo ekuazio diferentziala zenbakizko metodoen bidez:

$$(x + 1)y'' - (3x + 4)y' + 3y = (3x + 2)e^{3x}, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 4.$$

E: y''-arekiko ebatziz, eta $y' = z$ eginez,

$$y'' = \frac{3x + 4}{x + 1} y' - \frac{3}{x + 1} y + \frac{(3x + 2)e^x}{x + 1} \longrightarrow$$

$$y' = z, \qquad z' = \frac{3x + 4}{x + 1} z - \frac{3}{x + 1} y + \frac{(3x + 2)e^x}{x + 1}$$

sistema eta $y(0) = 1$, $z(0) = 4$ hastapen-baldintzak lortuko dira.

Oharra: Aurreko adibide batetan ebatzitako ekuazio honek, ondoko soluzio orokor eta partikularra ditu:

$$y = (A + x)e^{3x} + B(3x + 4) \xrightarrow{A=1 \quad B=0} y = (1 + x)e^{3x}.$$

PROGRAMAREN DESKRIKPZIOA

```
10 REM "GOI-ORDENAKO EKUAZIOTARAKO RK-REN 4. ORDENAKO METODOA"
15 DEFDBL A-H,O-Z
20 CLS
30 DIM X(100), Y(100), Z(100), YE(100)
40 PRINT "HASTAPEN-BALDINTZA"
50 INPUT " XO  = BALIOA", X(1) : INPUT " Y(XO) = BALIOA", Y(1)
60 INPUT " Z(XO) = BALIOA", Z(1)
70 INPUT "PUNTU-KOPURUA = ", N : N = N + 1
80 INPUT "URRATSAREN LUZERA = ", H
90 DEF FNR(X) = (1 + X)*EXP(3*X)
100 DEF FNF(X,Y,Z) = Z
110 DEF FNG(X,Y,Z) =((3*X + 4)*Z - 3*Y + (3*X + 2)*EXP(3*X))/(X+1)
120 FOR I = 1 TO N
130 K1 = FNF(X(I), Y(I), Z(I)) : P1 = FNG(X(I), Y(I), Z(I))
140 K2 = FNF(X(I) + .5*H, Y(I) + .5*K1*H, Z(I) + .5*P1*H)
150 P2 = FNG(X(I) + .5*H, Y(I) + .5*K1*H, Z(I) + .5*P1*H)
160 K3 = FNF(X(I) + .5*H, Y(I) + .5*K2*H, Z(I) + .5*P2*H)
170 P3 = FNG(X(I) + .5*H, Y(I) + .5*K2*H, Z(I) + .5*P2*H)
180 K4 = FNF(X(I) + H, Y(I) + K3*H, Z(I) + P3*H)
190 P4 = FNG(X(I) + H, Y(I) + K3*H, Z(I) + P3*H)
200 YE(I) = FNR(X(I))
210 X(I + 1) = X(I) + H
220 Y(I + 1) = Y(I) + (K1 + 2*K2 + 2*K3 + K4)*H/6
230 Z(I + 1) = Z(I) + (P1 + 2*P2 + 2*P3 + P4)*H/6
240 NEXT I : PRINT
250 PRINT TAB(0) "X BALIOA"; TAB(11) "Y HURBILDUA";
260 PRINT TAB(26) "Y ZEHATZA"; TAB(41) "ERRORE ABS"
270 PRINT "------------------------------";
280 PRINT "----------------------"
290 FOR I = 1 TO N
300 PRINT TAB(0) USING "##.#"; X(I); : PRINT TAB(11) USING "##.###
    ###^^^^"; Y(I); : PRINT TAB(25) USING "##.######^^^^"; YE(I);
310 PRINT TAB(40) USING "##.######^^^^"; ABS(YE(I) - Y(I))
320 NEXT I
330 END
```

LORTUTAKO EMAITZAK

HASTAPEN-BALDINTZAK:
X0 BALIOA = 0 ; Y(X0) BALIOA = 1 ; Z(X0) BALIOA = 4
PUNTU-KOPURUA = 10 ; URRATSAREN LUZERA = .1

X BALIOA	Y HURBILDUA	Y ZEHATZA	ERRORE ABS
0.0	1.000000D+00	1.000000D+00	0.000000D+00
0.1	1.484799D+00	1.484845D+00	4.518827D-05
0.2	2.186418D+00	2.186543D+00	1.245499D-04
0.3	3.197227D+00	3.197484D+00	2.570311D-04
0.4	4.647691D+00	4.648164D+00	4.726410D-04
0.5	6.721720D+00	6.722533D+00	8.131504D-04
0.6	9.678093D+00	9.679434D+00	1.341565D-03
0.7	1.388033D+01	1.388249D+01	2.153587D-03
0.8	1.983833D+01	1.984172D+01	3.392919D-03
0.9	2.826624D+01	2.827149D+01	5.246830D-03
1.0	4.016306D+01	4.017107D+01	8.014743D-03

VI. GAIA: LEHEN ORDENAKO DERIBATU PARTZIALETAKO EKUAZIOAK.

1. SARRERA ETA DEFINIZIOAK

2. EKUAZIO LINEALEN INTEGRAZIOA. APLIKAZIOAK

3. EKUAZIO DIFERENTZIAL EZ-LINEALAK

1. SARRERA ETA DEFINIZIOAK

1.1 Definizioak

Zenbait aldagairen menpeko funtzioen deribatu edo diferentzialak dituzten ekuazioei, deribatu partzialetako ekuazio diferentzialak deritze.

Ekuazio arrunten kasuan bezala, ekuazioaren ordena ordena handiena duen deribatuarena da.

Bi aldagaietako funtzioen kasuan, $z = z(x,y)$ denean alegia, normalean lehen eta bigarren ordenako deribatuak idazteko, ondoko notazioa erabili ohi da:

$$\partial z/\partial x \equiv p, \quad \partial z/\partial y \equiv q, \quad \partial^2 z/\partial x^2 \equiv r, \quad \partial^2 z/\partial x\partial y \equiv s, \quad \partial^2 z/\partial y^2 \equiv t.$$

Ondoko adierazpeneko ekuazioei, lehen ordenako ekuazio lineal ez-homogeno edo osotuak deritze:

$$\sum_1^n X_i(x_1,x_2,\ldots,x_n,z)\,\frac{\partial z}{\partial x_i} = Z(x_1,x_2,\ldots,x_n,z), \quad i = 1,2,\ldots,n,$$

non $\partial z/\partial x_i$ deribatuekiko linealtasuna nabari daitekeen. Orokorrean ez da funtzioarekiko linealtasunik adieraziko. Bigarren atala zero bada, ekuazio lineal homogenoa dela diogu.

Adibidea.- Sailka bitez lehen ordenako hurrengo ekuazioak:

a) $x(y-x)\partial z/\partial x + y(z-x)\partial z/\partial y = xyz \iff x(y-x) \;\; + y(z-x)q = xyz.$

b) $(\partial z/\partial x)(\partial z/\partial y) = x^2y^2 \iff pq = x^2y^2.$

c) $z(y - xz^2)dx + xzdy - 2xydz = 0.$

E: Lehenengoa ekuazio lineal osotua da, eta beste biak ez-linealak dira. Hirugarrenari ekuazio diferentzial totala deritzo.

1.2 Deribatu partzialetako ekuazioen jatorria

Ekuazio arrunten hedapen gisa, deribatu partzialetako ekuazioak mota honetako problemetan ageri ohi dira:

1.2.1 Problema geometrikoak.

Plano tangenteekin, zuzen normalekin, zein hauez osoturiko magnitudeekin erlazionaturik dauden gainazalen propietateak aztertzean, lehen ordenako ekuazioak ondorioztatu ziren.

Gogora ekar dezagun ezen, plano tangentearen eta zuzen normalaren ekuazioak $z = z(x,y)$ gainazaleko $P(x,y,z)$ puntuan, $\bar{n} = [p,q,-1]$ bektore normalaren eta $\bar{v} = [X-x,\ Y-y,\ Z-z]$ posizio-bektorearen arteko biderkaketa eskalarraren eta biderkaketa bektorialaren anulaziotik ondorioztatzen direla, hurrenez hurren. Hau da:

PLANO TANGENTEA

$$\boxed{\bar{v}_p . \bar{n} = 0 \quad \longrightarrow \quad (X - x)p + (Y - y)q = Z - z.}$$

ZUZEN NORMALA

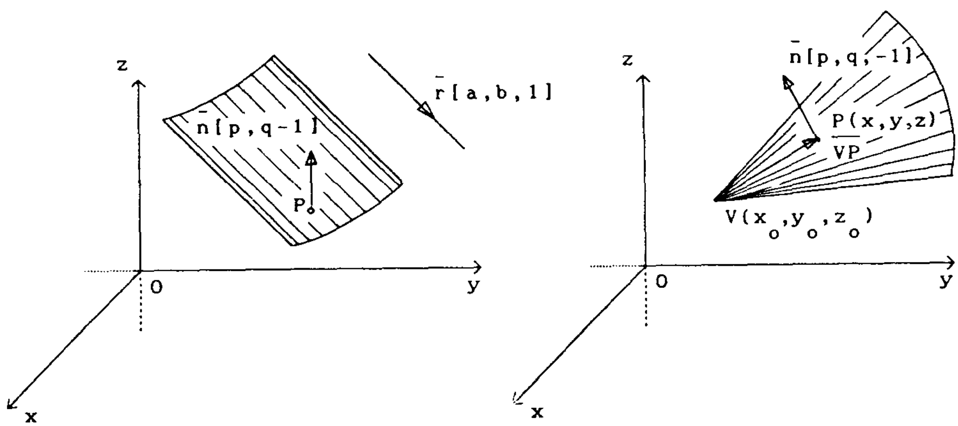
$$\boxed{\bar{v}_r \times \bar{n} = \bar{0} \quad \longrightarrow \quad \frac{X - x}{p} = \frac{Y - y}{q} = \frac{Z - z}{-1} .}$$

Adibidea.- Lor bitez bere puntuetan hurrengo propietate hauek betetzen dituzten gainazalei dagozkien ekuazio diferentzialak:

a) plano tangentea $x/a = y/b = z/1$ *zuzenarekiko paraleloa da,* *b) plano tangentea* $V_0(x_0, y_0, z_0)$ *puntu finkotik pasatuko da,*

E: Lehenengo kasua gainazal zilindrikoez osoturiko familia bat da. Gainazal bakoitzeko edozein P(x,y,z) puntutan $\bar{n} \equiv [p,q,-1]$ bektore normala zuzenari asoziaturiko $\bar{r} \equiv [a,b,1]$ bektorearekiko ortogonala izango da. Honen ondorioz, hauen arteko biderkaketa eskalarra nulua izango da.

$$\bar{r}.\bar{n} = 0 \longrightarrow [a,b,1].[p,q,-1] = 0 \Rightarrow ap + bq = 1.$$



GAINAZAL ZILINDRIKOA GAINAZAL KONIKOA

Bigarren kasua gainazal konikoei dagokie. P(x,y,z) puntu aldakorra $V(x_o,y_o,z_o)$ erpinarekin lotzen duen $\overline{VP} \equiv [x-x_o,y-y_o,z-z_o]$ bektorea gainazalarekiko plano tangentean edukita egon behar da, hots, $\bar{n} \equiv [p,q,-1]$ bektore normalarekiko ortogonala izango da. Beraz, biderkaketa eskalarra nulua dugu:

$$\overline{VP}.\bar{n} = 0 \rightarrow [x-x_o,y-y_o,z-z_o][p,q,-1] = 0 \Rightarrow (x-x_o)p + (y-y_o)q = z-z_o$$

1.2.2 Problema fisikoak.

Askatasun-gradu bakarreko fenomeno fisikoak matematikoki deskribatzean, ekuazio diferentzialak ondorioztatuko dira. Fenomenoan agintzen duen legeak deribatu partzialak edo diferentzialak izango dira. Adibideak:

A) $$(\partial u/\partial x)^2 + (\partial u/\partial y)^2 + (\partial u/\partial z)^2 = n(x,y,z).$$

Ekuazio honek argi-izpiek ingurune ez-homogeno batetan duten hedapena adierazten du, $n(x,y,z)$ errefrakzio-indizea delarik.

B) $$\partial u/\partial t = a^2(\partial^2 u/\partial x^2).$$

Habe batetan zeharreko $u(t,x)$ denbora eta puntuaren posizioaren araberako tenperaturaren aldakuntza adierazten du.

C) $$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$

Laplace-ren ekuazioa deritzo. Fisika matematikoan oinarrizkoa da. Funtzio harmonikoek betetzen dute; adibidez, kargarik gabeko ingurune batetako eremu elektriko baten potentziala.

1.2.3 Hautazko konstanteen ezabapena.

Biz ondoko n parametroren menpeko jatorrizkoa,

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n, z, C_1, C_2, \ldots, C_n) = 0. \qquad [1]$$

Bere aldagaietariko bat, z adibidez, gainontzeko $x_1, x_2, \ldots, x_n$ aldagaien menpe inplizituki definituko du. [1] ekuazioa n aldagaietariko bakoitzarekiko deribatzean, hurrengo n ekuazioak lortuko dira:

$$\frac{\partial F}{\partial x_i} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x_i} = 0, \qquad i = 1,2, \ldots ,n,$$

zeintzuek [1]-arekin batera, orokorrean C_i parametroak ezabatzea ahalbidetuko duten. Era horretan ondoko erako lehen ordenako deribatu partzialetako ekuazio ez-lineala ondorioztatuko da:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n, z, \partial z/\partial x_1, \partial z/\partial x_2, \ldots, \partial z/\partial x_n) = 0.$$

Adibidez, bi aldagai independenteren kasuan:

$$\left\{\begin{array}{l} F(x,y,z,A,B) = 0, \\[2ex] \dfrac{\partial F}{\partial x} + \dfrac{\partial F}{\partial z} p = 0, \\[2ex] \dfrac{\partial F}{\partial y} + \dfrac{\partial F}{\partial z} q = 0, \end{array}\right. \xrightarrow{\text{A eta B ezabatuz}} f(x,y,z,p,q) = 0.$$

1.2.4 Hautazko funtzioen ezabapena.

Kontsidera dezagun

$$\phi[u(x,y,z),\ v(x,y,z)] = 0 \qquad [2]$$

ekuazio funtzionala, non u eta v bi funtzio ezagun diren eta ϕ delakoa hautazko funtzio deribagarria.

[2] ekuazioak z aldagaia x eta y-ren menpean inplizituki definitzen badu, z-ren deribazioak aldagai hauekiko ekuazio-sistema bat ondorioztatuko du. Bertan ϕ-ren deribatuak ezabatuz, lehen ordenako deribatu partzialetako ekuazio lineal batetara helduko gara, hots,

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial \phi}{\partial u}\left[\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial z} p\right] + \dfrac{\partial \phi}{\partial v}\left[\dfrac{\partial v}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial z} p\right] = 0, \\[3ex] \dfrac{\partial \phi}{\partial u}\left[\dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial u}{\partial z} q\right] + \dfrac{\partial \phi}{\partial v}\left[\dfrac{\partial v}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial z} q\right] = 0. \end{array}\right.$$

Sistemaren bateragarritasunak, ϕ-ren deribatuen koefizienteez osoturiko determinante funtzionalak zero izan behar duela exijitzen du:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} p & \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial z} p \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} q & \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} q \end{vmatrix} = 0.$$

Determinantea garatu eta ordenatuz, ondokoa lor daiteke:

$$\left[\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial y}\right]p + \left[\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial z}\right]q = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Edo, determinante jacobiarren notazioa erabiliz,

$$\frac{D(u,v)}{D(y,z)}\, p + \frac{D(u,v)}{D(z,x)}\, q = \frac{D(u,v)}{D(x,y)} \qquad [3]$$

alegia, ondoko erako deribatu partzialetako ekuazio lineala lor daiteke:

$$X(x,y,z)p + Y(x,y,z)q = Z(x,y,z). \qquad [4]$$

Kontsiderazio geometrikoak

Ekuazio diferentzialetako sistemen jatorriaz aritu ginenean, ondoko ekuazioen bidez adierazitako kurben kongruentzia suposatu genuen:

$$\left\{\begin{array}{l} F(x,y,z,A,B) = 0, \\ G(x,y,z,A,B) = 0, \end{array}\right. \longrightarrow \left\{\begin{array}{ll} A = u(x,y,z), & [5] \\ B = v(x,y,z), & [6] \end{array}\right.$$

non u eta v funtzio uniformeak diren, izate-eremuko puntu bakoitzetik kongruentziako kurba bakar bat pasatuko delarik.

A eta B parametroen artean hautazko

$$\phi(A, B) = 0 \qquad [7]$$

korrespondentzia biunibokoa ezarriz gero, kurba-sorta parametro bakarrekoa da eta beraren leku geometrikoa gainazal-familia bat, beraren karakteristikoak edo sortzaileak kongruentziaren kurbak direlarik. Familia honen ekuazio funtzionala lortzeko, [5], [6] eta [7] ekuazioak erabiliz A eta B parametroak ezabatuko dira. Orduan, ondokoa lortuko da:

$$\phi[u(x,y,z),\ v(x,y,z)] = 0. \qquad [2]\equiv[8]$$

[8] gainazal-sortako gainazal bat aurkitzeko, hautazko ϕ funtzioa partikularizatu behar da. Praktikan normalean bilatzen ari garen gainazalaren kurba zuzentzaile bat emango da, hots, sortzaileak oinarritzeko kurba bat. Garbi dago zuzentzailea ez dela kongruentziakoa izan behar, kasu horretan sortzaileetariko baten berdina izango bailitzateke.

Zuzentzailea gainazalen ebakidura eran definiturik badago, hau da,

$$f_1(x,y,z) = 0 \quad [9], \qquad f_2(x,y,z) = 0, \quad [10]$$

orduan, ϕ-ren kalkulua [5], [6], [9] eta [10] ekuazioen bidez x, y eta z ezabatuz lortuko da.

Bestalde, ekuazio parametrikoen bidez emanik badator, hots,

$$x = x(t) \quad [11], \qquad y = y(t) \quad [12], \qquad z = z(t), \quad [13]$$

orduan, ϕ kalkulatzeko [5], [6], [11], [12] eta [13] ekuazioen bidez x, y, z eta t ezabatuko dira.

Adibidea.- Kalkulatu $\phi[x^2 + y^2 + z^2,\ xyz^2] = 0$ funtzio-erlazioari dagokion ekuazio diferentziala, eta determinatu

$$x^2 + y^2 = 4, \qquad z^2 - xy = 0$$

zuzentzaileko gainazala.

E: $$u = x^2 + y^2 + z^2, \qquad v = xyz^2$$

funtzio laguntzaileak erabiliz, ekuazio funtzionala x eta y-rekiko deribatuz, ondoko sistema lor daiteke:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\phi}{\partial u}[2x + 2zp] + \dfrac{\partial\phi}{\partial v}[yz^2 + 2xyzp] = 0, \\[2ex] \dfrac{\partial\phi}{\partial u}[2y + 2zq] + \dfrac{\partial\phi}{\partial v}[xz^2 + 2xyzq] = 0. \end{cases}$$

Sistema hau bateragarria denez, hurrengo determinantea nulua da:

$$\begin{vmatrix} 2x + 2zp & yz^2 + 2xyzp \\ 2y + 2zq & xz^2 + 2xyzq \end{vmatrix} = 0.$$

Hortik,

$$(2x + 2zp)(xz^2 + 2xyzq) - (2y + 2zq)(yz^2 + 2xyzp) = 0 \longrightarrow$$

$$x(z^2 - 2y^2)p + y(2x^2 - z^2)q = z(y^2 - x^2).$$

Orain, $\phi(A,B)$ kalkulatzeko sistematik x, y eta z ezabatuko dira. Era horretan, honakoa ondorioztatuko da:

$$x^2 + y^2 + z^2 = A, \quad xyz^2 = B, \quad x^2 + y^2 = 4, \quad z^2 - xy = 0 \longrightarrow$$

$$4 + z^2 = A, \quad z^4 = B \longrightarrow (A - 4)^2 - B \equiv \phi(A,B) = 0.$$

A eta B ordezkatu ondoren, hurrengo gainazala lortuko da:

$$(x^2 + y^2 + z^2 - 4)^2 - xyz^2 = 0.$$

---

2. EKUAZIO LINEALEN INTEGRAZIOA. APLIKAZIOAK

Hasteko, har dezagun bi aldagai independentetako kasurik arruntena, hots,

$$X(x,y,z)p + Y(x,y,z)q = Z(x,y,z), \qquad [1]$$

eta demagun $u(x,y,z) = A$ ekuazioak [1] ekuazioaren soluzio den $z = z(x,y)$ funtzio bat inplizituki definitzen duela. Funtzio honen p eta q deribatuak hurrengoak dira:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} p = 0 \longrightarrow p = - \frac{\partial u/\partial x}{\partial u/\partial z} \; ; \quad \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} q = 0 \longrightarrow q = - \frac{\partial u/\partial y}{\partial u/\partial z} .$$

Balio hauek [1] ekuazioan ordezkatu ondoren,

$$X \frac{\partial u}{\partial x} + Y \frac{\partial u}{\partial y} + Z \frac{\partial u}{\partial z} = 0 \qquad [2]$$

ekuazioa ondorioztа daiteke. $u(x,y,z) = A$ ekuazioak [1]-aren z soluzio bat definitzen badu, [2] ekuazioa bete beharko du.

Bestalde, $u(x,y,z) = A$ diferentziatuz, hurrengoa lortuko da:

$$\frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz = 0. \qquad [3]$$

[2] eta [3] bateragarriak direnez, era kanonikoan adierazitako bi ekuaziotako hurrengo sistema diferentziala ondorioztа daiteke:

$$\frac{dx}{X} = \frac{dy}{Y} = \frac{dz}{Z} . \qquad [4]$$

Azken honi [1]-aren ezaugarri den sistema diferentzial karakteristikoa deritzo, eta ekuazio linealaren integral guztiek bete behar dute. Alderantziz, $v(x,y,z) = B$ delakoa [4]-aren soluzioa bada, era inplizituan definitutako $z = z\,(x,y)$ funtzioa [1] ekuazioaren integral bat da. Beraz, $v(x,y,z) = B$ delakoa diferentziatuz,

$$\frac{\partial v}{\partial x}\,dx + \frac{\partial v}{\partial y}\,dy + \frac{\partial v}{\partial z}\,dz = 0, \qquad [5]$$

eta [4] sistematik lortutako dx, dy, dz, hau da,

$$dx = \lambda X, \qquad dy = \lambda Y, \qquad dz = \lambda Z$$

balioak, [5]-ean ordezkatu ondoren, hurrengoa lortuko da:

$$\lambda\left(X\,\frac{\partial v}{\partial x} + Y\,\frac{\partial v}{\partial y} + Z\,\frac{\partial v}{\partial z} \right) = 0.$$

λ-ren edozein baliotarako,

$$X\,\frac{\partial v}{\partial x} + Y\,\frac{\partial v}{\partial y} + Z\,\frac{\partial v}{\partial z} = 0$$

bete behar da, eta honek eta [2]-ak, [4] sistemaren $v(x,y,z) = B$ integralaren bidez definituriko $z = z\,(x,y)$ delakoa [1]-en soluzio bat dela frogatu dute.

2.1.1 Integral orokorra.

"$u(x,y,z) = A$ eta $v(x,y,z) = B$ erlazioak lehen ordenako

$$\boxed{X(x,y,z)p + Y(x,y,z)q = Z(x,y,z)} \qquad [1]$$

ekuazio diferentzial linealaren

$$\boxed{\frac{dx}{X(x,y,z)} = \frac{dy}{Y(x,y,z)} = \frac{dz}{Z(x,y,z)}} \qquad [4]$$

sistema diferentzial karakteristikoaren soluzio independenteak badira, orduan, [1] ekuazioaren soluzio orokorra ondoko ekuazio funtzionala da:

$$\boxed{\phi[u(x,y,z),\ v(x,y,z)] = 0,} \qquad [6]$$

non ϕ delakoa hautazko funtzio deribagarria den".

Frogapena: Hasteko, dakusagun [6] adierazpenak [2] ekuazioa beteko duela. Hau da,

$$X\,\frac{\partial\phi}{\partial x} + Y\,\frac{\partial\phi}{\partial y} + Z\,\frac{\partial\phi}{\partial z} = 0 \qquad [7]$$

dela. Hain zuzen, [6] deribatu eta [7]-an ordezkatuz,

$$X\left[\frac{\partial\phi}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial\phi}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}\right] + Y\left[\frac{\partial\phi}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial\phi}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}\right] + Z\left[\frac{\partial\phi}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial\phi}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial z}\right] =$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial u}\left[X\,\frac{\partial u}{\partial x} + Y\,\frac{\partial u}{\partial y} + Z\,\frac{\partial u}{\partial z}\right] + \frac{\partial\phi}{\partial v}\left[X\,\frac{\partial v}{\partial x} + Y\,\frac{\partial v}{\partial y} + Z\,\frac{\partial v}{\partial z}\right] = 0$$

lortuko da, zeren $u(x,y,z) = A$ eta $v(x,y,z) = B$ funtzioak [4]-aren soluzioak direnez, biek [2] ekuazioa beteko baitute.

Bestalde, hautazko ϕ funtzioa partikularizatuz, [1]-aren edozein soluzio [6]-tik atera daitekeela froga dezakegu. Beraz, soluzio orokorra dugu.

Horrela, demagun $g(x,y,z) = 0$ ekuazioak [1] ekuaziorako jatorrizko $z = z(x,y)$ soluzio bat definitzen duela. Bai $g(x,y,z) = 0$ berdintzak, eta bai sistema karakteristikoko $u(x,y,z) = A$ eta

$v(x,y,z) = B$ integralek, [2] adierazpena beteko dute, hau da,

$$X \frac{\partial g}{\partial x} + Y \frac{\partial g}{\partial y} + Z \frac{\partial g}{\partial z} = 0,$$

$$X \frac{\partial u}{\partial x} + Y \frac{\partial u}{\partial y} + Z \frac{\partial u}{\partial z} = 0,$$

$$X \frac{\partial v}{\partial x} + Y \frac{\partial v}{\partial y} + Z \frac{\partial v}{\partial z} = 0.$$

Sistema homogenoa bateragarria denez, determinante funtzionala nulua izango da:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} & \frac{\partial g}{\partial z} \\ \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \end{vmatrix} = \frac{D(g,u,v)}{D(x,y,z)} = 0.$$

Daukagunez, g, u eta v-ren arteko dependentzia funtzionala existitzen da. Era honetan ondokoa dugu:

$$\psi[g(x,y,z),\ u(x,y,z),\ v(x,y,z)] = 0. \qquad [8]$$

Bestalde, [4] ekuazioaren bi integralak independenteak direla suposatzean, [8]-tik g funtzioa u eta v-rekiko lortzea posible izango da:

$$g(x,y,z) = \psi_0[u(x,y,z),\ v(x,y,z)], \qquad [9]$$

hau da, soluzio orokorraren partikularizazio gisa.

Laburbilduz, hurrengo korrespondentziak nabarmengarriak dira:

Kurba-kongruentzia | **Sistema diferentzial asoziatua**

$$\begin{cases} A = u(x,y,z) \\ B = v(x,y,z) \end{cases} \Longleftrightarrow \frac{dx}{X(x,y,z)} = \frac{dy}{Y(x,y,z)} = \frac{dz}{Z(x,y,z)} .$$

Kongruentziako kurbez osoturiko gainazal-sorta | **Deribatu partzialetako ekuazio lineala**

$$\phi[u(x,y,z),v(x,y,z)] = 0 \Longleftrightarrow X(x,y,z)p + Y(x,y,z)q = Z(x,y,z).$$

Ekuazio linealaren integrazio-prozesua

$$X(x,y,z)p + Y(x,y,z)q = Z(x,y,z) \longrightarrow \frac{dx}{X(x,y,z)} = \frac{dy}{Y(x,y,z)} = \frac{dz}{Z(x,y,z)}$$

$$\xrightarrow{\int} \begin{cases} A = u(x,y,z) \\ B = v(x,y,z) \end{cases} \Rightarrow \phi[u(x,y,z), v(x,y,z)] = 0.$$

Oharra: Sarritan, sistema diferentzial karakteristikoaren integralak lortzeko,

$$\boxed{\frac{dx}{X} = \frac{dy}{Y} = \frac{dz}{Z} = \frac{udx + vdy + wdz}{uX + vY + wZ}}$$

propietatea erabilgarria da, non $u(x,y,z)$, $v(x,y,z)$ eta $w(x,y,z)$ funtzio laguntzaileak era egokian aukeratuta, jatorrizkoen kalkulua erraztuko den. Konkretuki, eskuineko frakzioaren zatitzailea nulua bada, zenbakitzailea ere nulua izan behar da.

$$\boxed{uX + vY + wZ = 0 \longrightarrow udx + vdy + wdz = 0.}$$

Era horretan problema ekuazio total bat integratzean laburtzen da. Hau nahiko erraza izango da, biderkatzaileak biderkatzen duten aldagaiaren menpe soilik datozenean, $u = u(x)$, $v = v(x)$, $w = w(x)$ direnean, alegia.

Adibidea.- Integra bitez ondoko ekuazio diferentzial linealak:

a) $$x(z^2 - 2y^2)p + y(2x^2 - z^2)q = z(y^2 - x^2),$$

b) $$6yzp + q + 6y = 0,$$

eta bila bedi

$$\mathbf{D} \equiv \quad x = -\frac{3\sin t + 8}{2}, \quad y = \sqrt{3}\cos t, \quad z = 3\sin t$$

zuzentzaileko b) ekuazioaren gainazal integrala.

E: a) ekuazioaren sistema diferentzial karakteristikoa ondokoa da:

$$\frac{dx}{x(z^2 - 2y^2)} = \frac{dy}{y(2x^2 - z^2)} = \frac{dz}{z(y^2 - x^2)}.$$

Azter dezagun $uX + vY + wZ = 0$ ekuazioa betetzen duten u, v eta w biderkatzaile arrunten existentzia.

$$ux(z^2 - 2y^2) + vy(2x^2 - z^2) + wz(y^2 - x^2) = 0.$$

Hurrengo eran ordenatuz,

$$x^2(2vy - wz) + y^2(-2ux + wz) + z^2(ux - vy) = 0,$$

$$\begin{cases} 2vy - wz = 0, \\ -2ux + wz = 0, \\ ux - vy = 0, \end{cases}$$

sistema homogenora iritsiko gara, zeinaren soluzioak w-ren funtzioan hauexek diren:

$$u = wz/2x, \qquad v = wz/2y, \qquad w = w.$$

$w = 2/z$, $v = 1/y$, $u = 1/x$ aukeratuz, ondoko integrala ondorioztatuko da:

$$udx + vdy + wdz = 0 \longrightarrow dx/x + dy/y + 2dz/z = 0 \xrightarrow{\int} xyz^2 = A.$$

Sistemaren beste integral bat determinatzeko, biderkatzaileen ekuazioa ordenatu behar da:

$$2xy(vx - uy) + xz(uz - wx) + yz(wy - vz) = 0 \longrightarrow$$

$$\begin{cases} vx - uy = 0, \\ uz - wx = 0, \\ wy - vz = 0. \end{cases}$$

Sistema honen soluzioak $u = wx/z$, $v = wy/z$, $w = w$ dira.

$w = 2z \longrightarrow u = 2x$, $v = 2y$ eginez, hurrengoa ondorioztatuko da:

$$udx + vdy + wdz = 0 \longrightarrow 2xdx + 2ydy + 2zdz = 0 \xrightarrow{\int} x^2 + y^2 + z^2 = B.$$

Beraz, a) ekuazioaren soluzio orokorra ondokoa da:

$$\phi[xyz^2,\ x^2 + y^2 + z^2] = 0.$$

Oharra: Ekuazio funtzional honi asoziaturiko ekuazio diferentziala aurreko adibide batetan lortu zen.

---

b) ekuazioari asoziatutako ekuazio diferentziala ondokoa dugu:

$$\frac{dx}{6yz} = \frac{dy}{1} = \frac{dz}{-6y} .$$

Honek, berehalako bi integral independente ditu:

$$dx + zdz = 0 \xrightarrow{\int} 2x + z^2 = A; \quad 6ydy + dz = 0 \xrightarrow{\int} 3y^2 + z = B.$$

Beraz, soluzio orokorra ondoko hau da:

$$\phi[2x + z^2,\ 3y^2 + z] = 0.$$

Eskatutako gainazal integrala determinatzeko, hots, hautazko ϕ funtzioa konkretatzeko, nahikoa da kurba integralen (sortzaileen) eta zuzentzaileen ekuazioetatik x, y, z eta t aldagaiak ezabatzea.

$$2x + z^2 = A,\ 3y^2 + z = B,\ x = -(3\sin t + 8)/2,\ y = \sqrt{3}\cos t,\ z = 3\sin t$$

Ekuazio parametrikoak kongruentzian ordezkatuz eta lortutako ekuazioak batuz, honako hau ondorioztatuko da:

$$\left\{\begin{array}{l} 9\sin^2 t - 3\sin t - 8 = A, \\ \\ 9\cos^2 t + 3\sin t = B, \end{array}\right. \longrightarrow \quad A + B = 1.$$

Beraz, eskatutako gainazala hurrengoa da:

$$2x + z^2 + 3y^2 + z = 1.$$

2.1.2 Interpretazio bektoriala.

Biz ondoko eremu bektorial jarraia:

$$\overline{\mathbf{F}} = X(x,y,z)\overline{\mathbf{i}} + Y(x,y,z)\overline{\mathbf{j}} + Z(x,y,z)\overline{\mathbf{k}}.$$

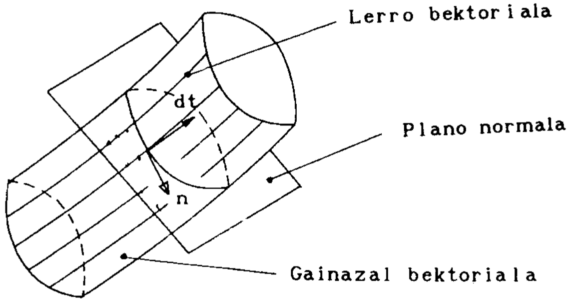
Normalean bere osagaiekiko era bektorialean idatziko da:

$$\overline{\mathbf{F}} = [X(x,y,z),\ Y(x,y,z),\ Z(x,y,z)].$$

Definizioa: Puntu bakoitzean bektore tangentea $\overline{\mathbf{F}}$ eremuaren norabidekoa duten lerroei, $\overline{\mathbf{F}}$ eremuko lerro bektorialak deritze. Lerro bektorialez osoturiko gainazalak, gainazal bektorialak dira.

$\overline{\mathbf{dt}}$ = [dx,dy,dz] bektoreak puntu bakoitzean $\overline{\mathbf{r}}$ = [x(t),y(t),z(t)] ekuazio bektorialeko kurba abailduaren tangentearen norabidea duela gogoratu beharrekoa da.

Bestalde, $\overline{\mathbf{n}}$ = [p,q,-1] delakoa z = z(x,y) jatorrizko ekuazioko gainazalarekiko bektore normala da.



F = [X,Y,Z] EREMUAREN ELEMENTUAK

Har ditzagun orain biderkaketa bektorial eta eskalarretako ekuazio hauek:

$$\overline{\mathbf{F}}\mathbf{x}\overline{\mathbf{dt}} = 0 \quad \longrightarrow \quad \frac{dx}{X} = \frac{dy}{Y} = \frac{dz}{Z}, \qquad [1]$$

$$\overline{\mathbf{F}}.\overline{\mathbf{n}} = 0 \quad \longrightarrow \quad Xp + Yq = Z, \qquad [2]$$

$$\overline{\mathbf{F}}.\overline{\mathbf{dt}} = 0 \quad \longrightarrow \quad Xdx + Ydy + Zdz = 0. \qquad [3]$$

Aurreko definizio eta biderkaketa eskalar eta bektorialaren propietateen arabera, ekuazio hauen soluzioetarako interpretazio hauek ondoriozta daitezke:

---

a) $\overline{\mathbf{F}}\mathbf{x}\overline{\mathbf{dt}}$ biderkaketa nulua izateak, bektoreak norabide berekoak direla esan nahi du. Hau da, [1] sistema diferentzialaren kurba integralak $\overline{\mathbf{F}}$ eremuko lerro bektorialak dira.

---

b) $\overline{\mathbf{F}}.\overline{\mathbf{n}}$ biderkaketa eskalarra nulua izateak, $\overline{\mathbf{F}}$ eta $\overline{\mathbf{n}}$ bektoreak ortogonalak direla esan nahi du. Hots, [2] ekuazioaren gainazal integralak $\overline{\mathbf{F}}$ eremuko gainazal bektorialak dira.

---

c) Kasu honetan, $\overline{\mathbf{F}}$ eta $\overline{\mathbf{dt}}$ bektoreen ortogonaltasuna, $\overline{\mathbf{F}}$ eremuko lerro bektorialekiko ortogonalak diren gainazalen ezaugarria da. Ondorioz, [3] ekuazio diferentzial totalaren gainazal integralak $\overline{\mathbf{F}}$-ren lerro bektorialekiko ortogonalak dira.

Eskematikoki:

$$\frac{dx}{X} = \frac{dy}{Y} = \frac{dz}{Z} \xrightarrow{\int} \begin{cases} u(x,y,z) = A \\ v(x,y,z) = B \end{cases} \Rightarrow$$ **F-ren kurba integralez osoturiko kongruentzia.**

$$Xp + Yq = \mathbf{Z} \xrightarrow{\int} \phi[u(x,y,z),v(x,y,z)] = 0 \Rightarrow$$ **Gainazal bektorialak.**

$$Xdx + Ydy + Zdz = 0 \xrightarrow{\int} G(x,y,z,C) = 0 \Rightarrow$$ **Gainazal ortogonalak.**

2.2 n aldagai independentetarako hedapena

Bi aldagaitarako lortutako emaitzak, zailtasun handirik gabe, n aldagai independentetako lehen ordenako ekuazioen kasura hedatuko dira. Frogapenik egin gabe, orokortzera pasatuko gara.

2.2.1 Ekuazio osotuaren integral orokorra.

Biz ondoko ekuazio lineal ez-homogeno edo osotua,

$$\sum_{1}^{n} X_i(x_1,x_2,\ldots,x_n,z)\,\frac{\partial z}{\partial x_i} = Z(x_1,x_2,\ldots,x_n,z), \quad i = 1,2,\ldots,n,$$

non $z = z(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ delakoa n aldagairen menpeko funtzioa eta beraren lehen ordenako deribatuak dauden. Gainera, X_i funtzioak kontsideratutako eremuan aldiberean nuluak ez direla, eta deribatu partzial bornatuak dituztela suposatuko dugu.

$$\frac{dx_1}{X_1} = \frac{dx_2}{X_2} = \ldots\ldots = \frac{dx_n}{X_n} = \frac{dz}{Z}\,.$$

Sistemaren n integral independenteak lortutakoan,

$$f_i(x_1,x_2,\ldots,x_n,z) = C_i\,, \qquad i = 1,2,\ldots,n,$$

alegia, ekuazio linealaren soluzio orokorra ondokoa da,

$$\boxed{\phi[f_1(x_1,x_2,\ldots,x_n,z),f_2(x_1,x_2,\ldots,x_n,z),\ldots,f_n(x_1,x_2,\ldots,x_n,z)] = 0}$$

ϕ delakoa hautazko funtzio deribagarria delarik.

2.2.2 Ekuazio homogenoaren integral orokorra.

Biz hurrengo ekuazio homogenoa:

$$\sum_{i=1}^{n} X_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) \frac{\partial z}{\partial x_i} = 0.$$

Aurrekoaren kasu konkretu moduan, Z = 0 kontsideratuz, sistema karakteristikoa ondokoa da:

$$\frac{dx_1}{X_1} = \frac{dx_2}{X_2} = \ldots = \frac{dx_n}{X_n} = \frac{dz}{0} .$$

Azkeneko frakziotik, sistemaren integral bat $dz = 0 \longrightarrow z = C_n$ dela ondoriozta daiteke. Lehenengo (n-1) ekuazioez osoturiko sistemaren beste (n-1) integral independente lortutakoan, orduan

$$f_i(x_1,x_2, \ldots ,x_n) = C_i, \qquad i = 1,2, \ldots ,n-1, \qquad z = C_n,$$

n integralak ditugu, ekuazio homogenoaren soluzio orokorra hauxe izango delarik,

$$\phi[f_1(x_1,x_2,..,x_n), \ f_2(x_1,x_2,..,x_n), \ \ldots, \ f_{n-1}(x_1,x_2,..,x_n), \ z] = 0$$

edo esplizituki, z bakanduta, hurrengoa:

$$\boxed{z = \psi[f_1(x_1,x_2,..,x_n), \ f_2(x_1,x_2,..,x_n),\ldots, \ f_{n-1}(x_1,x_2,..,x_n)].}$$

Adibidea.- Azter bedi zein soluzio motak beteko duen Euler-en ondoko teorema:

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} x_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2} x_2 + \ldots + \frac{\partial u}{\partial x_n} x_n = mu.$$

E: Ekuazioaren sistema karakteristikoa hurrengoa da:

$$\frac{dx_1}{x_1} = \frac{dx_2}{x_2} = \dots = \frac{dx_n}{x_n} = \frac{du}{mu} .$$

Lehenengo arrazoia beste guztiekin berdinduz gero lortzen diren ekuazioak ebatziz, honakoa ondoriozta daiteke:

$$x_2/x_1 = C_1, \quad x_3/x_1 = C_2, \dots, x_n/x_1 = C_{n-1}, \quad u/x_1^m = C_n .$$

Integral orokorra

$$\phi\left(x_2/x_1, \; x_3/x_1, \; \dots, \; x_n/x_1, \; u/x_1^m \right) = 0$$

da. Edo era baliokidean:

$$u/x_1^m = \psi\left(x_2/x_1, x_3/x_1, \dots, x_n/x_1\right) \longrightarrow u = x_1^m \; \psi\left(x_2/x_1, x_3/x_1, \dots, x_n/x_1\right).$$

Beraz, integral orokorra **m** mailako edozein funtzio deribagarri **homogeno** da.

2.3 Ekuazio linealen aplikazioak

Aplikazio interesgarrienen artean, gainazal ortogonalez osoturiko sorten kalkulua eta integrazio-faktoreen kalkulua aipatu behar dira, ekuazio diferentzial arrunten integraziorako erabilgarriak baitira.

2.3.1 Gainazal ortogonalak.

Biz $G(x,y,z,C) = 0$ parametro bakarreko gainazal-familia, zeinaren izate-eremuko puntu bakoitzetik gainazal bakar bat pasatuko den.

Orduan, C parametroa puntuarekiko funtzio uniforme modura har daiteke:

$$G(x,y,z,C) = 0 \longrightarrow C = g(x,y,z). \qquad [1]$$

Gogora dezagun bi gainazalek puntu amankomun batetan ebakitzerakoan osotzen duten angelua, definizioz bektore normalek puntu horretan osotzen duten angelua dela. Ondorioz, [1] sortarekiko ortogonala den $z = z(x,y)$ ekuazioko edozein gainazalen kasuan, gainazal biei dagozkien bektore normalen arteko biderkaketa eskalarra nulua izango da.

$C = g(x,y,z)$ sortako bektore normala: $\overline{n}_1 = [\partial g/\partial x, \partial g/\partial y, \partial g/\partial z]$.

$z = z(x,y)$ gainazalarekiko bektore normala: $\overline{n}_2 = [p,q,-1]$.

Ondoko hau,

$$\boxed{\overline{n}_1.\overline{n}_2 = 0 \longrightarrow \frac{\partial g}{\partial x} p + \frac{\partial g}{\partial y} q = \frac{\partial g}{\partial z},}$$

$C = g(x,y,z)$ sortarekiko ortogonalak diren gainazalek beteko duten lehen ordenako ekuazio lineala da.

Adibidea.- Lor bedi ardatza OZ-n eta erpina jatorrian dituzten paraboloideekiko ortogonalak diren gainazalak.

E: Paraboloide-sortaren ekuazioa ondokoa da:

$$x^2 + y^2 = Cz \longrightarrow C = \frac{x^2 + y^2}{z}.$$

Sorta ortogonalaren ekuazio diferentzialerako, hurrengoa dugu:

$$\partial g/\partial x = 2x/z, \quad \partial g/\partial y = 2y/z, \quad \partial g/\partial z = -(x^2 + y^2)/z^2 \longrightarrow$$

$$(2x/z)p + (2y/z)q = -(x^2 + y^2)/z^2 \longrightarrow xzp + yzq = -(x^2 + y^2)/2.$$

Ekuazioari asoziaturiko sistema diferentziala

$$\frac{dx}{xz} = \frac{dy}{yz} = \frac{-2dz}{x^2 + y^2}$$

da. Honen soluzioak ondokoak dira:

$$\frac{dx}{xz} = \frac{dy}{yz} \xrightarrow{\int} \text{Ln}x - \text{Ln}y = C \longrightarrow x/y = A, \qquad [1]$$

$$\frac{dy}{yz} = \frac{-2dz}{x^2 + y^2} \xrightarrow{x=Ay} \frac{dy}{y} = \frac{-2zdz}{y^2(A^2 + 1)} \longrightarrow 2(A^2 + 1)ydy + 4zdz = 0 \longrightarrow$$

$$(A^2 + 1)y^2 + 2z^2 = B \xrightarrow{A=x/y} x^2 + y^2 + 2z^2 = B. \qquad [2]$$

Beraz, lortu nahi zen sorta ortogonala, hurrengoa da:

$$\phi[x/y,\ x^2 + y^2 + 2z^2] = 0.$$

2.3.2 Integrazio-faktoreak.

$X(x,y)dx+Y(x,y)dy = 0$ ekuazio diferentzial arrunterako integrazio-faktoreen teoria aztertu genuenean, ekuazio horren integrazio-faktore guztiak

$$Y(x,y)p - X(x,y)q = z\left(\frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x}\right) \qquad [1]$$

deribatu partzialetako ekuazioaren soluzio direla frogatu zen. Horretarako deribatu gurutzatuen berdintza planteatzea besterik ez dago:

$$\partial(zX)/\partial y = \partial(zY)/\partial x \longrightarrow Xq + z(\partial X/\partial y) = Yp + z(\partial Y/\partial x),$$

berau $X(x,y)dx + z(x,y)Y(x,y)dy = 0$ ekuazio diferentziala zehatza izan dadin, baldintza nahikoa eta beharrezkoa delarik.

Integrazio-faktore bat aurkitzeko nahikoa izango da

$$\boxed{\frac{dx}{Y} = \frac{dy}{-X} = \frac{dz}{z[\partial X/\partial y - \partial Y/\partial x]}} \qquad [2]$$

ekuazioaren integral bat aurkitzea, hots, [1] ekuazioaren sistema diferentzial karakteristikoaren integral bat aurkitzea.

Adibidea.- Aurki bedi ondoko ekuaziorako integrazio-faktore bat:

$$y(x^2 - y^2 + 1)dx + x(y^2 - x^2 + 1)dy = 0.$$

E: Asoziaturiko sistema diferentziala hurrengoa da:

$$\frac{dx}{x(y^2 - x^2 + 1)} = \frac{dy}{-y(x^2 - y^2 + 1)} = \frac{dz}{4z(x^2 - y^2)} .$$

Biderkatzaileei buruzko propietatearen arabera, ondokoa dugu:

$$ux(y^2 - x^2 + 1) - vy(x^2 - y^2 + 1) + 4wz(x^2 - y^2) = 0.$$

Ekuazioa ordenatuz, hots,

$$-x^2(ux + vy - 4wz) + y^2(ux + vy - 4wz) + (ux - vy) = 0$$

eginez, soluziora iritsiko gara:

$$\left\{\begin{array}{l} ux + vy - 4wz = 0, \\ ux - vy = 0, \end{array}\right. \longrightarrow \quad u = 2zw/x, \quad v = 2zw/y, \quad w = w.$$

Azkenik, $u = \frac{2}{x}$, $v = \frac{2}{y}$, $w = \frac{1}{z}$ biderkatzaileak aukeratuz, eskatutako integrazio-faktorea ondorioztatuko da:

$$udx + vdy + wdz = 0 \longrightarrow 2dx/x + 2dy/y + dz/z = 0 \xrightarrow{\int} z = \frac{A}{x^2y^2}\,.$$

---

3. EKUAZIO DIFERENTZIAL EZ-LINEALAK

Ekuazio ez-linealen arloan, hasteko $X(x,y)dx + Y(x,y)dy = 0$ ekuazio diferentzial arrunten hedapena diren ekuazio diferentzial totalak kontsideratuko ditugu. Ondoren, Lagrange-Charpit-en metodoaren bidez, $f(x,y,z,p,q,) = 0$ kasu orokorrera pasatuko gara.

3.1 Ekuazio diferentzial totalak

Ondoko adierazpena dute:

$$\sum_{i=1}^{n} X_i(x_1, x_2, \ldots, x_n, z)dx_i + Z(x_1, x_2, \ldots, x_n, z)dz = 0.$$

$z = z(x,y)$ bi aldagaitako funtzioaren kasu partikularrerako, ekuazioa hurrengo eran idatziko da:

$$X(x,y,z)dx + Y(x,y,z)dy + Z(x,y,z)dz = 0. \qquad [1]$$

$Xp + Yq = Z$ ekuazio linealaren interpretazio bektoriala aztertu genuenean ondoko hau frogatu zen: [1] ekuazioaren integral orokorra, $dx/X = dy/Y = dz/Z$ sistema diferentzial kanonikoaren kurba integralekiko ortogonala den gainazal-familia bat da.

3.1.1 Integragarritasun-baldintza. Interpretazio bektoriala.

Adieraz dezagun [1] ekuazioa ondoko eran:

$$dz = -\frac{X}{Z}\,dx - \frac{Y}{Z}\,dy. \qquad [2]$$

z = z(x,y) delakoa [1] ekuazio diferentzial totalaren soluzio bada, beraren dz = p dx + q dy diferentziala, [2]-aren berdina da.

$$dz = pdx + qdy = -\frac{X}{Z}\,dx - \frac{Y}{Z}\,dy \longrightarrow p = -\frac{X}{Z} \quad [3], \quad q = -\frac{Y}{Z}. \quad [4]$$

Schwartz-en teoremako beharrezko baldintzak beteko direla suposatuz, hurrengoa ondoriozta dezakegu:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} \longrightarrow \frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial q}{\partial x} \longrightarrow \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{X}{Z}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{Y}{Z}\right). \qquad [5]$$

[5] adierazpena garatuz eta zatitzaileak ezabatuz, ondokoa dugu:

$$\left(\frac{\partial X}{\partial y} + \frac{\partial X}{\partial z}\,q\right)Z - \left(\frac{\partial Z}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z}\,q\right)X = \left(\frac{\partial Y}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial z}\,p\right)Z - \left(\frac{\partial Z}{\partial x} + \frac{\partial Z}{\partial z}\,p\right)Y.$$

p eta q direlakoak [3] eta [4] adierazpenez ordezkatuz, eta sinplifikatu ondoren, hurrengo emaitzara helduko gara:

$$\boxed{X\left(\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z}\right) + Y\left(\frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x}\right) + Z\left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}\right) = 0.} \qquad [6]$$

Ekuazio hau X, Y eta Z funtzioek bete behar duten baldintza da, [1] ekuazioa erlazio bakar batez integragarria izan dadin, G(x,y,z) = C jatorrizkotzat har daitekeelarik.

Interpretazio bektoriala.

[6] baldintza bektorialki ondoko bektoreen biderkaketa eskalarraren anulazioaren bidez adieraz daiteke:

$$\mathbf{F} = [X,Y,Z], \qquad \mathbf{rotF} \equiv \overline{\nabla}\mathbf{x}\mathbf{F} = \left[\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z}, \frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x}, \frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}\right],$$

$$\mathbf{F.rotF} = 0. \qquad [7]$$

Beraz, **F** eta **rotF** ortogonalak dira.

3.1.3 Integral orokorra.

Demagun **F** bektorea ez-nulua dela. Integragarritasun-baldintza bi eratan bete daiteke:

a) <u>**rotF** nulua bada:</u>

$$\mathbf{rotF} = 0 \longrightarrow \frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} = 0.$$

Beraz, "deribatu gurutzatuen berdintza" betetzen da.

Kasu honetan ekuazio diferentzial zehatza dugu, ekuazio diferentzial arrunten kasuan ikusi genuenaren hedapena izanik.

$$X(x,y)dx + Y(x,y)dy = 0 \ \text{ ED zehatza} \Longleftrightarrow \frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} = 0.$$

Teorema: "$X(x,y,z)dx + Y(x,y,z)dy + Z(x,y,z)dz = 0$ [1]

ekuazio diferentziala zehatza izango da, baldin eta soilik baldin, deribatuetarako ondoko berdintzak betetzen badira,

$$\frac{\partial Z}{\partial y} = \frac{\partial Y}{\partial z} \quad [8], \qquad \frac{\partial X}{\partial z} = \frac{\partial Z}{\partial x} \quad [9], \qquad \frac{\partial Y}{\partial x} = \frac{\partial X}{\partial y}, \quad [10]$$

eta orduan gutxienez U(x,y,z) funtzio bat existituko da, zeinaren diferentziala [1] ekuazioa izango den".

Ondorioz, [1] ekuazioaren soluzio orokorra ondokoa da:

$$\boxed{d[U(x,y,z)] = 0 \xrightarrow{\int} U(x,y,z) = C.}$$

U(x,y,z) funtzioaren kalkulua

U(x,y,z) funtzioa kalkulatzeko, ondoko berdintzatik hasi behar da:

$$dU = \frac{\partial U}{\partial x}\,dx + \frac{\partial U}{\partial y}\,dy + \frac{\partial U}{\partial z}\,dz = Xdx + Ydy + Zdz \quad \longrightarrow$$

$$\frac{\partial U}{\partial x} = X(x,y,z) \quad [11], \qquad \frac{\partial U}{\partial y} = Y(x,y,z) \quad [12], \qquad \frac{\partial U}{\partial z} = Z(x,y,z). \quad [13]$$

Hasierako hipotesitzat [8], [9] eta [10] berdintzak hartuta, U funtzioak [11], [12] eta [13] bete behar ditu.

[11]-tik hasiz gero,

$$U(x,y,z) = \int_a^x X(x,y,z)dx + \phi(y,z) \qquad [14]$$

idatz daiteke, non a konstantea eta $\phi(y,z)$ funtzio laguntzaile ezezaguna diren.

Era horretan, U(x,y,z) funtzioak [12] adierazpena bete behar duenez, hurrengoa ondorioztatuko da:

$$\frac{\partial U}{\partial y} = Y(x,y,z) = \frac{\partial}{\partial y}\left[\int_a^x X(x,y,z)dx + \phi(y,z)\right] = \int_a^x \frac{\partial X}{\partial y}\,dx + \frac{\partial \phi}{\partial y}\,. \qquad [15]$$

Parametroen menpeko integralen deribatuei buruzko propietateak aplikatu ditugu, (kasu honetan y eta z-ren) menpeko integralenak .

Era berean, [13]-a betetzeko, ondokoa izango dugu:

$$\frac{\partial U}{\partial z} = Z(x,y,z) = \frac{\partial}{\partial z}\left[\int_a^x X(x,y,z)dx + \phi(y,z)\right] = \int_a^x \frac{\partial X}{\partial z}\,dx + \frac{\partial \phi}{\partial z}\,. \qquad [16]$$

Orain, [10] eta [9] hipotesiak, hurrenez hurren, [15] eta [16] ekuazioetan ordezkatuz gero, ondokoa lor daiteke:

$$\frac{\partial U}{\partial y} = Y(x,y,z) = \int_a^x \frac{\partial X}{\partial y}\,dx + \frac{\partial \phi}{\partial y} = \int_a^x \frac{\partial Y}{\partial x}\,dx + \frac{\partial \phi}{\partial y} = \left|Y(x,y,z)\right|_a^x + \frac{\partial \phi}{\partial y} \longrightarrow$$

$$Y(x,y,z) = Y(x,y,z) - Y(a,y,z) + \frac{\partial \phi}{\partial y} \longrightarrow \frac{\partial \phi}{\partial y} = Y(a,y,z), \qquad [17]$$

$$\frac{\partial U}{\partial z} = Z(x,y,z) = \int_a^x \frac{\partial X}{\partial z}\,dx + \frac{\partial \phi}{\partial z} = \int_a^x \frac{\partial Z}{\partial x}\,dx + \frac{\partial \phi}{\partial z} = \left|Z(x,y,z)\right|_a^x + \frac{\partial \phi}{\partial z} \longrightarrow$$

$$Z(x,y,z) = Z(x,y,z) - Z(a,y,z) + \frac{\partial \phi}{\partial z} \longrightarrow \frac{\partial \phi}{\partial z} = Z(a,y,z). \qquad [18]$$

Prozedura hau errepikatuz, [17] eta [18] funtzioek ϕ funtzio laguntzailea finkatzea ahalbidetuko dute. Beraz, [17]-tik

$$\phi(y,z) = \int_b^y Y(a,y,z)dy + \psi(z) \qquad [19]$$

ondorioztatuko da, non $\psi(z)$ funtzio laguntzaile ezezagun berri bat den, $\phi(y,z)$ delakoak [18] ekuazioa beteko duelarik. Hau da:

$$\frac{\partial\phi}{\partial z} = Z(a,y,z) = \frac{\partial}{\partial z}\left[\int_b^y Y(a,y,z)dy + \psi(z)\right] = \int_b^y \frac{\partial Y}{\partial z}\,dy + \frac{d\psi}{dz}\,.$$

Azkenik, [8] hipotesia aplikatuz, hurrengoa ondoriozta daiteke:

$$\frac{\partial\phi}{\partial z} = Z(a,y,z) = \int_b^y \frac{\partial Y}{\partial z}\,dy + \frac{d\psi}{dz} = \int_b^y \frac{\partial Z}{\partial y}\,dy + \frac{d\psi}{dz} = \left|Z(a,y,z)\right|_b^y + \frac{d\psi}{dz} \longrightarrow$$

$$Z(a,y,z) = Z(a,y,z) - Z(a,b,z) + \frac{d\psi}{dz} \quad\longrightarrow\quad \frac{d\psi}{dz} = Z(a,b,z). \qquad [20]$$

Eta azken ekuazio hau integratuz gero, $\psi(z)$ zehaztuko da:

$$\psi(z) = \int_c^z Z(a,b,z)dz. \qquad [21]$$

[21] delakoa [19]-ra eraman eta, lortutakoa [14]-ean ordezkatuz, hurrengoa ondorioztatuko dugu:

$$\boxed{U(x,y,z) = \int_a^x X(x,y,z)dx + \int_b^y Y(a,y,z)dy + \int_c^z Z(a,b,z)dz.} \qquad [22]$$

Kalkulu integrala sinplifikatzeko asmoz, (a,b,c) koordenatu konstanteetako puntua zehatz daiteke, X, Y, eta Z funtzioak puntu horretan jarraiak izan behar direlarik. Halaber, integrazio-ordena alda daiteke, beti ere formularen egitura mantenduz.

Dakusagun orain, deribatu gurutzatuen berdintza betetzen ez denerako ekuazio diferentzial totala integratzeko metodoa.

b) **F.rotF** biderkaketa eskalarra nulua bada:

F $\neq$ 0 eta **rotF** $\neq$ 0 badira,

$$X(x,y,z)dx + Y(x,y,z)dy + Z(x,y,z)dz = 0 \qquad [1]$$

ekuazio diferentzialak ondoren azalduko den metodoaren bidez lor daitekeen $G(x,y,z) = C$ motako jatorrizko bat onartuko du.

Hasieran, aldagai bat konstantetzat hartuko da, z aldagaia adibidez, [1] ekuazioa ekuazio arrunt bilakatuko delarik:

$$X(x,y,z)dx + Y(x,y,z)dy = 0. \qquad [2]$$

Azken hau ebatzi ondoren, integrazio-konstantea $\phi(z)$ funtzio laguntzaile ezezagun batez ordezkatu, eta hori izango da soluzio orokor modura planteatuko dena.

[2]-AREN SOLUZIO OROKORRA		[1]-AREN SOLUZIO OROKORRA
$U(x,y,z) = C$	$\longrightarrow$	$U(x,y,z) = \phi(z)$

Gero, $\phi(z)$ finkatzeko planteatu den soluzio orokorra diferentziatu, eta [1] ekuazioarekin konparatuko da:

$$U(x,y,z) - \phi(z) = 0 \xrightarrow{d} \frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy + \left[\frac{\partial U}{\partial z} - \phi'(z)\right]dz = 0. \qquad [3]$$

Beraz, hurrengoa ondoriozta daiteke:

$$\frac{\partial U/\partial x}{X} = \frac{\partial U/\partial y}{Y} = \frac{\partial U/\partial z - \phi'(z)}{Z} = \lambda(x,y,z). \qquad [4]$$

Eta azken berdintza ebatziz gero,

$$\phi'(z) = \frac{\partial U}{\partial z} - \lambda Z. \qquad [5]$$

Orain, integragarritasun-baldintza kontutan hartuz, [5]-aren bigarren atala z eta $\phi(z)$-ren funtzioan adieraz daitekeela frogatuko da. Ondorioz, [5]-a ekuazio arrunta izango da, zeinaren jatorrizkoak U(x,y,z) kalkulatzea ahalbidetuko duen.

$$\phi'(z) = \frac{\partial U}{\partial z} - \lambda Z \equiv F(z,\phi) \xrightarrow{\int} \phi(z) + A \Rightarrow U(x,y,z) = \phi(z) + A.$$

Adibidea.- Ebatz bitez ondoko ekuazio diferentzialak:

a) $(ze^x + e^y)dx + (xe^y - e^z\sin y)dy + (e^x + e^z\cos y)dz = 0.$

b) $z(y - xz^2)dx + xzdy - 2xydz = 0.$

E: Lehenengo ekuazioa ekuazio diferentzial zehatza da:

$$\frac{\partial Z}{\partial y} = -e^z\sin y = \frac{\partial Y}{\partial z}, \quad \frac{\partial X}{\partial z} = e^x = \frac{\partial Z}{\partial x}, \quad \frac{\partial Y}{\partial x} = e^y = \frac{\partial X}{\partial y}.$$

Beraren soluzio orokorra kalkulatuko dugu:

$$\int_a^x X(x,y,z)dx + \int_b^y Y(a,y,z)dy + \int_c^z Z(a,b,z)dz = C \longrightarrow$$

$$\int_a^x (ze^x + e^y)dx + \int_b^y (ae^y - e^z\sin y)dy + \int_c^z (e^a + e^z\cos b)dz = C \longrightarrow$$

$$\left|ze^x + xe^y\right|_a^x + \left|ae^y + e^z\cos y\right|_b^y + \left|e^a z + e^z\cos b\right|_c^z = C \longrightarrow$$

$$ze^x + xe^y - ze^a - ae^y + ae^y + e^z\cos y - ae^b - e^z\cos b + e^a z + e^z\cos b$$

$$- e^a c - e^c\cos b = ze^x + xe^y + e^z\cos y - ae^b - e^a c - e^c\cos b = C \longrightarrow$$

$$ze^x + xe^y + e^z\cos y = C + ae^b + e^a c + e^c\cos b \qquad \Rightarrow$$

$$ze^x + xe^y + e^z\cos y = B.$$

Oharra: $a = b = c = 0$ ordezkatuz, kalkulua sinplifikatu egin da.

$$\int_0^x (ze^x + e^y)dx - \int_0^y e^z \sin y dy + \int_0^z (1 + e^z)dz = \left|ze^x + xe^y\right|_0^x +$$

$$\left|e^z\cos y\right|_0^y + \left|z + e^z\right|_0^z = ze^x + xe^y - z + e^z\cos y - e^z + z + e^z - 1 = C$$

$$\longrightarrow \qquad ze^x + xe^y + e^z\cos y = C + 1 = B.$$

---

b) ekuazioa ez da zehatza. Hala ere, integragarritasun-baldintza betetzen du.

$$X\left(\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z}\right) + Y\left(\frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x}\right) + Z\left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}\right) = 0 \qquad \longrightarrow$$

$$z(y - xz^2)(-2x - x) + xz(y - 3xz^2 + 2y) - 2xy(z - z) = 0$$

x konstante modura hartuz gero, orduan $dx = 0$ da, eta diferentziatuz lortuko den ekuazioa hurrengoa izango da:

$$xzdy - 2xydz = 0 \quad \xrightarrow{\int} \quad y/z^2 = C.$$

C delakoa x-en menpeko funtzio laguntzaile batez ordezkatuz, eta ondorioztatutako ekuazioa diferentziatuz, hurrengoa lor daiteke:

$$y/z^2 = \phi(x) \quad \longrightarrow \quad -\phi'(x)dx + dy/z^2 - 2ydz/z^3 = 0.$$

B-rekin identifikatu eta $\phi(x)$ ordezkatuz, $\phi(x)$-ekiko ekuazio diferentzial lineal hau lortuko da,

$$\frac{-\phi'(x)}{z(y - xz^2)} = \frac{1}{xz^3} \longrightarrow \phi'(x) = 1 - y/xz^2 \longrightarrow \phi'(x) + \frac{1}{x}\phi(x) = 1,$$

beraren soluzioa hauxe izanik:

$$\phi(x) = \frac{1}{x}\left[\int x dx + C\right] = \frac{x^2 + 2C}{2x}.$$

$y/z^2 = \phi(x)$ ordezkatuz, ondoko soluzio orokorra lortuko dugu:

$$2xy - z^2(x^2 + 2C) = 0, \text{ edo, C-rekiko ebatziz, } \frac{x(2y - xz^2)}{2z^2} = C.$$

3.2 Lehen ordenako ekuazio ez-linealak. Kasu orokorra

Hautazko konstanteen ezabapenaren bidez eginiko ekuazioen jatorriari buruz aritzerakoan, deribazio eta konstanteen ezabapenaz $F(x,y,z,A,B) = 0$ jatorrizkoari lehenengo ordenako ekuazio ez-lineal bat asoziatu zitzaion.

$$\left\{\begin{array}{l} F(x,y,z,A,B) = 0, \\ \dfrac{\partial F}{\partial x} + \dfrac{\partial F}{\partial z}p = 0, \\ \dfrac{\partial F}{\partial y} + \dfrac{\partial F}{\partial z}q = 0, \end{array}\right. \xrightarrow{\text{A eta B ezabatuz}} f(x,y,z,p,q) = 0.$$

Alderantziz, $F(x,y,z,A,B) = 0$ ekuazioak $f(x,y,z,p,q) = 0$ delakoaren $z = z(x,y,A,B)$ soluzio bat explizituki definitzen badu, ekuazioaren soluzio osotua dela esango dugu:

$$f(x,y,z,p,q) = 0 \qquad [1] \qquad \xrightarrow{\int} \qquad F(x,y,z,A,B) = 0. \qquad [2]$$

Soluzio osotu honez gain, ekuazio diferentzialak beste soluzio-mota batzu onartzen ditu, beraien interpretazio geometrikoen bidez justifika daitezkeenak.

3.2.1 Interpretazio geometrikoa.

[1] ekuazio diferentzialak, eremu jakin batetan, x, y eta z koordenatuen aldakuntzarako p eta q deribatu partzialen artean $g(p,q) = 0$ erlazioa ezarriko du. Honek $P(x,y,z)$ puntutik pasatuko den gainazal integralari dagokion $\overline{n} = [p,q,-1]$ bektore normalaren norabidea determinatuko du. Beraz, [1] ekuazioak geometrikoki interpretatuta, gainazal integralen normaletarako norabide-familia posible bat definitzen du. Era honetan, gainazal integraletako sortetarako gainazal inguratzaileen existentziaren azterketaren bidez, ekuazioaren beste soluzio batzu azter daitezke.

3.2.2 Soluzio-motak.

Gogora dezagun gainazal-sorta baten gainazal inguratzailea, puntu bakoitzean sortako gainazal batekiko ukitzailea dena dela. Hau da, $P(x,y,z)$ puntuan bektore normalak eta gainazal ukitzaleari dagokion bektoreak norabide bera dute.

[2] soluzio osotuak bi parametroren menpeko gainazal integraletako familia infinitua adierazten duenez, gainazal inguratzaileak onar ditzakeela suposa daiteke, azken hauek halaber gainazal integralak izanik. Ikus ditzagun kasu posibleak.

[2] sorta biparametrikoak inguratzailea onartzen duela frogatuz gero, inguratzailea hurrengo ekuazioetatik A eta B ezabatuz lor daiteke:

$$\left\{ \begin{array}{l} F[x,y,z,A,B) = 0, \\ \\ \dfrac{\partial F}{\partial A} = 0, \quad \dfrac{\partial F}{\partial B} = 0, \end{array} \right. \xrightarrow{\text{A eta B ezabatuz}} \quad \phi(x,y,z) = 0.$$

Hau kurba-sorten lerro inguratzaileen azterketaren hedapena da, $F(x,y,z) = 0$ sortaren kurba C-diskriminatzailearena, alegia.

Inguratzaileei gainazal integral singular deritze eta beraien ekuazioek soluzio singularrak definitzen dituzte.

Parametro bakarreko sortek ere inguratzaileak onar ditzakete, hauek soluzio osotutik parametroen artean hautazko dependentzia ezartzerakoan lor daitezkeelarik. Hau da, $B = B(A)$ hautazko funtzio deribagarri bat bada,

$$F[x,y,z,A,B(A)] = 0$$

ekuazioak $B=B(A)$ dependentziaz soluzio osotik ateratako integral-sorta infinitua adierazten du.

Gainazal-sorta hauek inguratzailea onartuz gero, hurrengo ekuazioetatik lortuko da,

$$\begin{cases} F[x,y,z,A,B(A)] = 0, \\ \dfrac{\partial F}{\partial A} + \dfrac{\partial F}{\partial B}\dfrac{dB}{dA} = 0, \end{cases}$$

berauek soluzio orokorra osotzen baitute. B funtzioa finkatu ondoren, soluzio partikularrak lortuko dira.

Laburbilduz, ekuazio ez-lineal baten soluzio-motak ondokoak ditugu:

SOLUZIO OSOTUA	SOLUZIO OROKORRA	SOLUZIO SINGULARRA
$F(x,y,z,A,B) = 0.$	$\begin{cases} F[x,y,z,A,B(A)] = 0, \\ \dfrac{\partial F}{\partial A} + \dfrac{\partial F}{\partial B}\dfrac{dB}{dA} = 0. \end{cases}$	$\begin{cases} F[x,y,z,A,B) = 0, \\ \dfrac{\partial F}{\partial A} = 0, \quad \dfrac{\partial F}{\partial B} = 0. \end{cases}$

Adibidea.- Froga bedi $(x - a)^2 + (y - b)^2 + z^2 = r^2$ jatorrizkoa, $z^2(p^2 + q^2 + 1) = r^2$ ekuazioaren soluzio osotua dela, a eta b parametroak eta r konstantea izanik. Aurki bitez beste soluzio batzu, eta geometrikoki interpreta bitez.

E: Ekuazio diferentzial asoziatua deribazioz eta parametroen ezabapenaz lortuko da.

$$\left\{\begin{array}{l} F(x,y,z,a,b) = 0, \\ \dfrac{\partial F}{\partial x} + \dfrac{\partial F}{\partial z} p = 0, \\ \dfrac{\partial F}{\partial y} + \dfrac{\partial F}{\partial z} q = 0, \end{array}\right. \xrightarrow{\text{a eta b ezabatuz}} f(x,y,z,p,q) = 0 \Rightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{l} (x-a)^2 + (y-b)^2 + z^2 = r^2, \\ 2(x-a) + 2zp = 0, \\ 2(y-b) + 2zq = 0, \end{array}\right. \xrightarrow[y-b\ =-zq]{x-a\ =-zp} z^2(p^2 + q^2 + 1) = r^2.$$

Soluzio osotua, r erradio finkodun eta C(a,b,0) zentru aldakorreko XOY planoko esfera-familia da.

Soluzio orokorra honakoa da,

$$\left\{\begin{array}{l} F[x,y,z,a,b(a)] = 0, \\ \dfrac{\partial F}{\partial a} + \dfrac{\partial F}{\partial b}\dfrac{db}{da} = 0, \end{array}\right. \longrightarrow \left\{\begin{array}{l} (x-a)^2 + [y-b(a)]^2 + z^2 = r^2, \\ -2(x-a) - 2[y-b(a)]b'(a) = 0, \end{array}\right.$$

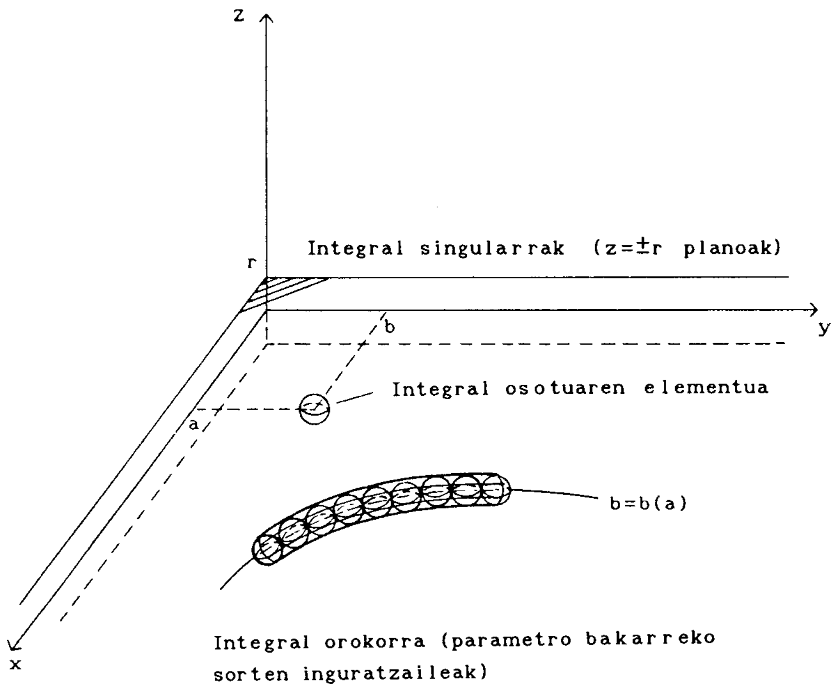
eta b = b(a) hautazko ekuazioko XOY planoko kurben gain duten esfera-sorten gainazal inguratzaileez osoturiko familia da.

Soluzio singularrak ondoko hauek dira:

$$\begin{cases} F[x,y,z,a,b) = 0, \\ \\ \dfrac{\partial F}{\partial a} = 0, \quad \dfrac{\partial F}{\partial b} = 0, \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} (x-a)^2 + (y-b)^2 + z^2 = r^2, \\ \\ -2(x-a) = 0, \ -2(x-b) = 0, \end{cases} \longrightarrow z = \pm r,$$

eta $\pm$ r altueretan horizontalarekiko plano paraleloak dira, soluzio osotuaren esfera guztiekiko, inguratzaileekiko alegia, ukitzaileak direlarik.

Grafikoan soluzio ezberdinen zenbait elementu adierazi dira.



3.2.3 Integral osotuak. Lagrange-Charpit-en metodoa.

Metodoa,

$$f(x,y,z,p,q) = 0 \qquad [1]$$

ekuazioari beste ekuazio laguntzaile bat,

$$g(x,y,z,p,q) = A \qquad [2]$$

alegia, asoziatzean datza. Bi ekuazio horiez osoturiko sistemak,

$$p = p(x,y,z,A) \quad [3] \qquad\qquad q = q(x,y,z,A) \quad [4]$$

funtzioak inplizituki definituko ditu, eta dz-ren adierazpenean ordezkatuz gero, erlazio bakar batez integragarria den ekuazio diferentzial totala ondorioztatuko dute:

$$\left\{\begin{array}{l} f(x,y,z,p,q) = 0, \\ g(x,y,z,p,q) = A, \end{array}\right. \longrightarrow \left\{\begin{array}{l} p = p(x,y,z,A), \\ q = q(x,y,z,A), \end{array}\right. \Rightarrow$$

$$dz = p(x,y,z,A)dx + q(x,y,z,A)dy \quad [5] \xrightarrow{\int} F(x,y,z,A,B) = 0. \ [6]$$

g delako funtzio laguntzailea determinatzeko, [5] ekuazioak integragarritasun-baldintza bete behar du.

$X = p(x,y,z,A)$, $Y = q(x,y,z,A)$, $Z = -1$ diren kasuan, baldintza hurrengoa da:

$$X\left(\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z}\right) + Y\left(\frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x}\right) + Z\left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}\right) = 0 \longrightarrow$$

$$-p\frac{\partial q}{\partial z} + q\frac{\partial p}{\partial z} - \frac{\partial q}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial y} = 0 \longrightarrow \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial z}q = \frac{\partial q}{\partial x} + \frac{\partial q}{\partial z}p, \qquad [7]$$

eta hau deribatu gurutzatuen berdintza besterik ez da:

$$\frac{\partial}{\partial y}[p(x,y,z,A)] = \frac{\partial}{\partial x}[q(x,y,z,A)].$$

[7]-ko deribatuak [1]≡[2] sistema x, y eta z-rekiko deribatuz lortuko dira.

x-ekiko deribatuz,

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial f}{\partial x}+\dfrac{\partial f}{\partial p}\dfrac{\partial p}{\partial x}+\dfrac{\partial f}{\partial q}\dfrac{\partial q}{\partial x}=0, \\[2ex] \dfrac{\partial g}{\partial x}+\dfrac{\partial g}{\partial p}\dfrac{\partial p}{\partial x}+\dfrac{\partial g}{\partial q}\dfrac{\partial q}{\partial x}=0, \end{array}\right. \longrightarrow \quad \frac{\partial q}{\partial x} = -\frac{\dfrac{D(f,g)}{D(p,x)}}{\dfrac{D(f,g)}{D(p,q)}}. \qquad [8]$$

y-rekiko deribatuz,

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial f}{\partial y}+\dfrac{\partial f}{\partial p}\dfrac{\partial p}{\partial y}+\dfrac{\partial f}{\partial q}\dfrac{\partial q}{\partial y}=0, \\[2ex] \dfrac{\partial g}{\partial y}+\dfrac{\partial g}{\partial p}\dfrac{\partial p}{\partial y}+\dfrac{\partial g}{\partial q}\dfrac{\partial q}{\partial y}=0, \end{array}\right. \longrightarrow \quad \frac{\partial p}{\partial y} = -\frac{\dfrac{D(f,g)}{D(y,q)}}{\dfrac{D(f,g)}{D(p,q)}}. \qquad [9]$$

Azkenik, z-rekiko deribatuz, hurrengoa ondoriozta daiteke:

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial f}{\partial z}+\dfrac{\partial f}{\partial p}\dfrac{\partial p}{\partial z}+\dfrac{\partial f}{\partial q}\dfrac{\partial q}{\partial z}=0, \\[2ex] \dfrac{\partial g}{\partial z}+\dfrac{\partial g}{\partial p}\dfrac{\partial p}{\partial z}+\dfrac{\partial g}{\partial q}\dfrac{\partial q}{\partial z}=0, \end{array}\right. \longrightarrow$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\frac{\dfrac{D(f,g)}{D(z,q)}}{\dfrac{D(f,g)}{D(p,q)}}, \qquad [10] \qquad \frac{\partial q}{\partial z} = -\frac{\dfrac{D(f,g)}{D(z,q)}}{\dfrac{D(f,g)}{D(p,q)}}. \qquad [11]$$

[7] baldintzari [8], [9], [10] eta [11] emaitzak erantsi ondoren, eta $\dfrac{D(f,g)}{D(p,q)}$ jacobiar ez-nuluaz biderkatuz,

$$\frac{D(f,g)}{D(y,q)} + \frac{D(f,g)}{D(z,q)}\, q = \frac{D(f,g)}{D(p,x)} + \frac{D(f,g)}{D(p,z)}\, p.$$

Jarraian, determinanteak garatu eta g funtzioaren deribatuei biderkagai amankomuna aterako zaie. Era honetan, deribatu partzialetako hurrengo ekuazio lineal homogenoa ondorioztatuko da:

$$\frac{\partial f}{\partial p}\frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial q}\frac{\partial g}{\partial y} + \left(\frac{\partial f}{\partial p}p + \frac{\partial f}{\partial q}q\right)\frac{\partial g}{\partial z} - \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial z}p\right)\frac{\partial g}{\partial p} - \left(\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z}q\right)\frac{\partial g}{\partial q} = 0,$$

non $g(x,y,z,p,q)$ funtzio laguntzailea den.

Azken honen kalkulurako, nahikoa da sistema diferentzial karakteristikoaren ahal den integral errazena determinatzea:

$$\boxed{\frac{dx}{\dfrac{\partial f}{\partial p}} = \frac{dy}{\dfrac{\partial f}{\partial q}} = \frac{dz}{\dfrac{\partial f}{\partial p}\,p + \dfrac{\partial f}{\partial q}\,q} = \frac{-dp}{\dfrac{\partial f}{\partial x} + \dfrac{\partial f}{\partial z}\,p} = \frac{-dq}{\dfrac{\partial f}{\partial y} + \dfrac{\partial f}{\partial z}\,q}\,.} \qquad [12]$$

Integral honek, $g(x,y,z,p,q) = A$ delakoak alegia, p edo q aldagaietariko bat gutxienez eduki, eta $f(x,y,z,p,q) = 0$ ekuazioarekiko independentea izan behar du. Horretarako, $\dfrac{D(f,g)}{D(p,q)}$ jacobiarra ez-nulua izatea nahikoa da.

Ekuazioko aldagai-kopuruaren arabera, orokorrean errazagoak diren kasu konkretuak daude. Horrela, adibidez, ekuazioan x eta y falta badira, $\partial f/\partial x = \partial f/\partial y = 0$ dira, eta [12] sistema karakteristikoko azken ekuaziotik $p/q = A$ ondorioztatuko da. Kasu honetan $z = z(u)$, $u = x + Ay$ eginez, ekuazio arrunt bilaka daiteke. Hain zuzen ere,

$$z = z(u),\ u = x + Ay \longrightarrow p \equiv \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{dz}{du}\,,\quad q \equiv \frac{\partial z}{\partial y} = A\,\frac{dz}{du}\,,$$

eta ekuazioan ordezkatu ondoren, ondokoa dugu:

$$f(z,p,q) = 0 \xrightarrow{z=z(x+Ay)} f[z(u),\ z'(u),\ Az'(u)] = 0.$$

Idatz dezagun azkenik Clairut-en ekuazio orokortua:

$$z = xp + yq + g(p,q) \xrightarrow{\int} z = Ax + By + g(A,B),$$

zeinak integral osotutzat plano biparametrikoez osoturiko sorta duen. Azken hau, ekuazioan p eta q deribatuak A eta B parametroez ordezkatuz lortuko da. Jatorrizkoa deribatu ondoren p = A eta q =B ondorioztatuko da, eta parametroen ezabapenak zuzenean Clairut-en ekuazioa emango du.

Adibidea.- Integra bedi ondoko deribatu partzialetako ekuazioa,

$$pq + 2(y - 1)(xp - z) + y(y - 2)q = 0,$$

eta azter bitez soluzio singular posibleak.

E: Lagrange-Charpit-en sistema diferentziala hurrengoa dugu:

$$\frac{dx}{\frac{\partial f}{\partial p}} = \frac{dy}{\frac{\partial f}{\partial q}} = \frac{dz}{\frac{\partial f}{\partial p}p + \frac{\partial f}{\partial q}q} = \frac{-dp}{\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial z}p} = \frac{-dq}{\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z}q} \longrightarrow$$

$$\frac{dx}{q + 2x(y-1)} = \frac{dy}{p + y(y-2)} = \frac{dz}{2pq + 2x(y-1)p + y(y-2)q} =$$

$$= \frac{-dp}{2(y-1)p - 2(y-1)p} = \frac{-dq}{2(xp-z) + (2y-2)q - 2(y-1)q}.$$

Laugarren frakzioko zatitzailea nulua da. Ondorioz,

$$dp = 0 \xrightarrow{\int} p = A.$$

f = 0, g = 0 eginez, sistema p eta q-rekiko ebatziko dugu:

$$\left\{\begin{array}{l} f(x,y,z,p,q) = 0, \\ g(x,y,z,p,q) = A, \end{array}\right. \longrightarrow \left\{\begin{array}{l} pq + 2(y-1)(xp-z) + y(y-2)q = 0, \\ p = A, \end{array}\right. \longrightarrow$$

$$p = A, \qquad q = \frac{2(y-1)(z-Ax)}{A + y(y-2)} .$$

Balio hauek dz-ren adierazpenean ordezkatuz,

$$dz = Adx + \frac{2(y-1)(z-Ax)}{A + y(y-2)} dy,$$

berehalako jatorrizkodun diferentzial totalera helduko gara:

$$\frac{dz - Adx}{z - Ax} = \frac{2(y-1)dy}{A + y(y-2)} \xrightarrow{\int} Ln(z-Ax) - Ln[A + y(y-2)] = C \longrightarrow$$

$$\frac{z - Ax}{A + y(y-2)} = B \quad \Rightarrow \quad z = Ax + B[A + y(y-2)].$$

Bestalde, soluzio singularrak hurrengo sistematik lortuko dira:

$$\left\{\begin{array}{l} F[x,y,z,A,B) = 0, \\ \dfrac{\partial F}{\partial A} = 0, \quad \dfrac{\partial F}{\partial B} = 0, \end{array}\right. \longrightarrow \left\{\begin{array}{l} Ax + B[A + y(y-2)] - z = 0, \\ x + B = 0, \quad A + y(y-2) = 0. \end{array}\right.$$

A eta B ezabatuz, ondokoa ondoriozta daiteke:

$$z = -y(y-2)x - x[-y(y-2) + y(y-2)] \quad \Rightarrow \quad z = xy(2-y).$$

Froga dezagun soluzio bat dela.

$$z = xy(2-y) \longrightarrow p = y(2-y), \quad q = 2x-2xy.$$

Ekuazio diferentzialean ordezkatu, eta frogatuta dago.

$$y(2-y)2x(1-y) + 2(y-1)[xy(2-y) - xy(2-y)] + y(y-2)2x(1-y) \equiv 0.$$

ARIKETA EBATZIAK

1. Ebatz bitez ondoko ekuazio diferentzialak:

a) $y^2(x\cos x - \sin x)dx - x^2(y\sin y + \cos y)dy = 0.$

b) $(2xy + 2x + y + 1)dx + (2xy + x + 2y + 1)dy = 0.$

c) $y' = \sin(x-y) - \sin(x+y).$

Aldagai banangarritetako ekuazioak dira. Soluzio orokorra determinatzeko, aldagaiak banandu, integral eragilea aplikatu eta hautazko konstante bat erantsi behar da.

a) ekuazioa:

$$\int \frac{x\cos x - \sin x}{x^2}\,dx - \int \frac{y\sin y + \cos y}{y^2}\,dy = C.$$

Integral hauek zatikako integrazioa aplikatuz kalkulatuko dira.

Lehenengo integralean, $\begin{cases} x\cos x - \sin x = u \longrightarrow -x\sin x\,dx = du, \\ dx/x^2 = dv \qquad\quad \longrightarrow -1/x = v, \end{cases}$

$$\int \frac{x\cos x - \sin x}{x^2}\,dx = \frac{\sin x - x\cos x}{x} + \cos x = \frac{\sin x}{x}.$$

Bigarren integralerako, $\begin{cases} y\sin y + \cos y = u \longrightarrow y\cos y dy = du, \\ dy/y^2 = dv \qquad\quad \longrightarrow -1/y = v, \end{cases}$

$$\int \frac{y\sin y + \cos y}{y^2}\,dy = -\frac{y\sin y + \cos y}{y} + \sin y = -\frac{\cos y}{y}.$$

Ondorioz, soluzio orokorra hurrengoa izango da:

$$\frac{\sin x}{x} + \frac{\cos y}{y} = C \longrightarrow y\sin x + x\cos y = Cxy.$$

---

b) ekuazioa:

Lehenik, diferentzialen koefizienteak faktorizatuko dira:

$$[2x(y + 1) + (y + 1)]dx + [x(2y + 1) + (2y + 1)]dy = 0 \longrightarrow$$

$$(2x + 1)(y + 1)dx + (x + 1)(2y + 1)dy = 0 \longrightarrow$$

$$\frac{2x + 1}{x + 1}\,dx + \frac{2y + 1}{y + 1}\,dy \longrightarrow \int\left(2 - \frac{1}{x + 1}\right)dx + \int\left(2 - \frac{1}{y + 1}\right)dy = C \longrightarrow$$

$$2x - \mathrm{Ln}|x + 1| + 2y - \mathrm{Ln}|y + 1| = C \longrightarrow \mathrm{Ln}|(x+1)(y+1)| = 2(x+y) - C$$

Honi, exp eragilea aplikatuz, ondokoa lor daiteke:

$$|(x+1)(y+1)| = \exp[2(x+y) - C] = A\exp[2(x+y)], \quad \exp(-C) \equiv A \geq 0.$$

Beraz, balio absolutua kenduta, hurrengo soluzioa izango dugu:

$$(x + 1)(y + 1) = \pm A\exp[2(x + y) = B\exp[2(x + y)], \quad B \in R.$$

---

c) ekuazioa:

Aldagaiak banantzeko erabiliko diren formula trigonometrikoak hauexek dira:

$$\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y.$$

Horien arabera,

$$y' = \sin x \cos y - \cos x \sin y - \sin x \cos y - \cos x \sin y = -2\cos x \sin y \quad \longrightarrow$$

$$\frac{dy}{\sin y} + 2\cos x\, dx = 0 \quad \longrightarrow \quad \int \frac{dy}{\sin y} + 2\sin x = C.$$

Hurrengo aldaketa eginez,

$$\mathrm{tg}(y/2) = t, \quad \sin y = 2t/(1+t^2), \quad dy = 2dt/(1+t^2) \quad \longrightarrow$$

$$\int \frac{dy}{\sin y} = \int \frac{dt}{t} = \mathrm{Ln}|t| \equiv \mathrm{Ln}|\mathrm{tg}(y/2)|,$$

honako soluzio orokorra ondorioztatuko da:

$$\mathrm{Ln}|\mathrm{tg}(y/2)| + 2\sin x = C.$$

2. Newton-en hozketa-legeak ondokoa dio: "T_o tenperatura konstantepeko ingurune batetan murgilduriko gorputz baten T tenperaturaren aldakuntza-indizea, gorputzaren eta ingurunearen aldiuneko tenperaturen arteko diferentziarekiko proportzionala da".

Lehenengo, gorputza 100 C°-raino berotu da, ondoren $T_o = 20°C$ -ko tenperaturako ingurune batetan murgildu da, eta 10 minutu pasatu eta gero, 60°C-raino hoztu da. Kalkula bedi gorputzaren tenperatura 100°C-tik 30°C-ra pasa dadin igaro behar den denbora.

Fenomenoaren legearen arabera, ondokoa beteko da:

$$\frac{dT}{dt} = k(T - T_0), \quad k \equiv \text{proportzionaltasun-konstantea.}$$

Aldagaiak banandu eta integratuz, hurrengoa ondoriozta daiteke:

$$\int \frac{dT}{T - T_0} = \int kdt \longrightarrow Ln|T - T_0| = kt + C \xrightarrow{exp} T - T_0 = Ae^{kt}.$$

T(0) = 100 hastapen-baldintza eta $T_0 = 20$ delakoa ordezkatuz, A integrazio-konstantea kalkula dezakegu.

$$T(0) = 100 \longrightarrow 100 - 20 = A = 80 \Rightarrow T = 20 + 80e^{kt}.$$

Bestalde, proportzionaltasun-konstantea determinatzeko, datu experimental batetara joko dugu. Kasu honetan, T(10) = 60 da.

$$T(10) = 60 \longrightarrow 60 = 20 + 80e^{10k} \longrightarrow 10k = Ln\ 1/2 \Rightarrow k = \frac{-Ln2}{10}.$$

Beraz, hozketa-legea hurrengoa izango da:

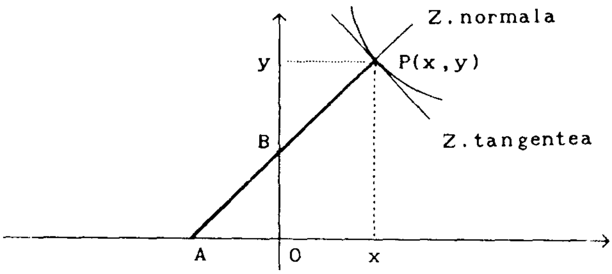
$$T = 20 + 80\ exp\ (-tLn2/10).$$

30°C-raino hozteko pasatu behar den denbora:

$$T(t) = 30 \longrightarrow 30 = 20 + 80exp(-tLn2/10) \longrightarrow 1/8 = exp(-tLn2/10)$$

$$\xrightarrow{Ln} Ln\ 2^{-3} = -tLn2/10 \longrightarrow -3Ln2 = -tLn2/10 \Rightarrow t = 30 \text{ minutu.}$$

3. Kalkula bedi M(2,1) puntutik pasatuko den planoko kurba bat, ondokoa jakinik: OY ardatzak, kurbak P(x,y) puntu batetan duen zuzen normalaren P eta A muturretako segmentua (OX-ekin normalaren ebakidura) bi zati berdinetan zatituko duela.



$y = y(x)$ kurbak $P(x,y)$ puntuan duen zuzen normalaren ekuazioak,

$$Y - y = -\frac{1}{y'}(X - x),$$

koordenatu-ardatzak A eta B puntuetan ebakitzen ditu.

$$Y = 0 \longrightarrow X = x + yy' \equiv \overline{OA}; \qquad X = 0 \longrightarrow Y = y + x/y' \equiv \overline{OB}.$$

$\overline{PA}$ segmentuko erdiko puntuaren koordenatuak, mutur-puntuen koordenatuen baturaerdia dira. Hau da:

$$x_m = \frac{x + yy' + x}{2} = \frac{2x + yy'}{2}, \qquad y_m = \frac{0 + y}{2} = y/2.$$

Koordenatu hauek $B(0,\ y + x/y')x/y')$ puntuarenak dira. Hots:

$$0 = \frac{2x + yy'}{2}, \qquad y + x/y' = y/2.$$

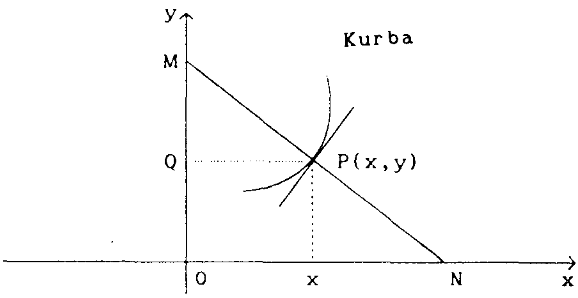
Ekuazio hauetatik honakoa ondoriozta daiteke:

$$4x + 2yy' = 0 \longrightarrow 4xdx + 2ydy = 0 \xrightarrow{\int} 2x^2 + y^2 = C.$$

M(2,1) puntutik pasatuko den kurba aurkitzeko C konstantea kalkulatu behar da, zentrua (0,0) puntuan duen eta $3/\sqrt{2}$ eta 3 ardatzerdiak dituen elipsea ondorioztatuko delarik:

$$y(2) = 1 \longrightarrow 8 + 1 = C \longrightarrow 2x^2 + y^2 = 9.$$

4. Irudian adierazi denez, kurba laun batek P(x,y) puntu batetanduen zuzen normalak koordenatu-ardatzak M eta N puntuetan ebakitzen ditu.



Aukitu bedi $\overline{MP}/\overline{MN} = (x/y)^2$ propietatea beteko duten kurbei asoziaturiko ekuazio diferentziala, eta kalkula bedi A(1,1) puntutik pasatzen denaren ekuazioa.

$\overline{MP}$ eta $\overline{MN}$ segmentuen luzerak kalkulatu behar dira.

$$\overline{MP} \equiv \sqrt{\overline{PQ}^2 + \overline{MQ}^2} = \sqrt{x^2 + (y + \frac{x}{y'} - y)^2} = |x/y'|\sqrt{1 + y'^2} \ ,$$

$$\overline{MN} \equiv \sqrt{\overline{OM}^2 + \overline{ON}^2} = \sqrt{(y + \frac{x}{y'})^2 + (x + yy')^2} =$$

$$|1/y'|\sqrt{(yy' + x)^2 + y'^2(x + yy')^2} = |(yy' + x)/y'|\sqrt{1 + y'^2} \ .$$

Kurbek bete behar duten propietatea ondokoa da:

$$\frac{MP}{MN} = (x/y)^2 \longrightarrow \frac{|x/y'|\sqrt{1 + y'^2}}{|(yy' + x)/y'|\sqrt{1 + y'^2}} = \frac{x^2}{y^2} \longrightarrow \frac{1}{x + yy'} = \frac{x}{y^2} \ .$$

Era honetan, y'-arekiko ondoko ekuazio diferentziala dugu:

$$y^2 = x^2 + xyy' \longrightarrow y' = \frac{y^2 - x^2}{xy}.$$

Ekuazio hau homogenoa da. Hurrengo ordezkaketa eginez,

$$y = ux \xrightarrow{D} y' = u'x + u \Rightarrow$$

$$y' = \frac{y^2 - x^2}{xy} \longrightarrow u'x = \frac{u^2 - 1}{u} - u = -\frac{1}{u} \xrightarrow{\int}$$

$$\int udu + \int \frac{dx}{x} = C \longrightarrow u^2/2 + Lnx = C \longrightarrow$$

$$y^2 = 2x^2(C - Lnx)$$

soluzio orokorra lortuko da.

Soluzio partikularra:

$$y(1) = 1 \longrightarrow 1 = 2(C - Ln1) \longrightarrow C = 1/2 \Rightarrow$$

$$y^2/x^2 = 1 - 2Lnx \longrightarrow y^2 = x^2(1 - 2Lnx).$$

5. Ebatz bedi hastapen-baldintzatako hurrengo problema:

$$(x^2 - y^2)dx + 2xydy = 0, \qquad y(1) = 1.$$

Ekuazio homogenoa da. Diferentziatuz, ondokoa dugu:

$$y = ux \xrightarrow{d} dy = xdu + udx \quad \Rightarrow$$

$$(x^2 - u^2x^2)dx + 2xux(xdu + udx) = 0 \longrightarrow (1 + u^2)dx + 2uxdu = 0.$$

Aldagaiak bananduz eta $\int$ eragilea aplikatuz, ondokoa lor daiteke:

$$\int \frac{dx}{x} + \int \frac{2udu}{1 + u^2} = C \longrightarrow Lnx + Ln(1 + u^2) = C \longrightarrow x(1 + u^2) = A.$$

u aldagaia y/x delakoaz ordezkatuz, soluzio orokorra kalkulatuko da:

$$x^2 + y^2 - Ax = 0.$$

Soluzio partikularra,

$$y(1) = 1 \longrightarrow 1 + 1 - A = 0 \longrightarrow A = 2 \quad \Rightarrow \quad x^2 + y^2 - 2x = 0,$$

zentrua (1,0) puntuan 1 erradiodun zirkunferentzia da.

---

6. Kalkula bedi ondoko ekuazio diferentzialaren soluzio orokorra:

$$y' = \frac{x - y + 5}{x + y - 1}.$$

Ekuazio homogenogarria da. Hasteko, hurrengo sistema dugu:

$$\left\{\begin{array}{l} x - y + 5 = 0, \\ x + y - 1 = 0, \end{array}\right. \longrightarrow \quad x \equiv h = -2, \quad y \equiv k = 3.$$

Ondoren,

$$\left\{\begin{array}{l} x = X + h = X - 2, \\ y = Y + k = Y + 3, \end{array}\right. \longrightarrow dx = dX,\ dy = dY \Rightarrow y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dY}{dX} = Y'$$

ordezkaketa egin, eta hasierako ekuazioa ondoko eran idatziko da:

$$Y' = \frac{X - Y}{X + Y}.$$

Ordezkaketa honek geometrikoki adierazi nahi duena hauxe da: "koordenatu-ardatzak jatorritik $x - y + 5 = 0$ eta $x + y - 1 = 0$ zuzenen ebakidura-puntura transladatu dira".

Ekuazio homogeno honetan hurrengo eran eragingo da:

$$Y = uX \longrightarrow Y' = u'X + u \Rightarrow u'X = \frac{1 - u}{1 + u} - u = \frac{1 - 2u - u^2}{1 + u} \longrightarrow$$

$$\int \frac{u + 1}{u^2 + 2u - 1}\, du + \int \frac{dX}{X} = C \longrightarrow \frac{1}{2} \mathrm{Ln}(u^2 + 2u - 1) + \mathrm{Ln}X = C \Rightarrow$$

$$(u^2 + 2u - 1)X^2 = A.$$

Hasierako aldagaietara itzuliz, hots, $u = \frac{Y}{X} = \frac{y - 3}{x + 2}, X = x + 2$:

$$\left[\left(\frac{y-3}{x+2}\right)^2 + 2\,\frac{y-3}{x+2} - 1\right](x+2)^2 = A \longrightarrow x^2 + y^2 + 2xy - 2x - 2y = B.$$

7. Ebatz bedi ondoko ekuazio diferentziala:

$$(2x - 4y + 5)y' + x - 2y + 3 = 0.$$

Ekuazio hau ez da homogenogarria, $2x - 4y + 5 = 0$, $x - 2y + 3 = 0$ ekuazioez osoturiko sistema bateraezina baita, ezezagunetako koefizienteen determinantea nulua da eta.

Koefizienteen arteko proportzionaltasunak, ekuazioa aldagai banangarrietakora laburtzea ahalbidetuko du. Horretarako hurrengo prozedura segituko da:

$$x - 2y = z \xrightarrow{D} 1 - 2y' = z' \Rightarrow$$

$$y' = (1 - z')/2 \longrightarrow (2z + 5)(1 - z')/2 + z + 3 = 0 \longrightarrow$$

$$4z + 11 - (2z + 5)z' = 0 \longrightarrow$$

$$dx - \frac{2z + 5}{4z + 11}\, dz = 0 \longrightarrow dx - \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{4z + 11}\right)dz = 0 \xrightarrow{\int}$$

$$x - \frac{z}{2} + \frac{1}{8}\mathrm{Ln}|4z + 11| = C.$$

Azkenik, $z = x - 2y$ eginez,

$$4x + 8y + \mathrm{Ln}|4x - 8y + 11| = A$$

soluzio orokorra ondorioztatuko da.

---

8. Integra bitez hurrengo ekuazioak:

a) $$(x + e^{x/y})dx + e^{x/y}(1 - x/y)dy = 0, \qquad y(0) = 2.$$

b) $$(2x + y - \frac{1}{x+y})dx + (x - \frac{1}{x+y})dy = 0, \quad y(1) = 0.$$

---

a) ekuazioa:

Ekuazio diferentzial zehatza da, ondokoa betetzen baitu:

$$\frac{\partial Y}{\partial x} = \frac{1}{y} e^{x/y}(1 - x/y) - \frac{1}{y} e^{x/y} = (-x/y^2)e^{x/y} = \frac{\partial X}{\partial y} .$$

Soluzio orokorra:

$$\int_a^x (x + e^{x/y})dx + \int_b^y e^{a/y}(1 - a/y)dy = C.$$

Kalkuluak errazteko, $a = 0$, $b = 1 \neq 0$ hartuko dira. Orduan,

$$\int_0^x (x + e^{x/y})dx + \int_1^y dy = C \longrightarrow \left|x^2/2 + ye^{x/y}\right|_0^x + \left|y\right|_1^y = C \longrightarrow$$

$$x^2/2 + ye^{x/y} - y + y - 1 = C \Rightarrow x^2 + 2ye^{x/y} = A.$$

Soluzio partikularra: $y(0) = 2 \longrightarrow 4 = A \Rightarrow x^2 + 2ye^{x/y} = 4.$

b) ekuazioa:

Hau ere ekuazio diferentzial zehatza da:

$$\frac{\partial Y}{\partial x} = 1 + 1/(x + y)^2 = \frac{\partial X}{\partial y} .$$

Kalkula dezagun soluzio orokorra:

$$\int_a^x (2x + y - \frac{1}{x + y})dx + \int_b^y (a - \frac{1}{a + y})dy = C \longrightarrow$$

$$|x^2 + xy - Ln|x + y||\,|_a^x + |ay - Ln|a + y||\,|_b^y = x^2 + xy - Ln|x + y| -$$

$$a^2 - ay + Ln|a + y| + ay - Ln|a + y| - ab + Ln|a + b| = C \longrightarrow$$

$$x^2 + xy - Ln|x + y| = C + a^2 + ab - Ln|a + b| = A \Rightarrow$$

$$x^2 + xy - Ln|x + y| = A.$$

Soluzio partikularra:

$$y(1) = 0 \longrightarrow 1 - Ln1 = A \longrightarrow A = 1 \Rightarrow x^2 + xy - Ln|x + y| = 1.$$

9. Ebatz bedi ondoko ekuazio diferentziala,

$$(2xy^4e^y + 2xy^3 + y)dx + (x^2y^4e^y - x^2y^2 - 3x)dy = 0,$$

aldez aurretik integrazio-faktore bat determinatuz.

Aldagai bakar baten menpeko integrazio-faktoreak aztertuko dira.

$$\left(\frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial X}\right)\frac{1}{Y} \equiv \phi(x) \text{ bada,} \qquad z(x) = \exp\left[\int\left(\frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial X}\right)\frac{dx}{Y}\right].$$

$$\left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}\right)\frac{1}{X} \equiv \psi(y) \text{ bada,} \qquad z(y) = \exp\left[\int\left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}\right)\frac{dx}{X}\right].$$

Ekuazioak ez du z(x) integrazio-faktorerik onartuko, baina bai z(y) erakoa.

$$\frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial X} = (8xy^3e^y + 2xy^4e^y + 6xy^2 + 1) - (2xy^4e^y - 2xy^2 - 3) =$$

$$= 4(2xy^3e^y + 2xy^2 + 1) \longrightarrow$$

$$\left(\frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial X}\right)\frac{1}{Y} = \frac{4(2xy^3e^y + 2xy^2 + 1)}{x(xy^4e^y - xy^2 - 3)} \equiv \phi(x,y) \Rightarrow \text{ ez dago } z = z(x).$$

$$\left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}\right)\frac{1}{X} = -\frac{4(2xy^3e^y + 2xy^2 + 1)}{y(2xy^3e^y + 2xy^2 + 1)} = -4/y \equiv \psi(y) \quad \Rightarrow$$

$$z(y) = \exp\left[\int\left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}\right)\frac{dx}{X}\right] = \exp\int\frac{-4dy}{y} = \exp[-4Lny] = y^{-4}.$$

Orain, ekuazioa z(y) integrazio-faktorearekin biderkatuz, ekuazio zehatz baten kasura pasatuko gara:

$$(2xe^y + 2x/y + 1/y^3)dx + (x^2e^y - x^2/y^2 - 3x/y^4)dy = 0 \quad \longrightarrow$$

$$\int_a^x [2x(e^y + y^{-1}) + y^{-3}]dx + \int_b^y (a^2e^y - a^2y^{-2} - 3ay^{-4})dy = C.$$

Kalkuluak errazteko, $a = 0$, $b \equiv b \neq 0$ hartuko dira.

$$\int_0^x [2x(e^y + y^{-1}) + y^{-3}]dx = C \quad \longrightarrow \quad \left|x^2(e^y + y^{-1}) + xy^{-3}\right|_0^x = C \quad \Rightarrow$$

$$x^2(e^y + y^{-1}) + xy^{-3} = A \quad \longrightarrow \quad x^2y^2(ye^y + 1) + x - Ay^3 = 0.$$

10. Froga bedi ekuazioen arteko hurrengo korrespondentzia:

$$x^2y - 2xy^2 - 2 = Ay \quad [1], \qquad y^2(x - y)dx + (1 - xy^2)dy = 0. \quad [2]$$

Frogatu beharrekoak ondokoak dira: [2] ekuazioa [1] jatorrizkoari asoziaturiko ekuazio diferentziala dela, eta [1]-a [2]-aren soluzioa dela.

($\Rightarrow$) Ekuazio diferentzial asoziatua

Deribatuz, parametroa ezabatu egingo da.

$$x^2y - 2xy^2 - 2 = Ay \xrightarrow{D} 2y(x - y) + (x^2 - 4xy - A)y' = 0. \qquad [3]$$

[1] eta [3] ekuazioetatik A delakoa ezabatuko dugu:

$$2y(x - y) + [x^2 - 4xy - (x^2y - 2xy^2 - 2)y^{-1}]y' = 0 \longrightarrow$$

$$2y^2(x - y) + (x^2y - 4xy^2 - x^2y + 2xy^2 + 2)y' = 0 \longrightarrow$$

$$y' = \frac{y^2(x - y)}{xy^2 - 1} \longrightarrow y^2(x - y)dx + (1 - xy^2)dy = 0.$$

($\Leftarrow$) Ekuazioaren soluzio orokorra

Ekuazioa ez da ez homogenoa, ez zehatza. Azter dezagun aldagai bakarraren menpeko integrazio-faktoreen existentzia:

$$\frac{\partial X}{\partial y} = 2xy - 3y^2, \quad \frac{\partial Y}{\partial X} = - y^2 \quad \longrightarrow \quad \frac{\partial X}{\partial y} \neq \frac{\partial Y}{\partial X}.$$

$$\left(\frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial X}\right)\frac{1}{Y} = \frac{2y(x - y)}{1 - xy^2} \neq \phi(x) \longrightarrow \text{Ez dago } z(x) \text{ faktorerik.}$$

$$\left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}\right)\frac{1}{X} = \frac{2y(y - x)}{y^2(x - y)} = -2/y \longrightarrow z(y) = \exp(-2Lny) = y^{-2}.$$

Orain, ekuazioa z(y) faktoreaz biderkatu, eta integratu egingo da.

$$y^2(x - y)dx + (1 - xy^2)dy = 0 \longrightarrow (x - y)dx + (y^{-2} - x)dy = 0 \longrightarrow$$

$$\int_a^x (x - y)dx + \int_b^y (y^{-2} - a)dy = C \longrightarrow \left|x^2/2 - xy\right|_a^x - \left|1/y + ay\right|_b^y = C$$

$$\longrightarrow \quad x^2/2 - xy - a^2/2 + ay - 1/y - ay + 1/b + ab = C \quad \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \quad x^2y - 2xy^2 - 2 = (C + a^2/2 - 1/b - ab)2y \equiv Ay \quad \longrightarrow$$

$$x^2y - 2xy^2 - 2 = Ay.$$

Oharra: Integraletan a = 0, b = 1 eginez gero, kalkuluak arindu egingo dira.

11. Integra bitez hurrengo ekuazio diferentzialak:

a) $y' = -\dfrac{(1 + x\mathrm{tg}x)y^2}{2(xy + \cos x)}$, b) $(y^2 + xy)dx - x^2dy = 0.$

---

a) ekuazioa, z(x) integrazio-faktore baten bidez, ekuazio zehatz bilaka daiteke:

$$y' = -\frac{(1 + x\mathrm{tg}x)y^2}{2(xy + \cos x)} \longrightarrow (1 + x\mathrm{tg}x)y^2dx + 2(xy + \cos x)dy = 0,$$

$$\left(\frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial X}\right)\frac{1}{Y} = \frac{2y(1 + x\mathrm{tg}x) - 2(y - \sin x)}{2(xy + \cos x)} = \frac{xy\mathrm{tg}x + \sin x}{xy + \cos x} =$$

$$\frac{(xy + \cos x)\sin x}{(xy + \cos x)\cos x} = \mathrm{tg}x \longrightarrow z(x) = \exp[\textstyle\int \mathrm{tg}x dx] = \exp[-\mathrm{Ln}\cos x] = \dfrac{1}{\cos x}.$$

Ondoren, ekuazioa z(x) delakoaz biderkatu, eta gero integratu egingo dugu, Kalkuluak errazteko $a = b = 0$ ordezkatuko delarik.

$$\frac{(1 + x\mathrm{tg}x)y^2}{\cos x}dx + \frac{2(xy + \cos x)}{\cos x}dy = 0 \longrightarrow$$

$$\int_a^x \frac{(1 + x\mathrm{tg}x)y^2}{\cos x}dx + \int_b^y \frac{2(ay + \cos a)}{\cos a}dy =$$

$$= \int_0^x \frac{(\cos x + x\sin x)y^2}{\cos^2 x}dx + \int_0^y 2dy = C.$$

Lehenengo integrala, zatikako metodoa bi aldiz aplikatuz ebatziko da:

$$\begin{cases} \cos x + x\sin x = u \longrightarrow x\cos x dx = du, \\ dx/\cos^2 x = dv \quad \longrightarrow \text{tg}x = v, \end{cases} \qquad \begin{cases} x = u \qquad \longrightarrow dx = du, \\ \sin x dx = dv \longrightarrow -\cos x = v, \end{cases}$$

$$\int_0^x \frac{(\cos x + x\sin x)}{\cos^2 x} dx = (\cos x + x\sin x)\text{tg}x - [-x\cos x + \sin x] = \frac{x}{\cos x} .$$

Lortutako jatorrizkoa ondokoa da:

$$\left| \frac{xy^2}{\cos x} \right|_0^x + |2y|_0^y = C \quad \Rightarrow \quad xy^2 + (2y - C)\cos x = 0.$$

---

b) ekuazioak, homogenoa denez, hurrengo integrazio-faktorea onartuko du:

$$(y^2 + xy)dx - x^2dy = 0 \rightarrow z(x,y) = \frac{1}{xX + yY} = \frac{1}{x(y^2 + xy) - yx^2} = \frac{1}{xy^2}$$

Horrela,

$$(1/x + 1/y)dx - xdy/y^2 = 0 \longrightarrow \int_a^x (1/x + 1/y)dx - \int_b^y ady/y^2 = C \longrightarrow$$

$$|\text{Ln}x + x/y|_a^x + |a/y|_b^y = C \quad \Rightarrow \quad \text{Ln}|x| + \frac{x}{y} = A.$$

12. F eta G direlakoak x-en funtzioak badira, froga bedi

$$(yF + G)dx + dy = 0$$

ekuazio diferentzialak x-en menpeko integrazio-faktore bat onartuko duela, eta kalkula bedi integrazio-faktore hori.

Aurki bedi $xy' = 2x + y$ ekuazioaren jatorrizkoa,

a) aurreko emaitza erabiliz,

b) ekuazioa homogenotzat hartuz.

$z = z(x)$ delakoa integrazio-faktorea bada, orduan

$$z(x)[yF(x) + G(x)]dx + z(x)dy = 0$$

ekuazio diferentzial zehatza dugu, hau da,

$$\frac{\partial Y}{\partial x} = \frac{\partial X}{\partial y} \longrightarrow \frac{\partial}{\partial x}[z] = \frac{\partial}{\partial y}[z(yF + G)].$$

Eragiketak eginez, aldagai banangarrietako ekuazio batetara iritsiko gara, non z delakoa $(\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{dz}{dx})$ funtzio ezaguna den:

$$\frac{dz}{dx} = zF \longrightarrow \frac{dz}{z} = Fdx.$$

Integratuz, ekuazio linealetarako integrazio-faktorea lor daiteke:

$$Lnz = \int Fdx + C \longrightarrow z = e^{\int Fdx+C} \Rightarrow z = Ae^{\int Fdx}.$$

---

a) kasuan ondokoa dugu:

$$xy' = 2x + 3y \longrightarrow (-3y/x - 2)dx + dy = 0 \longrightarrow F(x) = -3/x \quad \Rightarrow$$

$$z = Ae^{-\int 3dx/x} = Ax^{-3}.$$

$A = 1$ faktoreaz biderkatuz,

$$(-3x^{-4}y - 2x^{-3})dx + x^{-3}dy = 0$$

ekuazio zehatza lortuko da, beraren soluzio orokorra ondokoa delarik:

$$\int_a^x (-3x^{-4}y - 2x^{-3})dx + \int_b^y a^{-3}dy = C \quad \Rightarrow \quad y = Ax^3 - x.$$

---

b) Ekuazio homogenoa denez, $y = ux \longrightarrow y' = u'x + u$ aldagai-aldaketaz aldagai banangarrietara labur daiteke:

$$xy' = 2x + 3y \longrightarrow x(u'x + u) = 2x + 3ux \longrightarrow u'x = 2(1 + u) \Rightarrow$$

$$\frac{du}{1 + u} - \frac{2dx}{x} = 0 \xrightarrow{\int} \mathrm{Ln}|1 + u| - 2\mathrm{Ln}|x| = C \xrightarrow{\exp} (1 + u)/x^2 = A.$$

Ordezkaketa deseginez, $x + y = Ax^3$ dugu.

Oharra: Aztertutako ekuazioa y-rekiko lineala da:

$$y' + F(x)y = -G(x).$$

Beraren soluzio orokorra hurrengoa da:

$$y = e^{-\int F dx}\left[\int -G(x)e^{\int F dx}dx + C\right].$$

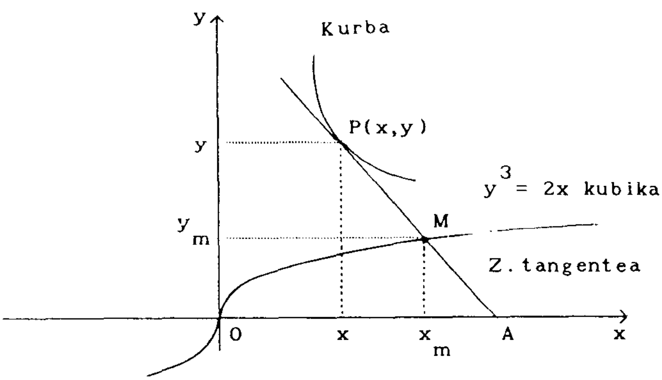
13. Froga bedi ezen

$$8ydx + (y^3 - 16x)dy = 0$$

ekuazio diferentziala betetzen duten planoko kurbek, ondoko propietate hau beteko dutela: *"Kurba batetako edozein P(x,y) puntutan zuzen tangentea abzisa-ardatzarekin ebaki eta, eta P(x,y) eta ebakidura-puntuak osotzen duten segmentuaren erdiko puntua $y^3 = 2x$ kubikan egongo da".*

Bila bedi A(8,4) puntutik pasatuko den kurba integrala, ondoko prozedurak erabiliz:

a) ekuazioa zehatz bihurtuz,
b) ekuazio lineal gisa integratuz.



M puntuaren koordenatuek, zeintzuek P eta A puntuen baturaerdia diren, kubikaren ekuazioa bete behar dute. Hemendik aterako da kurbek beteko duten ekuazio diferentziala.

Zuzen tangenteak OX ardatzarekin duen ebakidura-puntua, A da.

$$Y - y = y'(X - x), \quad Y = 0 \quad \longrightarrow \quad \overline{OA} \equiv X = (xy' - y)/y'.$$

Horrela, honakoa ondoriozta daiteke:

$$x_m = [x + (xy' - y)/y']/2 = (2xy' - y)/2y', \quad y_m = y/2 \quad \Rightarrow$$

$$y_m^3 = 2x_m \longrightarrow y^3/8 = (2xy' - y)/y' \longrightarrow 8ydx + (y^3 - 16x)dy = 0.$$

Ekuazio honetarako y-ren menpeko integrazio-faktore bat dugu:

$$z(y) = \exp\left[\int\left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}\right)\frac{dx}{X}\right] = \exp\left[\int \frac{-3dy}{y}\right] = \exp\,[-3\mathrm{Ln}y] = y^{-3}.$$

Ekuazioa z(y) faktoreaz biderkatuz, eta a = 0, b = 1 eginez, integratu egingo da:

$$8y^{-2}dx + (1 - 16xy^{-3})dy = 0 \longrightarrow \int_a^x 8y^{-2}dx + \int_b^y (1 - 16ay^{-3})dy = C \longrightarrow$$

$$\left|8xy^{-2}\right|_0^x + \left|y\right|_1^y = C \quad\Rightarrow\quad 8xy^{-2} + y = A \quad\longrightarrow\quad 8x + (y - A)y^2 = 0.$$

Bestalde, ekuazioa x-ekiko lineala da:

$$8ydx + (y^3 - 16x)dy = 0 \longrightarrow x' - \frac{2}{y}x = -\frac{y^2}{8}.$$

Beraren soluzioa hauxe izango da:

$$x = e^{\int 2dy/y}\left[\int \frac{-y^2}{8} e^{-\int 2dy/y}dy + C\right] = y^2\left[\int -dy/8 + C\right] \longrightarrow$$

$$x = y^2(C - y/8), \quad \text{edo era baliokidean,} \quad 8x + (y - A)y^2 = 0.$$

Soluzio partikularra:

Kurba M(8,4) puntutik pasatzen da, y(8) = 4 alegia. Orduan,

$$64 + (4 - A)16 = 0 \longrightarrow A = 8 \quad\Rightarrow\quad 8x + (y - 8)y^2 = 0.$$

14. Biz ondoko ekuazio diferentziala:

$$(y^2 - x^2 - 2xy)y' + y^2 - x^2 + 2xy = 0.$$

a) Kalkulatu beraren soluzio orokorra, y = ux ordezkaketa eginez.

b) Frogatu $(x^2 + y^2)$-ren menpeko integrazio-faktore bat onartuko duela, eta ebatzi ekuazioa.

c) Interpretatu geometrikoki integral-sorta.

---

a) Ekuazioa homogenoa denez, y = ux aldagai-aldaketak aldagai banangarrietako kasura laburtuko du.

$$y = ux \xrightarrow{d} dy = udx + xdu,$$

$$(y^2 - x^2 + 2xy)dx + (y^2 - x^2 - 2xy)dy = 0 \xrightarrow{y=ux}$$

$$(u^2x^2 - x^2 + 2ux^2)dx + (u^2x^2 - x^2 - 2ux^2)(udx + xdu) = 0 \longrightarrow$$

$$(u^2 - 2u - 1)xdu + (u^3 - u^2 + u - 1)dx = 0 \longrightarrow$$

$$\int \frac{u^2 - 2u - 1}{u^3 - u^2 + u - 1}\, du + \int \frac{dx}{x} = C.$$

Integrakizuna frakzio sinpleetan bananduko da:

$$\frac{u^2 - 2u - 1}{(u - 1)(u^2 + 1)} = \frac{A}{u - 1} + \frac{Bu + C}{u^2 + 1} = \frac{A(u^2 + 1) + (Bu + C)(u - 1)}{(u - 1)(u^2 + 1)}.$$

2. mailako gaiak: $1 = A + B$

1. mailako gaiak: $-2 = C - B \longrightarrow A = -1, \; B = 2, \; C = 0.$

0 mailako gaiak: $-1 = A - C$

Orduan, integralen ebazpenerako, ondokoa dugu:

$$\int\left(\frac{-1}{u-1}+\frac{2u}{u^2+1}\right)du+\int\frac{dx}{x}=\text{Ln}|u-1|+\text{Ln}(u^2+1)+\text{Ln}|x|=\text{Ln}\left|\frac{(u^2+1)x}{u-1}\right|.$$

Soluzio orokorra hurrengoa da:

$$\text{Ln}\left|\frac{(u^2+1)x}{u-1}\right|=C\xrightarrow{\exp}\frac{(u^2+1)x}{u-1}=A\xrightarrow{u=y/x}x^2+y^2=A(y-x).$$

---

b) Ekuazioa $z = z(u)$ faktoreaz biderkatuko dugu, $u = x^2 + y^2$ delarik, eta deribatu gurutzatuen berdintza ondorioztatuko da:

$$z(u)(y^2-x^2+2xy)dx+z(u)(y^2-x^2-2xy)dy=0,\quad u=x^2+y^2,$$

$$\frac{\partial}{\partial x}[z(y^2-x^2-2xy)]=\frac{\partial}{\partial y}[z(y^2-x^2+2xy)].$$

Funtzio konposatuetarako deribaketa-erregelaren arabera,

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{dz}{du}\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{dz}{du}2x\equiv 2xz',\qquad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{dz}{du}\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{dz}{du}2y\equiv 2yz'.$$

Deribatu partzialak garatuz, $z(u)$ kalkulatzea ahalbidetuko duen aldagai banangarrietako ekuazio diferentzial bat lor daiteke:

$$2xz'(y^2-x^2-2xy)+z(-2x-2y)=2yz'(y^2-x^2+2xy)+z(2y+2x)$$

$$\longrightarrow\quad z'(xy^2-x^3-2x^2y-y^3+x^2y-2xy^2)+z(-x-y-y-x)=0$$

$$\longrightarrow\quad (x^3+y^3+x^2y+xy^2)z'+2(x+y)z=0\qquad\longrightarrow$$

$$\longrightarrow\quad [x(x^2+y^2)+y(x^2+y^2)]z'+2(x+y)z=0\quad\longrightarrow$$

$$(x^2 + y^2)(x + y)z' + 2(x + y)z = 0 \longrightarrow (x^2 + y^2)z' + 2z = 0 \quad \Rightarrow$$

$$uz' + 2z = 0 \rightarrow dz/z + 2du/u = 0 \rightarrow zu^2 = A \Rightarrow z = A(x^2 + y^2)^{-2}.$$

Integrazio-faktoreen bidezko ekuazioaren soluzioa, ondokoa da:

$$\int_a^x (x^2 + y^2)^{-2}(y^2 - x^2 + 2xy)dx + \int_b^y (a^2 + y^2)^{-2}(y^2 - a^2 - 2ay)dy = C.$$

Bigarren integralaren kalkulua errazteko, $a = 0$, $b = 1 \neq 0$ hartuko dira. Lehenengo integrala, ondoko ordezkapen trigonometrikoaren bidez kalkula dezakegu:

$$x = y\text{tg}z \longrightarrow dx = ydz/\cos^2 z,$$

$$\int \frac{y^2 - x^2 + 2xy}{(x^2 + y^2)^2} dx = \int \frac{y^2(1 - \text{tg}^2 z + 2\text{tg}z)}{(y^2\cos^{-2}z)^2} \frac{ydz}{\cos^2 z} =$$

$$\frac{1}{y}\int(\cos^2 z - \sin^2 z + 2\sin z\cos z)dz = \frac{1}{y}\int(\cos 2z + \sin 2z)dz =$$

$$= \frac{1}{2y}(\sin 2z - \cos 2z) = \frac{1}{2y}(2\sin z\cos z - \cos^2 z + \sin^2 z) =$$

$$= \frac{1}{2y}\left(\frac{2\text{tg}z}{1 + \text{tg}^2 z} - \frac{1}{1 + \text{tg}^2 z} + \frac{\text{tg}^2 z}{1 + \text{tg}^2 z}\right) = \frac{\text{tg}^2 z + 2\text{tg}z - 1}{2y(1 + \text{tg}^2 z)}.$$

$\text{tg}z = x/y$ eginez, hurrengoa ondoriozta daiteke:

$$\int \frac{y^2 - x^2 + 2xy}{(x^2 + y^2)^2} dx = \frac{\text{tg}^2 z + 2\text{tg}z - 1}{2y(1 + \text{tg}^2 z)} \equiv \frac{x^2 + 2xy - y^2}{2y(x^2 + y^2)}.$$

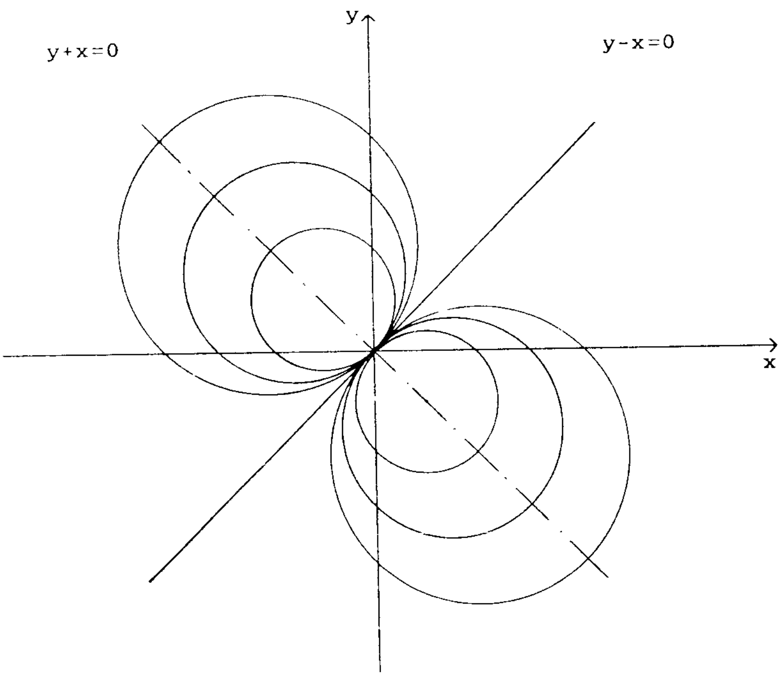
Beraz, soluzio orokorra ondokoa da:

$$\left|\frac{x^2 + 2xy - y^2}{2y(x^2 + y^2)}\right|_0^x + \left|\frac{-1}{y}\right|_1^y = C \rightarrow \frac{x^2 + 2xy - y^2}{2y(x^2 + y^2)} + \frac{1}{2y} - \frac{1}{y} + 1 = C$$

$$\longrightarrow \frac{2xy - y^2}{2y(x^2 + y^2)} = A \longrightarrow \frac{x - y}{x^2 + y^2} = A \longrightarrow x^2 + y^2 - \frac{x}{A} + \frac{y}{A} = 0 \longrightarrow$$

$$(x - 1/2A)^2 + (y + 1/2A)^2 = 1/2A^2 \xrightarrow{1/2A=B} (x-B)^2 + (y+B)^2 = 2B^2.$$

c) $\sqrt{2}B$ erradiodun eta $(-B,B)$ zentruko zirkunferentzien familia da, $y + x = 0$ erdikariaren gain eta jatorrian $y-x = 0$ zuzenarekiko tangentea delarik.



15. Ebatz bitez ondoko ekuazio diferentzialak:

a) $y' + y\,\mathrm{cotg}x = \sin 2x$, **b)** $(1 + xy)dx = (1 + x^2)dy$, $y(0) = 1$.

Biak linealak dira. Beraz, hurrengo formula aplikatuko dugu:

$$y' + P(x)y = Q(x) \longrightarrow y = e^{-\int P(x)dx}\left[\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + C\right].$$

---

a) ekuazioa:

$$\int P(x)dx = \int \mathrm{cotg}x\,dx = \mathrm{Ln}|\sin x|, \quad e^{-\int Pdx} = \frac{1}{\sin x}, \quad e^{\int Pdx} = \sin x,$$

$$y = \frac{1}{\sin x}\left[\int \sin 2x \sin x\,dx + C\right] = \frac{1}{\sin x}\left[\int 2\sin^2 x\cos x\,dx + C\right] \longrightarrow$$

$$y = \frac{1}{\sin x}\left[\frac{2\sin^3 x}{3} + C\right] = \frac{2\sin^2 x}{3} + \frac{C}{\sin x}.$$

---

b) ekuazioa hurrengo era linealean adieraz daiteke:

$$y' - \frac{x}{1 + x^2}y = \frac{1}{1 + x^2}, \quad P(x) = \frac{-x}{1 + x^2}, \quad Q(x) = \frac{1}{1 + x^2} \longrightarrow$$

$$\int P(x)dx = -\frac{1}{2}\mathrm{Ln}(1 + x^2), \quad e^{-\int Pdx} = (1 + x^2)^{1/2}, \quad e^{\int Pdx} = (1 + x^2)^{-1/2}.$$

Soluzio orokorra:

$$y = (1 + x^2)^{1/2}\left[\int (1 + x^2)^{-1}(1 + x^2)^{-1/2}dx + C \right] =$$

$$= (1 + x^2)^{1/2}\left[\int (1 + x^2)^{-3/2}dx + C \right].$$

Integral honetan ondoko ordezkaketa egin daiteke:

$$x = \mathrm{tg}u, \quad dx = du/\cos^2 u.$$

Horrela,

$$I = \int (1 + x^2)^{-3/2}dx = \int \cos^3 u \; du/\cos^2 u = \int \cos u du = \sin u.$$

x aldagaira itzuliz,

$$I = \sin u = \mathrm{tg}u/(1 + \mathrm{tg}^2 u)^{1/2} \equiv x(1 + x^2)^{-1/2},$$

soluzio orokorra hurrengoa dugularik:

$$y = (1 + x^2)^{1/2}\left[x(1 + x^2)^{-1/2} + C \right] = x + C(1 + x^2)^{1/2}.$$

Soluzio partikularra:

$$y(0) = 1 \longrightarrow 1 = C \Rightarrow y = x + (1 + x^2)^{1/2}.$$

16. Ebatz bitez ondoko ekuazioak:

a) $2x(x + 1)y' - y = y^3\sin^{-1}x.$

b) $3dx + (3x^3 - 1)x \sin y dy = 0 \;, \quad y(1) = \pi/2.$

<u>a) ekuazioa:</u>

Bernoulli-ren motakoa da.

$$y^{-3}y' - \frac{1}{2x(x+1)}\, y^{-2} = \frac{\sin^{-1}x}{2x(x+1)} \;,$$

$y^{-2} = z \longrightarrow -2y^{-3}y' = z'$ ordezkaketaz lineal bilakatuko da.

$$\frac{-z'}{2} - \frac{1}{2x(x+1)}\, z = \frac{\sin^{-1}x}{2x(x+1)} \longrightarrow z' + \frac{1}{x(x+1)}\, z = \frac{-\sin^{-1}x}{x(x+1)} \;,$$

non $P(x) = \dfrac{1}{x(x+1)}$, $Q(x) = \dfrac{-\sin^{-1}x}{x(x+1)}$ diren.

$$\int P(x)dx = \int \frac{dx}{x(x+1)} = \mathrm{Ln}\,\frac{x}{x+1} \;;\; -\int P(x)dx = \int \frac{-dx}{x(x+1)} = \mathrm{Ln}\,\frac{x+1}{x} \,.$$

Ekuazio linealaren soluzio orokorraren formulan ordezkatuko da:

$$z = e^{-\int P dx}\left[\int Q(x)e^{\int P dx}dx + C\right] = \frac{x+1}{x}\left[\int \frac{-\sin^{-1}x}{(x+1)^2}\, dx + C\right].$$

Azken integral hau zatika ebaz daiteke:

$\sin^{-1}x = u \longrightarrow (1-x^2)^{-1/2}dx = du, \quad -dx/(x+1)^2 = dv \longrightarrow 1/(x+1) = v \quad \Rightarrow$

$$I = \int \frac{-\sin^{-1}x}{(x+1)^2}\,dx = \frac{\sin^{-1}x}{x+1} - \int \frac{(1-x^2)^{-1/2}dx}{x+1} = \frac{\sin^{-1}x}{x+1} - I_1.$$

I_1-en $\quad x + 1 = z^{-1} \quad \longrightarrow \quad dx = -z^{-2}dz \quad$ aldagai-aldaketa egingo da:

$$I_1 = \int \frac{-(1 - z^{-2} + 2z^{-1} - 1)^{-1/2}\, z^{-2}}{z^{-1}}\,dz =$$

$$= -\int (2z-1)^{-1/2}dz = -(2z-1)^{1/2} \equiv -\left(\frac{2}{x+1} - 1\right)^{1/2} = -\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{1/2}.$$

Beraz, I integralaren emaitza,

$$I = \frac{1}{x+1}\left[\sin^{-1}x + (1-x^2)^{1/2}\right]$$

da, eta ekuazioaren soluzio orokorra ondokoa dugu:

$$z = y^{-2} = \frac{x+1}{x}\left[\int \frac{-\mathrm{sen}^{-1}x}{(x+1)^2}\,dx + C\right] = \frac{\mathrm{sen}^{-1}x + (1-x^2)^{1/2} + C(x+1)}{x}.$$

b) ekuazioa:

x-ekiko kontsideratuz, hau ere Bernouilli-ren motakoa da:

$$3x' - \sin y\ x = -3x^4 \sin y.C$$

Aurreko kasuan bezala eragiketak eginez gero, ondokoa dugu:

$3x^{-4}x' - \sin y\ x^{-3} = -3\sin y, \qquad x^{-3} = z \longrightarrow -3x^{-4}x' = z' \Rightarrow$

$$-z' - \sin y\ z = -3\sin y \longrightarrow z' + \sin y\ z = 3\sin y.$$

Ekuazio lineal honen soluzio orokorra hurrengoa da:

$$z = e^{-\int P(y)dy}\left[\int Q(y)e^{\int P(y)dy}dy + C\right],$$

$e^{-\int P(y)dy} = e^{-\int \sin y dy} = e^{\cos y}\ ;\ e^{\int P(y)dy} = e^{\int \sin y dy} = e^{-\cos y} \longrightarrow$

$z = e^{\cos y}\left[\int 3\sin y\ e^{-\cos y}dy + C\right] = e^{\cos y}\left[3e^{-\cos y} + C\right] = 3 + Ce^{\cos y}.$

$z = x^{-3}$ eginez, $\quad x^3(3 + Ce^{\cos y}) - 1 = 0 \quad$ soluzio orokorra da.

Soluzio partikularra: $x(\pi/2) = 1 \longrightarrow 3 + C - 1 = 0 \longrightarrow C = -2 \Rightarrow$

$$x^3(3 - 2e^{\cos y}) - 1 = 0.$$

17. Hiri batetako x(t) populazioa, indibiduo eta denbora-unitateko a jaiotze-abiadura eta (b+cx) heriotze-abiaduratakoa da.

Baldin $a = 10^{-2}$, $b = 9.10^{-3}$, $c = 4.10^{-10}$ eta hasierako populazioa 10^6-ekoa badira, frogatu $t = 10^3 Ln6$ urte pasa ondoren, populazioa bikoiztu egingo dela.

Fenomeno honi asoziatutako ekuazioa, Bernouilli-ren motakoa da:

$$x'(t) = ax(t) - [b + cx(t)]x(t) \longrightarrow x' - (a - b)x = -cx^2.$$

$x^{-1} = z, \quad -x^{-2}x' = z'$ aldaketaren bidez, lineal bilaka daiteke:

$$-x^{-2}x' + (a - b)x^{-1} = c \longrightarrow z' + (a - b)z = c.$$

Honen soluzio orokorra ondokoa da:

$$z = e^{\int (b-a)dt}\left[\int ce^{\int (a-b)dt}dt + A \right] = \frac{c}{a - b} + Ae^{(b-a)t} = x^{-1}.$$

Problemaren datuak erabiliz, hurrengoa dugu:

$$x^{-1} = 4.10^{-7} + Ae^{-t/1000} \longrightarrow x = \left(4.10^{-7} + Ae^{-t/1000}\right)^{-1}.$$

Soluzio partikularra: $x(0) = 10^6 \longrightarrow 10^{-6} = 4.10^{-7}A \longrightarrow A = 6.10^{-7}$,

$$x^{-1} = 4.10^{-7} + 6.10^{-7}e^{-t/1000} \longrightarrow x = \left(4.10^{-7} + 6.10^{-7}e^{-t/1000}\right)^{-1}.$$

$t = 10^3 Ln6$ urte pasa ondorengo populazioa:

$$x(10^3 Ln6) = \left[4.10^{-7} + 6.10^{-7}e^{-Ln6}\right]^{-1} = \left[4.10^{-7} + 10^{-7}\right]^{-1} = \frac{10^7}{5} = 2.10^6.$$

Ondorioz, $x(10^3 Ln6) = 2x(0) = 2.10^6$.

18. Integra bedi hurrengo ekuazio diferentziala,

$$(x^3 - 1)y' - x^2y + y^2 = 2x,$$

aldez aurretik 2. mailako soluzio polinomikoak aztertuz.

Ondoko erako Riccati-ren ekuazio bat da:

$$y' + P(x)y + Q(y)y^2 = f(x).$$

u(x) soluzio partikular bat ezagutuz, ondoko ordezkaketen bidez, laburtu egin daiteke:

$y = u + z \Rightarrow$ Bernouilli-ren ekuazioa, $y = u + z^{-1} \Rightarrow$ Ekuazio lineala.

Aproba egin dezagun soluzio partikular modura bigarren mailako polinomio bat hartuz:

$$u = ax^2 + bx + c \longrightarrow u' = 2ax + b \Rightarrow$$

$$(x^3 - 1)(2ax + b) - x^2(ax^2 + bx + c) + (ax^2 + bx + c)^2 - 2x = 0.$$

Ekuazioa ordenatu egingo dugu:

$$a(a + 1)x^4 + 2abx^3 + [b^2 + c(2a - 1)]x^2 + 2(bc - a - 1)x + c^2 - b = 0.$$

Polinomioaren anulazioak hurrengoa ondorioztatuko du:

$$a(a + 1) = 0, \quad 2ab = 0, \quad c(2a - 1) = 0, \quad bc - a - 1 = 0, \quad c^2 - b = 0,$$

$$a = 0, \quad b = 1, \quad c = 1, \quad a = -1, \quad b = 0, \quad c = 0,$$

horrela

$$u_1 = x + 1, \qquad u_2 = -x^2$$

soluzioak direlarik.

Ekuazioa lineal bilakatzeko, $u_2 = -x^2$ hartuko da:

$$y = -x^2 + z^{-1} \longrightarrow y' = -2x - z^{-2}z' \Rightarrow$$

$$(1 - x^3)(2x + z^{-2}z') - x^2(-x^2 + z^{-1}) + (-x^2 + z^{-1})^2 = 2x \longrightarrow$$

$$z^{-2}(1 - x^3)z' - 3x^2z^{-1} + z^{-2} = 0 \longrightarrow z' + \frac{3x^2}{x^3 - 1} z = \frac{1}{x^3 - 1} .$$

Honen soluzio orokorra ondokoa da:

$$z = \exp[-\mathrm{Ln}(x^3 - 1)] \left[\int \frac{\exp[\mathrm{Ln}(x^3 - 1]}{x^3 - 1} dx + C \right] \longrightarrow$$

$$z = (x^3 - 1)^{-1}\left[\int dx + C \right] = (x^3 - 1)^{-1}(x + C).$$

$z = (y + x^2)^{-1}$ eginez, y aldagaira itzul gaitezke:

$$(y + x^2)^{-1} = (x^3 - 1)^{-1}(x + C) \longrightarrow y = \frac{x^3 - 1}{x + C} - x^2 = - \frac{Cx^2 + 1}{C + x} .$$

Oharra: Beste era batetan, $z = \dfrac{y - u_1}{y - u_2}$ ordezkaketa erabiliz, zuzenean aldagai banangarrietako ekuazio bilakatuko da.

19. Aurki bedi ondoko ekuazioaren jatorrizkoa:

$$2y^2dx - [(y - 1)(x^2 - y^2) + 2xy]dy = 0.$$

---

x funtziotzat hartuz, Riccati-ren ekuazio bat da:

$$x' - \frac{1}{y}x - \frac{y-1}{2y^2}x^2 = \frac{1-y}{2}.$$

Har dezagun soluzio partikular erraz bat. Adibidez, $x = y$. Ekuazio lineal bilakatzeko ondoko aldagai-aldaketa egingo dugu:

$$x = y + z^{-1} \longrightarrow x' = 1 - z^{-2}z',$$

$$1 - z^{-2}z' - \frac{1}{y}(y + z^{-1}) - \frac{y-1}{2y^2}(y + z^{-1})^2 = \frac{1-y}{2}.$$

Ekuazioa z^2 gaiaz biderkatuz, sinplifikatu ondoren, hurrengoa lortuko da:

$$z' + z = (1 - y)/2y^2 \qquad \Rightarrow$$

$$z = e^{-\int P dy}\left[\int Q(y)e^{\int P dy}dy + C\right] = e^{-y}\left[\int \frac{(1-y)e^y dy}{2y^2} + C\right].$$

Azken integrala zatikako metodoaz kalkula dezakegu.

$$(1 - y)e^y = u \longrightarrow -ye^y dy = du\ , \quad dy/2y^2 = dv \longrightarrow v = -1/2y \qquad \Rightarrow$$

$$\int \frac{(1-y)e^y dy}{2y^2} = \frac{(y-1)e^y}{2y} - \frac{e^y}{2} = -\frac{e^y}{2y}.$$

$z = \dfrac{1}{x - y}$ ordezkatuz, soluzioa x-en funtzioan lortuko da:

$$z = \frac{1}{x-y} = e^{-y}[-e^y/2y + C] = Ce^{-y} - 1/2y \qquad \Rightarrow \qquad x(y) = \frac{y(e^y + 2Cy)}{2Cy - e^y}.$$

20. Kalkula bitez zentrua OY ardatzean eta OX-ekiko tangenteak diren zirkunferentzien ibilbide ortogonalak.

Kurben ekuazioa $x^2 + (y - A)^2 = A^2$ da.

Berari asoziaturiko ekuazio diferentziala, deribatuz eta ondoren A parametroa ezabatuz kalkulatuko da.

$$2x + 2(y - A)y' = 0 \longrightarrow A = (x + yy')/y' \Rightarrow$$

$$x^2 + (x/y')^2 = [(x + yy')/y']^2 \longrightarrow y' = \frac{2xy}{x^2 - y^2} .$$

y' delakoa $-1/y'$ balioaz ordezkatuz, ibilbide ortogonalen ekuazioa lortuko dugu. Era honetan, ondoko ekuazio homogenoa lortuko da,

$$y' = \frac{y^2 - x^2}{2xy} ,$$

non $y = ux \longrightarrow y' = u'x + u$ aldaketa egingo dugun.

$$u'x + u = \frac{u^2 - 1}{2u} \longrightarrow u'x = \frac{u^2 - 1}{2u} - u = - \frac{u^2 + 1}{2u} .$$

Aldagaiak bananduz eta integratuz,

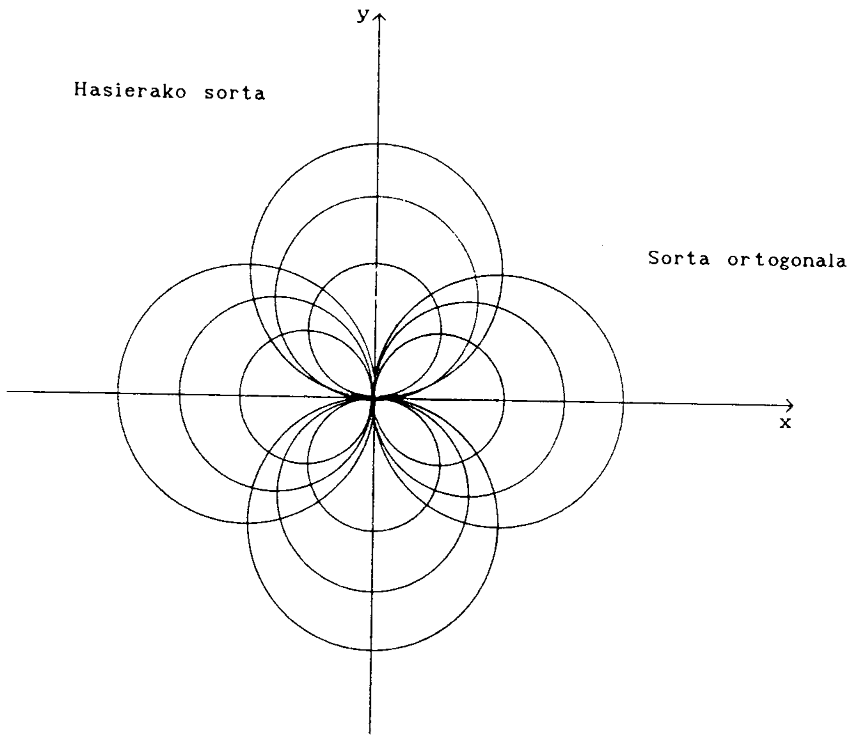
$$\frac{2udu}{1 + u^2} + \frac{dx}{x} = 0 \longrightarrow \mathrm{Ln}(u^2 + 1) + \mathrm{Ln}|x| = C \xrightarrow{\exp} (u^2 + 1)x = 2A$$

lor daiteke.

u = y/x eginez, zentrua OX-en eta OY-rekiko tangenteak diren grafikoko zirkunferentziak ondorioztatuko dira, zeintzuen ekuazioa

$$\frac{x^2 + y^2}{x} = 2A \longrightarrow (x - A)^2 + y^2 = A^2$$

den.



21. Azter bedi ondoko ekuazioen arteko erlazioa:

a) $2x^3dx + y(3x^2 + y^2)dy = 0,$ **b)** $x(x^2 + y^2) - Cy^2 = 0.$

Aurki bitez b) kurba-sortarekiko ibilbide ortogonalak.

---

b) kurba-sortari asoziaturiko ekuazio diferentziala hauxe da:

$$x(x^2 + y^2) - Cy^2 = 0 \longrightarrow x^3/y^2 + x - C = 0 \xrightarrow{D}$$

$$[3x^2y^2 - 2x^3yy']/y^4 + 1 = 0 \longrightarrow 2x^3dy - y(3x^2 + y^2)dx = 0.$$

Ohar daitekeenez, ekuazio hau, a) ekuazioan y' delakoa -1/y' gaiaz ordezkatuz lor dezakegu. Ondorioz, a) delakoa b) sortari dagozkion ibilbide ortogonalen ekuazioa da.

<u>a) ekuazioaren soluzio orokorra</u>

Ekuazio homogenoa denez, hurrengo ordezkaketa egingo da:

$$y = ux \xrightarrow{d} dy = udx + xdu,$$

$$2x^3dx + y(3x^2 + y^2)dy = 0 \longrightarrow 2x^3dx + ux(3x^2 + u^2x^2)(udx + xdu) = 0$$

$$\longrightarrow (2 + 3u^2 + u^4)dx + (3u + u^3)xdu = 0 \longrightarrow \frac{u^3 + 3u}{u^4 + 3u^2 + 2}\,du + \frac{dx}{x} = 0.$$

Frakzio sinpleetan deskonposatuz, hurrengoa lortuko dugu:

$$\frac{u^3 + 3u}{u^4 + 3u^2 + 2} = \frac{u^3 + 3u}{(u^2 + 1)(u^2 + 2)} = \frac{2u}{u^2 + 1} - \frac{u}{u^2 + 2}.$$

Gero, $\int$ eragilea aplikatuz, emaitzara irits daiteke:

$$\int \frac{u^3 + 3u}{u^4 + 3u^2 + 2}\, du + \int \frac{dx}{x} = \int \left[\frac{2u}{u^2 + 1} - \frac{u}{u^2 + 2} \right] du + \int \frac{dx}{x} = C \quad \longrightarrow$$

$$\mathrm{Ln}(u^2 + 1) - \frac{1}{2}\,\mathrm{Ln}(u^2 + 2) + \mathrm{Ln}|x| = C \quad \xrightarrow{\exp} \quad \frac{(u^2 + 1)^2 x^2}{u^2 + 2} = A.$$

Azkenik, emaitza u aldagaia y/x gaiaz ordezkatuz lortuko da:

$$\xrightarrow{u=y/x} \quad \frac{(y^2 + x^2)^2}{y^2 + 2x^2} = A \quad \Rightarrow \quad (y^2 + x^2)^2 - A(y^2 + 2x^2) = 0.$$

22. Integra bitez ondoko ekuazio diferentzialak, ordezkapen egokiak erabiliz:

a) $4x^2yy' = 3x(3y^2 + 2) + 2(3y^2 + 2)^3.$

b) $(y^2 - \sin x)dx + y\,\mathrm{tg}x\,dy = 0.$

---

a) ekuazioa:

Garbi dago ezen,

$$3y^2 + 2 = z \longrightarrow 6yy' = z'$$

ordezkapenak Bernouilli-ren ondoko ekuaziora garamatzala:

$$2x^2z'/3 = 3xz + 2z^3 \longrightarrow z' - \frac{9}{2x}z = \frac{3}{x^2}z^3.$$

Orain, $z^{-2} = u$, $-2z^{-3}z' = u'$ aldaketaren bidez,

$$u' + \frac{9}{x}u = -6/x^2$$

ekuazio linealera helduko gara, beronen soluzioa ondokoa delarik:

$$u = e^{-\int 9dx/x}\left[\int(-6/x^2)e^{\int 9dx/x}dx + C\right] = x^{-9}\left[\int -6x^7dx + C\right] \longrightarrow$$

$$u = x^{-9}[-3x^8/4 + C].$$

y aldagaira itzuliz, soluzioa hurrengoa izango da:

$$u = (3y^2 + 2)^{-2} = -3/4x + C/x^9 \longrightarrow 4x^9 = (A - 3x^8)(3y^2 + 2)^2.$$

---

b) ekuazioa:

Kasu honetan, y^2 eta ydy gaiek $y^2 = u$ egitea eskatzen dute,

$$(y^2 - \sin x)dx + ytgxdy = 0 \xrightarrow[ydy=du/2]{y^2=u} (u - \sin x)dx + tgx\ du/2 = 0$$

$$u' + \frac{2}{tgx}u = 2\cos x$$

ekuazio lineala lortuko delarik.

Honen soluzio orokorra ondokoa da:

$$u = e^{-\int 2dx/tgx}\left[\int 2\cos x\ e^{\int 2dx/tgx}\ dx + C\right],$$

$$\int 2dx/tgx = \int \frac{2\cos x}{\sin x}dx = 2Ln|\sin x|;\ -\int 2dx/tgx = -2Ln|\sin x|.$$

Beraz,

$$u = \sin^{-2}x\left[\int 2\cos x\sin^2 x dx + C\right] = \sin^{-2}x\left(\frac{2\sin^3 x}{3} + C\right) \Rightarrow$$

$$y^2 = \frac{2}{3}\sin x + C\sin^{-2}x.$$

23. Froga bedi ezen $y = u\exp(\sqrt{x})$ aldagai-aldaketaren bidez, $4x^2y'' - 4x^{3/2}y' + (x + x^{1/2} - 8)y = 0$ ekuazioa $u'' - 2u/x^2 = 0$ bilakatuko dela, eta kalkula bedi beraren soluzio orokorra.

Lehenik, y bi aldiz deribatu, eta ekuazioan ordezkatuko da:

$$y = u\exp(x^{1/2}) \longrightarrow y' = [u' + \frac{1}{2}ux^{-1/2}]\exp(x^{1/2}) \longrightarrow$$

$$y'' = [u'' + u'x^{-1/2} + \frac{u}{4}(x^{-1} - x^{-3/2})]\exp(x^{1/2}) \Rightarrow$$

$$\Big[4x^2[u'' + u'x^{-1/2} + \frac{u}{4}(x^{-1} - x^{-3/2})] - 4x^{3/2}(u' + \frac{1}{2}ux^{-1/2}) +$$

$$+ (x + x^{1/2} - 8)u\Big]\exp(x^{1/2}) = 0 \Rightarrow u'' - 2u/x^2 = 0.$$

$x^2u'' - 2u = 0$ ekuazioa, Euler-en ekuazio bat da. Kasu honetan egin dezagun aproba $u = x^m$ erako soluzioekin:

$$u = x^m \longrightarrow u' = mx^{m-1} \longrightarrow u'' = m(m-1)x^{m-2} \Rightarrow$$

$$x^2u'' - 2u = 0 \longrightarrow [m(m-1)-2]x^m = 0 \longrightarrow m^2 - m - 2 = 0 \longrightarrow \begin{cases} m = -1, \\ m = 2. \end{cases}$$

$u_1 = x^{-1}$ eta $u_2 = x^2$ soluzioak linealki independenteak dira, ekuazioaren soluzioa $u = Ax^{-1} + Bx^2$ delarik.

Azkenik, $u = y\exp(x^{-1/2})$ eginez, hurrengoa ondorioztatuko da:

$$y\exp(x^{-1/2}) = Ax^{-1} + Bx^2 \Rightarrow y = \exp(\sqrt{x})[Ax^{-1} + Bx^2].$$

24. Kalkula bedi

$$y'^4 - (x + 2y + 1)y'^3 + (x + 2y + 2xy)y'^2 - 2xyy' = 0$$

ekuazio diferentzialaren soluzio orokorra.

---

y'-arekiko ebazgarria den lehen ordenako eta 4garren mailako ekuazioa da. $y' = p$ aldaketa eginez ebatziko dugu:

$$p[p^3 - (x + 2y + 1)p^2 + (x + 2y + 2xy)p - 2xy] = 0.$$

$p = 0$ erro bat da. 3garren mailako ekuaziorako, $-2xy$ gaiaren zatitzaileak diren gaiekin egingo dugu aproba, adibidez $p = x$ eginez. Eta Ruffini-ren metodoa aplikatuko da:

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & -(x + 2y + 1) & (x + 2y + 2xy) & -2xy \\ x & & x & -2xy - x & 2xy \\ \hline & 1 & -2y - 1 & 2y & 0 \end{array}$$

Bigarren mailako ekuaziorako:

$$p = \frac{(2y + 1) \pm (4y^2 + 4y + 1 - 8y)^{1/2}}{2} = \frac{(2y + 1) \pm (2y - 1)}{2} = \begin{cases} 2y \\ 1 \end{cases}$$

Lau erroak kalkulatu ondoren, ekuazio diferentzialaren idazkera hauxe izango da:

$$p(p - x)(p - 2y)(p - 1) = 0, \quad p = y'.$$

Ondorioz, soluzioak hurrengoak izango ditugu:

$$p = 0 \longrightarrow y' = 0 \Rightarrow y - C = 0, \qquad [1]$$

$$p - x = 0 \longrightarrow y' - x = 0 \longrightarrow 2dy - 2xdx = 0 \Rightarrow 2y - x^2 - C = 0, \qquad [2]$$

$$p - 2y = 0 \longrightarrow y' - 2y = 0 \longrightarrow dy/y - 2dx = 0 \Rightarrow y - Ce^{2x} = 0, \qquad [3]$$

$$p - 1 = 0 \longrightarrow y' - 1 = 0 \longrightarrow dy - dx = 0 \Rightarrow y - x - C = 0. \qquad [4]$$

Garbi dago era inplizituan adierazitako [1], [2], [3] eta [4] adierazpenak goi-mailako ekuazioaren soluzio direla. Soluzio orokorra hauen biderkaketa besterik ez da:

$$(y - C)(2y - x^2 - C)(y - Ce^{2x})(y - x - C) = 0.$$

25. a) Aurkitu ondoko kurbei dagokien ekuazio diferentziala:

$$(y - A)^2 = 2Ax. \qquad [1]$$

b) Lortu ekuazio honen kurba integraletako sorta:

$$y = 2x(y' + y'^2). \qquad [2]$$

c) Frogatu $x + 2y = 0$ kurba [1]-aren inguratzaile eta [2]-aren soluzio singular bat dela.

d) Irudikatu [2]-aren kurba integraletariko batzu.

---

a) Lehenik, jatorrizkoa deribatu eta A parametroa ezabatuko dugu:

$$(y - A)^2 = 2Ax \xrightarrow{D} 2(y - A)y' = 2A \longrightarrow A = \frac{yy'}{1 + y'},$$

$$\left(y - \frac{yy'}{1 + y'}\right)^2 = \frac{2xyy'}{1 + y'} \quad \Rightarrow \quad y = 2x(y' + y'^2).$$

b) [2] ekuazioaren integral-sorta [1] delakoa da. Bigarren mailako [2] ekuazioa y-rekiko ebazkarri gisa hartuko da, hots, $y' = p$ (aldagai laguntzailea) egin eta x-ekiko deribatuko dugu:

$$y = 2x(p + p^2) \quad [3] \xrightarrow{D} y' = p = 2(p + p^2) + 2x(1 + 2p)\frac{dp}{dx} \longrightarrow$$

$$0 = (1 + 2p)(p + 2x\frac{dp}{dx}). \qquad [4]$$

Ekuazio honen soluzioak eta [3] adierazpena, [2] ekuazioaren soluzioak dira, era parametrikoan. Soluzio orokorraren kalkulurako, [4] adierazpenean deribatuaren faktorea hartuko dugu:

$$p + 2x\frac{dp}{dx} = 0 \longrightarrow \frac{dx}{x} + \frac{2dp}{p} = 0 \xrightarrow{\int} xp^2 = C.$$

[2] ekuazioaren soluzio orokorra:

Koordenatu parametrikoetan: $\begin{cases} y = 2x(p + p^2), \\ C = xp^2. \end{cases}$

Soluzioa koordenatu cartesiarretan aurkitzeko, p ezabatu behar da:

$$p = (C/x)^{1/2} \longrightarrow y = 2x[(C/x)^{1/2} + C/x] \longrightarrow y - 2C = 2(Cx)^{1/2} \longrightarrow$$

$$(y - 2C)^2 = 4Cx \xrightarrow{2C=A} (y - A)^2 = 2Ax. \qquad [5]$$

---

c) [4] ekuazioaren lehenengo faktorearen anulazioak, [3]-arekin batera, soluzio singular posibletara garamatza:

Koordenatu parametrikoetan : $\begin{cases} y = 2x(p + p^2), \\ 0 = 1 + 2p. \end{cases}$

p ezabatuz: $p = -1/2 \longrightarrow y = 2x[(-1/2) + 1/4] \longrightarrow y = -x/2$ [6]

Froga daitekeenez, [6] funtzioa [2] ekuazioaren soluzioa da.

$$y = -x/2 \longrightarrow y' = -1/2 \xrightarrow{[2]} -x/2 \equiv 2x[(-1/2) + 1/4].$$

[5] soluzio orokorretik ondorioztaezina denez, soluzio singularra da.

Bestalde, [5] integral-sortak inguratzailerik izatekotan, hori A konstantea [5] ekuazioan sartuz eta beraren A-rekiko deribatuan ezabatuz lortuko da.

$$\begin{cases} (y - A)^2 = 2Ax \\ -2(y - A) = 2x \end{cases} \xrightarrow{A=x+y} (y - x - y)^2 = 2(x + y)x \longrightarrow x + 2y = 0.$$

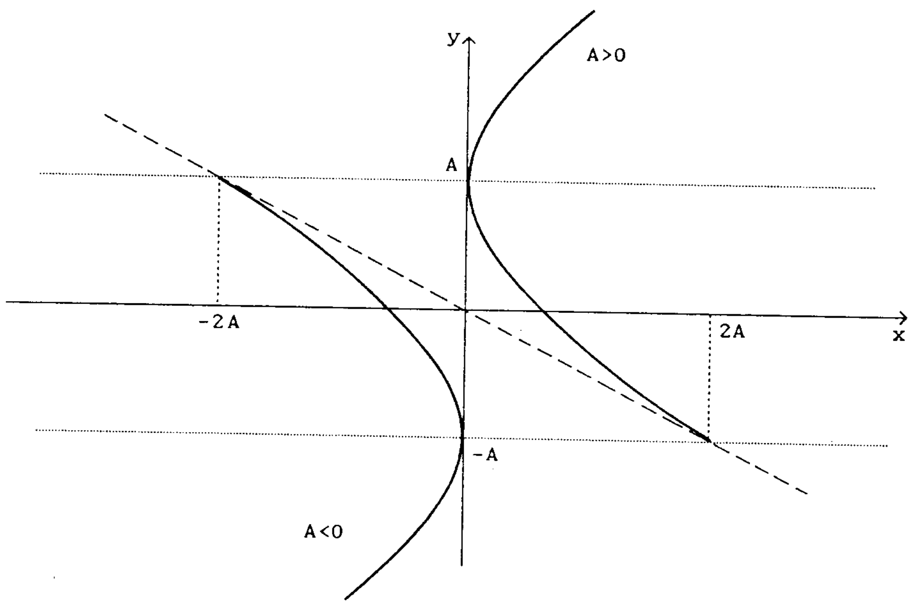
Azken hau [5]-aren inguratzaile bat dela frogatzeko, nahikoa izango da puntu bakoitzean sortako kurba batekiko tangentea dela frogatzea. Sortak zuzenarekin dituen ebakidura-puntuak kalkulatuko ditugu:

$$(y-A)^2 = 2Ax \xrightarrow{x+2y=0} y^2 + 2Ay + A^2 = 0 \longrightarrow y = -A \text{ (bikoitza)}.$$

Kasu honetan, tangentzi puntua $(2A,-A)$ da.

---

d) [5] ekuazioa $y = A$ ardatzeko parabola-familia da, beraren erpinak $(0,A)$ puntuetan OY ardatzarekiko tangenteak direlarik.

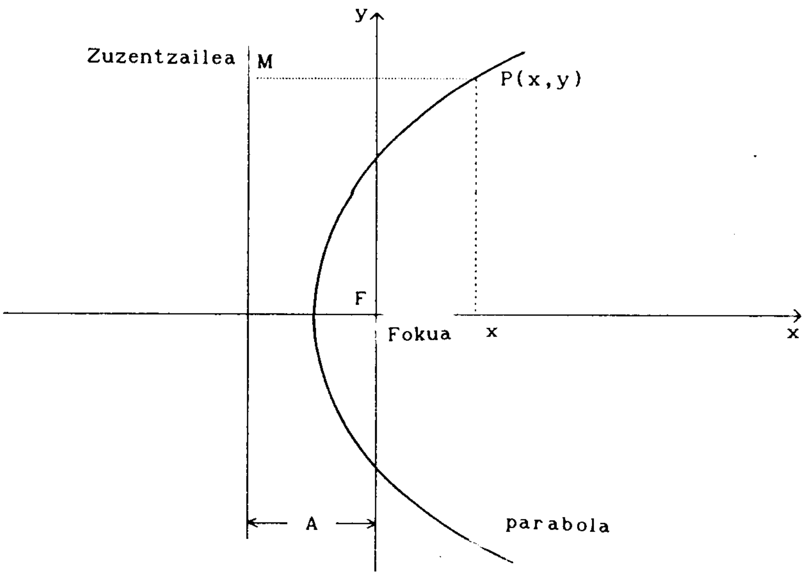


26. Froga bedi ezen

$$yy'^2 + 2xy' - y = 0 \qquad [1]$$

ekuazioa, fokua koordenatu-jatorrian duten OX ardatzeko parabolei asoziaturiko ekuazio diferentziala dela.

Aurki bitez parabola-familiarekiko kurba ortogonalak.



Lehenengo, kurben ekuazioa aurkitu behar da (ikus 27. orrialdeko adibidea).

$$\overline{PM} = \overline{PF} \longrightarrow x + A = \sqrt{x^2 + y^2} \longrightarrow x^2 + 2Ax + A^2 = x^2 + y^2 \Rightarrow$$

$$y^2 - 2Ax = A^2. \qquad [2]$$

Ondoren, [2] adierazpena deribatuz eta A ezabatuz, ekuazio diferentziala lortuko dugu:

$$2yy' - 2A = 0 \longrightarrow A = yy' \Rightarrow y^2 - 2xyy' = (yy')^2 \longrightarrow$$

$$yy'^2 + 2xy' - y = 0. \qquad [3]\equiv[1]$$

[3]-an y' funtzio deribatua -1/y' gaiaz ordezkatuz gero, ibilbide ortogonalen ekuazio diferentziala ondoriozta daiteke.

$$y(-1/y')^2 + 2x(-1/y') - y = 0 \longrightarrow yy'^2 + 2xy' - y = 0. \qquad [4]$$

[3] eta [4] adierazpenak berdinak direnez, parabola-familiari autoortogonal deritzo.

<u>[4] ekuazioaren jatorrizkoa:</u>

[4] ekuazioa x-ekiko ebazgarria den lehen ordena eta bigarren mailako ekuazioa dugu. Ebazteko, x gaia bakandu, y' delakoa p balioaz ordezkatu eta y-rekiko deribatu behar da.

$$2x = [y - yy'^2]/y' \xrightarrow{y'=p} 2x = [y - yp^2]/p$$

$$\xrightarrow{D} 2x' = 2/y' = 2/p = [(1 - p^2 - 2yp\frac{dp}{dy})p - (y - yp^2)\frac{dp}{dy}]/p^2 \longrightarrow$$

$$2p = p - p^3 + (-2yp^2 - y + yp^2)\frac{dp}{dy} = 0 \longrightarrow 0 = (1 + p^2)(p + y\frac{dp}{dy}).$$

Deribatua daukan faktorea anulatuz,

$$p + y\frac{dp}{dy} = 0 \longrightarrow \frac{dp}{p} + \frac{dy}{y} = 0 \xrightarrow{\int} py = C$$

lor daiteke, soluzioa koordenatu cartesiar eta parametrikoetan ondokoa delarik:

$$\left\{\begin{array}{l} yp^2 + 2xp - y = 0 \\ py = C \end{array}\right. \xrightarrow{p=C/y} y^2 - 2Cx = C^2. \qquad [5]\equiv[2]$$

<u>Inguratzaileen eta soluzio singularren azterketa</u>

Kurba C-diskriminatzailea: $\left\{\begin{array}{l} y^2 - 2Cx=C^2 \\ -2x = 2C \end{array}\right. \xrightarrow{C=-x} x^2 + y^2 = 0.$

Beraz, [5] sortak ez du inguratzailerik onartuko.

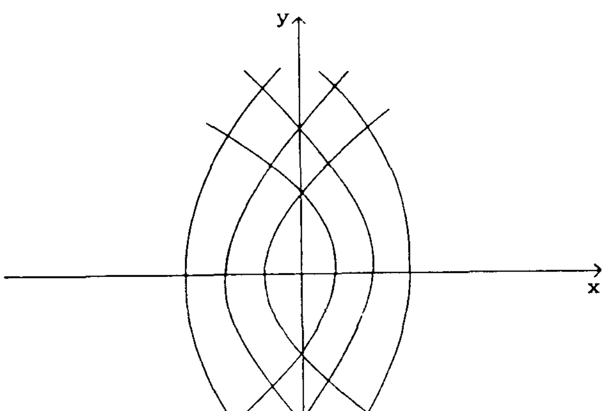
Kurba p-diskriminatzailea: $\left\{\begin{array}{l} yp^2 + 2xp - y = 0 \\ 2yp + 2x = 0 \end{array}\right. \xrightarrow{p=-x/y} x^2 + y^2 = 0.$

Ekuazio diferentzialak ez du soluzio singularrik.

Oharra: ekuazio laguntzaileko $(1 + p^2)$ faktorea anulatu izan bagenu, ekuazio berberera iritsiko ginateke:

$$yp^2 + 2xp - y = 0; \quad p^2 + 1 = 0 \quad \longrightarrow \quad x^2 + y^2 = 0.$$

Ondoko irudian sorta autoortogonaleko zenbait kurba ikus daitezke.



27. a) Froga bedi ezen

$$y = x \pm \frac{1 + y'}{\sqrt{1 + y'^2}} R \qquad [1]$$

ekuazio diferentziala, R erradioa eta zentrua $y = x$ zuzenean duten zirkunferentziei asoziaturiko ekuazio diferentziala dela.

b) Integrazioaren bidez, aurkitu [1]-aren jatorrizkoa koordenatu parametriko eta cartesiarretan.

c) Azter bitez [1]-aren integral-sortarako soluzio singular posibleak eta inguratzaileak.

d) Irudika bedi ekuazioaren kurba integralen zirriborro bat.

---

a) Kurben ekuazioa: $(x - a)^2 + (y - a)^2 = R^2.$ [2]

Deribatuz eta a parametroa ezabatuz, ekuazio diferentziala ondorioztа dezakegu:

$$(x-a)^2 + (y-a)^2 = R^2 \xrightarrow{D} 2(x-a) + 2(y-a)y' = 0 \longrightarrow a = \frac{x + yy'}{1 + y'}.$$

[2] ekuazioan ordezkatuz, hurrengoa dugu:

$$\left(x - \frac{x + yy'}{1 + y'}\right)^2 + \left(y - \frac{x + yy'}{1 + y'}\right)^2 = R^2 \longrightarrow$$

$$(1+y'^2)(y^2-2xy+x^2) = (1+y')^2R^2 \longrightarrow (y-x)^2 = \frac{(1+y')^2R^2}{1+y'^2} \Rightarrow$$

$$y = x \pm \frac{1 + y'}{\sqrt{1 + y'^2}} R.$$

b) Ekuazioa x zein y-rekiko ebatz daiteke. y-rekiko ebatziz gero, $y' \equiv p$ ordezkatu eta x-ekiko deribatu behar da, ondoko ekuaziora iris daitekeelarik:

$$y = x \pm R(1+y')(1+y'^2)^{-1/2} \xrightarrow{y'=p} y = x \pm R(1+p)(1+p^2)^{-1/2} \qquad [3]$$

$$\xrightarrow{D} y' \equiv p = 1 \pm R[(1+p^2)^{-1/2} - p(1+p)(1+p^2)^{-3/2}]\frac{dp}{dx} \longrightarrow$$

$$0 = (1-p) \pm R(1+p^2)^{-3/2}[1 + p^2 - p - p^2]\frac{dp}{dx} \Rightarrow$$

$$0 = (1-p)[1 \pm R(1+p^2)^{-3/2}\frac{dp}{dx}]. \qquad [4]$$

dp/dx gaia duen faktorea anulatuz, honakoa ondorioztatuko da:

$$0 = 1 \pm R(1+p^2)^{-3/2}\frac{dp}{dx} \longrightarrow 0 = dx \pm R(1+p^2)^{-3/2}\,dp \xrightarrow{\int}$$

$$A = x \pm R\int(1+p^2)^{-3/2}\frac{dp}{dx} \xrightarrow{p=tgu} A = x \pm R\int cosudu = x \pm Rsinu \rightarrow$$

$$A = x \pm Rtgu(1+tg^2u)^{-1/2} \xrightarrow{tgu=p} A = x \pm Rp(1+p^2)^{-1/2}. \qquad [5]$$

<u>Ekuazioaren soluzio orokorra:</u>

Koordenatu parametrikoak: $\left\{\begin{array}{l} y = x \pm R(1+p)(1+p^2)^{-1/2}, \\ A = x \pm Rp(1+p^2)^{-1/2}. \end{array}\right.$

p-rekiko ebazteko, ekuazioen arteko kenketa gaiz gai egingo da:

$$y - A = \pm R(1+p^2)^{-1/2} \longrightarrow 1 + p^2 = \frac{R^2}{(y-A)^2} \longrightarrow p = \frac{[R^2-(y-A)^2]^{1/2}}{y-A}.$$

[5]-ean ordezkatu ondoren, soluzioa koordenatu cartesiarretan lor daiteke:

$$A = x \pm R\,\frac{[R^2 - (y - A)^2]^{1/2}}{y - A}\,\frac{y - A}{R} \longrightarrow (x - A)^2 + (y - A)^2 = R^2.$$

c) Soluzio singularrak aztertzeko, [4] ekuazioaren lehenengo faktorearen anulazioa eta [3] ekuazioa kontutan hartu behar dira:

Koordenatu parametrikoak: $\left\{\begin{array}{l} y = x \pm R(1 + p)(1 + p^2)^{-1/2}, \\ 0 = 1 - p, \end{array}\right. \xrightarrow{p=1}$

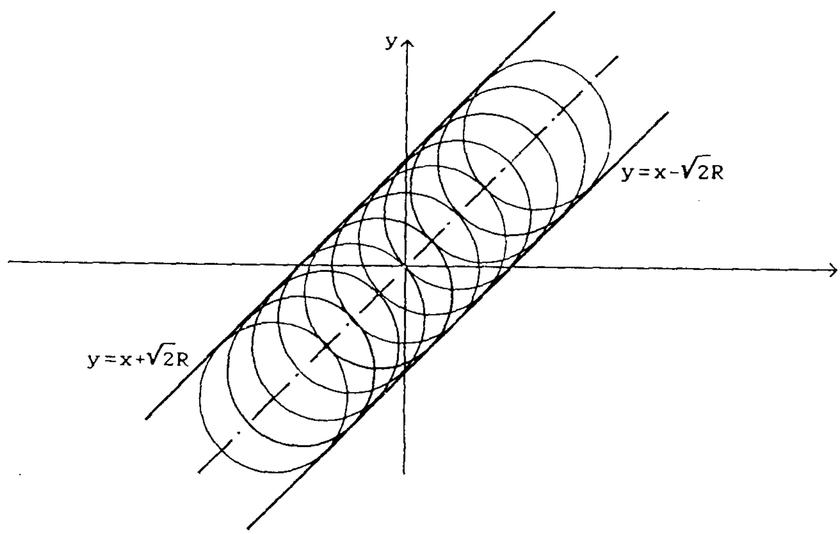
Koordenatu cartesiarrak: $y = x \pm \sqrt{2}R.$ [6]

Beraz, [1] ekuazioa betetzen dutenez, soluzio dira, eta [2] soluzio orokorretik ondorioztaezinak direnez, singularrak ditugu.

Bestalde, [6]-ko kurbak (zirkunferentziekiko zuzen tangenteak eta $y = x$ zuzenarekiko paraleloak) [2] integral-sortaren inguratzaileak dira. [2] ekuazioa a-rekiko deribatuz, eta a ezabatuz hauxe dugu:

$$(x-a)^2 + (y-a)^2 = R^2 \longrightarrow -2(x-a) - 2(y-a) = 0 \longrightarrow a = (x+y)/2 \Rightarrow$$

$$[x-(x+y)/2]^2 + [y-(x+y)/2]^2 = 0 \longrightarrow (y-x)^2 = 2R^2 \longrightarrow y = x \pm \sqrt{2}R.$$



28. Frogatu $y_1 = x$, $y_2 = xLnx$, $y_3 = xLn^2x$ funtzioak Euler-en

$$x^3y''' + xy' - y = 0 \qquad [1]$$

ekuazioaren soluzio linealki independenteak direla.
Aurkitu ondoko ekuazioaren soluzio orokorra,

$$x^3y''' + xy' - y = 3x^4, \qquad [2]$$

$Y = x^4/9$ delakoa [2]-aren soluzio bat dela jakinik.

E: y_1, y_2 eta y_3 soluzioak direla frogatzeko, [1] ekuazioa betetzen dutela ikusiko dugu.

$$y_1 = x \longrightarrow y_1' = 1 \longrightarrow y_1'' = y_1''' = 0 \xrightarrow{[1]} x - x \equiv 0,$$

$$y_2 = xLnx \longrightarrow y_2' = Lnx + 1 \longrightarrow y_2'' = 1/x \longrightarrow y_2''' = -1/x^2$$

$$\xrightarrow{[1]} \quad x^3(-1/x^2) + x(Lnx + 1) - xLnx \equiv 0,$$

$$y_3 = xLn^2x \longrightarrow y_3' = Ln^2x + 2Lnx \longrightarrow y_3'' = 2(Lnx + 1)/x \longrightarrow$$

$$y_3''' = -2Lnx/x^2 \xrightarrow{[1]} x^3(-2Lnx/x^2) + x(Ln^2x + 2Lnx) - xLn^2x \equiv 0.$$

Orain, soluzio horiek linealki independenteak dira, baldin eta soilik baldin, beraiek osoturiko wronskiarra ez-nulua bada.

$$W[y_1,y_2,y_3] = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ y'_1 & y'_2 & y'_3 \\ y''_1 & y''_2 & y''_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & xLnx & xLn^2x \\ 1 & Lnx + 1 & Ln^2x + 2Lnx \\ 0 & 1/x & 2(Lnx + 1)/x \end{vmatrix} =$$

$$= 2(Lnx + 1)^2 + Ln^2x - 2Ln^2x - 2Lnx - Ln^2x - 2Lnx = 2 \equiv 0.$$

Ondorioz, y_1, y_2 eta y_3 funtzioek [1]-aren oinarrizko sistema bat osotuko dute.

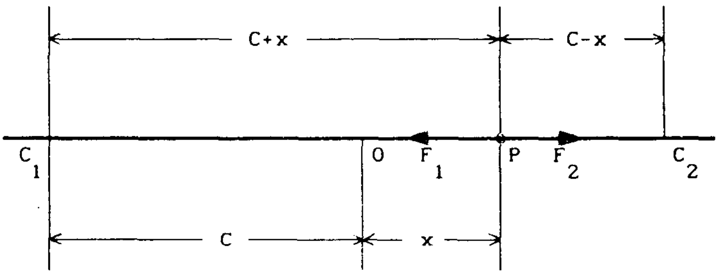
[1] ekuazioaren soluzio orokorra ondoko konbinazio lineala da:

$$y_h = x(A + BLnx + CLn^2x). \qquad [3]$$

Eta bukatzeko, [2] ekuazioaren soluzio orokorra kalkulatzeko nahikoa da [3]-ari [2]-aren soluzio partikular bat batzeaz:

$$y = x(A + BLnx + CLn^2x) + x^4/9.$$

29. m masako puntu material bat C_1 eta C_2 bi zentruz erakarria izango da, zentruen arteko distantzia 2C izanik eta indarrak beraien arteko distantziarekiko proportzionalak izanik. Aurki bedi higiduraren legea, hasierako unean puntua geldirik eta zentruen arteko erdiko puntutik a distantziara dagoela jakinik.



Bi zentruen arteko erdiko puntua erreferentzi jatorritzat hartuko da. Newton-en legearen arabera, ondokoa dugu:

$$mx'' = F_2 - F_1 \quad \text{(norantza positiboa eskuinerantz).}$$

Bestalde, enuntziatuak dioenez: $F_1 = k(c + x)$, $F_2 = k(c - x)$.

Higiduraren legearen ekuazio diferentziala hurrengoa da:

$$mx'' = k(c - x) - k(c + x) \longrightarrow mx'' + 2kx = 0.$$

Ekuazio karakteristikoa eta honen erroak

$$mr^2 + 2k = 0 \longrightarrow r = \pm (2k/m)^{1/2} i$$

dira, dagokien soluzio orokorra ondokoa delarik:

$$x(t) = A\cos(2k/m)^{1/2}t + B\sin(2k/m)^{1/2}t.$$

Hautazko konstanteak kalkulatzeko, hastapen-baldintzak aplikatuko ditugu.

$$x'(t) = -A(2k/m)^{1/2}\sin(2k/m)^{1/2}t + B(2k/m)^{1/2}\cos(2k/m)^{1/2}t.$$

Hasierako posizioa: $x(0) = a \longrightarrow a = A.$

Hasierako abiadura: $x'(0) = 0 \longrightarrow 0 = B(2k/m)^{1/2} \longrightarrow B = 0.$

Ondorioz, higiduraren legea

$$x(t) = a\cos\sqrt{2k/m}\ t$$

da.

---

30. Koefiziente indeterminatuen metodoa aplikatuz, kalkula bitez hastapen-baldintzatako ekuazio hauen soluzioak:

a) $x''(t) - 4x'(t) + 4x(t) = e^t(1 + te^t), \quad x(0) = x'(0) = 0.$

b) $x''' - 6x'' + 11x' - 6x = e^{2t} - 6t^2 + 4t - 3,$

$x(0) = 4; \; x'(0) = x''(0) = 2.$

---

a) Ekuazio homogeno asoziatuaren soluzio orokorra:

$$r^2 - 4r + 4 = 0 \longrightarrow r = 2 \text{ (bikoitza)} \Rightarrow x_h = (C_1 t + C_2)e^{2t}.$$

Ekuazio osotuaren soluzio partikularra:

f(t)-ren arabera, aproba egiteko, ondoko soluzioa hartuko da:

$$f(t) = e^t + te^{2t} \longrightarrow X = Ae^t + (Bt + C)e^{2t}.$$

x_h-ren soluzioekin ez nahasteko, beste hau aukeratuko dugu:

$$X = Ae^t + t^2(Bt + C)e^{2t} = Ae^t + (Bt^3 + Ct^2)e^{2t},$$

$$X' = Ae^t + [2Bt^3 + (3B + 2C)t^2 + 2Ct]e^{2t},$$

$$X'' = Ae^t + [4Bt^3 + (12B + 4C)t^2 + (6B + 8C)t + 2C]e^{2t}.$$

Ekuazioan ordezkatu eta koefizienteak identifikatuz:

$$X'' - 4X' + 4X = Ae^t + 2Ce^{2t} + 6Bte^{2t} \equiv e^t + te^{2t} \quad \Rightarrow$$

$$A = 1, \quad B = \frac{1}{6}, \quad C = 0$$

lortuko da.

Horrela, soluzio partikularra hurrengoa dugu:

$$X = e^t + t^3e^{2t}/6.$$

Ondorioz, ekuazio osotuaren soluzio orokorra ondoko hau izango da:

$$x(t) = x_h + X = (C_1t + C_2)e^{2t} + e^t + t^3e^{2t}/6 \quad \longrightarrow$$

$$x(t) = (t^3/6 + C_1t + C_2)e^{2t} + e^t.$$

Soluzio partikularra. Hastapen-baldintzetatiko ondorioa:

$$x(0) = 0 \longrightarrow 0 = C_2 + 1 \longrightarrow C_2 = -1,$$

$$x'(t) = (t^2/2 + C_1 + t^3/3 + 2C_1t + 2C_2)e^{2t} + e^t \longrightarrow$$

$$x'(0) = 0 \longrightarrow 0 = C_1 + 2C_2 + 1 \longrightarrow C_1 = 1 \qquad \Rightarrow$$

$$x(t) = (t^3/6 + t - 1)e^{2t} + e^t.$$

---

b) ekuazioa: $x''' - 6x'' + 11x' - 6x = e^{2t} - 6t^2 + 4t - 3.$

Homogenoaren soluzioa:

Ekuazio karakteristikoa: $r^3 - 6r^2 + 11r - 6 = 0.$

Honen erroak (-6 zenbakiaren zatitzaileak), hots, $r = 1$, $r = 2$, r = 3 dira, eta Ruffini-ren erregelaren bidez kalkula ditzakegu Hau da:

	1	-6	11	-6
1		1	-5	6
	1	-5	6	0
2		2	-6	
	1	-3	0	
3		3		
	1	0		

Erro erreal bakun hauei dagokien soluzioa:

$$x_h = C_1e^t + C_2e^{2t} + C_3e^{3t}.$$

<u>Ekuazio osotuaren soluzio partikularra:</u>

$$f(t) = e^{2t} - 6t^2 + 4t - 3 \longrightarrow X = Ate^{2t} + Bt^2 + Ct + D,$$

non ekuazio homogenoaren soluziorik ez izateko, Ae^{2t} gaiaren ordez Ate^{2t} delakoa idatzi baita. X funtzioa zehazteko koefizienteen identifikazioaren bidez, ekuazio osotuan ordezkatuko dugu. Era honetan:

$$X = Ate^{2t} + Bt^2 + Ct + D \longrightarrow X' = A(2t + 1)e^{2t} + 2Bt + C \longrightarrow$$

$$X'' = A(4t + 4)e^{2t} + 2B \longrightarrow X''' = A(8t + 12)e^{2t} \Rightarrow$$

$$X''' - 6X'' + 11X' - 6X = A[8t + 12 - 24t - 24 + 22t + 11 - 6t]e^{2t}$$

$$- 6Bt^2 + (22B - 6C)t - 12B + 11C - 6D \equiv e^{2t} - 6t^2 + 4t - 3 \quad \longrightarrow$$

$$-A = 1; \quad -6B = -6; \quad 22B - 6C = 4; \quad -12B + 11C - 6D = -3 \quad \longrightarrow$$

$$A = -1, \quad B = 1, \quad C = 3, \quad D = 4 \quad \Rightarrow \quad X(t) = -te^{2t} + t^2 + 3t + 4.$$

<u>Ekuazio osoturaren soluzio orokorra:</u>

$$x = x_h + X \quad \Rightarrow \quad x(t) = C_1e^t + (C_2 - t)e^{2t} + C_3e^{3t} + t^2 + 3t + 4.$$

<u>Soluzio partikularra:</u>

Hasteko 1. eta 2. ordenako deribatuak kalkulatu behar dira:

$$x' = C_1e^t + (2C_2 - 1 - 2t)e^{2t} + 3C_3e^{3t} + 2t + 3,$$

$$x'' = C_1e^t + (4C_2 - 4 - 4t)e^{2t} + 9C_3e^{3t} + 2.$$

Gainera, problemaren baldintzak kontutan hartuko ditugu:

$$\begin{cases} x(0) = 4 \longrightarrow 4 = C_1 + C_2 + C_3 + 4, \\ x'(0) = 2 \longrightarrow 2 = C_1 + 2C_2 + 3C_3 + 2 \rightarrow C_1 = 2, \; C_2 = -4, \; C_3 = 2, \\ x''(0) = 2 \longrightarrow 2 = C_1 + 4C_2 + 9C_3 - 2. \end{cases}$$

Balio hauek soluzio orokorrean ordezkatuz, ondokoa lortuko da:

$$x(t) = 2e^t - (4 + t)e^{2t} + 2e^{3t} + t^2 + 3t + 4.$$

31. Kalkula bitez ekuazio diferentzial hauen jatorrizkoak:

a) $$y^{V} + 3y''' - 4y' = 6\sin x - 21e^{-x}.$$

b) $$y^{IV} - y = xe^{x} + \cos x.$$

---

a) Homogeno asoziatuaren soluzioa:

Ekuazio karakteristikoa:

$$r^5 + 3r^3 - 4r = 0 \rightarrow r(r^4 + 3r^2 - 4) = 0 \rightarrow r = 0, \quad r^4 + 3r^2 - 4 = 0.$$

Ekuazio bikoadraturako: $$r^2 = \frac{-3 \pm 5}{2} = \begin{cases} 1, \\ -4. \end{cases}$$

Bost erro errealak hauexek dira: $r = 0$, $r = -1$, $r = 1$, $r = \pm 2i$.

Dagokien ekuazio homogenoaren soluzioa ondokoa da:

$$y_h = C_1 + C_2 e^{-x} + C_3 e^{x} + C_4 \cos 2x + C_5 \sin 2x.$$

Ekuazio osotuaren soluzio partikularra:

Frogarako soluzioa:

$$f(x) = 6\sin x - 10e^{-x} \longrightarrow Y = A\cos x + Bxe^{-x}.$$

Ekuazioan soilik ordena bakoitiko deribatuak daudenez, eta Acosx ez dagoenez y_h-n edukita, soluzio partikularrean (Acosx + Bsinx) adierazpenaren ordez Acosx idatziko dugu. Halaber, e^{-x} delakoa

y_h-ren soluzio denez, Be^{-x} gaia-en ordez Bxe^{-x} gaia jarri dugu, era horretan koefizienteen identifikazioa ahalbidetuko delarik.

Y delakoa bost aldiz deribatu eta ekuazioan ordezkatuko da:

$$Y = A\cos x + Bxe^{-x} \longrightarrow Y' = -A\sin x + B(1 - x)e^{-x} \longrightarrow$$

$$Y'' = -A\cos x + B(x - 2)e^{-x} \longrightarrow Y''' = A\sin x + B(3 - x)e^{-x} \longrightarrow$$

$$Y^{IV} = A\cos x + B(x - 4)e^{-x} \longrightarrow Y^{V} = -A\sin x + B(5 - x)e^{-x} \Rightarrow$$

$$Y^{V} + 3Y''' - 4Y' = -A\sin x + B(5 - x)e^{-x} + 3A\sin x + 3B(3 - x)e^{-x} +$$

$$+ 4A\sin x - 4B(1 - x)e^{-x} = 6A\sin x + 7Be^{-x} \equiv 6\sin x - 21e^{-x}.$$

Koefizienteak identifikatuz, ondokoa dugu:

$$6A = 6, \quad 7B = -21 \longrightarrow A = 1,\ B = -3 \Rightarrow Y = \cos x - 3xe^{-x}.$$

Hortik, $y = y_h + Y$ soluzio orokorraren ekuazioa hurrengoa da:

$$y = C_1 + (C_2 - 3x)e^{-x} + C_3e^{x} + 7C_4\cos 2x + C_5\sin 2x + \cos x.$$

---

b) ekuazioa: $\qquad y^{IV} - y = xe^{x} + \cos x.$

Ekuazio karakteristikoa eta bere erroak ondokoak dira:

$$r^4 - 1 = 0 \longrightarrow (r^2 - 1)(r^2 + 1) = 0 \Rightarrow r = 1, \quad r = -1, \quad r = \pm\ i.$$

Ekuazio homogenoaren soluzioa:

$$y_h = C_1e^{x} + C_2e^{-x} + C_3\cos x + C_4\sin x.$$

Aproba egiteko soluzio partikularra:

$$f(x) = xe^x + \cos x \;\longrightarrow\; Y = x(Ax + B)e^x + x(C\cos x + D\sin x).$$

Kasu hauetan, e^x eta cosx funtzioak ekuazio homogenoaren soluzio dira. Beraz, normalean erabiliko diren $(Ax + B)e^x$ eta $(C\cos x + D\sin x)$ adierazpenak x aldagaiaz biderkatu behar dira.

Y delakoaren lehenengo lau ordenetako deribatuak kalkulatuko dira:

$$Y = (Ax^2 + Bx)e^x + Cx\cos x + Dx\sin x \quad\longrightarrow$$

$$Y' = [Ax^2 + (B+2A)x + B]e^x + x(-C\sin x + D\cos x) + C\cos x + D\sin x,$$

$$Y'' = [Ax^2 + (B+4A)x + 2B + 2A]e^x - x(C\cos x+D\sin x) - 2C\cos x + 2D\sin x,$$

$$Y''' = [Ax^2 + (B+6A)x + 2B + 6A]e^x + x(C\sin x-D\cos x) - 3C\cos x - 3D\sin x,$$

$$Y^{IV} = [Ax^2 + (B+8A)x + 4B + 12A]e^x + x(C\cos x+D\sin x) + 4C\sin x - 4D\cos x.$$

Y hori aurreko ekuazioan ordezkatuz, eta koefizienteak berdinduz, hauxe dugu:

$$Y^{IV} - Y = (8Ax + 4B + 12A)e^x + 4C\text{sien}x - 4D\cos x \equiv xe^x + \cos x \;\longrightarrow$$

$$8A = 1, \quad 4B + 12A = 0, \quad 4C = 0, \quad -4D = 1 \quad\Rightarrow$$

$$A = 1/8, \quad B = -3/8, \quad C = 0, \quad D = -1/4 \quad\Rightarrow$$

$$Y = \frac{(x^2 - 3x)e^x}{8} - \frac{x\sin x}{4}.$$

Soluzio orokorra:

Ekuazio homogeno asoziatuaren y_h soluzioari soluzio partikularra batuko zaio:

$$y = C_1e^x + C_2e^{-x} + C_3\cos x + C_4\sin x + \frac{(x^2 - 3x)e^x}{8} - \frac{x\sin x}{4}.$$

32. **a) Froga bedi ezen**

$$y_1 = x\,, \qquad y_2 = \cos x\,, \qquad y_3 = \sin x$$

soluzioek hirugarren ordenako ekuazio diferentzial batetarako oinarrizko sistema osotuko dutela.

b) Determina bedi aurreko ekuazio diferentziala.

c) Gara bedi parametroen aldakuntzaren metodoa,

$$xy''' - y'' + xy' - y = 2x^3 \qquad [1]$$

ekuazioaren soluzio orokorra aurkitzeko.

---

a) Lehenik wronskiarra ez-nulua dela, hots, soluzioak linealki independenteak direla frogatuko dugu.

$$W[x,\cos x,\sin x] = \begin{vmatrix} x & \cos x & \sin x \\ 1 & -\sin x & \cos x \\ 0 & -\cos x & -\sin x \end{vmatrix} = x\sin^2 x + x\cos^2 x = x.$$

---

b) $y = Ax + B\cos x + C\sin x$ konbinazio linealeko konstanteak, deribatuz ezaba ditzakegu.

$$y = Ax + B\cos x + C\sin x \xrightarrow{D} y' = A - B\sin x + C\cos x \xrightarrow{D}$$

$$y'' = -B\cos x - C\sin x \xrightarrow{D} y''' = B\sin x - C\cos x \Rightarrow$$

$$y + y'' = Ax; \quad y' + y''' = A \longrightarrow y + y'' = (y' + y''')x \Rightarrow$$

$$xy''' - y'' + xy' - y = 0. \qquad [2]$$

c) [2] ekuazioa [1] delakoari asoziaturiko ekuazio homogenoa da. Parametroen aldakuntza-metodoa aplikatzeko, [2]-aren soluzioko konstanteak funtzio laguntzaileez ordezkatuko dira:

$$y_h = Ax + B\cos x + C\sin x \xrightarrow{\text{sol}[1]} y = x\,L_1 + \cos x\,L_2 + \sin x\,L_3. \quad [3]$$

L_1, L_2 eta L_3 funtzioak determinatzeko, y aldagaia [1] ekuazio osotuaren soluzio izan behar da, eta lehenengo bi deribatuek ondoko baldintzak bete beharko dituzte:

$$y' = L_1 - \sin x\,L_2 + \cos x\,L_3 + x\,L_1' + \cos x\,L_2' + \sin x\,L_3'.$$

Lehenengo baldintza: $\quad x\,L_1' + \cos x\,L_2' + \sin x\,L_3' = 0. \quad [4]$

$y' = L_1 - \sin x\,L_2 + \cos x\,L_3$ erlazioa berriro deribatuz,

$y'' = -\cos x\,L_2 - \sin x\,L_3 + L_1' - \sin x\,L_2' + \cos x\,L_3'$ dugu.

Bigarren baldintza: $\quad L_1' - \sin x\,L_2' + \cos x\,L_3' = 0. \quad [5]$

Orain, $y'' = -\cos x\,L_2 - \sin x\,L_3$ deribatuz,

$y''' = \sin x\,L_2 - \cos x\,L_3 - \cos x\,L_2' - \sin x\,L_3'$ lor dezakegu.

[3] delakoa eta beraren deribatuak [1]-ean ordezkatuz hauxe dugu:

$$x(\sin x\,L_2 - \cos x\,L_3 - \cos x\,L_2' - \sin x\,L_3') - (-\cos x\,L_2 - \sin x\,L_3) +$$

$$+ x(L_1 - \sin x\,L_2 + \cos x\,L_3) - (x\,L_1 + \cos x\,L_2 + \sin x\,L_3) = 2x^3.$$

y_h delakoa homogenoaren soluzioa denez, L funtzioak dituzten gaiak nuluak izatea ondorioztatuko da. Ondorioz,

$$-x\cos x\, L'_2 - x\sin x\, L'_3 = 2x^3 \longrightarrow -\cos x\, L'_2 - \sin x\, L'_3 = 2x^2. \qquad [6]$$

[4], [5] eta [6] ekuazioek sistema ez-homogeno bateragarria determinatzen dute, L' funtzioen koefizienteetako determinantea, y_1, y_2 eta y_3 soluzioen wronskiarra (W = x) besterik ez baita.

$$x\, L'_1 + \cos x\, L'_2 + \sin x\, L'_3 = 0, \qquad [4]$$

$$L'_1 - \sin x\, L'_2 + \cos x\, L'_3 = 0, \qquad [5]$$

$$- \cos x\, L'_2 - \sin x\, L'_3 = 2x^2. \qquad [6]$$

Cramer-en erregelaren bidez ebatziz, hurrengoa lor daiteke:

$$L'_1 = \frac{1}{W}\begin{vmatrix} 0 & \cos x & \sin x \\ 0 & -\sin x & \cos x \\ 2x^2 & -\cos x & -\sin x \end{vmatrix} = \frac{1}{x}(\cos^2 x + \sin^2 x)2x^2 = 2x,$$

$$L'_2 = \frac{1}{W}\begin{vmatrix} x & 0 & \sin x \\ 1 & 0 & \cos x \\ 0 & 2x^2 & -\sin x \end{vmatrix} = -\frac{1}{x}(x\cos x - \sin x)2x^2 = 2x(\sin x - x\cos x),$$

$$L'_3 = \frac{1}{W}\begin{vmatrix} x & \cos x & 0 \\ 1 & -\sin x & 0 \\ 0 & -\cos x & 2x^2 \end{vmatrix} = -\frac{1}{x}(x\sin x + \cos x)2x^2 = -2x(x\sin x + \cos x).$$

Behin funtzio laguntzaileen deribatuak ezagututa, $\int$ eragilea eta zatikako integrazioa aplikatuko dira:

$$L_1 = \int L'_1 dx = \int 2xdx = x^2 + C_1 ,$$

$$L_2 = \int L'_2 dx = \int 2x(\sin x - x\cos x)dx = -2x^2\sin x - 6x\cos x + 6\sin x + C_2 ,$$

$$L_3 = \int L'_3 dx = -\int 2x(x\sin x - \cos x)dx = 2x^2\cos x - 6x\sin x - 6\cos x + C_3 .$$

L funtzio hauek [3] soluzioan ordezkatuko dira:

$$y = (x^2 + C_1)x + (-2x^2\sin x - 6x\cos x + 6\sin x + C_2)\cos x + (2x^2\cos x -$$

$$- 6x\sin x - 6\cos x + C_3)\sin x = C_1x + C_2\cos x + C_3\sin x + x^3 - 6x.$$

Azkenik, gaiak x-ekiko ordenatuz, hurrengoa ondoriozta daiteke:

$$y = (C_1 - 6)x + C_2\cos x + C_3\sin x + x^3 \Rightarrow \; y = Ax + B\cos x + C\sin x + x^3.$$

Oharra: Garbi dago $Y = x^3$ delakoa [1] ekuazioaren soluzio partikular bat dela. Ekuazio osotuaren soluzio partikulartzat hirugarren mailako polinomio bat hartu izan bagenu, problema erraz ebatziko genukeen.

33. Ebatz bitez hurrengo ekuazio diferetzialak:

a) $y'' + y = \dfrac{1}{\cos x}$, b) $y'' - 3y' + 2y = - \dfrac{e^{2x}}{e^{x} + 1}$.

---

a) ekuazioa.- Homogeno asoziatuaren soluzioa hauxe da:

$$r^2 + 1 = 0 \longrightarrow r = \pm\, i \quad \Rightarrow \quad y = C_1 \cos x + C_2 \sin x.$$

Soluzio partikularraren adierazpena ezezaguna denez, ekuazio osotua ebazteko ezin izango dugu indeterminaturiko koefizienteen metodoa aplikatu. Parametroen aldakuntzaren metodoaren bidez, soluzio orokor modura hurrengo hau hartuko da,

$$y = \cos x \, L_1(x) + \sin x \, L_2(x),$$

non L'_1 eta L'_2 direlakoek ondoko sistema beteko duten:

$$\cos x \, L'_1(x) + \sin x \, L'_2(x) = 0 \ , \qquad -\sin x \, L'_1(x) + \cos x \, L'_2(x) = 1/\cos x.$$

Sistemaren soluzioak: $L'_1(x) = -\mathrm{tg}\, x$, $L'_2(x) = 1.$

$\int$ eragilea aplikatuz, eta

$$L_1(x) = -\int \mathrm{tg}\, x \, dx = \mathrm{Ln}|\cos x| + A \ , \qquad L_2(x) = \int dx = x + B$$

balioak kalkulatuz, eta soluzio orokorra ondoriozta daiteke:

$$y = \cos x \, L_1(x) + \sin x \, L_2(x) = \cos x \, (\mathrm{Ln}|\cos x| + A) + \sin x \, (x + B) \Rightarrow$$

$$y = A\cos x + B\sin x + x\sin x + \cos x \, \mathrm{Ln}|\cos x| .$$

b) ekuazioa.- Homogeno asoziatuaren soluzioa hauxe da:

$r^2 - 3r + 2 = 0 \longrightarrow r = 1;\ r = 2 \quad \Rightarrow \quad y_h = C_1e^x + C_2e^{2x}.$

Aurreko kasuan bezala, parametroen aldakuntzaren metodoa aplikatuko da, soluzio orokorrerako hurrengoa izango delarik:

$$y = e^xL_1(x) + e^{2x}L_2(x).$$

L'_1 eta L'_2 horiek ondoko sistema bateragarriaren soluzioak dira:

$$e^xL'_1(x) + e^{2x}L'_2(x) = 0, \qquad e^xL'_1(x) + 2e^{2x}L'_2(x) = \frac{-e^{2x}}{e^x + 1} \quad \longrightarrow$$

$$L'_1(x) = \frac{e^x}{e^x + 1}, \qquad L'_2(x) = \frac{-1}{e^x + 1}.$$

Hauen jatorrizkoak hurrengoak ditugu:

$$L_1(x) = \int \frac{e^x dx}{e^x + 1} = \mathrm{Ln}|e^x + 1| + A,$$

$$L_2(x) = \int \frac{-dx}{e^x + 1}\ ;\ e^x + 1 = t \longrightarrow e^x dx = dt \longrightarrow dx = dt/(t-1) \Rightarrow$$

$$L_2(x) = \int \frac{-dt}{t(t-1)} = \int \left[\frac{1}{t} - \frac{1}{t-1}\right]dt = \mathrm{Ln}\left|\frac{t}{t-1}\right| + B \xrightarrow{t = e^x + 1}$$

$$L_2(x) = \mathrm{Ln}|1 + e^{-x}| + B.$$

Era honetan, lortuko den soluzio orokorra ondokoa da:

$$y = e^xL_1(x) + e^{2x}L_2(x) = Ae^x + Be^{2x} + e^x\mathrm{Ln}(e^x + 1) + e^{2x}\mathrm{Ln}(1 + e^{-x}).$$

34. Fluido biskotsu uniforme batetan murgildutako a erradiodun esfera txiki baten gaineko arrastrea determinatzeko,

$$\rho^3 \frac{d^4f}{d\rho^4} + 8\rho^2 \frac{d^3f}{d\rho^3} + 8\rho \frac{d^2f}{d\rho^2} - 8 \frac{df}{d\rho} = 0 \ , \quad \rho > a$$

ekuazio diferentziala ebatzi behar da, non ρ delakoa esferaren zentrutik neurturiko distantzia den. Lor bedi ekuazioaren soluzio orokorra.

Aurrekoa, Euler-en ekuazio homogeno bat da, zeinetarako $f(\rho) = \rho^m$ erako soluzio partikularrak frogatuko diren.

$$f(\rho) = \rho^m \xrightarrow{D} f'(\rho) = m\rho^{m-1} \xrightarrow{D} f''(\rho) = m(m-1)\rho^{m-2} \xrightarrow{D}$$

$$f'''(\rho) = m(m-1)(m-2)\rho^{m-3} \xrightarrow{D} f^{IV}(\rho) = m(m-1)(m-2)(m-3)\rho^{m-4}.$$

Ekuazio diferetzialean ordezkatu ondoren, hurrengoa lor daiteke:

$$\rho^3 m(m-1)(m-2)(m-3)\rho^{m-4} + 8\rho^2 m(m-1)(m-2)\rho^{m-3} + 8\rho m(m-1)\rho^{m-2} - 8m\rho^{m-1}$$

$$= \rho^{m-1}\left(m^4 + 2m^3 - 5m^2 - 8m\right) = 0 \xrightarrow{\forall\rho} m(m^3 + 2m^2 - 5m - 8) = 0.$$

Ekuazio honen erroak: $m = 0$, $m = 2$, $m = -1$, $m = -3$.

Hauei hurrengo soluzio independenteak dagozkie:

$$f_1(\rho) = 1 \ , \quad f_2(\rho) = \rho^2 \ , \quad f_3(\rho) = \rho^{-1} \ , \quad f_4(\rho) = \rho^{-3}.$$

Beraz, ekuazioaren soluzio orokorra ondokoa izango da:

$$f(\rho) = C_1 + C_2\, \rho^2 + C_3\, \rho^{-1} + C_4\, \rho^{-3}.$$

35. Ebatz bitez ondoko ekuazio diferentzialak:

a) $x^2y'' - 2y = x^4\cos x.$

b) $(2x + 3)^3y''' - (16x + 24)y' + 32y = 32[\mathrm{Ln}(2x + 3) + 2].$

---

a) Euler-en bigarren ordenako ekuazio diferentziala da:

$$a_0(ax+b)^n y^{(n)} + a_1(ax+b)^{n-1}y^{(n-1)} + \ldots\ldots + a_{n-1}(ax+b)y' + a_n y = f(x).$$

Kasu honetan $a = 1$ eta $b = 0$ dira. $x = e^t$ ordezkaketaren bidez, koefiziente konstanteetako ekuazio bilakatuko da:

$$x = e^t \longleftrightarrow t = \mathrm{Ln}x, \quad x > 0 \longrightarrow dy/dx = \frac{dy/dt}{dx/dt} = e^{-t}dy/dt \xrightarrow{D}$$

$$(d^2y/dx^2)e^t = e^{-t}(d^2y/dt^2 - dy/dt) \rightarrow d^2y/dx^2 = e^{-2t}(d^2y/dt^2 - dy/dt).$$

Baio hau, a-ren ekuazio homogeno asoziatuan ordezkatuz,

$$x^2y'' - 2y = 0 \quad [1] \longrightarrow e^{2t}e^{-2t}(d^2y/dt^2 - dy/dt) - 2y = 0 \longrightarrow$$

$$d^2y/dt^2 - dy/dt - 2y = 0$$

ekuazioa lortuko da, beraren soluzioa hurrengoa delarik:

$$r^2 - r - 2 = 0 \longrightarrow r = 2 \ ; \ r = -1 \Rightarrow y_h = Ae^{2t} + Be^{-t}.$$

x aldagaira itzuliz, [1]-erako ondoko soluzioa lor daiteke:

$$y_h = Ae^{2t} + Be^{-t} \xrightarrow{t=\mathrm{Ln}x} y_h = Ax^2 + Bx^{-1}.$$

Oharra: [1] ekuazioaren soluzioa kalkulatzeko, era baliokidean zuzenean $y = x^m$ erako soluzioez egin dezakegu aproba:

$$y = x^m \longrightarrow y' = mx^{m-1} \longrightarrow y'' = m(m-1)x^{m-2},$$

$$x^2y'' - 2y = 0 \Rightarrow [m(m-1) - 2]x^m = 0 \longrightarrow m^2 - m - 2 = 0 \longrightarrow$$

$$m = 2, \quad m = -1 \longrightarrow y_1 = x^2, \quad y_2 = x^{-1} \quad \Rightarrow \quad y_h = Ax^2 + Bx^{-1}.$$

Parametroen aldakuntzaren metodoa aplikatuz, ekuazio osotua erraz ebatz daiteke. Soluzio orokortzat hurrengoa planteatuko da:

$$y = x^2L_1(x) + x^{-1}L_2(x). \qquad [2]$$

Funtzio laguntzaileen kalkulua:

$$\begin{cases} x^2L_1'(x)+x^{-1}L_2'(x)=0, \\ 2xL_1'(x)-x^{-2}L_2'(x)=x^2\cos x, \end{cases} \longrightarrow L_1'(x) = \frac{x\cos x}{3}, \; L_2'(x) = \frac{-x \cos x}{3}.$$

Zatikako integrazioa aplikatuz, hauen emaitzak kalkula daitezke:

$$L_1 = \frac{1}{3}\int x\cos x dx = \frac{1}{3}(x\sin x + \cos x) + A,$$

$$L_2 = \frac{1}{3}\int -x^4\cos x dx = \frac{1}{3}(-x^4 + 12x^2 - 24)\sin x + \frac{1}{3}(4x^3 + 24x)\cos x + B.$$

Azkenik, hauek [2]-an ordezkatuz, soluzioa hurrengoa izango da:

$$y = Ax^2 + Bx^{-1} - (x^2 - 8)\cos x + (4x - 8x^{-1})\sin x.$$

b) ekuazioa ere Euler-en ekuazioa da, hots,

$$(2x + 3)^3y''' - 8(2x + 3)y' + 32y = 32[\mathrm{Ln}(2x + 3) + 2].$$

Hurrengo aldaketarekin koefiziente konstanteetakoa bilakatuko da:

$$2x + 3 = e^t \longleftrightarrow t = \mathrm{Ln}(2x + 3), \qquad 2x + 3 > 0.$$

Aurreko probleman adierazi zenez, ekuazio homogeno asoziatua ebazteko zuzenean $y = (2x + 3)^m$ erako soluzioez egin dezakegu aproba:

$$y = (2x + 3)^m \longrightarrow y' = 2m(2x + 3)^{m-1} \longrightarrow y'' = 4m(m - 1)(2x + 3)^{m-2}$$

$$\longrightarrow y''' = 8m(m - 1)(m - 2)(2x + 3)^{m-3} \Rightarrow$$

$$(2x+3)^3y'''- 8(2x+3)y'+ 32y = 0 \rightarrow [8m(m-1)(m-2)-16m+32](2x+3)^m = 0$$

$$\xrightarrow{\forall x} m^3 - 3m^2 + 4 = 0 \longrightarrow (m+1)(m-2)^2 = 0 \longrightarrow m = -1 \text{ , } m = 2 \text{ (2)}.$$

Erro bakunei, linealki independenteak diren $y_1 = (2x + 3)^{-1}$ eta $y_2 = (2x + 3)^2$ soluzioak dagozkie. Eta gainera, $m = 2$ erro bikoitzari, y_2 delakoaz gain, $y_3 = (2x + 3)^2\mathrm{Ln}(2x + 3)$ soluzio independentea dagokio. Horrela, ondoko konbinazio lineala ekuazio homogenoaren soluzioa da:

$$y = A(2x + 3)^{-1} + (2x + 3)^2[B + C\ \mathrm{Ln}(2x + 3)].$$

b) ekuazio osotuaren soluzio partikular bat lortzeko, kasu honetan koefiziente indeterminatuen metodoa aplika dezakegu. Horretarako, $2x + 3 = e^t$ aldaketari dagokion x aldagaiarekiko soluzio batez frogatzea besterik ez dago.

Hau da, transformaturiko ekuazio homogenoari dagokion ekuazio karakteristikoa $m^3 - 3m^2 + 4 = 0$ da. Ekuazio osotua hurrengo hau da:

$$d^3y/dt^3 - 3d^2y/dt^2 + 4y = 32(t + 2).$$

Ekuazio honetan aprobarako hartuko den soluzio partikularra, lehen mailako $Y(t) = C_1 t + C_2$ polinomioa da.

b) ekuaziorako $Y(x) = C_1 Ln(2x+3) + C_2$ izango da.

Deribatuz eta b) delakoan ordezkatuz, honakoa ondorioztа dezakegu:

$$Y(x) = C_1 Ln(2x + 3) + C_2 \longrightarrow Y'(x) = 2C_1(2x + 3)^{-1} \longrightarrow$$

$$Y''(x) = -4C_1(2x + 3)^{-2} \longrightarrow Y'''(x) = 16C_1(2x + 3)^{-3} \Rightarrow$$

$$(2x + 3)^3Y''' - 8(2x + 3)Y' + 32Y = 32[Ln(2x + 3) + 2] \longrightarrow$$

$$16C_1 - 16C_1 + 32[C_1 Ln(2x + 3) + C_2] = 32[Ln(2x + 3) + 2] \longrightarrow$$

$$32C_2 = 64, \quad 32C_1 = 32 \longrightarrow C_1 = 1 , C_2 = 2.$$

Era honetan, soluzio partikularra determinaturik dago, hots,

$$Y(x) = Ln(2x+3) + 2.$$

Homogenoaren soluzioari azkeneko hau batuz gero, soluzio orokorra ondorioztatuko da:

$$y = A(2x + 3)^{-1} + (2x + 3)^2[B + C\ Ln(2x + 3)] + Ln(2x + 3) + 2.$$

36. Ebatz bedi ondoko ekuazio diferentzial homogenoa,

$$(x^2 - x)y'' + (1 - 2x^2)y' + (4x - 2)y = 0, \qquad [1]$$

$u = e^{2x}$ delakoa integral partikular bat dela jakinik.

Lor bedi ekuazio ez-homogeno honen soluzio orokorra:

$$(x^2 - x)y'' + (1 - 2x^2)y' + (4x - 2)y = 2(x^2 - x)^2. \qquad [2]$$

<u>[1] ekuazioaren soluzio orokorra:</u>

Ekuazio lineal homogeno baten $u = u(x)$ soluzio partikular bat ezagututa, $y = uz$ ordezkaketak ordena unitate bat txikiagotzea ahalbidetuko du, aldagai banangarrietako lehenengo ordenako ekuazio bat izango dugularik. Ordezkaketaren garapena honela da:

$$y = e^{2x}z \xrightarrow{D} y' = e^{2x}(2z + z') \xrightarrow{D} y'' = e^{2x}(4z + 4z' + z'')$$

$$(x^2 - x)y'' + (1 - 2x^2)y' + (4x - 2)y = 0 \xrightarrow{\quad y\, =\, e^{2x}z \quad}$$

$$(x^2-x)e^{2x}(4z + 4z' + z'') + (1-2x^2)e^{2x}(2z + z') + (4x-2)e^{2x}z = 0 \longrightarrow$$

$$(x^2-x)z'' + [4(x^2-x) + (1-2x^2)]z' + [4(x^2-x) + 2(1-2x^2) + 4x-2]z = 0.$$

$u = e^{2x}$ delakoa [1]-aren soluzio bat denez, z-ren faktorea anulatu egingo da. Gero, $z' = w$ eginez, aldagai banangarrietako lehenengo ordenako ekuazio batetara pasatuko gara.

$$(x^2 - x)z'' + (2x^2 - 4x + 1)z' = 0 \xrightarrow{\quad z' = w \quad}$$

$$(x^2 - 2x)w' + (2x^2 - 4x + 1)w = 0 \longrightarrow$$

$$\frac{dw}{w} + \frac{2x^2 - 4x + 1}{x(x-1)}dx = 0 \longrightarrow \frac{dw}{w} + \left(2 + \frac{1 - 2x}{x(x - 1)}\right)dx = 0 \xrightarrow{\int}$$

$$\mathrm{Ln}|w| + 2x - \mathrm{Ln}|x(x-1)| = C \longrightarrow \mathrm{Ln}\left|\frac{w}{x(x-1)}\right| = C - 2x \xrightarrow{\exp}$$

$$\frac{w}{x(x-1)} = Ae^{-2x} \longrightarrow w = Ax(x-1)e^{-2x}.$$

Orain, zatika integratuz, z kalkulatuko dugu:

$$z' = w \longrightarrow z = \int w dx = A\int (x^2 - x)e^{-2x}dx = -\frac{A}{2}x^2e^{-2x} + B.$$

Azkenik, hasierako ordezkaketa aplikatuta, hurrengoa lortuko da:

$$y = e^{2x}z \longrightarrow y = Be^{2x} + Dx^2.$$

---

[2] ekuazioaren soluzio orokorra:

[1] ekuazioa ebatzita, eta parametroen aldakuntzaren metodoa aplikatuz, [2]-aren soluzio orokor modura ondokoa planteatuko da:

$$y = e^{2x}L_1(x) + x^2L_2(x). \qquad [3]$$

$L'_1(x)$ eta $L'_2(x)$ hurrengo sistema bateragarritik kalkula daitezke:

$$\begin{cases} e^{2x}L'_1 + x^2L'_2 = 0, \\ 2e^{2x}L'_1 + 2xL'_2 = 2(x^2 - x), \end{cases} \longrightarrow L'_1(x) = x^2e^{-2x}, \; L'_2(x) = -1.$$

$\int$ eragilea aplikatuz, ondoko balioak ondorioztatuko dira:

$$L_1(x) = \int x^2e^{-2x}dx = -(2x^2 + 2x + 1)e^{-2x} + B, \; L_2(x) = \int -dx = -x + D.$$

Azkenik, [3]-an ordezkatuz soluzioa determinatuko da:

$$y = e^{2x}L_1(x) + x^2L_2(x) \Rightarrow y = Be^{2x} + Dx^2 - (4x^3 + 2x^2 + 2x + 1)/4.$$

37. Integra bitez ondoko ekuazio diferentzialak, kasu bakoitzean emandako soluzio partikularra erabiliz:

$$(1 + x^2)y'' + xy' - y/4 = 0 , \qquad y_1 = \sqrt{x + \sqrt{1 + x^2}}. \qquad [1]$$

$$x(4x^3 + 1)y'' + 2(1 - 2x^3)y' - 12x^2y = 0 , \quad y_1 = 1/x. \qquad [2]$$

Aurreko ariketan garatu den $y = y_1z$ ordezkaketak, ekuazio lineal homogenoaren ordena unitate bat txikiagotzea ahalbidetuko du. Bigarren ordenako kasurako, ondoko emaitza praktikora garamatza:

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0 \longrightarrow y_2 = y_1 \int \frac{\exp[-\int P(x)dx]}{y_1^2} dx, \qquad [3]$$

non y_2 eta y_1 soluzio linealki independenteak diren.

<u>[1] ekuazioaren soluzio orokorra:</u>

$$P(x) = x/(1 + x^2) \longrightarrow -\int P(x)dx = -\int xdx/(1 + x^2) = -\frac{1}{2} \text{Ln}(1 + x^2) \longrightarrow$$

$$\exp[-\int P(x)dx] = \exp[-\frac{1}{2} \text{Ln}(1 + x^2)] = (1 + x^2)^{-1/2}.$$

[3]-an ordezkatuz, ondokoa dugu:

$$y_2 = [x + (1 + x^2)^{1/2}]^{1/2} \int \frac{dx}{(1 + x^2)^{1/2}[x + (1 + x^2)^{1/2}]} = y_1 I.$$

I-ren integrakizuna bider eta zati $[x - (1+x^2)^{1/2}]$ egingo dugu:

$$I = \int \frac{[x - (1+x^2)^{1/2}]dx}{(1+x^2)^{1/2}[x^2-1-x^2]} = -\int \frac{[x - (1+x^2)^{1/2}]dx}{(1+x^2)^{1/2}} = x - (1+x^2)^{1/2}.$$

Beraz,

$$y_2 = [x+(1+x^2)^{1/2}]^{1/2}[x-(1+x^2)^{1/2}] \equiv \frac{[x+(1+x^2)^{1/2}][x-(1+x^2)^{1/2}]}{[x+(1+x^2)^{1/2}]^{1/2}} =$$

$$= \frac{x^2 - (1+x^2)}{[x + (1+x^2)^{1/2}]^{1/2}} \equiv \frac{-[(1+x^2)^{1/2} - x]^{1/2}}{[(1+x^2)^{1/2} + x]^{1/2}[(1+x^2)^{1/2} - x]^{1/2}} \Rightarrow$$

$$y_2 = -[(1 + x^2)^{1/2} - x]^{1/2}.$$

Soluzio orokorra y_1 eta y_2-ren konbinazio lineala da:

$$y = A\sqrt{\sqrt{1 + x^2} + x} + B\sqrt{\sqrt{1 + x^2} - x}.$$

---

[2] ekuazioaren soluzio orokorra:

Kasu honetan hurrengoa dugu:

$$-P(x) = \frac{2(2x^3 - 1)}{x(4x^3 + 1)}, \quad -\int P(x)dx = \int \frac{2(2x^3 - 1)}{x(4x^3 + 1)} dx = \frac{1}{2}\int \frac{(2x^3 - 1)}{x(x^3 + 1/4)} dx.$$

Integrakizuna frakzio sinpleetan banandu behar da. $x = -2^{-2/3}$ delakoa $x^3 + 1/4 = 0$ ekuazioaren erro bat denez, izendatzaileko polinomioa ondoko eran faktorizatuko dugu:

$$x(x^3 + 1/4) = x(x + 2^{-2/3})(x^2 - 2^{-2/3}x + 2^{-4/3}).$$

Beraz, frakziotan deskonposatuz,

$$\frac{(2x^3 - 1)}{x(x^3 + 1/4)} = -\frac{4}{x} + \frac{2}{x + 2^{-2/3}} + \frac{4x - 2^{1/3}}{x^2 - 2^{-2/3}x + 2^{-4/3}},$$

kalkula daitekeen jatorrizkoa ondokoa izango da:

$$\frac{1}{2}\int \frac{(2x^3-1)}{x(x^3+1/4)}dx = -2\mathrm{Ln}|x| + \mathrm{Ln}|x + 2^{-2/3}| + \mathrm{Ln}|x^2 - 2^{-2/3}x + 2^{-4/3}|$$

$$= \mathrm{Ln}|x^3 + 1/4|/x^2 \longrightarrow \exp[-\int P(x)dx] = (x^3 + 1/4)/x^2.$$

[3] ekuazioa aplikatuz, hurrengoa ondoriozta dezakegu:

$$y_2 = y_1\int \frac{\exp[-\int P(x)dx]}{y_1^2}\, dx = \frac{1}{x}\int(x^3 + 1/4)dx = \frac{x^3 + 1}{4}.$$

Soluzio orokorra y_1 eta y_2-ren konbinazio lineala da:

$$y = \frac{A}{x} + B(x^3 + 1).$$

38. Lortu ondoko ekuazio diferentzialari dagokion kurba integrala:

$$xy'y'' - y'^2 - x^3 = 0, \tag{1}$$

$y = 4(x - 2)$ zuzena (2,0) puntuko tangentea delarik.

Ekuazioan y aldagairik ez dagoenez, $y' = z$ aldagai-aldaketak ekuazioaren ordena unitate bat txikiagotuko du:

$$xy'y'' - y'^2 - x^3 = 0 \xrightarrow{y' = z} xzz' - z^2 - x^3 = 0 \longrightarrow z' - z/x = x^2z^{-1}.$$

Hau Bernouilli-ren ekuazio bat da, $z^2 = u$, $2zz' = u'$ aldaketaren bidez ekuazio lineal bilaka daitekeena:

$$zz' - z^2/x = x^2 \xrightarrow{z^2 = u} u' - 2u/x = 2x^2. \tag{2}$$

[2]-aren soluzioa ondokoa da:

$$u = e^{\int 2dx/x}\left[\int 2x^2e^{-\int 2dx/x}dx + A\right] = x^2(2x + A).$$

z aldagaira itzuliz gero,

$$z = u^{1/2} = x(2x + A)^{1/2}, \tag{3}$$

azkenean, hasierako y aldagairako ondokoa izango dugu:

$$y' = z \longrightarrow y = \int zdx = \int x(2x + A)^{1/2}dx.$$

Ondoren, hurrengo eragiketak eginez,

$$(2x + A)^{1/2} = t \longrightarrow 2x + A = t^2 \longrightarrow dx = tdt \Rightarrow$$

$$y = \int \frac{t^2 - A}{2} t^2 dt = \frac{1}{30}(3t^5 - 5At^3) + B \xrightarrow{t=(2x+A)^{1/2}}$$

$$y = \frac{1}{30}[3(2x + A)^{5/2} - 5A(2x + A)^{3/2}] + B \qquad [4]$$

soluzio orokorra lortu dugu.

Soluzio partikularra:

Problemako baldintzak ondokoak dira:

Kurba (2,0) puntutik pasatuko da: $y(2) = 0$.

Kurbak (2,0) puntuan $y' = 4$ malda du: $y'(2) = 4$.

[3] eta [4]-an ordezkatuz, A eta B konstanteak finkatuko dira:

$$y'(2) = z(2) = 4 \longrightarrow 2(4 + A)^{1/2} = 4 \longrightarrow 4 + A = 4 \Rightarrow A = 0.$$

$$y(2) = 0 \longrightarrow \frac{1}{30}[3(4 + A)^{5/2} - 5A(4 + A)^{3/2}] + B = 0 \xrightarrow{A=0} B = -16/5.$$

Azkenik, eskatutako kurba lortzeko, balio hauek soluzio orokorrera eramango dira, honako emaitza hau erdietsirik:

$$y = \frac{(2x)^{5/2} - 32}{10}.$$

39. a) Aurkitu ondoko funtzioari dagokion ekuazio diferentziala,

$$y = A - Ln[\cos(x + B)], \qquad [1]$$

non A eta B hautazko konstanteak diren.

b) Bilatu ondoko propietatea betetzen duten planoko kurbei dagokien ekuazio diferentziala: *" P(x,y) puntu bakoitzeko kurbadura-erradioa, zuzen tangenteak abzisa-ardatzaren norabide positiboarekin osotzen duen angeluaren sekantearen berdina da".*

c) Bilatu b)-ko kurba-familia, eta determinatu M(0,1) puntutik pasatuko den kurba, zeinak puntu horretan zuzen tangentea abzisa-ardatzarekiko paraleloa duen.

---

a) [1] ekuazioa bi aldiz deribatuz, A eta B konstanteak ezabatuko dira:

$$y = A - Ln[\cos(x + B)] \longrightarrow y' = tg(x + B) \longrightarrow y'' = 1/\cos^2(x + B) =$$

$$= 1 + tg^2(x + B) \quad \Rightarrow \quad y'' = 1 + y'^2. \qquad [2]$$

---

b) Propietatean parte hartzen duten magnitudeak hauexek dira:

$$\sec\theta = 1/\cos\theta = (1 + tg^2\theta)^{1/2} = (1 + y'^2)^{1/2}.$$

Kurbadura-erradioa: $\rho = (1 + y'^2)^{3/2}/y''$.

Enuntziatuko propietatearen arabera, [2] ekuazioaren baliokidea den

$$\rho = \sec\theta \longrightarrow (1 + y'^2)^{3/2}/y''= (1 + y'^2)^{1/2} \Rightarrow 1 + y'^2 = y''$$

ekuazio diferentziala ondoriozta dezakegu. Hau da, dagokion integral-sorta [1] jatorrizkoa da.

---

c) [2] ekuazio diferentzialean ez dago y aldagairik. Beraz, $y' = z$ aldaketak ordena txikiagotzea ahalbidetuko du:

$$1 + y'^2 = y'' \xrightarrow{y' = z} 1 + z^2 = z' \longrightarrow dz/(1 + z^2) = dx \xrightarrow{\int}$$

$$\text{arctg} z = x + B \longrightarrow z = \text{tg}(x + B). \qquad [3]$$

y aurkitzeko, ondoko eran eraginez,

$$y' = z \quad \Rightarrow \quad y = \int z dx = \int \text{tg}(x + B) dx = -\text{Ln}|\cos(x + B)| + A \qquad [4]$$

ondorioztatuko dugu, adierazpen hau [1]-aren baliokidea delarik.

Integral partikularra:

Kurbaren propietateak: $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

[3] eta [4] adierazpenetan ordezkatuz, A eta B finkatuko dira.

$$y'(0) = z(0) = 0 \longrightarrow \text{tg}B = 0 \quad \Rightarrow \quad B = 0.$$

$$y(0) = 1 \longrightarrow A - \text{Ln}|\cos B| = 1 \quad \Rightarrow \quad A = 1.$$

A eta B integral orokorrera eramanez, hurrengoa lortuko da:

$$y = 1 - \text{Ln}|\cos x| = 1 + \text{Ln}|\sec x|.$$

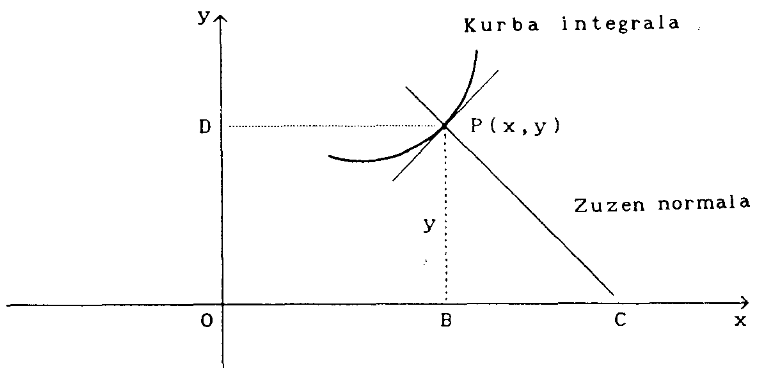
---

40. Froga bedi ezen

$$yy'' = m(1 + y'^2) \qquad [1]$$

ekuazio diferentziala hurrengo propietatea betetzen duten planoko kurbei dagokiela: *"P(x,y) puntu bakoitzeko, ρ kurbadura-erradioa, puntuak eta OX ardatzak mugatzen duten segmentu normalaren luzerarekiko proportzionala da".*

Aurki bitez kurba horiek hurrengo kasuetan:a) m = -1 , b) m = 1/2.



Normalaren $\overline{PC}$ segmentuaren balioa, iruditik ondoriozta daiteke:

$$\overline{PC} = \sqrt{\overline{PB}^2 + \overline{BC}^2}.$$

$\overline{BC}$ magnitudea, zuzen normala OX ardatzarekin ebakiz lortuko da:

$$Y - y = -\frac{1}{y'}(X - x) \xrightarrow{Y=0} \overline{OC} \equiv X = x + yy' ,$$

$$\overline{BC} = \overline{OC} - \overline{OB} = x + yy' - x = yy' \rightarrow \overline{PC} = \sqrt{y^2 + (yy')^2} = y\sqrt{1 + y'^2}.$$

Enuntziatuko propietatearen ondorioz,

$$\rho = K\ \overline{PC} \longrightarrow (1 + y'^2)^{3/2}/y'' = Ky\sqrt{1 + y'^2} \longrightarrow 1 + y'^2 = Kyy'' \Rightarrow$$

$$yy'' = (1 + y'^2)/K \xrightarrow{K=1/m} yy'' = m(1 + y'^2). \qquad [1]$$

---

a) m = -1 kasua:

[1] ekuazioa hauxe da: $\qquad yy'' + y'^2 + 1 = 0, \qquad [2]$

bigarren ordenakoa, ez-lineala eta x aldagairik gabekoa delarik.

$y' = z(y)$ ordezkaketa eginez, ordena unitate bat txikiagotuko da. x-ekiko deribatuz, eta [2] adierazpenean ordezkatu ondoren,

$$y' = z(y) \xrightarrow{D} y'' = \frac{dz}{dy}\,y' = \frac{dz}{dy}\,z,$$

$$yy'' + y'^2 + 1 = 0 \longrightarrow y\,\frac{dz}{dy}\,z + z^2 + 1 = 0$$

aldagai banangarrietako ekuazioa da, beraren soluzioa hau izanik:

$$zdz/(z^2 + 1) + dy/y = 0 \xrightarrow{\int} Ln(z^2 + 1) + 2Ln|y| = C \xrightarrow{exp}$$

$$(z^2 + 1)y^2 = A^2 \longrightarrow z = \pm(A^2/y^2 - 1)^{1/2} = \frac{\pm(A^2 - y^2)^{1/2}}{y}. \qquad [3]$$

Egindako aldagai-aldaketatik,

$$y' = z(y) \longrightarrow dy/z(y) = dx \longrightarrow \frac{\pm y dy}{(A^2 - y^2)^{1/2}} = dx \xrightarrow{\int}$$

$$\mp(A^2 - y^2)^{1/2} = x + B \Rightarrow (x + B)^2 + y^2 = A^2 \qquad [4]$$

soluzioa lortuko dugu, zentrua (-B,0) puntuan duten eta A erradiodun zirkunferentziez osoturiko familia biparametrikoa delarik.

b) m = 1/2 kasua:

Orain, [1] ekuazioa hauxe da: $-2yy'' + y'^2 + 1 = 0$ [5]

Aurreko kasuan bezala, y' = z(y) eginez ondokoa ondorioztatuko da:

$$-2yy'' + y'^2 + 1 = 0 \longrightarrow -2y \frac{dz}{dy} z + z^2 + 1 = 0$$

$$2zdz/(z^2 + 1) - dy/y = 0 \xrightarrow{\int} Ln(z^2 + 1) - Ln|y| = C \xrightarrow{exp}$$

$$(z^2 + 1)/y = B \neq 0 \longrightarrow z = \pm(By - 1)^{1/2}, \qquad [6]$$

$$y' = z(y) \longrightarrow dy/z(y) = dx \longrightarrow \pm dy/(By - 1)^{1/2} = dx \xrightarrow{\int}$$

$$\pm \frac{2}{B} (By - 1)^{1/2} = x + C \Rightarrow By - 1 = B^2(x + C)^2/4.$$

y-rekiko ebatziz gero,

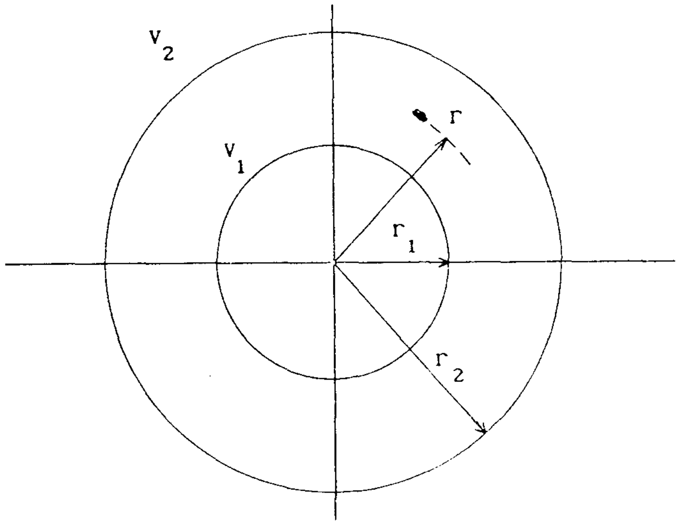
$$y = B(x + C)^2/4 + 1/B \xrightarrow{1/B=D} y = \frac{(x + C)^2}{4D} + D \qquad [7]$$

soluzioa dugu, ardatza x = -C zuzenean duten parabolez osoturiko familia biparametrikoa delarik.

41. Demagun r_1 eta r_2 erradiodun bi gainazal esferiko zentrukideren barnean karga elektriko bat dugula. Bi gainazalen artean, zentru amankomunetik r distantziara dagoen edozein punturen V potentzialerako ekuazioa, ondokoa da:

$$\frac{d^2V}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{dV}{dr} = 0. \qquad [1]$$

Ebatzi [1] ekuazioa V-rekiko, $V(r_1) = V_1$, $V(r_2) = V_2$ direla jakinik.



Menpeko aldagairik ez dagoenez, $\frac{dV}{dr} = z \longrightarrow \frac{d^2V}{dr^2} = \frac{dz}{dr}$ aldaketa egingo dugu. Orduan, [1] ekuazioa ondoko hau bilakatuko da:

$$\frac{d^2V}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{dV}{dr} = 0 \longrightarrow \frac{dz}{dr} + \frac{2}{r} z = 0 \longrightarrow \frac{dz}{z} + \frac{2}{r} dr = 0.$$

Honen soluzioa: $\mathrm{Ln}|z| + 2\mathrm{Ln}|r| = C \xrightarrow{\exp} zr^2 = A \Rightarrow z = A/r^2.$

V potentziala lortzeko, koadratura berri bat behar da:

$$\frac{dV}{dr} = z \longrightarrow V = \int z dr = \int Adr/r^2 = -A/r + B \quad \Rightarrow \quad V(r) = (Br - A)/r.$$

Orain, determina ditzagun konstanteak:

$$\left\{ \begin{array}{l} V(r_1) = V_1 \longrightarrow V_1 = (Br_1 - A)/r_1 \\ V(r_2) = V_2 \longrightarrow V_2 = (Br_2 - A)/r_2 \end{array} \right. \longrightarrow V_1 r_1 - V_2 r_2 = B(r_1 - r_2) \longrightarrow$$

$$B = (V_1 r_1 - V_2 r_2)/(r_1 - r_2),$$

$$A = r_1(B - V_1) \xrightarrow{B} A = (V_1 - V_2)r_1 r_2/(r_1 - r_2).$$

Soluzio orokorrean ordezkatuta, ondoko soluzioa lortuko da:

$$V(r) = (Br - A)/r \quad \Rightarrow \quad V(r) = \frac{V_2 r_2(r - r_1) - V_1 r_1(r - r_2)}{r(r_2 - r_1)}.$$

Oharra: [1] ekuazioa Euler-en ekuazio gisa ebatz daiteke:

$$\frac{d^2V}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{dV}{dr} = 0 \longrightarrow r^2V'' + 2rV' = 0.$$

Aproba egiteko soluzioak: $V = r^m \longrightarrow V' = mr^{m-1} \longrightarrow V'' = m(m-1)r^{m-2}$.

$$r^2V'' + 2rV' = 0 \longrightarrow m(m - 1) + 2m = 0 \longrightarrow m = \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ -1 \end{array} \right. \longrightarrow V = \left\{ \begin{array}{l} 1, \\ 1/r. \end{array} \right.$$

Ondorioz, soluzio orokorra: $V(r) = A + B/r$.

42. Transforma bedi $$(1 + x^2)^2y'' - y = 0 \qquad [1]$$

ekuazio diferentziala, t eta u aldagaiak

$$x = tgt , \qquad y = u/cost$$

erlazioen bidez ezarriz, non $u = u(t)$ den.

Aurki bedi [1] ekuazioaren soluzio orokorra.

Emandako erlazioak t-rekiko deribatuz,

$$x'(t) = 1/cos^2t \ , \quad y'(t) = (u'cost + usint)/cos^2t,$$

lehenengo deribaturako ondokoa lor daiteke:

$$y'(x) = y'(t)/x'(t) = u'cost + usint.$$

Berriro deribatuz, $y''(x)$-erako hurrengoa ondorioztatuko da:

$$y''(x)\ x'(t) = u''cost + ucost \quad \longrightarrow \quad y''(x) = (u'' + u)cos^3t.$$

[1] adierazpenean ordezkatuz gero,

$$(1 + x^2)^2y'' - y = 0 \longrightarrow (1 + tg^2)^2(u'' + u)cos^3t - u/cost = 0$$

$$\longrightarrow \quad (u'' + u)/cost - u/cost = 0 \quad \Rightarrow \quad u'' = 0, \qquad [2]$$

eta, $\int$ eragilea bi aldiz aplikatuz hauxe dugu: $u(t) = At + B$. [3]

[3]-an t eta u aldagaiak x eta y aldagaiez aldatuko dira:

$$x = tgt \longrightarrow t = arctgx, \quad y = u/cost \longrightarrow u = ycost = ycos(arctgx) =$$

$$= y/(1 + x^2)^{1/2} \xrightarrow{[3]} y = (1 + x^2)^{1/2}(Aarctgx + B). \qquad [4]$$

43. Bilaka bedi

$$y'' + 2axy' + a^2x^2y = 0 \qquad [1]$$

ekuazio diferentziala, $y = u\exp(-ax^2/2)$ ordezkaketa erabiliz.

Kalkula bitez a-ren balio ezberdinetarako soluzio orokorrak.

Bi aldiz deribatuz, eta [1]-ean ordezkatuz, hurrengoa lor daiteke:

$$y = u\exp(-ax^2/2) \xrightarrow{D} y' = (u' - axu)\exp(-ax^2/2) \xrightarrow{D}$$

$$y'' = [u'' - 2axu' + (a^2x^2 - a)u]\exp(-ax^2/2),$$

$$y'' + 2axy' + a^2x^2y = 0 \longrightarrow [u'' - 2axu' + (a^2x^2 - a)u]\exp(-ax^2/2)$$

$$+ 2ax(u' - axu)\exp(-ax^2/2) + a^2x^2u\exp(-ax^2/2) = 0 \longrightarrow$$

$$(u'' - au)\exp(-ax^2/2) = 0 \xrightarrow{\forall a,x} u'' - au = 0. \qquad [2]$$

Azken hau koefiziente konstanteetako ekuazio homogenoa da, soluzioa

$$r^2 - a = 0 \longrightarrow r = \pm\sqrt{a} \longrightarrow u = A\exp(\sqrt{a}x) + B\exp(-\sqrt{a}x)$$

duelarik. Ondorioz,

$a > 0$ bada, $\quad y = [A\exp(\sqrt{a}x) + B\exp(-\sqrt{a}x)]\exp(-ax^2/2),$

$a < 0$ bada, $\quad y = [A\cos(\sqrt{a}x) + B\sin(\sqrt{a}x)]\exp(-ax^2/2),$

$a = 0$ bada, $\quad y'' = 0 \longrightarrow y = Ax + B.$

44. Laplace-ren transformatuaren metodoa aplikatuz, ebatz bitez 30 ariketako ondoko ekuazio diferentzial hauek:

$$x''(t) - 4x'(t) + 4x(t) = e^t(1 + te^t) , \qquad x(0) = x'(0) = 0. \qquad [a]$$

$$x''' - 6x'' + 11x' - 6x = e^{2t} - 6t^2 + 4t - 3 ,$$

$$x(0) = 4 , \; x'(0) = x''(0) = 2. \qquad [b]$$

---

a) ekuazioa:

$\mathfrak{L}[x(t)] = X(p)$ eginez, Laplace-ren eragilea aplikatuko da:

$$p^2X(p) - px(0) - x'(0) - 4[pX(p) - x(0)] + 4X(p) = \frac{1}{p-1} + \frac{1}{(p-2)^2} .$$

Hastapen-baldintzak ordezkatuz, eta X(p)-rekiko ebatziz gero, ondokoa daukagu:

$$X(p) = \frac{1}{(p-2)^2(p-1)} + \frac{1}{(p-2)^4} . \qquad [1]$$

Orain, $\mathfrak{L}^{-1}$ alderantzizko eragilea aplikatuko da:

$$x(t) = \mathfrak{L}^{-1}[X(p)] \longrightarrow x(t) = \mathfrak{L}^{-1}\left(\frac{1}{(p-2)^2(p-1)} + \frac{1}{(p-2)^4} \right). \qquad [2]$$

[2] ekuazioa ebazteko, lehenengo frakzioa deskonposatu behar da:

$$\frac{1}{(p-2)^2(p-1)} = \frac{A}{(p-2)^2} + \frac{B}{p-2} + \frac{C}{p-1} .$$

Izendatzaile amankomunera laburtuz, eta zenbakitzaileak berdinduz:

$$1 = A(p-1) + B(p-2)(p-1) + C(p-2)^2.$$

p = 1 denean: $\underline{1 = C}$, p = 2 denean: $\underline{1 = A}$.

Bigarren mailako gaiak: $0 = B + C \longrightarrow \underline{B = -1}$.

Linealtasuna aplikatuta, alderantzizkoa hauxe da:

$$x(t) = \mathfrak{L}^{-1}\left(\frac{1}{(p-2)^2} - \frac{1}{p-2} + \frac{1}{p-1} + \frac{1}{(p-2)^4} \right) =$$

$$= te^{2t} - e^{2t} + e^t + t^3e^{2t}/3! \quad \Rightarrow \quad x(t) = (t^3/6 + t - 1)e^{2t} + e^t.$$

Oharra: Beste era batetan, [2]-ko lehenengo frakzioaren alderantzizkoa kalkulatzeko, konboluzio-propietatea aplika daiteke, hau da:

$$\mathfrak{L}^{-1}[F(p)G(p)] = \int_0^t f(t-u)g(u)du; \; f(t) = \mathfrak{L}^{-1}[F(p)], \; g(t) = \mathfrak{L}^{-1}[G(p)]$$

$$\Rightarrow \mathfrak{L}^{-1}\left(\frac{1}{(p-2)^2(p-1)} \right) = \int_0^t e^{t-u} \, ue^{2u}du = e^t\int_0^t ue^u du = e^t \left| e^u(u-1) \right|_0^t =$$

$$= e^t[e^t(t-1) + 1] = (t-1)e^{2t} + e^t.$$

---

b) ekuazioa:

Oraingoan ere $\mathfrak{L}$ eragilea aplikatu eta lortutako ekuazioa X(p)-rekiko ebatzi behar da:

$$x''' - 6x'' + 11x' - 6x = e^{2t} - 6t^2 + 4t - 3 \xrightarrow{\mathfrak{L}}$$

$$[p^3X(p) - p^2x(0) - px'(0) - x''(0)] - 6[p^2X(p) - px(0) - x'(0)] +$$

$$+ 11[pX(p) - x(0)] - 6X(p) = 1/(p-2) - 12/p^3 + 4/p^2 - 3/p.$$

Hastapen-baldintzak: $x(0) = 4,\ x'(0) = x''(0) = 2.$

$$(p^3 - 6p^2 + 11p - 6)X(p) = 1/(p-2) - 12/p^3 + 4/p^2 - 3/p + 4p^2 - 22p + 34$$

$$\longrightarrow \quad X(p) = \frac{4p^6 - 30p^5 + 78p^4 - 70p^3 + 10p^2 - 20p + 24}{p^3(p-2)^2(p-1)(p-3)}. \qquad [1]$$

Gero, frakzio sinpleetan deskonposatu behar da, hots,

$$X(p) = A/p^3 + B/p^2 + C/p + D/(p-2)^2 + E/(p-2) + F/(p-1) + G/(p-3).$$

Izendatzaile amankomunera laburtu eta zenbakitzaileak [1] ekuaziokoekin berdindu ondoren, hurrengo emaitza lor daiteke:

$$X(p) = 2/p^3 + 3/p^2 + 4/p - 1/(p-2)^2 - 4/(p-2) + 2/(p-1) + 2/(p-3).$$

x(t) soluzioa lortzeko, alderantzizko eragilea aplikatuko da:

$$x(t) = \mathfrak{L}^{-1}[X(p)] = t^2 + 3t + 4 - te^{2t} - 4e^{2t} + 2e^t + 2e^{3t}.$$

45. Laplace-ren transformatua aplikatuz, bila bitez ondoko ekuazio diferentzialen soluzioak:

$$x^{IV}(t) - x(t) = 8\mathrm{Ch}t, \quad x(0) = x'(0) = x''(0) = x'''(0) = 0. \qquad [a]$$

$$x''' + x' = \sin t + 2, \quad x(0) = x'(0) = 0,\ x''(0) = 2. \qquad [b]$$

---

[a] ekuazioa:

t = 0 parametroaren balioak nuluak direnean, transformatuaren metodoa bereziki sinplea izango da, kasu honetan ekuazioaren adierazpen diferentziala, polinomio karakteristikoa bider funtzioaren X(p) transformatua besterik ez bait da izango.

$$x^{IV}(t) - x(t) = 8\mathrm{Ch}t\ , \quad x(0) = x'(0) = x''(0) = x'''(0) = 0 \xrightarrow{\mathfrak{L}}$$

$$(p^4 - 1)X(p) = 8p/(p^2 + 1) \longrightarrow X(p) = \frac{8p}{(p + 1)^2(p - 1)^2(p^2 + 1)} \qquad [1]$$

Deskonposa dezagun [1] adierazpena frakzio sinpleetan:

$$X(p) = \frac{A}{(p + 1)^2} + \frac{B}{p + 1} + \frac{C}{(p - 1)^2} + \frac{D}{p - 1} + \frac{Ep + F}{p^2 + 1} \longrightarrow$$

$$8p = A(p - 1)^2(p^2+ 1) + B(p + 1)(p - 1)^2(p^2+ 1) + C(p + 1)^2(p^2+ 1)$$

$$+ D(p + 1)^2(p - 1)(p^2 + 1) + (Ep + F)(p + 1)^2(p - 1)^2 \longrightarrow$$

$$p = -1 \text{ denean} \longrightarrow -8 = 8A \longrightarrow \qquad \underline{A = -1.}$$

$$p = 1 \text{ denean} \longrightarrow 8 = 8C \longrightarrow \qquad \underline{C = 1.}$$

$p = \ i$ denean $\longrightarrow \ 8i = (Ei + F)4 \ \longrightarrow \ \underline{E = 2 \ , \ F = 0}.$

$$\left\{\begin{array}{l} \text{Bosgarren mailako gaiak} : 0 = B + D + E, \\ \\ \text{Zero mailako gaiak} : 0 = A + B + C - D + F, \end{array}\right. \longrightarrow \underline{B = D = -1}.$$

Alderantzizko eragilea aplikatuz gero, ondokoa lortuko da:

$$X(p) = \frac{8p}{(p+1)^2(p-1)^2(p^2+1)} = \frac{-1}{(p+1)^2} - \frac{1}{p+1} + \frac{1}{(p-1)^2} - \frac{1}{p-1} + \frac{2p}{p^2+1} \Rightarrow$$

$$x(t) = \mathfrak{L}^{-1}[X(p)] = -te^{-t} - e^{-t} + te^{t} - e^{t} + 2\cos t. \qquad [2]$$

Oharra: [1] adierazpena beste era honetan ere adieraz daiteke:

$$X(p) = \frac{8p}{(p^2-1)^2(p^2+1)} = \frac{4p}{(p^2-1)^2} - \frac{2p}{p^2-1} + \frac{2p}{p^2+1}.$$

Tauletara jorik, eta ondoko soluzio baliokidea lor dezakegu:

$$x(t) = \mathfrak{L}^{-1}[X(p)] = 2t\mathrm{Sh}t - 2\mathrm{Ch}t + 2\cos t.$$

<u>[b] ekuazioa:</u>

$$x''' + x' = \sin t + 2 \ ; \ x(0) = x'(0) = 0, \ x''(0) = 2.$$

Aurreko kasuetan bezala, eragile zuzena aplikatuko da lehenengo, gero, ondorioztatutako ekuazioa $X(p)$-rekiko ebatziko da:

$$[p^3X(p) - p^2x(0) - px'(0) - x''(0)] + [pX(p) - x(0)] = \frac{1}{p^2+1} + \frac{2}{p}$$

$$(p^3 + p)X(p) = \frac{1}{p^2+1} + \frac{2}{p} + 2 = \frac{2p^3 + 2p^2 + 3p + 2}{p(p^2+1)} \longrightarrow$$

$$X(p) = \frac{2p^3 + 2p^2 + 3p + 2}{p^2(p^2+1)^2}. \qquad [1]$$

[1] adierazpenaren deskonposaketa frakzio sinpleetan, hauxe da:

$$\frac{2p^3 + 2p^2 + 3p + 2}{p^2(p^2+1)^2} = \frac{A}{p^2} + \frac{B}{p} + \frac{Cp + D}{(p^2+1)^2} + \frac{Ep + F}{p^2+1} \longrightarrow$$

$$2p^3 + 2p^2 + 3p + 2 = A(p^2+1)^2 + Bp(p^2+1)^2 + (Cp + D)p^2 +$$

$$+ (Ep + F)p^2(p^2 + 1).$$

$p = 0$ eta $p = i$ erroak kontutan hartuz, ondokoa lor daiteke:

$p = 0 \longrightarrow \underline{2 = A}$, $p = i \longrightarrow -2i-2+3i+2 = -(Ci+D) \longrightarrow \underline{C = -1}$, $\underline{D = 0}$.

Horrela berdintza polinomikoaren zenbait koefiziente finka ditzakegu.

Lehenenengo maila: $\underline{3 = B}$.

Bigarren maila: $2 = 2A + D + F \quad \longrightarrow \quad \underline{F = -2}$.

Bosgarren maila: $0 = B + E \quad \longrightarrow \quad \underline{E = -3}$.

Era honetan, alderantzizko eragilea aplikatuz, hurrengoa dugu:

$$x(t) = \mathfrak{L}^{-1}\frac{2p^3 + 2p^2 + 3p + 2}{p^2(p^2 + 1)^2} = \mathfrak{L}^{-1}\left(\frac{2}{p^2} + \frac{3}{p} - \frac{p}{(p^2 + 1)^2} - \frac{3p + 2}{p^2 + 1}\right).$$

Hirugarren frakzioaren alderantzizkoa, tauletan edo hurrengo konboluzio-propietatea aplikatuz kalkula daiteke:

$$F(p) = \frac{1}{p^2 + 1} \longrightarrow f(t) = \sin t\ , \quad G(p) = \frac{p}{p^2 + 1} \longrightarrow g(t) = \cos t.$$

$$\mathfrak{L}^{-1}[F(p)G(p)] = \int_0^t f(t-u)g(u)du \Rightarrow \mathfrak{L}^{-1}\frac{p}{(p^2 + 1)^2} = \int_0^t \sin(t-u)\cos u\,du$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^t [\sin t + \sin(t - 2u)]du = \frac{1}{2}\left|u\sin t + \frac{1}{2}\cos(t - 2u)\right|_0^t = \frac{t\sin t}{2}\ .$$

Ondorioz, problemaren soluzioa ondoko hau da:

$$x(t) = 2t + 3 - \frac{t\sin t}{2} - 3\cos t - 2\sin t.$$

46. Bira hurrengo ekuazio diferentzialak:

$$x'' + 2ax' + a^2x = f(t) \quad [A]; \qquad x''' - x'' + x' - x = g(t). \quad [B]$$

a) Konboluzio-propietatea aplikatuz, lor bitez hastapen-baldintza nuluetako ekuazio hauen soluzioak.

b) Aplikatu lortutako emaitzak $f(t) = t^2e^{-at}$, $g(t) = e^t$ kasuetan.

[A] ekuazioa:

$x(0) = x'(0) = 0$ izanik, $\mathfrak{L}$ eragilea aplikatuko da:

$$(p^2 + 2ap + a^2)X(p) = \mathfrak{L}[f(t)] = F(p) \longrightarrow X(p) = \frac{F(p)}{(p + a)^2}. \quad [1]$$

Konboluzio-propietatea:

$$\mathfrak{L}^{-1}[F(p)G(p)] = \int_0^t f(t-u)g(u)du = \int_0^t g(t-u)f(u)du, \quad [2]$$

$f(t) = \mathfrak{L}^{-1}F(p)$, $g(t) = \mathfrak{L}^{-1}G(p)$ direlarik.

[1] adierazpenean, $G(p) = \dfrac{1}{(p + a)^2}$, $F(p) \equiv F(p)$ eginez,

$g(t) = \mathfrak{L}^{-1}[G(p)] = te^{-at}$ izanik, eta [2] adierazpena aplikatuz gero, ondokoa dugu:

$$x(t) = \mathfrak{L}^{-1}\frac{F(p)}{(p + a)^2} = \int_0^t f(t-u)ue^{-au}du = \int_0^t f(u)(t-u)e^{-a(t-u)}du. \quad [3]$$

Era berean, [B] ekuaziorako,

$$x(0) = x'(0) = x''(0) = 0 \longrightarrow (p^3 - p^2 + p - 1)X(p) = G(p) \longrightarrow$$

$$X(p) = \frac{G(p)}{(p-1)(p^2+1)}. \qquad [4]$$

Orain, $F(p) = \dfrac{1}{(p-1)(p^2+1)}$, $G(p) \equiv G(p)$ dira.

Bestalde, F(p)-ren funtzio sortzailea hurrengoa izango da:

$$F(p) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p-1} - \frac{p+1}{p^2+1}\right) \longrightarrow f(t) = \frac{1}{2}(e^t - \cos t - \sin t),$$

$$x(t) = \mathfrak{L}^{-1}[X(p)] = \mathfrak{L}^{-1}\frac{G(p)}{(p-1)(p^2+1)} = \frac{1}{2}\int_0^t (e^u - \cos u - \sin u)g(t-u)du$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^t [e^{t-u} - \cos(t-u) - \sin(t-u)]\, g(u)du. \qquad [5]$$

---

b) Aplikazio partikularra:

[A] ekuaziorako $f(t) = t^2e^{-at}$ funtzioa [3] soluzioko edozein integraletan ordezkatuko dugu, bigarrenean adibidez. Orduan,

$$x(t) = \int_0^t u^2e^{-au}(t-u)e^{-a(t-u)}du = e^{-at}\int_0^t u^2(t-u)du = e^{-at}t^4/12.$$

[B] ekuaziorako, [5] soluzioan $g(t) = e^t$ funtzioa ordezkatuko dugu. Hau lehenengo integralean aplikatuz gero, ondokoa beteko da:

$$x(t) = \frac{1}{2}\int_0^t (e^u - \cos u - \sin u)e^{t-u}du = \frac{e^t}{2}\int_0^t [1 - e^{-u}(\cos u + \sin u)]du$$

$$= \frac{e^t}{2}\left| u + e^{-u}\cos u \right|_0^t = \frac{e^t}{2}(t + e^{-t}\cos t - 1) \qquad \Rightarrow$$

$$x(t) = \frac{(t - 1)e^t + \cos t}{2}\ .$$

47. Aplika bedi Laplace-ren transformatua, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$ hastapen-baldintzatako

$$(x + 1)y'' - (x + 2)y' + y = 0 \qquad [1]$$

ekuazio diferentzialaren soluzioa lortzeko.

Transformatuaren deribazio-propietatea kontutan hartuko dugu:

$$\mathfrak{L}\,[x^n f(x)] = (-1)^n\, d[F(p)]/dp^n.$$

Ekuazioko biderkaketarako hurrengo eran eragingo da:

$$\mathfrak{L}[xy''] = -\frac{d}{dp}\,[p^2Y(p) - py(0) - y'(0)] = -2pY(p) - p^2Y'(p) - y(0),$$

$$\mathfrak{L}[xy'] = -\frac{d}{dp}\,[pY(p) - y(0)] = -Y(p) - pY'(p).$$

Ondoren, [1] ekuazioari $\mathfrak{L}$ eragilea aplikatuko zaio:

$$\mathbf{(x + 1)y'' - (x + 2)y' + y = 0} \quad \xrightarrow{\mathfrak{L}} \quad -2pY(p) - p^2Y'(p) - y(0) +$$

$$p^2Y(p) - py(0) - y'(0) + Y(p) + pY'(p) - 2[pY(p) - y(0)] + Y(p) = 0.$$

Gero, hastapen-baldintzak ordezkatuz eta sinplifikatuz,

$$(p - p^2)Y'(p) + (p^2 - 4p + 2)Y(p) = 1$$

ekuazio lineala ondoriozta daiteke, zeinaren soluzioa ondokoa den:

$$Y(p) = \exp[-\int P(p)dp] \left[\int Q(p)\exp[\int P(p)dp]dp + C \right] \longrightarrow$$

$$\int Pdp = \int \frac{p^2 - 4p + 2}{p(1 - p)} dp = \int \left(-1 + \frac{2}{p} - \frac{1}{1 - p}\right)dp = -p + Ln[p^2(p-1)]$$

$$\longrightarrow \exp[-\int Pdp] \equiv \frac{e^p}{p^2(p - 1)} \quad , \quad \exp[\int Pdp] \equiv e^{-p}p^2(p - 1) \longrightarrow$$

$$Y(p) = \frac{e^p}{p^2(p - 1)} \left[\int \frac{e^{-p}p^2(p - 1)}{p(1 - p)} dp + C \right] = \frac{p + 1}{p^2(p - 1)} + \frac{Ce^p}{p^2(p - 1)} .$$

Transformatuaren $\lim_{p \to \infty} [Y(p)] = 0$ propietatetik: $C = 0$.

Ondoren, alderantzizko eragilea aplikatuz, soluziora hel gaitezke:

$$y(x) = \mathfrak{L}^{-1}[Y(p)] = \mathfrak{L}^{-1} \left[\frac{p + 1}{p^2(p - 1)} \right] = \mathfrak{L}^{-1} \left[\frac{-1}{p^2} - \frac{2}{p} + \frac{2}{p - 1} \right] \longrightarrow$$

$$y(x) = -(x + 2) + 2e^x.$$

Oharra: Ariketa hau berredura-serieak erabiliz ebazteko proposatuta dago. (Ikus 45(b) zenbakia).

48. $x = 0$ eta $x = a$ muturretan finkaturiko a luzeradun habe batek luzera-unitateko $w(x)$ karga jasaten du:

$$w(x) = \begin{cases} W, & 0 < x < a/2, \\ 0, & a/2 < x < a. \end{cases} \qquad [1]$$

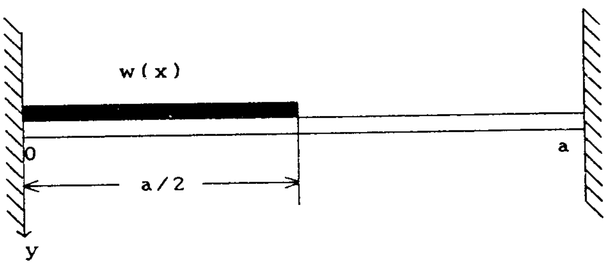
Aurki bedi habearen ardatzaren zeharkako $y(x)$ deflexioa edozein puntutan, kurba elastikoak hurrengo ekuazio diferentziala bete behar duelarik:

$$d^4y/dx^4 = w(x)/EI, \quad EI \equiv \text{kte}, \qquad [2]$$

eta muturretako puntuei dagozkien mugalde-baldintzak

$$y(0) = y(a) = y'(0) = y'(a) = 0 \qquad [3]$$

direla jakinik.



Laugarren deribatuaren transformatuan parte hartzen duten $y''(0)$ eta $y'''(0)$ balioak ezezagunak direnez, eragile-kalkuluaren teknikak aplikatzeko, $y''(0) = b$ eta $y'''(0) = c$ idatzi behar dugu. Hautazko konstante gisa ageri diren b eta c balioak, azkenean $y(a) = y'(a) = 0$ baldintzetatik ondorioztatuko dira.

[2] ekuazioari $\mathfrak{L}$ aplikatuz, $\mathfrak{L}[y(x)] = Y(p)$ izanik, ondokoa dugu:

$$[p^4Y(p) - p^3y(0) - p^2y'(0) - py''(0) - y'''(0)]EI = \mathfrak{L}[w(x)]. \quad [4]$$

Definizioaren arabera, w(x)-en transformatua hurrengoa da:

$$\mathfrak{L}[w(x)] = W(p) = \int_0^{a/2} e^{-pt}Wdt = \left|-We^{-pt}/p\right|_0^{a/2} = (1 - e^{-ap/2})W/p.$$

Edo Heaviside-ren maila-funtzioen bidez adierazita:

$$w(x) = W(u_0 - u_{a/2}) \longrightarrow \mathfrak{L}[w(x)] = W(1/p - e^{-ap/2}/p).$$

Balio hau [4] adierazpenera eraman eta Y(p)-rekiko ebatziko da:

$$[p^4Y(p) - bp - c]\ EI = (1 - e^{-ap/2})W/p \longrightarrow$$

$$Y(p) = \frac{b}{p^3} + \frac{c}{p^4} + \frac{(1 - e^{-ap/2})W}{EIp^5}. \quad [5]$$

Alderantzizko eragilea aplikatuz, soluzioa lortuko dugu:

$$y = \mathfrak{L}^{-1}[Y(p)] = \frac{bx^2}{2} + \frac{cx^3}{6} + \frac{Wx^4}{24EI} - \frac{W(x - a/2)^4}{24EI}u_{a/2}. \quad [6]$$

b eta c balioak kalkulatzeko, y deribatu egin behar da, [3] baldintza erabiliz.

$$y' = bx + \frac{cx^2}{2} + \frac{Wx^3}{6EI} - \frac{W(x - a/2)^3}{6EI}u_{a/2},$$

$$y(a) = 0 \quad \longrightarrow \quad 0 = \frac{ba^2}{2} + \frac{ca^3}{6} + \frac{Wa^4}{24EI} - \frac{Wa^4}{384EI} u_{a/2} ,$$

$$y'(a) = 0 \quad \longrightarrow \quad 0 = ba + \frac{ca^2}{2} + \frac{Wa^3}{6EI} - \frac{Wa^3}{48EI} u_{a/2} .$$

$x = a$ denean $u_{a/2} = 1$ denez, sistemaren b eta c-rekiko soluzioa ondokoa da:

$$b = \frac{11}{192} \frac{Wa^2}{EI} , \qquad c = \frac{-13}{32} \frac{Wa}{EI} .$$

Balio hauek [6] ekuazioan ordezkatuta, habearen y(x) deflexiorako ondoko soluzio partikularra lortuko da:

$$y = \left(\frac{11a^2x^2}{384} - \frac{13ax^3}{192} + \frac{x^4}{24} - \frac{W(x - a/2)^4}{24} u_{a/2} \right) \frac{W}{EI} . \tag{7}$$

Soluzioa tarteka adieraz daiteke:

$0 < x < a/2$ bada,

$$y = \left(\frac{11a^2x^2}{384} - \frac{13ax^3}{192} + \frac{x^4}{24} \right) \frac{W}{EI} , \tag{8}$$

$a/2 < x < a$ bada,

$$y = \left(\frac{11a^2x^2}{384} - \frac{13ax^3}{192} + \frac{x^4}{24} - \frac{W(x - a/2)^4}{24} \right) \frac{W}{EI} . \tag{9}$$

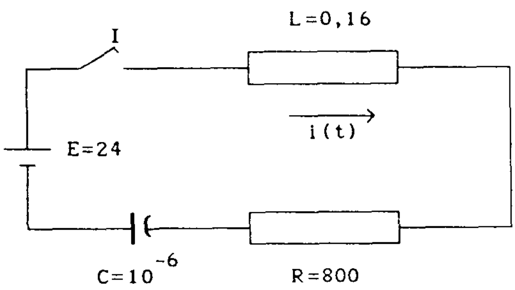
[8] zein [9] adierazpenean ordezkatuz, $x = a/2$ erdiko puntuko deflexioa ondokoa da:

$$y(a/2) = \frac{a^4W}{768EI} . \tag{10}$$

49. Irudian ikus daitekeen LRC serie-zirkuituan $L = 0{,}16$ H, $R = 800\ \Omega$ eta $C = 10^{-6}$ F dira. Demagun hasieran pasiboa, eta gero $E = 24$ V-tako tentsio konstatea aplikatuko zaiola. Kalkula bitez:

a) i(t) korronte-intentsitatea eta q(t) kondentsadoreko karga, edozein $t > 0$-tarako.

b) Behin etengailua itxi eta gero, i(t) intentsitatea maximoa izateko pasatu behar den denbora, eta intentsitate maximo hori.



Zirkuituaren ekuazio integro-diferentziala:

$$L\ i'(t) + R\ i(t) + \frac{1}{C}\int_0^t i(t)dt = E\ , \qquad q(0) = i(0) = 0.$$

---

a) Datuak ordezkatuz eta Laplace-ren eragilea aplikatuz:

$$0{,}16[pI(p) - i(0)] + 800I(p) + 10^6 I(p)/p = 24/p \quad \longrightarrow$$

$$I(p) = \frac{150}{p^2 + 5.10^3 p + 625.10^4} = \frac{150}{(p + 2.500)^2}\ . \qquad [1]$$

Beraz, i(t)-ren balioa hurrengo hau da:

$$i(t) = \mathcal{L}^{-1}[I(p)] = 150te^{-2500t} . \qquad [2]$$

Kondentsadoreko kargaren kalkulua:

$$i(t) = q'(t) \longrightarrow q(t) = \int_0^t i(t)dt = \int_0^t 150te^{-2500t}dt.$$

Zatikako integrazioaz, hurrengo emaitzara iritsiko gara:

$$q(t) = \frac{3.10^{-3}}{125} [1 - (2500t + 1)e^{-2500t}]. \qquad [3]$$

b) Intentsitate maximoa:

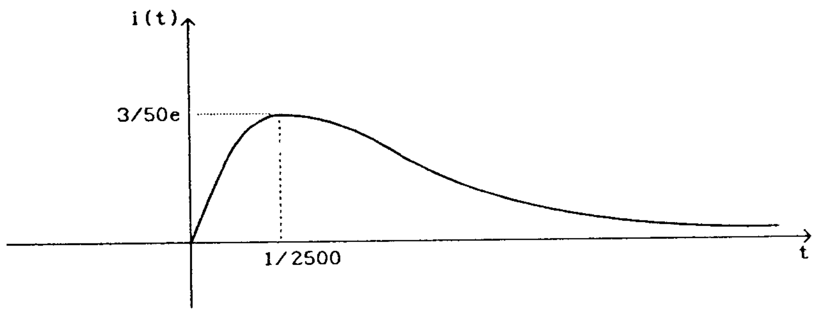
i'(t) deribatua anulatu behar da. [2] delakoa deribatuz ondokoa dugu:

$$i'(t) = 150(1 - 2500t)e^{-2500t} \longrightarrow i'(t) = 0 \Rightarrow t = 1/2500 \ \text{s}.$$

Denbora honi i(t) maximo bat dagokio. [2]-aren arabera, hauxe da:

$$i_{max} = \frac{3}{50e} \ \text{A (ampère)}.$$

Irudian sistemak i(t)-rekiko duen erantzun hurbildua ikus daiteke:

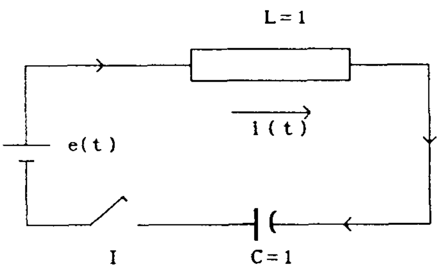


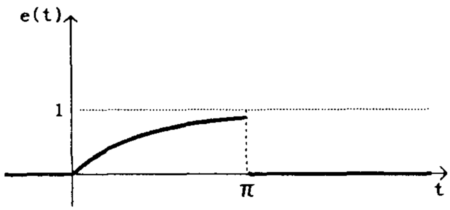
50. **Izan bitez hasieran pasiboa, hau da, i(0) = q(0) = 0 den LC zirkuitu bat eta zirkuitua kitzikatuko duen honako e(t) tentsioa:**

$$e(t) = \begin{cases} 1 - e^{-t}, & 0 < t < \pi , \\ 0, & \pi < t . \end{cases}$$

Aurki bedi sistemaren erantzuna i(t) korronte-intentsitatearekiko, L = 1 henry eta C = 1 faraday balioetarako.

Grafiko hauetan zirkuitua eta aplikaturiko tentsioa adierazi dira.





Ohm-en legearen arabera, sistema elektrikoaren eredua ondokoa da:

$$L\ i'(t) + \frac{1}{C}\int_0^t i(t)dt = e(t), \qquad i(0) = q(0) = 0. \qquad [1]$$

e(t)-ren transformatua definizioaren bidez kalkula daiteke:

$$\mathfrak{L}[e(t)] = \int_0^\infty e^{-pt}e(t)dt = \int_0^\pi e^{-pt}(1 - e^{-t})dt = \left|\frac{-e^{-pt}}{p} + \frac{e^{-(p+1)t}}{p+1}\right|_0^\pi =$$

$$\left(\frac{e^{-\pi}}{p+1} - \frac{1}{p}\right)e^{-\pi p} + \frac{1}{p} - \frac{1}{p+1} = \frac{1}{p(p+1)} + \frac{(e^{-\pi} - 1)p - 1}{p(p+1)}\ e^{-\pi p}. \quad [2]$$

Edota, maila-funtzioak erabiliz:

$$e(t) = (1 - e^{-t})(u_0 - u_\pi) \xrightarrow{\mathfrak{L}} \mathfrak{L}[e(t)] = \frac{1}{p} - \frac{1}{p+1} -$$

$$- e^{-\pi p} \mathfrak{L}[1 - e^{-(t+\pi)}] = \frac{1}{p(p+1)} + e^{-\pi p} \frac{(e^{-\pi} - 1)p - 1}{p(p+1)} . \qquad [2]$$

Ondoren, $\mathfrak{L}$ eragilea [1] adierazpenari aplikatuko zaio, $L = C = 1$ eta $i(0) = 0$ izanik.

$$pI(p) - i(0) + \frac{I(p)}{p} = \frac{p^2 + 1}{p} I(p) = \frac{1}{p(p+1)} + \frac{(e^{-\pi} - 1)p - 1}{p(p+1)} e^{-\pi p}$$

$$\longrightarrow \quad I(p) = \frac{1}{(p+1)(p^2+1)} + \frac{(e^{-\pi} - 1)p - 1}{(p+1)(p^2+1)} e^{-\pi p}. \qquad [3]$$

[3] adierazpeneko lehenengo frakzioaren alderantzizkoa era honetan kalkula daiteke:

$$\frac{1}{(p+1)(p^2+1)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p+1} - \frac{p-1}{p^2+1} \right) \xrightarrow{\mathfrak{L}^{-1}} \frac{e^{-t} - \cos t + \sin t}{2} .$$

Bigarren frakzioaren alderantzizkoaren kalkulurako erabiliko den propietatea, hauxe da:

$$\mathfrak{L}^{-1}[F(p)e^{-ap}] = f(t-a)\, u_a, \qquad \text{non} \quad f(t) = \mathfrak{L}^{-1}[F(p)]. \qquad [4]$$

Orduan,

$$\frac{(e^{-\pi} - 1)p - 1}{(p+1)(p^2+1)} = \frac{e^{-\pi}}{2}\left(\frac{-1}{p+1} + \frac{p + (1 - 2e^{\pi})}{p^2+1} \right) \xrightarrow{\mathfrak{L}^{-1}}$$

$$f(t) \equiv \frac{e^{-\pi}}{2}\left(-e^{-t} + \cos t + (1 - 2e^{\pi})\sin t\right).$$

[4] propietatetik $\dfrac{(e^{-\pi} - 1)p - 1}{(p + 1)(p^2 + 1)}\, e^{-\pi p}$ gaiaren alderantzizkoa lor daiteke:

$$\frac{e^{-\pi}}{2}\left(-e^{-(t-\pi)} + \cos(t - \pi) + (1 - 2e^{\pi})\sin(t - \pi)\right)u_{\pi}.$$

Beraz, [3]-aren funtzio sortzailerako, ondokoa dugu:

$$i(t) = \mathfrak{L}^{-1}[I(p)] = \frac{e^{-t} - \cos t + \sin t}{2} + \frac{e^{-\pi}}{2}\left(-e^{-(t-\pi)} + \cos(t - \pi)\right.$$

$$\left. + (1 - 2e^{\pi})\sin(t - \pi)\right)u_{\pi} \xrightarrow{\text{sinplifikatuz}}$$

$$i(t) = \frac{e^{-t} - \cos t + \sin t}{2} - \frac{e^{-t} + e^{-\pi}\cos t + (e^{-\pi} - 2)\sin t}{2}\, u_{\pi}\,. \qquad [5]$$

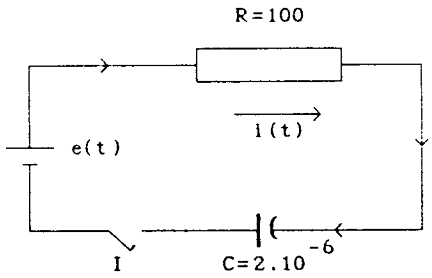
$u_{\pi} = \begin{cases} 0, & 0 < t < \pi \\ 1, & \pi < t \end{cases}$ bada, i(t) funtzioaren adierazpena tarteka adierazita ondokoa da:

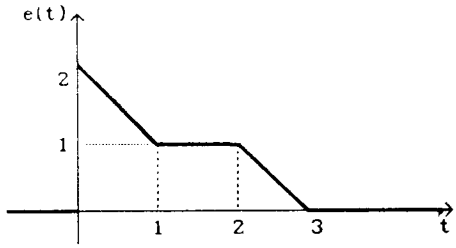
$$0 < t < \pi \quad \text{bada} \longrightarrow \quad i(t) = \frac{e^{-t} - \cos t + \sin t}{2}\,, \qquad [6]$$

$$\pi < t \quad \text{bada} \longrightarrow \quad i(t) = -\frac{1 + e^{-\pi}}{2}\cos t + \frac{3 - e^{-\pi}}{2}\sin t, \qquad [7]$$

$$t = \pi \quad \text{bada} \longrightarrow \quad i(\pi) = \frac{1 + e^{-\pi}}{2}\,. \qquad [8]$$

51. Irudiko 100 ohm-etako erresistentzia eta 2.10^{-6} faraday-tako kapazitateko RC zirkuituari e(t) kitzikapena aplikatu zaio. Kalkula bedi zirkuituko i(t) intentsitatea.





---

e(t) funtzioaren adierazpen analitikoa:

$$e(t) = \begin{cases} 0, & 0 < t\ , \\ 2 - t, & 0 < t < 1\ , \\ 1, & 1 < t < 2\ , \\ 3 - t, & 2 < t < 3\ , \\ 0, & 3 < t\ . \end{cases} \qquad [1]$$

Edota, maila-funtzioak erabiliz, ondokoa da:

$$e(t) = (2 - t)(u_0 - u_1) + (u_1 - u_2) + (3 - t)(u_2 - u_3) \longrightarrow$$

$$e(t) = (2 - t)u_0 + (t - 1)u_1 + (2 - t)u_2 + (t - 3)u_3\ . \qquad [2]$$

Kasu honetan, $\mathcal{L}[e(t)]$ lortzeko, hurrengo propietatea aplikatuko da:

$$\mathcal{L}[f(t)u_a] = \mathcal{L}[f(t + a)]e^{-ap}$$

$$\mathcal{L}[e(t)] = \mathcal{L}[2 - t] + \mathcal{L}[t]e^{-p} + \mathcal{L}[-t]e^{-2p} + \mathcal{L}[t]e^{-3p} \longrightarrow$$

$$\mathfrak{L}[e(t)] = 2/p - 1/p^2 + e^{-p}/p^2 - e^{-2p}/p^2 + e^{-3p}/p^2. \qquad [3]$$

Beste era batetan:

$$\mathfrak{L}[e(t)] = \int_0^1 e^{-pt}(2 - t)dt + \int_1^2 e^{-pt}dt + \int_2^3 e^{-pt}(3 - t)dt.$$

Zirkuituaren ekuazio integrala ondokoa da:

$$Li'(t) + Ri(t) + \frac{1}{C}\int_0^t i(t)dt = e(t) \rightarrow 100i(t) + 5.10^5\int_0^t i(t)dt = e(t).$$

$\mathfrak{L}$ eragilea aplikatuz eta I(p)-rekiko ebatziz, hurrengoa dugu:

$$100I(p) + 5.10^5 I(p)/p = 2/p - 1/p^2 + e^{-p}/p^2 - e^{-2p}/p^2 + e^{-3p}/p^2 \longrightarrow$$

$$100I(p) = \frac{2p-1}{p(p+5000)} + \frac{e^{-p}}{p(p+5000)} - \frac{e^{-2p}}{p(p+5000)} - \frac{e^{-3p}}{p(p+5000)}. \qquad [4]$$

Frakzioak deskonposatuz,

$$\frac{2p-1}{p(p+5000)} = -\frac{2.10^{-4}}{p} + \frac{2(1+10^{-4})}{p+5000}, \quad \frac{1}{p(p+5000)} = \frac{2.10^{-4}}{p} - \frac{2.10^{-4}}{p+5000},$$

eta [4]-aren alderantzizkoa kalkulatuz, ondokoa ondorioztatuko da:

$$i(t) = -2.10^{-6} + 2.10^{-2}(1+10^{-4})e^{-5000t} + 2.10^{-6}\left(1 - e^{-5000(t-1)}\right)u_1 -$$

$$- 2.10^{-6}\left(1 - e^{-5000(t-2)}\right)u_2 - 2.10^{-6}\left(1 - e^{-5000(t-3)}\right)u_3 .$$

52. Ebatzi hurrengo ekuazioak Laplace-ren eragilea aplikatuz:

$$y(x) = x^3 + \int_0^t y(t)\sin(x-t)dt, \qquad [a]$$

$$f'(t) - \int_0^t f(z)\cos(t-z)dz = 0 \ , \quad f(0) = 1. \qquad [b]$$

Ekuazioetako integralak konboluzio-motakoak dira. Erabili behar den transformatuaren propietatea ondokoa da:

$$\mathfrak{L} \int_0^t f(t)g(t-u)du = \mathfrak{L}[f(t)]\mathfrak{L}[g(t)] = F(p)G(p) \qquad [1]$$

---

[a] ekuazioa:

$\mathfrak{L}$ aplikatu, Y(p)-rekiko ebatzi eta azkenik $\mathfrak{L}^{-1}$aplikatu behar da.

$$y(x) = x^3 + \int_0^t y(t)\sin(x-t)dt \xrightarrow{\mathfrak{L}} Y(p) = 6/p^4 + Y(p)/(p^2+1) \longrightarrow$$

$$Y(p) = 6(p^2+1)/p^6 = 6/p^4 + 6/p^6 \xrightarrow{\mathfrak{L}^{-1}} y(x) = x^3 + x^5/20.$$

---

[b] ekuazioa:

Ekuazio integro-diferentzial bat da. Beraz,

$$f'(t) - \int_0^t f(z)\cos(t-z)dz = 0, \quad f(0) = 1 \xrightarrow{\mathfrak{L}}$$

$$pF(p) - f(0) - F(p)\,\mathfrak{L}[\cos t] = 0 \longrightarrow pF(p) - 1 - F(p)\frac{p}{p^2+1} = 0$$

$$\longrightarrow F(p) = (p^2+1)/p^3 = 1/p + 1/p^3 \xrightarrow{\mathfrak{L}^{-1}} f(t) = 1 + t^2/2.$$

53. A substantzia erradioaktibo baten desintegrazio-abiadura aldiune bakoitzean materia-kantitatearekiko proportzionala da. Biz k_2 delakoa beste B substantzia bihurtuko den A-ren proportzioa, B-ren k_3 desintegrazio-abiadura aldiuneko B-ren kantitatearekiko proportzionala delarik.

Bira x(t) eta y(t), hurrenez hurren, A eta B-ren kantitateak t aldiunean. $k_1 \neq k_3$ suposatuz, aurkitu x(t) eta y(t) funtzioetarako formulak, hasierako kantitateak x(0) = a, y(0) = b direla jakinik.

Bi askatasun-gradutako sistema da. Desintegrazio-abiadura masaren denborarekiko deribatuaren bidez adierazten da. Fenomenoa arautzen duten legeak, ondoko ekuazioen araberakoak dira:

$$\begin{cases} x'(t) = -k_1 x(t), & [1] \\ y'(t) = -k_2 x'(t) - k_3 y(t). & [2] \end{cases}$$

Ekuazio diferentzialetako sistema osotzen dute.

[1]-ean y(t) koordenaturik ez dagoenez, zuzenki x(t)-rekiko ebatziko da:

$$x'(t) = -k_1 x(t) \longrightarrow dx/x = -k_1 dt \xrightarrow{\int} \mathrm{Ln}|x| = \exp(-k_1 t) + C \Rightarrow$$

$$x(t) = A\exp(-k_1 t). \qquad [3]$$

y(t) kalkulatzeko [1] eta [3] adierazpenak [2]-an ordezkatuko dira:

$$y'(t) = k_2 k_1 A\exp(-k_1 t) - k_3 y(t) \longrightarrow y'(t) + k_3 y(t) = k_2 k_1 A\exp(-k_1 t).$$

Azken hau ekuazio lineal bat da, beraren soluzioa hurrengoa delarik:

$$y(t) = \exp(-k_3 t)\left[\int k_2 k_1 A\exp(-k_1 t)\ \exp(k_3 t)dt + B\right] \longrightarrow$$

$$y(t) = \exp(-k_3 t)\left[\int Ak_1 k_2 [\exp(k_3 - k_1)t]dt + B\right] \longrightarrow$$

$$y(t) = \exp(-k_3 t)\left[Ak_1 k_2 \exp[(k_3 - k_1)t]/(k_3 - k_1) + B\right] \longrightarrow$$

$$y(t) = \frac{Ak_1 k_2 \exp(-k_1 t)}{k_3 - k_1} + B\exp(-k_3 t). \qquad [4]$$

Hastapen-baldintzek A eta B konstanteak zehaztuko dituzte.

$$x(0) = a \xrightarrow{[3]} a = A\exp(0) \longrightarrow A = a,$$

$$y(0) = b \xrightarrow{[4]} b = \frac{ak_1 k_2 \exp(0)}{k_3 - k_1} + B\exp(0) \longrightarrow B = b - \frac{ak_1 k_2}{k_3 - k_1}.$$

Era honetan, [3] eta [4]-ean ordezkatuz, soluzioa lortuko da:

$$x(t) = a\exp(-k_1 t), \qquad [5]$$

$$y(t) = \frac{ak_1 k_2 \exp(-k_1 t) + [b(k_3 - k_1) - ak_1 k_2]\exp(-k_3 t)}{k_3 - k_1}. \qquad [6]$$

Oharra: Proportzionaltasun-konstanteak aurkitzeko experientzietako datuak behar dira.

54. Aplikatu laburtze-metodoa ondoko ekuazio-sistemaren soluzioa aurkitzeko:

$$x' - 4x - y + 36t = 0, \qquad [1]$$

$$y' + 2x - y + 2e^{t} = 0. \qquad [2]$$

Hastapen-baldintzak: $x(0) = 0, \quad y(0) = 1.$ **[3]**

Sistema era normalean idatziz,

$$x' = 4x + y - 36t \quad [4], \qquad y' = -2x + y - 2e^{t}. \quad [5]$$

Sistemaren koordenatu batekiko, adibidez x(t)-rekiko, asoziaturiko bigarren ordenako ekuazio bat aurkitzeko, deribazio eta ordezkaketa-prozesu bat segituko da. Hain zuzen, [4]-a deribatu eta [5]-ean ordezkatuz,

$$x'' = 4x' + y' - 36 = 4x' - 2x + y - 2e^{t} - 36. \qquad [6]$$

Orain, [4]-tik y bakandu eta [6]-an ordezkatuko da:

$$y = x' - 4x + 36t \quad [7], \xrightarrow{[6]} x'' - 5x' + 6x = 36t - 36 - 2e^{t}. [8]$$

[8] adierazpena integratuz, x(t)-rekiko erantzuna lortu dugu.

Homogeno asoziatuaren soluzioa:

$$r^2 - 5r + 6 = 0 \longrightarrow r = 2;\ r = 3 \Rightarrow x_h = C_1 e^{2t} + C_2 e^{3t}.$$

[8]-aren soluzio partikularra:

$$X = At + B + Ce^{t} \longrightarrow X' = A + Ce^{t} \longrightarrow X'' = Ce^{t} \xrightarrow{[8]}$$

$$6At + 6B - 5A + 2Ce^{t} = 36t - 36 - 2e^{t} \longrightarrow A = 6, \quad B = C = -1 \Rightarrow$$

$$X = 6t - 1 - e^{t}.$$

[8]-aren soluzio orokorra: $x = x_h + X$:

$$x(t) = C_1e^{2t} + C_2e^{3t} + 6t - 1 - e^{t}. \qquad [9]$$

y(t)-rekiko erantzuna, [7]-tik: $y = x' - 4x + 36t \longrightarrow$

$$y = 2C_1e^{2t} + 3C_2^{3t} + 6 - e^{t} - 4(C_1e^{2t} + C_2e^{3t} + 6t - 1 - e^{t}) + 36t$$

$$\Rightarrow \qquad y = -2C_1e^{2t} - C_2e^{3t} + 12t + 10 + 3e^{t}. \qquad [10]$$

Sistemaren soluzio partikularra:

Hastapen-baldintzak [9] eta [10]-ean ordezkatuko dira, hots,

$$x(0) = 0 \longrightarrow C_1 + C_2 - 2 = 0, \quad y(0) = 1 \longrightarrow -2C_1 - C_2 + 13 = 1 \longrightarrow$$

$$C_1 = 10, \quad C_2 = -8 \quad \Rightarrow$$

$$x(t) = 10e^{2t} - 8C_2^{3t} + 6t - 1 - e^{t}, \qquad [11]$$

$$y(t) = -20e^{2t} + 8C_2^{3t} + 12t + 10 + 3e^{t}. \qquad [12]$$

55. Ebatzi ekuazio diferentzialetako ondoko sistema,

$x' - y' + 2x - 6t - 1 = 0$ [1] , $x' + y' - 4x + 4t + 3 = 0$ [2]

hastapen-baldintzak $x(0) = y(0) = 0$ direlarik, [3]

a) laburtze-metodoa erabiliz.

b) eragile-kalkulua erabiliz.

---

a) Hasteko, sistemaren adierazpen normala kalkulatu behar da, [1]-[2] direlakoak x' eta y' deribatuekiko ebatziz.

$$\begin{cases} x' = x + 2y + t - 1, & [4] \\ y' = 3x + 2y - 5t - 2. & [5] \end{cases}$$

[4] ekuazioa deribatu eta y'-ean [5] delakoa ordezkatuko dugu:

$$x'' = x' + 2y' - 5 \xrightarrow{[5]} x'' = x' + 6x + 4y - 10t - 3. \quad [6]$$

[4] ekuazioa y-rekiko ebatzi eta emaitza [6]-an ordezkatuz,

$$y = \frac{1}{2}(x' - x - t + 1) \quad [7] \xrightarrow{[6]} x'' - 3x' - 4x = -(12t + 1). [8]$$

<u>x(t) soluzioa:</u>

Homogenoaren soluzioa: $r^2 - 3r - 4 = 0 \longrightarrow r = -1 , r = 4 \longrightarrow$

$$x_h = C_1e^{-t} + C_2e^{4t}.$$

[8]-aren soluzio partikularra:

$$X = At + B \longrightarrow X' = A \longrightarrow X'' = 0 \xrightarrow{[8]} -3A - 4(At+B) = -(12t+1)$$

$$\longrightarrow A = 3 \text{ , } B = -2 \quad \Rightarrow \quad X = 3t - 2$$

$$x = x_h + X \longrightarrow x(t) = C_1 e^{-t} + C_2 e^{4t} + 3t - 2. \qquad [9]$$

y(t) soluzioa:

Nahikoa da [9] erlazioa deribatu eta [7]-an ordezkatzea:

$$x' = -C_1 e^{-t} + 4C_2 e^{4t} + 3 \xrightarrow[{[7]}]{[9]} y(t) = -C_1 e^{-t} + \frac{3}{2} C_2 e^{4t} - 2t + 3. \qquad [10]$$

Sistemaren soluzio partikularra:

[3] baldintzen arabera, ondokoa dugu:

$$\left\{ \begin{array}{l} x(0) = 0 \xrightarrow{[9]} C_1 + C_2 - 2 = 0 \\ y(0) = 0 \xrightarrow{[10]} -C_1 + 3C_2/2 - 2 = 0 \end{array} \right. \longrightarrow C_1 = 12/5 \text{ , } C_2 = -2/5.$$

[9]-[10] soluzio orokorrean ordezkatuz, hurrengoa ondorioztuko da:

$$\left\{ \begin{array}{ll} x(t) = \dfrac{12e^{-t} - 2e^{4t}}{5} + 3t - 2, & [11] \\ y(t) = -\dfrac{12e^{-t} + 3e^{4t}}{5} - 2t + 3. & [12] \end{array} \right.$$

b) $\mathfrak{L}$ eragilea [1]-[2] sistemari aplikatuz, eta [3] hastapen-baldintzak ordezkatuz, hurrengoa ondoriozta daiteke:

$$\left\{\begin{array}{l} pX(p) - x(0) - pY(p) + y(0) + 2X(p) - 6/p^2 - 1/p = 0 \\ pX(p) - x(0) + pY(p) - y(0) - 4X(p) - 4Y(p) + 4/p^2 + 3/p = 0 \end{array}\right. \longrightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{ll} (p+2)X(p) - \quad pY(p) = (6+p)/p^2, & [4] \\ (p-4)X(p) + (p-4)Y(p) = -(4+3p)/p^2. & [5] \end{array}\right.$$

X(p) eta Y(p)-rekiko ebatziz, ondoko emaitzak lortuko dira:

$$X(p) = \frac{\begin{vmatrix} (6+p)/p^2 & -p \\ -(4+3p)/p^2 & p-4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} p+2 & -p \\ p-4 & p-4 \end{vmatrix}} = -\frac{p^2 + p + 12}{p^2(p+1)(p-4)}, \qquad [6]$$

$$Y(p) = \frac{\begin{vmatrix} p+2 & (6+p)/p^2 \\ p-4 & -(4+3p)/p^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} p+2 & -p \\ p-4 & p-4 \end{vmatrix}} = -\frac{2p^2 + 6p - 8}{p^2(p+1)(p-4)}. \qquad [7]$$

$\mathfrak{L}^{-1}$ eragilea aplikatu baino lehen, [6] eta [7] ekuazioak frakzio sinpleetan deskonposatu behar dira. [6] delakorako ondokoa dugu:

$$-\frac{p^2 + p + 12}{p^2(p+1)(p-4)} = \frac{A}{p^2} + \frac{B}{p} + \frac{C}{p+1} + \frac{D}{p-4} =$$

$$= \frac{A(p+1)(p-4) + Bp(p+1)(p-4) + Cp^2(p-4) + Dp^2(p+1)}{p^2(p+1)(p-4)}.$$

Zenbakitzaileen berdintzan p delakoari erroen 0, 4 eta -1 balioak ordezkatuz, eta lehen mailako gaiak identifikatuz, koefizienteak determina daitezke.

$p = 0 : -12 = -4A \longrightarrow \mathbf{A = 3}$, $\quad p = 4 : -32 = 80D \longrightarrow \mathbf{D = -2/5}$,

$p = -1: -12 = -5C \longrightarrow \mathbf{C = 12/5}$, 1. maila: $-1 = -3A-4B \longrightarrow \mathbf{B = -2}$.

Era berean, [7] ekuazioaren kasuan, frakzioaren zenbakitzailea aldatuta, honakoa ondoriozta daiteke:

$p = 0 : \ 8 = -4A \longrightarrow \mathbf{A = -2}$, $\quad p = 4 : -48 = 80D \longrightarrow \mathbf{D = -3/5}$,

$p = -1: 12 = -5C \longrightarrow \mathbf{C = -12/5}$, 1. maila : $-6 = -3A-4B \longrightarrow \mathbf{B = 3}$.

Modu honetan, hurrengo transformatuak lor daitezke:

$$X(p) = -\frac{p^2 + p + 12}{p^2(p + 1)(p - 4)} = \frac{3}{p^2} - \frac{2}{p} + \frac{12/5}{p + 1} - \frac{2/5}{p - 4}, \qquad [8]$$

$$Y(p) = -\frac{2p^2 + 6p - 8}{p^2(p + 1)(p - 4)} = -\frac{2}{p^2} + \frac{3}{p} - \frac{12/5}{p + 1} - \frac{3/5}{p - 4}. \qquad [9]$$

Transformatu hauen alderantzizkoak hurrengoak dira:

$$x(t) = \mathfrak{L}^{-1}[X(p)] = 3t - 2 + \frac{12e^{-t} - 2e^{4t}}{5}, \qquad [10]$$

$$y(t) = \mathfrak{L}^{-1}[Y(p)] = -2t + 3 - \frac{12e^{-t} + 3e^{4t}}{5}. \qquad [11]$$

56. Laplace-ren transformatua aplikatuz, aurkitu sistema hauen soluzio partikularrak, x(t) koordenatuarekiko:.

$$\begin{cases} x' = x + y - e^{2t} \\ y' = -x + 2y + z + e^{2t} \\ z' = x + z + e^{2t} \end{cases}, \quad x(0) = 1 \text{ , } y(0) = z(0) = 0. \quad \text{[a]}$$

$$\begin{cases} x''(t) + y'(t) - 4x(t) + 12 = 0, \\ y''(t) - 10x'(t) - y(t) + 7 = 0, \\ x(0) = y(0) = x'(0) = y'(0) = 0. \end{cases} \quad \text{[b]}$$

---

[a] sistema. Sistemari eragile zuzena aplikatuko zaio,

$$\begin{cases} pX(p) - x(0) = X(p) + Y(p) - 1/(p-2) \\ pY(p) - y(0) = -X(p) + 2Y(p) + Z(p) + 1/(p-2) \\ pZ(p) - z(0) = X(p) + Z(p) + 1/(p-2) \end{cases} \longrightarrow$$

$$\begin{cases} (p-1)X(p) - Y(p) = (p-3)/(p-2), \\ X(p) + (p-2)Y(p) + Z(p) = 1/(p-2), \\ -X(p) + (p-1)Z(p) = 1/(p-2), \end{cases}$$

eta X(p) transformatuarekiko ebatziko da:

$$X(p) = \frac{p^3 - 6p^2 + 12p - 6}{(p-2)^2(p^2 - 2p + 2)}.$$

Frakzio sinpleetako deskonposaketa eginez,

$$X(p) = A/(p-2)^2 + B/(p-2) + (Cp+D)/(p^2-2p+2) \longrightarrow p^3 - 6p^2 + 12p - 6$$

$$= A(p^2 - 2p + 2) + B(p-2)(p^2 - 2p + 2) + (Cp + D)(p-2)^2 \longrightarrow$$

3. maila: $1 = B + C$; 2. maila: $-6 = A - 4B - 4C + D$,

1. maila: $12 = -2A + 6B + 4C - 4D$, 0 maila: $-6 = 2A - 4B + 4D$.

Soluzioa: $A = 1$, $B = -1$, $C = 2$, $D = -3$ $\longrightarrow$

Beraz, $$X(p) = \frac{1}{(p-2)^2} + \frac{1}{p-2} + \frac{2(p-1)-1}{(p-1)^2+1} .$$

Alderantzizko eragilea aplikatuz, ondokoa lortuko da:

$$x(t) = \mathfrak{L}^{-1}[X(p)] = te^{2t} - e^{2t} + 2e^{t}\cos t - e^{t}\sin t.$$

---

[b] sistema:

$$\begin{cases} x''(t) + y'(t) - 4x(t) + 12 = 0 \\ y''(t) - 10x'(t) - y(t) + 7 = 0 \\ x(0) = y(0) = x'(0) = y'(0) = 0 \end{cases} \xrightarrow{\mathfrak{L}}$$

$$\begin{cases} p^2X(p) + pY(p) - 4X(p) + \dfrac{12}{p} = 0 \\ p^2Y(p) - 10pX(p) - Y(p) + \dfrac{7}{p} = 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} (p^2-4)X(p) + pY(p) = \dfrac{-12}{p} , \\ -10pX(p) + (p^2-1)Y(p) = \dfrac{-7}{p} . \end{cases}$$

Sistema honetatik, X(p)-rako ondoko emaitza ondoriozta daiteke:

$$X(p) = \frac{-12p^2 + 7p + 12}{p(p^2+1)(p^2+4)} = \frac{3}{p} + \frac{-8p + 7/3}{p^2+1} + \frac{5p - 7/3}{p^2+4} .$$

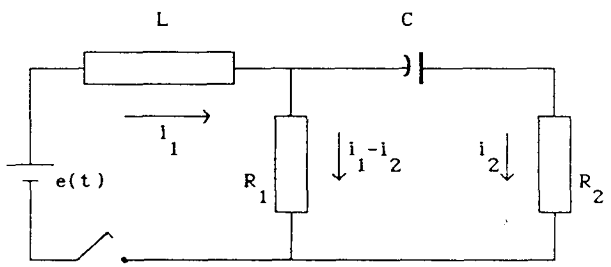
Ondorioz, [b] sistemaren x(t)-rekiko soluzioa ondokoa da:

$$x(t) = \mathfrak{L}^{-1}[X(p)] = 3 - 8\cos t + \frac{7}{3}\sin t + 5\cos 2t - \frac{7}{6}\sin 2t.$$

57. Kirchoff-en legeen arabera, irudiko sistema elektrikoa mugatzen duten $i_1(t)$ eta $i_2(t)$ koordenatuek ondoko ekuazio-sistema beteko dute:

$$\begin{cases} Li'_1 + R_1(i_1 - i_2) = e(t), \\ R_2 i_2 + R_1(i_2 - i_1) + \dfrac{1}{C}\displaystyle\int_0^t i_2 dt = 0. \end{cases}$$

Etengailua ixtean kondentsadoreko karga eta sareko intentsitateak nuluak direla jakinik, determina bitez $i_1(t)$, $i_2(t)$ eta $q(t)$, hurrengo kasuan:



$R_1 = 200$, $R_2 = 300$,

$L = 0{,}5$, $e(t) = 50$,

$C = 50.10^{-6}$.

Zenbakizko datuak ordezkatu eta sistema ordenatu egin behar da:

$$\begin{cases} i'_1 + 400i_1 - 400i_2 = 100, \\ -2i_1 + 5i_2 + 200\displaystyle\int_0^t i_2 dt = 0. \end{cases} \qquad [1]$$

Laplace-ren eragilea aplikatuko da, $i_1(0) = i_2(0) = 0$ izanik:

$$\begin{cases} pI_1(p) - i_1(0) + 400I_1(p) - 400I_2(p) = \dfrac{100}{p} \\ -2I_1(p) + 5I_2(p) + \dfrac{200}{p} I_2(p) = 0 \end{cases} \longrightarrow$$

$$\begin{cases} (p+400)I_1(p) - \qquad 400I_2(p) = \dfrac{100}{p}, \\ \\ \qquad -2I_1(p) + \dfrac{5p+200}{p} I_2(p) = 0. \end{cases} \qquad [2]$$

[2] sistemaren emaitzak ondokoak dira:

$$I_1(p) = \frac{100p + 4000}{p(p+80)(p+200)} \quad [3], \quad I_2(p) = \frac{40}{(p+80)(p+200)}. [4]$$

Hauek frakzio sinpleetan deskonposatuko ditugu:

$$I_1(p) = \frac{100p + 4000}{p(p+80)(p+200)} = \frac{A}{p} + \frac{B}{p+80} + \frac{C}{p+200} \longrightarrow$$

$$100p + 4000 = A(p+80)(p+200) + Bp(p+200) + Cp(p+80).$$

$p = 0 \quad : \quad 4000 = 16000A \longrightarrow A = 1/4,$

$p = -80 \quad : \quad -40000 = -9600B \longrightarrow B = 5/12,$

$p = -200 : \quad -16000 = -24000C \longrightarrow C = -2/3,$

$$I_1(p) = \frac{1/4}{p} + \frac{5/12}{p+80} - \frac{2/3}{p+200}. \qquad [5]$$

Era berean, [4] adierazpenari dagokionez, hurrengoa lor daiteke:

$$I_2(p) = \frac{40}{(p+80)(p+200)} = \frac{B}{p+80} + \frac{C}{p+200} \longrightarrow 40 = B(p+200) + C(p+80),$$

$p = -80 \quad : \quad 40 = 120B \longrightarrow B = 1/3,$

$p = -200 \; : \quad 40 = -120C \longrightarrow C = -1/3,$

$$I_2(p) = \frac{1/3}{p + 80} - \frac{1/3}{p + 200} \; . \qquad [6]$$

Sarean zehar doazen sistemak duen korronte-intentsitateekiko erantzuna, [5] eta [6] adierazpenei alderantzizko eragilea aplikatuz kalkula dezakegu.

$$i_1(t) = \mathfrak{L}^{-1}\left(\frac{1/4}{p} + \frac{5/12}{p+80} - \frac{2/3}{p+200} \right) = \frac{1}{4} + \frac{5}{12}\, e^{-80t} - \frac{2}{3}\, e^{-200t}. \qquad [7]$$

$$i_2(t) = \mathfrak{L}^{-1}\left(\frac{1/3}{p+80} - \frac{1/3}{p+200} \right) = \frac{1}{3}\, e^{-80t} - \frac{1}{3}\, e^{-200t}. \qquad [8]$$

Kondentsadoreko kargaren kalkulua:

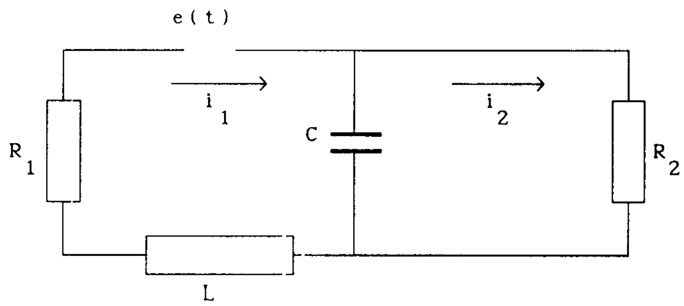
Definizioa aplikatuta, ondoko eran kalkula dezakegu:

$$q(t) = \int_0^t i_2(t)dt = \frac{1}{3}\int_0^t (e^{-80t} - e^{-200t})dt = \frac{1}{3}\left| \frac{-e^{-80t}}{80} + \frac{e^{-200t}}{200} \right|_0^t \Rightarrow$$

$$q(t) = -\frac{1}{240}\, e^{-80t} + \frac{1}{600}\, e^{-200t} + \frac{1}{400} \; . \qquad [9]$$

---

58. Determinatu irukiko zirkuitu elektrikoko $i_1(t)$ eta $i_2(t)$ korronteak eta kondentsadoreko q(t) karga, $i_1(0) = i_2(o) = 0$ eta $q(0) = 0$ direla jakinik.



$$R_1 = R_2 = 10\ \Omega\ ,\quad L = 1\ H\ ,\quad C = 0{,}01\ F\ ,\quad e(t) = 500\sin 10t\ V.$$

Kirchoff-en legeen bidezko sarearen analisitik, ondoko ekuazio-sistema ondorioztа daiteke:

$$\begin{cases} R_1 i_1(t) + L\ i_1'(t) + R_2 i_2(t) = e(t) & [1] \\ R_2 i_2(t) + \dfrac{1}{C}\displaystyle\int_0^t [i_2(t) - i_1(t)]dt = 0 & [2] \end{cases}$$

$i_1(0) = 0$ izanik, zenbakizko balioak ordezkatu eta ($\mathfrak{L}$) aplikatuz, hurrengoa lortuko da:

$$\begin{cases} 10i_1 + i_1' + 10i_2 = 500\sin 10t \\ i_2 + 10\displaystyle\int_0^t (i_2 - i_1)dt = 0 \end{cases} \xrightarrow{\mathfrak{L}} \begin{cases} 10I_1 + pI_1 + 10I_2 = \dfrac{5000}{p^2+100} \\ I_2 + \dfrac{10}{p}(I_2 - I_1) = 0 \end{cases} \longrightarrow$$

$$\begin{cases} (10+p)I_1(p) + \quad 10I_2(p) = \dfrac{5000}{p^2+100}, & [3] \\ \\ -10I_1(p) + (p+10)I_2(p) = 0. & [4] \end{cases}$$

Sistema honen soluzioa ondokoa da:

$$I_1 = \frac{5000(p+10)}{(p^2+100)(p^2+20p+200)} \; [5], \quad I_2 = \frac{50000}{(p^2+100)(p^2+20p+200)}. [6]$$

Alderantzizko eragilea aplikatu baino lehen, [5] eta [6] adierazpenak deskonposatu egin beharko dira.

$$I_1(p) = \frac{5000(p+10)}{(p^2+100)(p^2+20p+200)} = \frac{Ap+B}{p^2+100} + \frac{Cp+D}{p^2+20p+200} \longrightarrow$$

$$5000(p + 10) = (Ap + B)(p^2 + 20p + 200) + (Cp + D)(p^2 + 100).$$

Maila bereko gaien koefizienteak identifikatuz, A, B, C eta D konstanteak determina daitezke:

3. maila: $A + C = 0$, 2. maila: $20A + B + D = 0$,

1. maila: $20A + 2B + 10C = 500$, 0 maila: $2B + D = 500$.

Beraz: $A = -10$, $B = 300$, $C = 10$, $D = -100$ dira.

$(p^2 + 20p + 200) \equiv (p + 10)^2 + 100$ denez, $I_1(p)$ honako eran idatz daiteke:

$$I_1 = -10 \frac{p}{p^2+100} + 30 \frac{10}{p^2+100} + 10 \frac{p+10}{(p+100)^2+100} - 20 \frac{10}{(p+100)^2+100}.$$

Beraz, alderantzizko transformaziotik ondoko emaitza lortuko da:

$$i_1(t) = \mathfrak{L}^{-1}[I_1(p)] = -10\cos t + 30\sin t + 10e^{-10t}(\cos 10t - 2\sin 10t).$$

Era berean eraginez, ondokoa lortuko da:

$$I_2 = -20\,\frac{p}{p^2+100} + 10\,\frac{10}{p^2+100} + 20\,\frac{p+10}{(p+100)^2+100} + 10\,\frac{10}{(p+100)^2+100},$$

$$i_2(t) = \mathfrak{L}^{-1}[I_2(p)] = -20\cos t + 10\sin t + 10e^{-10t}(2\cos 10t + \sin 10t).$$

<u>Kargaren kalkulua</u>:

Kondentsadorearen egoeraren arabera, $q(t) = \int_0^t (i_1 - i_2)dt$

$$= \int_0^t [10\cos 10t + 20\sin 10t - 10e^{-10t}(\cos 10t + 3\sin 10t)]dt \quad \text{da.}$$

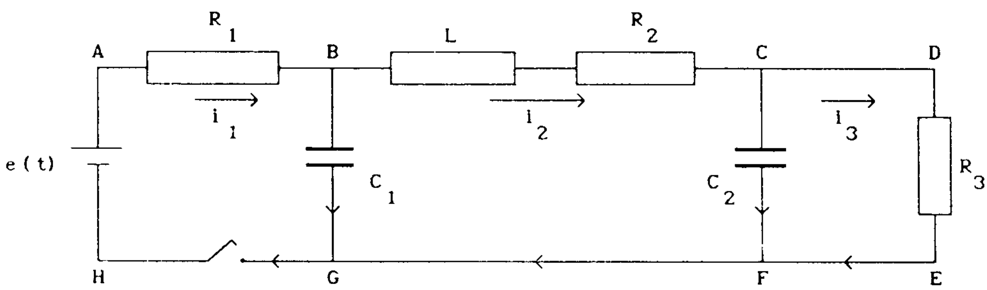
Zatikako integrazioaren bidez,

$$q(t) = \sin 10t - 2\cos 10t + e^{-10t}(\sin 10t + \cos 10t)$$

emaitzara helduko gara.

59. Biz irudiko zirkuitu elektrikoa, beraren koordenatuak sareetatik doazen $i_1(t)$, $i_2(t)$ eta $i_3(t)$ korronte-intentsitateak direlarik.

Lortu $i_1(t)$ intentsitatea, ondoko datuak ezagutuz: e(t) tentsioa maila-funtzio bat da, kondentsadoreen artean boltaiarik ez dago, eta etengailua ixterako unean korronte guztiak nuluak dira.



$$R_1 = R_2 = R_3 = 1000 \ , \quad C_1 = C_2 = 20.10^{6} \ , \quad L = 20 \ , \quad e = 1.$$

Zirkuituari asoziaturiko sistema integro-diferentziala:

ABGH sarea: $1000 i_1 + 5.10^4 \int_0^t (i_1 - i_2)dt = u_0$,

BCFG sarea: $20 i_2' + 1000 i_2 + 5.10^4 \int_0^t (i_2 - i_1)dt + 5.10^4 \int_0^t (i_2 - i_3)dt,$

CDEF sarea: $1000 i_3 + 5.10^4 \int_0^t (i_3 - i_2)dt.$

Hastapen-baldintzak: $q_1(0) = q_2(0) = i_1(0) = i_2(0) = i_3(0) = 0.$

Sistema integro-diferentzialaren algebrizazioan, $\mathcal{L}$ aplikatuko da:

$$1000I_1 + 5.10^4(I_1 - I_2)/p = 1/p, \qquad [1]$$

$$20pI_2 + 1000I_2 + 5.10^4(I_2 - I_1)/p + 5.10^4(I_2 - I_3)/p = 0, \qquad [2]$$

$$1000I_3 + 5.10^4(I_3 - I_2)/p = 1/p. \qquad [3]$$

Sistema algebraikoa ordenatuz, eta $I_1(p)$-rekiko ebatziz,

$$I_1(p) = \frac{p^3 + 100p^2 + 7500p + 125000}{1000p(p + 50)(p^2 + 100p + 7500)} \qquad [4]$$

dugu, beronen frakzio sinpleetako deskonposaketa hauxe delarik:

$$1000I_1(p) = \frac{1/3}{p} + \frac{1/2}{p + 50} + \frac{p/6 - 25/3}{(p^2 + 100p + 7500)}. \qquad [5]$$

Azken frakzioaren alderantzizkoa kalkulatzeko, honela egingo da:

$$\frac{p/6 - 25/3}{(p^2 + 100p + 7500)} = \frac{1}{6}\,\frac{p + 50}{(p+50)^2 + (50\sqrt{2})^2} - \frac{1}{3\sqrt{2}}\,\frac{50\sqrt{2}}{(p+50)^2 + (50\sqrt{2})^2}.$$

[5]-ari alderantzizko eragilea aplikatuta, $i_1(t)$-erako emaitza:

$$i_1(t) = 10^{-3}\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2}\,e^{-50t} + \frac{1}{6}\,e^{-50t}\cos 50\sqrt{2}t - \frac{1}{3\sqrt{2}}\,e^{-50t}\sin 50\sqrt{2}t \right) \rightarrow$$

$$i_1(t) = \frac{10^{-3}}{6}\left(2 + e^{-50t}(3 + \cos 50\sqrt{2}t - \sqrt{2}\sin 50\sqrt{2}t) \right).$$

60. Hautazko ϕ funtzioa ezabatuz, aurki bitez ondoko erlazio funtzionalei dagozkien ekuazio diferentzialak:

$\phi(x^2 + y^2 + z^2, xyz^2) = 0$ [a] , $z = e^y \phi(y e^{x^2/2y^2})$. [b]

---

[a] ekuazioa. Deriba dezagun x eta y-rekiko , u eta v funtzio laguntzaileen bidez.

$$u = x^2 + y^2 + z^2, \quad v = xyz^2 \text{ izanik,} \qquad \phi(u, v) = 0.$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial\phi}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} = 0 \longrightarrow (2x + 2zp)\frac{\partial\phi}{\partial u} + (yz^2 + 2xyzp)\frac{\partial\phi}{\partial v} = 0, \quad [1]$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial\phi}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} = 0 \longrightarrow (2y + 2zq)\frac{\partial\phi}{\partial u} + (xz^2 + 2xyzq)\frac{\partial\phi}{\partial v} = 0, \quad [2]$$

non $p = \dfrac{\partial z}{\partial x}$ eta $q = \dfrac{\partial z}{\partial y}$ diren.

ϕ funtzioa deribagarria dela suposatuz, sistema homogenoaren bateragarritasunak ondoko determinantearen anulazioa eskatzen du:

$$\begin{vmatrix} 2x + 2zp & yz^2 + 2xyzp \\ 2y + 2zq & xz^2 + 2xyzq \end{vmatrix} = 0 \longrightarrow \quad [3]$$

$$(2x + 2zp)(xz^2 + 2xyzq) - (2y + 2zq)(yz^2 + 2xyzp) = 0 \quad \Rightarrow$$

$$x(2y^2 - z^2)p + y(z^2 - 2x^2)q = z(x^2 - y^2). \quad [4]$$

Azken ekuazio hau deribatu partzialetako lehen ordenako ekuazio ekuazio diferentzial lineala da.

---

[b] ekuazioa. Oraingoan u aldagai laguntzaileaz baliatuko gara.

$$u = ye^{x^2/2y^2} \text{ izanik,} \qquad z = e^y\phi(u). \qquad [1]$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} \equiv p = \frac{dz}{du}\frac{\partial u}{\partial x} \longrightarrow p = e^y\phi'(u)\,\frac{x}{y}\,e^{x^2/2y^2}, \qquad [2]$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} \equiv q = \frac{dz}{du}\frac{\partial u}{\partial y} \longrightarrow q = e^y\left[\phi(u) + \phi'(u)\left(e^{x^2/2y^2}\,\frac{y^2 - x^2}{y^2}\right)\right]. \qquad [3]$$

Hautazko funtzioa ezabatzeko, [1]-eko ϕ funtzioa eta [2]-ko ϕ' funtzioa hartu eta [3]-an ordezkatzea nahikoa da:

$$q = e^y\left[ze^{-y} + \frac{yp}{x}\,e^{-y}e^{-x^2/2y^2}e^{x^2/2y^2}\,\frac{y^2 - x^2}{y^2}\right] = z + p\,\frac{y^2 - x^2}{xy}\,.$$

Hortik,

$$(x^2 - y^2)p + xyq = xyz \qquad [4]$$

ekuazio lineala ondorioztatuko da.

---

61. Hautazko konstanteen ezabapenaren bidez, aurki bitez ondoko jatorrizkoei dagozkien ekuazio diferentzialak:

$$x + z - Cxy = 0 \quad [a], \qquad (z + A - Bx^2)^2 - 2B(y^2 - 1) = 0, \quad [b]$$

$$z = Ax - AB + By(2 - y). \quad [c]$$

---

[a] ekuazioa. C konstantearekiko ebatziz, eta gero diferentziatuz, ekuazio diferentzial total bat lortuko da:

$$x + z - Cxy = 0 \longrightarrow C = \frac{x + z}{xy} \xrightarrow{d}$$

$$\frac{xy - y(x + z)}{x^2y^2}\,dx - \frac{x + z}{xy^2}\,dy + \frac{1}{xy}\,dz = 0 \quad \Rightarrow$$

$$yzdx + x(x + z)dy - xydz = 0.$$

---

[b] ekuazioa. Kasu honetan, x eta y aldagaiekiko deribatu, eta ondoko hiru ekuazioen artean A eta B ezabatu behar dira:

$$(z + A - Bx^2)^2 - 2B(y^2 - 1) = 0, \qquad [b]$$

$$\xrightarrow{\partial/\partial x} \qquad 2(z + A - Bx^2)(p - 2Bx) = 0, \qquad [1]$$

$$\xrightarrow{\partial/\partial y} \qquad 2(z + A - Bx^2)q - 4By = 0. \qquad [2]$$

[2] adierazpenetik: $z + A - Bx^2 = 2By/q.$

Jatorrizkoan ordezkatuz, B kalkulatuko da, eta azken hau [1]-ean ordezkatuz, emaitzara helduko gara:

$$4B^2y^2/q^2 - 2B(y^2 - 1) = 0 \longrightarrow B = (y^2 - 1)q^2/2y^2,$$

$$2(z+A-Bx^2)(p-2Bx) = 0 \longrightarrow p - 2Bx = 0 \longrightarrow p - x(y^2 - 1)q^2/y^2 = 0 \longrightarrow$$

$$y^2p + x(1 - y^2)q^2 = 0.$$

---

[c] ekuazioa. Orain z explizituki emanik dator. Deribaketa eta geroko parametroen ezabapena berehalakoak dira. Ikus dezagun nola.

$$z = Ax - AB + By(2 - y) \longrightarrow \begin{cases} p = A \\ q = 2B - 2By \longrightarrow B = q/2(1-y) \end{cases} \Rightarrow$$

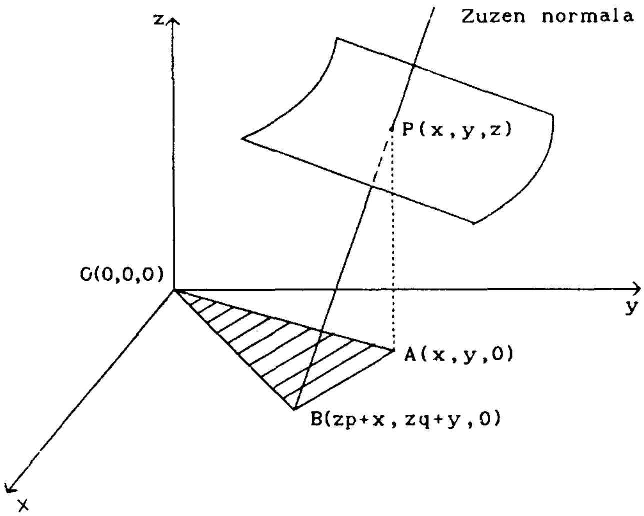
$$z = xp - \frac{pq}{2(1-y)} + \frac{y(2-y)q}{2(y-1)} = 0 \longrightarrow pq + 2(1-y)(xp-z) + y(y-2)q = 0.$$

---

62. Kalkula bedi hurrengo propietatea betetzen duten gainazalei dagokien ekuazio diferentziala: *"Bira P(x,y,z) puntua, O jatorria, XOY planoaren gaineko P-ren A(x,y,0) projekzioa, eta gainazalarekiko normalaren eta XOY planoaren arteko B ebakidura-puntua. P(x,y,z) puntu bakoitzerako O, A(x,y,0) eta B erpinetako triangeluaren azalera, P puntuaren x abzisarekiko proportzionala da".*

Aurki bedi ekuazioaren integral-sorta orokorra, eta aukera bedi OY ardatza barnean daukan gainazal integrala.

Ondoko grafikoan aipatutako propietatea duen triangelua ikus dezakegu.



B-ren koordenatuak bilatzeko, $z = z(x,y)$ ekuazioko σ gainazal batekiko zuzen normala $z = 0$ planoarekin ebaki behar da:

σ-rekiko bektore normala: $\bar{n} = [\partial z/\partial x,\ \partial z/\partial y,\ -1] \equiv [p,\ q,\ -1]$.

σ-rekiko zuzen normala, P(x,y,z) puntuan: $\dfrac{X - x}{p} = \dfrac{Y - y}{q} = \dfrac{Z - z}{-1}$.

Zuzenaren ebakidura, XOY planoarekin: $Z = 0$ egin behar da.

$$\frac{X - x}{p} = z \longrightarrow X = zp + x \; ; \quad \frac{Y - y}{q} = z \longrightarrow Y = zq + y.$$

Ebakidura-puntuaren koordenatuak: $B(zp + x,\ zq + y,\ 0)$.

O, A eta B erpinetako triangeluaren azalera:

$$S = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ x & y & 0 \\ zp + x & zq + y & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}(yzp - xzq).$$

Enuntziatutako propietatearen arabera, hurrengo ekuazioa lor daiteke:

$$S = kx \longrightarrow \frac{1}{2}(yzp - xzq) = kx \quad \Rightarrow \quad yz\frac{\partial z}{\partial x} - xz\frac{\partial z}{\partial y} = 2kx. \qquad [1]$$

Deribatu partzialetako ekuazio diferentzial hau integratzeko, sistema diferentzial kanonikoaren bi integral determinatu behar dira:

$$dx/yz = -dy/xz = dz/2kx, \qquad [2]$$

$$dx/yz = -dy/xz \longrightarrow 2xdx + 2ydy = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 = C, \qquad [3]$$

$$-dy/xz = dz/2kx \longrightarrow 4kdy + 2zdz = 0 \Rightarrow 4ky + z^2 = D. \qquad [4]$$

Beraz, [1] adierazpenaren integral orokorra hautazko ondoko erlazio funtzionala da:

$$\phi(x^2 + y^2, 4ky + z^2) = 0, \qquad [5]$$

zeina [3]-[4] ekuazioez definituriko kurbez (sortzaileez) osoturik dagoen gainazal-familia bat den.

Integral partikularra:

ϕ delakoa finkatzeko bilatzen ari garen gainazaleko kurba zuzentzaile bat ezagutu behar da, OY ardatza alegia. Beraz, sortzailearen eta kurba-kongruentziaren [3]-[4] ekuazioetatik x, y eta z aldagaiak ezabatu behar dira.

$$x^2 + y^2 = C \;\; [3], \quad 4ky + z^2 = D \;\; [4], \quad x = 0 \;\; [6], \quad z = 0 \;\; [7] \longrightarrow$$

$$y^2 = C\,, \quad 4ky = D \longrightarrow (D/4k)^2 = C \Rightarrow D^2 - 16k^2C = 0. \qquad [8]$$

[3] eta [4] adierazpenak [8]-an ordezkatuz, eskatutako gainazala lortuko da:

$$(4ky + z^2)^2 - 16k^2(x^2 + y^2) = 0. \qquad [9]$$

---

63. Kalkula bitez deribatu partzialetako ekuazio hauei dagozkien gainazal integralak:

$$\text{[a]} \quad \begin{cases} xy(p - q) - (x - y)z = 0, \\ \text{Zuzentzailea: } y^2 + z^2 = x^2, \; z = 1. \end{cases}$$

$$\text{[b]} \quad \begin{cases} 2xyp + (y^2 - x^2 - z^2)q = 2yz, \\ \text{Zuzentzailea: } x = 2\cos t, \quad y = 2\sin t, \quad z = 2. \end{cases}$$

---

[a] ekuazioa. Lehen ordenako ekuazio lineala da, zeinaren sistema diferentzial karakteristikoa ondokoa den:

$$xyp - xyq = (x - y)z \longrightarrow \frac{dx}{xy} = \frac{dy}{-xy} = \frac{dz}{(x - y)z}. \qquad [1]$$

Sistemaren integralak:

Lehenengo ekuaziotik: $\qquad dx + dy = 0 \xrightarrow{\int} x + y = A. \qquad [2]$

[2] ekuazioa $\dfrac{dx}{xy} = \dfrac{dz}{(x - y)z}$ berdintzan ordezkatuz gero, hauxe dugu:

$$\frac{dx}{xy} = \frac{dz}{(x-y)z} \xrightarrow{y=A-x} \frac{dx}{x(A-x)} = \frac{dz}{(2x-A)z} \longrightarrow \frac{2x-A}{x(A-x)}\,dx - \frac{1}{z}\,dz = 0$$

$$[1/x - 1/(A-x)]dx + dz/z = 0 \xrightarrow{\int} \mathrm{Ln}|x| + \mathrm{Ln}|A-x| + \mathrm{Ln}|z| = C \longrightarrow$$

$$x(A - x)z = B \xrightarrow{A=x+y} xyz = B. \qquad [3]$$

[a]-ren soluzio orokorra hautazko dependentzia funtzional bat da:

$$\phi(x + y, xyz) = 0. \qquad [4]$$

Integral partikular bat determinatzeko, ϕ finkatu behar da. Hori, x, y eta z aldagaiak, [2] eta [3] integral eta kurba zuzentzailearen ekuazioen artean ezabatuz lortuko da:

$$x + y = A\ ,\quad xyz = B\ ,\quad y^2 + z^2 = x^2\ ,\quad z = 1 \longrightarrow$$

$$x(A - x) = B,\ (A - x)^2 + 1 = x^2 \longrightarrow x(A - x) = B,\ A^2 - 2Ax + 1 = 0$$

$$\longrightarrow \quad x(A - x) = B\ ,\quad A = \frac{A^2 + 1}{2A} \quad \Rightarrow \quad A^4 - 4A^2B - 1 = 0. \qquad [5]$$

[2]-[3] integralak [5] berdintzan ordezkatuz, ondokoa lor daiteke:

$$(x + y)^4 - 4(x + y)^2xyz - 1 = 0. \qquad [6]$$

---

[b] ekuazioa: $\qquad 2xyp + (y^2 - x^2 - z^2)q = 2yz.$

Kasu honetan sistema diferentzial asoziatua ondokoa da:

$$\frac{dx}{2xy} = \frac{dy}{y^2 - x^2 - z^2} = \frac{dz}{2yz}\ . \qquad [1]$$

Ekuaziotik: $\qquad dx/2xy = dz/2yz \ \xrightarrow{\int}\ z/x = A. \qquad [2]$

Bigarren integral bat kalkulatzeko, sistemako lehenengo ekuazioan [2] adierazpena ordezkatuko dugu, hots,

$$\frac{dx}{2xy} = \frac{dy}{y^2 - x^2 - z^2} \ \xrightarrow{z=Ax}\ \frac{dx}{2xy} = \frac{dy}{y^2 - (1 + A^2)x^2}\ .$$

Hemendik, hurrengo ekuazio homogenora iritsiko gara:

$$[y^2 - (1 + A^2)x^2]dx - 2xydy = 0 \xrightarrow{y=ux}$$

$$[u^2x^2 - (1 + A^2)x^2]dx - 2ux^2(udx + xdu) = 0 \longrightarrow$$

$$\frac{2udu}{u^2 + (1 + A^2)} + \frac{1}{x}\,dx = 0 \xrightarrow{\int} Ln|u^2 + (1 + A^2)| + Ln|x| = C \xrightarrow{exp}$$

$$[u^2 + (1 + A^2)]x = B \xrightarrow{u=y/x} y^2 + (1 + A^2)x^2 = Bx \xrightarrow{A=z/x}$$

$$\frac{x^2 + y^2 + z^2}{x} = B. \qquad [3]$$

Integral-sorta orokorra:

$$\phi\left(\frac{z}{x}, \frac{x^2 + y^2 + z^2}{x}\right) = 0. \qquad [4]$$

Integral partikularra: ϕ funtzioa finkatzeko, x, y, z eta t aldagaiak, [2]-[3] integral eta kurba zuzentzaileen ekuazio parametrikoetatik ezabatuko dira, hau da,

$$\frac{z}{x} = A\ ,\ x^2 + y^2 + z^2 = Bx\ ,\ x = 2cost\ ,\ y = 2sint\ ,\ z = 2 \longrightarrow$$

$$x^2 + y^2 = 4\ ,\ z = 2 \longrightarrow \frac{2}{x} = A\ ,\ 8 = Bx \Rightarrow \underline{B = 4A}. \qquad [5]$$

[2]-[3] ekuazioak [5]-ean ordezkatu eta ondoko esfera lortuko da:

$$x^2 + y^2 + (z - 2)^2 = 4. \qquad [6]$$

64. Kalkula bitez ekuazio lineal hauen integral orokorrak:

$$(x^2 - y^2)\frac{\partial z}{\partial x} + xy\,\frac{\partial z}{\partial y} = xyz, \qquad [a]$$

$$x(2y^2 - z^2)\frac{\partial z}{\partial x} + y(z^2 - 2x^2)\frac{\partial z}{\partial x} = z(x^2 - y^2). \qquad [b]$$

Aurki bedi hurrengo kurba edukita duen [b]-ren gainazal integrala:

$$xy - 1 = 0\ , \qquad x^2 + y^2 - z^2 = 0.$$

---

[a] ekuazioa: Sistema diferentzial asoziatua:

$$dx/(x^2 - y^2) = dy/xy = dz/xyz. \qquad [1]$$

Sistemaren integralak: Bi ekuazio har daitezke, non soilik diferentzialei dagozkien aldagaiak egongo diren, hau da,

$$dy/xy = dz/xyz \longrightarrow dy = dz/z \xrightarrow{\int} y = Ae^y, \qquad [2]$$

$$dx/(x^2 - y^2) = dy/xy \longrightarrow y' = \frac{xy}{x^2 - y^2} \quad \text{(ek. homogenoa)} \quad \xrightarrow{y=ux}$$

$$u'x + u = \frac{u}{1 - u^2} \longrightarrow dx/x + (u^2 - 1)du/u^3 = 0 \longrightarrow$$

$$dx/x + (1/u - 1/u^3)du = 0 \xrightarrow{\int} \mathrm{Ln}|x| + \mathrm{Ln}|u| + 1/2u^2 = C \longrightarrow$$

$$x^2u^2 = Be^{-1/u^2} \xrightarrow{u=y/x} y^2e^{x^2/y^2} = B. \qquad [3]$$

[a] ekuazioaren soluzio orokorra lortzeko, [2] eta [3] integralen arteko hautazko dependentzia funtzional bat ezarri behar da:

$$\phi\left(ze^{-y},\ y^2e^{x^2/y^2}\right) = 0 \quad [4], \quad \text{edo} \quad z = e^y\psi\left(y^2e^{x^2/y^2}\right). \qquad [5]$$

[b] ekuazioa:

$$dx/X = dy/Y = dz/Z \longrightarrow \frac{dx}{x(2y^2 - z^2)} = \frac{dy}{y(z^2 - 2x^2)} = \frac{dz}{z(x^2 - y^2)}$$

sistema diferentzial karakteristikorako bi integral aurkitzeko, ondoko biderkatzaileak erabiltzea komenigarria da,

$$uX + vY + wZ = 0 \longrightarrow udx + vdy + wdz = 0,$$

non $u = u(x,y,z)$, $v = v(x,y,z)$ eta $w = w(x,y,z)$ funtzio laguntzaile ezezagunak diren. Honela, $udx + vdy + wdz = 0$ ekuazio diferentzial totalak eta sistema diferentzial karakteristikoak integral sinple bat izango dute.

Kasu honetarako,

$$uX + vY + wZ = 0 \longrightarrow ux(2y^2 - z^2) + vy(z^2 - 2x^2) + wz(x^2 - y^2) = 0$$

ekuazioak, biderkatzaile bakunetako hirukoteak ondorioztatzea ahalbidetuko duten bi ordenaketatara garamatza. Lehenengotik,

$$x^2(-2vy + wz) + y^2(2ux - wz) + z^2(-ux + vy) = 0 \xrightarrow{\forall x,y,z}$$

$$-2vy + wz = 0 \ , \ 2ux - wz = 0 \ , \ -ux + vy = 0$$

sistema bateragarri indeterminatu hau lortuko dugu (ekuazioen arteko dependentzia lineala existitzen da), zeinaren soluzioek

$$u = wz/2x \ , \ v = wz/2y \ , \ w = w \xrightarrow{w=2/z} u = 1/x \ , \ v = 1/y \ , \ z = 2/z$$

direlakoek alegia, ondoko integralera eramango gaituzten:

$$udx + vdy + wdz = 0 \longrightarrow dx/x + dy/y + 2dz/z = 0 \xrightarrow{\int} xyz^2 = A.$$

Bigarren ordenamenduaren bidez, eta era berdintsuan eraginez, hurrengoa lortuko da:

$$2xy(yu - xv) + xz(-zu + xw) + yz(zv - yw) = 0 \xrightarrow{\forall x,y,z}$$

$$yu - xv = 0\ ,\ -zu + xw = 0\ ,\ zv - yw = 0 \longrightarrow$$

$$u = xw/z,\ v = yw/z\ ,\ w = w \xrightarrow{w=z} u = x\ ,\ \ v = y\ ,\ \ w = z \Rightarrow$$

$$udx + vdy + wdz = 0 \longrightarrow xdx + ydy + zdz = 0 \xrightarrow{\int} x^2 + y^2 + z^2 = B.$$

Era horretan, [a]-ren integral orokorra lortutako bi integralen arteko hautazko erlazio funtzional honen bidez adieraz daiteke:

$$\phi\ (xyz^2,\ x^2 + y^2 + z^2) = 0. \qquad [1]$$

Emandako zuzentzailea barnean edukiko duen gainazal integrala finkatzeko, hurrengo pausuak eman behar dira: zuzentzaile eta sistemako integralen ekuazioen artean x, y eta z aldagaiak ezabatu, eta ondoren integral-sorta orokorreko ϕ funtzioa aurkitu.

Sistemaren integralak: $xyz^2 = A$ [2] , $x^2 + y^2 + z^2 = B.$ [3]

Zuzentzailearen ek.: $xy - 1 = 0$ [4] , $x^2 + y^2 - z^2 = 4.$ [5]

[2]-[4]-tik: $z^2 = A$, [3]-[5]-etik: $2z^2 = B - 4 \Rightarrow 2A - B + 4 = 0.$

Erlazio honetan sistemaren integralak ordezkatuz gero,

$$2xyz^2 - x^2 - y^2 - z^2 + 4 = 0 \qquad [6]$$

emaitza lor daiteke.

Oharra: Ebatzitako ekuazio diferentzial hauen jatorria 59. ariketan aztertuta dago.

65. Aurki bedi $$2z(2y+1)\frac{\partial z}{\partial x} + 2z(2x+1)\frac{\partial z}{\partial y} = 1 - 4xy \qquad [1]$$

ekuazio diferentzialaren gainazal integrala, gainazal horrek

$$x^2 + y^2 + 2z^2 - 4 = 0 \quad [2], \qquad x + y - 1 = 0 \quad [3]$$

elipsea barnean edukitzeko baldintzaz.

Sistema kanoniko karakteristikoa:

$$\frac{dx}{2z(2y+1)} = \frac{dy}{2z(2x+1)} = \frac{dz}{1-4xy}\,. \qquad [4]$$

Lehenengo berdintzatik honakoa ondorioztatuko da:

$$\frac{dx}{2y+1} = \frac{dy}{2x+1} \longrightarrow (2x+1)dx - (2y+1)dy = 0 \xrightarrow{\int}$$

$$x^2 + x - y^2 - y = A. \qquad [5]$$

[4] delakoaren beste integral bat aurkitzeko, biderkatzaileen metodoa aplikatu behar da, hots,

$$2z(2y+1)u + 2z(2x+1)v + (1-4xy)w = 0 \longrightarrow$$

$$4y(zu - xw) + 2z(u + 2xv) + (2zv + w) = 0 \longrightarrow$$

$$zu - xw = 0\,, \quad u + 2xv = 0\,, \quad 2zv + w = 0 \longrightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{l} u = xw/z \\ v = -w/2z \\ w = w \end{array}\right. \xrightarrow{w=2z} \left\{\begin{array}{l} u = 2x \\ v = -1 \\ w = 2z \end{array}\right. \longrightarrow$$

$$udx + vdy + wdz = 0 \longrightarrow 2xdx - dy + 2zdz = 0 \longrightarrow x^2 - y + z^2 = B.[6]$$

Integral orokorra:

Horretarako, [5] eta [6] adierazpenen artean hautazko erlazio funtzional bat ezarriko da:.

$$\psi(x^2 + x - y^2 - y \ , \ x^2 - y + z^2) = 0. \qquad [7]$$

Integral partikularra:

[2], [3], [5] eta [6] ekuazioetatik x, y eta z ezabatuz, hots,

$$x^2 + y^2 + 2z^2 - 4 = 0 \quad [2] \ , \quad x + y - 1 = 0, \quad [3]$$

$$x^2 + x - y^2 - y = A \quad [5] \ , \quad x^2 - y + z^2 = B \quad [6]$$

eginez, eta [2]-ari [6] ekuazioa bi aldiz kenduz, z ezabatuko da:

$$[2] - 2[6] \equiv y^2 - x^2 + 2y - 4 + 2B = 0.$$

Honi [5] adierazpena batu, eta [3] delakoan ordezkatuko dugu.

$$x + y - 4 - A + 2B = 0 \xrightarrow{x+y=1} A - 2B + 3 = 0. \qquad [8]$$

Eskatutako gainazal integrala, [8]-an [5] eta [6] integralak ordezkatuz ondoriozta daiteke. Honela, zentrua (1/2, 1/2, 0) puntuan duen eta $\sqrt{5/2}$, $\sqrt{5/2}$, $\sqrt{5}/2$ ardatzerdiak dituen elipsoidea dugu, hau da,

$$A - 2B + 3 = 0 \longrightarrow x^2 + y^2 + 2z^2 - x - y - 3 = 0 \longrightarrow$$

$$(x - 1/2)^2 + (y - 1/2)^2 + 2z^2 = 5/2. \qquad [9]$$

66. Aurkitu ekuazio arrunt hauei dagozkien integrazio-faktoreak:

$$y(1 - xy)dx + x(1 + xy)dy = 0, \quad [a] \quad ydx - x(Lnx + y^2)dy = 0, \quad [b]$$

$$(y^2 - x^2 + 2xy)dx + (y^2 - x^2 - 2xy)dy = 0. \quad [c]$$

Ekuazio hauek ez dute aldagai bakar baten menpeko integrazio-faktorerik onartuko. Orokorrean, $z = z(x,y)$ integrazio-faktoreez osoturiko multzoa determinatzeko, lehen ordenako deribatu partzialetako ekuazio hau integratu behar dugu, hots,

$$X(x,y)dx + Y(x,y)dy = 0 \longrightarrow Y(x,y)\frac{\partial z}{\partial x} - X(x,y)\frac{\partial z}{\partial y} = z\left(\frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x}\right). \quad [1]$$

Faktore bakarra eskatzekotan, nahikoa litzateke [1] ekuazioari asoziaturiko [2] sistema diferentziala z-rekiko ebaztea.

$$\frac{dx}{Y(x,y)} = -\frac{dy}{X(x,y)} = \frac{dz}{z(\partial X/\partial y - \partial Y/\partial x)}. \quad [2]$$

---

[a] ekuazioa:

$$X = y(1 - xy)\ , \quad Y = x(1 + xy)\ , \quad \frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x} = -4xy \longrightarrow$$

[2] sistema: $$\frac{dx}{x(1 + xy)} = \frac{dy}{y(xy - 1)} = \frac{dz}{-4xyz}.$$

Kasu honetan, biderkatzaileen metodoa aplikatuko da, hau da,

$$x(1+xy)u + y(xy-1)v - 4xyzw = 0 \longrightarrow xy(xu + yv - 4zw) + xu - yv = 0$$

$$\longrightarrow \begin{cases} xu + yv - 4zw = 0 \\ xu - yv = 0 \end{cases} \longrightarrow u = 2zw/x\ , \quad v = 2zw/y\ , \quad w = w \xrightarrow{w=1/z}$$

$$u = 2/x\ ,\ y = 2/y\ ,\ w = 1/z \longrightarrow \frac{2dx}{x} + \frac{2dy}{y} + \frac{dz}{z} = 0 \xrightarrow{\int}$$

$$2\mathrm{Ln}|x| + 2\mathrm{Ln}|y| + \mathrm{Ln}|z| = A \xrightarrow{\exp} x^2y^2z = C \longrightarrow z = C/x^2y^2.$$

[a] ekuazioa zehatz gisa (C = 1) ebatziz, ondokoa dugu:

$$\frac{y(1 - xy)}{x^2y^2}\,dx + \frac{x(1 + xy)}{x^2y^2}\,dy = 0 \longrightarrow$$

$$\int_a^x \frac{1 - xy}{x^2y}\,dx + \int_b^y \frac{1 + ay}{ay^2}\,dy = C \longrightarrow \mathrm{Ln}|y/x| - 1/xy = A.$$

---

[b] ekuazioa : $\qquad ydx - x(\mathrm{Ln}x + y^2)dy = 0.$

[2] sistema: $$\frac{dx}{-x(\mathrm{Ln}x + y^2)} = \frac{dy}{-y} = \frac{dz}{z(\mathrm{Ln}x + y^2 + 2)}\ .$$

Hemen ere biderkatzaileen metodoa aplikatuko da, hots,

$$-x(\mathrm{Ln}x + y^2)u - yv + z(\mathrm{Ln}x + y^2 + 2)w = 0 \longrightarrow$$

$$(-xu + zw)\mathrm{Ln}x + (-xu + zw)y^2 + (-yv + 2zw) = 0 \longrightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{l} -xu + zw = 0 \\ -yv + 2zw = 0 \end{array}\right. \longrightarrow u = zw/x\ ,\ v = 2zw/y\ ,\ w = w \xrightarrow{w=1/z}$$

$$u = 1/x\ ,\ y = 2/y\ ,\ w = 1/z \longrightarrow \frac{dx}{x} + \frac{2dy}{y} + \frac{dz}{z} = 0 \xrightarrow{\int}$$

$$\mathrm{Ln}|x| + 2\mathrm{Ln}|y| + \mathrm{Ln}|z| = A \xrightarrow{\exp} xy^2z = C \longrightarrow z = C/xy^2.$$

Soluzioa integrazio-faktorea erabiliz kalkulatuko da:

$$\frac{ydx}{xy^2} - \frac{x(Lnx + y^2)dy}{xy^2} = 0 \longrightarrow \int_1^x dx/xy - \int_b^y [(Ln1)/y^2 + 1]dy = C \longrightarrow$$

$$\left| \frac{Lnx}{y} \right|_1^x - |y|_b^y = C \longrightarrow \frac{1}{y} Ln|x| - y = A \longrightarrow Ln|x| - (y + A)y = 0.$$

<u>[c] ekuazioa</u> : $(y^2 - x^2 + 2xy)dx + (y^2 - x^2 - 2xy)dy = 0.$

Aurreko kasuetan bezala eragin behar dugu.

[2] sistema : $\dfrac{dx}{y^2 - x^2 - 2xy} = \dfrac{dy}{-y^2 + x^2 - 2xy} = \dfrac{dz}{4z(x + y)} \longrightarrow$

$$u(y^2 - x^2 - 2xy) + v(-y^2 + x^2 - 2xy) + 4zw(x + y) = 0 \longrightarrow$$

$$(y^2 - x^2)(u - v) - 2xy(u + v) + 4z(x + y)w = 0 \longrightarrow$$

$$(y - x)(y + x)(u - v) - 2xy(u + v) + 4z(x + y)w = 0 \longrightarrow$$

<u>$u = xz$</u>, <u>$v = yz$</u> eginez, $z\,(x+y)$ faktorea sinplifikatu egingo da.

$$(y-x)(y+x)z(x-y) - 2xyz(x+y) + 4z(x+y)w = 0 \longrightarrow w = \frac{x^2 + y^2}{4}.$$

Ondorioz, integrazio-faktorea hurrengoa dugu:

$$udx + vdy + wdz = 0 \longrightarrow xzdx + yzdy + \frac{x^2 + y^2}{4} dz = 0,$$

$$\frac{4xdx + 4ydy}{x^2 + y^2} + \frac{dz}{z} = 0 \xrightarrow{\int} 2Ln(x^2 + y^2) + Lnz = C \longrightarrow z = \frac{A}{(x^2 + y^2)^2}$$

67. Aurki bitez gainazal hauei dagozkien sorta ortogonalak:

a) **ELIPSOIDEAK:** $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{a^2} + \dfrac{z^2}{a^2 - \alpha} = 1$, $a \equiv$ **kte.** , $\alpha \equiv$ **parametroa.**

b) **KONOAK:** $x^2 + y^2 = (a - z)^2$, $a \equiv$ **parametroa.**

Biz σ gainazal-familia. σ-ren parametroa explizituki emanik badator, orduan σ-ren gainazalekiko ortogonalak diren gainazalei, hurrengo ekuazio diferentziala asoziatuko zaie:

$$[\sigma]:\ g(x, y, z) = C \longrightarrow \frac{\partial g}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y}\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial z}. \qquad [1]$$

[a] ariketa:

Lehenengo, elipsoideen ekuazioa α parametroarekiko ebatzi, eta gero ,[1] adierazpena planteatuko da. Alegia,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{a^2 - \alpha} = 1 \longrightarrow \alpha \equiv g(x,y,z) = a^2 - \frac{a^2z^2}{a^2 - x^2 - y^2} \longrightarrow$$

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{-2a^2xz^2}{(a^2 - x^2 - y^2)^2}, \quad \frac{\partial g}{\partial y} = \frac{-2a^2yz^2}{(a^2 - x^2 - y^2)^2}, \quad \frac{\partial g}{\partial z} = \frac{-2a^2z}{a^2 - x^2 - y^2}$$

$$\xrightarrow{[1]} \quad \frac{\partial g}{\partial x}p + \frac{\partial g}{\partial y}q = \frac{\partial g}{\partial z} \quad \Rightarrow \quad xp + yq = \frac{a^2 - x^2 - y^2}{z}. \qquad [2]$$

[2] delakoaren sistema diferentzial karakteristikoa integratuz,

$$dx/x = dy/y = zdz/(a^2 - x^2 - y^2). \qquad [3]$$

Lehenengo ekuaziotik, $dx/x = dy/y \longrightarrow y/x = A,$ [4]

$$zdz = \frac{a^2 - x^2 - y^2}{x}dx \xrightarrow{[4]} 2zdz = 2\,\frac{a^2 - (1 + A^2)x^2}{x}dx \xrightarrow{\int}$$

$$z^2 = 2a^2\mathrm{Ln}x - (1 + A^2)x^2 + B \xrightarrow{A=y/x} x^2 + y^2 + z^2 - 2a^2\mathrm{Ln}x = B. \quad [5]$$

Sorta ortogonala: [2]-aren soluzio orokorra da:

$$\phi(y/x,\ x^2 + y^2 + z^2 - 2a^2\mathrm{Ln}x) = 0. \quad [6]$$

---

[b] ariketa. Kono-familiarako [1] ekuazioa hurrengoa da:

$$x^2 + y^2 = (a - z)^2 \longrightarrow a = z + \sqrt{x^2 + y^2} \equiv g(x,y,z) \longrightarrow$$

$$\frac{\partial g}{\partial x} p + \frac{\partial g}{\partial y} q = \frac{\partial g}{\partial z} \longrightarrow \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} p + \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} q = 1. \quad [2]$$

Sistema diferentzial karakteristikoa:

$$\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{x} dx = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{y} dy = dz. \quad [3]$$

Honen soluzioak: $\quad dx/x = dy/y \longrightarrow x/y = A, \quad [4]$

$$\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{y} dy = dz \xrightarrow{[4]} \sqrt{A^2 + 1}\, dy - dz = 0 \xrightarrow{\int} \sqrt{A^2 + 1}\, y - z = B$$

$$\xrightarrow{A=x/y} \quad \sqrt{x^2 + y^2} - z = B. \quad [5]$$

Azkenik, kono-familiarekiko sorta ortogonala, hurrengoa da:

$$\phi(A,\ B) = 0 \longrightarrow \phi\left(\frac{x}{y},\ \sqrt{x^2 + y^2} - z \right) = 0, \quad [6]$$

$$B = \psi(A) \longrightarrow z = \sqrt{x^2 + y^2} - \psi(x/y). \quad [7]$$

68. Biz ondoko ekuazio diferentziala:

$$y^2z^3dx + 2xyz^3dy + 3xy^2z^2dz = 0. \qquad [1]$$

a) Aurki bedi [1]-erako gainazal integraletako familia.

b) Determina bedi M(1, $2\sqrt{2}$, $2\sqrt{3}$-1) puntutik pasatzen den gainazal integrala.

c) Aurki bitez [1] ekuazioaren gainazal integralekiko gainazal ortogonalak.

d) Lor bedi ondoko zuzentzailea edukiko duen gainazal ortogonala:

$$x = 1 - t, \quad y = \sqrt{2}t, \quad z = \sqrt{3}t - 1. \qquad [2]$$

e) Froga aurreko bedi b) eta d) ataletan lortutako gainazalen ortogonaltasuna, M puntuan.

---

a) Ekuazio diferentzial totala da. Integragarritasun-baldintza betetzen duenez, erlazio bakar baten bidez integra daiteke:

$$X\left(\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z}\right) + Y\left(\frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x}\right) + Z\left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}\right) = 0.$$

"Deribatu gurutzatuen berdintza" ($\overline{\nabla}\mathrm{x}\overline{F} = \overline{0}$) erabiliz, ondokoa dugu:

$$\frac{\partial Y}{\partial z} = \frac{\partial Z}{\partial y} = 6xyz^2, \quad \frac{\partial X}{\partial z} = \frac{\partial Z}{\partial x} = 3y^2z^2, \quad \frac{\partial Y}{\partial x} = \frac{\partial X}{\partial y} = 2yz^3.$$

Beraz, soluzio orokorra hurrengoa izango da:

$$\int_a^x X(x,y,z)dx + \int_b^y Y(a,y,z)dy + \int_c^z Z(a,b,z)dz = C \xrightarrow{a=b=c=0}$$

$$\int_0^x y^2z^3dx = C \longrightarrow xy^2z^3 = C. \qquad [3]$$

b) M puntuaren koordenatuak [3] ekuazioan ordezkatuko dira:

$$1.8.(2\sqrt{3} - 1)^3 = C \quad \longrightarrow \quad xy^2z^3 = 8(2\sqrt{3} - 1)^3. \qquad [4]$$

---

c) [3] ekuazioarekiko sorta ortogonalaren ekuazio diferentziala:

$$\frac{\partial g}{\partial x}\, p + \frac{\partial g}{\partial y}\, q = \frac{\partial g}{\partial z} \quad \longrightarrow \quad y^2z^3p + 2xyz^3q = 3xy^2z^2. \qquad [5]$$

Ekuazio lineal honen sistema karakteristikoa ondokoa da:

$$\frac{dx}{y^2z^3} = \frac{dy}{2xyz^3} = \frac{dz}{3xy^2z^2}\,. \qquad [6]$$

Sistemaren bi soluzio independente hurrengo hauexek dira:

$$\frac{dx}{y^2z^3} = \frac{dy}{2xyz^3} \quad \longrightarrow \quad 4xdx - 2ydy = 0 \quad \xrightarrow{\int} \quad 2x^2 - y^2 = A, \qquad [7]$$

$$\frac{dy}{2xyz^3} = \frac{dz}{3xy^2z^2} \quad \longrightarrow \quad 6ydy - 4zdz = 0 \quad \xrightarrow{\int} \quad 3y^2 - 2z^2 = B. \qquad [8]$$

Beraz, [5] ekuazioaren soluzio orokorra ondokoa da:

$$\Phi(A,B) = 0 \quad \longrightarrow \quad \Phi\left(2x^2 - y^2,\ 3y^2 - 2z^2\right) = 0. \qquad [9]$$

---

d) [7]-[8] kurba-kongruentzia eta [2] zuzentzailearen ekuazioen artean, x, y, z eta t aldagaiak ezabatu behar dira, hau da,

$$2x^2 - y^2 = A\ ,\ 3y^2 - 2z^2 = B\ ,\ x = t - 1\ ,\ \ y = \sqrt{2}t\ ,\ \ z = \sqrt{3}t - 1$$

$$\longrightarrow A = 2(t - 1)^2 - 2t^2 = 2 - 4t \ , \ B = 6t^2 - 2(\sqrt{3}t - 1)^2 = 4\sqrt{3}t - 2$$

$$\longrightarrow \qquad \sqrt{3}A + B - 2\sqrt{3} + 2 = 0. \qquad [10]$$

[7]-[8] ekuazioak [10] erlazioan ordezkatuz, hurrengoa lortuko da:

$$2\sqrt{3}x^2 + (3 - \sqrt{3})y^2 - 2z^2 + 2(1 - \sqrt{3}) = 0. \qquad [11]$$

---

e) M-ren kasuan, [4] eta [11] gainazalekiko bektore normalak ortogonalak izan behar dira, hots beraien arteko biderkaketa eskalar nulua izan beharko da.

[4] gainazalarekiko bektore normala:

$$xy^2z^3 = 8(2\sqrt{3} - 1)^3 \longrightarrow \bar{n}_1 = [y^2z^3,\ 2xyz^3,\ 3xy^2z^2].$$

[11] gainazalarekiko bektore normala:

$$2\sqrt{3}x^2 + (3-\sqrt{3})y^2 - 2z^2 + 2(1-\sqrt{3}) = 0 \longrightarrow \bar{n}_2 = [4\sqrt{3}x,\ 2(3-\sqrt{3})y,\ -4z]$$

$$\Rightarrow \qquad \bar{n}_1.\bar{n}_2 = 4\sqrt{3}xy^2z^3 + 4(3 - \sqrt{3})xy^2z^3 - 12xy^2z^3 = 0.$$

Edozein P(x,y,z) puntutan biderkaketa eskalar hori nulua da, hots, ebakidura-puntuetan gainazal biak ortogonalak dira, konkretuki M puntuan, gainazal bien barnean baitago.

---

69. Ebatz bedi hurrengo ekuazio diferentziala,

$$(x - y + 2z)dx + 2(x + z)dy - (x + y)dz = 0 \qquad [1]$$

a) ekuazio homogeno gisa,

b) beste prozedura baten bidez.

---

a) Ekuazioak integragarritasun-baldintza betetzen du, hots,

$$(x - y + 2z)[-1 - 2] + 2(x + z)[2 + 1] - (x + y)[2 + 1] \equiv 0.$$

Ekuazio diferentzial homogenoa da [X, Y eta Z funtzioak m = 1 mailako funtzio homogenoak dira]. Horregatik, $x = uz$, $y = vz$ ordezkaketek [1] ekuazioa beste ekuazio bat bilakatuko dute, non u eta v aldagaiak z-rekiko banandurik geratuko diren. Hori ekuazio arrunt homogenotarako aztertutakoaren hedapena da:

$$x = uz \longrightarrow dx = udz + zdu \,, \qquad y = vz \longrightarrow dy = vdz + zdv \quad \xrightarrow{[1]}$$

$$(uz - vz + 2z)(udz + zdu) + 2(uz + z)(vdz + zdv) - (uz + vz)dz = 0$$

$$\longrightarrow \quad (u - v + 2)zdu + 2(u + 1)zdv + (u^2 + uv + u + v)dz = 0 \quad \longrightarrow$$

$$\frac{u - v + 2}{(u + 1)(u + v)}\, du + \frac{2}{u + v}\, dv + \frac{1}{z}\, dz = 0.$$

Ekuazioa zehatza denez (deribatu gurutzatuak berdinak),

$$\frac{\partial}{\partial u}\left[\frac{2}{u + v}\right] = \frac{\partial}{\partial v}\left[\frac{u - v + 2}{(u + 1)(u + v)}\right] = \frac{-2}{(u + v)^2},$$

beraren soluzio orokorra ondoko eran kalkula daiteke:

$$\int_b^v \frac{2}{u + v}\, dv + \int_a^u \frac{u - b + 2}{(u + 1)(u + b)}\, du + \int_c^z \frac{1}{z}\, dz = C.$$

Kalkuluak errazteko, $a = 0$, $b = 1$, $c = 1$ hartuko dira, hau da,

$$\int_1^v \frac{2}{u + v}\,dv + \int_o^u \frac{1}{u + 1}\,du + \int_1^z \frac{1}{z}\,dz = C \qquad \longrightarrow$$

$$\left|2Ln(u + v)\right|_1^v + \left|Ln(u + 1)\right|_o^u + \left|Lnz\right|_1^z = C \qquad \longrightarrow$$

$$2Ln(u + v) - 2Ln(u + 1) + Ln(u + 1) + Lnz = C \quad \longrightarrow$$

$$Ln\left[\frac{(u + v)^2 z}{u + 1}\right] = C \quad \xrightarrow{\exp} \quad \frac{(u + v)^2 z}{u + 1} = A.$$

Azkenik, $u = x/z$, $v = y/z$ ordezkatuz, ondokoa lortuko da:

$$\frac{(x + y)^2}{x + z} = A, \qquad \text{edo} \qquad (x + y)^2 - A(x + z) = 0.$$

---

b) Aldagaietariko bat, x aldagaia adibidez, konstantetzat hartuko da. Orduan, aurreko ekuazioa

$$2(x + z)dy - (x + y)dz = 0 \qquad [2]$$

bilakatuko da, honen soluzioa hurrengoa izanik:

$$\frac{2dy}{x + y} - \frac{dz}{x + z} = 0 \quad \xrightarrow{\int} \quad \frac{(x + y)^2}{x + z} = C.$$

[1] ekuazioan aproba egiteko soluzio orokorra honakoa da:

$$\frac{(x + y)^2}{x + z} = \phi(x), \qquad [3]$$

$\phi(x)$ funtzio laguntzaile ezezaguna izanik. Nahikoa da diferentzial eragilea aplikatuz, lortutako ekuazioa [1]-arekin konparatzea.

$$\frac{(x+y)^2}{x+z} - \phi(x) = 0 \xrightarrow{d} \left(\frac{2(x+y)(x+z) - (x+y)^2}{(x+z)^2} - \phi'(x) \right) dx$$

$$+ \frac{2(x+y)}{x+z}\, dy - \left(\frac{x+y}{x+z} \right)^2 dz = 0. \qquad [4]$$

[1] eta [4] adierazpenetako diferentzialen koefizienteen arteko arrazoia, berdina izan behar da, hots,

$$\frac{2(x+y)(x+z) - (x+y)^2 - (x+z)^2\phi'(x)}{(x+z)^2(x-y+2z)} = \frac{x+y}{(x+z)^2}.$$

Sinplifikatu ondoren, hurrengoa ondoriozta daiteke:

$$(x+y)(x-y+2z) - (x+z)^2\phi'(x) = (x+y)(x-y+2z) \longrightarrow$$

$$(x+z)^2\phi'(x) = 0 \longrightarrow \phi'(x) = 0 \longrightarrow \phi(x) = A.$$

[3] adierazpenean ordezkatuz, ondoko soluzio orokorra lortuko dugu:

$$\frac{(x+y)^2}{x+z} = A,$$

kasu honetan, lortutako emaitza [2] ekuazio arrunt laguntzailearen soluzio orokorraren berdina delarik.

70. Integra bedi hurrengo ekuazio diferentziala:

$$yz(y + z)dx + xz(x + z)dy + xy(x + y)dz = 0. \qquad [1]$$

Integragarritasun-baldintza betetzen da, alegia

$$X\left(\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z}\right) + Y\left(\frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x}\right) + Z\left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}\right) = 0 \qquad \longrightarrow$$

$$yz(y + z)[x^2 + 2xy - x^2 - 2xz] + xz(x + z)[y^2 + 2yz - 2xy - y^2] +$$

$$xy(x + y)[2xz + z^2 - 2yz - z^2] = 2xyz(y^2 - z^2 + z^2 - x^2 + x^2 - y^2) = 0.$$

Demagun aldagaietariko bat, x aldagaia, konstantea dela. Orduan, [1] ekuazioa ekuazio diferentzial arrunt bilakatuko da, hots,

$$x \equiv kte \longrightarrow dx = 0 \xrightarrow{[1]} xz(x + z)dy + xy(x + y)dz = 0. \qquad [2]$$

Honen soluzio orokorra hauxe da:

$$\frac{xdy}{y(x + y)} + \frac{xdz}{z(x + z)} = 0 \rightarrow \left(\frac{1}{y} - \frac{1}{x + y}\right)dy + \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{x + z}\right)dz = 0$$

$$\xrightarrow{\int} \text{Ln}\,\frac{y}{x + y} + \text{Ln}\,\frac{z}{x + z} = C \longrightarrow \text{Ln}\,\frac{yz}{(x + y)(x + z)} = C \xrightarrow{\exp}$$

$$\frac{yz}{(x + y)(x + z)} = A. \qquad [3]$$

Orain A konstantea x aldagaiaren menpeko $\phi(x)$ funtzio laguntzaile ezezagun batez ordezkatuko da, [3] berdintza [1] ekuazioaren soluzioa izango delarik. Hau da, [1]-aren soluzio orokor modura ondokoa plantea daiteke:

$$\frac{yz}{(x+y)(x+z)} = \phi(x). \tag{4}$$

[4]-aren diferentziala era inplizituan,

$$\left[\frac{-yz(x+z+x+y)}{(x+y)^2(x+z)^2} - \phi'(x)\right]dx + \frac{z(x+y)(x+z) - yz(x+z)}{(x+y)^2(x+z)^2}\,dy$$

$$+\frac{y(x+y)(x+z) - yz(x+y)}{(x+y)^2(x+z)^2}\,dz = 0,$$

[1] ekuazioaren baliokidea izan behar da. Hau da, diferentzial berdinen koefizienteen arteko erlazioa berdina izango da:

$$\frac{-yz(2x+y+z) - (x+y)^2(x+z)^2\phi'}{(x+y)^2(x+z)^2yz(y+z)} = \frac{(x+z)(xz+yz-yz)}{(x+y)^2(x+z)^2xz(x+z)}$$

$$\longrightarrow \qquad \frac{-yz(2x+y+z) - (x+y)^2(x+z)^2\phi'}{yz(y+z)} = 1.$$

Eraginez, x eta ϕ aldagaiekiko ekuazio arrunt batetara iristeko, [4]-aren bidez $\phi(x)$ ordezkatzen saiatu behar gara.

$$-(x+y)^2(x+z)^2\phi' = 2yz(x+y+z) \overset{[4]}{\longrightarrow} -\phi' = \frac{2(x+y+z)\phi}{(x+y)(x+z)} \longrightarrow$$

$$-\frac{\phi'}{\phi} = 2\,\frac{(x+y+z)x + yz - yz}{(x+y)(x+z)x} = 2\,\frac{(x+y)(x+z) - yz}{(x+y)(x+z)x} \longrightarrow$$

$$-\frac{\phi'}{2\phi} = \frac{1}{x} - \frac{yz}{(x + y)(x + z)x} = \frac{1 - \phi}{x} \longrightarrow \frac{d\phi}{\phi(\phi - 1)} - \frac{2dx}{x} = 0 \xrightarrow{\int}$$

$$\mathrm{Ln}\,\frac{\phi - 1}{\phi} - 2\mathrm{Ln}x = C \xrightarrow{\exp} \frac{\phi - 1}{\phi x^2} = B.$$

Azkenik, $\phi(x)$ funtzioarekiko ebatzi eta [4]-ean ordezkatu ondoren, hurrengo emaitza dugu:

$$\phi(x) = \frac{1}{1 - Bx^2} \xrightarrow{[4]} \frac{yz}{(x + y)(x + z)} = \frac{1}{1 - Bx^2}.$$

Parametroa explizituki idatzi nahi badugu,

$$yz(1 - Bx^2) = (x + y)(y + z) \longrightarrow B = -\frac{x + y + z}{xyz}$$

ondoriozta dezakegu.

Oharra: X, Y eta Z direlakoak 3. mailako ekuazio homogenoak direnez, problema hau ebazteko beste era bat, aurreko ariketan aplikatutako x = uz, y = vz ordezkaketak erabiltzea da.

71. Aurki bedi ondoko ekuazio diferentzialaren soluzioa,

$$2(y + 1)(xdx + zdz) + [(y + 1)^2 - (x^2 + z^2 + 1)]dy = 0, \quad [1]$$

integragarritasun-baldintza betetzen duela frogatu ondoren.

Lor bedi M(1,1,1) puntutik pasatuko den gainazal integrala.

Integragarritasun-baldintza:

$$2x(y + 1)[2z + 2z] + [(y + 1)^2 - (x^2 + z^2 + 1)][0 - 0] +$$

$$+ 2z(y + 1)[-2x - 2x] \equiv 0.$$

Demagun $y \equiv kte \longrightarrow dy = 0$ dela. [1] ekuazioa arrunt bilakatuko da, beraren soluzioa ondokoa izanik:

$$2x(y + 1)dx + 2z(y + 1)dz = 0 \longrightarrow 2xdx + 2zdz = 0 \longrightarrow x^2 + z^2 = A.$$

[1]-erako planteatzen den soluzio orokorra, hurrengo hau da:

$$x^2 + z^2 = \phi(y). \quad [2]$$

[2] ekuazioa diferentziatu eta [1] ekuazioarekin konparatuko da.

$$2xdx - \phi'(y)dy + 2zdz = 0 \longrightarrow \frac{-\phi'(y)}{(y + 1)^2 - (x^2 + z^2 + 1)} = \frac{1}{y + 1}.$$

Azken honetan [2] erlazioa ordezkatuz,

$$\frac{-\phi'(y)}{(y+1)^2 - (\phi + 1)} = \frac{1}{y+1} \longrightarrow \phi'(y) - \frac{1}{y+1}\,\phi(x) = -\,\frac{y^2 + 2y}{y+1}$$

ekuazio lineala lor daiteke, zeinaren soluzioa ondokoa den:

$$\phi(y) = (y+1)\left(\int -\frac{y^2 + 2y}{(y+1)^2}\,dy + C \right) = (y+1)\left[-y - \frac{1}{y+1} + C\right] \longrightarrow$$

$$\phi(y) = (C - y)(y + 1) - 1. \qquad [3]$$

[2] adierazpenean ordezkatuz, eta parametroarekiko ebatziz, hurrengoa ondorioztatuko da:

$$x^2 + z^2 = (C - y)(y + 1) - 1 \longrightarrow x^2 + y^2 + z^2 = (C - 1)(y + 1) \longrightarrow$$

$$\frac{x^2 + y^2 + z^2}{y+1} = A. \qquad [4]$$

Bestalde, M(1,1,1) puntutik pasatuko den gainazal integrala determinatzeko, A balioa aurkitu behar da:

$$\frac{1 + 1 + 1}{1 + 1} = A \longrightarrow \frac{x^2 + y^2 + z^2}{y+1} = \frac{3}{2}\,. \qquad [5]$$

72. **a) Biz bi parametroren menpeko ondoko gainazal-familia:**

$$(3z^2 + A - 3Bx + y^3)^2 = (y^2 + 2B)^3. \qquad [1]$$

A eta B hautazko konstanteak ezabatuz, kalkula bedi [1] familiari dagokion deribatu partzialetako ekuazioa.

b) Erabil bedi Lagrange-Charpit-en metodoa, hurrengo ekuazioaren soluzio osotu bat aurkitzeko:

$$zq^2 + (q - p)y^2 = 0. \qquad [2]$$

c) Azter bedi [2] ekuazioaren soluzio singularren existentzia.

---

a) [1] jatorrizkoa x eta y aldagaiekiko deribatu behar da:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 0 \longrightarrow 2(3z^2 + A - 3Bx + y^3)(6zp - 3B) = 0 \longrightarrow B = 2zp$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 0 \longrightarrow 2(3z^2 + A - 3Bx + y^3)(6zq + 3y^2) - 6y(y^2 + 2B)^2 = 0$$

$$\longrightarrow (3z^2 + A - 3Bx + y^3) = \frac{3y(y^2 + 2B)^2}{6zq + 3y^2}.$$

Emaitza hauek [1] ekuazioan ordezkatu, eta A eta B parametroak ezabatuko dira,

$$\frac{9y^2(y^2 + 4zp)^4}{(6zq + 3y^2)^2} = (y^2 + 4zp)^3 \longrightarrow 9y^2(y^2 + 4zp) = (6zq + 3y^2)^2 \longrightarrow$$

$$9y^4 + 36y^2zp = 36z^2q^2 + 36y^2zq + 9y^4 \longrightarrow zq^2 + y^2(q - p) = 0, \ [2]$$

[2] deribatu partzialetako ekuazio ez-lineala lortuko delarik.

b) Charpit-en metodoaren arabera, $f(x,y,z,p,q) = 0$ funtzioari dagokion sistema diferentziala ondokoa da:

$$\frac{dx}{\frac{\partial f}{\partial p}} = \frac{dy}{\frac{\partial f}{\partial q}} = \frac{dz}{p\frac{\partial f}{\partial p} + q\frac{\partial f}{\partial q}} = \frac{-dp}{\frac{\partial f}{\partial x} + p\frac{\partial f}{\partial z}} = \frac{-dq}{\frac{\partial f}{\partial y} + q\frac{\partial f}{\partial z}} .$$

[2] ekuaziorako:

$$\frac{dx}{-y^2} = \frac{dy}{2zq + y^2} = \frac{dz}{-y^2p + (2zq + y^2)q} = \frac{-dp}{pq^2} = \frac{-dq}{2y(p - q) + q^3} .$$

Integral erraz bat kalkulatzeko, [2] delakoa ekuazioan ordezkatuko da.

$$\frac{dz}{-y^2p + (2zq + y^2)q} = \frac{-dp}{pq^2} \longrightarrow \frac{dz}{y^2(q - p) + 2zq^2} = \frac{-dp}{pq^2} \xrightarrow{[2]}$$

$$\frac{dz}{z} + \frac{dp}{p} = 0 \xrightarrow{\int} zp = C. \qquad [3]$$

[2]-[3] sistemak p eta q kalkulatzea ahalbidetuko digu.

$$\begin{cases} zq^2 + y^2(q - p) = 0 \\ zp = C \longrightarrow p = C/z \end{cases} \longrightarrow z^2q^2 + y^2zq - Cy^2 = 0 \longrightarrow$$

$$q = \frac{-y^2z \pm \sqrt{y^4z^2 + 4Cy^2z^2}}{2z^2} = \frac{-y^2z \pm yz\sqrt{y^2 + 4C}}{2z^2} = \frac{-y^2 \pm y\sqrt{y^2 + 4C}}{2z} .$$

Ondoren, balio hauek ekuazio integragarrian ordezkatuko dira.

$$dz = pdx + qdy \longrightarrow dz = \frac{C}{z}dx + \frac{-y^2 \pm y\sqrt{y^2 + 4C}}{2z}dy \longrightarrow$$

$$2zdz = 2Cdx + \left(y^2 \pm y\sqrt{y^2 + 4C} \right) dy.$$

Azken honen soluzioa,

$$z^2 + D = 2Cx + [y^3 \pm (y^2 + 4C)^{3/2}]/3 \longrightarrow$$

$$3z^2 + 3D - 6Cx - y^3 = \pm (y^2 + 4C)^{3/2} \xrightarrow{3D=A;\ 2C=B}$$

$$(3z^2 + A - 3Bx - y^3)^2 = (y^2 + 2B)^3$$

delakoa alegia, [1] jatorrizkoa da.

---

c) Soluzio singularrak, existitzekotan, ondoko sistemaren bidez aztertuko dira (soluzio osotuen inguratzailearen bidez, alegia).

$$\left\{ \begin{array}{l} F(x,y,z,A,B) = 0 \\ \partial F/\partial A = 0 \\ \partial F/\partial B = 0 \end{array} \right. \longrightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} (3z^2 + A - 3Bx - y^3)^2 - (y^2 + 2B)^3 = 0 \\ (3z^2 + A - 3Bx - y^3) = 0 \\ (3z^2 + A - 3Bx - y^3)(-3x) - 6(y^2 + 2B)^2 = 0 \end{array} \right. \longrightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 3z^2 + A - 3Bx - y^3 = 0, \\ y^2 + 2B = 0. \end{array} \right.$$

A eta B ezaba ezin daitezkeenez, ez dago soluzio singularrik.

73. Integra bitez deribatu partzialetako ondoko ekuazioak:

$$zp^2 - 2x^2q = 0\,, \quad [1] \qquad (1 - x^2)yp^2 + x^2q = 0\,, \quad [2]$$

$$p^2 - q^2 + 4(xp + yq - z) = 0. \quad [3]$$

Charpit-en sistema diferentzial laguntzailea hauxe da:

$$\frac{dx}{\frac{\partial f}{\partial p}} = \frac{dy}{\frac{\partial f}{\partial q}} = \frac{dz}{p\,\frac{\partial f}{\partial p} + q\,\frac{\partial f}{\partial q}} = \frac{-dp}{\frac{\partial f}{\partial x} + p\,\frac{\partial f}{\partial z}} = \frac{-dq}{\frac{\partial f}{\partial y} + q\,\frac{\partial f}{\partial z}}\,.$$

[1] ekuaziorako:

$$\frac{dx}{2zp} = \frac{dy}{-2x^2} = \frac{dz}{2zp^2 - 2x^2q} = \frac{-dp}{-4xq + p^3} = \frac{-dq}{p^2q}\,.$$

Sistemaren integral erraz bat ondoko ekuaziotik kalkula daiteke:

$$\frac{dz}{2zp^2 - 2x^2q} = \frac{-dq}{p^2q} \xrightarrow{[1]} \frac{dz}{zp^2} = \frac{-dq}{p^2q} \longrightarrow \frac{dz}{z} = \frac{-dq}{q} \xrightarrow{\int} zq = A.$$

p eta q finkatzeko, hurrengo sistema ebatziko da:

$$\left\{ \begin{array}{l} zp^2 - 2x^2q = 0 \\ q = A/z \end{array} \right. \longrightarrow zp^2 - 2x^2A/z = 0 \longrightarrow p = \pm\sqrt{2A}x/z.$$

dz adierazpenean ordezkatuz, gero integratuz, honakoa lortuko da:

$$dz = pdx + qdy = \frac{\pm\sqrt{2A}x}{z}\,dx + \frac{A}{z}\,dy \longrightarrow 2zdz = \pm 2\sqrt{2A}\;xdx + 2Ady$$

$$\xrightarrow{\int} z^2 + B = \pm\sqrt{2A}x^2 + 2Ay \longrightarrow (z^2 - 2Ay + B)^2 - 2Ax^4 = 0.$$

Soluzio orokorra:

$F(x,y,z,A,B) = 0$ soluzio osotuari ondoko soluzio orokorra dagokio, gainazal monoparametrikoetako sorten inguratzailea alegia:

$$\begin{cases} F[x,y,z,A,B(A)] = 0, \\ \dfrac{\partial F}{\partial A} + \dfrac{\partial F}{\partial B}\dfrac{dB}{dA} = 0. \end{cases}$$

Kasu honetan,

$$\begin{cases} [z^2 - 2Ay + B(A)]^2 - 2Ax^4 = 0, \\ [z^2 - 2Ay + B(A)][-2y + B'(A)] - 2x^4 = 0. \end{cases}$$

Soluzio singularrak:

$$\begin{cases} F(x,y,z,A,B) = 0 \\ \partial F/\partial A = 0 \\ \partial F/\partial B = 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} (z^2 - 2Ay + B)^2 - 2Ax^4 = 0, \\ (z^2 - 2Ay + B)(-2y) - 2x^4 = 0, \\ (z^2 - 2Ay + B) = 0. \end{cases}$$

Soluzio singularrik ez dagoela ohar daiteke.

---

[2] ekuazioaren kasuan, $(1 - x^2)yp^2 + x^2q = 0$ alegia, Charpit-en sistema hurrengoa da:

$$\frac{dx}{2(1 - x^2)yp} = \frac{dy}{x^2} = \frac{dz}{2(1 - x^2)yp^2 + x^2q} = \frac{-dp}{-2xyp^2 + 2xq} = \frac{-dq}{(1 - x^2)p^2}.$$

Integral bat kalkulatzeko, [2] ekuazioa aurreko sisteman ordezkatu behar dugu:

$$\frac{dy}{x^2} = \frac{-dq}{(1 - x^2)p^2} \xrightarrow{[2]} \frac{dy}{x^2} = \frac{ydq}{x^2 q} \longrightarrow dq/q - dy/y = 0 \xrightarrow{\int} q = Ay.$$

Orain, p eta q kalkulatzeko, ondoko sistema ebatziko dugu:

$$\left\{\begin{array}{l} (1 - x^2)yp^2 + x^2q = 0 \\ q = Ay \end{array}\right. \longrightarrow p = \pm\sqrt{A/(x^2 - 1)}\, x \;, \quad q = Ay.$$

$dz = pdx + qdy$ berdintzan ordezkatuz, ekuazio integragarria lortuz,

$$dz = pdx + qdy \longrightarrow 2dz = \pm\, 2\sqrt{A/(x^2 - 1)}\, xdx + 2Aydy,$$

eta honi $\int$ eragilea aplikatuz, soluzio osotura irits gaitezke:

$$2z + B = \pm\, 2\sqrt{A(x^2 - 1)} + Ay^2 \longrightarrow (2z - Ay^2 + B)^2 = 4A(x^2 - 1).$$

Soluzio orokorra:

$$\left\{\begin{array}{l} [2z - Ay^2 + B^2(A)]^2 - 4A(x^2 - 1) = 0, \\ 2[2z - Ay^2 + B^2(A)][-2Ay + 2B(A)B'(A)] - 4(x^2 - 1) = 0. \end{array}\right.$$

Soluzio singularrak:

Kasu honetan ere, ez dago soluzio singularrik.

$$\left\{\begin{array}{l} F(x,y,z,A,B) = 0 \\ \partial F/\partial A = 0 \\ \partial F/\partial B = 0 \end{array}\right. \longrightarrow \left\{\begin{array}{l} (2z - Ay^2 + B)^2 - 4A(x^2 - 1) = 0, \\ 2(2z - Ay^2 + B)(-y^2) - 4(x^2 - 1) = 0, \\ 2(2z - Ay^2 + B)^2 = 0. \end{array}\right.$$

[3] ekuazioa, goi-mailako ekuazio arruntetako Clairut-en ekuazioaren deribatu partzialetarako hedapena da. Kasu hartan bezala, soluzio osotu bat kalkulatzeko, nahikoa da p eta q deribatuak hautazko konstanteez ordezkatzea:

$$z = px + qy + f(p,q) \xrightarrow{\text{soluzio osotua}} z = Ax + By + f(A,B).$$

Horrela, Charpit-en sistema diferentzial laguntzailetik,

$$\frac{dx}{x + \dfrac{\partial f}{\partial p}} = \frac{dy}{y + \dfrac{\partial f}{\partial q}} = \frac{dz}{p\left(x + \dfrac{\partial f}{\partial p}\right) + q\left(y + \dfrac{\partial f}{\partial q}\right)} = \frac{-dp}{p - p} = \frac{-dq}{q - q}$$

alegia, ondoko integralak ondoriozta daitezke: $dp = 0 \longrightarrow p = A$, $dq = 0 \longrightarrow q = B$, zeintzuek emaniko ekuazioarekin p eta q ezabatzea ahalbidetuko duten, horrela soluzio osotua lortuz.

[3] ekuazioaren kasuan ondokoa betetzen da:

$$p^2 - q^2 + 4(xp + yq - z) = 0 \longrightarrow z = px + qy + \frac{p^2 - q^2}{4} \longrightarrow$$

Soluzio osotua: $$z = Ax + By + \frac{A^2 - B^2}{4}.$$

Soluzio singularra: Soluzio singular bat existituko da,

$$\left\{\begin{array}{l} F(x,y,z,A,B) = 0 \\ \partial F/\partial A = 0 \\ \partial F/\partial B = 0 \end{array}\right. \longrightarrow \left\{\begin{array}{l} Ax + By - z + (A^2 - B^2)/4 = 0 \\ x + A/2 = 0 \\ y - B/2 = 0 \end{array}\right. \longrightarrow$$

$$-2x^2 + 2y^2 - z + x^2 - y^2 = 0 \longrightarrow z = y^2 - x^2,$$

eta hau, geometrikoki, integral osotuaren gainazal inguratzaile bat da, hots, bi parametroren menpeko plano-sorta.

74. Biz hastapen-baldintzatako hurrengo ekuazio diferentziala:

$$y(Lny + x^2)dx - xdy = 0 , \qquad y(1) = 1.$$

Integra bedi ekuazio hori Runge-Kutta-ren laugarren ordenako algoritmoa [1, 1.5] tartean erabiliz, ondoko urratsak kontutan hartuz:

a) $h = 0.1$, b) $h = 0.05$, c) $h = 0.01$.

Emaniko ekuazioak, zeina $z(x,y) = 1/x^2y$ integrazio-faktorearen bidez zehatz bilaka daitekeen, ondoko soluzio zehatza du:

$$y = \exp(x^2 - x).$$

Ariketa honen helburu nagusia, h urratsaren balio ezberdinetarako zenbakizko soluzioen kalitatea konparatzea da.

Algoritmo arrunta erabiliko da, hots, Runge-Kutta-ren laugarren ordenakoa:

$$y_{i+1} = y_i + (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)h/6,$$

$$\begin{cases} k_1 = f(x_i, y_i), \\ k_2 = f(x_i + 0.5h, y_i + 0.5k_1h), \\ k_3 = f(x_i + 0.5h, y_i + 0.5k_2h), \\ k_4 = f(x_i + h, y_i + k_3h). \end{cases}$$

Basic programa batez, ondoko deskribapena eta emaitzak ondoriozta daitezke:

PROGRAMAREN DESKRIPZIOA

```
10 REM "RUNGE-KUTTA-REN LAUGARREN ORDENAKO METODOA"
15 DEFDBL A-H,O-Z
20 CLS
30 DIM X(250), Y(250), YP(250), YE(250)
40 PRINT "HASTAPEN-BALDINTZA "
50 INPUT "XO BALIOA  = ", X(1) : INPUT "Y(XO) BALIOA  = ", Y(1)
60 INPUT "PUNTU-KOPURUA  = ", N : N = N + 1
70 INPUT "URRATSAREN LUZERA = ", H
80 DEF FNG(X) = EXP(X*X - X)
90 DEF FND(X, Y) = Y*(LOG(Y) + X*X)/X
100 FOR I = 1 TO N
110 K1 = FND(X(I), Y(I)) : K2 = FND(X(I) + .5*H, Y(I) + .5*K1*H)
120 K3 = FND(X(I) + .5*H, Y(I) + .5*K2*H)
130 K4 = FND(X(I) + H, Y(I) + K3*H)
140 YE(I) = FNG(X(I))
150 X(I + 1) = X(I) + H
160 Y(I + 1) = Y(I) + H*(K1 + 2*K2 + 2*K3 + K4)/6
170 NEXT I : PRINT
180 PRINT TAB(0) "X BALIOA"; TAB(11) "Y HURBILDUA";
190 PRINT TAB(26) "Y ZEHATZA"; TAB(41) "ERRORE ABS"
200 PRINT "------------------------------";
210 PRINT "----------------------";
220 FOR I = 1 TO N
230 PRINT TAB(0) USING "##.#"; X(I); :
    PRINT TAB(11) USING "##.######^^^^"; Y(I); :
    PRINT TAB(25) USING "##.######^^^^"; YE(I);
240 PRINT TAB(40) USING "##.######^^^^";
    ABS(YE(I) - Y(I))250 NEXT I
250 END
```

LORTUTAKO EMAITZAK

HASTAPEN-BALDINTZA: X0 BALIOA = 1; Y(X0) BALIOA = 1
PUNTU-KOPURUA = 10 ; URRATSAREN LUZERA = .1

X BALIOA	Y HURBILDUA	Y ZEHATZA	ERRORE ABS
1.0	1.000000D+00	1.000000D+00	0.000000D+00
1.1	1.116277D+00	1.116278D+00	1.502037D-06
1.2	1.271245D+00	1.271249D+00	4.100800D-06
1.3	1.476972D+00	1.476981D+00	8.853277D-06
1.4	1.750655D+00	1.750672D+00	1.742840D-05
1.5	2.116967D+00	2.117000D+00	3.267924D-05
1.6	2.611636D+00	2.611696D+00	6.038348D-05
1.7	3.286970D+00	3.287081D+00	1.110236D-04
1.8	4.220493D+00	4.220695D+00	2.026081D-04
1.9	5.528590D+00	5.528962D+00	3.715674D-04
2.0	7.388374D+00	7.389056D+00	6.823063D-04

HASTAPEN-BALDINTZA: X0 BALIOA = 1; Y(X0) BALIOA = 1
PUNTU-KOPURUA = 20 ; URRATSAREN LUZERA = .05

X BALIOA	Y HURBILDUA	Y ZEHATZA	ERRORE ABS
1.0	1.000000D+00	1.000000D+00	0.000000D+00
1.1	1.188272D+00	1.188272D+00	1.271566D-07
1.2	1.366838D+00	1.366838D+00	4.688899D-07
1.3	1.603998D+00	1.603999D+00	8.185705D-07
1.4	1.920334D+00	1.920336D+00	1.621246D-06
1.5	2.345500D+00	2.345503D+00	3.107389D-06
1.6	2.922671D+00	2.922677D+00	5.380313D-06
1.7	3.715440D+00	3.715451D+00	1.041889D-05
1.8	4.818661D+00	4.818680D+00	1.903375D-05
1.9	6.375704D+00	6.375738D+00	3.441970D-05
2.0	7.389008D+00	7.389056D+00	4.802545D-05

HASTAPEN-BALDINTZA: X0 BALIOA = 1; Y(X0) BALIOA = 1
PUNTU-KOPURUA = 100 ; URRATSAREN LUZERA = .01

X BALIOA	Y HURBILDUA	Y ZEHATZA	ERRORE ABS
1.0	1.000000D+00	1.000000D+00	0.000000D+00
1.1	1.116278D+00	1.116278D+00	1.112620D-08
1.2	1.271249D+00	1.271249D+00	7.947286D-08
1.3	1.476981D+00	1.476981D+00	8.106232D-08
1.4	1.750672D+00	1.750672D+00	3.178914D-09
1.5	2.117000D+00	2.117000D+00	8.424123D-08
1.6	2.611696D+00	2.611696D+00	1.255671D-07
1.7	3.287081D+00	3.287081D+00	1.859665D-07
1.8	4.220696D+00	4.220695D+00	1.064936D-07
1.9	5.528961D+00	5.528962D+00	4.720688D-07
2.0	7.389056D+00	7.389056D+00	5.165736D-07

75. Zenbakizko metodoen bidez, integra bedi bigarren ordenako ekuazio diferentziala, $2 \leq x \leq 3$ tartean,

$$x^2(1 - x)y'' - x(1 + x)y' + y = 0,$$

hastapen-baldintzak $y(2) = 2$, $y'(2) = -2$, eta urratsen luzerak

a) $h = 0.1$, b) $h = 0.05$, c) $h = 0.01$

izanik.

Berredura serieen bidezko soluzio orokorra 250. orrialdeko b) adibidean kalkulatuta dago. Soluzio partikularra ondokoa da:

$$y = \frac{x}{1 - x}(A + BLnx) \xrightarrow{y(2)=2;\ y'(2)=-2} y = \frac{x}{1 - x} Ln(x/2e).$$

Zenbakizko integraziorako, emandako ekuazioa sistema bihurtuko dugu, eta ondoren, ekuazio-sistemetarako RK-ren algoritmoa aplikatuko da:

$$y'' = \frac{1 + x}{x(1 - x)} y' - \frac{1}{x^2(1 - x)} y \ , \ y(2) = 2 \ , \ y'(2) = -2 \xrightarrow{y' = z}$$

$$y' = z \ , \ z' = \frac{1 + x}{x(1 - x)} z - \frac{1}{x^2(1 - x)} y \ , \ y(2) = 2 \ , \ z(2) = -2.$$

Datu hauek programan sartuz, [2, 3] tarteko hamar puntu distantzikidetarako, ondoko tauletan ikus ditzakegun emaitzak lor daitezke:

PROGRAMAREN DESKRIPZIOA

```
10 REM "GOI-ORDENAKO EKUAZIOETARAKO 4. ORDENAKO RK  METODOA"
15 DEFDBL A-H,O-Z
20 CLS30 DIM X(250), Y(250), Z(250), YE(250)
40 PRINT "HASTAPEN-BALDINTZA"
50 INPUT "X0 BALIOA  = ", X(1) : INPUT "Y(X0) BALIOA = ", Y(1)
60 INPUT "Z(X0) BALIOA =  ", Z(1)
70 INPUT "PUNTU-KOPURUA = ", N : N = N + 1
80 INPUT "URRATSAREN LUZERA =  ", H
85 A = 2*EXP(1)
90 DEF FNR(X) = X/(1 - X)*LOG(X/A)
100 DEF  FNF(X, Y, Z) = Z
110 DEF FNG(X, Y, Z) = (X + 1)/X/(1 - X)*Z + Y/(X - 1)/X/X
120 FOR I = 1 TO N
130 K1 = FNF(X(I), Y(I), Z(I)) : P1 = FNG(X(I), Y(I), Z(I))
140  K2  =  FNF(X(I)  +  .5*H,  Y(I)  +  .5*K1*H,  Z(I)  +  .5*P1*H)
150  P2  =  FNG(X(I)  +  .5*H,  Y(I)  +  .5*K1*H,  Z(I)  +  .5*P1*H)
160 K3 = FNF(X(I) +  .5*H, Y(I) +  .5*K2*H, Z(I) +  .5*P2*H)
170 P3 = FNG(X(I) +  .5*H, Y(I) +  .5*K2*H, Z(I) +  .5*P2*H)
180 K4 = FNF(X(I) + H, Y(I) + K3*H, Z(I) + P3*H)
190 P4 = FNG(X(I) + H, Y(I) + K3*H, Z(I) + P3*H)
200 YE(I) = FNR(X(I))
210 X(I + 1) = X(I) + H
220 Y(I + 1) = Y(I) + (K1 + 2*K2 + 2*K3 + K4)*H/6
230 Z(I + 1) = Z(I) + (P1 + 2*P2 + 2*P3 + P4)*H/6
240 NEXT I : PRINT
250 PRINT TAB(0) "X BALIOA"; TAB(11) "Y HURBILDUA";
260 PRINT TAB(26) "Y ZEHATZA"; TAB(41) "ERRORE ABS"
270 PRINT "------------------------------";
280 PRINT "------------------------------";
290 FOR I = 1 TO N
300 PRINT  TAB(0)  USING "##.#"; X(I); :
    PRINT TAB(11) USING "##.######^^^^"; Y(I); :
    PRINT TAB(25) USING "##.######^^^^"; YE(I);
310 PRINT TAB(40) USING "##.######^^^^"; ABS(YE(I) - Y(I))
320 NEXT I
330 END
```

LORTUTAKO EMAITZAK

XO BALIOA = 2; Y(XO) BALIOA = 2 ; Z(XO) BALIOA = -2
PUNTU-KOPURUA = 10 ; URRATSAREN LUZERA = .1

X BALIOA	Y HURBILDUA	Y ZEHATZA	ERRORE ABS
2.0	2.000000D+00	2.000000D+00	0.000000D+00
2.1	1.815949D+00	1.815946D+00	2.771797D-06
2.2	1.658602D+00	1.658598D+00	4.323324D-06
2.3	1.521965D+00	1.521960D+00	5.174600D-06
2.4	1.401740D+00	1.401734D+00	5.554018D-06
2.5	1.294767D+00	1.294761D+00	5.880992D-06
2.6	1.198664D+00	1.198658D+00	5.892416D-06
2.7	1.111605D+00	1.111599D+00	6.103048D-06
2.8	1.032160D+00	1.032154D+00	5.965763D-06
2.9	9.591986D-01	9.591926D-01	6.008776D-06
3.0	8.918084D-01	8.918023D-01	6.127357D-06

HASTAPEN-BALIOAK :
XO BALIOA = 2; Y(XO) BALIOA = 2 ; Z(XO) BALIOA = -2
PUNTU-KOPURUA = 20 ; URRATSAREN LUZERA = .05

X BALIOA	Y HURBILDUA	Y ZEHATZA	ERRORE ABS
2.0	2.000000D+00	2.000000D+00	0.000000D+00
2.1	1.815946D+00	1.815946D+00	1.571395D-07
2.2	1.658598D+00	1.658598D+00	3.258387D-07
2.3	1.521960D+00	1.521960D+00	3.903340D-07
2.4	1.401735D+00	1.401734D+00	3.286770D-07
2.5	1.294761D+00	1.294761D+00	4.013379D-07
2.6	1.198658D+00	1.198658D+00	2.736847D-07
2.7	1.111599D+00	1.111599D+00	4.127914D-07
2.8	1.032155D+00	1.032154D+00	2.476904D-07
2.9	9.591928D-01	9.591926D-01	2.827561D-07
3.0	8.918027D-01	8.918023D-01	4.053116D-07

HASTAPEN-BALIOAK :
X0 BALIOA = 2; Y(X0) BALIOA = 2 ; Z(X0) BALIOA = -2
PUNTU-KOPURUA = 100 ; URRATSAREN LUZERA = .01

X BALIOA	Y HURBILDUA	Y ZEHATZA	ERRORE ABS
2.0	2.000000D+00	2.000000D+00	0.000000D+00
2.1	1.815946D+00	1.815946D+00	1.293240D-08
2.2	1.658598D+00	1.658598D+00	5.404154D-08
2.3	1.521960D+00	1.521960D+00	6.687947D-08
2.4	1.401734D+00	1.401734D+00	2.020881D-08
2.5	1.294761D+00	1.294761D+00	3.655752D-08
2.6	1.198658D+00	1.198658D+00	9.824832D-08
2.7	1.111599D+00	1.111599D+00	3.211639D-08
2.8	1.032154D+00	1.032154D+00	1.361635D-07
2.9	9.591925D-01	9.591926D-01	1.018926D-07
3.0	8.918023D-01	8.918023D-01	2.026558D-08

74. eta 75. ariketei buruzko oharrak: Programaren 20 (h = 0.05) eta 100 (h = 0.01) puntuetako irteeretarako, lehenengo kasuko (h = 0.1) hamar puntu distantzikideei dagozkien balioak hartu dira.

Kalkulu-programan prezisio bikoitzarekin eragitean (16 digitu esangarri), urrats ezberdinetarako hurbilketen kalitatea hobetu egin dela nabarmendu da.

76. Bilatu berredura-serieetako soluzioak ondoko ekuazioetarako:

$$y'' + (x + 1)y = 0, \qquad [a]$$

$$y'' - xy' + x^2y = 0. \qquad [b]$$

Puntu singularrik ez dagoenez, ekuazioek ardatz osoan konbergenteak diren (x-a) delakoaren berreduratako serieen bidezko soluzioak onartuko dituzte.

Aproba egiteko x-en berreduretako seriea bi aldiz deribatu eta ekuazio diferentzialean ordezkatu behar dugu, hots,

$$y = \sum_0^\infty a_n x^n \longrightarrow y' = \sum_0^\infty n a_n x^{n-1} \longrightarrow y'' = \sum_0^\infty n(n-1)a_n x^{n-2}.$$

[a] ekuazioa:

$$\sum_0^\infty n(n-1)a_n x^{n-2} + (x+1)\sum_0^\infty a_n x^n = \sum_0^\infty n(n-1)a_n x^{n-2} + \sum_0^\infty a_n x^{n+1} + \sum_0^\infty a_n x^n = 0.$$

x-en berredurak berdintzeko, batukarien indizeak aldatuko dira:

$$\sum_0^\infty n(n-1)a_n x^{n-2} \xrightarrow{n=m+2} \sum_{-2}^\infty (m+2)(m+1)a_{m+2}x^m = \sum_0^\infty (m+2)(m+1)a_{m+2}x^m,$$

$$\sum_0^\infty a_n x^{n+1} \xrightarrow{n=m-1} \sum_1^\infty a_{m-1}x^m.$$

m delakoa n gaiaz ordezkatuz, ekuazioaren adierazpena hauxe da:

$$\sum_0^\infty (n + 2)(n + 1)a_{n+2}x^n + \sum_1^\infty a_{n-1}x^n + \sum_0^\infty a_n x^n = 0.$$

Ekuazioa batukari bakar batetara laburtzeko, muturretako batukarietako lehenengo gaiak batukarietatik kanpo aterako dira.

$$2.1.a_2 + a_0 + \sum_1^{\infty} [(n + 2)(n + 1)a_{n+2} + a_{n-1} + a_n]x^n = 0.$$

Edozein x-etarako, ondokoa bete behar da:

$$2a_2 + a_0 = 0 , \quad (n + 2)(n + 1)a_{n+2} + a_{n-1} + a_n = 0.$$

Era horretan hurrengo errepikapen-legera hel gaitezke:

$$a_0 = a_0 , \ a_1 = a_1 , \ a_2 = -a_0/2 , \quad a_{n+2} = -\frac{a_{n-1} + a_n}{(n + 2)(n + 1)} , \quad n \geq 1.$$

Lege honen bidez, koefizienteak kalkula daitezke, alegia,

$$n = 1 : \quad a_3 = -\frac{a_0 + a_1}{3.2} = \frac{1}{3!} (-a_0 - a_1), \qquad [1]$$

$$n = 2 : \quad a_4 = -\frac{a_1 + a_2}{4.3} \longrightarrow a_4 = \frac{1}{4!} (a_0 - 2a_1), \qquad [2]$$

$$n = 3 : \quad a_5 = -\frac{a_2 + a_3}{5.4} \xrightarrow{[1]} a_5 = \frac{1}{5!} (4a_0 + a_1), \qquad [3]$$

$$n = 4 : \quad a_6 = -\frac{a_3 + a_4}{6.5} \xrightarrow[{[2]}]{[1]} a_6 = \frac{1}{6!} (3a_0 + 6a_1), \qquad [4]$$

$$n = 5 : \quad a_7 = -\frac{a_4 + a_5}{7.6} \xrightarrow[{[3]}]{[2]} a_7 = \frac{1}{7!} (-a_0 + 11a_1), \qquad [5]$$

$$n = 6 : \quad a_8 = -\frac{a_5 + a_6}{8.7} \xrightarrow[{[4]}]{[3]} a_8 = \frac{1}{8!} (-27a_0 - 9a_1). \qquad [6]$$

Seriean ordezkatu ondoren, soluzioa aurki daiteke:.

$$y = \sum_{0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + \ldots \longrightarrow$$

$$y = a_0 + a_1 x - \frac{1}{2!} a_0 x^2 - \frac{1}{3!} (a_0 + a_1)x^3 + \frac{1}{4!} (a_0 - 2a_1)x^4 +$$

$$+ \frac{1}{5!} (4a_0 + a_1)x^5 + \frac{1}{6!} (3a_0 + 6a_1)x^6 + \frac{1}{7!} (-a_0 + 11a_1)x^7 + \ldots$$

Serie hau bi serieen batura gisa idaz daiteke, hots,

$$y = a_0 \left(1 - \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{4x^5}{5!} + \frac{3x^6}{6} - \frac{x^7}{7!} - \frac{27x^8}{8!} + \ldots \right) +$$

$$+ a_1 \left(x - \frac{x^3}{3!} - \frac{2x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{6x^6}{6!} + \frac{11x^7}{7!} - \frac{9x^8}{8!} + \ldots \right).$$

Emaitza hau, x-en berreduretako serieen bidezko bi soluzioren konbi lineala da, non a_0 eta a_1 hautazko konstanteak diren.

---

[b] ekuazioa. Seriea eta beraren deribatuak ordezkatuz,

$$y'' - xy' + x^2 y = 0 \longrightarrow \sum_{0}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} - \sum_{0}^{\infty} na_n x^n + \sum_{0}^{\infty} a_n x^{n+2} = 0.$$

Aurreko ariketan bezala, lehen eta hirugarren batukarietako aldagaiak ordezkatu, eta gero, behe-indizeak doituko dira:

$$\sum_{-2}^{\infty} (n + 2)(n + 1)a_{n+2} x^n - \sum_{0}^{\infty} na_n x^n + \sum_{2}^{\infty} a_{n-2} x^n = 0 \longrightarrow$$

$$2.1.a_2 + 3.2.a_3x - a_1x + \sum_2^\infty [(n + 2)(n + 1)a_{n+2} - na_n + a_{n-2}]x^n = 0$$

$$\longrightarrow \quad 2a_2 + (6a_3 - a_1)x = 0 , \quad (n + 2)(n + 1)a_{n+2} - na_n + a_{n-2} = 0.$$

Kasu honetarako errepikapen-legea hauxe da:

$$a_2 = 0 , \quad a_3 = a_1/6 , \quad a_{n+2} = \frac{na_n - a_{n-2}}{(n + 2)(n + 1)} , \quad n \geq 2.$$

Lehenengo zortzi koefizienteak ondokoak dira:

$$n = 2 \quad \longrightarrow \quad a_4 = \frac{1}{4.3}(2a_2 - a_0) = \frac{-1}{12} a_0 ,$$

$$n = 3 \quad \longrightarrow \quad a_5 = \frac{1}{5.4}(3a_3 - a_1) = \frac{-1}{40} a_1 ,$$

$$n = 4 \quad \longrightarrow \quad a_6 = \frac{1}{6.5}(4a_4 - a_2) = \frac{-1}{90} a_0 ,$$

$$n = 5 \quad \longrightarrow \quad a_7 = \frac{1}{7.6}(5a_5 - a_3) = \frac{-1}{144} a_1 ,$$

$$n = 6 \quad \longrightarrow \quad a_8 = \frac{1}{8.7}(6a_6 - a_4) = \frac{1}{3360} a_0 .$$

Seriean ordezkatuz, ondoko soluzioa lor dezakegu:

$$y = \sum_0^\infty a_nx^n = a_0\left(1 - \frac{x^4}{12} - \frac{x^6}{90} + \frac{x^8}{3360} + \dots \right) +$$

$$+ a_1\left(x + \frac{x^3}{6} - \frac{x^5}{40} + \frac{x^7}{144} + \dots \right)$$

Ohartzekoa da serie hau bi soluzio linealki independenteren arteko konbinazio lineala dela.

77. Biz bigarren ordenako ondoko ekuazio diferentziala:

$$2(x - 1)(x - 1/2)y'' + 2xy' - 2y = 0. \qquad [1]$$

1.- Azter bedi berredura-serieen bidezko zeintzu soluzio plantea daitezkeen, beraien konbergentzi erradioak adieraziz.

2.- [1] ekuazioaren soluzio modura x-en berreduratako serie bat planteatuz gero, froga bedi koefizienteak kalkulatzeko errepikapen-legea ondoko erlazioa izango dela:

$$2(1 - n)a_n + 3na_{n+1} - (n + 2)a_{n+2} = 0 , \quad n \geq 0.$$

Aurki bedi soluzio orokorra.

3.- Integra bedi [1] ekuazioa beste prozedura baten bidez, y = x soluzio partikular bat dela jakinik.

4.- Froga bedi, lortutako soluzioak baliokideak direla.

5.- Lor bedi, M(0,1) puntuan OX ardatzarekiko tangente paraleloa duen [1]-arekiko kurba integrala.

1.- [1] ekuazioa $y''+ P(x)y'+ Q(x)y = 0$ erakoa da, non

$$P(x) = \frac{x}{(x - 1)(x - 1/2)}, \qquad Q(x) = \frac{-1}{(x - 1)(x - 1/2)} \text{ diren.}$$

P eta Q funtzioak (x-a)-ren berreduretako serieez gara daitezkeen ala ez ikustera goaz.

Kasu honetan, $x = 1$ eta $x = 1/2$ izan ezik, puntu guztiak arruntak dira. $x = 1$ eta $x = 1/2$ puntuetan P eta Q funtzioak jarraiak dira. Gainera, puntu hauek singular erregularrak dira. Ikus dezagun.

$\underline{x = 1}$ puntuan, $(x-1)P(x) = \dfrac{x}{x-1/2}$ eta $(x-1)^2Q(x) = \dfrac{1-x}{x-1/2}$ funtzioak jarraiak dira.

$x = 1/2$ puntuan, $(x-1/2)P(x) = \dfrac{x}{x-1}$ eta $(x-1/2)^2Q(x) = \dfrac{1-2x}{2(x-1)}$ funtzioak jarraiak dira.

Ondorioz, $a \neq 1$ eta $a \neq 1/2$ direnean, [1] ekuazioak (x-a)-ren berreduretako serieak soluziotzat onar ditzake. Puntu hauetarako ($a=1$, $a=1/2$) serie orokortuak (gutxienez soluzio bat existituko da) aztertu behar dira, zeintzuen konbergentzi erradioa ($R = 1/2$), garapen-puntua eta puntu singular hurbilenaren arteko distantzia den.

2.- Soluzio modura x-en berreduretako serie batekin egin behar da aproba, hots,

$$y = \sum_0^\infty a_n x^n \longrightarrow y' = \sum_0^\infty n a_n x^{n-1} \longrightarrow y'' = \sum_0^\infty n(n-1)a_n x^{n-2},$$

$$(2x^2 - 3x + 1)y'' + 2xy' - 2y = 0 \qquad \longrightarrow \qquad \sum_0^\infty 2n(n-1)a_n x^n -$$

$$- \sum_0^\infty 3n(n-1)a_n x^{n-1} + \sum_0^\infty n(n-1)a_n x^{n-2} + \sum_0^\infty 2na_n x^n - \sum_0^\infty 2a_n x^n = 0.$$

Bigarren eta hirugarren batukarietan, n aldagaia (n+1) eta (n+2) direlakoez ordezkatuko da, hurrenez hurren:

$$\sum_0^\infty 3n(n-1)a_n x^{n-1} \equiv \sum_{-1}^\infty 3(n+1)na_{n+1}x^n \equiv \sum_0^\infty 3(n+1)na_{n+1}x^n,$$

$$\sum_0^\infty n(n-1)a_n x^{n-2} \equiv \sum_{-2}^\infty (n+2)(n+1)a_{n+2}x^n \equiv \sum_0^\infty (n+2)(n+1)a_{n+2}x^n.$$

Horrela, batukari bakar bat plantea dezakegu, hau da,

$$\sum_0^\infty \left([2n(n-1) + 2n - 2]a_n - 3(n+1)na_{n+1} + (n+2)(n+1)a_{n+2} \right) x^n = 0.$$

Ondorioz, errepikapen-legea ondokoa da:

$$2(n-1)a_n - 3na_{n+1} + (n+2)a_{n+2} = 0 \longrightarrow a_{n+2} = \frac{2(1-n)a_n + 3na_{n+1}}{n+2}, \quad n \geq 0 .$$

Serieko koefizienteak hauexek dira:

$$a_0 \equiv a_0 , \quad a_1 \equiv a_1 , \qquad n = 0 \longrightarrow a_2 = 2a_0/2 = a_0 ,$$

$$n = 1 \longrightarrow a_3 = 3a_2/3 = a_0 , \quad n = 2 \longrightarrow a_4 = (-2a_2 + 6a_3)/4 = a_0 ,$$

$$n = 3 \longrightarrow a_5 = (-4a_3 + 9a_4)/5 = a_0 \longrightarrow \ldots \ \underline{a_n = a_0} .$$

Orduan, soluzioa ondokoa izango da:

$$y = \sum_0^\infty a_n x^n = a_1 x + a_0(1 + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + \ldots\ldots + x^n + \ldots) =$$

$$= (a_1 - a_0)x + a_0(1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + \ldots\ldots + x^n + \ldots) \Rightarrow$$

$$y = (a_1 - a_0)x + \frac{1}{1 - x} a_0 , \qquad [2]$$

non, a_0 koefizientearen faktorea den x arrazoiko serie geometrikoaren batura, $[S = 1/(1-x)]$ den.

3.- $y_1 = x$ delakoa [1] ekuazioaren soluzio bat bada, $y = y_1 z$ ordezkapenaz beste soluzio linealki independente bat lor daiteke.

$$y_2 = y_1 \int \frac{\exp[-\int P(x)dx]}{y_1^2}\, dx,$$

$$P(x) = \frac{x}{(x-1)(x-1/2)} = \frac{2}{x-1} - \frac{1}{x-1/2} \longrightarrow -\int P(x)dx = \operatorname{Ln} \frac{x-1/2}{(x-1)^2} \longrightarrow$$

$$\exp[-\int P(x)dx] = \frac{x-1/2}{(x-1)^2} \longrightarrow y_2 = x \int \frac{x-1/2}{x^2(x-1)^2}\, dx = \frac{x}{2} \int \left(\frac{-1}{x^2} + \frac{1}{(x-1)^2} \right) dx$$

$$\longrightarrow \qquad y_2 = \frac{x}{2}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x-1} \right) = \frac{-1}{2(1-x)} \; .$$

Era honetan, [1]-aren soluzio orokorra ondokoa da:

$$y = Ax + \frac{B}{1-x} \; . \qquad [3]$$

4.- [2] eta [3] baliokideak dira: $(a_1 - a_0) \equiv A$ eta $a_0 \equiv B$.

5.- Problemaren baldintza geometrikoak aplikatuko ditugu.

Kurba integrala M(0,1)-tik pasatzen da: $y(0) = 1 \longrightarrow \underline{1 = B}$.

M(0,1)-en (OX)-ekiko tangente paraleloa: $y'(0) = 0 \longrightarrow$

$$y' = A + \frac{B}{(1-x)^2} \longrightarrow 0 = A + B \longrightarrow \mathbf{A = -1} \Rightarrow y = -x + \frac{1}{1-x} \; . \qquad [4]$$

78.- Integratu ondoko ekuazioa x-en berreduretako serieen bidez,

$$(2x - x^2)y'' + 2(x - 1)y' - 2y = 0. \qquad [1]$$

Aurki bedi soluzio partikularra, y(1) = y'(1) = 1 tenerako.

Kasu honetan $x = 0$ eta $x = 2$ puntuak singular erregularrak dira.

$$P(x) = \frac{2(x-1)}{x(2-x)}, \; Q(x) = \frac{-2}{x(2-x)} \longrightarrow x(2-x) = 0 \longrightarrow x = 0 , x = 2$$

$\underline{x = 0} \longrightarrow xP(x) = \dfrac{2(x-1)}{2-x}$, $x^2Q(x) = \dfrac{-2x}{2-x}$ funtzioak $x = 0$ puntuan jarraiak dira.

$\underline{x = 2} \longrightarrow (x-2)P(x) = \dfrac{2(1-x)}{x}$, $(x-2)^2Q(x) = \dfrac{2(x-2)}{x}$ funtzioak $x = 2$ puntuan jarraiak dira.

Beraz, puntu hauetan [1] ekuazioak $R = 2$ konbergentzi erradioko x eta $x-2$ gaien berreduretako serie orokortuen bidezko soluzioak onartuko ditu.

Aproba egiteko x-en berreduretako serie orokortua:

$$y = x^r \sum_0^\infty a_n x^n = \sum_0^\infty a_n x^{n+r}, \qquad [2]$$

$$y' = \sum_0^\infty (n + r)a_n x^{n+r-1} \quad , \quad y'' = \sum_0^\infty (n + r)(n + r - 1)a_n x^{n+r-2}.$$

[1] ekuazioan ordezkatuz, hurrengoa ondoriozta dezakegu:

$$(2x - x^2)y'' + 2(x -1)y' - 2y = 0 \longrightarrow \sum_0^\infty 2(n+r)(n+r-1)a_n x^{n+r-1} -$$

$$\sum_0^\infty(n+r)(n+r-1)a_n x^{n+r} + \sum_0^\infty 2(n+r)a_n x^{n+r} - \sum_0^\infty 2(n+r)a_n x^{n+r-1} - \sum_0^\infty 2a_n x^{n+r} = 0.$$

Lehen eta laugarren batukarietan n aldagaia (n+1)-ez aldatu eta azpiindizeak doitu behar dira, hots,

$$\sum_{0}^{\infty} 2(n+r)(n+r-1)a_n x^{n+r-1} \equiv \sum_{-1}^{\infty} 2(n+r+1)(n+r)a_{n+1} x^{n+r} = 2r(r-1)a_0 x^{r-1} +$$

$$+ \sum_{0}^{\infty} 2(n+r+1)(n+r)a_{n+1} x^{n+r},$$

$$\sum_{0}^{\infty} 2(n+r)a_n x^{n+r-1} \equiv \sum_{-1}^{\infty} 2(n+r+1)a_{n+1} x^{n+r} = 2ra_0 x^{r-1} + \sum_{0}^{\infty} 2(n+r+1)a_n x^{n+r-1}.$$

Ekuazioko gaiak bilduz, hurrengoa dugu:

$$2r(r-1)a_0 x^{r-1} - 2ra_0 x^{r-1} + \sum_{0}^{\infty} \Big([2(n+r+1)(n+r) - 2(n+r+1)]a_{n+1} -$$

$$- [(n+r)(n+r-1) - 2(n+r) + 2]a_n \Big) x^{n+r} = 0.$$

Demagun $a_0 \neq 0$ dela. Edozein x-etarako hurrengoa bete behar da:

$$\begin{cases} 2r(r-2)a_0 x^{r-1} = 0 \longrightarrow 2r(r-2) = 0 \longrightarrow \underline{r = 0}\,, \quad \underline{r = 2} \\ [2(n+r+1)(n+r) - 2(n+r+1)]a_{n+1} - [(n+r)(n+r-1) - 2(n+r) + 2]a_n = 0. \end{cases}$$

r = 0 errorako, hurrengo errepikapen-legea dugu:

$$a_{n+1} = \frac{n(n-1)-2n+2}{2(n+1)n-2(n+1)}\, a_n = \frac{(n-2)(n-1)}{2(n+1)(n-1)}\, a_n \longrightarrow a_{n+1} = \frac{n-2}{2(n+1)}\, a_n. \quad [3]$$

Hemendik koefizienteak ondorioztatuko dira:

$n = 0 \longrightarrow a_1 = -a_0$, $n = 1 \longrightarrow a_2 = -a_1/4 = a_0/4$,

$n = 2 \longrightarrow a_3 = 0$, $\Rightarrow a_4 = a_5 = a_6 = \ldots = a_n = \ldots = 0.$

Ekuazioaren [2] soluzioa, ondoko polinomioa da:

$$y = x^r \sum_0^\infty a_n x^n = \sum_0^\infty a_n x^n = a_0(1 - x + x^2/4) \equiv A(x - 2)^2. \qquad [4]$$

$r = 2$ errorako errepikapen-legea hurrengoa dugu:

$$a_{n+1} = \frac{(n+2)(n-1)+2}{2(n+3)(n+1)} a_n = \frac{n(n+1)}{2(n+3)(n+1)} a_n \longrightarrow a_{n+1} = \frac{n}{2(n+3)} a_n . [5]$$

a_0 izan ezik, koefiziente guztiak anulatuko dira:

$a_0 \equiv a_0$, $n = 0 \longrightarrow a_1 = 0 \Rightarrow a_2 = a_3 = a_4 = \ldots = a_n = \ldots = 0,$

$$y = x^r \sum_0^\infty a_n x^n = x^2 \sum_0^\infty a_n x^n = a_0 x^2 \equiv Bx^2. \qquad [6]$$

Azkenik, [1] ekuazioaren soluzio orokorra hauxe izango da:

$$y = A(x-2)^2 + Bx^2 = (A+B)x^2 + 4A(1-x) \longrightarrow y = Cx^2 + D(1-x). \qquad [7]$$

Soluzio partikularra:

$y(1) = 1 \longrightarrow \underline{1 = C}$; $y'(1) = 1 \longrightarrow 1 = 2C - D \longrightarrow \underline{D = 1} \Rightarrow$

$$y = x^2 - x + 1. \qquad [8]$$

79. Integratu ondoko ekuazioa x-en berredura-serieen bidez:

$$2x^2y'' - xy' + (1 + x)y = 0. \qquad [1]$$

$x_0 = 0$ delakoa puntu singular erregularra da, $xP(x) = -1/2$ eta $x^2Q(x) = (1+x)/2$ funtzioak $x = 0$ puntuan jarraiak direlako. Beraz, serie orokortuen erako soluzioekin egin daiteke aproba.

$$y = \sum_0^\infty a_n x^{n+r}, \quad y' = \sum_0^\infty (n+r)a_n x^{n+r-1}, \quad y'' = \sum_0^\infty (n+r)(n+r-1)a_n x^{n+r-2}.$$

Ekuazioan ordezkatuz, ondokoa lortuko da:

$$2x^2y'' - xy' + (1+x)y = 0 \longrightarrow \sum_0^\infty 2(n+r)(n+r-1)a_n x^{n+r} - \sum_0^\infty (n+r)a_n x^{n+r}$$

$$+ \sum_0^\infty a_n x^{n+r} + \sum_0^\infty a_n x^{n+r+1} = 0.$$

Berredura guztiak x^{n+r} gaien berdinak egiteko, azkeneko batukarian n indizea (n-1) balioaz ordezkatuko da, era horretan beraren azpiindizea 0-tik 1-era pasatuko da. Hiru batukarietan lehenengo gaia bananduz gero, ondoko ekuaziora irits gaitezke:

$$[2r(r-1)-r+1]a_0x^n + \sum_1^\infty \left([2(n+r)(n+r-1)-(n+r)+1]a_n + a_{n-1}\right) x^{n+r} = 0.$$

Demagun $a_0 \neq 0$ dela. x aldagaiaren edozein baliotarako ondokoa beteko da:

$$\begin{cases} 2r(r-1) - r + 1 = 0 \longrightarrow r = 1/2, \ r = 1, \\ [2(n+r)(n+r-1) - (n+r) + 1]a_n + a_{n-1} = 0. \end{cases}$$

Hortik, hurrengo errepikapen-legera irits daiteke:

$$r = 1/2\ , \quad r = 1\ , \quad a_n = -\frac{a_{n-1}}{2(n+r)^2 - 3(n+r) + 1}\ , \quad n \geq 1.$$

Ekuazioaren soluzioak:

Ekuazio indizialaren erro bakoitzerako kasuak aztertuko dira:

$$\underline{r = 1/2} \longrightarrow a_n = -\frac{a_{n-1}}{2(n+1/2)^2 - 3(n+1/2) + 1} = -\frac{a_{n-1}}{n(2n-1)}\ , \quad n \geq 1,$$

$$n = 1 \longrightarrow a_1 = -a_0\ , \qquad n = 2 \longrightarrow a_2 = \frac{1}{2.3}\, a_0\ ,$$

$$n = 3 \longrightarrow a_3 = \frac{-1}{3.5.2.3}\, a_0\ , \quad n = 4 \longrightarrow a_4 = \frac{1}{4.7.3.5.2.3}\, a_0\ ,$$

....

$$a_n = \frac{(-1)^n}{n(2n-1)(n-1)(n-3)......3.5.2.3.1.1}\, a_0\ .$$

Dagokion soluzioa ondokoa da:

$$y_1(x) = x^{1/2}\left(a_0 + \sum_{1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n(2n-1)(n-1)(n-3)...3.5.2.3.1.1}\, a_0 \quad x^n\right).$$

$$\underline{r = 1} \longrightarrow a_n = -\frac{a_{n-1}}{2(n+1)^2 - 3(n+1) + 1} = -\frac{a_{n-1}}{n(2n+1)}\ , \quad n \geq 1.$$

n gaiari balioak emanez, errepikapen-legea ondoriozta daiteke:

$$n = 1 \longrightarrow a_1 = -\frac{1}{1.3}a_0, \qquad n = 2 \longrightarrow a_2 = \frac{1}{2.5.1.3}a_0,$$

$$n = 3 \longrightarrow a_3 = \frac{-1}{3.7.2.5.1.3}a_0, \; n = 4 \longrightarrow a_4 = \frac{1}{4.9.3.7.2.5.1.3}a_0,$$

....

$$a_n = \frac{(-1)^n}{n(2n+1)(n-1)(2n-1)\ldots 3.7.2.5.1.3}a_0 .$$

Beraz, lortuko den soluzioa ondokoa da:

$$y_2(x) = x\left(a_0 + \sum_1^{\infty} \frac{(-1)^n}{n(2n+1)(n-1)(2n-1)\ldots 3.7.2.5.1.3}a_0 x^n\right).$$

y_1 eta y_2 soluzio linealki independenteak direnez, (hurrenez hurren, berretzaile arrazional eta osoetako x-en berretzaileak), [1] ekuazioaren soluzio orokorra ondoko konbinazio lineala da:

$$y = Ay_1 + By_2 = Ax^{1/2}\left(1 + \sum_1^{\infty} \frac{(-1)^n}{n(2n-1)(n-1)(n-3)\ldots 3.5.2.3.1.1}x^n\right)$$

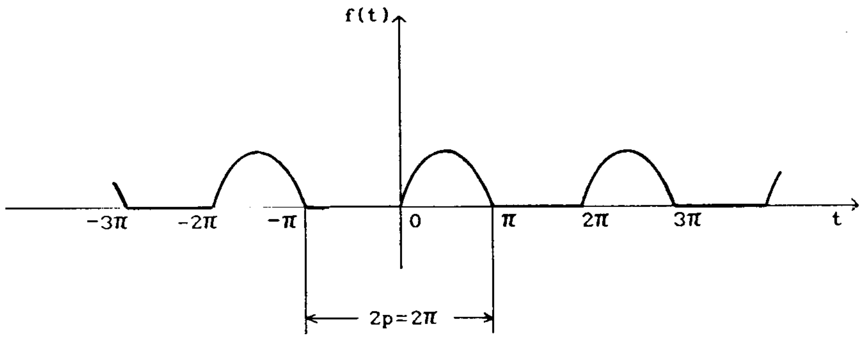
$$+ Bx\left(1 + \sum_1^{\infty} \frac{(-1)^n}{n(2n+1)(n-1)(2n-1)\ldots 3.7.2.5.1.3}x^n\right).$$

80. Gara bedi Fourier-en serieen bidez, -p < t < p periodoan deskribatutako ondoko funtzio periodikoa:

$$f(t) = \begin{cases} 0, & -\pi < t < 0, \\ \sin t, & 0 < t < \pi. \end{cases}$$

Lor bitez, t = 0 eta t = $\pi/2$ parametroetarako zenbakizko serieen balio partikularrak.

Funtzioaren adierazpen grafikoa:



2π periododun funtzio periodikoen Fourier-en serieen bidezko garapena, ondoko hau da:

$$f(t) = a_0/2 + \sum_1^{\infty} a_k \cos kt + b_k \sin kt, \qquad [1]$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt \ , \quad a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos kt dt \ , \quad b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin kt dt.$$

Koefizienteen kalkulua:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\text{sint}dt = \frac{2}{\pi}, \qquad [2]$$

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\text{cosktdt} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\text{sintcosktdt} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}[\sin(1+k)t+\sin(1-k)t]dt$$

$$= \frac{-1}{2\pi}\left|\frac{\cos(1+k)t}{1+k} + \frac{\cos(1-k)t}{1-k}\right|_0^{\pi} = \frac{-1}{2\pi}\left(\frac{\cos(1+k)\pi}{1+k} + \frac{\cos(1-k)\pi}{1-k} - \frac{2}{1-k^2}\right)$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left(\frac{\text{cosk}\pi}{1+k} + \frac{\text{cosk}\pi}{1-k} + \frac{2}{1-k^2}\right) \Rightarrow a_k = \frac{1+\text{cosk}\pi}{\pi(1-k^2)}, \quad k \neq 1. \qquad [3]$$

a_1 koefizientea kalkulatzeko, integrala ebatziko dugu:

$$a_1 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\text{sintcostdt} = \left|\frac{\sin^2 t}{2\pi}\right|_0^{\pi} = 0. \qquad [4]$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\text{sinktdt} = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\text{sintsinktdt} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}[\cos(1-k)t-\cos(1+k)t]dt$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left|\frac{\sin(1-k)t}{1-k} - \frac{\sin(1+k)t}{1+k}\right|_0^{\pi} = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{\sin(1-k)\pi}{1-k} - \frac{\sin(1+k)\pi}{1+k}\right) = 0.$$

Aurreko kasuan bezala, b_1 koefizientearen kalkulua hauxe da:

$$b_1 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\text{sintsintdt} = \frac{1}{\pi}\left|\frac{t}{2} - \frac{\sin 2t}{4}\right|_0^{\pi} = \frac{1}{2}. \qquad [5]$$

[1] ekuazioan ordezkatuz lortuko dugun emaitza hurrengoa da:

$$f(t) = \frac{1}{\pi} + \frac{\sin t}{2} + \frac{1}{\pi}\sum_{1}^{\infty} \frac{1 + \cos k\pi}{1 - k^2} \cos kt. \qquad [6]$$

Seriea beste era batetan idatz daiteke:

$k \equiv$ BAKOITIA : $k = 2n - 1 \longrightarrow (1 + \cos k\pi) = 0 \Rightarrow a_k = 0,$

$k \equiv$ BIKOITIA : $k = 2n \longrightarrow (1 + \cos k\pi) = 2 \Rightarrow a_k = \dfrac{2}{1 - k^2}.$

[6] adierazpenean k delakoa 2n gaiaz ordezkatutako da:

$$f(t) = \frac{1}{\pi} + \frac{\sin t}{2} - \frac{2}{\pi}\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{4n^2 - 1} \cos 2nt. \qquad [7]$$

Lehenengo gaiak garatuz, hurrengoa lor dezakegu:

$$f(t) = \frac{1}{\pi} + \frac{\sin t}{2} - \frac{2}{\pi}\left(\frac{\cos 2t}{3} + \frac{\cos 4t}{15} + \frac{\cos 6t}{35} + \frac{\cos 8t}{63} + \dots \right).$$

Emaitza partikularrak:

f(t) funtzioa jarraia denez, serieak t ardatz osoan funtziora konbergituko du. $t = 0$ eta $t = \pi/2$ balioetarako, ondokoa dugu:

$$f(0) = 0 = S(0) = \frac{1}{\pi} - \frac{2}{\pi}\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{4n^2 - 1} \Rightarrow \sum_{1}^{\infty} \frac{1}{4n^2 - 1} = \frac{1}{2}, \qquad [8]$$

$$f(\pi/2) = 1 = S(\pi/2) = \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2} - \frac{2}{\pi}\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{4n^2 - 1} \cos(n\pi) \longrightarrow$$

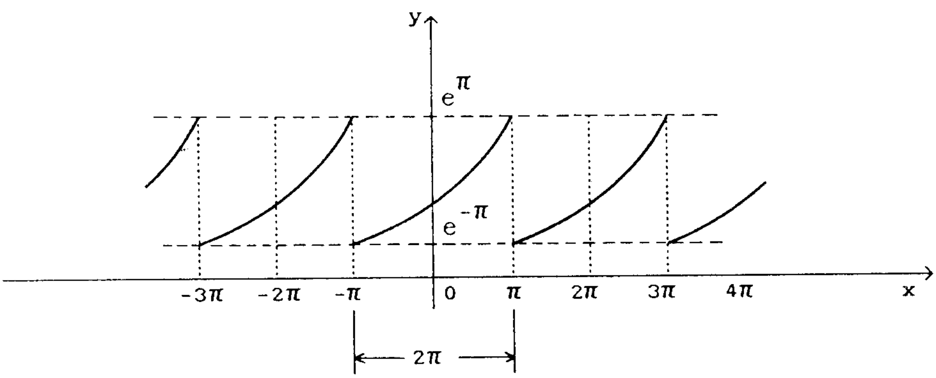
$$\frac{\pi - 2}{2\pi} = -\frac{2}{\pi}\sum_{1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4n^2 - 1} \Rightarrow \sum_{1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4n^2 - 1} = \frac{2 - \pi}{4}. \qquad [9]$$

81. Egin bedi, $y = e^x$ funtziorako Fourier-en seriezko garapena, $-\pi < x < \pi$ tartean.

a) $x = 0$ eta $x = \pi$ balioetarako, zenbat balio du serieak?

b) Ondoriozta bitez $y = Shx$ eta $y = Chx$ funtzioetarako Fourier-en seriezko garapenak, emandako tartean.

Funtzio periodiko laguntzailearen adierazpen grafikoa:



Koefizienteen kalkulua:

$$f(x) = a_0/2 + \sum_{1}^{\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx, \qquad [1]$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^x dx = \frac{1}{\pi}(e^{\pi} - e^{-\pi}) = \frac{2Sh\pi}{\pi}\,. \qquad [2]$$

a_k eta b_k koefizienteak kalkulatzeko integralak, zatikako integrazioz kalkulatu behar dira:

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^x \cos kx\,dx = \frac{1}{\pi}\left|\frac{e^x}{k^2+1}(k\sin kx + \cos kx)\right|_{-\pi}^{\pi} =$$

$$= \frac{(e^{\pi} - e^{-\pi})\cos k\pi}{\pi(k^2+1)} = \frac{(-1)^k(e^{\pi} - e^{-\pi})}{\pi(k^2+1)} \longrightarrow a_k = \frac{2(-1)^k \mathrm{Sh}\pi}{\pi(k^2+1)}, \qquad [3]$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin kt\,dt = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^x \sin kx\,dx = \frac{1}{\pi}\left|\frac{e^x}{k^2+1}(\sin kx - k\cos kx)\right|_{-\pi}^{\pi}$$

$$= -\frac{(e^{\pi} - e^{-\pi})k\cos k\pi}{\pi(k^2+1)} = -\frac{k(-1)^k(e^{\pi} - e^{-\pi})}{\pi(k^2+1)} \longrightarrow b_k = -\frac{2k(-1)^k \mathrm{Sh}\pi}{\pi(k^2+1)}. [4]$$

[2], [3] eta [4] balioak [1] adierazpenean ordezkatuko dira:

$$e^x = \frac{\mathrm{Sh}\pi}{\pi} + \frac{2\mathrm{Sh}\pi}{\pi}\sum_{1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k^2+1}(\cos kx - k\sin kx). \qquad [5]$$

Serieak $y = e^x$ funtziora konbergitzen du $-\pi < x < \pi$ tartean. $-\pi$ eta π mutur-puntuetan, non funtzioa ez-jarraia den, serieak duen limitea albo-limiteen baturaerdia delarik, $(e^{\pi} + e^{-\pi})/2 = \mathrm{Ch}\pi$ alegia.

a) Garapenaren balio partikularrak:

$x = 0$ denean: $y(0) = 1 = S(0) \longrightarrow$

$$1 = \frac{\mathrm{Sh}\pi}{\pi} + \frac{2\mathrm{Sh}\pi}{\pi}\sum_{1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k^2+1} \longrightarrow \sum_{1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k^2+1} = \frac{\pi - \mathrm{Sh}\pi}{2\mathrm{Sh}\pi}. \qquad [6]$$

$x = \pi$ etengunerako : $S(\pi/2) = \mathrm{Ch}\pi \longrightarrow$

$$\mathrm{Ch}\pi = \frac{\mathrm{Sh}\pi}{\pi} + \frac{2\mathrm{Shu}}{\pi}\sum_{1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k^2+1}\cos k\pi = \frac{\mathrm{Sh}\pi}{\pi} + \frac{2\mathrm{Sh}\pi}{\pi}\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{k^2+1} \longrightarrow$$

$$\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{k^2+1} = \frac{\pi\mathrm{Ch}\pi - \mathrm{Sh}\pi}{2\mathrm{Sh}\pi} = \frac{\pi\mathrm{Cth}\pi - 1}{2}. \qquad [7]$$

---

b) Funtzio hiperbolikoen definizioen arabera, hots,

$$\mathrm{Sh}x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad [8], \qquad \mathrm{Ch}x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \qquad [9]$$

nahikoa izango da $y = e^{-x}$ funtzioaren garapena lortzea. Horretarako, [5]-ean x aldagaia -x delakoaz ordezkatuko da:

$$e^{-x} = \frac{\mathrm{Sh}\pi}{\pi} + \frac{2\mathrm{Sh}\pi}{\pi}\sum_{1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k^2+1}[\cos(-kx) - k\sin(-kx)] \longrightarrow$$

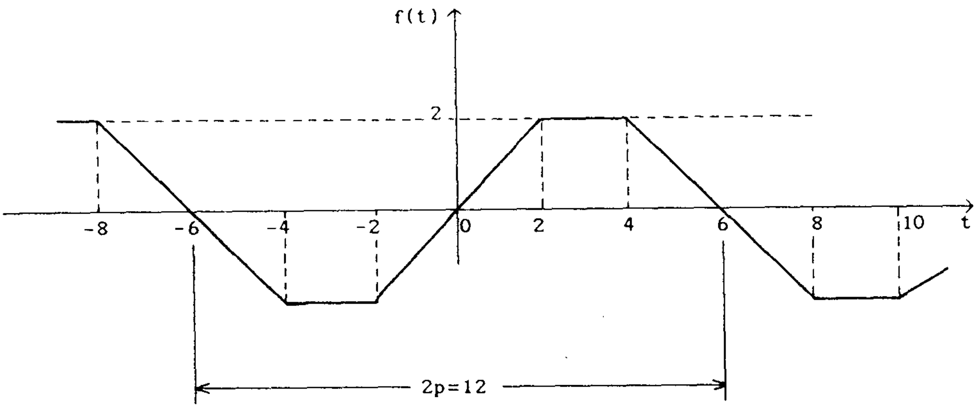
$$e^{-x} = \frac{\mathrm{Sh}\pi}{\pi} + \frac{2\mathrm{Sh}\pi}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k^2+1}(\cos kx + k\sin kx). \qquad [10]$$

[5] eta [10] adierazpenak [8] eta [9] ekuazioetan ordezkatuz, hurrengo emaitzak lortuko dira:

$$\mathrm{Sh}x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \frac{2\mathrm{Sh}\pi}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k^2+1}k\sin kx, \qquad [11]$$

$$\mathrm{Ch}x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \frac{\mathrm{Sh}\pi}{\pi} + \frac{2\mathrm{Sh}\pi}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k^2+1}\cos kx. \qquad [12]$$

82. Adieraz bedi irudiko funtzioa Fourier-en seriezko garapenaren bidez.



Ondoriozta bedi $\displaystyle\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \sin^2 \frac{kp}{2} \cos \frac{kp}{6}$ **seriearen balioa.**

2p = 12 periododun funtzio periodiko bakoitiaren kasuan gaude. Beraren Fourier-en garapenak soilik sinu harmonikoak ditu.

Beraren adierazpen analitikoa $0 < t < 6$ periodoerdian, ondokoa da:

$$f(t) = \begin{cases} t, & 0 < t < 2, \\ 2, & 2 < t < 4, \\ 6-t, & 4 < t < 6. \end{cases}$$

Garapenaren formulazioa:

$$f(t) = \sum_{1}^{\infty} b_k \sin\frac{k\pi t}{p}, \qquad b_k = \frac{2}{p}\int_0^p f(t) \sin\frac{k\pi t}{p}\, dt,$$

$$b_k = \frac{1}{3}\int_0^6 f(t)\,\sin\frac{k\pi t}{6}\,dt = \frac{1}{3}\int_0^2 t\,\sin\frac{k\pi t}{6}\,dt + \frac{2}{3}\int_2^4 \sin\frac{k\pi t}{6}\,dt +$$

$$+ \frac{1}{3}\int_4^6 (6 - t)\,\sin\frac{k\pi t}{6}\,dt = \frac{1}{3}\,(I_1 + 2I_2 + I_3).$$

I_1 zatikako integrazioz ebatziko da:

$$t = u \longrightarrow dt = du, \qquad \sin\frac{k\pi t}{6}\,dt = dv \longrightarrow v = \frac{-6}{k\pi}\cos\frac{k\pi t}{6}$$

$$I_1 = -\frac{6t}{k\pi}\cos\frac{k\pi t}{6} - \int_0^2 \frac{-6}{k\pi}\cos\frac{k\pi t}{6}\,dt = \left| -\frac{6t}{k\pi}\cos\frac{k\pi t}{6} + \frac{36}{k^2\pi^2}\sin\frac{k\pi t}{6}\right|_0^2 =$$

$$= -\frac{12}{k\pi}\cos\frac{k\pi}{3} + \frac{36}{k^2\pi^2}\sin\frac{k\pi}{3}.$$

$$I_2 = \left| \frac{-6}{k\pi}\cos\frac{k\pi t}{6}\right|_2^4 = \frac{-6}{k\pi}\cos\frac{2k\pi}{3} + \frac{6}{k\pi}\cos\frac{k\pi}{3}.$$

$$I_3 = \int_4^6 (6 - t)\,\sin\frac{k\pi t}{6}\,dt = 6\int_4^6 \sin\frac{k\pi t}{6}\,dt - \int_4^6 t\,\sin\frac{k\pi t}{6}\,dt =$$

$$= \left| \frac{6(t - 6)}{k\pi}\cos\frac{k\pi t}{6} - \frac{36}{k^2\pi^2}\sin\frac{k\pi t}{6}\right|_4^6 =$$

$$= \frac{-36}{k^2\pi^2}\sin k\pi + \frac{12}{k\pi}\cos\frac{2k\pi}{3} + \frac{36}{k^2\pi^2}\sin\frac{2k\pi}{3}.$$

$$b_k = \frac{1}{3}(I_1 + 2I_2 + I_3) = \frac{1}{3}\left(-\frac{12}{k\pi}\cos\frac{k\pi}{3} + \frac{36}{k^2\pi^2}\sin\frac{k\pi}{3} - \frac{12}{k\pi}\cos\frac{2k\pi}{3} + \right.$$

$$\left. + \frac{12}{k\pi}\cos\frac{k\pi}{3} + \frac{-36}{k^2\pi^2}\sin k\pi + \frac{12}{k\pi}\cos\frac{2k\pi}{3} + \frac{36}{k^2\pi^2}\sin\frac{2k\pi}{3}\right) \longrightarrow$$

$$b_k = \frac{12}{k^2\pi^2}\left(\sin\frac{k\pi}{3} + \sin\frac{2k\pi}{3}\right) \equiv \frac{24}{k^2\pi^2}\sin\frac{k\pi}{2}\cos\frac{k\pi}{6}\ .$$

Adierazpen honetatik koefizienteen anulazioak ondoriozta daitezke:

$$\sin\frac{k\pi}{2} = 0 \longrightarrow k = 2 \equiv 2,\ 4,\ 6,\ 8,\ \ldots,\ 2k,\ \ldots \longrightarrow$$

$$b_2 = b_4 = b_6 = b_8 = b_{10} = \ldots = b_{2k} = \ldots = 0,$$

$$\cos\frac{k\pi}{6} = 0 \longrightarrow \frac{k\pi}{6} \equiv \frac{\pi}{2},\ \frac{3\pi}{2},\ \frac{5\pi}{2},\ \ldots \longrightarrow k \equiv 3,\ 9,\ 15,\ \ldots,\ 6k\text{-}3 \longrightarrow$$

$$b_3 = b_9 = b_{15} = b_{21} = b_{27} = \ldots = b_{6k-3} = \ldots = 0.$$

Beraz, lortuko den Fourier-en seriea ondokoa izango da:

$$f(t) = \sum_1^{\infty} b_k \sin\frac{k\pi t}{p} = \frac{24}{\pi^2}\sum_1^{\infty}\left(\frac{1}{k^2}\sin\frac{k\pi}{2}\cos\frac{k\pi}{6}\right)\sin\frac{k\pi t}{6}\ .$$

Garapenaren lehenengo gaietarako, honako adierazpena ondoriozta daiteke:

$$f(t) = \frac{12\sqrt{3}}{\pi^2}\left(\frac{1}{1^2}\sin\frac{\pi t}{6} - \frac{1}{5^2}\sin\frac{5\pi t}{6} + \frac{1}{7^2}\sin\frac{7\pi t}{6} - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{11^2}\sin\frac{11\pi t}{6} + \frac{1}{13^2}\sin\frac{13\pi t}{6} + \dots \right).$$

Eskatutako seriea, t = 3 baliorako lortuko da.

$$f(3) = 2 = S(3) \longrightarrow$$

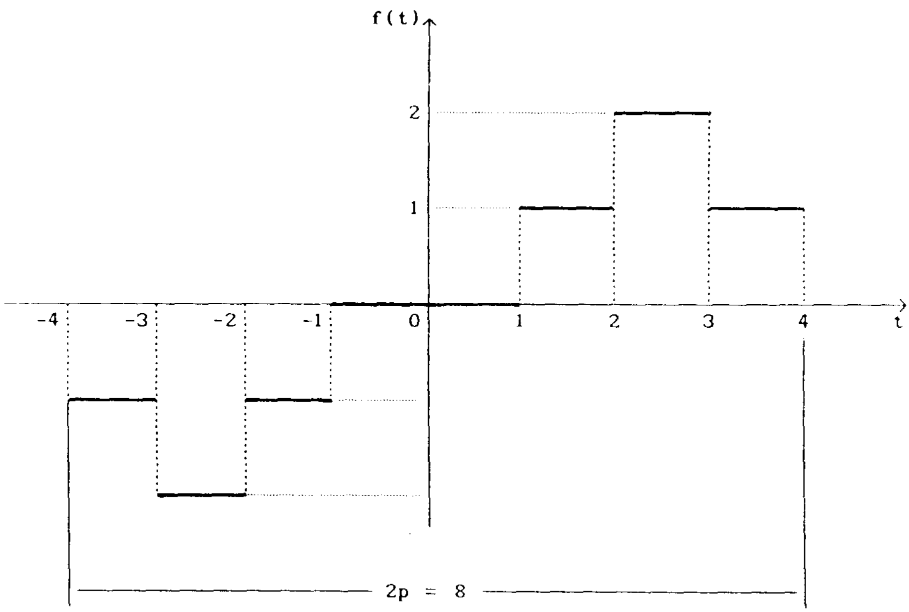
$$2 = \frac{24}{\pi^2}\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{k^2}\sin^2\frac{k\pi}{2}\cos\frac{k\pi}{6} \longrightarrow \sum_{1}^{\infty}\frac{1}{k^2}\sin^2\frac{k\pi}{2}\cos\frac{k\pi}{6} = \frac{\pi^2}{12}\ .$$

83. Lortu ondoko funtzioaren Fourier-en serieen bidezko garapena $0 < t < 4$ tartean:

$$e(t) = \begin{cases} 0, & 0 < t < 1, \\ 1, & 1 < t < 2, \\ 2, & 2 < t < 3, \\ 1, & 3 < t < 4, \\ 0, & 4 < t. \end{cases}$$

Zehaztu garape aren balioak, e(t) funtzioaren etenguneetan.

Luzapen bakoiti baten bidez (jatorriarekiko simetriaz), f(t) funtzio periodiko laguntzaile bat definitu behar da. Honen adierazpen grafikoa, $-4 < t < 4$ tartean, ondokoa da:



Aurreko ariketan bezala, garapenaren formulak hauexek dira:

$$f(t) = \sum_{1}^{\infty} b_k \sin\frac{k\pi t}{p}, \qquad b_k = \frac{2}{p}\int_0^p f(t)\sin\frac{k\pi t}{p}\,dt,$$

$$b_k = \frac{1}{2}\int_1^2 \sin\frac{k\pi t}{4}\,dt + \frac{1}{2}\int_2^3 2\sin\frac{k\pi t}{4}\,dt + \frac{1}{2}\int_3^4 \sin\frac{k\pi t}{4}\,dt =$$

$$= -\frac{1}{2}\left|\frac{4}{k\pi}\cos\frac{k\pi t}{4}\right|_1^2 - \frac{1}{2}\left|\frac{8}{k\pi}\cos\frac{k\pi t}{4}\right|_2^3 - \frac{1}{2}\left|\frac{4}{k\pi}\cos\frac{k\pi t}{4}\right|_3^4 =$$

$$= \frac{-2}{k\pi}\left(\cos\frac{k\pi}{2} - \cos\frac{k\pi}{4} + 2\cos\frac{3k\pi}{4} - 2\cos\frac{k\pi}{2} + \cos k\pi - \cos\frac{3k\pi}{4}\right) \longrightarrow$$

$$b_k = \frac{2}{k\pi}\left(\cos\frac{k\pi}{4} + \cos\frac{k\pi}{2} - \cos\frac{3k\pi}{4} - \cos k\pi\right).$$

Edo, formula trigonometrikoak aplikatuz, hurrengoa lor daiteke:

$$\cos a - \cos b = 2\sin\frac{a+b}{2}\sin\frac{b-a}{2}\ ; \quad \sin a + \sin b = 2\sin\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2} \longrightarrow$$

$$\cos\frac{k\pi}{4} - \cos\frac{3k\pi}{4} = 2\sin\frac{k\pi}{2}\sin\frac{k\pi}{4}\ ; \quad \cos\frac{k\pi}{2} - \cos k\pi = 2\sin\frac{3k\pi}{4}\sin\frac{k\pi}{4} \Rightarrow$$

$$b_k = \frac{4}{k\pi}\sin\frac{k\pi}{4}\left(\sin\frac{k\pi}{2} + \sin\frac{3k\pi}{4}\right) = \frac{8}{k\pi}\sin\frac{k\pi}{4}\sin\frac{5k\pi}{8}\cos\frac{k\pi}{8}.$$

Hemendik, koefizienteak nuluak noiz diren ondorioztatuko da:

$$\sin\frac{k\pi}{4} = 0 \longrightarrow k = 4 = 4,\ 8,\ 12,\ 16,\ \ldots,\ 4k,\ \ldots$$

$$\sin\frac{5k\pi}{8} = 0\ ,\quad \cos\frac{k\pi}{8} = 0 \longrightarrow \text{aurrekoen barnean daude.}$$

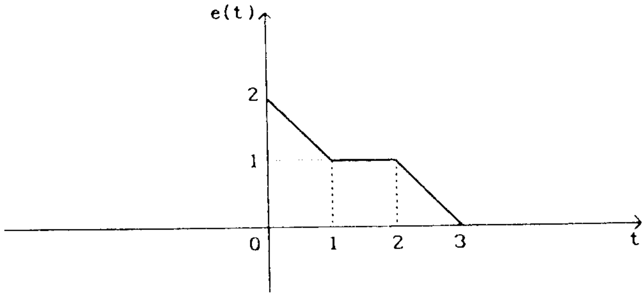
Garapenaren formulan ordezkatuz, ondokoa lortuko da:

$$f(t) = \sum_1^{\infty} b_k \sin\frac{k\pi t}{p} = \frac{8}{\pi}\sum_1^{\infty}\left(\frac{1}{k}\,\frac{8}{k\pi}\,\sin\frac{k\pi}{4}\,\sin\frac{5k\pi}{8}\,\cos\frac{k\pi}{8}\right)\sin\frac{k\pi t}{4}\ .$$

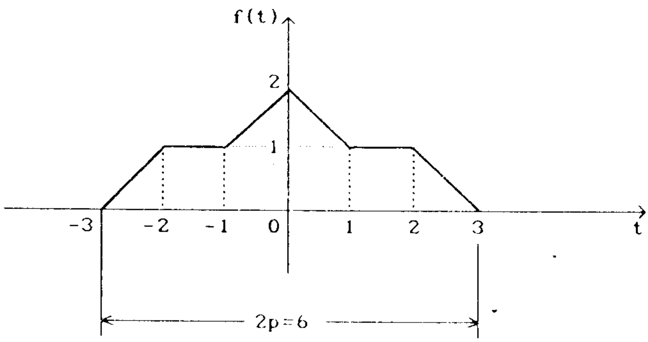
Dirichlet-en teoremaren arabera, serieak f(t) funtzioaren albo-limiteen baturaerdira joko du etenguneetan.

$$S(1) = S(4) = (0+1)/2 = 1/2;\quad S(2) = S(3) = (1+2)/2 = 3/2.$$

84. Aurkitu $0 < t < 3$ tartean irudiko e(t) funtziora konbergituko duen kosinuen bidezko garapen bat.



Orain, $2p = 6$ periododun funtzio periodiko bat osotu behar da. Horretarako, e(t) funtzioa $-3 < t < 0$ tartera luzatuko dugu, ondoko irudian ikus daitekeenez:



Kosinuen bidezko seriearen garapenerako formulak:

$$f(t) = a_0/2 + \sum_1^{\infty} a_k \cos\frac{k\pi t}{p} ,$$

$$a_0 = \frac{2}{p}\int_0^p f(t)dt, \qquad a_k = \frac{2}{p}\int_0^p f(t)\cos\frac{k\pi t}{p}\,dt.$$

Koefizienteen kalkulua:

$$a_0 = \frac{2}{3}\left(\int_0^1 (2 - t)dt + \int_1^2 dt + \int_2^3 (3 - t)dt \right) = 2,$$

$$a_k = \frac{2}{3}\left(\int_0^1 (2 - t)\cos\frac{k\pi t}{3}\, dt + \int_1^2 \cos\frac{k\pi t}{3}\, dt + \int_2^3 (3 - t)\cos\frac{k\pi t}{3}\, dt \right).$$

Zatikako integrazioz, integralen baturarako ondorioa hauxe da:

$$I_1 + I_2 + I_3 = \left| \frac{3(2-t)}{k\pi} \sin\frac{k\pi t}{3} - \frac{9}{k^2\pi^2} \cos\frac{k\pi t}{3} \right|_0^1 + \left| \frac{3}{k\pi} \sin\frac{k\pi t}{3} \right|_1^2 +$$

$$\left| \frac{3(3-t)}{k\pi} \sin\frac{k\pi t}{3} - \frac{9}{k^2\pi^2} \cos\frac{k\pi t}{3} \right|_2^3 = \frac{3}{k\pi} \sin\frac{k\pi}{3} + \frac{9}{k^2\pi^2} \left(1 - \cos\frac{k\pi}{3}\right) +$$

$$+ \frac{3}{k\pi} \left(\sin\frac{2k\pi}{3} - \sin\frac{k\pi}{3}\right) + \frac{9}{k^2\pi^2} \left(\cos\frac{2k\pi}{3} - \cos k\pi\right) - \frac{3}{k\pi} \sin\frac{2k\pi}{3} \quad \Rightarrow$$

$$a_k = \frac{2}{3} (I_1 + I_2 + I_3) = \frac{12}{k^2\pi^2} \left(1 - \cos\frac{k\pi}{3} + \cos\frac{2k\pi}{3} - \cos k\pi\right).$$

Era baliokidean,

$$a_k = \frac{12}{k^2\pi^2} \left(1 - \cos k\pi - 2\sin\frac{k\pi}{2} \sin\frac{k\pi}{6}\right)$$

da, koefiziente bikoitiak nuluak izanik. Beraz, ondoko serieak, etengunerik ez dagoenez, tarte osoan e(t) funtziora konbergituko du:

$$e(t) = 1 + \frac{12}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \left(1 - \cos k\pi - 2\sin\frac{k\pi}{2} \sin\frac{k\pi}{6} \right)\cos\frac{k\pi t}{3} .$$

85. Lor bitez $y = x^3 + 1$ funtziorako Fourier-en garapenak $0 < x < 2$ tartean,

a) kosinuetako serieak erabiliz, b) sinuetako serieen bidez.

Adieraz bedi $x = -2$, $x = 0$, $x = 1$, $x = 2$, $x = 3$ puntuetan garapenek norantz joko duten, eta konpara bitez balio horiek funtzioak hartzen dituenekin.

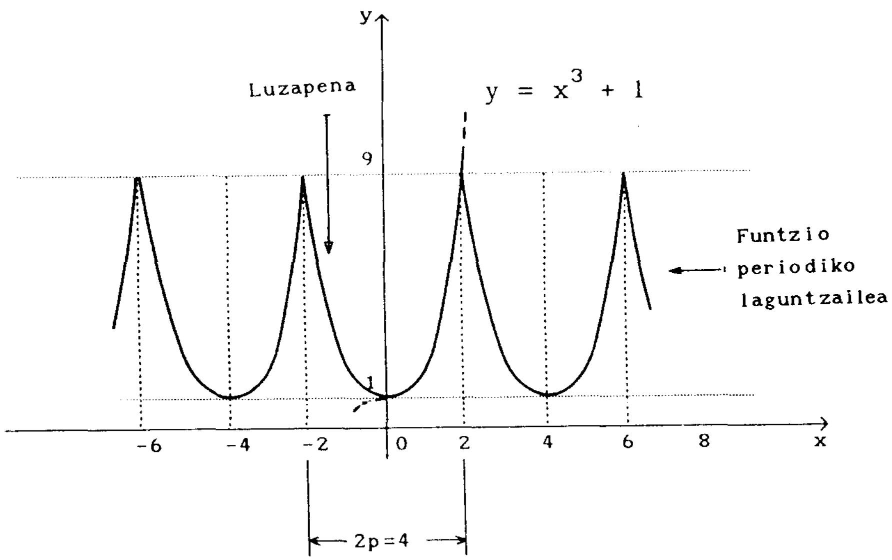
Kalkula bitez lortutako serieen balioak $x = 0$ eta $x = 1$ puntuetan.

---

a) Definizioa aplikatuz, ondoko luzapen bikoitia egingo da:

$$f_1(x) = \begin{cases} -x^3 + 1, & -2 < x < 0, \\ x^3 + 1, & 0 < x < 2. \end{cases}$$

Horrela alboko irudian adierazitako funtzio periodiko laguntzailea ondorioztatuko da:



Funtzio bikoitietarako Fourier-en formulak aplikatuz, hauxe dugu:

$$a_0 = \frac{2}{p}\int_0^2 f(x)dx = \int_0^2 (x^3 + 1)dx = 6, \qquad [1] \qquad b_k = 0, \qquad [2]$$

$$a_k = \frac{2}{p}\int_0^2 f(x)\cos\frac{k\pi x}{p}\,dx = \int_0^2 (x^3 + 1)\cos\frac{k\pi x}{2}\,dx.$$

Zatikako integrazioz, hurrengoa lor daiteke:

$$a_k = \left|\, \frac{2}{k\pi}(x^3 + 1)\sin\frac{k\pi x}{2}dx + \frac{12}{k^2\pi^2}x^2\cos\frac{k\pi x}{2} - \frac{48}{k^3\pi^3}x\sin\frac{k\pi x}{2} - \right.$$

$$\left. - \frac{96}{k^4\pi^4}\cos\frac{k\pi x}{2}\,\right|_0^2 = \left(\frac{48}{k^2\pi^2} - \frac{96}{k^4\pi^4}\right)\cos k\pi + \frac{96}{k^4\pi^4} \longrightarrow$$

$$a_k = \frac{96}{k^4\pi^4}(1 - \cos k\pi) + \frac{48}{k^2\pi^2}\cos k\pi = \begin{cases} \dfrac{48}{k^2\pi^2}, & k \equiv \text{BIK.} \\[2ex] \dfrac{48}{k^2\pi^2}\left(\dfrac{4}{k^2\pi} - 1\right), & k \equiv \text{BAK.} \end{cases}$$

Koefizienteak Fourier-en garapenean ordezkatuz,

$$f_1(x) = a_0/2 + \sum_1^{\infty} a_k \cos\frac{k\pi x}{p}$$

ondoriozta daiteke.

$0 < x < 2$ tartean y-ra konbergituko duen $S_1(x)$ seriea:

$$S_1(x) = x^3 + 1 = 3 + \sum_1^{\infty} \left[\frac{96}{k^4\pi^4} (1 - \cos k\pi) + \frac{48}{k^2\pi^2} \cos k\pi \right] \cos\frac{k\pi x}{2} .$$

$f_1(x)$ funtzio periodiko laguntzaileak etengunerik ez duenez, serieak ardatz osoan funtzio honetara konbergituko du. Baina, y funtzio aperiodikora soilik, $0 \leq x \leq 2$ tartean joko du. Bestalde, enuntziatuan emandako balioetarako, ondokoa dugu:

$$S_1(-2) = 9 \neq y(-2) = -7 , \quad S_1(0) = 1 = y(0) , \quad S_1(1) = 2 = y(2) ,$$

$$S_1(2) = 9 = y(2) , \quad S_1(3) = 2 \neq y(3) = 28.$$

$x = 0$ bada, hurrengo zenbakizko seriea lortuko da:

$$S(0) = 1 = 3 + \frac{48}{\pi^2} \sum_1^{\infty} \left[\frac{2}{k^4\pi^2} (1 - \cos k\pi) + \frac{1}{k^2} \cos k\pi \right] \longrightarrow$$

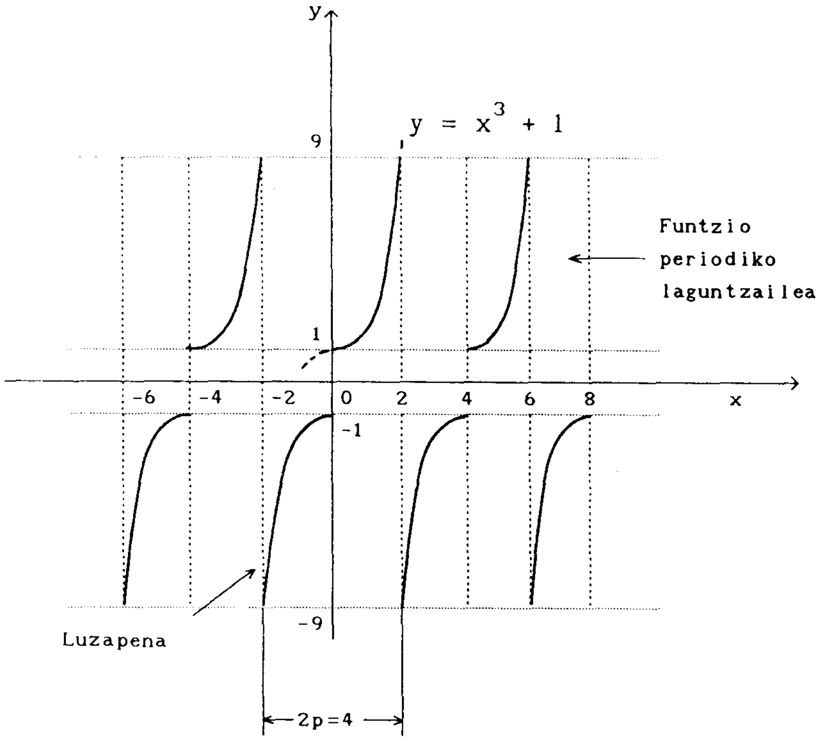
$$\sum_1^{\infty} \left[\frac{2}{k^4\pi^2} (1 - \cos k\pi) + \frac{1}{k^2} \cos k\pi \right] = -\frac{\pi^2}{24} .$$

---

b) Kasu honetan, ondoko luzapen bakoitia egin behar da:

$$f_2(x) = \begin{cases} x^3 - 1, & -2 < x < 0, \\ x^3 + 1, & 0 < x < 2. \end{cases}$$

Ondorioz, irudian adierazitako funtzio periodiko laguntzailea dugu:



Orain, funtzio bakoitietarako Fourier-en formulak aplikatuko dira:

$$a_0 = 0\,, \quad a_k = 0\,, \quad b_k = \frac{2}{p}\int_0^2 f(x)\,\sin\frac{k\pi x}{p}\,dx = \int_0^2 (x^3+1)\,\sin\frac{k\pi x}{2}\,dx.$$

Zatikako integrazioa aplikatuz, ondokoa lortuko da:

$$b_k = \Big|\ \frac{-2}{k\pi}\,(x^3+1)\,\cos\frac{k\pi x}{2}\,dx + \frac{12}{k^2\pi^2}\,x^2\sin\frac{k\pi x}{2} + \frac{48}{k^3\pi^3}\,x\,\cos\frac{k\pi x}{2} -$$

$$- \frac{96}{k^4\pi^4}\,\sin\frac{k\pi x}{2}\,\Big|_0^2 = \left(\frac{96}{k^3\pi^3} - \frac{18}{k\pi}\right)\cos k\pi + \frac{2}{k\pi}\,.$$

Funtzio bikoitietarako garapenaren formulan ordezkatzean, $S_2(x)$ seriea lortuko da, eta honek $0 < x < 2$ tartean y funtziora joko du:

$$S_2(x) = x^3 + 1 = 6 \sum_1^{\infty} \left[\left(\frac{16}{k^3\pi^3} - \frac{3}{k\pi} \right) \cos k\pi + \frac{1}{3k\pi} \right] \sin\frac{k\pi x}{2} .$$

Aurreko kasuan ez bezala, $f_2(x)$ funtzio periodikoak zenbaki bikoiti osoetan etengune finituak ditu. Dirichlet-en teoremaren arabera, puntu hauetan serieak albo-limiteen baturaerdira joko du, hau da:

$$S_2(-2) = \frac{9-9}{2} = 0 \neq y(-2) = -7 \ , \quad S_2(0) = \frac{1-1}{2} = 0 \neq y(0) = 1 \ ,$$

$$S_2(1) = 2 = y(1), \ S_2(2) = \frac{9-9}{2} = 0 \neq y(2) = 9, \ S_2(3) = -2 \neq y(3) = 28.$$

Azkenik, $x = 1$ balio partikularrerako, ondoko emaitza lortuko da:

$$S_2(1) = 2 = 6 \sum_1^{\infty} \left[\left(\frac{16}{k^3\pi^3} - \frac{3}{k\pi} \right) \cos k\pi + \frac{1}{3k\pi} \right] \sin\frac{k\pi}{2} .$$

ARIKETA PROPOSATUAK

1.- Aurkitu ekuazio diferentzial hauei dagozkien jatorrizkoak:

a) $y = A\sin^2 x$; b) $y = Ae^{-x}(x^2 + y^2)^{1/2}$;

c) $y = Ax + BxLnx + CxLn^2x$; d) $y = Ae^{-2x} + Be^x + \sin x$.

E: a) $y' = 2\text{cotg}x + y$; b) $(x^2y + y^3 - xy)dx + x^2dy = 0$;

c) $x^3y''' + xy' - y = 0$; d) $y'' + y' - 2y = \cos x - 3\sin x$.

2.- Azter bedi, ea hurrengo funtzioak alboan jarritako ekuazioaren soluzioak diren, eta baiezkoan, sailkatu:

a) $(y-C)^2 = 2Cx$, $(y+1)^2 + 2x = 0$, $2y + x = 0$; $y = 2x(y' + y'^2)$.

b) $y = Ax - A^2/2$, $y = x^2/2$; $2y - 2xy' + y'^2 = 0$.

E: a) Soluzio orokorra, partikularra ($C = -1$) eta singularra dira, hurrenez hurren.
b) Soluzio orokorra eta singularra dira.

3.- Integratu ondoko ekuazio diferentzialak:

a) $(1 + x^3)yy' - x^2 = 0$, b) $xy' = (1 - y^2)^{1/2}$

existentziaren eta bakartasunaren teorema betetzen duten planoko eremuak adieraziz.

E: a) $3y^2 - 2Ln|1 + x^3| = C$; $1 + x^3 \neq 0$, $y \neq 0$.

b) $y = \sin(Lnx + C)$, $y = \pm 1$; $x \neq 0$, $|y| < 1$.

4.- Substantzia erradioaktibo baten desintegrazio-abiadura substantzia horren aldiuneko kantitatearekiko proportzionala da. Hasierako 100 g-tako masa bat, 10 urte pasa ondoren 90 g-tara laburtu dela frogatu da. Aurkitu masaren adierazpena eta substantziaren batezbesteko bizitza.

E: $x(t) = 100 \exp\left(-\frac{Ln(10/9)}{10}t\right)$; $v_m = \frac{10Ln2}{Ln(10/9)}$.

5.- Bi ordenako erreakzio baten abiadura $x'(t) = \alpha(p - x)(q - x)$ ($\alpha > 0$) ekuazioaz adierazi da, non p eta q substantzia erreakzionatzaileen hasierako kontzentrazioak diren. $x(0) = 0$ dela jakinik, aurki bedi eratutako substantziaren $x(t)$ kontzentrazioa, hurrengo kasuetan: a) $p \neq q$; b) $p = q$.

E: a) $x(t) = pq\frac{\exp[\alpha(q-p)] - 1}{q\exp[\alpha(q-p)] - p}$; b) $x(t) = p^2\frac{\alpha t}{\alpha pt + 1}$.

6.- Determina bitez P(x,y) puntu bakoitzean hurrengo propietatea betetzen duten kurbak:

a) Azpitangentearen luzera abzisaren bikoitza da.
b) Azpinormalaren luzera konstantea da.

E: a) $y = 2xy' \longrightarrow y^2 = 2Cx$; b) $yy' = K \longrightarrow y^2 = 2kx + C$.

7.- Ebatzi ondoko ekuazio diferentzialak:

a) $(2x - y - 2xy + 1)dx + (x - 2y + xy - 2)dy = 0$;

b) $y' + \sin(x+y) - \sin(x-y) = 0$; c) $y' = e^{x+y} + e^{x-y}$, $y(0) = 0$.

E: a) $2x - y + Ln|(x-2)^5/(y-1)^2| = C$;

b) $2\sin x + \mathrm{Ln}|\mathrm{tg}(x/2)| = C$; c) $y = \mathrm{Ln}|\mathrm{tg}(e^x + \pi/4 - 1)|$.

8.- Integratu hurrengo ekuazio diferentzialak:

a) $(x + y)dx + (x + 2y)dy = 0, \qquad y(2) = 3$;

b) $(x + y)dx + (3x + 3y - 4)dy = 0$; c) $y - xy' = (y^2 - x^2)^{1/2}$;

d) $y' = y(x + y)/x^2, \quad y(1) = 1$; e) $y' = \dfrac{2x - y + 5}{x - y + 3}$, $y(0) = 0$.

E: a) $x^2 + 2xy + 2y^2 = 34$; b) $x + 3y + 2\mathrm{Ln}|2 - x - y| = A$;

c) $y + (y^2 - x^2)^{1/2} = A$; d) $y = x/(1 - \mathrm{Ln}x)$;

e) $(y - x - 3)^2 + (x + 2)^2 - 13 = 0$.

9.- Aldez aurretik emaniko ekuazioak "zehatzak" direla frogatu ondoren, aurkitu beraien soluzio orokorrak.

a) $y' = -\dfrac{mx + ny}{nx + my}$; b) $(y\cos x + 2xe^y)dx + (\sin x + x^2e^y + 2)dy = 0$;

c) $y' = \dfrac{1 - (y\sin x + \cos x)\exp(xy)}{x\sin x\ \exp(xy) + 2y}$, $y(0) = 1$;

d) $(e^{x+y} - \cos x)dx + (e^{x+y} - \sin y)dy = 0$;

e) $\left(2x + y - \dfrac{1}{x + y}\right)dx + \left(x - \dfrac{1}{x + y}\right)dy = 0$, $y(1) = 0$.

E: a) $m(x^2 + y^2) + 2nxy = C$; b) $y\sin x + x^2e^y + 2y = C$;

c) $\sin y\ \exp(xy) - x + y^2 - 1 = 0$;

d) $e^{x+y} - \sin x + \cos y = A$; e) $x(x + y) - \mathrm{Ln}|x + y| -1 = 0$.

10.- Ebatzi hurrengo ekuazioak, aldagai bakar baten menpeko integrazio-faktoreen bidez:

a) $(3\sin^2 x - y^2\cos^3 x)dx + y\sin 2x\cos x\, dy = 0.$

b) $2(xy + \cos y)dx + x^2(1 + y\,\mathrm{tg}\,y)dy = 0\ ,\quad y(1) = \pi.$

c) $2xydx - (x^2 + 3y^4 + 1)dy = 0.$ d) $y' = (a^2 - xy^3)/x^2y^2.$

E: a) $z(x) = \sin^{-2}2x \longrightarrow 3\,\mathrm{tg}\,x + y^2/\sin x = C.$

b) $z(y) = 1/\cos y \longrightarrow x + x^2y/2\cos y = (2 - \pi)/2.$

c) $z(y) = 1/y^2 \longrightarrow x^2 + 1 + y(C - y^3) = 0.$

d) $z(x) = x \longrightarrow 2x^3y^3 - 3a^2x^2 = C.$

11.- Ebatzi hurrengo ekuazio diferentzial hauek, emandako erako integrazio-faktoreak erabiliz:

a) $y(x^2y^2 - 1)dx + x(1 + x^2y^2)dy = 0\ ;\ y(1) = 1,\quad z(x,y) = f(xy).$

b) $y(x^2 + y^2 - x)dx + x^2dy = 0\ ;\quad z(x,y) = x^{-3}f(y/x).$

c) $(2x - y)dx + (2y + x)dy = 0\ ;\quad z(x,y) = f(x^2 + y^2).$

E: a) $z(x,y) = 1/xy \longrightarrow 2\mathrm{Ln}|y/x| + x^2y^2 = 1.$

b) $z(x,y) = 1/y(x^2 + y^2) \longrightarrow ye^x + A(x^2 + y^2)^{1/2} = 0.$

c) $z(x,y) = 1/2(x^2 + y^2) \longrightarrow \mathrm{Ln}(x^2 + y^2) - \mathrm{arctg}(x/y) = C.$

12.- Integratu ekuazio hau, $x(x + y)dx - y^2dy = 0,$

a) homogeno gisa, b) integrazio-faktore bat erabiliz.

E: $z(x,y) = 1/x^2y \longrightarrow y = A\exp(-y/x).$

13.- Biz ondoko ekuazio diferentziala,

$$y' = -\frac{[g(x) + xF(x)]y^2 + (3 - 4x)y}{yg(x) + f(x)},$$

non f(x) eta g(x) funtzio deribagarriak diren.

a) Ezarri f(x) eta g(x) funtzioetarako baldintzak, ekuazio diferentziala zehatza izan dadin.

b) Finkatu f(x) eta g(x) funtzioak, g(x) delakoa hirugarren mailako polinomioa eta $f(0) = -2$ badira.

c) Aurkitu soluzio orokorra.

E: a) $f'(x) = 3 - 4x$, $g'(x) - 2g(x) = 2xf(x)$.

b) $f(x) = -2x^2 + 3x + 2$, $g(x) = 2x^3 + 2x + 1$.

c) $(2x^3 + 2x + 1)y^2 - 2(4x^2 - 3x + 2)y = C$.

14.- Ebatzi hurrengo ekuazio linealak:

a) $x^2y' + 2xy - \sin x = 0$, $y(2) = 1$; b) $y'\cos x + y = 1 - \sin x$;

c) $x\text{Ln}x\, dy + (y - \text{Ln}x)dx = 0$; d) $y^2dx + (3xy - 4y^3)dy = 0$;

e) $(x + \text{Ln}y)y' - y = 0$; f) $tx' + (1 - t)x = te^t$; $x(1) = 0$;

g) $(x - \text{tg}t)dt + \cos^2 t dx = 0$, $x(0) = 0$.

E: a) $x^2y = 4 + \cos 2 - \cos x$; b) $y = \dfrac{(x + A)\cos x}{1 + \sin x}$;

c) $2y\text{Ln}x = \text{Ln}^2x + A$; d) $y^3(5x - 4y^2) = A$; e) $x = Ay - 1 - \text{Ln}y$;

f) $x = e^t(t^2 - 1)/2t$; g) $x = \text{tg}t - 1 + e^{-\text{tg}t}$.

15.- Integratu ondoko ekuazio linealgarriak:

a) $xy' + y - y^2 Lnx = 0$; b) $x' + x = (\cos t - \sin t)x^2$;

c) $2xyy' + (1 + x)y^2 = e^x$; d) $(x^2 + 1)y' - xy + 3xy^2 = 0$;

e) $(x^2 Lny - x)y' = y$; f) $tx' + x + t^2x^3 = 0$;

g) $(x^3 + 1)(y' - y^2 \sin x) + 3x^2 y = 0$, $y(0) = 1$.

E: a) $(Cx + Lnx + 1)y = 1$; b) $(Ae^t - \sin t)x = 1$;

c) $y^2 = z \longrightarrow xy^2 = Ce^{-x} + e^x/2$; d) $[C + 3(1+x^2)^{1/2}]y = (1+x^2)^{1/2}$;

e) $x(Lny + 1 - Cy) = 1$; f) $t^2x^2(2Lnt + C) = 1$;

g) $y = \sec x/(x^3 + 1)$.

16.- Soluzio bat ezagutuz, ebatzi Ricatti-ren hurrengo ekuazioak:

a) $(1 - x^3)y' + 2x + x^2y - y^2 = 0$, $y = -x^2$.

b) $x^2y' + x^3y^2 - x + 1 = 0$, $y = 1/x$.

c) $(1 + x^3)y' - 2xy^2 + x^2y - 1 = 0$, $y = x$.

E: a) $(C + x)y = -1 - Cx^2$;

b) $xy(Ce^{2x} + -2x - 1) = Ce^{2x} + 2x - 1$;

c) $y = (1 + Ax)/(A - x^2)$.

17.- Aurkitu hurrengo kurben ibilibide ortogonalak:

a) $y^2 + 3x^2 - 2Ax = 0$, b) $x - y - Ae^y = 0$.

E: a) $y^3 + C(x^2 - y^2) = 0$, b) $y = Ce^x + x + 2$.

18.- Aurki bitez ondoko propietate hau betetzen duten kurben ibilibide ortogonalak: " *Kurbako P(x,y) puntu bat eta OX ardatzak mugatutako zuzen normaletako segmentuen erdiko puntuak,* $y^2 = x$ *ekuazioko parabolan daude*".

E: EDa: $(y^2 - 4x)y' + 2y = 0$; $z(y) = 1/y^3$; $2x/y^2 + \mathrm{Ln}|y| = C$.

---

19. Finka bitez hautazko R erradioa eta zentrua M(a,b) puntu finkoan duten zirkunferentzien ibilbide ortogonalak.

E: $y - b = A(x - a)$.

---

20. Aurki bitez goi-mailako ekuazioetarako soluzio orokorrak eta azter bitez soluzio singularrak, $y' \equiv p$ delarik.

a) $p^3 - x + 1 = 0$; b) $y = x(1 + p) + p^2$;

c) $2p^2 - 2xp + x^2 - 2y = 0$; d) $y = px + p - p^2$;

e) $yp^2 - 2xp + y = 0$; f) $y^2p^3 + 2xp - y = 0$;

g) $2y(p + 1) - xp^2 = 0$; h) $3p^2 + 2p - x = 0$;

i) $y = xp + (b^2 + a^2p^2)^{1/2}$; j) $p^2(x + 1) - y = 0$.

E: a) $27(x - 1)^4 = 64(y - C)^3$.

b) $y = x(1 + p) + p^2$; $x = Ce^{-p} - 2(p - 1)$.

c) $y = x^2/2 + Cx + C^2$; (S.S.) $y = x^2/4$.

d) $y = Cx + C - C^2$; (S.S.) $4y = (x + 1)^2$.

e) $y^2 = 2Cx - C^2$; (S.S.) $y = \pm x$.

f) $y^2 = 2Cx + C^3$; (S.S.) $y^4 = -32x^3/27$.

g) $y = (1 - Cx)^2/2C$; (S.S.) $y = 0$; $y + 2x = 0$.

h) $x = 3p^2 + 2p$; $y = 2p^3 + p^2 + C$.

i) $y = xp + (b^2 + a^2p^2)^{1/2}$; (S.S.) $(x/a)^2 + (y/b)^2 = 1$.

j) $(\sqrt{y} + \sqrt{x + 1})^2 = C$; (S.S.) $y = 0$.

21.- Finka bedi $f(p)$ funtzioa, ondokoa jakinik: $y = xf(p) + p^2$ ekuaziorako, $y = -x^2/4 - x + 1$ polinomioa soluzio partikular bat da. Integra bedi ondorioztatutako Lagrange-ren ekuazioa.

E: $f(p) = p - 1$; $x = Ce^p - 2p - 2$; $y = Ce^p(p - 1) - p^2 + 2$.

22.- Ebatzi $m^2yp^2 + 2(x-n)p - y = 0$ ekuazioa, $y^2 = u$ ordezkaketa eginez.

E: $u = (x - n)u' + (mu'/2)^2 \longrightarrow 4y^2 = 4(x - n)C + m^2C^2$.

23.- Ordena laburtuz, integratu hurrengo ekuazioak:

a) $y'' - y'/(x - 1) - x(x - 1)$, $y(2) - 1$, $y'(2) - -1$.

b) $(x - 1)y''' - y'' = 0$, $y(2) = 2y'(2) = 2y''(2) = 2$.

c) $yy'' - y'^2 = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$.

E: a) $y = (3x^4 - 4x^3 - 36x^2 + 72x + 8)/24$;

b) $y = (3x^3 - 3x^2 + 6x + 4)/6$; c) $y = e^{2x}$.

24.- Aurki bitez ondoko propietateak betetzen dituzten kurbak:

a) P(x,y) puntu batetako kurbadura-erradioa normalaren luzeraren hirukoitza da. Malda M(0,1) puntuan unitatea da.

b) P(x,y) puntuko kurbadura-erradioa, kurbaren tangenteak OX ardatzaren norantza positiboarekin osotzen duen angeluaren sekantearen berdina da. Kurba M(0,1) puntutik pasa, eta OX ardatzarekiko tangente paraleloa du.

E: a) $y''y^3 = 1 \longrightarrow y^2 = 2x^2 + 2x + 1$; b) $y = 1 + \text{Ln}|\sec x|$.

25.- Ebatzi ondoko ekuazio diferentzial homogenoak:

a) $x''(t) - x'(t) - 2x(t) = 0$, $x(0) = 0$, $x'(0) = 3$;

b) $x^{IV}(t) + 3x''(t) - 4x(t) = 0$; c) $y''' - 3y' + 2y = 0$;

d) $y^{IV} + 4y''' + 7y'' - 4y' - 8y = 0$; e) $y^{V} + 5y''' + 4y' = 0$;

f) $y^{VI} - 5y^{V} + 7y^{IV} + 3y''' - 10y'' = 0$.

E: a) $x = e^{2t} - e^{-t}$.

b) $x = Ae^{t} + Be^{-t} + C\cos 2t + D\sin 2t$.

c) $y = Ae^{-2x} + (B + Cx)e^{x}$.

d) $y = Ae^{x} + Be^{-x} + e^{-2x}(C\cos 2x + D\sin 2x)$.

e) $y = A + B\cos x + C\sin x + D\cos 2x + E\sin 2x$.

f) $y = A + Bx + Ce^{2x} + De^{-x} + e^{2x}(E\cos x + F\sin x)$.

26.- Erabil bedi koefiziente indeterminatuen metodoa, hurrengo ekuazioen soluzio orokorra kalulatzeko:

a) $y'' + y = x\sin x$; b) $y'' - 2y' + 2y = e^x \sin x$;

c) $y'' + y' - 2y = \cos x - 3\sin x$; d) $y''' + y'' - 2y' = x - e^x$;

e) $y''' + 4y' = 16x - 8\sin 2x + 24\cos 2x$.

E: a) $y = A\cos x + B\sin x - x(x\cos x - \sin x)/4$.

b) $y = e^x(A\cos x + B\sin x) - x\cos x e^x/2$.

c) $y = Ae^{-2x} + Be^x + \sin x$.

d) $y = A + Be^x + Ce^{-2x} - x(x + 1)/4 - xe^x/3$.

e) $y = A + B\cos 2x + C\sin 2x + 2x^2 + x(\sin 2x - 3\cos 2x)$.

27.- Ebatzi hastapen-baldintzatako ondoko problemak:

a) $x'' - 8x' + 16x = e^{4t}$, $x(0) = 0$, $x'(0) = 1$.

b) $x'' - 2x' + x = e^t + \cos t$, $x(0) = x'(0) = 0$.

c) $x''' - 6x'' + 9x' = 36t + 3 + 18e^{3t}$, $x(0)=2$, $x'(0)=1$, $x''(0)=7$.

Frogatu lortutako emaitzak, Laplace-ren transformazioa aplikatuz.

E: a) $x = t(t + 2)e^{4t}/2$; b) $2x = (t^2 - t)e^t - \sin t$;

c) $x = 2t^2 + 3t + 3 + (3t^2 + t - 1)e^{3t}$.

28.- Aplikatu parametroen aldakuntzaren metodoa, ondoko ekuazio hauek ebazteko:

a) $y'' + y = (\cos 2x)^{-3/2}$; b) $y'' - 3y' + 2y = -e^{2x}/(e^x + 1)$;

c) $x'' + 4x = \text{cotg}2t$; d) $(4x'' + x)\cos(t/2) - 4 = 0$.

E: a) $y = A\cos x + B\sin x - (\cos 2x)^{1/2}$.

b) $y = Ae^{x} + Be^{2x} + e^{x}\text{Ln}(e^{x} + 1) + e^{2x}\text{Ln}(1 + e^{-x})$.

c) $x = A\cos 2t + B\sin 2t + \frac{1}{4}\sin 2t\ \text{Ln}|\text{tg}(t)|$.

d) $x = A\cos(t/2) + B\sin(t/2) + 2t\sin(t/2) + 4\cos(t/2)\text{Ln}|\cos(t/2)|$

29.- Ebatzi Euler-en hurrengo ekuazioak:

a) $x^2y'' + axy' + (a - 1)^2y/4 = 0$.

b) $(4x - 1)^2y'' + (2 - 8x)y' + 8y = 0$.

c) $x^2y'' + xy' + y = \sin(2\text{Ln}x)$.

d) $x^2y'' + 3xy' + y = 1/x$, $y(1) = 1$, $y'(1) = 0$.

e) $x^4y''' - x^3y'' + 2x^2y' - 2xy = x^4 + 1$.

f) $(1 + x)^2y''+ (1 + x)y' + y = 2\cos[\text{Ln}(1 + x)]$.

E: a) $y = x^{(1-a)/2}(A + B\text{Ln}x)$.

b) $y = A(4x - 1) + B(4x - 1)^{1/2}$.

c) $y = A\cos(\text{Ln}x) + B\sin(\text{Ln}x) - \frac{1}{3}\sin(2\text{Ln}x)$.

d) $y = (\text{Ln}^2x + 2\text{Ln}x + 2)/2x$.

e) $y = Ax^2 + (B + C\text{Ln}x)x + x^3/4 - 1/12x$.

f) $y = A\cos[\text{Ln}(1+x)] + B\sin[\text{Ln}(1+x)] + \text{Ln}(1+x)\sin[\text{Ln}(1+x)]$.

30.- Emaniko soluzioaren laguntzaz, integratu bigarren ordenako ondoko ekuazio hauek:

a) $y'' + 2y'/x + y = 0$, $y_1 = \sin x/x$.

b) $y''\sin^2 x - 2y = 0$, $y_1 = \operatorname{ctg} x$.

c) $y'' + (\operatorname{tg} x - 2\operatorname{ctg} x)y' + 2y\operatorname{ctg}^2 x = 0$, $y_1 = \sin x$.

d) $x^2(\operatorname{Ln} x - 1)y'' - xy' + y = 0$, $y_1 = x$.

e) $(x + 1)y'' - (x + 2)y' + y = 0$, $y_1 = e^x$.

E: a) $y = (A\sin x)/x + (B\cos x)/x$; b) $y = B + (A - Bx)\operatorname{ctg} x$;

c) $y = (A+B\sin x)\sin x$; d) $y = Ax + B\operatorname{Ln} x$ e) $y = Ae^x + B(x+2)$.

31.- Homogeno asoziatuaren soluzio partikular bat ezagutuz, kalkula bitez ondoko ekuazio diferentzialen jatorrizkoak:

a) $xy'' + 2(1 - x)y' + (x - 2)y = 2e^x$, $y_1 = e^x$.

b) $y'' - y'/x + y/x^2 = 1/x$, $y_1 = x$.

E: a) $y = (A/x + B + x)e^x$; b) $y = Ax + Bx\operatorname{Ln} x + \frac{1}{2} x\operatorname{Ln}^2 x$.

32.- Ordena laburtuz, integratu hurrengo ekuazioak:

a) $yy'' + y'^3 = 0$; b) $yy'' - y'^2 = 0$; c) $y'' = 1 + y'^2$.

E: a) $x = A + By + y\operatorname{Ln} y$; b) $y = Ae^{Bx}$; c) $y = A - \operatorname{Ln}[\cos(x+B)]$.

33.- Aplika bitez eragile-kalkuluko teknikak, hurrengo ekuazio integral hau ebazteko:

$$x(t) - 4te^{2t} - \int_0^t x(u)\sin(t-u)\,du = 0.$$

E: $x(t) = (5t - 1)e^{2t} + t + 1.$

34.- Erabil bedi eragile-kalkulua, hurrengo ekuazioak ebazteko:

a) $x'' + 6x' + 8x = t\ ,\quad x(0) = -5,\quad x'(0) = 4.$

b) $x''' + x = te^t\ ,\quad x(0) = x'(0) = x''(0) = 0.$

c) $x^{IV} + 2x'' + x = \sin t\ ,\quad x(0) = x'(0) = x''(0) = x'''(0) = 0.$

E: a) $x = (t - 3/4 - 63e^{-2t} + 95e^{-4t}/4)/8.$

b) $x = e^{-t}/12 + \frac{2}{3}e^{t/2}\cos(\sqrt{3}t/2) + (t/2 - 3/4)e^t.$

c) $x = (3\sin t - t^2\sin t - 3t\cos t)/8.$

35.- Laburtze-metodoa erabili, ondoko sistemak ebazteko:

a) $\begin{cases} x' = 1 - x - y - 2z, \\ y' = e^{-t} + 2 - x - 2y - z, \\ z' = 5e^{-t} + 1 - 5x - y + 2z. \end{cases}$ b) $\begin{cases} y' = 2y - 5z - \sin 2x, \\ z' = y - 2z + x, \\ y(0) = 0\ ,\ z(0) = 1. \end{cases}$

c) $\begin{cases} y' - z' - 2y + 2z = \sin t, \\ y'' + 2z' + y = 0, \\ y(0) = y'(0) = z(0) = 0. \end{cases}$

E: a) $\begin{cases} x = (A+1)e^{-t} + Be^{-4t} + 11Ce^{4t}, \\ y = -2Ae^{-t} + Be^{-4t} + 3Ce^{4t} + 1, \\ z = Ae^{-t} + Be^{-4t} - 29Ce^{4t}. \end{cases}$

b) $\begin{cases} y = (-2\cos x - 4\sin x + 2\sin 2x + 2\cos 2x - 15x)/3, \\ z = (-2\sin x + \sin 2x - 6x + 3)/3. \end{cases}$

c) $\begin{cases} y = (5e^{-t} + 4e^{2t} - 9\cos t - 18\sin t + 15te^{-t})/45, \\ z = (e^{-t} - e^{2t} + 3te^{-t})/9. \end{cases}$

36.- Laplace-ren transformatua aplikatu, sistema hauek ebazteko:

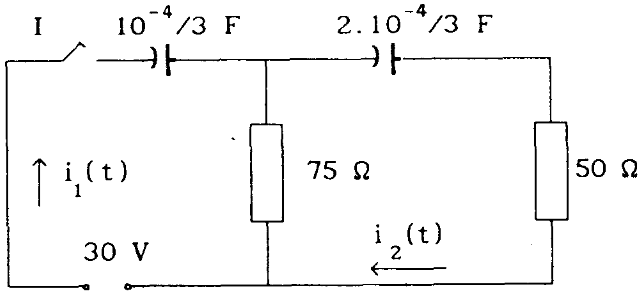
a) $\begin{cases} x'' + y' + 3x = 15e^{-t}, & x(0) = 35, \quad x'(0) = -48. \\ y'' - 4x' + 3y = 15\sin 2t, & y(0) = 27, \quad y'(0) = -55. \end{cases}$

b) $\begin{cases} x' - y = 0, \\ x + y' + z = t - 1, \\ y + z' = t^2 + t, \end{cases} \qquad x(0) = y(0) = 0, \ z(0) = -3.$

E: a) $\begin{cases} x = 30\cos t - 15\sin 3t + 3e^{-t} + 2\cos 2t, \\ y = 30\cos 3t - 60\sin t - 3e^{-t} + \sin 2t. \end{cases}$

b) $\begin{cases} x = (120t^2 + 20t^3 - 5t^4 - 2t^5)/120, \\ y = (24t + 6t^2 - 2t^3 - t^4)/12, \\ z = (-60t^2 + 20t^3 + 5t^4 + 2t^5 - 360)/120. \end{cases}$

37.- Kalkula bitez irudiko sare elektrikotik doazen korronte elektrikoak, hasierako unean kargak eta intentsitateak nuluak direla jakinik.



Oharra: $$\begin{cases} 3.10^4 \displaystyle\int_0^t i_1 dt + 75(i_1 - i_2) = 30, \\ 15.10^3 \displaystyle\int_0^t i_2 dt + 125 i_2 - 75 i_1 = 0. \end{cases}$$

E: $i_1(t) = (54e^{-1200t} + e^{-100t})/55$, $i_2(t) = (36e^{-1200t} - 3e^{-100t})/55$

38.- Aurki bitez ondoko ekuazio funtzionalei asoziaturiko deribatu partzialetako ekuazioak:

a) $z = x^2\phi(x - y)$; b) $\psi(x + \sin y, z + x\cos y) = 0$;

c) $\psi(ax + by + cz, x^2 + y^2 + z^2) = 0$; d) $z = x^2 + \sin y + \phi(2x+y)$.

E: a) $x(p + q) = 2z$; b) $(\cos y)p - q + \cos^2 y + x\sin y = 0$;

c) $(cy - bz)p + (az - cx)q = bx - ay$; d) $p - 2q = 2(x - \cos y)$.

39.- Integratu hurrengo ekuazio linealak:

a) $(y - z)p + (z - x)q = y - x$; b) $yp + xq = z - 1$;

c) $xy(xp + yq) = 1$; d) $x(y^2 - z^2)p + y(z^2 - x^2)p = z(x^2 - y^2)$;

e) $2x^3p + (y^2 + 3x^2)(yq + 3z) = 0$; f) $yz\frac{\partial u}{\partial x} + zx\frac{\partial u}{\partial y} + xy\frac{\partial u}{\partial z} = xyz.$

E: a) $\psi(x + y - z, x^2 + y^2 - z^2) = 0$; b) $z = 1 + (x+y)\phi(y^2 - x^2)$;

c) $\psi[y/x, (1 + 2xyz)/2x^2] = 0$; d) $\psi(xyz, x^2 + y^2 + z^2) = 0$;

e) $z = y^{-3}\phi(x^3/y^2 + x)$; f) $2u = x^2 + \phi(x^2 - y^2, x^2 - z^2).$

40.- Determina bitez ondoko ekuazioetarako emaniko zuzentzaileak barnean dauzkaten gainazal integralak:

a) $(x^2 - y^2 - z^2)p + 2xyq = 2xz$; $C \equiv y = 1/2, \quad x^2 + y^2 + z^2 = 1.$

b) $x(x + y)p + y^2q = yz^2$; $C \equiv 3x - y = 0, \quad z - 3 = 0.$

E: a) $\psi[z/y, (x^2 + y^2 + z^2)/z] = 0 \longrightarrow x^2 + y^2 + z^2 - 2y = 0.$

b) $\psi(1/z + \mathrm{Ln}y, (y/x)\mathrm{Ln}y] = 0 \longrightarrow z(3y - 8x) - 3x = 0.$

41.- Determinatu integrazio-faktoreak hurrengo ekuazioetarako:

a) $y(2x^2 + y)dx + x(2x^2 - y)dy = 0.$

b) $(1/y + y/x^2)dx + 2dy/x = 0.$

c) $(x^2y^3 + 2y)dx + (2x - 2x^3y^2)dy = 0.$

d) $(2x^3y - y^2)dx - (2x^4 + xy)dy = 0.$

E: a) $z = A(x^5y)^{-1/2}$; b) $z = Ax^2y$;

c) $z = A/x^3y^3$; d) $z = A/x^2y^3$.

42.- Aurki bitez ondoko familietarako gainazal ortogonalak:

a) $z = axy$; b) $(x - a)^2 + y^2 + z^2 = a^2$.

E: a) $\psi(x^2 - y^2, x^2 + z^2) = 0$; b) $\psi[y/z, (x^2+ y^2+ z^2)/z] = 0$.

43.- Aldez aurretik integragarritasun-baldintza betetzen dela frogatuz, ebatzi hurrengo ekuazio diferentzial totalak:

a) $(2x^3 - z)zdx + 2x^2yzdy + x(x + z)dz = 0$;

b) $(x + z)^2dy + y^2(dx + dz) = 0$;

c) $(x - y + 2z)dx + 2(x + z)dy - (x + y)dz = 0$;

d) $dz = (y + a)dx + \dfrac{z}{y + a} dy$; e) $yzdx + 2xzdy + xydz = 0$.

E: a) $x^2 + z/x + y^2 + Lnz = A$; b) $(x + y + z)/y(x + z) = A$;

c) $(x + y)^2= C (z + x)$; d) $z = (y+a)(x-A)$; e) $xy^2z = A$.

44.- Erabili Lagrange-Charpit-en metodoa, hurrengo ekuazioen soluzio osotua kalkulatzeko:

a) $pq - 9z^2 = 0$; b) $(1 - x^2)yp^2 + x^2q = 0$;

c) $2py^2 - q^2z = 0$; d) $pq + y(y + 1)q + (2y + 1)(xp - z) = 0$;

e) $2zp^2 + (p - q)y^2 = 0$.

E: b) $z = A\exp[3(B^2x + y)/B]$; b) $(2z + A - By^2)^2 = 4B(x^2 - 1)$;

c) $(z^2 - 2Ax + B)^2 = 2Ay^4$; d) $z = (y^2 + y + A)B + Ax$; $z = -xy(y+1)$;

e) $y(z^2 + B) - 2A(xy + y^2 - 2A) = 0$.

45.- Ezar bitez x-en berreduretako serieen bidezko soluzioak, hurrengo ekuazio diferentzialetarako:

a) $(1 + x^2)y'' + xy' - y = 0$; $y = Ax + B(1 + x^2)^{1/2}$.

b) $(x + 1)y'' - (x + 2)y' + y = 0$; $y = Ae^x + B(x + 2)$.

c) $2x(x - 1)y'' - (4x^2 - 3x + 1)y' + (2x^2 - x + 2)y = 0$;

$y = A(x + 1)e^x + B\sqrt{x}e^x$.

Froga bedi ezen soluzio horiek eskuin aldean emanikoak direla.

46.- Integra bitez hurrengo ekuazioak, x-en berreduretako serieen bidez:

a) $(4 + x^2)y'' + y = 0$; b) $y'' - x^2y' - y = 0$.

E: a) $y = a_0(1 - x^2/8 + 3x^4/384 \,..) + a_1(x - x^3/24 + 7x^5/1920 \,..)$.

b) $y = a_0(1 + x^2/2 + x^4/14 + x^5/20 + x^6/720 + 13x^7/5040 + \ldots)$

$+ a_1(x + x^3/6 + x^4/12 + x^5/120 + 7x^6/360 + 41x^7/5040 + \ldots)$.

47.- Erabil bitez berreduratako serie orokortuak, hurrengo ekuazio diferentziala integratzeko:

$$9x^2y'' + (x + 2)y = 0.$$

E: $a_{n+1} = - \dfrac{1}{[3(r+n) + 1][3(r+n) + 2]} a_n$, $n \geq 1$; $r = 1/3$, $r = 2/3$.

$$y = a_0 x^{1/3}(1 - x/2.3 + x^2/2.3.5.6 - x^3/2.3.5.6.8.9 + ...) +$$

$$+ a_1 x^{2/3}(1 - x/3.4 + x^2/3.4.6.7 - x^3/3.4.6.7.9.10 + ...).$$

---

48. Bilatu berredura-serietako soluzioak hurrengo ekuaziorako:

$$4x^2y'' + (4x + 1)y = 0.$$

E: $a_n = a_{n-1}/(n + r - 1/2)^2$, $n \geq 1$; $r = 1/2$ (2).

$$y = \sqrt{x}\ (1 - x/(1!) + x^2/(2!)^2 - x^3/(3!)^3 + ...) = \sqrt{x} \sum_0^{\infty} (-1)^n x^n/(n!)^2$$

49.- $y_1 = \sin x/x$ delakoa ondoko ekuazioaren soluzioa dela jakinik,

$$xy'' + 2y' + xy = 0, \qquad [1]$$

1.- bilatu y_2, y_1-ekiko soluzio linealki independente bat.

2.- froga bedi, [1] ekuaziorako x-en berreduratako serie orokortu erako bi soluzio existitzen direla, zeintzuen koefizienteek hurrengo errepikapen-legea beteko duten:

$$r = -1 \ ; \quad a_n = \frac{-1}{(n+r)(n+r+1)} a_{n-2} \ ; \quad n = 2, 3, 4, ...,$$

3.- idatz bitez soluzio den seriearen lehenengo gaiak, eta froga bedi ezen y_1 eta y_2 soluzioak direla, horretarako Mc.Laurin-en formula erabiliz,

4.- parametroen aldakuntzaren metodoa aplikatu, hurrengo ekuazio honen soluzio orokorra lortzeko:

$$xy'' + 2y' + xy = \text{cotg}x. \qquad [1]$$

E: $y_2 = \cos x/x$; $y = a_0 x^{-1}[1 - x^2/2! + x^4/4! - x^6/6! + ...] +$

$+ a_1 x^{-1}[x - x^3/3! + x^5/5! - x^7/7! + ...] \equiv \dfrac{A\cos x}{x} + \dfrac{B\sin x}{x}$;

$$y = \frac{A\cos x}{x} + \frac{B\sin x}{x} + \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{Ln}(\mathrm{tg}x/2).$$

50.- Fourier-en garapenaren bidez, lor bedi kosinuetako serie bat, zeinak $0 \le t \le 2$ tartean ondoko funtziora konbergituko duen:

$$f(t) = \begin{cases} 1, & 0 \le t < m \\ (t-1)/(m-1), & m \le t < 1 \\ 0, & 1 \le t < 2 \end{cases} \quad ; \qquad 0 < m < 1.$$

Kasu partikular gisa, hurrengo emaitza ondorioztatu:

$$\sum_{1}^{\infty} [\cos(n\pi/2) - \cos(n\pi m/2)]/n^2 = \pi^2(m-1)(3-m)/16.$$

51.- Lor bedi $-2 \le x \le 2$ tartean $y = (4 + 3x^2)/4$ funtziora konbergituko duen Fourier-en seriezko garapen bat. Ondorioztatu hurrengo zenbakizko serieen balioak:

$$S_1 = \sum_{1}^{\infty} 1/n^2 \quad ; \qquad S_2 = \sum_{1}^{\infty} (-1)^n/n^2.$$

E: $y = 2 + (12/\pi^2) \sum_{1}^{\infty} [(-1)^n/n^2]\cos \dfrac{n\pi x}{2}$; $S_1 = \pi^2/6$; $S_2 = -\pi^2/12$.

---

52. $f(t) = e^t$ funtzioa $0 < t < 1$ tartean sinuetako serie baten bidez garatu.

E: $f(t) = \sum_{1}^{\infty} [1 - e\cos k + (e/k)\sin k] \sin k\pi t.$

---

53. Garatu $0 < t < 1$ tartean definituriko $f(t) = e^{-t}$ funtzioa Fourier-en serieen bidez.

E: $a_k = \dfrac{2(1 - 1/e)}{1 + 4k^2\pi^2}$, $b_k = \dfrac{4k\pi(1 - 1/e)}{1 + 4k^2\pi^2}$.

TAULA ETA FORMULA ERABILGARRIAK

LAPLACE-REN TRANSFORMATUEN TAULA

f(t)	F(p)	f(t)	F(p)
$u_a = \begin{cases} 0, & t<a \\ 1, & t>a \end{cases}$	$\frac{e^{-ap}}{p}$	$u_0 = \begin{cases} 0, & t<0 \\ 1, & t>0 \end{cases}$	$\frac{1}{p}$
$\sin bt$	$\frac{b}{p^2+b^2}$	$\cos bt$	$\frac{p}{p^2+b^2}$
$\mathrm{Sh}\,bt$	$\frac{b}{p^2-b^2}$	$\mathrm{Ch}\,bt$	$\frac{p}{p^2-b^2}$
e^{-at}	$\frac{1}{p+a}$	$t^n/\Gamma(n+1),\ n>-1$	$\frac{1}{p^{n+1}}$
$t^n/n!,\ n\in Z^+$	$\frac{1}{p^{n+1}}$	$e^{-at}t^n/n!,\ n\in Z^+$	$\frac{1}{(p+a)^{n+1}}$
$e^{-at}\sin bt$	$\frac{b}{(p+a)^2+b^2}$	$e^{-at}\cos bt$	$\frac{p+a}{(p+a)^2+b^2}$
$e^{-at}\mathrm{Sh}\,bt$	$\frac{b}{(p+a)^2-b^2}$	$e^{-at}\mathrm{Ch}\,bt$	$\frac{p+a}{(p+a)^2-b^2}$
$\frac{e^{at}-e^{bt}}{a-b}$	$\frac{1}{(p-b)(p-a)}$	$\frac{ae^{at}-be^{bt}}{a-b}$	$\frac{p}{(p-b)(p-a)}$
$\frac{1-\cos at}{a^2}$	$\frac{1}{p(p^2+a^2)}$	$\frac{at-\sin at}{a^2}$	$\frac{1}{p^2(p^2+a^2)}$
$\frac{\sin at - at\cos at}{2a^3}$	$\frac{1}{(p^2+a^2)^2}$	$\frac{t\sin at}{2a}$	$\frac{p}{(p^2+a^2)^2}$
$\frac{\sin at + at\cos at}{2a}$	$\frac{p^2}{(p^2+a^2)^2}$	$\cos at - \frac{at\sin at}{2}$	$\frac{p^3}{(p^2+a^2)^2}$
$t\cos at$	$\frac{p^2-a^2}{(p^2+a^2)^2}$	$\frac{at\mathrm{Ch}\,at - \mathrm{Sh}\,at}{2a^3}$	$\frac{1}{(p^2-a^2)^2}$
$\frac{t\mathrm{Sh}\,at}{2a}$	$\frac{p}{(p^2-a^2)^2}$	$\frac{\mathrm{Sh}\,at + at\mathrm{Ch}\,at}{2a}$	$\frac{p^2}{(p^2-a^2)^2}$

f(t)	F(p)	f(t)	F(p)
$\text{Chat} + \dfrac{\text{atShat}}{2}$	$\dfrac{p^3}{(p^2-a^2)^2}$	tChat	$\dfrac{p^2+a^2}{(p^2-a^2)^2}$
$\dfrac{(3-a^2t^2)\text{sinat}-3\text{atsinat}}{8a^5}$	$\dfrac{1}{(p^2+a^2)^3}$	$\dfrac{\text{tsinat}-\text{at}^2\text{cosat}}{8a^3}$	$\dfrac{p}{(p^2+a^2)^3}$
$\dfrac{(1+a^2t^2)\text{sinat}-\text{atcosat}}{8a^3}$	$\dfrac{p^2}{(p^2+a^2)^3}$	$\dfrac{3\text{tsinat}+\text{at}^2\text{cosat}}{8a}$	$\dfrac{p^3}{(p^2+a^2)^3}$
$\dfrac{(3-a^2t^2)\text{sinat}+5\text{atcosat}}{8a}$	$\dfrac{p^4}{(p^2+a^2)^3}$	$\dfrac{t^2\text{sinat}}{2a}$	$\dfrac{3p^2-a^2}{(p^2+a^2)^3}$
$\dfrac{(8-a^2t^2)\text{cosat}-7\text{atsinat}}{8a}$	$\dfrac{p^5}{(p^2+a^2)^3}$	$\dfrac{t^2\text{cosat}}{2}$	$\dfrac{p^3-3a^2p}{(p^2+a^2)^3}$
$\dfrac{(3+a^2t^2)\text{Shat}-3\text{atChat}}{8a^5}$	$\dfrac{1}{(p^2-a^2)^3}$	$\dfrac{\text{at}^2\text{Chat}-\text{tShat}}{8a^3}$	$\dfrac{p}{(p^2-a^2)^3}$
$\dfrac{\text{atChat}+(a^2t^2-1)\text{Shat}}{8a^3}$	$\dfrac{p^2}{(p^2-a^2)^3}$	$\dfrac{3\text{tShat}+\text{at}^2\text{Chat}}{8a}$	$\dfrac{p^3}{(p^2-a^2)^3}$
$\dfrac{(3+a^2t^2)\text{Shat}+5\text{atChat}}{8a}$	$\dfrac{p^4}{(p^2-a^2)^3}$	$\dfrac{t^2\text{Shat}}{2a}$	$\dfrac{3p^2\mp a^2}{(p^2-a^2)^3}$
$\dfrac{(8+a^2t^2)\text{Chat}+7\text{atShat}}{8a^5}$	$\dfrac{p^5}{(p^2-a^2)^3}$	$\dfrac{t^2\text{Chat}}{2}$	$\dfrac{p^3+3a^2p}{(p^2-a^2)^3}$
$\dfrac{\text{Shat}-\text{sinat}}{2a^3}$	$\dfrac{1}{p^4-a^4}$	$\dfrac{\text{Chat}-\text{cosat}}{2a^2}$	$\dfrac{p}{p^4-a^4}$
$\dfrac{\text{Shat}+\text{sinat}}{2a}$	$\dfrac{p^2}{p^4-a^4}$	$\dfrac{\text{Chat}+\text{cosat}}{2}$	$\dfrac{p^3}{p^4-a^4}$
$\dfrac{\text{sinatChat}-\text{cosatShat}}{4a^3}$	$\dfrac{1}{p^4+4a^4}$	$\dfrac{\text{sinatShat}}{2a^2}$	$\dfrac{p}{p^4+4a^4}$
$\dfrac{\text{sinatChat}+\text{cosatShat}}{2a}$	$\dfrac{p^2}{p^4+4a^4}$	cosatChat	$\dfrac{p^3}{p^4+4a^4}$

JATORRIZKOEN TAULA

1. $\int x^n dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1}$, $x \neq -1.$

2. $\int (ax + b)^n dx = \dfrac{(ax + b)^{n+1}}{a(n + 1)}$.

3. $\int \dfrac{f'(x)dx}{f(x)} = \mathrm{Ln}|f(x)|.$

4. $\int \dfrac{f'(x)dx}{2\sqrt{f(x)}} = \sqrt{f(x)}$.

5. $\int e^{ax} dx = \dfrac{e^{ax}}{a}$.

6. $\int b^{ax} dx = \dfrac{b^{ax}}{a\mathrm{Ln}b}$.

7. $\int \sin(ax)dx = -\dfrac{\cos(ax)}{a}$.

8. $\int \cos(ax)dx = \dfrac{\sin(ax)}{a}$.

9. $\int \mathrm{tg}(ax)dx = -\dfrac{\mathrm{Ln}|\cos(ax)|}{a}$.

10. $\int \mathrm{cotg}(ax)dx = \dfrac{\mathrm{Ln}|\sin(ax)|}{a}$.

12. $\int \mathrm{Sh}(ax)dx = \dfrac{\mathrm{Ch}(ax)}{a}$.

13. $$\int \mathrm{Ch}(ax)dx = \frac{\mathrm{Sh}(ax)}{a} .$$

14. $$\int \mathrm{Th}(ax)dx = \frac{\mathrm{Ln}|\mathrm{Ch}(ax)|}{a} .$$

15. $$\int \mathrm{Coth}(ax)dx = \frac{\mathrm{Ln}|\mathrm{Sh}(ax)|}{a} .$$

16. $$\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \mathrm{Ln} \frac{a + x}{a - x} .$$

17. $$\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \mathrm{tg}^{-1} \frac{x}{a} .$$

18. $$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \sin^{-1} \frac{x}{a} .$$

19. $$\int \frac{d\ x}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \mathrm{Ln}\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| .$$

20. $$\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = \frac{1}{2} \left[x \sqrt{a^2 - x^2} + a^2 \sin^{-1} \frac{x}{a} \right].$$

21. $$\int \sqrt{x^2 \pm a^2}\, dx = \frac{1}{2} \left[x \sqrt{x^2 \pm a^2} \pm a^2 \mathrm{Ln}\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| \right].$$

22. $$\int \frac{Mx + N}{(x-a)^2 + b^2} dx = \frac{M}{2} \mathrm{Ln}[(x-a)^2 + b^2] + \frac{aM + N}{b} \mathrm{tg}^{-1} \frac{x-a}{b} .$$

23. $$\int u dv = uv - \int v du.$$

24. $$\int e^{ax}\sin bx\,dx = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2}(a\sin bx - b\cos bx).$$

25. $$\int e^{ax}\cos bx\,dx = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2}(a\cos bx + b\sin bx).$$

26. $$\int (\mathrm{Ln}x)^m\,dx = x(\mathrm{Ln}x)^m - m\int (\mathrm{Ln}x)^{m-1}dx.$$

27. $$\int P(x)e^{ax}dx = \frac{e^{ax}}{a}\,[P(x) - P'(x)/a + P''(x)/a^2 - \ldots].$$

28. $$\int x^m \mathrm{Ln}x\,dx = x^{m+1}\left[\frac{\mathrm{Ln}x}{m+1} - \frac{1}{(m+1)^2}\right].$$

29. $$\int x^m \sin ax\,dx = \frac{-x^m\cos ax}{a} + \frac{m}{a}\int x^{m-1}\cos ax\,dx.$$

30. $$\int x^m \cos ax\,dx = \frac{x^m\sin ax}{a} + \frac{m}{a}\int x^{m-1}\sin ax\,dx.$$

31. $$\int \frac{dx}{\sin^m x} = \frac{-\cos x}{(m-1)\sin^{m-1}x} + \frac{m-2}{m-1}\int \frac{dx}{\sin^{m-2}x}.$$

32. $$\int \sin^m ax\,dx = \frac{-\sin^{m-1}ax\cos ax}{ma} + \frac{m-1}{m}\int \sin^{m-2}ax\,dx,\ n \in Z^+.$$

33. $$\int \cos^m ax\,dx = \frac{\cos^{m-1}ax\sin ax}{ma} + \frac{m-1}{m}\int \cos^{m-2}ax\,dx,\ n \in Z^+.$$

34. $$\int \mathrm{tg}^m ax\,dx = \frac{\mathrm{tg}^{m-1}x}{a(m-1)} - \int \mathrm{tg}^{m-2}ax\,dx.$$

35. $\int \sin^2 ax\ dx = (2ax - \sin 2x)/4a.$

36. $\int \cos^2 ax\ dx = (2ax + \sin 2x)/4a.$

37. $\int tg^2 ax\ dx = (tgax - ax)/a.$

38. $\int \sin ax \sin bx\ dx = -\frac{1}{2}\left[\frac{\sin(a+b)x}{a+b} - \frac{\sin(a-b)x}{a-b}\right].$

39. $\int \cos ax \cos bx\ dx = \frac{1}{2}\left[\frac{\sin(a+b)x}{a+b} + \frac{\sin(a-b)x}{a-b}\right].$

40. $\int \sin ax \cos bx\ dx = -\frac{1}{2}\left[\frac{\cos(a+b)x}{a+b} + \frac{\cos(a-b)x}{a-b}\right].$

41. $\int \sin^{-1} ax\ dx = x\sin^{-1} ax + \frac{1}{a}(1 - a^2x^2)^{1/2}.$

42. $\int \cos^{-1} ax\ dx = x\cos^{-1} ax - \frac{1}{a}(1 - a^2x^2)^{1/2}.$

43. $\int tg^{-1} ax\ dx = xtg^{-1} ax + \frac{1}{2a} Ln(1 + a^2x^2).$

44. $\int Sh^2 ax\ dx = (Sh2ax - 2ax)/4a.$

45. $\int Ch^2 ax\ dx = (Sh2ax + 2ax)/4a.$

46. $\int Th^2 ax\ dx = (ax - Thax)/a.$

47. $\int Chax\ Chbx\ dx = \frac{1}{2}\left[\frac{Sh(a+b)x}{a+b} + \frac{Sh(a-b)x}{a-b}\right].$

48. $\int \text{Shax Chbx dx} = \frac{1}{2}\left[\frac{\text{Ch}(a+b)x}{a+b} + \frac{\text{Ch}(a-b)x}{a-b}\right].$

49. $\int \text{Shax Shbx dx} = \frac{1}{2}\left[\frac{\text{Sh}(a+b)x}{a+b} - \frac{\text{Sh}(a-b)x}{a-b}\right].$

50. $\int \frac{dx}{(ax^2+bx+c)^{1/2}} = \frac{1}{\sqrt{a}} \text{Ln}\left|2ax + b + 2\sqrt{a}(ax^2+bx+c)^{1/2}\right|, \quad a > 0.$

51. $\int \frac{d}{(ax^2+bx+c)^{1/2}} = \frac{1}{\sqrt{-a}} \sin^{-1} \frac{-(2ax+b)}{(b^2-4ac)^{1/2}} \qquad a < 0.$

52. $\int \frac{xdx}{(ax^2+bx+c)^{1/2}} = \frac{1}{a}(ax^2+bx+c)^{1/2} - \frac{b}{2a}\int \frac{dx}{(ax^2+bx+c)^{1/2}}.$

53. $\int (ax^2+bx+c)^{1/2}dx = \frac{2ax+b}{4a}(ax^2+bx+c)^{1/2} + \frac{4ac-b^2}{8a}\int \frac{dx}{(ax^2+bx+c)^{1/2}}$

Integral eulertarrak

$$\Gamma(n) = \int_0^{\infty} x^{n-1}e^{-x}\, dx \ ; \quad \Gamma(n) = (n-1)!, \quad n \in N \ ; \ \Gamma(0) = \Gamma(1) = 1.$$

Modifikatzeko formulak: $\Gamma(n) = (n-1)\Gamma(n-1)$; $\Gamma(n) = \frac{\Gamma(n+1)}{n}$.

$$B(m,n) = \int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1}\, dx = \frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)} \ ; \quad \Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}\ .$$

$$\int_0^{\pi/2} \sin^{2m-1}t \cos^{2n-1}t\, dt = \frac{B(m,n)}{2} = \frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{2\Gamma(m+n)}\ .$$

TRIGONOMETRIA ZIRKULARREKO FORMULA ERABILGARRIAK

Oinarrizko erlazioak:

$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$; $\sin x \operatorname{cosec} x = 1$; $\cos x \sec x = 1$; $\operatorname{tg} x \operatorname{ctg} x = 1$

Balio nabarmen zehatzak:

$\sin \pi/6 = \cos \pi/3 = \frac{1}{2}$, $\cos \pi/6 = \sin \pi/3 = \sqrt{3}/2$.

$\operatorname{tg} \pi/6 = \operatorname{cotg} \pi/3 = \sqrt{3}/3$, $\operatorname{cotg} \pi/6 = \operatorname{tg} \pi/3 = \sqrt{3}$.

$\sin \pi/4 = \cos \pi/4 = \sqrt{2}/2$, $\operatorname{cotg} \pi/4 = \operatorname{tg} \pi/4 = 1$.

Batuketarako erlazioak:

$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$; $\sin(x-y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y$.

$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$; $\cos(x-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$.

$\operatorname{tg}(x+y) = \dfrac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y}{1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y}$; $\operatorname{tg}(x-y) = \dfrac{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y}{1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y}$.

$\sin(2\pi-x) = -\sin x$; $\cos(2\pi-x) = \cos x$; $\operatorname{tg}(2\pi-x) = -\operatorname{tg} x$.

$\sin(-x) = -\sin x$; $\cos(-x) = \cos x$; $\operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x$.

Angelu bikoitzaren funtzioak:

$\sin 2x = 2\sin x \cos x$; $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$; $\operatorname{tg} 2x = 2\operatorname{tg} x/(1 - \operatorname{tg}^2 x)$.

Angelu erdiaren funtzioak:

$$\sin(x/2) = \sqrt{\frac{1 - \cos x}{2}} \quad ; \quad \cos(x/2) = \sqrt{\frac{1 + \cos x}{2}} \quad ;$$

$$\mathrm{tg}(x/2) = \sqrt{\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}} \; .$$

Sinu eta kosinuen arteko batuketak eta kenketak:

$$\sin x + \sin y = 2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2} \; ; \; \sin x - \sin y = 2\cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2} \; .$$

$$\cos x + \cos y = 2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2} \; ; \; \cos x - \cos y = -2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2} \; .$$

Sinuen eta kosinuen arteko biderkaketak:

$$\sin x \sin y = \frac{1}{2}[\cos(x-y) - \cos(x+y)].$$

$$\cos x \cos y = \frac{1}{2}[\cos(x-y) + \cos(x+y)].$$

$$\sin x \cos y = \frac{1}{2}[\sin(x-y) + \sin(x+y)].$$

Beste erlazio interesgarri batzu:

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2} \; ; \; \sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2} \; ; \; \mathrm{tg}^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{1 + \cos 2x} \; ;$$

$$\sin x = \frac{\mathrm{tg}x}{(1 + \mathrm{tg}^2 x)^{1/2}} \; ; \; \cos x = \frac{1}{(1 + \mathrm{tg}^2 x)^{1/2}} \; ;$$

$$\sin x = \frac{2\mathrm{tg}(x/2)}{1 + \mathrm{tg}^2 x/2} \; ; \; \cos x = \frac{1 - \mathrm{tg}^2 x/2}{1 + \mathrm{tg}^2 x/2} \; .$$

TRIGONOMETRIA HIPERBOLIKOAREN FORMULA ERABILGARRIAK

Definizioak:

$$\mathrm{Shx} = \frac{e^{x} - e^{-x}}{2} \quad ; \quad \mathrm{Chx} = \frac{e^{x} + e^{-x}}{2} \quad ; \quad \mathrm{Thx} = \frac{e^{x} - e^{-x}}{e^{x} + e^{-x}} .$$

Oinarrizko erlazioak:

$\mathrm{Ch}^2x - \mathrm{Sh}^2x = 1$; $\mathrm{Shx.Coshx} = 1$; $\mathrm{Chx.Sechx} = 1$; $\mathrm{Thx.Cothx} = 1$

Batuketako erlazioak:

$\mathrm{Sh}(x + y) = \mathrm{ShxChy} + \mathrm{ChxShy}$; $\mathrm{Sh}(x - y) = \mathrm{ShxChy} - \mathrm{ChxShy}$;

$\mathrm{Ch}(x + y) = \mathrm{ChxChy} + \mathrm{ShxShy}$; $\mathrm{Ch}(x - y) = \mathrm{ChxChy} - \mathrm{ShxShy}$;

$$\mathrm{Th}(x + y) = \frac{\mathrm{Thx} + \mathrm{Thy}}{1 - \mathrm{ThxThy}} \quad ; \quad \mathrm{Th}(x - y) = \frac{\mathrm{Thx} - \mathrm{Thy}}{1 - \mathrm{ThxThy}} \; ;$$

$\mathrm{Sh}(-x) = -\mathrm{Shx}$; $\mathrm{Ch}(-x) = \mathrm{Chx}$; $\mathrm{Th}(-x) = -\mathrm{Thx}$.

Angelu bikoitzaren funtzioak:

$\mathrm{Sh2x} = 2\mathrm{Shx\ Chx}$; $\mathrm{Ch2x} = \mathrm{Ch}^2x + \mathrm{Sh}^2x$; $\mathrm{Th2x} = 2\mathrm{Thx}/(1 + \mathrm{Th}^2x)$.

Angelu erdiaren funtzioak:

$$\mathrm{Sh}(x/2) = \sqrt{\frac{\mathrm{Ch}x - 1}{2}} \;; \qquad \mathrm{Ch}(x/2) = \sqrt{\frac{\mathrm{Ch}x + 1}{2}} \;;$$

$$\mathrm{Th}(x/2) = \sqrt{\frac{\mathrm{Ch}x - 1}{\mathrm{Ch}x + 1}} \;.$$

Sinuen eta kosinuen arteko batuketak eta kenketak:

$$\mathrm{Sh}x + \mathrm{Sh}y = 2\mathrm{Sh}\,\frac{x+y}{2}\,\mathrm{Ch}\,\frac{x-y}{2} \;; \qquad \mathrm{Sh}x - \mathrm{Sh}y = 2\mathrm{Ch}\,\frac{x+y}{2}\,\mathrm{Sh}\,\frac{x-y}{2} \;;$$

$$\mathrm{Ch}x + \mathrm{Ch}y = 2\mathrm{Ch}\,\frac{x+y}{2}\,\mathrm{Ch}\,\frac{x-y}{2} \;; \qquad \mathrm{Ch}x - \mathrm{Ch}y = 2\mathrm{Sh}\,\frac{x+y}{2}\,\mathrm{Sh}\,\frac{x-y}{2} \;.$$

Sinu eta kosinen arteko biderkaketak:

$$\mathrm{Sh}x\mathrm{Sh}y = \frac{1}{2}\,[\mathrm{Ch}(x+y) - \mathrm{Ch}(x-y)].$$

$$\mathrm{Ch}x\mathrm{Ch}y = \frac{1}{2}\,[\mathrm{Ch}(x+y) + \mathrm{Ch}(x-y)].$$

$$\mathrm{Sh}x\mathrm{Ch}y = \frac{1}{2}\,[\mathrm{Sh}(x+y) + \mathrm{Sh}(x-y)].$$

Beste erlazio interesgarri batzu:

$$\mathrm{Ch}^2x = \frac{\mathrm{Ch}2x + 1}{2} \;; \quad \mathrm{Sh}^2x = \frac{\mathrm{Ch}2x - 1}{2} \;; \quad \mathrm{Th}^2x = \frac{\mathrm{Ch}2x - 1}{\mathrm{Ch}2x + 1} \;.$$

Alderantzizko funtzio hiperbolikoak:

$$\mathrm{ArgSh}x \equiv \mathrm{Sh}^{-1}x = \mathrm{Ln}\left(x + \sqrt{x^2 + 1} \right), \quad -\infty < x < \infty.$$

$$\mathrm{ArgCh}x \equiv \mathrm{Ch}^{-1}x = \mathrm{Ln}\left(x + \sqrt{x^2 - 1} \right), \quad x \geq 1.$$

$$\mathrm{ArgTh}x \equiv \mathrm{Th}^{-1}x = \frac{1}{2}\,\mathrm{Ln}\,\frac{1 + x}{1 - x}, \quad -1 < x < 1.$$

OINARRIZKO BIBLIOGRAFIA

OINARRIZKO BIBLIOGRAFIA

[1] ABELLANAS/GALINDO "Métodos de Cálculo"
Ed. Mc.Graw-Hill (1989)

[2] APOSTOL, T.M. "Calculus" (Vol 1-2)
Ed. Reverte (1986)

[3] AYRES, F. "Ecuaciones diferenciales"
Ed. Mc.Graw-Hill (1969)

[4] CHAPRA/CANALE "Métodos numéricos para ingenieros"
Ed. Mc.Graw-Hill (1987)

[5] CREESE T.M. "Diferential Equations for Ingineers"
Ed. Mc.Graw-Hill (1978)

[6] GARCIA CASTRO, F. "Cálculo infinitesimal"
Ed. Pirámide (1981)

[7] ELSGOLTZ, L. "Ec. diferenciales y cál. varacional"
Ed. Mir (1969)

[8] FRAILE OVEJERO, V. "Ecuaciones diferenciales"
Ed. Tebar Flores (1985)

[9] KREYSZIG, E. "Mat. avanzadas para ingenieria"
Ed. Limusa (1976)

[10] MAJO TORRENT "Métodos matemáticos de la técnica"
Ed. Vicens Vives (1966)

[11] MARCELLAN, F "Ecuaciones diferenciales"
Ed. Mc.Graw-Hill (1990)

[12] MATAIX ARACIL "Cálculo diferencial"
Ed. Dosat (1957)

[13] NIXON, F.E. "Transformación de Laplace" Ed. Paraninfo (1970)

[14] PISKUNOV, N. "Cálculo diferencial e integral" Ed. Montaner y Simón (1970)

[15] PISKUNOV, N "Kalkulu diferentziala eta integrala" UEU (1972)

[16] PUIG ADAM, P. "Ecuaciones diferenciales" Bib. Matemática (1967)

[17] QUINET, J. "Ecuaciones diferenciales" (Tomo IV) Ed. Paraninfo (1983)

[18] SCHEID, FRANCIS "Análisis numérico" Ed. Mc.Graw-Hill (1979)

[19] SIMMONS, F. "Ecuaciones diferenciales" Ed. Mc.Graw-Hill (1977)

[20] SPENCER PARKER "Matemáticas para ingenieria" Ed. Garcia Peña (1980)

[21] SPIEGEL, M.R. "Transformación de Laplace" Ed. Mc.Graw-Hill (1970)

[22] VALDERRAMA BONNET "Métodos matemáticos" Ed. Pirámide (1989)

[23] WILLIAMS, J. "Transformadas de Laplace" Ed. Limusa (1975)

[24] WYLIE, C.R. "Mat. superiores para ingenieria" Ed. Mc.Graw-Hill (1969)

[25] ZELDOVICH/YAGLOM "Matemáticas superiores" Ed. Mir (1987)