

OPTIMIZAZIOA PROGRAMAZIO LINEALA



Victoria Fernández González
Ana Zelaia Jauregi

IEI udako
euskal
unibertsitatea

eman la zabal zazu

UPV
universidad del
pais vasco euskal herriko
unibertsitatea

OPTIMIZAZIOA

PROGRAMAZIO LINEALA

OPTIMIZAZIOA

PROGRAMAZIO LINEALA

Victoria Fernández González
Ana Zelaia Jauregi

© Victoria Fernández, Ana Zelaia
© Udako Euskal Unibertsitatea

ISBN: 84-86967-65-1
Lege-gordailua: BI-1320-95

Inprimategia: BOAN, S.A. Padre Larramendi 2. BILBO

Azaleko argazkia: Elena Lazkano Ortega

Banatzaileak: UEU. Concha Jenerala 25, 6. BILBO
Zabaltzen: Igerabide, 88 DONOSTIA

Aurkibidea

HITZAURREA	ix
1 OPTIMIZAZIOAREN TEORIA	1
1.1 Sarrera	1
1.1.1 Ekoizpen-problema bat	2
1.2 Ereduen erabilpena	3
1.2.1 Garraio-problema bat	4
1.3 Azterketarako urratsak	6
1.4 Beste zenbait metodo	8
1.4.1 Simulazioa	8
1.4.2 Metodo heuristikoak	10
1.5 Optimizazioaren erabilera praktikoak	12
1.5.1 Inbentario-problema	12
1.5.2 Mantenu-ordezkatzearen problema	13
1.5.3 Itxarote-problema	14
1.5.4 Antolaketa-problema	15
1.5.5 Baliabide-esleipenaren problema	16
2 EREDU LINEALAK ETA SOLUZIO GRAFIKOA	17
2.1 Sarrera	17
2.2 Eredu lineala	18
2.3 Eredu lineala idazteko erak	18
2.4 Ereduen eraiketa	20
2.5 Programazio linealaren suposaketak	29
2.6 Ebazpen grafikoa	30
2.7 Ariketak	37

3	ALJEBRA LINEALA ETA MULTZO GANBILAK	43
3.1	Algebra Lineala	43
3.1.1	Bektoreak	43
3.1.2	Bektore-eragiketak	43
3.1.3	Menpekotasun eta independentzia lineala. Oinarria	46
3.1.4	Matrizeak	51
3.1.5	Ekuazio linealen sistemak. Soluzioak.	52
3.2	Multzo ganbilak	55
3.2.1	Zuzen baten ekuazioa	55
3.2.2	Segmentuak	55
3.2.3	Hiperplanoak eta erdiespazioak	55
3.2.4	Multzo ganbilak: definizioak	56
3.2.5	Multzo ganbilak: teoremak	57
3.2.6	Multzo ganbil definizioaren orokorpena	58
3.3	Programazio linealerako erabilera	58
3.3.1	Adibidea	58
3.3.2	Eredu linealerako ondorioak	59
3.4	Ariketak	59
4	PROGRAMAZIO LINEALA. SIMPLEX METODOA	61
4.1	Helburuaren eta murrizketen aldaketa	62
4.2	Idazkera estandarrerako bihurketa	64
4.3	Soluzioak. Oinarrizko definizioak	66
4.4	Oinarrizko teoremak	70
4.5	Simplex metodoa	77
4.5.1	Definizioak, idazkerak eta teoremak	78
4.5.2	Soluzio optimo bornegabeak	90
4.5.3	Soluzio optimo anizkoitzak	94
4.5.4	Hasierako oinarria	97
4.5.5	Simplex metodoaren taula	103
4.6	Simplex algoritmoa	106
4.7	Zigortze-metodoa	111
4.8	Bi faseetako metodoa	117
4.9	Simplex berrikusiaren metodoa	121
4.10	Zenbait ohar	127
4.11	Ariketak	132

5	DUALITASUNA	137
5.1	Sarrera adibidea	138
5.2	Problema duala	139
5.2.1	Definizioak	139
5.2.2	Primal-dual arteko erlazioa	141
5.2.3	Eredu primalaren eta dagokion dualaren osagaien azalpena	143
5.2.4	Dualtasuna: kasu orokorra	143
5.3	Dualtasunari buruzko teoremak	148
5.4	Soluzio dual optimoa taulan	158
5.5	Dualtasunaren interpretazio ekonomikoa	162
5.5.1	Itzal-prezioak	163
5.5.2	Aldagai primalen kostu ekonomikoa	167
5.5.3	Simplex metodoaren interpretazioa	168
5.6	Simplex dual metodoa	169
5.6.1	Simplex dual metodoaren urratsak	170
5.7	Murrizketa artifizialaren metodoa	173
5.8	Ariketak	180
6	SENTIKORTASUN-ANALISIA	183
6.1	Aldaketa diskretuak	183
6.1.1	b bektorearen aldaketak	187
6.1.2	c bektorean gertatutako aldaketak	191
6.1.3	a_j bektorearen aldaketa j oinarrikoa ez denean	194
6.1.4	Aldagai berriak gehitzea	196
6.1.5	Murrizketa berriak gehitzea	199
6.2	Programazio parametrikoa	201
6.2.1	Prezio-bektorean gertatutako aldaketa jarraiak	202
6.2.2	Baliabide-bektorean gertatutako aldaketa jarraiak	209
6.3	Ariketak	216
7	GARRAIO- ETA ESLEIPEN-PROBLEMA	221
7.1	Garraio-problema	221
7.1.1	Garraio-problemarako matrize-idazkera	226
7.1.2	Garraio-ereduaren ebazpidea	227
7.1.3	Hasierako soluzio baten kalkulua	230
7.1.4	Oinarriko soluzio bideragarri baten hobekuntza	237

7.1.5	Garraio-problemarako algoritmoa	242
7.1.6	Soluzio endekatua	250
7.2	Esleipen-problema	254
7.2.1	Esleipen-metodoa: Metodo hungariarra.	257
7.2.2	Maximizatze-problemak	263
7.2.3	Aukerazko optimoak	265
7.3	Erabilpen praktikoak	267
7.3.1	Ekoizpen-problema bat	267
7.3.2	Maximizatze-problema bat	268
7.3.3	Ordutegien esleipena	269
7.4	Ariketak	270
8	PAKETEAK	275
8.1	Sarrera	275
8.1.1	Nahasketen problema	275
8.1.2	Jan-neurriaren problema	276
8.1.3	Garraio-problema bat	277
8.1.4	Esleipen-problema bat	278
8.2	QSB+	278
8.3	LINDO	284
8.3.1	Sarrera	284
8.3.2	Sentikortasun-analisisa	294
9	SOLUZIOAK	309
	BIBLIOGRAFIA	327
	AURKIBIDE ALFABETIKOA	329

Hitzaurrea

Eskuartean duzun liburu honetan Optimizazioaren kontzeptuak aztertzen dira.

Hasteko, optimizazioaren bidez ebatz daitezkeen problemak zein diren ikusten da zenbait adibideren bidez. Aztertzen diren adibideak sinpleak badira ere, errealitatean ager daitezkeen problemen adierazgarri izateagatik izan dira aukeratuak. Problema horiek ebazteko dauden teknika desberdinak ere aipatzen dira, hala nola teknika zehatzak eta metodo heuristikoak.

Bigarren eta laugarren gaitan, optimizazio-teorian ezaguna den programazio lineala eta simplex metodoa aztertzen dira. 2. gaian problemen ebazpen grafikoa dator, problema handiak ebazteko erabili ezingo badugu ere, kontzeptu garrantzitsuak argitzen lagunduko diguna. 4. gaian berriz, simplex algoritmoaren bidez problema linealen soluzioa lortzen ikasten da.

Optimizazio-problema ebazteko aljebra linealaren zenbait kontzeptu eta eragiketa ezagutzea beharrezko gertatzen denez, bektoreei, matrizeei eta multzo ganbilei buruzko gai bat, 3.a hain zuzen ere, erantsi dugu. Bertan oinarritzko kontzeptu aljebraikoak aztertzeaz gain programazio linealerako erabilera aztertzen da.

Behin problema linealak ebazten ikasi denean, lortutako soluzioa interpretatzen jakin behar da, soluzioen arabera erabakiak hartu ahal izateko. Dualtasunari esker soluzioen interpretazio ekonomikoa egingo dugu, eta sentikortasun-analisia burutuko dugu problemaren parametroen aldaketak interpretatzeko.

Praktikan badira sarri agertzen diren problemak, eta duten egitura bereziari ahalik eta probetxu handiena ateratzeko asmoz ebazpen-metodo bereziak sortu dira. Hori dela eta, problema berezi bihurtu dira. Garraio-problema eta esleipen-problema dira, eta 7. gaian problemak eta dagozkien ebazpen-metodoak datoz.

Lehen aipatu bezala, praktikan optimizazio-problema tamaina handikoak izaten dira, eta berauek ebazteko konputagailuaren laguntza behar izaten da. Hori dela eta, zenbait pakete informatiko sortu da, eta

8. gaian horietariko bi aztertzen dira. Liburuan zehar azaldutako zenbait adibide bi paketeren bidez ebazten da gai honetan, eta lortutako soluzioaren interpretazioa egiten da.

Gai bakoitzaren amaieran, ikasitakoak lantzeko ariketak proposatu dira, eta azken gaian ariketa guztien emaitzak bildu ditugu. Hori, liburuan zehar sartutako adibide guztiekin batera, ikasleari lagungarri gertatuko zaiolakoan gaude.

Esan beharra dago, liburu hau ikasle euskaldunari zuzendua egina izan dela, ez baitago gaiari buruzko euskal bibliografiarik, ez eta euskarazko terminologia finkorik ere.

1. Gaia

OPTIMIZAZIOAREN TEORIA

1.1 Sarrera

Optimizazio-teorian zenbait aukera posibleren artean optimoa hautatzearen problema aztertzen da. Normalki, aukera posibleen multzoa murriztua izaten da eta multzo murriztu horretatik hautatu beharko du optimoa erabakitzaileak.

Aukera optimoa hautatu behar dela diogunean inplizituki zera esaten ari gara: aukera posible horiek kuantitatiboki neurtuak izan daitezkeela neurri irizpideren bati jarraituz eta erabakitzaileak aukera horien artetik optimoa hautatu ahal izango duela. Horretarako, optimizazio-teoriak ebatzi beharreko problema zehaztu eta soluzio hoberenak aurkitzeko metodoak eraikitzen ditu.

Optimizazio-problema bat aztertzean ondokoak kontutan izan behar dira:

- Problemaren aukera posibleak definitzen dituen murrizketa-multzoa identifikatu behar da.
- Aukerak kuantitatiboki ebaluatuko dituen irizpidea behar da.
- Soluzio optimoa aurkitzeko metodoa behar da.

Optimizazio-problema bat ebazterakoan, aurreko hiru puntuek garrantzi berbera dute. Hala ere, datozen gaietan soluzio-algoritmoak

aztertuko ditugu gehienbat. Soluzio-algoritmoak eraikitzeari *programazio matematikoa* deritzo.

Optimizazio-problema baten ebazpidean bi urrats nagusi bereiz daitezke:

- Lehen urratsean problema planteatu eta berau adieraziko duen eredua eraikitzen da, hau da, aukera-multzoa eta neurri-irizpidea zehazten dira.
- Bigarren urratsean soluzio-algoritmoren bat erabiliz problemaren soluzioa kalkulatzeko da.

Soluzio-algoritmo horiek lehen urratsean eraikitako eredua ebazteko erabiltzen dira, eta lortutako soluzioa soluzio izango da eredu horren-tzat. Soluzioa problema errealerako soluzio izan dadin eredua ondo eraikia egotea eta benetan eskuartean daukagun problema erreala adieraztea behar-beharrezkoa izango da. Hori dela eta, problemarako soluzio on bat lortzeko ondokoak egin beharko dira: eredua eraikitzeko datuak lortu, eredurako soluzioa kalkulatu, soluzioa problema-rako egiaztatu eta praktikan horren arabera erabakiak hartu.

Praktikan asko dira planteamendu hau erabiliz ebatz daitezkeen problemak: ekoizpen-problemak, itxarote-problemak, esleipen-problemak, antolaketa-problemak, etab.

Ikus dezagun adibide baten bidez optimizazio-teoriak zer motatako problemak aztertzen dituen.

1.1.1 Ekoizpen-problema bat

Ekoizpen-problema honetan errealitatean ager daitezkeen zenbait aspektu kontsideratuko dugu.

Lantegi batean n produktu mota desberdin ekoizten da. Ekoizpena modurik hoberenean antolatu ahal izateko ekoizpen-sailak eta salmenta-sailak, beste zenbaiten artean, ekoizpenari eta salmentari buruz dituzten datuak kontutan izaten dira.

Ekoizpen-sailak badaki produktu horietariko bakoitza ekoizteko zein lehengai erabiltzen den. Jakina da ekoizpena mugatua dela, lehengaiak erosteko dirua mugatua delako, lantegiaren biltegi-ratze-ahalmena ere mugatua delako, eta lantegiaren ekoizpen-denbora ere mugatua delako.

Murrizketa guzti horien arabera produktu-unitate gehiago edo gutxiago ekoiztuko da lantegian.

Hala ere, ez dira horiek lantegiaren ekoizpena mugatzen duten arrazoi bakarrak. Salmenta-sailak publizitatean inbertitzearen ondorioz produktua saltzen du eta horren ondorioz ezagutzen du zein den bezeroen eskaria, produktu-unitateko salneurria eta produktu-unitateko garraio-kostua. Guzti horiek ere eragiten dute produktuaren ekoizpena antolatzeko garaian.

Azkenean, lantegiaren ekoizpen-maila hoberena zein den jakin nahi da, lortutako irabaziak ahalik eta handienak, edo gastuak ahalik eta txikienak izan daitezen. Ekoizpen-maila optimoa lortzeko aukera desberdinak daude, eta irizpideren bati jarraituz aukera horiek ebaluatuko ditugu. Gure adibiderako irizpide egokia izan liteke ekoizpen-maila bakoitzaren ondorioz lor litekeen irabazia neurtzea. Beti ere, ekoizpen-maila optimoa lortzeko ekoizpen-prozesuaren murrizketa guztiak kontutan izan beharko ditugu: baliabideak (ordu-kopurua, lehengaiak etab.), lantegiaren biltegiaritze-ahalmena, bezeroen eskariak, eragiketen kostuak (garraioa etab.) ...

1.2 Ereduen erabilpena

Optimizazio-teoriaren erabilpen praktiko gehienetan eredu matematikoa erabiltzen da problema erreala adierazteko. Eredu matematikoa, helburu-funtzio batez eta zenbait murrizketaz osaturik dago. Helburu-funtzioak aukerak kuantitatiboki neurtzen ditu eta berau da optimizatu behar dena. Murrizketek, aldiz, problemaren aukerak edo erabaki-aldagaiak definitzen dituzte.

Oro har, errealtateko sistema bat adieraziko duen eredua eraikitzeko jarraitu beharreko araurik ez da existitzen. Horregatik, lehen urrats hori zientzia baino artea dela esan ohi da.

Eredu matematikoa sistema errealtatearen sinplifikazioa da beti eta erabaki-aldagaiak, murrizketak, parametroak eta elkarren arteko erlazioak zehazten dira bertan.

Soluzioak kalkulatzeko ereduaren erabilera abantailatsua izan dadin, eredua sinplea izatea komeni da. Sistema erreala murrizketa askoren menpe egon badaiteke ere, sistemaren jokaera baldintzatzen

dutenak zein diren bereiztu beharko da, beraiek izango baitira eredu-
duan kontutan izan beharko ditugunak. Eredua zenbat eta sinpleagoa
izan, orduan eta erabilgarriagoa gertatuko da. Hala ere, gehiegi sinpli-
fikatu nahi izateagatik, behar baino murrizketa gutxiago edo erabaki-
aldagai gutxiago kontutan izango bagenu, lortuko genukeen ereduak
ez luke behar bezala sistema erreala adieraziko, eta horren ondorioz,
eredu matematikoa ebatziz lortutako soluzioa ez litzateke sistema erre-
alaren soluzio izango. Zenbait kasutan metodo bat baino gehiago era-
biltzeko aukera izango dugu eredua ebatzeko. Beste zenbaitetan aldiz,
eta eredua konplexuegia izateagatik, soluzio-metodo zehatzak erabili
ordez metodo heuristikoak erabili beharko ditugu.

Errealitatean bada oso sarri agertzen den eta optimizazio-teoriako
metodoen bidez ebatzia izan daitekeen zenbait problema mota. Sakonki
aztertutak izan ondoren, problema adierazteko eredu finakoak eta solu-
zioa lortzeko teknika bereziak eraiki dira. Adibide gisa, hor daude
programazio lineala, osoa, ez-lineala, sare-teoria, itzarote-iladak etab.

Ereduaren eraikuntzak duen garrantziaz jabetzeko adibide bat azter-
tuko dugu.

1.2.1 Garraio-problema bat

Lantegi batek produktu baten ekoizpenerako bi ekoizpen-zentro ditu bi
hiri desberdinetan: H_1 eta H_2 . Behin produktuaren ekoizte-prozesua
amaitu denean, B_1 , B_2 eta B_3 biltegi-tara garraiatuko dira produktuak.
 H_1 hirian asteko 30 produktu-unitate ekoizten da eta 20 unitate H_2
hirian. Biltegien asteko eskariak 15, 10 eta 25 produktu-unitatekoak
dira, hurrenez hurren.

Honako taulan, hirietatik biltegi-tara produktu-unitate bat garra-
iatzeak eragiten dituen kostuak datoz:

	B_1	B_2	B_3
H_1	7	4	6
H_2	9	5	3

Problema honetan lortu nahi dena zera da: hirietatik biltegi-tarako
asteko garraioak antolatu nahi dira ahalik eta kosturik txikienean, beti

ere, hirietan ekoiztutako produktu-unitateekin biltegien eskariak beteko direlarik.

Garraio-sistema hau adieraziko duen eredu matematikoa eraikitzeko honako erabaki-aldagaiak definituko ditugu:

- x_{ij} : H_i ($i = 1, 2$) hiritik B_j ($j = 1, 2, 3$) biltegiara garraiatzen den produktuaren unitate-kopurua.

Problemaren helburua garraioa ahalik eta kosturik txikienean antolatzea denez, optimizatu beharreko helburu-funtzioa ondokoa izango da:

$$\min z = 7x_{11} + 4x_{12} + 6x_{13} + 9x_{21} + 5x_{22} + 3x_{23}$$

Hiri bakoitzetik biltegieta garraiatzen den unitate-kopurua mugatua dago.

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} \leq 30$$

$$x_{21} + x_{22} + x_{23} \leq 20$$

B_1 , B_2 eta B_3 biltegien asteko eskariak bete egin behar dira:

$$x_{11} + x_{21} \geq 15$$

$$x_{12} + x_{22} \geq 10$$

$$x_{13} + x_{23} \geq 25$$

Kontutan izan beharko da baita, erabaki-aldagaiak, hau da, garraiatutako produktuen unitate-kopuruak, ezin daitezkeela negatiboak izan.

$$x_{ij} \geq 0 \quad i = 1, 2 \quad j = 1, 2, 3$$

Guztiarekin, garraio-sistema hori adierazten duen eredu matematikoa honakoa da:

$$\min z = 7x_{11} + 4x_{12} + 6x_{13} + 9x_{21} + 5x_{22} + 3x_{23}$$

ondoko murrizketen menpe

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} \leq 30$$

$$x_{21} + x_{22} + x_{23} \leq 20$$

$$x_{11} + x_{21} \geq 15$$

$$x_{12} + x_{22} \geq 10$$

$$x_{13} + x_{23} \geq 25$$

$$x_{ij} \geq 0 \quad i = 1, 2 \quad j = 1, 2, 3$$

Eredu matematikoa eraikitzeko erabilitako datuak fidagarriak ez badira, eredua ez da baliogarria izango gure problema ebazteko. Aurreko adibidean, datuak ziurrak direla suposatzen ari gara. Hau hala ez balitz, sistema ebaztean lortutako soluzioak ereduaren soluzio izango lirateke, baina ez sistema errealearenak. Praktikan, datu zehatzak lortzea problemaren ebazpenaren urratsik zailenetarikoa izan daiteke, eta egin-behar horretan laguntzeko ez dago inolako erregelarik.

Zenbait kasutan, datuak probabilitatez beteko direla kontutan izatea garrantzitsua da, horrelakoetan eredu determinista eraiki ordez eredu probabilitistikoa eraiki beharko dugulako.

1.3 Azterketarako urratsak

1. Problemaren formulaketa.

Problema praktikoetan askotan gertatzen da ebatzi behar den problema ez dela hasieran sakonki ezagutzen. Problemaren formulaketa zehatza egin ahal izateko jakin behar da zein diren sisteman eragiten duten eragile garrantzitsuenak.

Urrats honetan finkatu beharko da lortu nahi den helburua, zein diren horretarako aukera posible desberdinak eta zein diren problemaren murrizketak.

2. Eredu matematikoaren eraikuntza.

Behin problema zehazki formulatua izan denean, sistema hori adieraziko duen eredu matematikoa eraiki behar da. Ereduak problema erreala adierazi behar du modu sinplifikatuan. Sinpleagoa izate hori sistema erreala aztertzekeo abantaila handia da, sistemaren ulerpene eta erabilera errazten dituelako. Eragozpenak ere baditu hala ere, eredua sistema errealearen ideialpena izateagatik, suposaketak eta hurbilketak egin beharko direlako, eta horien ondorioz, eraikitako eredua sistema errealearen adierazpen baliogarri ez izatea gerta daitekeelako.

Eredua idazteko, sistemaren funtzionamendua baldintzatzen duten aldagaiak identifikatu behar dira. Aldagai horiek erabiliz hel-

burua neurtzen edo optimizatzen duen funtzioa eta soluzioen espazioa definitzen duten erlazioak idazten dira. Guztiarekin, eredu idatzia izango dugu.

Eredu horren egitura ezaguna izan liteke eta ondorioz baliteke soluzio-metodoa ezaguna izatea. Hau hala izatekotan erraza gertatuko da soluzioa lortzea. Alderantziz, eredu konplexuegia bada, soluzio zehatzak lortzeko metodo bat eraikitzea zaila izango da; horrelakoetan, soluzio hurbilak emango dituzten teknikak erabiltzea komenigarria izango da.

3. Ereduaren ebazpidea.

Aurreko urratsean aipatu dugunez, zenbait problema praktikoa aztertua izan da eta problema horiek adierazten dituzten ereduak ebazteko metodoak ezagunak dira. Optimizazio-teorian ezagunak diren metodoen artean programazio lineala, programazio osoa, programazio dinamikoa, iladen teoria etab. aurkitzen dira. Metodo horiek, oro har, iteratiboak dira eta problemen soluzio optimoa kalkulatzeko dute.

Behin eredu ebatzia izan denean, lortutako soluzio optimoaren azterketa egitea interesgarria, eta askotan beharrezkoa, izaten da. Azterketa honi, *analisi postoptimoa* edo *sentikortasun-analisisa* deritzo. Ereduaren parametroren bat aldatuko balitz, aldaketa horrek soluzioan izango lukeen eragina ezagutzea interesa lekiguke. Azterketa hori beharrezko gerta daiteke ereduaren parametroren bat aldatzen denean, edo datu estimatuak erabili direlako, estimazioa oso zehatza izan ez delarik, edo aldaketarik gertatu ez bada ere, gerta litezkeen aldaketek soluzioan izango luketen eragina ezagutzea interesa lekigukeelako, besterik gabe.

4. Ereduaren eta soluzioaren egiaztapena.

Sistema adierazteko eraikitako eredu egokia den ala ez jakiteko, aurretik dauzkagun datuak erabiliz funtzionamendua egiaztatu daiteke. Eredu baliogarria izango da baldintza ezagunetan emaitza onak sortzen baditu. Egiaztapena pasatako datuekin egiteak desabantailak baditu; datu berberak baldin badira eredu eraikitzeko

eta eredua egiaztatzeko erabiltzen direnak, egiaztapena oso esanguratsua ez izatea gerta liteke.

Hala ere, egiaztapen hori egitea ez da beti posible izaten, zenbaitetan aurretik ez delako daturik izaten. Horrelakoetan egin eredua ebaztearen ondorioz kalkulaturako soluzioa erabil daiteke problema errealean erabakiak hartzeko, eta errealitatean lortutako datuak geroago ereduaren jokaera ebaluatzeko erabiliak izango dira.

5. Soluzioaren erabilpena praktikan.

Praktikan erabakiak hartzeko unean oso lagungarri gertatzen da ereduaren bitartez kalkulaturako soluzioa eskuartean izatea. Eraikitako ereduak eta soluzioa lortzeko erabilitako metodoak emaitza ona sortzen duten egiazta daiteke azken urrats honetan. Kalkulaturako emaitza ona ez dela egiaztatuz gero, planteaturako eredua berrikusi beharko da.

1.4 Beste zenbait metodo

Ereduak eraikitzearen teoria asko garatu bada ere, zenbait sistema errealean adierazteko aipatu ditugun eredu matematikoak erabiltzea oso zaila gertatzen da oraindik, bai sistemaren aldagai-kopurua edota murrizketa-kopurua handiegia delako, bai soluzioa lortzeko teknika matematikorik ez dagoelako.

Arazo horiek direla eta, eredu matematikoa erabiltzeari komenigarri ez deritzogunean beste teknikaren bat erabili beharko da, halanola simulazioa eta metodo heuristikoak. Sarreraren eta irteeraren arteko erlazioa esplizituki adierazi beharrik ez da izaten simulazio ereduetan, eta hori abantaila handia da. Bestalde, metodo heuristikoak erregelatan oinarritzen direnez, algoritmo zehatzak baino errazagoak dira askotan.

1.4.1 Simulazioa

Simulazio-eredu batek sistema errealearen portaera imitatzen du eta, saiakuntza estatistikotzat hartu behar da.

Sistema errealak adierazteko eredu matematikoak erabiltzean sistema sinplifikatu egin behar izaten dela aipatu dugu; ez ordea simulazioa erabiliz gero. Baina, simulazioaren bidez lortzen diren soluzioak soluzio on baldin badira ere, ez dira optimo izaten, eta gehienetan, soluzio on horiek lortzeak kalkulu asko eskatzen du.

Simulazio adibide bat

Demagun joko batean parte hartzeko aukera daukagula. Jokoa txanpona baten jaurtiketan datza. Jakina denez, txanpona jaurtiki ondoren aurpegia edo gurutzea agertuko da. Joko honetan txanpona behin eta berriz botako dugu ateratako aurpegi-kopuruaren eta gurutze-kopuruaren arteko aldea 3-koa den arte. Behin 3-ko alde hori lortu denean 8.000 pta irabazten du jokalaria, baina hau gertatzen ez den bitartean txanpona jaurtikitzen duen bakoitzeko 1.000 pta ordaindu beharko du.

Jokoaren arauak horiek izanik, jokalaria dirua irabaziko du helburua lortzeko 8 jaurtiketa baino gutxiago behar izaten duenetan. Bestelako kasuetan garbi dago jokalaria dirua galduko duela. Joko honetan parte hartzea errentagarri gertatuko zaion jakin nahi du jokalaria.

Jokoan gertatzen diren diru irabazi eta galerak garbiago ikusteko behin eta berriz txanponarekin bere kasa jokoan jardutea erabakitzen du, gero saio horien arabera batezbesteko irabazia kalkulatzeko.

Demagun zenbait jokaldi egiten duela eta ondoko emaitzak lortzen dituela:

```

XAAXAAXAXXXXXXAAAAAXXXX
XXAXAAXXXAXXAXXXXAXAX
XXXXAXXXXXXAXXXAXAAA
AXAXAAXAAAAAXAAAAXAXAX
AAXXXAXXAXAXAAA...

```

Ondokoak dira lortu diren emaitzak. Lehen jokaldian, txanpona 11 aldiz jaurtiki ondoren jokaldia bukatzen da (7 gurutze eta 4 aurpegi). 11.000 ordaindu eta 8.000 irabazi direnez, 3.000 galdu dira. Bigarrenetan

berriz 5 aldiz jaurtiki ondoren (gurutze 1 eta 4 aurpegi). 5.000 ordaindu eta 8.000 jasotzeagatik 3.000-ko irabazia izan dugu. Jokaldi asko burutu ondoren (laginaren tamaina handia izanik) joko irabazteko txanpona batezbesteko zenbat aldiz jaurtiki beharko duen badaki jokalaria. Kontutan izan behar da, laginaren tamaina eta bariantza oso garrantzitsuak direla jokoan parte hartzea komeni den ala ez erabakitzeko.

Kasu honetan 13 jokaldi burutu dira eta batezbestekoa honela kalkulatu dugu:

$$\frac{11 + 5 + 5 + 9 + 7 + 7 + 5 + 3 + 17 + 5 + 5 + 11 + 9}{13} = 7.6$$

Normalki, laginak ez dira txanpona jaurtikiz lortzen, ausazko zenbakiez osaturiko zerrendak sortuz baizik. Zerrenda horietatik abiatuz eta probabilitate-banaketak erabiliz ausazko azterketak lortuko dira.

Iladen simulazioa

Demagun bezeroek zerbitzuren baten zain ilada bat osatzen dutela. Honelakoetan bi motatako kostuak sortzen dira: eragite-kostua, zeina zerbitzari-kopuruarekin batera handitzen den, eta itxarote-kostua, zerbitzari-kopuruak behera egitean handitzen dena. Kostu hauek zerbitzari-kopuruaren arabera aldatzeaz gain zerbitzatze-denboraren eta bezeroen sarritasunaren arabera ere aldatzen dira.

Problemak eskatzen duena zera da: kostuak minimo izan daitezen izan beharko dugun zerbitzari-kopurua zein den aurkitzea. Kopuru hori zein izan daitekeen ezagutzeko sistemaren funtzionamendua simulatu duen sistema eraiki dezakegu, zerbitzari-kopuru desberdinekin zer nolako kostuak sortzen diren aztertu eta honela batezbesteko kostuak kalkulatzeko. Simulazioari esker lorturiko datuek beharrezko erabakiak hartzen lagunduko digute.

1.4.2 Metodo heuristikoak

Oro har, metodo heuristikoak ere iteratiboak dira. Problemarako soluzioa ematen dute, soluzio hori soluzio optimotik zenbateraino gertu dagoen jakiterik ez badago ere. Hala ere, metodo hauek badituzte abantailak, kalkulu gutxiago eskatzen baitute soluzioa lortzeko eta ulerterrazagoak diren erregelatan oinarritzen baitira.

Metodo heuristikoak soluzio hurbilak kalkulatzeko erabiltzeaz gain, optimizazio-algoritmo zehatzetan erabil daitezke konberjentzia azkartzeko asmoz.

Adibidea:

Demagun bidaiari batek lau hiri bisitatu behar dituela; egunean zehar lau hirietatik pasa behar du behin eta bakarrik behin, iturburu hirira itzuli baino lehen. Kilometro-kopuru txikieneko ibilbidea burutu nahi du bidaiariak, eta horretarako, hiriak zein ordenatan bisitatu beharko dituen jakin nahi du. Hirien arteko distantziak taulakoak dira:

	1	2	3	4
1	—	6	3	8
2	6	—	4	7
3	3	4	—	10
4	8	7	10	—

Diagonaleko distantziak zero badira ere, zero horiek ez dira esleituak izango.

Soluzioa kalkulatzeko metodo heuristiko erraz bat honakoa da: 1. hirian hasten dela emanik, 3. hirira abiatuko da, bera baita gertuen gelditzen zaiona. Ondoren, oraindik bisitatuak izan ez diren hirien artetik gertuen dagoenera joango da, 2. hirira alegia. 2. hiritik gertuen dagoen bisitatu gabeko hirira: 4. hirira. Azkenik, 1. hirira itzuliko da. Ibiltako kilometro-kopurua: $3 + 7 + 4 + 8 = 22$

Metodo horren izena *aldameneko gertuenaren metodoa* da eta problemarako soluzio bat kalkulatzeko du oso modu errazean. Hala ere, soluzio hori soluzio optimotik zein gertu dagoen jakiteko modurik ez dago.

Adibidea:

Demagun 4.orrian azaldutako garraio-problemaren moduko bat daukagula, eta dagozkion kostu-matrizea eta eskari eta eskaintzari dagoz-

kion murrizketak ezagunak direla. Soluzio bat kalkulatzeko honako metodo heuristikoa erabil daiteke.

H_1 hiritik B_1 biltegira ahalik eta produktuen unitate-kopuru handiena bidaltzen da. Ondoren gauza bera egiten da B_2 biltegira ere, eta H_1 hiriaren eskaintza oraindik bukatu ez bada B_3 biltegiaren eskaria zerbitzatuko da. Modu berean jokatzeko da H_2 hiriaren eskaintzarekin. Honako soluzioa lortuko genuke.

	B_1	B_2	B_3	ESK AINTZA
H_1	15	10	5	30
H_2			20	20
ESKARIA	15	10	25	

Garraio-problemaren soluzioa lortzeko metodo hau erabiltzea ez da oso egokia, eskariak zerbitzatzeko ez dituelako garraio-kostuak ezertarako kontutan izaten. Soluzio bat lortzeko metodo heuristiko hobeak badira.

1.5 Optimizazioaren erabilera praktikoak

Modu honetako planteamenduak adibide praktiko askotan erabil daitezke. Gainera, horietariko zenbait oso maiz agertzen da eta arreta bereziz aztertuak izan dira. Horri esker, problema horiek identifikatu dira, eta berauek adierazteko eredu matematikoak eta eredu ebatzteko teknikak finkatu dira. Azter ditzagun horietariko batzuk.

1.5.1 Inbentario-problema

Inbentarioan produktuen unitate-kopuruak gordetzen dira. Bezeroen eskariak betetzeko erabiltzen da inbentarioa. Eskari horiek denboran zehar bete behar dira.

Mota desberdinetako kostuak aurki ditzakegu inbentario bati lotuak. Inbentarioaren tamainarekin zuzenki proportzionala den kostua,

gerora erabiliak izango diren inbentarioko unitateak biltegitratuak izateak dakarren kostua da, adibidez. Bestalde, inbentarioko unitateak erosteak edo ekoizteak eragiten duen kostua eta inbentarioaren urritasun-kostua edo atzerapen-kostua daude, inbentarioaren tamaina txikitzean handiagotuko direnak.

Horrelako prozesuetan erabakiak hartu behar dira. Erosi edo ekoiztu beharreko unitate-kopurua eta zenbat denbora barru erosi edo ekoiztuak izango diren zehaztu beharko da.

Bai inbentarioaren igoerak eta baita jaitsierak ere kostu gehigarria suposatzen dutenez, mantenu minimoa eskatuko duen inbentario-maila zehaztu nahi da.

Prozesu hori determinista izango da eskariak aldeztu aurretik ezagunak baldin badira. Aitzitik, eskariak ausaz sortzen badira, prozesua bera ere ausazkoa izango da; inbentario-mailaren mantenua ausazko eskarien funtzioan egongo da une bakoitzean. Mota horretako problemak ebazteko bada zenbait teknika matematiko, hala nola programazio lineala, programazio dinamikoa eta programazio koadratikoa.

1.5.2 Mantenu-ordezkatzearen problemak

Zenbait prozesutan erabiltzen den tresneriak ez du betirako iraungo eta noizbehinka tresneria zaharkitua tresneria berriaz ordezkatzea komeni da. Hau gerta daiteke uneko tresneria ez dabilelako eta arazoa konponezina delako edota tresneria errendimendu gutxikoa delako.

Ordezkatze-problemak bi taldetan bana daitezke, tresneriaren iraupen motaren arabera:

1. Zenbait tresneri denboran zehar eraginkortasuna galduz doa, bai narriaduragatik edo baita eraginkorragoak diren tresneriak merkaturatzen direlako, tresneri zaharren eraginkortasun erlatiboa jaitsiarazten dutelarik.
2. Beste zenbait tresneri motaren eraginkortasuna, aldiz, konstantea da zeharo hondatzen diren arte. Hondatze hori edozein unetan gerta daiteke, hondatzearen probabilitatea tresneriaren adinarekin batera handitzen bada ere.

Eredua eraikitzeko unean, problema determinista den ala ausazkoa den bereiztu beharko dugu. Hauek dira mantenu-ordezkatzearen problemetan izaten diren kostuak:

- Mantenu-kostua eta eragite-kostua, tresneriaren aintzinasunarekin hazten direnak.
- Tresneriaren balioa, aintzinasunarekin txikituz doana.
- Tresneri berria erosteak eragindako kostua.

Tresneriaren ordezkaketa egiteko datarik egokiena zehaztean datza problema. Data horrek tresneria berria erosteak eragindako kostua eta tresneria zaharraren erabilgarritasun galera eta balio galera orekatuko ditu.

Mantenu-ordezkatzearen problemak bai teknika bereziak erabiliz eta bai programazio dinamikoa erabiliz ebatz daitezke.

1.5.3 Itxarote-problemak

Mota honetako problematan, nolabaiteko zerbitzua eskaintzen duen zerbitzaria dago eta bezeroek eskariak egiten dituzte zerbitzatuak izateko. Eskari horiek guztiak ausaz sortzen dira eta ilada bat edo gehiago osatuko dute zerbitzariaren zain daudelarik.

Oro har, itxarote-kostuak sortzen dira, bai bezeroaren galerarako (iladan zain egoteagatik) bai zerbitzariaren galerarako (iladan bezeroen eskaririk ez egoteagatik).

Itxarote-problemak sailkatzeko honako ezaugarriak izan behar dira kontutan:

1. Bezeroen eskariak lerrokatzeko ilada-kopurua, hau da, zerbitzari-kopurua.
2. Jarraian iristen diren bi eskariren arteko denbora.
3. Zerbitzatzeko-denbora.
4. Zerbitzatzeko modua: lehentasunezkoa, lehentasunik gabekoa.
5. Zerbitzariak osatutako egitura: seriean, paraleloan, nahasian.

Helburua zera izan daiteke: kostu totala (zerbitzarien eragite-kostua eta bezeroen itxarote-kostua) minimizatuko duen zerbitzari-kopurua zehaztea. Kopuru hori zehazteko zenbait kasutan eredu matematikoa eraikitzea posible izango zaigu, baina beste zenbaitetan simulazioa erabiltzea komenigarria izango da.

1.5.4 Antolaketa-problemak

Burutu beharreko zenbait eginkizun eta bete beharreko zenbait murrizketa izanik, antolaketa-problematan eginkizun horiek burutzeko ordena optimoa zehaztu behar da. Adibidez, n eginkizun burutzeko m makina bagenu, lortu beharreko helburua eginkizunak makinei esleitzearena izango litzateke, neurriren bat optimizatuko lukeelarik: makinaren langabezi denbora minimo izatearena, eginkizun guztiak burutzeko beharrezko denbora minimizatzearena etab.

Bi antolaketa-problema berezi jarduera-sareen problema eta bidaiariaren problema dira.

- Jarduera-sareen problemak, proiektu bat burutzeko beharrezko denbora optimoa zehazten du. Honela, ordena finko batean burutu beharreko jarduera multzoa izanik, jarduera horietariko bakoitzak iraupen denbora (zehatza edo ausazkoa) duela jakinda eta jarduera burutzeak nolabaiteko kostua suposatzen duela jakinda, jarduera guzti horiek antolatu behar dira. Ohizko helburuak honakoak izaten dira: kostu total minimoa duen soluzioa lortzea, iraupen minimoko soluzioa lortzea, egite-probabilitate maximoa duen soluzioa lortzea etab. Optimizazio-teorian ezagunak diren PERT eta CPM teknikak erabiltzen dira problema hauek ebazteko.
- Lehen ikusi dugu, metodo heuristikoen bidezko ebazpidea aztertzerakoan, bidaiariaren problema. Problema hori eta antolaketa-problemak alderatzen baditugu, bidaiariaren problema makina batean n eginkizun burutzeko eginkizunak zer nolako ordenatan burutu beharko liratekeen erabakitzea dela ikusten da. Modu honetako problemak ebazteko programazio lineal osoa erabil daiteke.

1.5.5 Baliabide-esleipenaren problema

Zenbait jarduera burutu behar denean eta jarduera bakoitza burutzeko baliabide nahikoa ez dagoenean sortzen da baliabideak esleitzearen problema. Problema horren helburua urriak diren baliabideak esleitzea da, esleitze horrek eraginkortasuna neurtzen duen funtzioa optimizatuko duelarik. Baliabide erabilgarrien kopurua ezaguna da, eta baita jarduera bakoitza burutzeak eskatzen duen baliabide-kopurua eta eragindako kostua ere.

Epealdi baterako egindako baliabide-esleipenak ez baldin badu geroagoko epealdietan egingo diren baliabide-esleipenen gain inolako eraginik, orduan esleipen-problema estatikoa da. Horrelako problemak ebazteko programazio lineala erabil daiteke. Aitzitik, epealdi batean egindako baliabide-esleipenak hurrengo epealdiko baliabide-esleipenaren gain eragina balu, esleipen-problema dinamikoa izango litzateke, berau ebazteko programazio dinamikoa erabili beharko litzatekeelarik.

Baliabide-esleipenaren problemak asko dira praktikan, hala nola langileak makinei esleitzearena, produktu baten garraioa iturburu-puntuetatik helburu-puntuetara antolatzearena etab.

Azaldutako erabilpenez gain bada praktikan ager daitekeen beste zenbait problema ere; hala ere, ezagunenak dira aztertuenak izan direnak eta horientzako ereduak eta soluzioak kalkulatzeko metodoak ezagunak dira.

Normalki, sistema errealean ez da aurrean aztertutako problema horietariko bat bakarra agertzen. Ekoizte-prozesu batean adibidez, baliabide-esleipenaren problema ager daiteke, edota inbentario-problema, itxarote-problema, antolaketa-problema, etab. Problema guzti horiek elkarren segidan ebatz daitezke, edo problema horietariko bat baino gehiago aintzakotzat hartuko duen eredua eraikitzen saia gaitezke.

2. Gaia

EREDU LINEALAK ETA SOLUZIO GRAFIKOA

2.1 Sarrera

Laburki esanda, programazio linealak mugatuta dauden baliabideak lehian diharduten jardueren artean esleitzearen arazoa aztertzen du, esleipena optimoa gerta dadin. Jarduera horiek burutuak izan daitezen, urriak diren baliabideak lortzeko lehian dabilta eta jarduera horien maila optimoa aukeratzean datza problema. Problema orokor hau egoera desberdin askotan aurki daiteke praktikan: beharrei baliabideak esleitzerakoan, ekoizpenaren plangintzan, ekoiztutako produktuak iturburuetatik helburuetara garraiatzean etab.

Programazio linealak problema deskribatzeko eredu matematikoa erabiltzen du. Lineal adjektiboak zera adierazten du: eredu matematikoko funtzio guztiak, bai murrizketak eta bai helburu-funtzioa, linealak direla. Behin problema ebazteko eredu matematikoa eraikia izan denean soluzioa lortzeko oso eraginkorra den prozedura erabiliko dugu; SIMPLEX metodoa hain zuzen ere. Metodo hau oso erabilgarria gertatzen da egoera asko planteatu daitekeelako eredu lineala erabiliaz; optimizazioan beste zenbait arlotan ere erabil daiteke gainera.

2.2 Eredu lineala

Definizioa 2.2.1 *Eredu lineala esaten zaio ondokoa optimizatzen (maximizatzen edo minimizatzen) duenari:*

$$z = \mathbf{c}^T \mathbf{x} \quad (2.1)$$

ondoko murrizketak betetzen dituelarik:

$$A\mathbf{x} \leq \mathbf{b} \quad (2.2)$$

$$\mathbf{x} \geq \mathbf{0} \quad (2.3)$$

Optimizatu behar den funtzioak (2.1) helburu-funtzio izena du, (2.2) desberdintzek murrizketa eta (2.3) ekuazioek ez-negatibotasun murrizketa.

Planteatu berri dugun ereduan agertzen diren elementuak ondokoak dira:

- $\mathbf{x}$ bektorearen n osagaiak *erabaki-aldagaiak* dira.
- $\mathbf{c}^T$ bektorea *unitateko prezio-bektorea* edo *kostu-bektorea* da. Honen ere n osagai du.
- *Baliabide-bektorea* deritzon m osagaidun $\mathbf{b}$ bektorea .
- *Teknologi koefizienteen matrizea* izena duen A matrizea, m lerroz eta n zutabez osaturik dagoena. A matrizeko a_{ij} elementu bakoitzak ($i = 1 \dots m$, $j = 1 \dots n$) j jarduera-unitatea burutua izan dadin behar den i baliabidearen unitate-kopurua adierazten du.

Eredue linealean, $\mathbf{c}^T$ eta $\mathbf{b}$ bektoreen eta baita A matrizearen elementuak ezagunak dira. $\mathbf{x}$ bektorearen osagaiak, aldiz, ereduaren aldagaiak dira eta beren balioa zehazteke dago.

2.3 Eredue lineala idazteko erak

Eredue lineala idazteko ondoko hiru idazkerak erabil daitezke.

2.3 .Taula: Elikagaien bitaminak eta kostua

ELIKAGAIA	BITAMINAK (mg/gr)				ELIKAGAI GRAMOAREN KOSTUA
	A	B	D	E	
1	2	1	0	1	14
2	1	2	1	2	9
3	1	0	2	0	13
4	1	2	1	1	16

– Salmentari dagokiona.

$$x_3 \leq 20$$

- Ez-negatibotasun murrizketak. $x_1, x_2, x_3 \geq 0$

Ekoiztutako produktu-kopurua ez da inoiz negatiboa izango.

Adibidea. Jan-neurriaren problema

Elikapen-zentro batean A, B, D eta E bitaminak kopuru egokian izango dituen jan-neurria prestatzen ari dira. Jan-neurriak ondokoak bete beharko ditu: gutxienez 25 mg A bitamina izan beharko ditu, B bitamina-kopuruak 25 mg eta 30 mg artean egon beharko du, D bitaminak berriz 22 mg-tik gora agertu beharko du eta gehienera jota ere 17 mg E bitamina nahi dira.

Bitamina guzti horiek 4 elikagai ezberdinen bidez lor daitezke. 2.3 . taulan zera dator adierazia: elikagai gramoko dagoen A, B, D eta E bitaminen mg-kopurua eta elikagai horietariko bakoitzaren gramoko kostua.

2.2 .Taula: Beharrezko makinen ordu-kopuruak

	P_1	P_2	P_3
A makina	8	2	3
B makina	4	3	-
D makina	2	-	1

dago. Horrek lantegiaren ekoizpena mugatu egiten du. Makinen erabilgarritasunak 2.1 .taulan datoz adieraziak. Era berean, produktu-unitate bakoitza ekoiztua izan dadin behar den makina bakoitzeko ordu-kopurua 2.2 .taulan emana dator.

Lantegiko salmenta-sailak dioenez, P_1 eta P_2 produktuak saltzeko ahalmena, ekoiztu litekeen kopuru maximoa baino handiagoa da. P_3 produktua berriz, asteko 20 unitate baino gehiago ezin daiteke sal.

Saldutako P_1 , P_2 eta P_3 produktu-unitate bakoitzetik lortutako irabazia 20, 6 eta 8 ptakoa da, hurrenez hurren. Problema zera eskatzen du: irabazia maximoa izan dadin lantegiak asteko ekoiztu beharko duen produktu bakoitzeko kopurua zehazteko eredu lineala formulatzea.

EBAZPIDEA

- Erabaki-aldagaiak. x_1, x_2, x_3 . Asteko zenbat P_1 , P_2 eta P_3 produktu-unitate ekoiztu behar den adierazten dute.
- Helburu-funtzioa. $\max z = 20x_1 + 6x_2 + 8x_3$
- Murrizketak.

– Denborari dagozkionak.

$$8x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 200$$

$$4x_1 + 3x_2 \leq 100$$

$$2x_1 + x_3 \leq 50$$

2.1 .Taula: Makinen erabilgarritasunak

Ordu-kopurua	
Makina mota	(Asteko makina-ordutan)
A	200
B	100
D	50

ondoko murrizketen menpe

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \leq b_i \quad i = 1 \dots m$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1 \dots n$$

2.4 Ereduen eraiketa

Programazio linealaren bitartez problema bat aztertu nahi dugunean, problema adieraziko duen eredua eraikitzea izango da lehenengo egin beharko duguna. Lehen urrats hau ebazpen osoaren urratsik zailena izan daiteke, eta kontu handiz egin beharko dugu ez baitago eredua nola eraiki esango digun erregularik; ereduak eraikiz ikasten da ereduak eraikitzen. Azter dezagun zenbait adibide praktiko.

Adibidea. Baliabide-esleipenaren problema

Lantegi batek P_1 , P_2 eta P_3 izendatuko ditugun produktuak ekoizterakoan, bere ekoizpen-ahalmenari ahalik eta etekin handiena ateratu nahi dio. Produktu horiek ekoizteko erabiltzen dituen A,B eta D makinen erabilgarritasuna, hots ordu erabilgarrien kopurua, mugatuta

1.

$$\text{opt } z = (c_1, \dots, c_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

ondoko murrizketen menpe

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ & & \vdots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \begin{matrix} \leq \\ = \\ \geq \end{matrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

2.

$$\text{opt } z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n$$

ondoko murrizketen menpe

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \begin{matrix} \leq \\ \geq \end{matrix} b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \begin{matrix} \leq \\ \geq \end{matrix} b_2$$

$$\vdots$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \begin{matrix} \leq \\ \geq \end{matrix} b_m$$

$$x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0$$

3.

$$\text{opt } z = \sum_{j=1}^n c_j x_j$$

Eskatzen dena zera da: kosturik txikieneko jan-neurria aurkitu nahi da, beti ere beharrezko A, B, D eta E bitamina-kopurua ziurtatuko duelarik.

EBAZPIDEA

- Erabaki-aldagaiak. Erabaki-aldagaiak zera adierazten dute: jan-neurriak duen elikagai bakoitzeko gramo-kopurua.

x_j : j elikagai-kopurua gramotan, $j : 1 \dots 4$

- Murrizketak. Hauek ondokoa adierazten dute: bitamina mota bakoitzeko behar den unitate-kopurua.

$$2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \geq 25 \quad (A \text{ Bitamina})$$

$$25 \leq x_1 + 2x_2 + 2x_4 \leq 30 \quad (B \text{ Bitamina})$$

$$x_2 + 2x_3 + x_4 \geq 22 \quad (D \text{ Bitamina})$$

$$x_1 + 2x_2 + x_4 \leq 17 \quad (E \text{ Bitamina})$$

- Helburu-funtzioa. Problemaren helburua ahalik eta kosturik txikieneko jan-neurria lortzea da.

$$\min z = 14x_1 + 9x_2 + 13x_3 + 16x_4$$

- Ez-negatibotasun murrizketak. $x_1 \dots x_4 \geq 0$

Honela lortu dugun eredua linealak diren funtzioz osatua dagoela ikus dezakegu. Ondokoa beteko duten x_1, x_2, x_3 eta x_4 aldagaien balioak zehaztea izango da eredu linealaren soluzioa topatzea:

$$\min z = 14x_1 + 9x_2 + 13x_3 + 16x_4$$

ondoko murrizketen menpe

$$2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \geq 25$$

$$x_1 + 2x_2 + 2x_4 \leq 30$$

2.4 .Taula:

ESENTZIA	UPELA-KOPURUA	UPELAKO PREZIOA
1	2.000	10
2	3.000	8
3	1.000	12

$$x_1 + 2x_2 + 2x_4 \geq 25$$

$$x_2 + 2x_3 + x_4 \geq 22$$

$$x_1 + 2x_2 + x_4 \leq 17$$

$$x_1 \dots x_4 \geq 0$$

Adibidea. Nahasketen problema

Birfindegi batean 2 gasolina mota (A eta B) ekoizten dituzte, horretarako 3 esentzia desberdin nahastuz. Erabil daitekeen esentzia-kopurua eta mota bakoitzeko upelaren prezioa 2.4 .taulan datoz adieraziak.

A eta B gasolinak kalitate onekoak izan daitezen, nahasketak egite-rakoan ondokoak kontutan izan behar dira:

- A gasolinaren %50-a gutxienez 1. esentzia da eta ezin du 2. esentzia %30-etik behera izan.
- B gasolinaren 3. esentzia-kopuruak %30-etik beherakoa izan behar du.

A gasolinaren salneurria 40-koa da upelako eta B-rena 35-ekoa. Demagun ekoiztutako gasolina guztia saltzeko gai dela birfindegia.

Irabaziak ahalik eta handienak izan daitezen mota bakoitzetik zenbat gasolina ekoiztu beharko den zehaztuko duen eredu lineala eraikiko dugu.

EBAZPIDEA

- Erabaki-aldagaiak.

x_{ij} : j gasolinak ($j = A, B$) duen i esentzia-kopurua ($i = 1, 2, 3$)

- Helburu-funtzioa.

– Ekoizpen-kostua.

$$EK = 10(x_{1A} + x_{1B}) + 8(x_{2A} + x_{2B}) + 12(x_{3A} + x_{3B})$$

– Salmenta-prezioa.

$$SP = 40(x_{1A} + x_{2A} + x_{3A}) + 35(x_{1B} + x_{2B} + x_{3B})$$

$$\max (\text{irabazia}) = -EK + SP =$$

$$= 30x_{1A} + 32x_{2A} + 28x_{3A} + 25x_{1B} + 27x_{2B} + 23x_{3B}$$

- Murrizketak.

– Lehengaien erabilgarritasunari buruzkoak.

$$x_{1A} + x_{1B} \leq 2000 \quad (1 \text{ esentzia})$$

$$x_{2A} + x_{2B} \leq 3000 \quad (2 \text{ esentzia})$$

$$x_{3A} + x_{3B} \leq 1000 \quad (3 \text{ esentzia})$$

– Gasolinen kalitateari buruzkoak.

$$x_{1A} \geq \frac{50}{100}(x_{1A} + x_{2A} + x_{3A})$$

$$x_{2A} \geq \frac{30}{100}(x_{1A} + x_{2A} + x_{3A})$$

$$x_{3B} \leq \frac{30}{100}(x_{1B} + x_{2B} + x_{3B})$$

2.5 .Taula:

Eguna	Beharrezko langileak
Astelehena	20
Asteartea	15
Asteazkena	18
Osteguna	18
Ostirala	12
Larunbata	17
Igandea	10

– Ez-negatibotasunari buruzkoak.

$$x_{ij} \geq 0 \quad \forall i = 1, 2, 3 \quad \forall j = A, B$$

Adibidea. Ordutegien antolakuntza

Lantegi batean erabateko jardunaldiaz lanean arituko diren langileak behar dituzte; langile-kopuru desberdina asteko egun bakoitzerako. 2.5 .taulan datoz, hain zuzen ere, asteko egun bakoitzean behar direnak.

Langile bakoitzak 5 egun jarraietan lanean aritu ondoren 2 egunetako atsedenaldia hartu behar du, legeak hala arautzen duelako.

Guztiarekin, lantegiaren beharrei aurre egiteko behar den langile-kopuru minimoa emango duen eredu lineala zehaztatuko dugu.

EBAZPIDEA

- Erabaki-alagaiak. x_j : j egunean ($j = 1 \dots 7$) atsedenaldiaren ondoren lehen aldiz lantegiratuko den langile-kopurua. Adibidez,

x_1 astelehenean lanean hasten direnak dira eta ostiral arte lanean arituko dira.

- Helburu-funtzioa. Langile-kopuru minimoa kontratatu nahi du lantegiak.

$$\min z = x_1 + x_2 + \dots + x_7$$

- Murrizketak.

$$\begin{array}{rcll} x_1 & & +x_4 & +x_5 & +x_6 & +x_7 & \geq 20 \rightarrow \text{astelehena} \\ x_1 & +x_2 & & +x_5 & +x_6 & +x_7 & \geq 15 \rightarrow \text{asteartea} \\ x_1 & +x_2 & +x_3 & & +x_6 & +x_7 & \geq 18 \rightarrow \text{asteazkena} \\ x_1 & +x_2 & +x_3 & +x_4 & & +x_7 & \geq 18 \rightarrow \text{osteguna} \\ x_1 & +x_2 & +x_3 & +x_4 & +x_5 & & \geq 12 \rightarrow \text{ostirala} \\ & x_2 & +x_3 & +x_4 & +x_5 & +x_6 & \geq 17 \rightarrow \text{larunbata} \\ & & x_3 & +x_4 & +x_5 & +x_6 & +x_7 \geq 10 \rightarrow \text{igandea} \end{array}$$

- Ez-negatibotasun murrizketak.

$$x_j \geq 0 \quad j = 1 \dots 7$$

Adibidea. Garraio-problema

Lantegi batek bi ekoizpen-zentro du: A eta B. Bietan produktu mota bera ekoizten da, 2.000 unitate/hilabeteko lehen zentroan eta 3.000 bigarrenengoan.

Ekoizpen-zentro horietatik hiru erostetxetara saltzen dituzte ekoiztutako produktuak. Erostetxe horiek hilero 500, 3.500 eta 2.000 produktu-unitate eskatzen dituzte.

Zentroetatik erostetxeetara produktuak garraiatzeak badu bere kostua. Ikus 2.6 .taula.

2.6 .Taula: Garraio-kostuak (pta/unit)

	1	2	3
A ZENTROA	5	20	15
B ZENTROA	20	15	6

Hortaz, zein izango litzateke erostetxeen eskariei aurre egin eta burutu beharreko garraio guztiak kosturik txikienean egin ahal izateko lantegiak beharko lukeen garraio-sistema?

EBAZPIDEA

- Erabaki-aldaagaiak.

x_{ij} : i ekoizpen-zentrotik ($i = A, B$) j erostetxera garraiatzen den produktuaren unitate-kopurua ($j = 1, 2, 3$).

- Helburu-funtzioa. Banaketa-kostua ahalik eta txikien egitea.

$$\min z = 5x_{A1} + 20x_{A2} + 15x_{A3} + 20x_{B1} + 15x_{B2} + 6x_{B3}$$

- Murrizketak

- Zentroen eskaintzari buruzkoak. Zentroetan ekoitz daitekeena baino gehiago ezin daiteke sal.

$$x_{A1} + x_{A2} + x_{A3} \leq 2000$$

$$x_{B1} + x_{B2} + x_{B3} \leq 3000$$

- Erostetxeen eskariei buruzkoak. Eskariak zerbitzatu egin behar dira.

$$x_{A1} + x_{B1} \geq 500$$

$$x_{A2} + x_{B2} \geq 3500$$

$$x_{A3} + x_{B3} \geq 2000$$

– Ez-negatibotasunari buruzkoak.

$$x_{ij} \geq 0 \quad i = A, B \quad j = 1, 2, 3$$

2.5 Programazio linealaren suposaketak

Sistema erreal batek, eredu lineal batez adieraztean, proportzionaltasuna, batukortasuna, zatigarritasuna eta ziurtasuna gordetzen dituela suposatzen da. Eredua lineala izan dadin lehen bi suposaketak egitea beharrezkoa da.

1. **Proportzionaltasuna.** Ereduko k jarduera burutzen bada, ondokoak beteko dira:

(a) z -ren eraginkortasun-neurria $c_k x_k$ da.

(b) i baliabide bakoitzeko kontsumoa $a_{ik} x_k$ da.

Bi neurri horiek k jarduera mailarekiko zuzenki proportzionalak dira. Honek esan nahi du bai helburu-funtzioan baita murrizketetan ere, jarduera hasteak ez duela kostu gehigarriarik eskatzen.

2. **Batukortasuna.** Jarduera desberdinen artean elkarrekintzarik ez egotea eskatzen du batukortasunak. Horri esker, bi erabaki-aldaia ez dute inoiz biderkadura bat osatuko. Honela, batukortasunak zera eskatzen du: $(x_1 \dots x_n)$ jardueren edozein maila emanik eraginkortasunaren neurri totala eta baliabide bakoitzeko kontsumo totala, burututako jarduera bakoitzak sortutakoaren baturaren berdina izango dela. Adibidez, j eta k jarduerak burutzen direnean ondoko batugaiak agertzen dira helburu-funtzioan eta i murrizketan:

$$c_j x_j + c_k x_k$$

$$a_{ij} x_j + a_{ik} x_k$$

Aurreko bi ezaugarriak beteko ez balira, eskuartean daukagun problema ez-lineala izango litzateke. Berau ebazteko bada beste zenbait metodo zehatz.

3. **Zatigarritasuna.** Zenbait erabaki-aldaia errealitatean zentzua izan dezan balio osoa hartu beharko du. Zatigarritasunak esaten duena zera da: jarduera bakoitzeko unitateak zatigarriak direla, eta hau da, hain zuzen ere, programazio linealean lortutako soluzio optimoan sarritan gertatzen dena. Bilatzen den soluzio optimoak osoa izan behar duenean, lortutakoa biribil daiteke edo, biribilketaren emaitza egokia ez izatekotan programazio lineal osoaren prozedurak erabil daitezke.
4. **Ziurtasuna.** Ezaugarri honen arabera, ereduak a_{ij} , b_i eta c_j parametroak konstante ezagunak dira. Baina problema errealean oso gutxitan gertatzen da hori.

Parametro ezagunak dituen eredu batentzako soluzioa kalkulatzeko posible da. Denboran zehar parametroak aldatuko balira, orduan sentikortasun-analisirako teknikak erabiliko genituzke. Horiei esker, aldakorrak diren parametroak aldatzen diren heinean, une bakoitzean hartzen duen balioari dagokion soluzio optimoa lortuko da. Parametrorik sentikorrenak zein diren ere ezagutu ahal izango dugu, zehazkiago aztertutako izan daitezkeen.

2.6 Ebazpen grafikoa

Oro har, eta nahiz eta problema lineal guztiak grafikoki ebazterik ez izan, guztiek badute interpretazio geometrikorik. Problema 2 edo 3 aldagai duenean grafikoki ebaz daiteke. Metodo grafikoa interesgarria da berari esker programazio linealeko kontzeptu garrantzitsuak grafikoki ikus daitezkeelako. Hori ikusteko zenbait eredu grafikoki ebaztuko dugu.

Adibidea. Soluzio Optimo Bakarreko ereduak

Demagun ondoko problema lineala.

$$\max z = 15x_1 + 10x_2$$

ondoko murrizketen menpe

$$2x_1 + 4x_2 \leq 44$$

$$-x_1 + 4x_2 \leq 20$$

$$2x_1 - x_2 \leq 14$$

$$x_1 - 3x_2 \leq 2$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

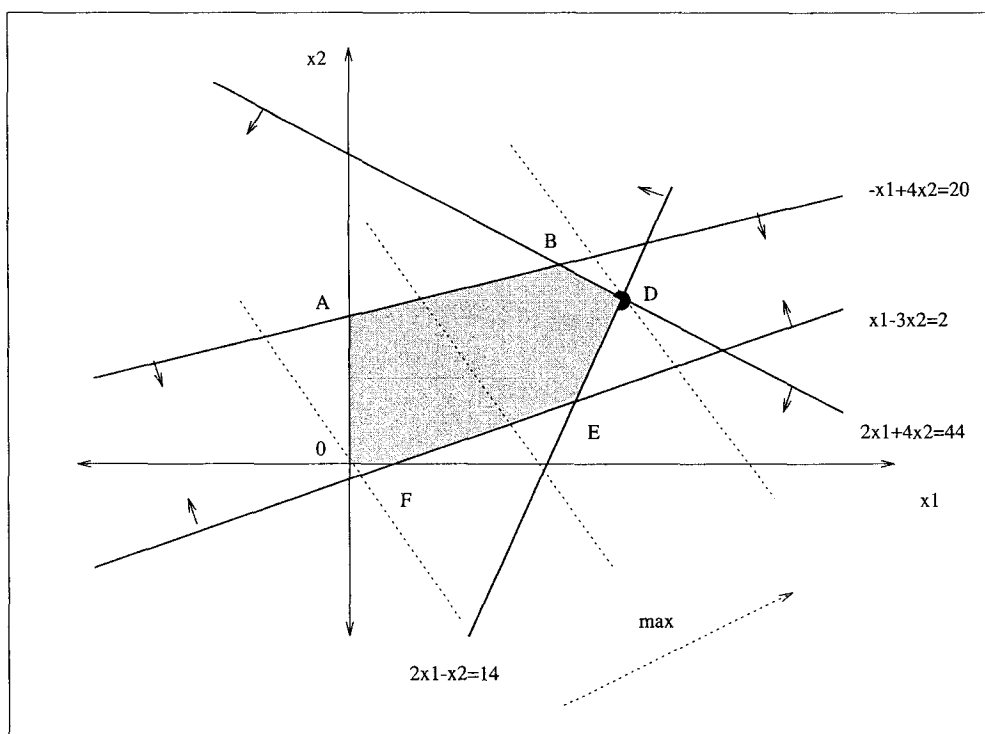
Gure helburua zera da: helburu-funtzioa maximoa izan dadin x_1 eta x_2 erabaki-aldagaiek zein balio hartu beharko duten zehaztea.

EBAZPIDEA

Murrizketek mugatzen duten azalera marraztuko dugu koordenatu sistema batean. Ereduaren murrizketa bakoitza erdiespazioa da. Honela, lehen murrizketak, $2x_1 + 4x_2 \leq 44$, mugatutako erdiespazioa marrazteko $2x_1 + 4x_2 = 44$ zuzena irudikatzen da. Zuzen honek plano bi erdiespaziotan banatzen du eta horietariko bat izango da murrizketak mugatzen duena (zuzena bera barne murrizketa berdintasunez ere betetzen baita). Irudian gezien bidez bereizten da. (Ikus 32. orriko irudia).

Gainontzeko hiru murrizketentzat ere gauza bera eginez soluzioen multzoaren adierazpen grafikoa lortzen da.

Puntuz bete dugun azalera soluzio-puntuen multzoa da, bertako puntuek murrizketa guztiak betetzen dituztelako. 0ABDEF poligonoa multzo ganbila da. Aurrerago frogatuko dugunez, edozein eredu linealerako soluzio-multzoa multzo ganbila da eta soluzio optimoa multzo ganbilaren mutur-puntua da. Aurreko adibidean 0,A,B,D,E eta F dira soluzio-multzoaren mutur-puntuak. Puntu horiek kalkulatzeko, zuzenen arteko ebakidura puntuak aurkitu behar dira eta $z = 15x_1 + 10x_2$ optimo egiten duen puntua (maximo gure kasuan) izango da bilatzen dugun soluzio optimoa.



Puntuak hauek dira:

$$A = (0 \ 5) , \ B = (8 \ 7) , \ D = (10 \ 6)$$

$$E = (8 \ 2) , \ F = (2 \ 0) , \ 0 = (0 \ 0)$$

z helburu-funtzioak D puntuan lortzen duela balio optimoa egiazta daiteke ($z = 210$). Grafikoki ere ikus daiteke $0, A, B, D, E$ eta F puntuen artetik zein den soluzio optimoa, horretarako guztien balioak kalkulatu beharrik izan gabe. $z = 15x_1 + 10x_2$ zuzena irudikatzen da z -ri balio finkoren bat emanez. Soluzioen eskualdean zehar zuzena desplazatzen da optimizatzeak eskatzen duen norantza jarraituz. Kasu honetan, jatorri-puntutik urrunduz z -ren balioa handitzen da.

Soluzio optimoa:

$$\left. \begin{array}{l} 2x_1 + 4x_2 = 44 \\ 2x_1 - x_2 = 14 \end{array} \right\} \rightarrow D = (10, 6)$$

$$z^* = 15 \cdot 10 + 10 \cdot 6 = 210$$

Honek zera esan nahi du: x_1 eta x_2 erabaki-aldaiaiek $x_1 = 10$ eta $x_2 = 6$ balioak hartzean helburu-funtzioak balio maximoa lortuko duela. Irabazi maximoa $z^* = 210$ -ekoa da.

Adibidea. Aukerazko Soluzio Optimoak edo Soluzio Optimo Anizkoitzak dituen problema lineala.

Demagun ondoko eredu lineala eraiki dugula:

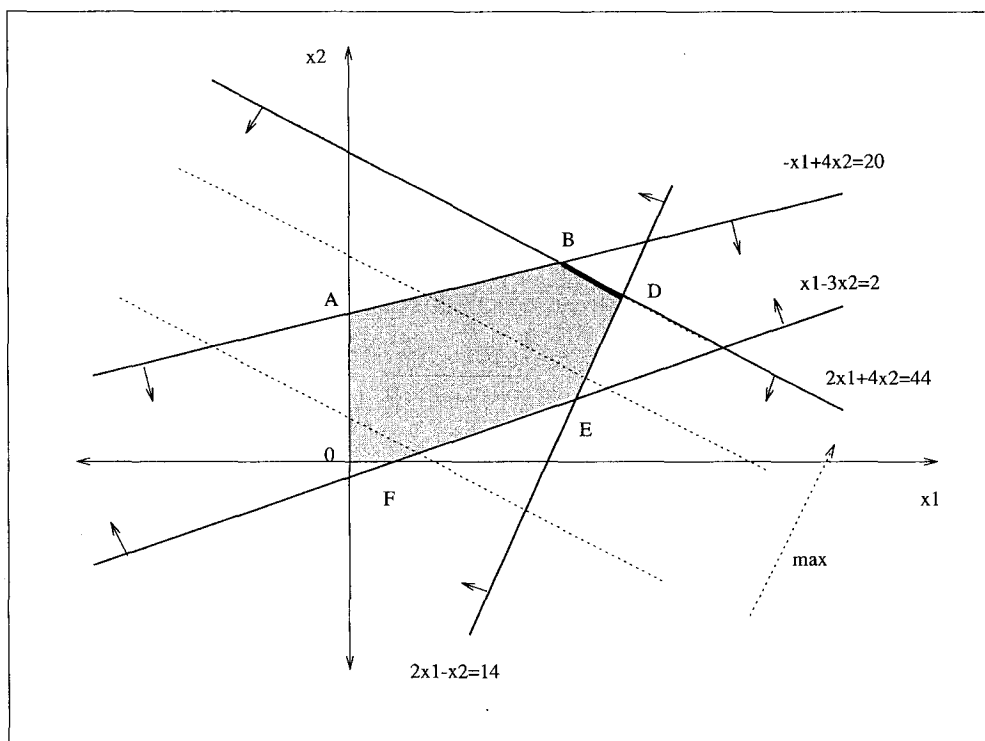
$$\begin{aligned} \max z &= 2x_1 + 4x_2 \\ \text{ondoko murrizketen menpe} \\ 2x_1 + 4x_2 &\leq 44 \\ -x_1 + 4x_2 &\leq 20 \\ 2x_1 - x_2 &\leq 14 \\ x_1 - 3x_2 &\leq 2 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Adibide honetako soluzio-puntuen multzoa eta aurreko adibidekoa multzo berbera direla ikus daiteke, murrizketak berberak direlako. Baina helburu-funtzioa aldatu egin dugu. z -ri balio bat emanez irudikatzen da helburu-funtzioa eta optimizazioak eskatzen duen norantzan zuzena desplazatuz **BD** segmentura iristen da. (Ikus 34. orriko irudia).

BD segmentua osatzen duten puntu guztiek balio optimoa ematen diote helburu-funtzioari. Geroago frogatuko dugunez, eredu linealak mutur-puntu optimo bat baino gehiago duenean problemak soluzio-kopuru infinitua du.

$$z^* = 2 \cdot 10 + 4 \cdot 6 = 44, \quad z^* = 2 \cdot 8 + 4 \cdot 7 = 44$$

B eta D puntuetan z funtzioak balio berbera hartzen du eta baita segmentuaren puntu guztietan ere.



Adibidea. Soluziorik gabeko problema.

Demagun ondoko eredua:

$$\max z = x_1 + x_2$$

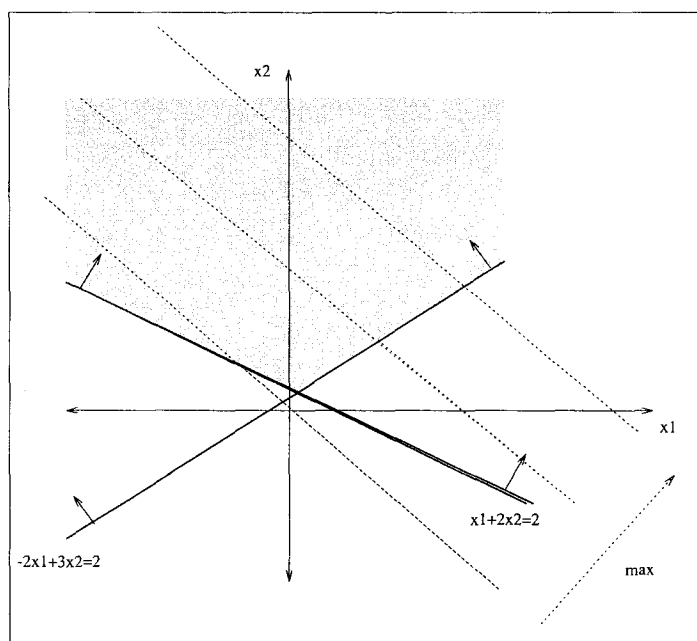
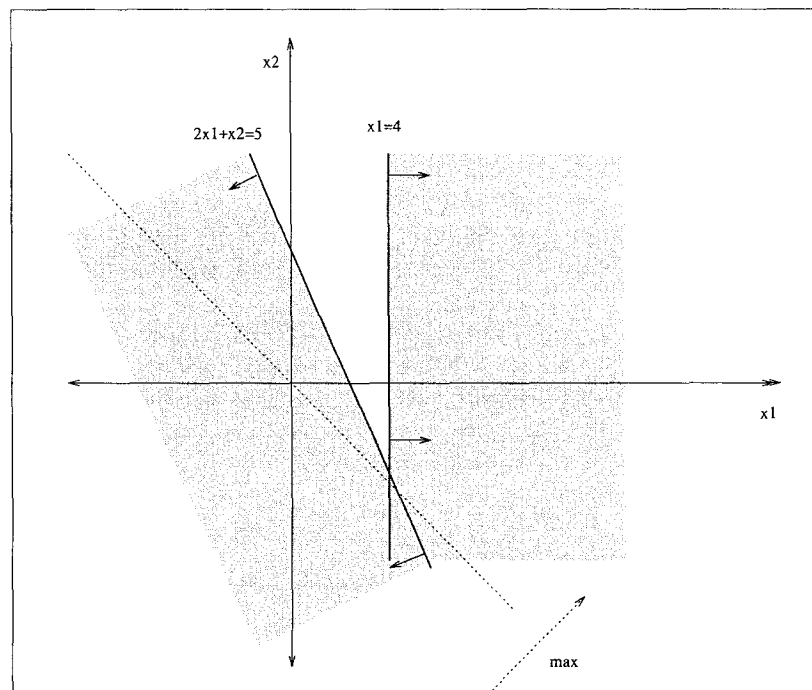
ondoko murrizketen menpe

$$2x_1 + x_2 \leq 5$$

$$x_1 \geq 4$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Murrizketek eta ez-negatibotasun murrizketek definitutako eskualdeen arteko ebakidura punturik existitzen ez dela ikus daiteke. Beraz, problema honek ez dauka soluziorik. (Ikus 35.orriko goiko irudia).



Adibidea. Bornegabeko soluzioen eskualdea.

Izan bedi honako problema:

$$\max z = 10x_1 + 12x_2$$

ondoko murrizketen menpe

$$x_1 + 2x_2 \geq 2$$

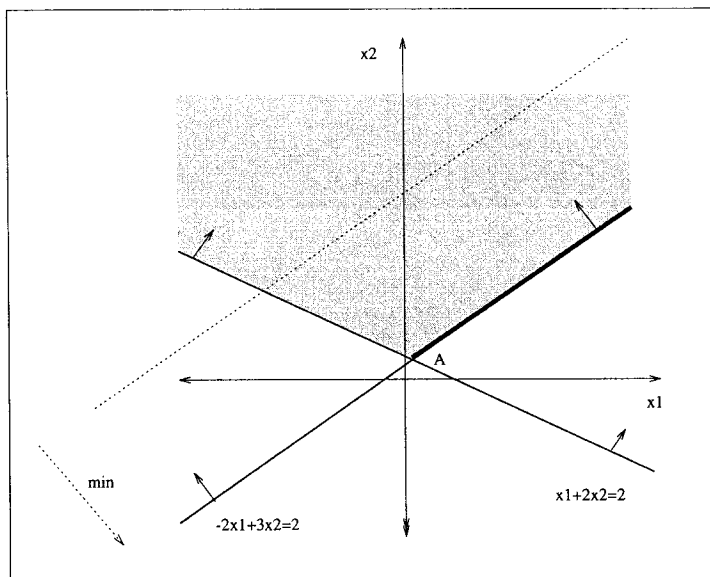
$$-2x_1 + 3x_2 \geq 2$$

x_1, x_2 : ez-murriztuak

Helburu-funtzioa infinituraino haz daiteke. Ez dauka, beraz, soluziorik problema honek, edo esan daiteke soluzio bornegabea duela. (Ikus 35.orriko beheko irudia).

Problema erreal batean bornegabeko soluzioa lortzea, hau da, baliabideak mugatuta daudenean helburu-funtzioak infiniturantz jotzeak ez dirudi oso logikoa. Horrelakoak gertatzen direnean problema ebazteko eraiki den eredua berrikusi beharko dugu, agian murrizketak idaztean erroreak gertatu direlako edo problema ebazteko garrantzitsua izan daitekeen beste zenbait murrizketa kontutan hartua izan ez delako.

Bornegabeko soluzioarekin topo egiteko derrigorrezkoa da soluzioen multzoa bornegabea izatea. Hala ere, beharrezko baldintza bada ere, ez da nahikoa, honelako multzoetan soluzio bornatuak egon daitezke eta. Begira, bestela, aurreko problemaren helburu-funtzioa aldatu eta beste $\min z = -2x_1 + 3x_2$ funtzioaz ordezkatzuz gero lortzen duguna:



2.7 .Taula:

	HONDAKIN TONA GARBITZEAREN KOSTUA	1.KUTSAG. BEHERAP.	2.KUTSAG. BEHERAP.
1-LANT.	20.000 pta	0.5 tona	0.2 tona
2-LANT.	15.000 pta	0.1 tona	0.1 tona
3-LANT.	35.000 pta	0.3 tona	0.15 tona

Adierazpen grafiko horretan A puntuan hasten den zuzenerdiaren puntu guztiak soluzio dira. Puntu horietan z funtzioak 2 balioa hartzen du.

2.7 Ariketak

1. Ondoko problemen eredu linealak idatz itzazu:

- (a) Hiritik gertu hiru lantegi aurkitzen dira: 1-lantegia, 2-lantegia eta 3-lantegia. Lantegi hauek, eguneroko ekoizpen-prozesuaren eraginez sortutako hondakinak bertako ibaira botatzen dituzte. Hondakinak kutsagarriak dira, eta herriko alkateak mehatxu egin die: jaurtikitako hondakin kutsagarriak maila onargarritik gorakoak balira, 1.000.000 ptako izuna ordaindu beharko lukete.

Zorionez, kutsadura maila onargarrian mantentzea posible da. Horretarako, sortutako hondakinek garbitze-prozesua gainditu beharko dute. Honi esker, hondakinen bi kutsagai nagusien kopurua txikitzea lortuko da. Garbitze-prozesuaren kostua eta prozesuaren ondorioz lortutako kutsagai bakoitzeko beherapena 2.7 .taulan datoz adieraziak.

- i. Kutsagai bakoitza 40 tona jaitsi nahi da. Horrek eskatzen duen garbitze-prozesuaren kostua ahalik eta txikiena izan dadin eredu lineala idatz ezazu.

2.8 .Taula:

PROD.	HILEKO BEHARRAK	EROSTE PREZIOA	SALMENTA PREZIOA	BILTEG. ESPAZIOA
A	1000 unit	60 pta/unit	100 pta/unit	5 dm^3 /unit
B	800 unit	100 pta/unit	150 pta/unit	6 dm^3 /unit
D	750 unit	90 pta/unit	140 pta/unit	8 dm^3 /unit
E	1100 unit	200 pta/unit	280 pta/unit	3 dm^3 /unit
F	2000 unit	30 pta/unit	50 pta/unit	10 dm^3 /unit

ii. Demagun kutsadura maila jaisteko udaletxeak 5 milioi ptako dirulaguntza eman duela. Kutsadura ahalik eta txikiena izan dadin lantegi bakoitzak diru hori erabiliz garbitu beharko duen tona-kopurua zehaztuko duen eredu lineala idatz ezazu.

- (b) Denda batek bere bezeroen eskariei aurre egiteko 5 produktu erosi behar ditu. Hilero behar den produktu bakoitzeko kopurua, produktu-unitate bakoitzaren kostua, produktu bakoitzaren salmenta prezioa eta beharrezko biltegi-erazte-espazioa 2.8 . taulan adierazitakoak dira.

Dendak 700.000 pta inberti ditzake eta 60.000 dm^3 erabil ditzake produktuak gordetzeko. Hileko beharrak betetzeko erositako produktuez gain erositako produktuek % 10-eko beherapena izango dute.

Dendak hilean behin erosten ditu hileko eskariei aurre egin ahal izateko beharrezko produktuak, baina ez du inoiz 2 hilabete baino gehiagorako erosiko.

Irabazia ahalik eta handiena izan dadin eredu lineala eraiki ezazu.

- (c) Lantegi batek hurrengo lau hiruhilabeteetan eraikiko duen txalupa-kopurua finkatu behar du, eskaria 40, 60, 75 eta 25 txalupakoa dela jakinda. Hiruhilabetealdi bakoitzeko eskaria zerbitzatu egin behar du lantegiak. Lehen hiruhilabetearen

hasierako inbentarioa 10 txalupakoa da eta bakoitzaren hasieran hiruhileko ekoizpena erabaki beharko da. Gauzak erraztearren, hiruhilabeteko batean eraikitako txalupak hiruhilabeteko horretako eskariari aurre egiteko baliagarriak direla suposatzen da. Hiruhilabeteko bakoitzeko ohizko ekoizpena 40 txalupakoa da, eta kostua 40.000 pta/txalupa da. Hala ere, ekoizpen-gehigarria erabiltzea posible da, honela lortutako txalupen kostua 45.000 ptakoa izango delarik.

Hiruhilabeteko bakoitzaren amaieran (ekoiztu eta hiruhilabetaldiaren eskariak bete ondoren) biltegiatzen den txalupen biltegiatze-kostua 2.000 ptakoa da itsasuntziko.

Ekoizpena kosturik txikienean antolatze-eredu lineala eraiki ezazu.

- (d) Lantegi batek bi lurrin mota sortzen du: Brute lurrina eta Chanelle lurrina. Lurrin mota bakoitza ekoizteko behar diren lehengaien kostua 60 pta/Kg-koa da. Lehengai kiloak lantzeko 2 laborategi-ordu behar da. Lantzen den lehengai kiloko 200 gr Brute lurrin eta 250 gr Chanelle lurrin erartortzen da; lurrinen salneurriak 25 pta/gr eta 20 pta/gr dira, hurrenez hurren.

Behin bi lurrin mota horiek lortu dituenean, lantegiak birfinketa-prozesuaren bidez luxuzko Brute lurrina (60 pta/gr salneurriduna) eta luxuzko Chanelle lurrina (50 pta/gr salneurriduna) lortzeko aukera du. Birfinketa prozesuan birfintzen den Brute lurrin gramo 1-ek laborategi-ordu 1 behar du eta 12 ptako kostua izango du; luxuzko Brute lurrin gramo 1 lortzen da. Birfindutako Chanelle lurrin gramo 1-ek 0.5 laborategi-ordu eskatzen du eta 12 ptako prozesatze-kostua sortzen du, luxuzko Chanelle lurrin gramo 1 lortuko delarik.

Urtean 4.000 laborategi-ordu dago erabilgarri lantegian eta 2.000 Kg lehengai eros dezake. Lantegiari irabaziak maximizatzen lagunduko dion eredu lineala eraiki ezazu. Laborategi-orduen kostua finkotzat har ezazu.

2. Ondoko eredu linealak grafikoki ebatz itzazu:

(a)

$$\max z = x_1 + 2x_2$$

ondoko murrizketen menpe

$$x_1 - x_2 \geq 3$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 1$$

$$x_2 \leq 5$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

(b)

$$\min z = 4x_1 - x_2$$

ondoko murrizketen menpe

$$x_1 + x_2 \leq 4$$

$$x_1 - x_2 \leq 6$$

$$x_1 + x_2 \geq 1$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

(c)

$$\max z = x_1 + x_2$$

ondoko murrizketen menpe

$$x_1 + x_2 \leq 6$$

$$x_1 + 2x_2 \geq 2$$

$$3x_1 - 4x_2 \geq -1$$

$$x_1 - x_2 \leq 2$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

(d)

$$\max z = x_1 + 3x_2$$

ondoko murrizketen menpe

$$x_1 - 2x_2 \leq 2$$

$$x_1 + 2x_2 \geq 4$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

(e)

$$\max z = x_1 - 2x_2$$

ondoko murrizketen menpe

$$x_1 - 2x_2 \leq 2$$

$$x_1 + 2x_2 \geq 4$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

3. Gaia

ALJEBRA LINEALA ETA MULTZO GANBILAK

Programazio linealaren garapenean aljebra linealeko eta multzo ganbiletako zenbait kontzeptu erabiltzen da. Hori dela eta, datozen gaiak ondo ulertzeko beharrezko gertatuko zaizkigun definizioak, propietateak eta teoremak aztertuko ditugu gai honetan.

3.1 Aljebra Lineala

3.1.1 Bektoreak

Demagun $\mathbb{R}$ -ren gain definituriko $\mathbb{R}^n$ bektore-espazioa, zeinean bektore arteko batuketa eta bektore eta eskalare arteko biderkaketa definiturik dauden.

$\mathbb{R}^n$ -ko bektorea honela adierazten da:

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

3.1.2 Bektore-eragiketak

1. **Batuketa.** $\mathbf{x}$ eta $\mathbf{y}$ bektoreen arteko batuketa beste bektore bat

da, zeinaren osagaiek ondokoa betetzen duten: $z_i = x_i + y_i \quad \forall i$. Eragiketa honek trukatzeko-propietatea eta elkartze-propietatea betetzen ditu.

Adibidea:

Izan bitez ondorengo bi bektoreak:

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{eta} \quad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$\mathbf{x}$ eta $\mathbf{y}$ bektoreen arteko batuketa:

$$\mathbf{z} = \mathbf{x} + \mathbf{y} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

□

2. **Bektore eta eskalare arteko biderkaketa.** $\mathbf{x}$ bektore baten eta λ eskalare baten arteko biderkaketa $\mathbf{y} = \lambda \mathbf{x}$ moduko bektorea da non $y_i = \lambda x_i \quad \forall i$. Bektore baten eta eskalare baten arteko biderkaketak batuketarekiko banatze-propietatea betetzen du.

Adibidea:

Izan bitez $\mathbf{x}$ bektorea eta λ eskalarea:

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \lambda = 2$$

Beraien arteko biderkaketa honela kalkulatzeko da:

$$\lambda \mathbf{x} = 2 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 8 \\ -2 \end{pmatrix}$$

□

3. Bi bektoreen arteko biderkadura eskalarra

$$\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \quad \mathbf{x}^T \cdot \mathbf{y} = (x_1 \dots x_n) \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

Bi bektoreen arteko biderkadura eskalarra zenbaki erreala da.

Adibidea:

Har ditzagun bi bektore hauek:

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{eta} \quad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Bektoreen arteko biderkadura eskalarra

$$\mathbf{x}^T \cdot \mathbf{y} = (3 \ 2 \ -1) \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix} = 3 \cdot 2 + 2 \cdot (-4) + (-1) \cdot 5 = -7$$

Ikus daitekeenez, bi bektoreen arteko biderkadura eskalarra zenbaki erreala da.

□

3.1.3 Menpekotasun eta independentzia lineala. Oinarria

Definizioa 3.1.1 (Konbinazio lineala) Baldin $y \in \mathbb{R}^n$ bektorea ondoko erara idazterik baldin badago:

$$y = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n$$

orduan $y \in \mathbb{R}^n$ bektorea $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}^n$ bektoreen arteko konbinazio lineala dela esaten da, $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ eskalareak izanik.

Adibidea:

Izan bitez bektore hauek:

$$x = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad x_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

x bektorea, x_1 eta x_2 bektoreen konbinazio lineal moduan idatz daiteke:

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -4 \end{pmatrix}$$

□

Definizioa 3.1.2 (Menpekotasun lineala) $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \dots \mathbf{x}_n \in \mathbb{R}^n$ bektore multzoa linealki menpekoak direla esaten da baldin eta ondokoa betetzen duten α_i eskalareak existitzen badira, guztiak batera zero ez izanik.

$$\alpha_1 \mathbf{x}_1 + \alpha_2 \mathbf{x}_2 + \dots + \alpha_n \mathbf{x}_n = \mathbf{0}$$

Adibidea:

Izan bitez ondorengo bektoreak:

$$\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Linealki menpekoak al dira?

$$\begin{aligned} \alpha_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Sistemaren bi bektoreak linealki menpekoak dira, zeren eta:

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = 0$$

Horregatik, sistemak $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ soluzioa izateaz gain beste infinitu soluzio du.

□

Definizioa 3.1.3 (Independentzia lineala) $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \dots \mathbf{x}_n \in \mathbb{R}^n$ bektoreak emanik, baldin eta

$$\alpha_1 \mathbf{x}_1 + \alpha_2 \mathbf{x}_2 + \dots + \alpha_n \mathbf{x}_n = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$$

betetzen bada, orduan $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \dots \mathbf{x}_n$ bektoreak linealki independenteak dira.

Adibidea:

$\mathbf{x}_1$ eta $\mathbf{x}_2$ datozen bektoreak izanik beren arteko menpekotasun lineala aztertuko dugu.

$$\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Konbinazio lineala aztertu beharko dugu:

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = 0 ?$$

Aska ditzagun α_1 eta α_2 :

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{11} \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Beraz, linealki independenteak dira.

Definizioa 3.1.4 (Multzo sortzailea) $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \dots \mathbf{x}_n\}$ $\mathbb{R}^n$ -ko bektore-multzoa multzo sortzailea da baldin $\forall \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ bektore $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \dots \mathbf{x}_n\}$ bektoreen konbinazio lineal moduan idazterik baldin badago, hau da,

$$\exists \alpha_1 \dots \alpha_n \quad \mathbf{y} = \alpha_1 \mathbf{x}_1 + \dots + \alpha_n \mathbf{x}_n$$

Definizioa 3.1.5 (Oinarria) $\mathbb{R}^n$ bektore-espazio bateko oinarri bat, espazio barnekoa den eta ondoko baldintzak betetzen dituen $\{\mathbf{x}_1 \dots \mathbf{x}_n\}$ bektore-multzoa da.

1. Linealki independenteak izatea.

2. Espazioaren multzo sortzailea izatea.

Definizioa 3.1.6 (Dimentsioa) *Bektore-espazio baten dimentsioa oinarria osatzen duten bektore-kopurua da.*

Kontutan izan behar da, oinarri guztiek bektore-kopuru berbera dutela.

Teorema 3.1.1 *Bektore-espazioko edozein bektore oinarriko bektoreen konbinazio lineal moduan idatzia izan daiteke. Gainera, konbinazio lineal hori bakarra da.*

Teorema 3.1.2 *Demagun $\mathbb{R}^n$ -ko B oinarria daukagula. Oinarri hone-tatik abiatuz beste oinarri bat lortzea posible da. B oinarrikoa ez den eta zero ez den $\mathbf{w}$ bektorea izanik, beti existitzen da B oinarrian bektoreen bat zein $\mathbf{w}$ bektoreaz ordezkaturia izan daitekeen, beti ere aldaketa egin ondoren lortzen den bektore-multzoa ere oinarri izango delarik.*

Ez dugu teorema honen frogapena garatuko, baina garatuko bagenu, oinarriko zein bektore ordezkaturia izan daitekeen ikusiko genuke. Ikus dezagun adibide baten bidez.

Adibidea:

Izan bedi bektore multzo hau:

$$B = \left\{ \mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{x}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

(a) $\mathbb{R}^3$ -ko oinarri dela egiaztatuko dugu:

$$|B| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$$

Ondorioz, $\exists B^{-1}$ eta $\alpha_1 \mathbf{x}_1 + \alpha_2 \mathbf{x}_2 + \alpha_3 \mathbf{x}_3 = \mathbf{0}$ sistemak soluzio bakarra du: $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$. Bektoreak linealki independenteak direla esan nahi du horrek. $\mathbb{R}^3$ -n 3 bektore linealki independente aurkitu ditugunez, oinarria badaukagu.

- (b) B oinarriko bektoreak $\mathbf{v}$ bektoreaz ordezkatzuz beste oinarri batzuk lortuko ditugu:

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

B -ko bektoreen konbinazio lineal moduan idatz daiteke $\mathbf{v}$ bektorea.

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Sistema ebatziz, $\alpha_1 = 3$, $\alpha_2 = -5$, $\alpha_3 = 0$ lortzen da.

B oinarria izanik, eta B oinarriarekiko $\mathbf{v}$ bektorearen koordenatuak ezagunak izanik, ondorengo bi oinarriak eraikitzea posible izango zaigu:

$$B' = \{\mathbf{v}, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3\} \quad , \quad B'' = \{\mathbf{x}_1, \mathbf{v}, \mathbf{x}_3\}$$

$\mathbf{x}_3$ bektorea ezin daiteke $\mathbf{v}$ bektoreaz ordezkaturik izan, $\alpha_3 = 0$ delako.

□

3.1.4 Matrizak

Definizioa 3.1.7 (Matrizak) $m \times n$ ordenako A matrizea ondoko forma duen adierazpena da:

$$A_{m \times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \vdots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

• Matriz-eragiketak:

1. Berdintasuna. $A = B$ baldin $a_{ij} = b_{ij} \quad \forall i, j$
2. Batuketa. $C = A + B$, $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \quad \forall i, j$
3. Eskalare eta matrize arteko biderkaketa.

$$\lambda A = B \quad b_{ij} = \lambda a_{ij} \quad \forall i, j$$

4. Matrize arteko biderkaketa.

$$C = A \cdot B, \quad c_{ij} = \sum_{h=1}^n a_{ih} b_{hj} = a_{i1} b_{1j} + \cdots + a_{in} b_{nj}$$

A $m \times n$ dimentsioko matrizea bada eta B $n \times r$ dimentsiokoa, orduan C $m \times r$ dimentsiokoa izango da. Biderkaketa egin ahal izateko beharrezkoa da A-ren zutabe-kopurua eta B-ren lerro-kopurua kopuru berbera izatea.

Definizioa 3.1.8 (Heina) Matrize baten heina, linealki independenteak diren matrizearen zutabe-kopuru edo lerro-kopuru maximoa da.

Froga daiteke matrizean linealki independente diren lerro-kopuru maximoa eta zutabe-kopuru maximoa kopuru berbera direla.

Teorema 3.1.3 A matrizearen heina k da baldin eta soilik baldin $k+1$ ordenako A matrizearen azpideterminante guztiak zero badira eta gutxienez zero ez den k ordenako azpideterminante bat existitzen bada. Idazkera: $\text{rg}(A) = k$

Adibidea:

Ondorengo matrizearen heina kalkulatuko dugu:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & -2 \end{pmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & -2 \end{vmatrix} = 0$$

Heina ez da 3.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 6 = -5 \neq 0 \Rightarrow rg(A) = 2$$

□

3.1.5 Ekuazio linealen sistemak. Soluzioak.

Demagun $Ax = b$ sistema lineala, A $m \times n$ matrizea izanik. Sistemak soluziorik izan dezan beharrezkoa eta nahikoa da $rg(A) = rg(Ab)$ izatea.

- Baldin $rg(A) = rg(Ab) = \text{ezezagun-kopurua} \Rightarrow$ Soluzio bakarra du sistemak
- Baldin $rg(A) = rg(Ab) < \text{ezezagun-kopurua} \Rightarrow$ Sistemak infinitu soluzio du

Demagun $Ax = b$ sistema non A $m \times n$ matrizea den $m < n$ izanik, eta ekuazio guztiak nagusiak diren (linealki independenteak). Esan dugunez, sistema honek infinitu soluzio du.

$$rg(A) = rg(Ab) = m$$

Baldin B m ordenako azpideterminantea bada, zeinaren zutabe guztiak linealki independenteak diren, sistema honela berridaztea posible da:

$$B\mathbf{x}_B + R\mathbf{x}_R = \mathbf{b}$$

B -ko zutabeek $\mathbb{R}^m$ -ren oinarria osatzen dute, $|B| \neq 0$ delako. Beraz, $\mathbf{x}_B$ kalkula daiteke. Horretarako, ekuazioaren bi atalak B^{-1} -ez biderkatuko ditugu:

$$B^{-1}B\mathbf{x}_B + B^{-1}R\mathbf{x}_R = B^{-1}\mathbf{b}$$

$$\mathbf{x}_B = B^{-1}\mathbf{b} - B^{-1}R\mathbf{x}_R$$

$$\mathbf{x}_R \in \mathbb{R}^{n-m} \Rightarrow \text{infinitu balio har dezake}$$

Edozein oinarritarako infinitu soluzio lortu ahal izango dugu. Baina, guri ez zaizkigu soluzio guzti horiek interesatzen. Guk $\mathbf{x}_R = \mathbf{0}$ balioa finkatuta lortutako $\mathbf{x}_B$ soluzioak nahi ditugu. Nagusi ez diren ezezagunei zero balioa emanda ondoko soluzioa lortzen da:

$$\mathbf{x}_B = B^{-1}\mathbf{b} - B^{-1}R\mathbf{x}_R$$

$$\mathbf{x}_R = \mathbf{0} \text{ eginez} \Rightarrow \boxed{\mathbf{x}_B = B^{-1}\mathbf{b}}$$

Honela, $\mathbf{x}_R$ -ri balio bakarra emango diogu eta $\mathbf{x}_B$ -ri *oinarriko soluzio* izena emango diogu. Oinarri bakoitzerako lor daiteke oinarriko soluzioa.

Zenbat oinarri desberdin har daiteke? m lerrodun eta n zutabedun matrize baten $m \times m$ matrize desberdinen kopuru maximoa ($m < n$), hau da, A matrizearekin osa daitezkeen $B_{m \times m}$ matrizeak bezain beste:

$$\binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

Oinarri bakoitzari oinarriko soluzio bakarra dagokionez, hau oinarriko soluzio-kopuru maximoa da baita. Maximoa da, horietako B matrizearen baten determinantea zero izatekotan B oinarri izango ez delako. Ziurra dena zera da: oinarriko soluzio-kopurua finitua dela.

Adibidea:

Honako sistemaren oinarriko soluzio bat kalkulatuko dugu.

$$\begin{aligned}2x_1 - x_2 + 3x_3 &= 2 \\ x_1 + x_2 - x_3 &= 4\end{aligned}$$

Matrize bat:

$$B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Matrize honen determinantea ez da zero. Beraz, oinarria da.

$$\begin{aligned}2x_1 - x_2 &= 2 - 3x_3 \\ x_1 + x_2 &= 4 + x_3\end{aligned}$$

$x_3 = 0$ eginez, oinarriko soluzioa lortuko dugu.

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Problema honek duen oinarriko soluzio-kopuru maximoa hau da:

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{3!}{2!(3-2)!} = 3$$

Egiazta daiteke beste bi matrizeen determinantea zeroren desberdina dela, eta beraz, oinarriko soluzioak ematen dituztela, hau da

$$\mathbf{x}_B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{x}_B = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

□

3.2 Multzo ganbilak

3.2.1 Zuzen baten ekuazioa

$\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \mathbb{R}^2$ bi puntu emanik $\mathbf{x}_1 \neq \mathbf{x}_2$ izanik, bi puntuek definituriko zuzenaren ekuazioa $\mathbf{x} = \mathbf{x}_1 + \lambda(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1) \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$ da. Ondoko eran ere idatz daiteke.

$$\mathbf{x} = \lambda \mathbf{x}_2 + (1 - \lambda) \mathbf{x}_1$$

Beraz, $\mathbf{x}_1$ eta $\mathbf{x}_2$ puntuek deskribatutako zuzenaren ekuazioa ondoko multzoaren bidez adieraz daiteke:

$$R = \{\mathbf{x} / \mathbf{x} = \lambda \mathbf{x}_2 + (1 - \lambda) \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \mathbb{R}^2, \mathbf{x}_1 \neq \mathbf{x}_2, \lambda \in \mathbb{R}\}$$

Definizio hau $\mathbb{R}^n$ -rako orokortuz zuzen baten ekuazioa lortzen da $\mathbb{R}^n$ espazioan:

$$R = \{\mathbf{x} / \mathbf{x} = \lambda \mathbf{x}_2 + (1 - \lambda) \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \mathbb{R}^n, \mathbf{x}_1 \neq \mathbf{x}_2, \lambda \in \mathbb{R}\}$$

3.2.2 Segmentuak

$\mathbb{R}^2$ -n, $\mathbf{x}_1$ eta $\mathbf{x}_2$ bi puntu elkartzen dituen segmentua ondoko S multzoaren bidez adieraz daiteke:

$$S = \{\mathbf{x} / \mathbf{x} = \lambda \mathbf{x}_2 + (1 - \lambda) \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \mathbb{R}^2, \mathbf{x}_1 \neq \mathbf{x}_2, 0 \leq \lambda \leq 1\}$$

Definizioa $\mathbb{R}^n$ -rako orokortuz, $\mathbb{R}^n$ -n bi puntu elkartzen dituen segmentua:

$$S = \{\mathbf{x} / \mathbf{x} = \lambda \mathbf{x}_2 + (1 - \lambda) \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \mathbb{R}^n, \mathbf{x}_1 \neq \mathbf{x}_2, 0 \leq \lambda \leq 1\}$$

3.2.3 Hiperplanoak eta erdiespazioak

- $\mathbb{R}^2$ -n $\rightarrow c_1, c_2$ eta z balioak emanik $c_1 x_1 + c_2 x_2 = z$ zuzen baten ekuazioa da. 1 dimentsioko azpiespazioa da planoan; hiperplano izena hartzen du.
- $\mathbb{R}^3$ -n $\rightarrow c_1, c_2, c_3$ eta z emanik $c_1 x_1 + c_2 x_2 + c_3 x_3 = z$ plano baten ekuazioa da. 2 dimentsiokoa da, 3 dimentsioko espazioan; hiperplanoa da.

- Oro har , $\mathbb{R}^n \rightarrow c_1, c_2 \dots c_n$ eta z emanik $c_1x_1 + \dots + c_nx_n = z$ hiperplano baten ekuazioa da.

$\mathbf{c}^T \mathbf{x} = z$ hiperplanoak elkarrekiko baztertzaileak diren hiru eskualdetan banatzen du espazioa.

1. $\{\mathbf{x}/\mathbf{c}^T \mathbf{x} < z\}$ erdiespazio irekia.
2. $\{\mathbf{x}/\mathbf{c}^T \mathbf{x} = z\}$ hiperplano bera.
3. $\{\mathbf{x}/\mathbf{c}^T \mathbf{x} > z\}$ erdiespazio irekia.

Ondokoak erdiespazio itxiak dira:

$$\{\mathbf{x}/\mathbf{c}^T \mathbf{x} < z\} \cup \{\mathbf{x}/\mathbf{c}^T \mathbf{x} = z\} = \{\mathbf{x}/\mathbf{c}^T \mathbf{x} \leq z\}$$

$$\{\mathbf{x}/\mathbf{c}^T \mathbf{x} = z\} \cup \{\mathbf{x}/\mathbf{c}^T \mathbf{x} > z\} = \{\mathbf{x}/\mathbf{c}^T \mathbf{x} \geq z\}$$

3.2.4 Multzo ganbilak: definizioak

Definizioa 3.2.1 (Konbinazio lineal ganbila) $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \mathbb{R}^n$ bi puntu izan bitez.

$$\mathbf{x} = \lambda \mathbf{x}_2 + (1 - \lambda) \mathbf{x}_1, \quad 0 \leq \lambda \leq 1$$

idatzi badaiteke, orduan $\mathbf{x}$ puntua $\mathbf{x}_1$ eta $\mathbf{x}_2$ puntuen konbinazio lineal ganbila dela esaten da eta $\mathbf{x}_1$ eta $\mathbf{x}_2$ puntuak lotzen dituen segmentua da.

Baldin $0 < \lambda < 1$ betetzen bada, konbinazioari konbinazio lineal ganbil murritzua esaten zaio.

Definizioa 3.2.2 (Multzo ganbila) X multzoa multzo ganbila da baldin $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in X$ puntu-bikote ororentzat, $\mathbf{x}_1 \neq \mathbf{x}_2$ izanik, konbinazio lineal ganbila

$$\mathbf{x} = \lambda \mathbf{x}_2 + (1 - \lambda) \mathbf{x}_1, \quad 0 \leq \lambda \leq 1$$

ere multzokoa bada.

Definizioa 3.2.3 (Mudur-puntua) X multzo ganbilaren $\mathbf{x}$ puntua mudur-puntua da baldin $\nexists \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in X, \mathbf{x}_1 \neq \mathbf{x}_2$ non $\mathbf{x} = \lambda \mathbf{x}_2 + (1 - \lambda) \mathbf{x}_1$ $0 < \lambda < 1$

3.2.5 Multzo ganbilak: teoremak

Teorema 3.2.1 *Hiperplanoa multzo ganbila da.*

Frogapena:

Izan bedi

$$X = \{\mathbf{x} / \mathbf{c}^T \mathbf{x} = z\}$$

$$\forall \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in X \quad \Rightarrow \quad \lambda \mathbf{x}_2 + (1 - \lambda) \mathbf{x}_1 \in X?$$

$$\text{Baldin } \mathbf{x}_1 \in X \quad \Rightarrow \quad \mathbf{c}^T \mathbf{x}_1 = z$$

$$\text{Baldin } \mathbf{x}_2 \in X \quad \Rightarrow \quad \mathbf{c}^T \mathbf{x}_2 = z$$

$$\mathbf{c}^T [\lambda \mathbf{x}_2 + (1 - \lambda) \mathbf{x}_1] = \lambda \mathbf{c}^T \mathbf{x}_2 + (1 - \lambda) \mathbf{c}^T \mathbf{x}_1 = \lambda z + (1 - \lambda) z = z \Rightarrow$$

$$\lambda \mathbf{x}_2 + (1 - \lambda) \mathbf{x}_1 \in X \Rightarrow X \text{ ganbila da}$$

□

Teorema 3.2.2 *Erdiespazio irekiak eta itxiak multzo ganbilak dira.*

Aurrekoa bezala frogatu daiteke.

Teorema 3.2.3 *Multzo ganbilen kopuru finituen arteko ebakidura multzo ganbila da.*

$$X_1, X_2 \dots X_n \text{ ganbilak} \quad \Rightarrow \quad X = \bigcap_{i=1}^n X_i \text{ ganbila da}$$

Frogapena:

$$\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in X = \bigcap_{i=1}^n X_i \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in X_i, \quad \forall i = 1 \dots n \Rightarrow$$

$X_i \quad \forall i = 1 \dots n$ multzo ganbila denez, ondokoa betetzen da

$$\lambda \mathbf{x}_2 + (1 - \lambda) \mathbf{x}_1 \in X_i, \quad \forall i = 1 \dots n, \quad 0 \leq \lambda \leq 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lambda \mathbf{x}_2 + (1 - \lambda) \mathbf{x}_1 \in \bigcap_{i=1}^n X_i$$

$$X = \bigcap_{i=1}^n X_i \text{ multzo ganbila da}$$

□

3.2.6 Multzo ganbil definizioaren orokorpena

Definizioa 3.2.4 (Konbinazio lineal ganbil orokortua) *Izan bitez $\mathbf{x}_1 \dots \mathbf{x}_p$ puntuak, p finitua izanik. Konbinazio lineal ganbila beste $\mathbf{x}$ puntu bat da non*

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^p \lambda_i \mathbf{x}_i, \quad \lambda_i \geq 0, \quad \forall i \quad \text{eta} \quad \sum_{i=1}^p \lambda_i = 1$$

Definizioa 3.2.5 (Poliedro ganbila) *Puntu-kopuru finitu baten konbinazio lineal ganbil guztien multzoa poliedro ganbila deitzen da, hau da*

$$X = \left\{ \mathbf{x} = \sum_{i=1}^p \lambda_i \mathbf{x}_i, \quad \lambda_i \geq 0, \quad \forall i \quad \text{eta} \quad \sum_{i=1}^p \lambda_i = 1 \right\}$$

Konbinazio lineal ganbil horiek sortzen duten multzoa ganbila dela frogatu daiteke.

3.3 Programazio linealerako erabilera

Ikus dezagun adibide baten bidez aljebra linealaren eta multzo ganbilaren kontzeptu horiek zer nolako erabilera duten eredu linealen ebazpenean.

3.3.1 Adibidea

Demagun eredu lineal hau:

$$\max z = 15x_1 + 10x_2$$

ondoko murrizketen menpe

$$2x_1 + 4x_2 \leq 44$$

$$-x_1 + 4x_2 \leq 20$$

$$2x_1 - x_2 \leq 14$$

$$x_1 + 3x_2 \leq 2$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Ereduaren helburu-funtzioa hiperplanoa da eta murrizketa bakoitza erdiespazio itxia da $\mathbb{R}^2 - n$; guztiak dira multzo ganbil.

Soluzioen multzoa ere multzo ganbila da, multzo ganbilen arteko ebakidura multzo delako. Grafika begira ezazu 34. orrialdean: O, A, B, D, E eta F dira soluzioen multzoaren mutur-puntuak, eta horietariko bat izango da soluzio optimoa. Mutur-puntu horietariko bakoitza oinarriko soluzio bati dagokio, geroagoko gai batean ikusiko dugunez.

3.3.2 Eredu linealerako ondorioak

Multzo ganbilen definizioak eta propietateak eredu lineala ebazterakoan erabiltzen dira, eredu lineala multzo ganbilez osaturik baitago.

1. Eredu linealaren helburu-funtzioa hiperplanoa da, eta ondorioz multzo ganbila.
2. Eredu linealeko murrizketa bakoitza erdiespazio itxia da, eta ondorioz multzo ganbila.
3. Murrizketa-kopuru finitua dago, eta ebakidura multzo ganbila da. Puntu bat ereduaren soluzio da baldin eta multzo ganbilen ebakidura barnean, hau da, murrizketek definituriko soluzio espazioan baldin badago.

Eredu linealaren ebazpenean sistemako murrizketak, hau da, desberdintza ekuazioak berdintza ekuazio bihurtzen dira, horretarako behar diren aldagaiak gehituz. Hala ere, honek ez du soluzio multzoaren ganbiltasuna aldatuko.

3.4 Ariketak

1. Zein da matrize honen heina?

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Kalkula ezazu matrize honen alderantzizkoa:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 4 \\ -1 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

3. Ondorengo bektoreak $\mathbb{R}^3$ -ko oinarri al dira?

$$\{(1 \ 3 \ 0), \ (1 \ 1 \ 1), \ (0 \ -2 \ 3)\}$$

4. Ondorengo sistemaren oinarriko soluzioak kalkula itzazu:

$$2x_1 + 3x_2 - x_3 = 5$$

$$2x_1 - x_2 + 2x_3 = 4$$

5. Izan bitez $\mathbf{x}_1^T = (1 \ 3 \ 5)$, $\mathbf{x}_2^T = (-1 \ 2 \ -1)$ eta $\mathbf{x}_3^T = (2 \ -1 \ 3)$. Hiru bektore horien konbinazio lineal ganbil orokortuen multzoa idatz ezazu.

6. Izan bedi honako desberdintzen sistema:

$$2x_1 + 3x_2 \geq 1$$

$$x_1 + x_2 \leq 3$$

$$-x_1 + 2x_2 \leq 5$$

- (a) Grafikoki irudika ezazu.
(b) Mutur-puntuak kalkula itzazu.

4. Gaia

PROGRAMAZIO LINEALA. SIMPLEX METODOA

Programazio linealaren garapena burutu ahal izateko eredu linealaren bi idazkera desberdinak ezagutu beharko ditugu: idazkera kanonikoa eta idazkera estandarra.

1. Eredu lineala *idazkera kanonikoan* dagoela esaten da baldin eta helburua maximizatzea bada, murrizketak $\leq$ modukoak badira eta aldagai guztiak ez-negatiboak badira, hau da:

$$\max z = \mathbf{c}^T \mathbf{x}$$

o. m. m.

$$A\mathbf{x} \leq \mathbf{b}$$

$$\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$$

2. Simplex metodoaren teoriaren garapenean ereduaren *idazkera estandarra* erabiliko da. $\mathbf{b}$ -ren osagaiak positiboak izanik,

$$\max(\min) z = \mathbf{c}^T \mathbf{x}$$

o. m. m.

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

$$\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$$

Oro har, problema linealak ebazteko simplex metodoa erabiliko dugu, eta horretarako eredu lineala idazkera estandarrean pasa beharko dugu derrigorrez. Eredu gehienak ez dira hasieratik idazkera estandarrean egoten, desberdintza murrizketa asko izaten dituztelarik. Edozein eredu lineal daukagula ere, idazkera kanonikoan edo idazkera estandarrean jartzea posible da. Horretarako, ondorengo atalean ikusiko ditugun baliokidetasunak erabiliko ditugu.

4.1 Helburuaren eta murrizketen aldaketak

Ebatzi behar den eredu lineala idazkera estandarrean ez baldin badago, zenbait aldaketa egin beharko dugu, idazkera estandarra lortu ondoren simplex metodoaren bidez ebatzi ahal izateko. Ikus dezagun zenbait baliokidetasun.

1. Helburu-funtzioa.

$$\max z = \sum_{j=1}^n c_j x_j \quad \Longleftrightarrow \quad \min z' = \sum_{j=1}^n -c_j x_j$$

$$\max z = -\min z'$$

Adibidez, $\max z = 3x_1 - 5x_2$ eta $\min z' = -3x_1 + 5x_2$ baliokideak dira. z maximo eta z' minimo egiten duten x_1 eta x_2 aldagaien balioak berberak dira. Helburu-funtzioek aurkako zeinuko balioak hartzen dituzte ($z = -z'$).

2. Murrizketak.

- (a) Eredu lineal baten murrizketa guztiak norantza berean idatziz izan daitezke ondokoa betetzen delako:

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \geq b_i \quad \Longleftrightarrow \quad \sum_{j=1}^n -a_{ij} x_j \leq -b_i$$

Adibidez, $2x_1 + 3x_2 \leq -2$ ekuazioa -1 balioaz biderkatuz gero, $-2x_1 - 3x_2 \geq 2$ lortzen da.

(b) Berdintza oro bi desberdintzen bidez adierazia izan daiteke:

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = b_i \iff \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \leq b_i \text{ eta } \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \geq b_i$$

Adibidez, $3x_1 + x_2 = 4$ berdintza beste bi desberdintza hauen bidez adierazia izan daiteke:

$$3x_1 + x_2 \leq 4$$

$$3x_1 + x_2 \geq 4$$

3. Aldagaiak.

Aldagaiak ez-negatibotasun murrizketa betetzea beharrezkoa da.

- Baldin $x_j \leq 0 \Rightarrow -x_j \geq 0$
- Baldin x_j aldagaiak zeinu murrizketarik ez badu, orduan:

$$x_j = x'_j - x''_j \quad \text{non} \quad x'_j, x''_j \geq 0$$

- Baldin $x'_j > x''_j \Rightarrow x_j > 0$
- Baldin $x'_j < x''_j \Rightarrow x_j < 0$
- Baldin $x'_j = x''_j \Rightarrow x_j = 0$

Adibidea:

Aurreko baliokidetasunak erabiliz ondoko eredua idazkera kanonikoan jarriko dugu.

$$\min z = 5x_1 - 3x_2 + x_3$$

ondoko murrizketen menpe

$$4x_1 - x_2 + 2x_3 \geq 2$$

$$x_1 + x_2 - x_3 \leq 3$$

$$x_1 \geq 0$$

$$x_2 \leq 0$$

x_3 : ez-murriztua

Eredua idazkera kanonikoan egon dadin helburu-funtzioa maximizatze eran idatzi behar da, hau da:

$$\max (-z) = -5x_1 + 3x_2 - x_3$$

Murrizketek $\leq$ modukoak izan behar dutenez, ondoko eran idatziak izango dira:

$$\begin{aligned} -4x_1 + x_2 - 2x_3 &\leq -2 \\ x_1 + x_2 - x_3 &\leq 3 \end{aligned}$$

Aldagai guztiek ez-negatibo izan behar dute:

- $x_1 \geq 0$
- $x_2 \leq 0 \Rightarrow -x_2 \geq 0$
- x_3 : ez murriztua,

$$x_3 = x'_3 - x''_3 \quad \text{non} \quad x'_3 \geq 0 \quad \text{eta} \quad x''_3 \geq 0$$

Guztiarekin, ereduaren idazkera kanonikoa:

$$\max (-z) = -5x_1 - 3x_2 - x'_3 + x''_3$$

ondoko murrizketen menpe

$$-4x_1 - x_2 - 2x'_3 + 2x''_3 \leq -2$$

$$x_1 - x_2 - x'_3 + x''_3 \leq 3$$

$$x_1, x_2, x'_3, x''_3 \geq 0$$

□

4.2 Idazkera estandarreako bihurketa

Eredu lineal bat idazkera estandarrean jarri ahal izateko, aurrean aztertutako aldaketez gain *nasaitze-aldagaien* beharra somatuko dugu. Aldagai horiei esker desberdintza murrizketak berdintza murrizketa bihurtuko ditugu.

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \leq b_i \quad \Longleftrightarrow \quad \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j + y = b_i$$

Desberdintza beste norantzan emana badator, $y > 0$ nasaitze-aldagaia kendu egingo diogu:

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \geq b_i \quad \Longleftrightarrow \quad \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j - y = b_i$$

Nasaitze-aldagaiak gehitzeak edo kentzeak ez du helburu-funtzioan inolaz ere eragiten. Hori dela eta, beren koefizienteak $\mathbf{c}^T$ bektorean zero dira.

Adibidea:

Ondoko eredua idazkera estandarrean jarriko dugu:

$$\begin{aligned} \max z &= x_1 + 2x_2 + x_3 \\ \text{ondoko murrizketen menpe} \\ x_1 + x_2 - x_3 &\geq 2 \\ x_1 - 2x_2 + 5x_3 &\leq -1 \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 4 \\ x_1 &\geq 0, \quad x_2, x_3 \leq 0 \end{aligned}$$

Murrizketa guztiak ez daude era egokian idatziak; desberdintzak berdintza bihurtu beharko ditugu horretarako. Lehenengo murrizketan nasaitze-aldagai bat kenduz gero murrizketa idazkera estandarrean gelditzen da.

$$x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 2$$

Bigarren murrizketan beste nasaitze-aldagai bat gehituz gero zera lortzen da:

$$x_1 - 2x_2 + 5x_3 + x_5 = -1$$

Hirugarren murrizketa idazkera estandarrean emana dator:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 4$$

Eredu linealaren aldagaiei dagokionez, $x_1 \geq 0$ denez, ez-negatibotasun murrizketa betetzen du. x_2 eta x_3 aldagaiek, aldiz, ez dute ez-negatibotasun murrizketa betetzen. Bete dezaten, x_2 aldagaia $-x_2$ aldagaiaz eta x_3 aldagaia $-x_3$ aldagaiaz ordezkatzeko ditugu. Eredu lineala:

$$\max z = x_1 - 2x_2 - x_3 + 0x_4 + 0x_5$$

ondoko murrizketen menpe

$$x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 2$$

$$x_1 + 2x_2 - 5x_3 + x_5 = -1$$

$$x_1 - x_2 - x_3 = 4$$

$$x_1, x_2 \dots x_5 \geq 0$$

Baliabide-bektorea $\mathbf{b} \geq \mathbf{0}$ egitea besterik ez zaigu falta. Bigarren murrizketa eraldatuz (murrizketa -1 balioaz biderkatuz) eredu linealaren idazkera estandarra ondokoa dugu:

$$\max z = x_1 - 2x_2 - x_3 + 0x_4 + 0x_5$$

ondoko murrizketen menpe

$$x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 2$$

$$-x_1 - 2x_2 + 5x_3 - x_5 = 1$$

$$x_1 - x_2 - x_3 = 4$$

$$x_1 \dots x_5 \geq 0$$

□

4.3 Soluzioak. Oinarrizko definizioak

Idazkera estandarrean dagoen ondoko eredu lineala emanik:

$$\max z = \mathbf{c}^T \mathbf{x}$$

o. m. m.

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

$$\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$$

Ikus dezagun orain simplex metodoaren garapenean erabiltzen den zenbait terminoren definizioa:

1. Definizioa: $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ murrizketak betetzen dituen $\mathbf{x}$ bektorea eredurako *soluzioa* dela esaten da.
2. Definizioa: Problemarako soluzio den $\mathbf{x}$ bektorea, hau da, $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ betetzen duena, *bideragarria* dela esaten da baldin eta $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$ bada.
3. Definizioa: $\mathbf{x}_B$ *oinarriko soluzioa* (O.S.) dela esaten da baldin eta B oinarria izanik (A matrizearekiko m zutabe linealki independente, $m = A$ matrizearen lerro-kopurua izanik) $\mathbf{x}_B = B^{-1}\mathbf{b}$ betetzen badu.
4. Definizioa: *Oinarriko soluzio bideragarria* (O.S.B.) gehienera zero baino handiagoak diren m osagai dituen da. B oinarria erabiliz kalkulatzeko da, hau da, $\mathbf{x}_B = B^{-1}\mathbf{b}$
5. Definizioa: *Oinarriko soluzio bideragarri endekatua*, zero baino handiagoak diren m osagai baino gutxiago dituen oinarriko soluzio bideragarria da.
6. Definizioa: Oinarriko soluzio bideragarriak zero baino handiagoak diren m osagai baditu, *ez-endekatua* esaten zaio.
7. Definizioa: Soluzio bideragarri guztien multzoari *bideragarritasun-eskualdea* edo *soluzio bideragarrien multzo ganbila* esaten zaio eta F hizkiaren bidez adierazten da.
8. Definizioa: Problemarako soluzio optimoa $\mathbf{x}^*$ bada, $z^* = \mathbf{c}^T \mathbf{x}^*$ eredu linealerako *balio optimoa* deitzen da.
9. Definizioa: Problema lineala *bornegabea* dela esaten da balio optimo finiturik ez duenean, hau da: $z^* \rightarrow +\infty$ edo $z^* \rightarrow -\infty$
10. Definizioa: Problema lineal batek soluzio optimo bat baino gehiago duenean *aukerazko soluzio optimoak* edo *soluzio optimo anizkoitzak* dituela esaten da.

Definizio hauek guztiak eredu linealaren soluzio grafikoa aztertzean ikusi genituen. Ondorengo adibidean definizio hauetariko batzuk ikusiko ditugu.

Adibidea:

Izan bedi ondoko eredu lineala:

$$\begin{aligned} \max z &= 3x_1 + 6x_2 + 5x_3 + 4x_4 \\ \text{ondoko murrizketen menpe} \\ 2x_1 + 8x_2 + x_3 + x_4 &\leq 6 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 &\leq 4 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 &\geq 0 \end{aligned}$$

Soluzioak algebraikoki kalkulatzeko eredua idazkera estandarrean jarri behar da. x_5 eta x_6 nasaitze-aldagaiak gehituz eredu linealaren idazkera estandarra lortuko dugu. Matrize idazkeran ereduaren osagaiak ondokoak dira:

$$\begin{aligned} \mathbf{c}^T &= (3 \ 6 \ 5 \ 4) \\ \mathbf{x}^T &= (x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4 \ x_5 \ x_6) \\ A &= \begin{pmatrix} 2 & 8 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \mathbf{b} &= \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

- Eredu honen *soluzio bideragarri* bat $(1 \ 0 \ 0 \ 2 \ 2 \ 1)$ bektorea da, adibidez. Bektore hau *soluzioa* da murrizketak betetzen dituelako eta *bideragarria* da bere osagai guztiak ez-negatiboak direlako. Hala ere, ez da oinarriko soluzioa, A matrizearen heina 2 izanik zero baino handiagoak diren bi osagai baino gehiago dituelako.
- *Oinarriko soluzio* bat kalkulatu ahal izateko oinarri bat aukeratu behar dugu A matrizean; lehenengo bi zutabeek osatutakoa

adibidez:

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 8 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$|B| \neq 0$ denez, hau da, lerroak linealki independenteak direnez, aukeratutakoa oinarria da, eta ondorioz, oinarriko soluzioa kalkulatu daiteke:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_B = B^{-1}\mathbf{b} &= \begin{pmatrix} 2 & 8 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{6} & \frac{4}{3} \\ \frac{1}{6} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \frac{13}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Baina soluzio hau ez da bideragarria, x_2 aldagaiak hartutako balioa negatiboa delako.

- *Oinarriko soluzio bideragarri* bat kalkulatu ahal izateko, A matrizean oinarri bat aukeratu beharko dugu, aurreko pausoan egin bezala. Oinarriko soluzioaren aldagai guztiek balio ez-negatiboak izatekotan, lortutako soluzioa bideragarria izango da. Hau honela ez balitz, aurreko kasuan geundek. A matrizeko $\mathbf{a}_1$ eta $\mathbf{a}_4$ bektoreek osatutako oinarria hartuz gero:

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{x}_B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

Oraingoan bai lortutako oinarriko soluzioa ($\mathbf{x}_B$) bideragarria dela. Dagokion helburu-funtzioaren balioa ondokoa da:

$$z = \mathbf{c}^T \mathbf{x} = (3 \ 4) \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = 14$$

Soluzio hau bideragarria izateaz gain *ez-endeKatua* da, soluzioaren bi osagaiak zero baino handiagoak direlako.

□

4.4 Oinarrizko teoremak

Ebazpen grafikoan ikusi dugunez, 2 edo 3 aldagai dituzten problemen soluzio optimoa soluzio bideragarrien multzo ganbileko mutur-puntuen artean egon daiteke soilik.

3 aldagai baino gehiago dituzten ereduen soluzioa algebraikoki bi-latu behar da, eta hauetan ere, soluzio optimoak mutur-puntuetan aurkitzen direla frogatuko duten teoremak ikusiko ditugu. Multzo ganbilen teoriaren ondorengo emaitzak erabiltzen dira frogapen horietan:

1. Eredue lineal estandarren soluzio bideragarrien F multzoa *multzo ganbil eta itxia* da.
2. F multzo ganbileko $\mathbf{x}$ puntua *mutur-puntua* dela esaten da baldin eta $\mathbf{x} = \lambda \mathbf{x}_1 + (1 - \lambda) \mathbf{x}_2$ $\lambda \in (0, 1)$ betetzen duten F -ko bi puntu $\mathbf{x}_1$ eta $\mathbf{x}_2$ existitzen ez badira.
3. Multzo ganbil itxi eta bornatu bateko edozein $\mathbf{x}$ puntu mutur-puntuen konbinazio lineal ganbil orokortu moduan idatz daiteke, hau da,

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^q \lambda_i \mathbf{x}_i, \quad 0 \leq \lambda_i \leq 1, \quad \sum_{i=1}^q \lambda_i = 1$$

Ondoko teoremak mutur-puntuak, hau da, oinarriko soluzio bideragarriak zein diren zehazten digu, horien kalkuluan oinarritzen baita geroago eraikiko dugun simplex metodoa.

Teorema 4.4.1 *Izan bedi idazkera estandarrean emandako eredue lineala:*

$$\max z = \mathbf{c}^T \mathbf{x}$$

o. m. m.

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

$$\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$$

$\mathbf{x}$ bektorea oinarriko soluzio bideragarria da $\iff$ mutur-puntua bada.

Frogapena:



$\mathbf{x}$ oinarriko soluzio bideragarria bada, gehienera jota ere zero baino handiagoak diren m osagai ditu. Demagun lehenengo m osagaiak direla. Orduan:

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_B \\ - \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

Absurdura eramanez, $\mathbf{x}$ ez bada mutur-puntua, $\exists \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in F$ non:

$$\mathbf{x} = \lambda \mathbf{x}_1 + (1 - \lambda) \mathbf{x}_2 \quad , \quad 0 < \lambda < 1 \quad , \quad \mathbf{x}_1 \neq \mathbf{x}_2$$

$$\text{Izan bitez } \mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} \mathbf{y}_1 \\ - \\ \mathbf{z}_1 \end{pmatrix} \quad \text{eta} \quad \mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} \mathbf{y}_2 \\ - \\ \mathbf{z}_2 \end{pmatrix}$$

- $\mathbf{y}_i \rightarrow m \times 1$ dimentsiokoa, $i = 1, 2$
- $\mathbf{z}_i \rightarrow (n - m) \times 1$ dimentsiokoa, $i = 1, 2$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{x}_B \\ - \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} \mathbf{y}_1 \\ - \\ \mathbf{z}_1 \end{pmatrix} + (1 - \lambda) \begin{pmatrix} \mathbf{y}_2 \\ - \\ \mathbf{z}_2 \end{pmatrix}$$

$$\lambda, (1 - \lambda) > 0 \quad \text{eta} \quad \mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2 \geq \mathbf{0}$$

$$\mathbf{0} = \lambda \mathbf{z}_1 + (1 - \lambda) \mathbf{z}_2 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{z}_1 = \mathbf{z}_2 = \mathbf{0}$$

Beraz, $\mathbf{x}_B$ konbinazio lineal ganbil murriztu moduan idatz leza-keten bideragarritasun-eskualdeko puntuek gehienera jota ere m osagai

positibo dituzte ($\mathbf{y}_1$ eta $\mathbf{y}_2$ bektoreei dagozkienak, alegia). $\mathbf{x}$, $\mathbf{x}_1$ eta $\mathbf{x}_2$ soluzio direnez, ereduaren murrizketak betetzen dituzte:

$$\mathbf{x}_B \text{ S.B.} \Rightarrow x_{B1}\mathbf{a}_1 + x_{B2}\mathbf{a}_2 + \cdots + x_{Bm}\mathbf{a}_m = \mathbf{b} \quad (4.1)$$

$$\mathbf{x}_1 \text{ S.B.} \Rightarrow y_1^1\mathbf{a}_1 + y_1^2\mathbf{a}_2 + \cdots + y_1^m\mathbf{a}_m = \mathbf{b} \quad (4.2)$$

$$\mathbf{x}_2 \text{ S.B.} \Rightarrow y_2^1\mathbf{a}_1 + y_2^2\mathbf{a}_2 + \cdots + y_2^m\mathbf{a}_m = \mathbf{b} \quad (4.3)$$

(4.1)-(4.2) eta (4.1)-(4.3) eragiketak eginez honako berdintzak lortzen dira:

$$(x_{B1} - y_1^1)\mathbf{a}_1 + (x_{B2} - y_1^2)\mathbf{a}_2 + \cdots + (x_{Bm} - y_1^m)\mathbf{a}_m = \mathbf{0}$$

$$(x_{B1} - y_2^1)\mathbf{a}_1 + (x_{B2} - y_2^2)\mathbf{a}_2 + \cdots + (x_{Bm} - y_2^m)\mathbf{a}_m = \mathbf{0}$$

$\{\mathbf{a}_1 \dots \mathbf{a}_m\}$ linealki independenteak direnez, aurreko bi konbinazio linealen eskalar guztiek zero izan behar dute, hau da,

$$\begin{aligned} x_{Bi} - y_1^i &= 0 \quad \forall i = 1 \dots m \\ x_{Bi} - y_2^i &= 0 \quad \forall i = 1 \dots m \end{aligned} \Rightarrow \mathbf{x} = \mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_2$$

Beraz, $\mathbf{x}$ konbinazio lineal ganbil murriztu moduan idaztea posible egingo duten bideragarritasun-ekualdeko $\mathbf{x}_1$ eta $\mathbf{x}_2$ 2 puntu desberdinik ez dago $\Rightarrow \mathbf{x}_B$ puntuak mutur-puntu izan beharko du.



$\mathbf{x}$ mutur-puntua bada, orduan oinarriko soluzio bideragarria da.

Demagun $\mathbf{x}$ bektoreak zero baino handiagoak diren k osagai dituela eta gainontzekoak 0 direla.

$$\sum_{i=1}^k x_i \mathbf{a}_i = \mathbf{b}$$

$\mathbf{x}$ oinarriko soluzio bideragarria dela ikusteko, nahikoa da $\mathbf{a}_i \quad i = 1 \dots k$ linealki independenteak direla frogatzea. Absurdura eramango dugu eta $\{\mathbf{a}_1 \dots \mathbf{a}_k\}$ linealki menpekoak direla suposatuko dugu. Horrela, $\mathbf{x}$ mutur-puntu ezin daitekeela izan lortuko dugu, hipotesiaren aurkakoa

edukiz. Demagun, ba, $\{\mathbf{a}_1 \dots \mathbf{a}_k\}$ linealki menpekoak direla. Hau hala izanik,

$$\exists \alpha \neq \mathbf{0} \quad \text{non} \quad \sum_{i=1}^k \alpha_i \mathbf{a}_i = \mathbf{0}$$

Gutxienez $\alpha_i \neq 0$ bat baduen α bektorea eta ϵ egoki bat aukeratuz gero, bi puntu desberdin definituko ditugu:

$$\mathbf{x}_1 = \mathbf{x} + \epsilon \alpha$$

$$\mathbf{x}_2 = \mathbf{x} - \epsilon \alpha$$

ϵ balioaren beharra dago $\mathbf{x}_1$ eta $\mathbf{x}_2$ bektoreak bideragarriak ($\mathbf{x}_1 \geq \mathbf{0}$ eta $\mathbf{x}_2 \geq \mathbf{0}$) izango direla ziurtatzeko. ϵ hau nahi adina handia edo txikia aukeratu dugu, α -ren arabera. $\alpha \neq \mathbf{0}$ izateagatik $\Rightarrow \mathbf{x}_1 \neq \mathbf{x}_2$. Gure $\mathbf{x}$ oinarriko soluzioa beste bi $\mathbf{x}_1$ eta $\mathbf{x}_2$ bektore horien konbinazio lineal moduan idaztea posible da. Begira, bestela:

$$\mathbf{x} = \frac{1}{2}\mathbf{x}_1 + \frac{1}{2}\mathbf{x}_2 = \frac{1}{2}(\mathbf{x} + \epsilon \alpha) + \frac{1}{2}(\mathbf{x} - \epsilon \alpha) = \mathbf{x}$$

Honek zera esan nahi du: $\mathbf{x}$ ez dela inolaz ere mutur-puntu izango. Eta, hori gure hipotesiaren aurka doa. Beraz, $\{\mathbf{a}_1 \dots \mathbf{a}_k\}$ bektoreek linealki independenteak izan behar dute eta teorema frogaturik gelditzen da.

□

Eredu lineal baten soluzio optimoak bideragarritasun-eskualdearen mutur-puntu izan behar duela frogatzen du honako teorema honek:

Teorema 4.4.2 *Izan bedi ondoko problema lineal estandarra (bideragarria eta bornatua):*

$$\max z = \mathbf{c}^T \mathbf{x}$$

o. m. m.

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

$$\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$$

Helburu-funtzioaren soluzio optimoa F eskualdearen mutur-puntu batean aurkitzen da.

Frogapena:

Absurdura eramanez frogatuko dugu

Demagun mutur-puntu ez den $\mathbf{x}^*$ soluzio optimoa daukagula eta $z^* = \mathbf{c}^T \mathbf{x}^*$ problemaren balio optimoa dela. Orduan zera betetzen da:

$$\forall \mathbf{x} \in F \quad z = \mathbf{c}^T \mathbf{x} \leq \mathbf{c}^T \mathbf{x}^* = z^*$$

Izan bedi $\{\mathbf{x}_1 \dots \mathbf{x}_q\}$ F-ren mutur-puntuen multzoa. Bideragarritasun-eskualdeko puntu oro mutur-puntuen konbinazio lineal ganbil moduan idaztea posible da. Honela,

$$\mathbf{x}^* = \sum_{i=1}^q \lambda_i \mathbf{x}_i, \quad \lambda_i \geq 0, \quad \sum_{i=1}^q \lambda_i = 1$$

Helburu-funtzioaren balioa $\mathbf{x}^*$ puntuan ondokoa da:

$$z^* = \mathbf{c}^T \mathbf{x}^* = \mathbf{c}^T \sum_{i=1}^q \lambda_i \mathbf{x}_i = \sum_{i=1}^q \lambda_i \mathbf{c}^T \mathbf{x}_i$$

$\max (\mathbf{c}^T \mathbf{x}_i) \geq \mathbf{c}^T \mathbf{x}_i \quad \forall i = 1 \dots q$ betetzen denez,

$$z^* = \sum_{i=1}^q \lambda_i \mathbf{c}^T \mathbf{x}_i \leq \sum_{i=1}^q \lambda_i \max (\mathbf{c}^T \mathbf{x}_i) = \max (\mathbf{c}^T \mathbf{x}_i) \sum_{i=1}^q \lambda_i = \max (\mathbf{c}^T \mathbf{x}_i)$$

eta horrenbestez, mutur-puntu ez den puntu batean ($\mathbf{x}^*$) helburu-funtzioak lortutako balioa (z^*), mutur-puntu optimoan lortutako balioa baino txikiagoa da. Beraz, optimoa mutur-puntu batean aurkitzen da.

□

4.4.1 . teoremari esker zera dakigu: oinarriko soluzio bideragarri orori bideragarritasun-eskualdeko mutur-puntu bat dagokiola eta alde-rantziz.

4.4.2 . teoreman frogaturik gelditu da ereduaren soluzio optimoa mutur-puntua dela (oinarriko soluzio bideragarria). Mutur-puntuen kopuru finitua dagoenez, soluzioa lortzeko metodo iteratiboa eraikitzea posible da. Bideragarritasun-eskualdean infinitu puntu badago ere, oinarriko soluzio bideragarrien kopurua finitua da; gehienera jota ere n zutaberekin egin daitezkeen konbinazio guztiak ondokoak dira.

$$\binom{n}{m} = \frac{n!}{m! (n-m)!}$$

Adibidea:

Izan bedi ondoko problema lineala:

$$\max z = x_1 + 2x_2$$

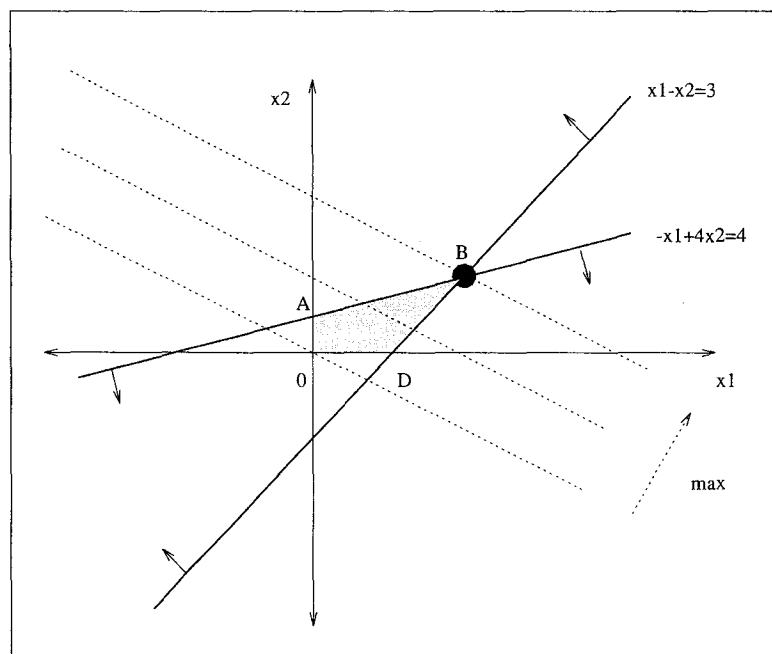
ondoko murrizketen menpe

$$-x_1 + 4x_2 \leq 4$$

$$x_1 - x_2 \leq 3$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Mutur-puntuak grafikoki kalkulatuko ditugu:



Mutur-puntuak:

$$O = (0 \ 0) , \quad D = (3 \ 0) , \quad A = (0 \ 1) , \quad B = \left(\frac{16}{3} \quad \frac{7}{3} \right)$$

Oinarriko soluzioak algebrakoki kalkulatzeko nasaitze-aldagaiak (x_3 eta x_4) gehitu behar dira hasierako eredu linealean.

$$\max z = x_1 + 2x_2$$

ondoko murrizketen menpe

$$-x_1 + 4x_2 + x_3 = 4$$

$$x_1 - x_2 + x_4 = 3$$

$$x_1 \dots x_4 \geq 0$$

Oinarriko soluzio bideragarrien kopuru maximoa:

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} = 6$$

Horiek guztiak ez dira mutur-puntu izango, ez direlako guztiak bideragarri izango. Aurreko soluzio grafikoan ikus daiteke 4 mutur-puntu besterik ez dagoela.

Kalkula ditzagun oinarriko soluzio guztiak:

$$\left\{ \begin{array}{l} B = \{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2\} \text{ oinarria bada, soluzioa B puntuari dagokio:} \\ \mathbf{x}_B = B^{-1}\mathbf{b} = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{16}{3} \\ \frac{7}{3} \end{pmatrix} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} B = \{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_3\} \text{ oinarria aukeratuz soluzioa D puntuari dagokio:} \\ \mathbf{x}_B = B^{-1}\mathbf{b} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} B = \{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_4\} \text{ oinarria izanik soluzioa ez da bideragarria:} \\ \mathbf{x}_B = B^{-1}\mathbf{b} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 7 \end{pmatrix} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} B = \{\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\} \text{ denean bideragarria ez den soluzioa lortzen da:} \\ \mathbf{x}_B = B^{-1}\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 16 \end{pmatrix} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} B = \{\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_4\} \text{ izanik soluzioa A-ri dagokio:} \\ \mathbf{x}_B = B^{-1}\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} B = \{\mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4\} \text{ denean soluzioa 0 puntua da:} \\ \mathbf{x}_B = B^{-1}\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} \end{array} \right.$$

□

Eredu lineal baten soluzioa aurkitzeko mutur-puntuak edo oinarriko soluzio bideragarriak besterik ez ditugu kontutan izango, puntu horien artean baitago problemaren soluzio optimoa.

4.5 Simplex metodoa

Soluzio grafikoa aztertzean ikusi dugu problemak zein motatako soluzioa izan dezakeen (soluzio bakarra, anizkoitzak, bornegabea), soluziorik izatekotan, noski. 2 aldagai baino gehiago dituzten problemak ebatzi ahal izateko simplex metodoa erabili beharko dugu. Metodoak soluzioa emateaz gain soluzio hori zer nolakoa den ere esango digu.

Har dezagun idazkera estandarrean dagoen problema lineala:

$$\begin{aligned} \max z &= \mathbf{c}^T \mathbf{x} \\ \text{o. m. m.} \\ A\mathbf{x} &= \mathbf{b} \\ \mathbf{x} &\geq \mathbf{0} \end{aligned}$$

non

- $A \rightarrow m \times n$ matrizea den.
- $\mathbf{c}^T$ eta $\mathbf{x} \rightarrow n$ osagaiko lerro-bektorea eta zutabe-bektorea diren.
- $\mathbf{b} \rightarrow m$ osagaiko zutabe-bektorea den.

Gogora, eredua idazkera estandarrean ez badago, dagokion idazkera estandarra lortzea beti dela posible. Horretarako, dagoeneko ikusitako aldaketak eta nasaitze-aldagaiak erabiliko ditugu.

Idazkera estandarra maximizatze eran dagoen kasurako aztertuko dugu simplex metodoa. Minimizatze kasurako ere eraiki liteke, egokitzapen batzuk besterik beharko ez liratekeelarik.

Har dezagun 2 azpimatrizetan banatutako A matrizea:

$$A_{m \times n} = (B_{m \times m} / N_{m \times (n-m)})$$

- $B \rightarrow$ linealki independenteak diren m bektorez osatua, hau da, oinarria.
- $N \rightarrow B$ -ko bektoreen menpeko diren gainontzeko $n - m$ bektorez osatua.

4.5.1 Definizioak, idazkerak eta teoremak

Izan bedi $\mathbf{a}_j \in A$, $\mathbf{a}_j \notin B$. $\mathbf{a}_j$ bektorea B oinarriko bektoreen konbinazio lineal moduan idazteko ondoko idazkera erabiliko dugu:

$$\mathbf{a}_j = y_{1j}\mathbf{a}_1 + y_{2j}\mathbf{a}_2 + \cdots + y_{mj}\mathbf{a}_m = \sum_{i=1}^m y_{ij}\mathbf{a}_i$$

$\mathbf{a}_i \in B$, $i = 1 \dots m$ izanik.

$$\mathbf{y}_j = \begin{pmatrix} y_{1j} \\ y_{2j} \\ \vdots \\ y_{mj} \end{pmatrix}$$

$\mathbf{a}_j$ -ren koordenatuak B -ren funtzioan sistema hau ebatziz lortzen dira:

$$\mathbf{a}_j = B\mathbf{y}_j, \quad \exists B^{-1} \Rightarrow \boxed{\mathbf{y}_j = B^{-1}\mathbf{a}_j}$$

Adibidea:

Demagun idazkera estandarrean dagoen eredu lineal hau daukagula:

$$\max z = 3x_1 + 6x_2 + 5x_3 + 4x_4$$

ondoko murrizketen menpe

$$2x_1 + 8x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 6$$

$$x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 + x_6 = 4$$

$$x_1 \dots x_6 \geq 0$$

Har dezagun oinarri bat:

$$B = \{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_4\}$$

Oinarrikoak ez diren bektoreak, $\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_5, \mathbf{a}_6$ alegia, oinarriko aldagaien konbinazio lineal gisa idaztea posible da. $\mathbf{a}_2$ adibidez, honela adieraz daiteke:

$$\begin{pmatrix} 8 \\ 1 \end{pmatrix} = y_{12} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + y_{22} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{12} \\ y_{22} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{y}_2 = \begin{pmatrix} y_{12} \\ y_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -6 \end{pmatrix}$$

□

- Problemaren hasierako murrizketak eta oinarriko soluzio bideragarriaren definizioa erabiliz, ondokoa daukagu:

* Oinarriko soluzioa:

$$\begin{aligned}
 A\mathbf{x} &= \mathbf{b} \\
 (B/N) \begin{pmatrix} \mathbf{x}_B \\ - \\ \mathbf{x}_N \end{pmatrix} &= \mathbf{b} \\
 A = (B/N) &= \begin{pmatrix} a_{11} \dots a_{1m} | a_{1m+1} \dots a_{1n} \\ a_{21} \dots a_{2m} | a_{2m+1} \dots a_{2n} \\ \vdots \\ a_{m1} \dots a_{mm} | a_{mm+1} \dots a_{mn} \end{pmatrix} \\
 \mathbf{x} = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_B \\ - \\ \mathbf{x}_N \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \\ x_{m+1} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \\
 \mathbf{x}_B \geq \mathbf{0}, \mathbf{x}_N = \mathbf{0} &\Rightarrow B\mathbf{x}_B + N\mathbf{x}_N = \mathbf{b} \rightarrow \\
 B\mathbf{x}_B = \mathbf{b} &\rightarrow \boxed{\mathbf{x}_B = B^{-1}\mathbf{b}}
 \end{aligned}$$

* Helburu-funtzioaren balioa:

Kostuen edo unitateko prezioen bektorea era berean bana daiteke:

$$\mathbf{c}^T = (\mathbf{c}_B^T | \mathbf{c}_N^T) = (c_{B1} c_{B2} \dots c_{Bm} | c_{Bm+1} \dots c_{Bn})$$

Hortaz, eta $\mathbf{x}_N = \mathbf{0}$ denez,

$$z = \mathbf{c}^T \mathbf{x} = (\mathbf{c}_B^T | \mathbf{c}_N^T) \begin{pmatrix} \mathbf{x}_B \\ - \\ \mathbf{x}_N \end{pmatrix} = \mathbf{c}_B^T \mathbf{x}_B \Rightarrow \boxed{z = \mathbf{c}_B^T \mathbf{x}_B}$$

- $\forall \mathbf{a}_j \in A$ bektorerako $z_j = \mathbf{c}_B^T \mathbf{y}_j$ eskalarea definitzen da, $\mathbf{y}_j$ horiek B-ren funtzioan idatzitako $\mathbf{a}_j$ -ren koordenatuak izanik.

$$z_j = \sum_{i=1}^m c_{Bi}^T y_{ij} = c_{B1}y_{1j} + c_{B2}y_{2j} + \cdots + c_{Bm}y_{mj}$$

z_j eskalarea definitzen da oinarrian ez dauden $\mathbf{a}_j \in A$ bektoreentzat $z_j - c_j$ balioak kalkulatu beharko direlako.

Adibidea:

79. orriko adibidearekin jarraituz, $B = \{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_4\}$ denez aukeratutako oinarria, teknologi koefizienteen matrizea, erabaki-aldagaien bektorea eta helburu-funtzioaren kostu-bektorea honela idatz daitezke:

- Teknologi koefizienteen matrizea:

$$(B|N) = \left(\begin{array}{cc|cccc} 2 & 1 & 8 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

- Erabaki-aldagaien bektorea:

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_B \\ - \\ \mathbf{x}_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_4 \\ - \\ x_2 \\ x_3 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix}$$

- Kostu-bektorea:

$$\mathbf{c} = (\mathbf{c}_B | \mathbf{c}_N) = (3 \ 4 | 6 \ 5 \ 0 \ 0)$$

Oinarriko soluzioa ($B = \{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_4\}$ oinarriarekikoa, alegia) honela kalkulatu da:

$$\mathbf{x}_B = B^{-1}\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_4 \end{pmatrix}$$

Gainontzeko aldagaiek (x_2, x_3, x_5, x_6) zero balioa hartzen dute. Helburu-funtzioaren balioa:

$$z = \mathbf{c}_B^T \mathbf{x}_B = (3 \ 4) \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = 14$$

$\mathbf{a}_2$ bektoreari dagokion z_2 eskalarea hau da:

$$z_2 = \mathbf{c}_B^T \mathbf{y}_2 = (3 \ 4) \begin{pmatrix} 7 \\ -6 \end{pmatrix} = -3$$

□

Ondorengo teoremari esker, oinarriko soluzio bideragarri bat izanik soluzio hori hobetzea posible den ala ez jakingo dugu. Eredu linealak ebazteko erabiliko dugun simplex metodoa teorema honetan oinarritzen da. Soluzioz soluzio (mutur-puntuz mutur-puntu) mugituko da soluzio optimoa lortu arte.

Teorema 4.5.1 (O.S.B. baten hobekuntza) *Izan bedi*

$$\begin{aligned} \max z &= \mathbf{c}^T \mathbf{x} \\ \text{o. m. m.} \\ A\mathbf{x} &= \mathbf{b} \\ \mathbf{x} &\geq \mathbf{0} \end{aligned}$$

eredu lineala idazkera estandarrean, $\mathbf{x}_B = B^{-1}\mathbf{b}$ bere oinarriko soluzio bideragarri bat (O.S.B.) eta $z = \mathbf{c}_B^T \mathbf{x}_B$ helburu-funtzioaren balioa.

Baldin $\exists \mathbf{a}_j \in A$, $\mathbf{a}_j \notin B$, $z_j - c_j < 0$ izanik eta j horrentzat $\exists y_{ij} > 0, i = 1 \dots m \Rightarrow \exists \hat{\mathbf{x}}_B$ beste oinarriko soluzio bideragarri bat zeinak helburu-funtzioari balio hobea emango dion, hau da, $\hat{z} \geq z$.

Frogapena:

Frogapenaren garapenean ikusiko dugu noiz eta nola hobe daitekeen oinarriko soluzio bideragarri bat.

Izan bedi $\mathbf{x}_B$ oinarriko soluzio bideragarri bat. Soluzio izateagatik ereduaren murrizketak betetzen ditu:

$$x_{B1}\mathbf{a}_1 + x_{B2}\mathbf{a}_2 + \cdots + x_{Bm}\mathbf{a}_m = \mathbf{b} = \sum_{i=1}^m x_{Bi}\mathbf{a}_i \quad (4.4)$$

Dakigunez, $\forall \mathbf{a}_j \in A$, $\mathbf{a}_j \notin B$ izanik, oinarriko bektoreen konbinazio lineal moduan idaztea posible da (ikus 78.orria):

$$\mathbf{a}_j = \sum_{i=1}^m y_{ij}\mathbf{a}_i, \quad j = m+1 \dots n$$

$\mathbf{a}_j \neq \mathbf{0}$ denez $\exists y_{ij} \neq 0 \quad i = 1 \dots m$. Izan bedi $y_{rj} \neq 0$

$$\mathbf{a}_j = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq r}}^m y_{ij}\mathbf{a}_i + y_{rj}\mathbf{a}_r \quad (4.5)$$

$y_{rj} \neq 0$ denez, $\mathbf{a}_r$ bektorea $\{\mathbf{a}_1 \dots \mathbf{a}_j \dots \mathbf{a}_m\}$ bektoreen funtzioan idatz daiteke. 49.orriko 3.1.2 teoreman ikusi dugunez, oinarriko $\mathbf{a}_r$ bektorearen ordeztatzeko $\mathbf{a}_j$ jarritz gero lortzen den

$$\hat{B} = \{\mathbf{a}_1 \dots \mathbf{a}_j \dots \mathbf{a}_m\}$$

multzoa ere oinarria da. Ikus dezagun aurreko B oinarriarekiko kalkulata daukagun $\mathbf{x}_B$ soluzioa erabiliz nola kalkulatu daitekeen oraingo oinarriarekiko $\hat{\mathbf{x}}_B$ soluzioa. Behin soluzio hori eskuartean izanik helburu-funtzioak hartuko duen $\hat{z}$ balioa kalkulatu ahal izango dugu, eta aurreko z -rekin konparatuz hobe dela egiaztatu ahal izango dugu. (4.5) adierazpenean $\mathbf{a}_r$ askatuz:

$$\mathbf{a}_r = \frac{1}{y_{rj}}\mathbf{a}_j - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq r}}^m \frac{y_{ij}}{y_{rj}}\mathbf{a}_i$$

(4.4) adierazpenean, $\mathbf{a}_r$ bektorea $\{\mathbf{a}_1 \dots \mathbf{a}_j \dots \mathbf{a}_m\}$ -ren funtzioan idatzitako adierazpenaz ordezkaturik izan daiteke:

$$\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq r}}^m x_{Bi}\mathbf{a}_i + x_{Br}\mathbf{a}_r = \mathbf{b}$$

$$\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq r}}^m x_{Bi} \mathbf{a}_i + x_{Br} \left[\frac{1}{y_{rj}} \mathbf{a}_j - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq r}}^m \frac{y_{ij}}{y_{rj}} \mathbf{a}_i \right] = \mathbf{b}$$

Batugaiak bilduz ondokoa lortzen da:

$$\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq r}}^m \left(x_{Bi} - \frac{y_{ij}}{y_{rj}} x_{Br} \right) \mathbf{a}_i + \frac{x_{Br}}{y_{rj}} \mathbf{a}_j = \mathbf{b}$$

$\hat{B}$ oinarriaren funtzioan dauden m osagai lortu ditugu, eta $\hat{\mathbf{x}}_B$ oinarriko soluzioa honakoa da:

$$\hat{\mathbf{x}}_B = \begin{cases} x_{Bi} - \frac{x_{Br}}{y_{rj}} y_{ij} & i \neq r \\ \frac{x_{Br}}{y_{rj}} & i = r \end{cases} \quad (4.6)$$

$\hat{\mathbf{x}}_B$ soluzioak osagai negatiborik badu ez da bideragarria izango. Bideragarria izan dadin honako bi desberdintzak bete behar dira:

1. $\hat{x}_{Bi} = x_{Bi} - \frac{x_{Br}}{y_{rj}} y_{ij} \geq 0$, $i \neq r$, $i = 1 \dots m$
2. $\hat{x}_{Br} = \frac{x_{Br}}{y_{rj}} \geq 0$

Bigarren desberdintza bete dadin, $y_{rj} \neq 0$ eta $x_{Br} \geq 0$ direnez, $y_{rj} > 0$ izan behar du.

Lehen desberdintza bete dadin honako kasuak izango ditugu:

- Baldin $y_{ij} < 0$ bada orduan x_{Bi}, x_{Br}, y_{rj} positiboak direnez soluzioa bideragarria izango da:

$$\hat{x}_{Bi} = x_{Bi} - x_{Br} \frac{y_{ij}}{y_{rj}} \geq 0$$

- Baldin $y_{ij} = 0$ bada orduan x_{Bi} positiboa denez $\hat{x}_{Bi}$ ere bideragarria izango da:

$$\hat{x}_{Bi} = x_{Bi} - x_{Br} \frac{y_{ij}}{y_{rj}} = x_{Bi} \geq 0$$

- Baldin $y_{ij} > 0$ bada orduan

$$\hat{x}_{Bi} = x_{Bi} - x_{Br} \frac{y_{ij}}{y_{rj}} \geq 0 \iff \frac{x_{Bi}}{y_{ij}} - \frac{x_{Br}}{y_{rj}} \geq 0 \iff \frac{x_{Bi}}{y_{ij}} \geq \frac{x_{Br}}{y_{rj}}$$

Laburbilduz, oinarria utziko duen $\mathbf{a}_r$ bektoreak honako irizpidea bete behar du, lortuko dugun oinarriko soluzioa bideragarria izan dadin:

$$\boxed{\mathbf{a}_r / \frac{x_{Br}}{y_{rj}} = \text{Min} \left\{ \frac{x_{Bi}}{y_{ij}} / y_{ij} > 0 \right\}} \quad (4.7)$$

Aldaketa honen ondorioz beste oinarri bat eraiki dugu: $\hat{B}$. Oinarri hau eta hasierako B oinarria bektore bakar batean desberdintzen dira. Oinarriko soluzio bideragarri bakoitza bideragarritasun-eskualdeko mutur-puntu bati egokitzen zaionez, oinarri aldaketaren ondorioz prozesua beste mutur-puntu auzokide batera mugituko da. $\hat{\mathbf{x}}_B$ mutur-puntu auzokide horretan lortzen den soluzioa eta helburu-funtzioak bertan lortzen duen balioa ondokoak dira.

$$\hat{\mathbf{x}}_B = \hat{B}^{-1} \mathbf{b}$$

$$\hat{z} = \hat{\mathbf{c}}^T \hat{\mathbf{x}}_B$$

Dagoeneko frogatuta gelditu da (4.7) irizpidea betetzen duen $\mathbf{a}_r$ bektorea oinarritik atera eta beste oinarri bat eraikiz gero, lor daitekeela beste oinarriko soluzio bideragarri bat.

Baina, oraindik frogatu ez dena zera da: kalkulatu berri dugun $\hat{\mathbf{x}}_B$ soluzioa $\mathbf{x}_B$ baino hobea dela. Ikus dezagun hori gertatzeko oinarri-ratuko den $\mathbf{a}_j$ bektoreak bete beharko duen baldintza zein den.

$$\hat{z} = \sum_{i=1}^m \hat{c}_{Bi} \hat{x}_{Bi} = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq r}}^m \hat{c}_{Bi} \hat{x}_{Bi} + \hat{c}_{Br} \hat{x}_{Br} =$$

Lortu ditugun $\hat{x}_{Bi}$ soluzioaren osagaiak ordezkatzuz,

$$\hat{z} = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq r}}^m \hat{c}_{Bi} \left(x_{Bi} - x_{Br} \frac{y_{ij}}{y_{rj}} \right) + \hat{c}_{Br} \frac{x_{Br}}{y_{rj}} = (*)$$

Baldin $i=r$ orduan

$$c_{Br}(x_{Br} - x_{Br} \frac{y_{rj}}{y_{rj}}) = 0$$

Batugaian $i \neq r$ baldintza ken daiteke eta honakoa daukagu:

$$(*) = \sum_{i=1}^m c_{Bi}(x_{Bi} - x_{Br} \frac{y_{ij}}{y_{rj}}) + c_j \frac{x_{Br}}{y_{rj}} =$$

Kalkuluak eginez:

$$\hat{z} = \sum_{i=1}^m c_{Bi}x_{Bi} - \frac{x_{Br}}{y_{rj}} \sum_{i=1}^m c_{Bi}y_{ij} + c_j \frac{x_{Br}}{y_{rj}} = z - \frac{x_{Br}}{y_{rj}}(z_j - c_j)$$

Hortaz, z eta $\hat{z}$ -ren arteko aldea hau da:

$$\hat{z} = z - \frac{x_{Br}}{y_{rj}}(z_j - c_j) \quad (4.8)$$

$$\hat{z} > z \iff -\frac{x_{Br}}{y_{rj}}(z_j - c_j) > 0 \iff \frac{x_{Br}}{y_{rj}}(z_j - c_j) < 0$$

$x_{Br} \geq 0$ eta $y_{rj} > 0$ direnez, helburu-funtzioaren balioa hazi egiten da $(\hat{z} > z) \iff \boxed{z_j - c_j < 0}$

Beraz, $z_j - c_j < 0$ izanik, zenbat eta $z_j - c_j$ txikiagoa izan, helburu-funtzioaren balioa orduan eta gehiago handiagotuko da.

Oinarrian sartuko da $\mathbf{a}_k$ bektorea, zeinak ondoko baldintza beteko duen:

$$\boxed{\mathbf{a}_k \in N / z_k - c_k = \text{Min} \{z_j - c_j / z_j - c_j < 0\}}$$

$\mathbf{a}_k$ oinarrian sartzen bada, $\mathbf{a}_r$ aterako da:

$$\boxed{\mathbf{a}_r / \frac{x_{Br}}{y_{rk}} = \text{Min} \{ \frac{x_{Bi}}{y_{ik}} / y_{ik} > 0 \}}$$

$\mathbf{a}_k$ bada oinarrian sartzen den bektorea, 4.6 eta 4.8 formuletan j ordeztu k jarri beharko dugu aldaketari egokitzeko. $\square$

Adibidea:

Aurreko teorema erabiliko dugu ondoko problema ebazteko:

$$\begin{aligned} \max z &= 4x_1 + 5x_2 + x_3 \\ \text{ondoko murrizketen menpe} \\ x_1 + x_2 + x_3 &\leq 8 \\ -x_1 - 2x_2 + x_3 &\leq -2 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

Nasaitze-aldagaiak gehituz eta $\mathbf{b} \geq \mathbf{0}$ eginez idazkera estandarra lortuko dugu:

$$\begin{aligned} \max z &= 4x_1 + 5x_2 + x_3 \\ \text{ondoko murrizketen menpe} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 8 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 - x_5 &= 2 \end{aligned}$$

$$x_1 \dots x_5 \geq 0$$

$B = \{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_4\}$ oinarria aukeratzen badugu, adibidez, lortzen dugun soluzioa bideragarria da:

$$\mathbf{x}_B = B^{-1}\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$z = \mathbf{c}_B^T \mathbf{x}_B = (4 \ 0) \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix} = 8$$

Soluzio bideragarri hau optimoa den ala ez ikusi behar da. Horretarako $\forall \mathbf{a}_j \notin B$ bektoreen $z_j - c_j$ balioak kalkulatu behar dira. Zero baino txikiagorik existitzen bada, soluzioa hobetzea posible dela dio teorema. Oinarrian ez dauden $\mathbf{a}_j$ bektoreen $z_j - c_j$ balioak:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} ; \mathbf{y}_2 = B^{-1}\mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \\ z_2 - c_2 = \mathbf{c}_B^T \mathbf{y}_2 - c_2 = (4 \ 0) \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} - 5 = \boxed{3} > 0 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{a}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} ; \mathbf{y}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \\ z_3 - c_3 = (4 \ 0) \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} - 1 = \boxed{-5} < 0 \rightarrow \text{Soluzioa hobe daiteke} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{a}_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} ; \mathbf{y}_5 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ z_5 - c_5 = (4 \ 0) \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} - 0 = \boxed{-4} < 0 \rightarrow \text{Soluzioa hobe daiteke} \end{array} \right.$$

Soluzioa hobetzeko bi aukera ditugu. Zein da oinarritatuko den bektorea?

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_k / z_k - c_k &= \min \{ z_j - c_j / z_j - c_j < 0 \} = \\ &= \min \{ z_3 - c_3 = -5, z_5 - c_5 = -4 \} = -5 \end{aligned}$$

$\mathbf{a}_3$ oinarritzen da.

$$\mathbf{y}_3 = \begin{pmatrix} y_{13} \\ y_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Oinarritik irtengo den bektorea zehazteko, $\mathbf{y}_3$ bektorea eta $\mathbf{x}_B$ osagaiak kontutan izango ditugu. Oinarritik irtengo da:

$$\mathbf{a}_r / \frac{x_{Br}}{y_{r3}} = \min \{ \frac{x_{Bi}}{y_{i3}} / y_{i3} > 0 \} = \min \{ \frac{6}{2} \} = 3$$

$\mathbf{a}_4$ oinarritik irtengo da. Oinarria aldatuko da, eta berarekin batera oinarriko soluzioa eta helburu-funtzioaren balioa:

$$\hat{B} = \{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_3\}$$

$$\hat{\mathbf{x}}_B = \hat{B}^{-1} \mathbf{b} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\hat{z} = \hat{\mathbf{c}}_B^T \hat{\mathbf{x}}_B = (4 \ 1) \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} = 23 > 8$$

Soluzioa hobetu dela dakusagu,ba.

Soluzio berria kalkulatzeko ez da beharrezkoa $\hat{B}^{-1}$ kalkulatzeari, oraingoan horrela egin badugu ere. Aurreko soluzioan oinarrituz aurreko teorema ematen digun formularen bidez kalkula daiteke.

□

Adibidean ikusten da, oinarria aldatzearen ondorioz lortutako $\hat{\mathbf{x}}_B$ soluzioa bideragarria dela eta puntu horretan helburu-funtzioak aurreko puntuan baino balio hobea lortzen duela. Oinarriko ez diren bektoreei dagozkien $z_j - c_j$ balioen artean negatiborik dagoen bitartean, teorema erabiltzen jarrai dezakegu.

Halakoren batean, oinarriko ez diren bektoreen $z_j - c_j$ balioak zero baino handiago edo berdinak izango dira, eta orduan izango dugu ereduaren soluzio bideragarri optimoa. Honako teoremari esker dakigu hori.

Teorema 4.5.2 *Izan bitez*

$$\max z = \mathbf{c}^T \mathbf{x}$$

o. m. m.

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

$$\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$$

problema lineala, $\mathbf{x}_B = B^{-1}\mathbf{b}$ bere O.S.B. bat eta $z = \mathbf{c}_B^T \mathbf{x}_B$ helburu-funtzioaren balioa.

Baldin $\forall \mathbf{a}_j \in A, \quad z_j - c_j \geq 0 \Rightarrow \mathbf{x}_B$ O.S.B. Optimoa da.

Teorema hau ez dugu frogatuko. $\forall \mathbf{a}_j \in A$ -rako $z_j - c_j \geq 0$ betetzen denetan helburu-funtzioaren balioa ezin izango dugula hobetu jakitearekin nahikoa dugu. Hau hala gertatzen dela dakigu, soluzio bideragarri baten hobekuntzaren teoreman z eta $\hat{z}$ arteko erlazioa honakoa dela ikusi baitugu:

$$\hat{z} = z - \frac{x_{Br}}{y_{rk}}(z_k - c_k)$$

$\mathbf{a}_k$ bektorea oinarritzen bada, $z_k - c_k$ balio negatiboen eraginez z handitzea lortuko da.

4.5.2 Soluzio optimo bornegabeak

Problema linealen soluzio grafikoa ikustean esan dugunez, zenbait problema linealen soluzio optimoa ez da finitua. Horietan, helburu-funtzioak hartzen duen balioa amaierarik gabe haz daiteke.

Egoera horretan egoteko bete behar diren baldintzak ondoko teorema azaltzen ditu.

Teorema 4.5.3 *Demagun idazkera estandarrean dagoen problema lineala:*

$$\max z = \mathbf{c}^T \mathbf{x}$$

o. m. m.

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

$$\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$$

Eman dezagun simplex metodoaren edozein iteraziotan $z_k - c_k < 0$ duen $\mathbf{a}_k$ bektorea existitzen dela. Problema linealaren soluzioa bornegabea da baldin k horrentzat $y_{ik} \leq 0$ bada $\forall i = 1 \dots m$.

Frogapena:

Izan bedi $\mathbf{x}_B$ oinarriko soluzio bideragarri bat. Soluzio izateagatik, ereduaren murrizketak betetzen ditu:

$$x_{B1}\mathbf{a}_1 + x_{B2}\mathbf{a}_2 + \dots + x_{Bm}\mathbf{a}_m = \mathbf{b}$$

$\mathbf{a}_k$ bektoreak sartu behar badu oinarrian eta $\mathbf{y}_k$ bektorearen osagai guztiak negatiboak badira ezin izango da oinarritik bektorerik atera, oinarriko soluzio bideragarri baten hobekuntzaren teoreman ikusi baitugu irten behar duen bektoreak baldintza hori bete behar duela derrigorrez.

Aurreko adierazpenari $\theta \mathbf{a}_k$ gehitzen eta kentzen badiogu ($\theta > 0$), adierazpena ez da aldatzen.

$$x_{B1}\mathbf{a}_1 + x_{B2}\mathbf{a}_2 + \cdots + x_{Bm}\mathbf{a}_m - \theta \mathbf{a}_k + \theta \mathbf{a}_k = \mathbf{b}$$

$$\sum_{i=1}^m x_{Bi}\mathbf{a}_i - \theta \mathbf{a}_k + \theta \mathbf{a}_k = \mathbf{b} \quad (4.9)$$

$\mathbf{a}_k$ ez dago oinarrian, baina oinarriaren funtzioan idatz daiteke.

$$\mathbf{a}_k = \sum_{i=1}^m y_{ik}\mathbf{a}_i$$

$\mathbf{a}_k$ bektorearen adierazpen hori (4.9) ekuazioan ordezkatzuz gero ondokoa lortuko dugu:

$$\sum_{i=1}^m x_{Bi}\mathbf{a}_i - \theta \sum_{i=1}^m y_{ik}\mathbf{a}_i + \theta \mathbf{a}_k = \mathbf{b}$$

$$\sum_{i=1}^m (x_{Bi} - \theta y_{ik})\mathbf{a}_i + \theta \mathbf{a}_k = \mathbf{b}$$

Honela ba, zero baino handiagoak diren m osagai baino gehiago (ondorioz, ez oinarrikoa) izan ditzakeen soluzioa daukagu:

$$\begin{pmatrix} x_{B1} - \theta y_{1k} \\ x_{B2} - \theta y_{2k} \\ \vdots \\ x_{Bm} - \theta y_{mk} \\ 0 \\ \vdots \\ +\theta \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Soluzio hori bideragarria dela frogatu daiteke, x_{Bi} eta θ positiboak eta y_{ik} negatiboak direlako:

$$x_{Bi} - \theta y_{ik} \geq 0 \quad \forall i = 1 \dots m$$

$$\theta > 0$$

Beraz, F multzokoa da.

Puntu horretan helburu-funtzioaren balioa kalkulatu daiteke:

$$\begin{aligned} \hat{z} &= \sum_{i=1}^m c_{Bi}(x_{Bi} - \theta y_{ik}) + c_k \theta = \sum_{i=1}^m c_{Bi}x_{Bi} - \theta \sum_{i=1}^m c_{Bi}y_{ik} + c_k \theta = \\ &= z - \theta z_k + \theta c_k = z - \theta(z_k - c_k) \end{aligned}$$

$z_k - c_k < 0$ denez, $\hat{z} \rightarrow \infty$ -raino haz daiteke $\theta \rightarrow \infty$ -raino doan ahala. Problema ez dauka soluzio bornaturik.

□

Adibidea:

Ondoko eredu linealaren soluzio optimoa kalkulatu dugu:

$$\max z = -3x_1 + 2x_2$$

ondoko murrizketen menpe

$$x_1 - x_2 \leq 5$$

$$2x_1 - 3x_2 \leq 10$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Dagokion idazkera estandarra:

$$\max z = -3x_1 + 2x_2$$

ondoko murrizketen menpe

$$x_1 - x_2 + x_3 = 5$$

$$2x_1 - 3x_2 + x_4 = 10$$

$$x_1 \dots x_4 \geq 0$$

Oinarri bat aukeratuko dugu:

$$B = \{\mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4\} = I \quad B^{-1} = I$$

$$\mathbf{x}_B = B^{-1}\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \end{pmatrix} \text{ oinarriko soluzio bideragarria da}$$

Hobekuntzaren teorema erabiliko dugu. $z_j - c_j$ balioak kalkulatu ditugu, oinarri daitekeen bektorerik ba al den ikusteko.

$$\bullet \mathbf{a}_1 \rightarrow \mathbf{y}_1 = B^{-1}\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad z_1 = \mathbf{c}_B^T \mathbf{y}_1 = (0 \ 0) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 0$$

$$z_1 - c_1 = 3$$

$$\bullet \mathbf{a}_2 \rightarrow \mathbf{y}_2 = B^{-1}\mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad z_2 = \mathbf{c}_B^T \mathbf{y}_2 = (0 \ 0) \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix} = 0$$

$$z_2 - c_2 = -2$$

Egiazta daiteke oinarriko diren bektoreen $z_j - c_j$ balioak zero direla.

$$\bullet \mathbf{a}_3 \rightarrow \mathbf{y}_3 = B^{-1}\mathbf{a}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad z_3 = \mathbf{c}_B^T \mathbf{y}_3 = 0$$

$$z_3 - c_3 = 0$$

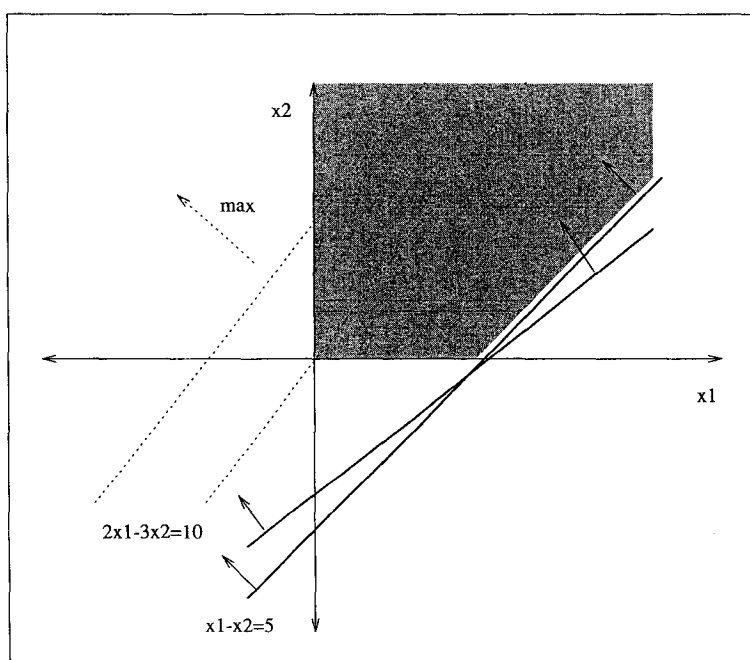
$$\bullet \mathbf{a}_4 \rightarrow \mathbf{y}_4 = B^{-1}\mathbf{a}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad z_4 = \mathbf{c}_B^T \mathbf{y}_4 = 0$$

$$z_4 - c_4 = 0$$

$$\exists z_j - c_j < 0, \quad \min \{z_j - c_j / z_j - c_j < 0\} = -2 = z_2 - c_2$$

Hortaz, a_2 oinarri sartuko da.

a_2 bektorearen koordenatu guztiak negatiboak dira. Ezin izango dugu, ba, oinarritik bektorerik atera. Lortutako soluzioa bornegabea da. Aurreko teoremako baldintzak betetzen direla ikusten da. Ikus dezagun soluzio grafikoa:



□

4.5.3 Soluzio optimo anizkoitzak

Helburu-funtzioari balio optimoa ematen dion aldagai multzoa bakarra ez bada *aukerazko soluzio optimoak* edo *soluzio optimo anizkoitzak* daudela esaten da. Soluzio anizkoitz hauek, edozein soluzio bezala, eskualde bornatu edo bornegabea aurki daitezke ondoko teoremek erakusten dutenez.

Teorema 4.5.4 *Demagun idazkera estandarrean dagoen problema lineala:*

$$\begin{aligned} \max z &= \mathbf{c}^T \mathbf{x} \\ \text{o. m. m.} \\ A\mathbf{x} &= \mathbf{b} \\ \mathbf{x} &\geq \mathbf{0} \end{aligned}$$

Izan bedi $z_j - c_j \geq 0 \quad \forall a_j \in A$. Baldin $\exists \mathbf{a}_k \in A$, $\mathbf{a}_k \notin B$, $z_k - c_k = 0$ eta k horrentzat $\exists y_{ik} > 0 \quad i = 1 \dots m \Rightarrow$ problema linealak soluzio optimo anizkoitzak ditu eta une horretako oinarria optimoa da.

Frogapena:

Izan bedi $\mathbf{x}_B$ oinarriko soluzio bideragarria.

$\forall \mathbf{a}_j \in A$, $\mathbf{a}_j \notin B$, $z_j - c_j \geq 0$ orduan $\mathbf{x}_B$ optimoa da.

$\exists z_k - c_k = 0 \rightarrow \mathbf{a}_k$ oinarrian sar daiteke. Oinarritik $\mathbf{a}_r$ aterako dugu:

$$\mathbf{a}_r / \frac{x_{Br}}{y_{rk}} = \min \left\{ \frac{x_{Bi}}{y_{ik}} / y_{ik} > 0 \right\}$$

B oinarritik $\mathbf{a}_r$ atera eta $\mathbf{a}_k$ sartuz beste $\hat{B}$ oinarri bat eta dagokion $\hat{\mathbf{x}}_B$ O.S.B. lortzen ditugu. Helburu-funtzioaren balioa orain ondokoa da:

$$\hat{z} = z - \frac{x_{Br}}{y_{rk}}(z_k - c_k) = z - 0 = z$$

Beraz, $\hat{\mathbf{x}}_B$ ere optimoa da, helburu-funtzioak aurreko $\mathbf{x}_B$ soluzio optimoarekin lortutako balio optimo berbera lortzen duelako.

□

Froga daiteke $\mathbf{x}_B$ eta $\hat{\mathbf{x}}_B$ soluzioen konbinazio ganbil guztiak soluzio bideragarri optimo direla (ez oinarrikoak). Hori frogatzen du hurrengo teorema soluzio-kopuru finiturako.

Teorema 4.5.5 *Izan bitez $\mathbf{x}_1 \dots \mathbf{x}_p$ O.S.B. Optimoak $\Rightarrow \mathbf{x}_1 \dots \mathbf{x}_p$ -ren konbinazio lineal ganbil orokortu guztiak S.B.O. (ez oinarriko) dira.*

Frogapena:

Izan bedi $\mathbf{x} = \sum_{i=1}^p \mu_i \mathbf{x}_i$, $\mu_i \geq 0$, $\forall i$, $\sum_{i=1}^p \mu_i = 1$

$\mathbf{x}$ soluzioa, bideragarria eta optimoa dela frogatu behar da.

1. $\mathbf{x}$ soluzioa da. $\forall i = 1 \dots p$ $\mathbf{x}_i$ soluzio dira, beraz $A\mathbf{x}_i = \mathbf{b}$, hau da, murrizketak betetzen dituzte.

$$A\mathbf{x} = A\left(\sum_{i=1}^p \mu_i \mathbf{x}_i\right) = \sum_{i=1}^p \mu_i A\mathbf{x}_i = \mathbf{b} \sum_{i=1}^p \mu_i = \mathbf{b} \rightarrow \text{soluzioa da.}$$

2. $\mathbf{x}$ bideragarria da. $\forall i = 1 \dots p$ $\mathbf{x}_i \geq \mathbf{0}$, bideragarriak dira.

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^p \mu_i \mathbf{x}_i, \quad \mu_i \geq 0 \quad \forall i = 1 \dots m \quad \text{izanik} \Rightarrow \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \rightarrow \mathbf{x} \text{ bideragarria da.}$$

3. $\mathbf{x}$ optimoa da. $\mathbf{x}_i$ O.S.B.O. direnez, $z^* = \mathbf{c}_i^T \mathbf{x}_i \quad \forall i = 1 \dots p$

$$\mathbf{c}^T \mathbf{x} = \mathbf{c}^T \sum_{i=1}^p \mu_i \mathbf{x}_i = \sum_{i=1}^p \mu_i \mathbf{c}^T \mathbf{x}_i = z^* \sum_{i=1}^p \mu_i = z^* \rightarrow \text{optimoa da.}$$

□

Aurreko bi teoremen baldintzetan (4.5.4 eta 4.5.5 teoremetan) lortzen diren soluzioetako aldagaiak bornatuak dira baina bornegabeko aldagaidun soluzio optimoak ere egon daitezke. Horretarako bete behar diren baldintzak ondoko teoreman aipatzen dira.

Teorema 4.5.6 *Izan bitez*

$$\max z = \mathbf{c}^T \mathbf{x}$$

o. m. m.

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

$$\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$$

problema lineala, $\mathbf{x}_B = B^{-1}\mathbf{b}$ O.S.B.O. bat, $z = \mathbf{c}_B^T \mathbf{x}_B$ helburu-funtziorako balio optimoa, hau da, $z_j - c_j \geq 0$, $\forall \mathbf{a}_j \in A$, $\mathbf{a}_j \notin B$.

Baldin $\exists \mathbf{a}_k \in A$, $\mathbf{a}_k \notin B$ $z_k - c_k = 0$ eta $y_{ik} \leq 0 \quad \forall i = 1 \dots m \Rightarrow$ aldagai bornegabeko soluzio optimo anizkoitzak daude.

Frogapena:

$\mathbf{a}_k$ bektorearen y_{ik} osagaien artean positiborik ez dagoenez, $m + 1$ osagai ez-negatiboz osatutako honelako soluzioa eraiki daiteke:

$$\hat{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} x_{B1} - \theta y_{1k} \\ x_{B2} - \theta y_{2k} \\ \vdots \\ x_{Bm} - \theta y_{mk} \\ 0 \\ \vdots \\ \theta \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{B1} \\ x_{B2} \\ \vdots \\ x_{Bm} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \theta \begin{pmatrix} -y_{1k} \\ -y_{2k} \\ \vdots \\ -y_{mk} \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\theta > 0$ da eta edozein balio har dezake. Helburu-funtzioaren balioa ondokoa da:

$$\hat{z} = z - \theta(z_k - c_k) = z$$

$z_k - c_k = 0$ denez, $\hat{z} = z$. Beraz, $\hat{\mathbf{x}}$ puntuak θ -ren bidez adierazten dituen soluzio guztiak optimoak dira. Soluzio hauek 4.5.3 teoremakoen modura eraikitzen dira, kasu honetan $z_k - c_k = 0$ izanik.

□

4.5.4 Hasierako oinarria

Idazkera estandarrean daukagun eredu lineal baten soluzio optimoa lortzeko oinarriko soluzio bideragarri batetik abiatuko gara. Lehen soluzio hori kalkulatzeko oso erraza da lehen oinarritzat oinarri kanonikoa hartzen bada. Geroago ikusiko dugu, kalkulu horiek egin daitezkeela B^{-1} kalkulatu gabe. Behin hasierako soluzio bat lortu dugula, hobekuntzaren teorema erabiliko dugu eta hasierako soluzio hori hobetu egingo dugu, optimaltasun baldintzak beteko diren arte.

Lehen oinarri kanonikoa eraikitzerakoan honako bi kasuekin egin dezakegu topo:

1. NASAITZE-ALDAGAIEZ OSATURIKO LEHEN OINARRIA.

Hasierako problema idazkera kanonikoan badago, eta $\mathbf{b} \geq \mathbf{0}$ bada, zera daukagu:

$$\begin{aligned} \max z &= \mathbf{c}^T \mathbf{x} \\ \text{o. m. m.} \\ A\mathbf{x} &\leq \mathbf{b} \\ \mathbf{x} &\geq \mathbf{0} \end{aligned}$$

Idazkera estandarrean jartzeko $\mathbf{y}$ nasaitze-aldagaien bektorea gehituko diegu murrizketei:

$$\begin{aligned} \max z &= \mathbf{c}^T \mathbf{x} \\ A\mathbf{x} + \mathbf{y} &= \mathbf{b} \\ \mathbf{x}, \mathbf{y} &\geq \mathbf{0} \end{aligned}$$

Nasaitze-aldagaien $\mathbf{y}$ bektoreari oinarri kanonikoa dagokio. Lehen oinarritzat $B=I$ hartuz gero, $B^{-1} = I$, ondoko kalkuluak egin daitezke:

$$\mathbf{x}_B = B^{-1}\mathbf{b} = I\mathbf{b} = \boxed{\mathbf{b}} \geq \mathbf{0}$$

Beraz, soluzioa bideragarria da.

- $\forall \mathbf{a}_j \in A \quad B^{-1}\mathbf{a}_j = \mathbf{y}_j \Rightarrow \mathbf{y}_j = \boxed{\mathbf{a}_j}$
- B oinarria nasaitze-bektorez osaturik egoteagatik $\mathbf{c}_B^T = \mathbf{0}$ eta $z_j = \mathbf{c}_B^T \mathbf{y}_j = 0$ betetzen dira. Hortaz, $z_j - c_j = \boxed{-c_j}$ da $\forall \mathbf{a}_j \in A$
- $z = \mathbf{c}_B^T \mathbf{x}_B = \mathbf{0} \mathbf{x}_B = \boxed{0}$

Ikusten denez, B^{-1} kalkulatzeko beharrik ez dugu izango, eta hasierako oinarriari dagozkion kalkuluak ereduaren parametro dira.

Adibidea:

Har dezagun honako eredu lineala:

$$\begin{aligned} \max z &= 2x_1 + 3x_2 \\ \text{ondoko murrizketen menpe} \\ 3x_1 + x_2 &\leq 2 \\ x_1 - x_2 &\leq 3 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Nasaitze-aldagaiak gehitu ondoren, eredua idazkera estandarrean honakoa da:

$$\begin{aligned} \max z &= 2x_1 + 3x_2 \\ \text{ondoko murrizketen menpe} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3x_1 + x_2 + x_3 &= 2 \\ x_1 - x_2 + x_4 &= 3 \end{aligned}$$

$$x_1 \dots x_4 \geq 0$$

Lehen oinarri gisa $B = I = \{\mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4\}$ hartuta zera lortzen da:

- $\mathbf{x}_B = B^{-1} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = I \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$
- $\forall \mathbf{a}_j \in A$, zera lortzen da:
 - * $\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \mathbf{y}_1 = B^{-1} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$
 - * $\mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \rightarrow \mathbf{y}_2 = B^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$$* \mathbf{a}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \mathbf{y}_3 = B^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$* \mathbf{a}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \mathbf{y}_4 = B^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

• $\mathbf{c}_B^T = \mathbf{0}^T$ izanik zera lortzen da:

$$* \mathbf{a}_1 \rightarrow z_1 - c_1 = \mathbf{c}_B^T \mathbf{y}_1 - c_1 = \mathbf{0}^T \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} - 2 = -2$$

$$* \mathbf{a}_2 \rightarrow z_2 - c_2 = \mathbf{c}_B^T \mathbf{y}_2 - c_2 = \mathbf{0}^T \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} - 3 = -3$$

$$* \mathbf{a}_3 \rightarrow z_3 - c_3 = \mathbf{c}_B^T \mathbf{y}_3 - c_3 = \mathbf{0}^T \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - 0 = 0$$

$$* \mathbf{a}_4 \rightarrow z_4 - c_4 = \mathbf{c}_B^T \mathbf{y}_4 - c_4 = \mathbf{0}^T \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} - 0 = 0$$

$$• z = \mathbf{c}_B^T \mathbf{x}_B = \mathbf{0}^T \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = 0$$

Argi gelditzen da problemak ematen dizkigun datuekin hobekuntzaren teorema erabiltzen has gaitezkeela B^{-1} kalkulatzeko beharrik izan gabe.

2. ALDAGAI ARTIFIZIALAK LEHEN OINARRIAN

Ereduaren murrizketen artean $=$ edo $\geq$ erako murrizketarik baldin badago, nasaitze-aldagiaez osatutako oinarri kanonikorik ezin izango da lortu. Hori konpontzeko *aldagai artifizial* izena hartzen duten aldagaiak erabiltzen dira.

Adibidea:

Demagun ondorengo eredu lineala:

$$\max z = 3x_1 + x_2$$

ondoko murrizketen menpe

$$x_1 + x_2 \leq 3$$

$$x_1 + 2x_2 \geq 2$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Idazkera estandarrean jartzeko nasaitze-aldagai bana gehitu eta kenduko diegu murrizketen ezker aldeei, hurrenez hurren.

$$\max z = 3x_1 + x_2$$

ondoko murrizketen menpe

$$x_1 + x_2 + x_3 = 3$$

$$x_1 + 2x_2 - x_4 = 2$$

$$x_1 \dots x_4 \geq 0$$

Lehen oinarritzat $B = \{\mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4\}$ aukeratuko bagenu, hasierako kalkuluak:

- Oinarriko soluzioa:

$$B = B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{x}_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Bideragarria ez den hasierako soluzioa lortuko genukeela dakusagu.

Bigarren murrizketan aldagai artifizial bat gehituko dugu. Honela geldituko zaizkigu murrizketak:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 3$$

$$x_1 + 2x_2 - x_4 + w_1 = 2$$

$w_1 \geq 0$ aldagai artifizialari esker, lehen oinarria $B = \{\mathbf{a}_3, \mathbf{a}_{w_1}\}$ oinarri kanonikoa da eta lortuko dugun lehen soluzioa oinarriko soluzio bideragarria (O.S.B.) da:

$$\mathbf{x}_B = B^{-1}\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_3 \\ w_1 \end{pmatrix}$$

Hori soluzioa bada, baina ez hasierako problemarena, aldagai artifiziala $w_1 = 2 > 0$ delako. Aldagai artifiziala positiboa (eta ez zero) izateak, hasierako $x_1 + 2x_2 - x_4 = 2$ murrizketa ez betetzea eragiten du.

Guri, noski, hasierako problemaren (aldagai artifizialak sartu aurretik geneukan problemaren) soluzioak interesatzen zaizkigu. Horretarako, $w_1 = 0$ izango duten soluzioak lortu nahi ditugu. Horietara iristeko helburu-funtzioa zenbaki handi batez zigortuko dugu. Kalkuluak eskuz egiteko nahikoa da finkatu gabeko $-M$ zenbaki negatibo handi batez zigortzea. Balio negatibo handi horri esker, aldagai artifiziala oinarrian mantentzea kostu handikoa izango da, eta berehala aldagai artifiziala oinarritik irtengo dela ikusiko dugu. Behin aldagai artifiziala oinarriko ez denean, dauzkagun soluzioak hasierako problemaren soluzio ere izango dira beti; bestela, hasierako problemak ez du soluziorik izango.

$$\max z = 3x_1 + x_2 - Mw_1$$

ondoko murrizketen menpe

$$x_1 + x_2 + x_3 = 3$$

$$x_1 + 2x_2 - x_4 + w_1 = 2$$

$$x_1 \dots x_4, w_1 \geq 0$$

- $\forall \mathbf{a}_j \in A$, $\mathbf{y}_j = B^{-1}\mathbf{a}_j \Rightarrow \mathbf{y}_j = \mathbf{a}_j$.
- $z_j - c_j$ kalkulatzeko $\mathbf{c}_B^T = (0 \quad -M)$ dela kontutan izan beharko dugu.

$$* \quad z_1 - c_1 = (0 \quad -M) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - 3 = -M - 3$$

$$* \quad z_2 - c_2 = (0 \quad -M) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} - 1 = -2M - 1$$

$$* \quad z_3 - c_3 = (0 \quad -M) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

$$* \quad z_4 - c_4 = (0 \quad -M) \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = M$$

$$* \quad z_{w1} - c_{w2} = (0 \quad -M) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + M = 0$$

$$• \quad z = (0 \quad -M) \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = -2M$$

Aldagai artifizialek oinarria uzten dutenean ez dira berriz oinarrituko, helburu-funtzioa zigortuta dagoelako. Une horretatik aurrera lortzen diren soluzioak hasierako problemaren soluzio ere badira.

4.5.5 Simplex metodoaren taula

Demagun idazkera kanonikoan dagoen eredu lineal baten A matrizea $m \times n$ neurrikoa dela, eta idazkera estandarra izateko m nasaitze-aldagai sartzen direla.

Simplex metodoaren edozein iteraziotako informazioa era honetako taula batean jasotzen da:

		HASIERAKO ALDAGAIK			ALDAGAI LAGUNTZAILEAK		
		x_1	$\dots$	x_n	x_{n+1}	$\dots$	x_{n+m}
O.B.		$z_1 - c_1$	$\dots$	$z_n - c_n$	$z_{n+1} - c_{n+1}$	$\dots$	$z_{n+m} - c_{n+m}$
c_{B1}	$\mathbf{a}_{B1}$	y_{11}	$\dots$	y_{1n}	$y_{1,n+1}$	$\dots$	$y_{1,n+m}$
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$			$\vdots$	
c_{Bm}	$\mathbf{a}_{Bm}$	y_{m1}	$\dots$	y_{mn}	$y_{m,n+1}$	$\dots$	$y_{m,n+m}$
		</					

		x_1	x_2	x_3	x_4	
		-2	-3	0	0	0
0	$\mathbf{a}_3$	3	1	1	0	2
0	$\mathbf{a}_4$	1	-1	0	1	3

□

Oro har, simplex metodoaren taula honela idatz daiteke:

		$x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n$	$x_{n+1} \ x_{n+2} \ \dots x_{n+m}$
		$\mathbf{c}_B^T B^{-1} A - \mathbf{c}^T$	$\mathbf{c}_B^T B^{-1}$
c_{B1}	$\mathbf{a}_{B1}$	$B^{-1} A$	B^{-1}
c_{B2}	$\mathbf{a}_{B2}$		
	$\vdots$		
c_{Bm}	$\mathbf{a}_{Bm}$		
			$\mathbf{x}_B$

Lehenengo taulan identitate matrizea zegoen zutabeetan aurkitzen da B^{-1} , simplex metodoaren edozein iteraziotan gaudela ere. Lehen oinarria nasaitze-aldagaiez osaturik bazegoen, orduan goiko taulan adierazitako lekuan agertuko da. Bestela, zutabeen kokapena identifikatu egin beharko da.

Ondoko adibidean ikusiko dugunez, aldagai artifizialak behar izatekotan taula berdin osatzen da.

Adibidea:

Har dezagun 101. orriko adibidea eta begira dagokion simplex taula:

		x_1	x_2	x_3	x_4	w_1	
		-M-3	-2M-1	0	M	0	-2M
0	$\mathbf{a}_3$	1	1	1	0	0	3
-M	$\mathbf{a}_{w1}$	1	2	0	-1	1	2

Identitate-matrizea x_3 eta w_1 bektoreei dagozkien zutabeek osatzen dute oraingoan. Zutabe horietan egongo da B^{-1} iterazio guztietan.

□

4.6 Simplex algoritmoa

Demagun idazkera estandarrean dagoen eredu lineala daukagula, eta beharrezko aldagaiak gehitu dizkiogula lehen oinarria $B = I$ identitatea izateko. Honakoak dira simplex metodoan jarraitu beharreko urratsak:

1. urratsa: Hasierako taula eraiki.
2. urratsa:
 - Baldin $\forall a_j \in A$, $a_j \notin B$ $z_j - c_j \geq 0 \rightarrow$ 3. urratsera joan.
 - Baldin $\exists z_j - c_j < 0 \Rightarrow$ Soluzioa hobe daiteke. 4. urratsera joan.
3. urratsa:
 - Baldin oinarrian aldagai artifizialik ez badago, orduan daukagun soluzioa **optimoa** da.
 - * Baldin $\exists a_k \in A$, $a_k \notin B$ zeinarentzat $z_k - c_k = 0$ den, eta k horrentzat $\exists y_{ik} > 0 \quad i = 1 \dots m$, orduan problemak **soluzio optimo anizkoitzak** ditu. Joan 5. urratsera.
 - * Baldin $\exists a_k \in A$, $a_k \notin B$ zeinarentzat $z_k - c_k = 0$ eta k horrentzat $y_{ik} \leq 0 \quad \forall i = 1 \dots m$ orduan problemak **soluzio optimo anizkoitzak** ditu. Soluzioaren aldagairen bat bornegabea da. Amaitu.
 - * Bestela x_B da soluzio optimo bakarra. Amaitu.
 - Bestela, **problemak ez dauka soluziorik**. Amaitu.
4. urratsa:
 - Baldin $z_j - c_j < 0$ balioren batetarako, bere y_j bektorearen osagai guztiak zero baino txikiago edo berdinak badira, orduan **soluzioa bornegabea** da. Amaitu.

- Bestela, 5. urratsera joan.

5. urratsa: Oinarrira sartuko den $\mathbf{a}_k$ bektorea eta oinarritik irtengo den $\mathbf{a}_r$ bektorea aukeratuko ditugu.

- Oinarrira sartuko den $\mathbf{a}_k$ bektorea:

$$z_k - c_k = \text{Min} \{z_j - c_j / z_j - c_j \leq 0\}$$

Oinarrira sartzen den $\mathbf{a}_k$ bektorearen koordenatuak $\mathbf{y}_k$ bektorekoak dira. Zutabe hau *pibot-zutabea* da.

- Oinarritik irtengo den $\mathbf{a}_r$ bektoreak hau beteko du:

$$\frac{x_{Br}}{y_{rk}} = \text{Min} \left\{ \frac{x_{Bi}}{y_{ik}} / y_{ik} > 0 \right\}$$

Oinarriratzen den $\mathbf{a}_k$ bektoreak eta oinarritik irtetzen den $\mathbf{a}_r$ bektoreak y_{rk} elementua finkatzen dute. Hau *pibot*-a da eta lerroa *pibot-lerroa* da. Joan 6. urratsera.

6. urratsa: Hurrengo taula kalkulatu:

- Lehen zutabea oinarri eguneratua osatzen duten bektoreak idatzi.
- Taulako r lerroa kalkulatzeko aurreko taulako r lerroa (pibot-lerroa) pibot-az zatituko dugu.
- Gainontzeko i lerroak ($i \neq r$) lortzeko zenbait biderkatzaile erabiliko dugu. Biderkatzaile hauek soluzioaren hobekuntzaren teorematik eratortzen dira, frogapenik ikusiko ez badugu ere. Lerro bakoitzarentzat biderkatzaile bat kalkulatu dugu.

$$* \text{ 1. lerroko biderkatzailea } \rightarrow \frac{y_{1k}}{y_{rk}}$$

$$* \text{ 2. lerroko biderkatzailea } \rightarrow \frac{y_{2k}}{y_{rk}}$$

$\vdots$

$$* \text{ m. lerroko biderkatzailea } \rightarrow \frac{y_{mk}}{y_{rk}}$$

Biderkatzaile horiek lortzeko pibot-zutabeko y_{ik} balioak erabiltzen dira. i lerro berri bakoitza kalkulatzeko, aurreko taulako i lerroari zera kendu behar zaio: pibot-lerroa, lerroari dagokion biderkatzaileaz biderkatuta. Lerro adierazlea ere berdin kalkulatzen da. 2. urratsera joan

Taula eguneratuaren zutabeak lortzeko egiten diren kalkulu guzti hauek hobekuntzaren teoreman frogatutakoak dira. Ikus dezagun, adibide baten bidez, simplex algoritmoa nola erabiltzen den.

Adibidea:

Programazio linealeko ondoko problema ebatziko dugu simplex metodoa erabiliz:

$$\begin{aligned} \max z &= 7x_1 + 4x_2 + 6x_3 + 5x_4 \\ \text{ondoko murrizketen menpe} \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 &\leq 10 \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 + 2x_4 &\leq 26 \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 &\leq 45 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 &\geq 0 \end{aligned}$$

Idazkera estandarrean:

$$\begin{aligned} \max z &= 7x_1 + 4x_2 + 6x_3 + 5x_4 \\ \text{ondoko murrizketen menpe} \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 &= 10 \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 + 2x_4 + x_6 &= 26 \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 + x_7 &= 45 \\ x_1 \dots x_7 &\geq 0 \end{aligned}$$

Hona hemen simplex metodoa erabiliz lortutako kalkulu guztiak. Oinarritzen den bektorea eta oinarritik irtetzen dena gezi baten bidez

adieraziak daude, eta pibot balioa lauki batez inguratua dator, metodoaren urratsen jarraipena errazagoa izan dadin. Gainera, eskubialdean lerroen biderkatzaileak idatzi ditugu.

Jarraitutako pauso guztiak taulen ondoren zehaztuak datoz pausoz-pauso.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7		Biderk.
	$-7\downarrow$	-4	-6	-5	0	0	0	0	$-\frac{7}{2}$
$\mathbf{a}_5$	$\boxed{2}$	1	2	1	1	0	0	10 $\leftarrow$	
$\mathbf{a}_6$	2	-1	4	2	0	1	0	26	1
$\mathbf{a}_7$	3	1	-2	3	0	0	1	45	$\frac{3}{2}$
	0	$-\frac{1}{2}$	1	$-\frac{3}{2}\downarrow$	$\frac{7}{2}$	0	0	35	-3
$\mathbf{a}_1$	1	$\frac{1}{2}$	1	$\boxed{\frac{1}{2}}$	$\frac{1}{2}$	0	0	5 $\leftarrow$	
$\mathbf{a}_6$	0	-2	2	1	-1	1	0	16	2
$\mathbf{a}_7$	0	$-\frac{1}{2}$	-5	$\frac{3}{2}$	$-\frac{3}{2}$	0	1	30	3
	3	1	4	0	5	0	0	50	
$\mathbf{a}_4$	2	1	2	1	1	0	0	10	
$\mathbf{a}_6$	-2	-3	0	0	-2	1	0	6	
$\mathbf{a}_7$	-3	-2	-8	0	-3	0	1	15	

1. iterazioa

Taula hasieratu. Ondoren, oinarritik irtengo den eta oinarritutako den bektoreak finkatuko ditugu:

- Oinarritatu? $\text{Min}\{-7, -4, -6, -5\} = -7 \rightarrow \mathbf{a}_1$ bektorea sartuko da
- Irten? $\text{Min}\{\frac{10}{2}, \frac{26}{2}, \frac{45}{3}\} = \text{Min}\{5, 13, 15\} = 5 \rightarrow \mathbf{a}_5$ bektorea irtengo da
- Pibot balioa 2 da

- Pibot-lerroren eguneraketa: Lerro bera pibot balioaz zatitu besterik ez da egin behar. Honela, $\frac{2}{2}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{2}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{0}{2}$, $\frac{0}{2}$, $\frac{10}{2}$ balioak lortzen dira.
- Gainontzeko lerroen eguneraketa:

* Lerro adierazlea. Biderkatzailea: $-\frac{7}{2}$

$$\begin{aligned} (-7, -4, -6, -5, 0, 0, 0, 0) - \left(-\frac{7}{2}\right)(2, 1, 2, 1, 1, 0, 0, 10) = \\ = \left(0, -\frac{1}{2}, 1, -\frac{3}{2}, \frac{7}{2}, 0, 0, 35\right) \end{aligned}$$

* 2. lerroa. Biderkatzailea: 1

$$\begin{aligned} (2, -1, 4, 2, 0, 1, 0, 26) - 1(2, 1, 2, 1, 1, 0, 0, 10) = \\ = (0, -2, 2, 1, -1, 1, 0, 16) \end{aligned}$$

* 3. lerroa. Biderkatzailea: $\frac{3}{2}$

$$\begin{aligned} (3, 1, -2, 3, 0, 0, 1, 45) - \frac{3}{2}(2, 1, 2, 1, 1, 0, 0, 10) = \\ = \left(0, -\frac{1}{2}, -5, \frac{3}{2}, -\frac{3}{2}, 0, 1, 30\right) \end{aligned}$$

2. iterazioa

Bigarren taula: $\exists z_j - c_j < 0$; $z_2 - c_2$, $z_4 - c_4 \Rightarrow$ soluzioa ez da optimoa.

- Oinarritatu? $\text{Min} \left\{-\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}\right\} = -\frac{3}{2} \rightarrow \mathbf{a}_4$ bektorea
- Irten? $\text{Min} \left\{\frac{5}{\frac{1}{2}}, \frac{16}{1}, \frac{30}{\frac{3}{2}}\right\} = \text{Min} \{10, 16, 20\} = 10 \rightarrow \mathbf{a}_1$ bektorea
- Pibot balioa: $\frac{1}{2}$
- Pibot-lerroaren kalkuluak:

$$2 \left(1, \frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, 0, 5\right) = (2, 1, 2, 1, 1, 0, 0, 10)$$

- Gainontzeko lerroenak:

* Lerro adierazlea. Biderkatzailea: -3

$$\begin{aligned} (0, -\frac{1}{2}, 1, -\frac{3}{2}, \frac{7}{2}, 0, 0, 35) + 3(1, \frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, 0, 5) = \\ = (3, 1, 4, 0, 5, 0, 0, 50) \end{aligned}$$

* 2. lerroa. Biderkatzailea: 2

$$\begin{aligned} (0, -2, 2, 1, -1, 1, 0, 16) - 2(1, \frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, 0, 5) = \\ = (-2, -3, 0, 0, -2, 1, 0, 6) \end{aligned}$$

* 3. lerroa. Biderkatzailea: 3

$$\begin{aligned} (0, -\frac{1}{2}, -5, \frac{3}{2}, -\frac{3}{2}, 0, 1, 30) - 3(1, \frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, 0, 5) = \\ = (-3, -2, -8, 0, -3, 0, 1, 15) \end{aligned}$$

Une honetan $z_j - c_j$ balio guztiak positiboak dira. Simplex metodoa amaitu da. Lortu dugun soluzioa optimoa da, $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ eta $x_4 = 10$ alegia, eta helburu-funtzioak lortuko duen balioa maximoa da ($z = 50$). O.S.B.O. bakarra da, $z_j - c_j > 0 \quad \forall a_j \notin B$ delako.

□

Lehenengo $B = I$ oinarria sortzeko nasaitze-aldagaiak erabili ditugu. Horrekin nahikoa ez balitz, aldagai artifizialak erabiliko genituzke, eta soluzio optimoa ondoko bi metodoetariko baten bidez kalkulatu genuke: zigortze-metodoa edo bi faseetako metodoa.

4.7 Zigortze-metodoa

Hasierako oinarri kanonikoa eraikitzeko, nasaitze-aldagaiak gehitzeaz gain aldagai artifizialak gehitzeko beharra somatzen dugunean erabiliko dugu metodo hau. Behar adina aldagai artifizial gehituko dugu, lehen oinarriko soluzioa (x_B) zuzenean lortuko dugularik.

Murritzketetan aldagai artifizialak gehitzeak hasierako problemaren formulaketa aldatzen digu, eta ondorioz, lortutako soluzio optimoan

aldagai artifizialik baldin badago, soluzio hori ez da gure hasierako problemaren soluzio izango, ez dituelako murrizketak beteko. Hori gerta ez dakigun, sartu berri ditugun aldagai artifizialek soluzioan zero balioa hartzea behar-beharrezkoa izango da, orduan bakarrik izango baita hasierako problemaren soluzio.

Hori lortzeko helburu-funtzioa zigortu egiten da. Honen ondoren simplex metodoaren urratsak jarraitu behar dira. Aldagai artifizialak oinarrian dauden bitartean helburu-funtzioak oso balio txarrak hartuko ditu. Honek aldagai artifizialak oinarritik kanporatuak izatea eragiten du, zero balioa hartuko dutelarik; behin aldagai artifizial guztiak oinarritik kanpo ditugunean, lortuko ditugun soluzioak hasierako problemarenak ere izango dira. Baina, aldagai artifizial horietarikoren bat oinarritik kanporatzea lortuko ez bagenu, hasierako problemak ez luke soluziorik izango.

Hau guztia dagoeneko aipatu dugu aldagai artifizialez osaturiko lehen oinarria aztertzerakoan (ikus 100. orria). Hala ere, prozesu osoa garatuko dugu zenbait adibideren bidez.

Adibidea:

Ondoko problema lineala ebatziko dugu zigortze-metodoa erabiliz:

$$\begin{aligned} \max z &= -5x_1 + 6x_2 + 7x_3 \\ \text{ondoko murrizketen menpe} \\ 2x_1 + 10x_2 - 6x_3 &\geq 30 \\ \frac{5}{2}x_1 - 3x_2 + 5x_3 &\leq 10 \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 &= 5 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

Dagokion forma estandarra, B=I lortzeko aldagai artifizialak gehituz:

$$\max z = -5x_1 + 6x_2 + 7x_3 - Mw_1 - Mw_2$$

ondoko murrizketen menpe

$$\begin{array}{rclclclcl}
2x_1 + 10x_2 - 6x_3 & -x_4 & & +w_1 & & = & 30 \\
\frac{5}{2}x_1 - 3x_2 + 5x_3 & & & +x_5 & & = & 10 \\
2x_1 + 2x_2 + 2x_3 & & & & & +w_2 & = 5
\end{array}$$

$$x_1 \dots x_5, w_1, w_2 \geq 0$$

Bi aldagai artifizial behar izan ditugu. Helburu-funtzioa zigortzeko erabilitako M balioa positiboa da. Zigortze-metodoa erabiliko dugu problema ebazteko, aldagai artifizialak sartu behar izan ditugulako. Lerro adierazlea kalkulatzean kontutan izan behar da oinarrian aldagai artifizialak egoteagatik $\mathbf{c}_B = (-M \ 0 \ -M)$ dela.

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	w_1	w_2	
		$-4M+5$	$-12M-6\downarrow$	$4M-7$	M	0	0	0	$-35M$
-M	$\mathbf{a}_{w1}$	2	10	-6	-1	0	1	0	30
0	$\mathbf{a}_5$	$\frac{5}{2}$	-3	5	0	1	0	0	10
-M	$\mathbf{a}_{w2}$	2	$\boxed{2}$	2	0	0	0	1	$5 \leftarrow$
		$8M+11$	0	$16M-1$	M	0	0	$5M+3$	$-5M+15$
-M	$\mathbf{a}_{w1}$	-8	0	-16	-1	0	1	-5	5
0	$\mathbf{a}_5$	$\frac{11}{2}$	0	8	0	1	0	$\frac{3}{2}$	$\frac{35}{2}$
6	$\mathbf{a}_2$	1	1	1	0	0	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{2}$

Azken taulan $z_j - c_j \geq 0 \quad \forall \mathbf{a}_j \in A$ betetzen denez, simplex metodoaren iterazioak bukatu dira. Problema ez du soluziorik oinarrian aldagai artifizial bat gelditu zaigulako.

□

Adibidea:

Ebatz dezagun beste eredu lineal hau:

$$\max z = 3x_1 - 5x_2$$

ondoko murrizketen menpe

$$x_1 \leq 4$$

$$x_2 \leq 5$$

$$4x_1 + 2x_2 \geq 20$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Nasaitze-aldagaiak gehitu ondoren ondokoa lortzen dugu:

$$\max z = 3x_1 - 5x_2$$

ondoko murrizketen menpe

$$x_1 \quad \quad + x_3 \quad \quad = 4$$

$$\quad x_2 \quad \quad + x_4 \quad \quad = 5$$

$$4x_1 \quad + 2x_2 \quad \quad \quad - x_5 = 20$$

$$x_1, x_2 \dots x_5 \geq 0$$

Aldagai artifizial bat sartuko dugu hirugarren murrizketan identitate matrizea osatzeko:

$$\max z = 3x_1 - 5x_2 - Mw_1$$

ondoko murrizketen menpe

$$x_1 \quad \quad + x_3 \quad \quad = 4$$

$$\quad x_2 \quad \quad + x_4 \quad \quad = 5$$

$$4x_1 \quad + 2x_2 \quad \quad \quad - x_5 + w_1 = 20$$

$$x_1 \dots x_5, w_1 \geq 0$$

Zigortze-metodoa erabiliz:

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	w_1	
		$-3-4M\downarrow$	$5-2M$	0	0	M	0	$-20M$
0	$\mathbf{a}_3$	1	0	1	0	0	0	4 $\leftarrow$
0	$\mathbf{a}_4$	0	1	0	1	0	0	5
-M	$\mathbf{a}_{w1}$	4	2	0	0	-1	1	20
		0	$-2M+5\downarrow$	$3+4M$	0	M	0	$-4M+12$
3	$\mathbf{a}_1$	1	0	1	0	0	0	4
0	$\mathbf{a}_4$	0	1	0	1	0	0	5
-M	$\mathbf{a}_{w1}$	0	2	-4	0	-1	1	4 $\leftarrow$
		0	0	13	0	$\frac{5}{2}$	$M - \frac{5}{2}$	2
3	$\mathbf{a}_1$	1	0	1	0	0	0	4
0	$\mathbf{a}_4$	0	0	2	1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	3
-5	$\mathbf{a}_2$	0	1	-2	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	2

$\forall \mathbf{a}_j \in A \quad z_j - c_j \geq 0$ betetzen denez, metodoa amaitu da. Oinarrian aldagai artifiziale ez dagoenez lortu dugun soluzioa optimoa da hasierako ereduarentzat ere.

$$\bullet \mathbf{x}_B = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ O.S.B.O. da.}$$

$$\bullet z^* = 2$$

$$\bullet \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ - \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ - \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

□

Adibidea:

Ebatz dezagun beste eredu lineal bat:

$$\max z = x_1 - 3x_2$$

ondoko murrizketen menpe

$$x_1 + x_2 \geq 2$$

$$4x_1 + x_2 \geq 6$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Idazkera estandarra lortu ondoren $B = I$ lortzeko aldagai artifizialen beharra somatzen dugu. Beraz, zigortze-metodoa erabili beharko dugu problema ebazteko. Eredua:

$$\max z = x_1 - 3x_2 - Mw_1 - Mw_2$$

ondoko murrizketen menpe

$$x_1 + x_2 - x_3 + w_1 = 2$$

$$4x_1 + x_2 - x_4 + w_2 = 6$$

$$x_1 \dots x_4, w_1, w_2 \geq 0$$

Simplex metodoaren pausoak:

	x_1	x_2	x_3	x_4	w_1	w_2	
	-5M-1	-2M+3	M	M	0	0	-8M
$\mathbf{a}_{w1}$	1	1	-1	0	1	0	2
$\mathbf{a}_{w2}$	4	1	0	-1	0	1	6
	0	$-\frac{3}{4}M + \frac{13}{4}$	M	$-\frac{1}{4}M - \frac{1}{4}$	0	$\frac{5}{4}M + \frac{1}{4}$	$\frac{3}{2} - \frac{M}{2}$
$\mathbf{a}_{w1}$	0	$\frac{3}{4}$	-1	$\frac{1}{4}$	1	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$
$\mathbf{a}_1$	1	$\frac{1}{4}$	0	$-\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{2}$
	0	0	$\frac{13}{3}$	$-\frac{4}{3}$	$M - \frac{13}{3}$	$M + \frac{4}{3}$	$-\frac{2}{3}$
$\mathbf{a}_2$	0	1	$-\frac{4}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{4}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$
$\mathbf{a}_1$	1	0	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{4}{3}$
	0	4	-1	0	M+1	M	2
$\mathbf{a}_4$	0	3	-4	1	4	-1	2
$\mathbf{a}_1$	1	1	-1	0	1	0	2

$z_3 - c_3 < 0 \rightarrow$ soluzioa hobe daiteke $\mathbf{a}_3$ oinarrituz.

$y_{i3} \leq 0 \quad i = 1, 2 \Rightarrow$ Oinarritik ezin dezakegu bektorerik atera.

Soluzioa bornegabea da.

□

4.8 Bi faseetako metodoa

Metodo hau ere, zigortze-metodoaren antzera, lehenengo oinarri kano-nikoa lortzeko aldagai artifizialak erabili behar direnean erabiltzen da. Hauek dira metodoaren bi faseak:

1. Lehen fasean hasierako problemaren murrizketak erabiltzen dira, baina hasierako problemaren helburu-funtzioa hartu beharrean beste bat eraikitzen da; aldagai artifizial guztien arteko batura minimizatzen duena da fase honetan erabiltzen den helburu-funtzioa. Soluzioa lortzeko simplex metodoa erabiltzen da.

- Baldin eraiki berri den helburu-funtzioaren balio optimoa zero baino handiagoa bada, orduan hasierako problemak ez dauka soluziorik.
- Bestela, soluzioa existitzen da eta berau lortzeko bigarren fasean jarraitzen da.

2. Fase honetan optimizatzen den helburu-funtzioa jatorrizko problemarena da. Lehen fasean lortutako taula optimoan lerro adierazlea besterik ez da aldatzen. Lerro adierazlea kalkulatu ondoren simplex metodoaren urratsekin jarraitzen da optimaltasun baldintzak lortu arte.

Azkenean, metodo honen eta zigortze-metodoaren helburua berbera dela ikusten da; lehenengo $B=I$ oinarria lortzea, alegia.

Adibidea:

Bi faseetako metodoa erabiliz ondoko problema lineala ebatziko dugu:

$$\max z = 2x_1 + 3x_2 - 5x_3$$

ondoko murrizketen menpe

$$2x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 14$$

$$-2x_1 + 5x_2 - x_3 \leq -10$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

Idazkera estandarrari beharrezko aldagai artifizialak gehitu ondoren hauxe da lortzen den eredua:

$$\max z = 2x_1 + 3x_2 - 5x_3$$

ondoko murrizketen menpe

$$2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + w_1 = 14$$

$$2x_1 - 5x_2 + x_3 - x_4 + w_2 = 10$$

$$x_1 \dots x_4, w_1, w_2 \geq 0$$

Kasu honetan ez dugu helburu-funtzioa zigortzen bi faseetako metodoa erabiliko baitugu. Has gaitezen.

1. fasea: Helburu-funtzioa:

$$\min (w_1 + w_2)$$

Simplex algoritmoa erabiltzeko helburuak maximizatze moduan egon behar du.

$$\max (-w_1 - w_2)$$

Beraz, daukagun eredu lineala honakoa da:

$$\max z = -w_1 - w_2$$

ondoko murrizketen menpe

$$2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + w_1 = 14$$

$$2x_1 - 5x_2 + x_3 - x_4 + w_2 = 10$$

$$x_1 \dots w_2 \geq 0$$

Kalkuluak eginez:

		x_1	x_2	x_3	x_4	w_1	w_2	
		-4↓	3	-3	1	0	0	-24
-1	$\mathbf{a}_{w1}$	2	2	2	0	1	0	14
-1	$\mathbf{a}_{w2}$	2	-5	1	-1	0	1	10 ←
		0	-7↓	-1	-1	0	2	-4
-1	$\mathbf{a}_{w1}$	0	7	1	1	1	-1	4 ←
0	$\mathbf{a}_1$	1	$-\frac{5}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	5
		0	0	0	0	1	1	0
0	$\mathbf{a}_2$	0	1	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{7}$	$-\frac{1}{7}$	$\frac{4}{7}$
0	$\mathbf{a}_1$	1	0	$\frac{6}{7}$	$-\frac{1}{7}$	$\frac{5}{14}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{45}{7}$

Lehen faserako optimoa lortu da eta $\mathbf{w} = \mathbf{0}$ da. Beraz, hasierako problemarentzako soluzioa existitzen da. Jarrai dezagun aurrera.

2. fasea: Helburu-funtziotzat hasierakoa hartzen da orain.

$$\max z = 2x_1 + 3x_2 - 5x_3$$

Helburu-funtzioa aldatzeak lerro-adierazlean besterik ez du eragiten. Kalkuluak eginez,

- $z_1 - c_1 = (3 \ 2) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} - 2 = 0$
- $z_2 - c_2 = (3 \ 2) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - 3 = 0$
- $z_3 - c_3 = (3 \ 2) \begin{pmatrix} \frac{1}{7} \\ \frac{6}{7} \end{pmatrix} + 5 = \frac{15}{7} + 5 = \frac{50}{7}$
- $z_4 - c_4 = (3 \ 2) \begin{pmatrix} \frac{1}{7} \\ -\frac{1}{7} \end{pmatrix} - 0 = \frac{1}{7}$
- $z = (3 \ 2) \begin{pmatrix} \frac{4}{7} \\ \frac{45}{7} \end{pmatrix} - 0 = \frac{102}{7}$

Hasierako problema linealari dagokion taula ondokoa da:

		x_1	x_2	x_3	x_4	
		0	0	$\frac{50}{7}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{102}{7}$
3	$\mathbf{a}_2$	0	1	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{4}{7}$
2	$\mathbf{a}_1$	1	0	$\frac{6}{7}$	$-\frac{1}{7}$	$\frac{45}{7}$

$z_j - c_j \geq 0$ denez $\forall \mathbf{a}_j \in A \quad \mathbf{a}_j \notin B$ O.S.B.O. :

$$\mathbf{x}_B = \begin{pmatrix} \frac{4}{7} \\ \frac{45}{7} \end{pmatrix}$$

Bigarren fasea, eta honekin bi faseetako metodoa, amaitutzat eman daiteke. $z_j - c_j$ negatiborik balego simplex metodoa erabiliko genuke optimoa lortu arte.

□

4.9 Simplex berrikusiaren metodoa

Tamaina txikiko problemak eskuz ebazteko egokia da simplex metodoa. Aldiz, problema handi xamarra denean konputagailuaren laguntza ezinbestekoa gertatuko zaigu. Algoritmoa konputagailuan ahalik eta eraginkorrena izan dadin konputagailu programek *simplex berrikusiaren metodoa* izena duen simplex metodoaren egokitzapena erabiltzen dute. Horretaz gain, zigortze-metodoa erabiltzen denean M zenbakia finkatu behar da.

Simplex metodoaren iterazio bakoitzean oinarria aldatu eta beste taula bat kalkulatzeko dela ikusi dugu. Kalkulu horietariko zenbait ez da beharrezko beste oinarri bat finkatzeko. Simplex berrikusiaren metodoan kalkuluak minimora murrizten dira, algoritmoa ahalik eta eraginkorrena izan dadin.

Izan bedi

$$\max z = \mathbf{c}^T \mathbf{x}$$

o. m. m.

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

$$\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$$

eredu lineala. B oinarria izanik, negatiboa izango den

$$z_j - c_j = \mathbf{c}_B^T B^{-1} \mathbf{a}_j - c_j$$

balioen bat existitzen al den begiratu behar dugu.

Simplex berrikusiaren metodoak ez ditu $\mathbf{y}_j$ bektore guztiak aldatzen eta gordetzen beste taula bat kalkulatzen duen bakoitzean; horren ordez, A matrizeko $\mathbf{a}_j$ bektoreekin egiten du lan, pausoero beharrezko $\mathbf{y}_j$ zutabeak besterik ez kalkulatzen.

$\mathbf{c}_B^T B^{-1}$ kalkulatzen da, oinarriarekiko aldatzen delako.

1. Baldin $z_j - c_j = \mathbf{c}_B^T B^{-1} \mathbf{a}_j - c_j \geq 0 \quad \forall j \rightarrow$ soluzio optimoa daukagu.
2. Gainontzeko kasuetan, simplex metodoaren irizpideak jarraituz k finkatu eta x_k sarrera aldagaitzat hartzen da. Orduan, $B^{-1} \mathbf{a}_k$ pibot-zutabea da eta $B^{-1} \mathbf{b}$ une horretako soluzioa. Bi zutabe horiekin, simplex metodoan egiten den bezala, oinarritik irten beharko duen $\mathbf{a}_r$ bektorea aukeratzen da.
3. B^{-1} oinarria lortzeko beharrezko kalkuluak egin eta 1. pausora itzuli.

Adibidea:

Har dezagun simplex metodoa azaltzeko erabilitako eredu lineala idazkera estandarrean (108.orria ikus):

$$\max z = 7x_1 + 4x_2 + 6x_3 + 5x_4$$

ondoko murrizketen menpe

$$2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 = 10$$

$$2x_1 - x_2 + 4x_3 + 2x_4 + x_6 = 26$$

$$3x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 + x_7 = 45$$

$$x_1 \dots x_7 \geq 0$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{c}_B^T = (0 \ 0 \ 0) \quad B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{c}_B^T B^{-1} = (0 \ 0 \ 0)$$

$$\bullet \ z_1 - c_1 = \mathbf{c}_B^T B^{-1} \mathbf{a}_1 - c_1 = (0 \ 0 \ 0) \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} - 7 = -7$$

$$\bullet \ z_2 - c_2 = \mathbf{c}_B^T B^{-1} \mathbf{a}_2 - c_2 = (0 \ 0 \ 0) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} - 4 = -4$$

$$\bullet \ z_3 - c_3 = \mathbf{c}_B^T B^{-1} \mathbf{a}_3 - c_3 = (0 \ 0 \ 0) \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} - 6 = -6$$

$$\bullet \ z_4 - c_4 = \mathbf{c}_B^T B^{-1} \mathbf{a}_4 - c_4 = (0 \ 0 \ 0) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} - 5 = -5$$

$\min \{-7, -4, -6, -5\} = -7 \rightarrow \mathbf{a}_1$ oinarrituko da

$$\bullet \text{ Pibot-zutabea: } y_1 = B^{-1} \mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\bullet \text{ Soluzioa: } \mathbf{x}_B = B^{-1} \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 \\ 26 \\ 45 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 26 \\ 45 \end{pmatrix}$$

$\min \left\{ \frac{10}{2}, \frac{26}{2}, \frac{45}{3} \right\} = \min \{5, 13, 15\} = 5 \rightarrow \mathbf{a}_5$ irtetzen da

Oinarria orain: $B = \{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_6, \mathbf{a}_7\}$.

- Pibota: 2
- Biderkatzaileak: $1, \frac{3}{2}$

Orain arteko B oinarritik B^{-1} kalkulatzeko betiko moduan jokatuko dugu. Pibot-lerroa pibotaz zatitu: $\frac{1}{2}$. Besteak biderkatzailea erabiliz kalkulatu: $0 - 1 \cdot 1 = -1$ eta $0 - \frac{3}{2} \cdot 1 = -\frac{3}{2}$. Honela, oinarriko lehen zutabea, irten berri den $\mathbf{a}_5$ -ari dagokiona, eguneraturik daukagu. Gainontzeko biak bere horretan mantentzen dira, oinarriko direlako.

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -\frac{3}{2} & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B = \{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_6, \mathbf{a}_7\} \rightarrow \mathbf{c}_B^T = (7 \ 0 \ 0)$$

$$\mathbf{c}_B^T B^{-1} = (7 \ 0 \ 0) \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -\frac{3}{2} & 0 & 1 \end{pmatrix} = \left(\frac{7}{2} \ 0 \ 0\right)$$

$$\bullet \ z_2 - c_2 = \mathbf{c}_B^T B^{-1} \mathbf{a}_2 - c_2 = \left(\frac{7}{2} \ 0 \ 0\right) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} - 4 = -\frac{1}{2}$$

$$\bullet \ z_3 - c_3 = \mathbf{c}_B^T B^{-1} \mathbf{a}_3 - c_3 = \left(\frac{7}{2} \ 0 \ 0\right) \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} - 6 = 1$$

$$\bullet \ z_4 - c_4 = \mathbf{c}_B^T B^{-1} \mathbf{a}_4 - c_4 = \left(\frac{7}{2} \ 0 \ 0\right) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} - 5 = -\frac{3}{2}$$

$$\bullet \quad z_5 - c_5 = \mathbf{c}_B^T B^{-1} \mathbf{a}_5 - c_5 = \begin{pmatrix} \frac{7}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{7}{2}$$

$$\min \left\{ -\frac{1}{2}, -\frac{3}{2} \right\} = -\frac{3}{2} \quad \rightarrow \quad \mathbf{a}_4 \text{ oinarriratu da}$$

Irtengo den bektorea zein da?

$$\bullet \quad \mathbf{x}_B = B^{-1} \mathbf{b} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -\frac{3}{2} & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 \\ 26 \\ 45 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 16 \\ 30 \end{pmatrix}$$

$$\bullet \quad \text{Pibot-zutabea: } B^{-1} \mathbf{a}_4 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -\frac{3}{2} & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

$$\min \left\{ \frac{5}{\frac{1}{2}}, \frac{16}{1}, \frac{30}{\frac{3}{2}} \right\} = \min \{10, 16, 20\} = 10 \quad \rightarrow \quad \mathbf{a}_1 \text{ irtengo da}$$

$$B = \{\mathbf{a}_4, \mathbf{a}_6, \mathbf{a}_7\}$$

$$\bullet \quad \text{Pibota: } \frac{1}{2}$$

$$\bullet \quad \text{Biderkatzaileak: } 1 : \frac{1}{2} = 2, \quad \frac{3}{2} : \frac{1}{2} = 3$$

Lehen egin bezala, B^{-1} eguneratzeko kalkuluak:

$$\frac{1}{2} : \frac{1}{2} = 1, \quad -1 - 2 \cdot \frac{1}{2} = -2, \quad -\frac{3}{2} - 3 \cdot \frac{1}{2} = -3$$

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B = \{\mathbf{a}_4, \mathbf{a}_6, \mathbf{a}_7\} \rightarrow \mathbf{c}_B^T = (5 \ 0 \ 0)$$

$$\mathbf{c}_B^T B^{-1} = (5 \ 0 \ 0) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (5 \ 0 \ 0)$$

$$\bullet \ z_1 - c_1 = \mathbf{c}_B^T B^{-1} \mathbf{a}_1 - c_1 = (5 \ 0 \ 0) \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} - 7 = 3$$

$$\bullet \ z_2 - c_2 = \mathbf{c}_B^T B^{-1} \mathbf{a}_2 - c_2 = (5 \ 0 \ 0) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} - 4 = 1$$

$$\bullet \ z_3 - c_3 = \mathbf{c}_B^T B^{-1} \mathbf{a}_3 - c_3 = (5 \ 0 \ 0) \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} - 6 = 4$$

$$\bullet \ z_5 - c_5 = \mathbf{c}_B^T B^{-1} \mathbf{a}_5 - c_5 = (5 \ 0 \ 0) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - 0 = 5$$

Guztiak dira positibo. Soluzio optimoa:

$$\mathbf{x}_B = B^{-1} \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 \\ 26 \\ 45 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 6 \\ 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_4 \\ x_6 \\ x_7 \end{pmatrix}$$

Pauso guzti hauek aurrean ikusitako simplex taulan jarraituz gero, alferrikako kalkulu asko alde batera utzi dugula ikusten da. Problemak

zenbat eta aldagai gehiago izan, kalkulu aurrezkia orduan eta nabarmenagoa da.

□

4.10 Zenbait ohar

Problema lineala tamaina handikoa izateagatik konputagailu bidez ebaztea erabakitzen dugunean, ondokoak kontutan izatea komeni da:

1. **Biribiltze-erroreen arazoa:** Kalkuluak eskuz egin eta zatikiak erabiltzean ez dugu arazo honekin topo egiten. Baina, konputagailuek zatikiak zehaztasun aritmetiko finituaz darabiltzatenez, simplex metodoaren bidez lortutako taula optimotik aterako dugun oinarriko soluzio bideragarri optimoak problemaren murrizketak ez betetzea edo beteta ere soluzioa optimo ez izatea gerta daiteke. Hori biribiltze-erroreen pilaketagatik gertatzen da. Aldizka

$$Bx_B - b$$

errorea ebaluatuz gertakizun hau detekta daiteke. Errorea esangarria bada konpondua izan daiteke honela: zuzenean B^{-1} kalkulatu, taularen erroreak zuzendu eta hortik aurrera jarraitu.

2. **Murrizketa erredundanteen agerpena:** Egoera hau detektatzeko metodoak badira baina konputagarritasunaren ikuspuntutik begiratuta, soluzio optimoan aldagai artifizialak agertzen badira honek murrizketa erredundanteak egon daitezkeela esan nahi duela kontutan izatea zuhurragoa izan daiteke.

Simplex metodoa erabiltzen hasteko aldagai artifizialak erabiltzen direnean, behin taulan optimaltasun baldintzak betetzen direnean taula horretan aldagai artifizialik ez dagoela ikusten badugu, orduan hasierako problemak badu soluziorik. Ikus ditzagun orain taula optimoan aldagai artifizialak agertzen direneko 3 kasu.

Adibidea. Problema bideraezina

Oinarrian balio positiboa hartzen duen aldagai artifizialik agertzen bada gertatzen da hau. Demagun eredu lineal hau

$$\max z = x_1 + 2x_2 + x_3$$

ondoko murrizketen menpe

$$x_1 + x_2 + x_3 = 5$$

$$6x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 2$$

$$-5x_1 - \frac{3}{2}x_2 - \frac{9}{2}x_3 \leq \frac{1}{2}$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

Datozen taulatan optimaltasun baldintzak lortu arte beharrezko diren simplex metodoaren kalkuluak agertzen dira.

		x_1	x_2	x_3	x_4	w_1	w_2	
		$-7M - 1$	$-3M - 2$	$-6M - 1$	0	0	0	$-7M$
$-M$	a_{w1}	1	1	1	0	1	0	5
$-M$	a_{w2}	6	2	5	0	0	1	2
0	a_4	-5	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{9}{2}$	1	0	0	$\frac{1}{2}$
		0	$-\frac{2}{3}M - \frac{5}{3}$	$-\frac{1}{6}M - \frac{1}{6}$	0	0	$\frac{7}{6}M + \frac{1}{6}$	$-\frac{14}{3}M + \frac{1}{3}$
$-M$	a_{w1}	0	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{6}$	0	1	$-\frac{1}{6}$	$\frac{14}{3}$
1	a_1	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{5}{6}$	0	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$
0	a_4	0	$\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{3}$	1	0	$\frac{5}{6}$	$\frac{13}{6}$
		$2M + 5$	0	$\frac{3}{2}M + 4$	0	0	$\frac{3}{2}M$	$-4M + 2$
$-M$	a_{w1}	-2	0	$-\frac{3}{2}$	0	1	$-\frac{1}{2}$	4
2	a_2	3	1	$\frac{5}{2}$	0	0	$\frac{1}{2}$	1
0	a_4	$-\frac{1}{2}$	0	$-\frac{3}{4}$	1	0	$\frac{3}{4}$	2

Azken taula honetan $z_j - c_j \geq 0 \quad \forall a_j \in A$ betetzen denez, taula optimoa da. Aldagai artifiziala $w_1 = 4 > 0$ denez, problemak ez du soluziorik.

□

Adibidea: Ekuazio erredundanteak

Har dezagun honako eredu lineala.

$$\max z = x_1 + 2x_2 - x_3$$

ondoko murrizketen menpe

$$2x_1 - x_2 + x_3 = 12$$

$$-x_1 + 2x_2 + x_3 = 10$$

$$x_1 + x_2 + 2x_3 = 22$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

w_1, w_2 eta w_3 aldagai artifizialak gehitu ondoren hauek dira optimaltasun baldintzak bete arte behar izan ditugun simplex metodoaren hiru iterazioak.

	x_1	x_2	x_3	w_1	w_2	w_3	
	$-2M - 1$	$-2M - 2$	$-4M + 1$	0	0	0	$-44M$
a_{w1}	2	-1	1	1	0	0	12
a_{w2}	-1	2	1	0	1	0	10
a_{w3}	1	1	2	0	0	1	22
	$-6M$	$6M - 4$	0	0	$4M - 1$	0	$-4M - 10$
a_{w1}	3	-3	0	1	-1	0	2
a_3	-1	2	1	0	1	0	10
a_{w3}	3	-3	0	0	-2	1	2
	0	-2	0	M	$2M - 1$	0	-10
a_1	1	-1	0	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{2}{3}$
a_3	0	1	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	0	$\frac{32}{3}$
a_{w3}	0	0	0	-1	-1	1	0
	0	0	3	$\frac{4}{3}$	$\frac{5}{3}$	0	$\frac{98}{3}$
a_1	1	0	1	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{34}{3}$
a_2	0	1	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	0	$\frac{32}{3}$
a_{w3}	0	0	0	-1	-1	1	0

w_3 aldagai artifiziala oinarrian dago eta zero balioa dauka. w_3 aldagaiaren orde ezin dezakegu ez x_1 , ez x_2 eta ez x_3 sartu, hala

eginez gero pibot balioak zero balioa hartuko lukeelako. Hirugarren lerroko elementu guztiak, y_{31} , y_{32} eta y_{33} zero dira.

Kasu honetan ekuazio erredundanteren bat daukagu. Eredua aztertuz konturatuko gara hirugarren murrizketa beste bi murrizketen batura dela. Hirugarren murrizketa kenduz gero eredu linealak badu soluziorik.

□

Adibidea: Soluzio endekatua

Demagun eredu lineal hau.

$$\max z = x_1 + x_2 + 3x_3$$

ondoko murrizketen menpe

$$x_1 + 5x_2 + x_3 \leq 7$$

$$x_1 - x_2 + x_3 \geq 5$$

$$\frac{1}{2}x_1 - 2x_2 + x_3 \geq 5$$

$$x_1 \dots x_3 \geq 0$$

x_4 nasaitze-aldagai eta w_1 eta w_2 aldagai artifizialak gehituz gero hauek dira zigortze-metodoaren taulak.

	x_1	x_2	x_3	x_4	w_1	w_2	
	$-\frac{3}{2}M - 1$	$3M - 1$	$-2M - 3$	0	0	0	$-10M$
a_4	1	5	1	1	0	0	7
a_{w1}	1	-1	1	0	1	0	5
a_{w2}	$\frac{1}{2}$	-2	1	0	0	1	5
	$\frac{1}{2}M + 2$	$M - 4$	0	0	$2M + 3$	0	15
a_4	0	6	0	1	-1	0	2
a_3	1	-1	1	0	1	0	5
a_{w3}	$-\frac{1}{2}$	-1	0	0	-1	1	0

w_3 aldagai artifiziala oinarrian dago eta zero balioa dauka. Hala ere, ez gaude murrizketa erredundanteen kasuan, oraingo honetan hirugarren lerroko balioak (hasierako ereduaren aldagaiei dagozkien zutabeetakoak) ez direlako zero. Problemarako soluzio

optimo endekatua aurkitzea posible da. Horretarako pibotea aukeratu behar dugu; $-\frac{1}{2}$ edo -1 izan daitezke. Pibot negatibo hauek ez dute oinarriaren bideragarritasunaren gain inolako eraginik izango, aldagai artifizialaren balioa zero delako.

-1 balioa hartuko dugu pibot baliotzat. Hori dela eta, $\mathbf{a}_2$ oinarrian sartuko da eta $\mathbf{a}_{w1}$ oinarritik irtengo da.

		4	0	0	0	$7 + M$	$-4 + M$	15
0	$\mathbf{a}_4$	-3	0	0	1	-7	6	2
3	$\mathbf{a}_3$	$\frac{3}{2}$	0	1	0	2	-1	5
1	$\mathbf{a}_2$	$\frac{1}{2}$	1	0	0	1	-1	0

$B = \{\mathbf{a}_4, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_2\}$ oinarria optimoa da problemarako, eta $\mathbf{x}_B$ soluzio optimo endekatua da.

□

3. **Ziklatzearen arazoa:** Oinarriratzeko bektore bat baino gehiago aukeratu izan badaiteke ($z_j - c_j$ balio negatibo berbera izateagatik), bektore horietariko edozein aukeratu ahal izango dugu, simplex metodoaren iterazio-kopuruan inolako eraginik izango ez duelarik.

Tamalez ez da gauza bera gertatzen oinarriko irteera bektoreekin. Irteera bektorea aukeratzekoan, irizpidea betetzen duen bektore bat baino gehiago egotekotan, inoiz soluzio optimora eramango ez gintuzken ziklatzean harrapatuak aurki gintezke bektore egokia aukeratu ez bagenu. Hori gerta daiteke soluzioa endekatua denean eta enpatea zeroan gertatzen denean. Badira ziklatze hori gerta ez dadin erabil daitezkeen erregelak, erregela lexikografikoak eta Bland-en erregela, adibidez. Horiei esker, oinarritik irtengo den aldagaia aukeratzeko jakingo dugu inolako arazorik eragin gabe.

4. Kasu praktiko askotan, erabaki-aldagaien goi-bornea edota behe-bornea izatea gerta liteke. Borne horiek murrizketa moduan ez jartzeko simplex metodoa egoki daiteke.

5. Simplex metodoaren eraginkortasun konputazionala, balio optimoa lortzeko behar den denboraren eta iterazio-kopuruaren arabera neurtzen da. Aldagai-kopuruak eta murrizketa-kopuruak duten eragina aztertzeke asko dira burutu diren ikerlanak eta lortutako emaitzek diotenez eraginkortasuna murrizketa-kopuruarekiko aldagai-kopuruarekiko baino askoz ere sentikorragoa da. Esperimentiaz ikusi da metodoak algoritmoaren m eta $\frac{3m}{2}$ pauso artean konbergitzen duela, nahiz eta pauso-kopuru hori gainditzen duten problemak existitu.
6. Azken gaian problema linealak ebazteko erabiltzen diren bi software pakete aztertzen dira: QSB+ eta LINDO. Programa horiek erabiltzen dituzten metodoak eta ematen dituzten soluzioak aztertzen dira bertan.

4.11 Ariketak

1. Demagun ondoko eredu lineala:

$$\begin{aligned} \max z &= 3x_1 + 2x_2 + x_3 \\ \text{ondoko murrizketen menpe} \\ x_1 - x_2 + x_3 &\leq 2 \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 &\leq 6 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

Oinarriko soluzio bideragarri baten hobekuntzaren teorema erabiliz soluzio optimoa lor ezazu.

2. Simplex metodoa erabiliz ondoko eredu linealaren soluzioa lor ezazu:

$$\begin{aligned} \min z &= -2x_1 + x_2 - x_3 \\ \text{ondoko murrizketen menpe} \\ x_1 - x_2 + 2x_3 &\geq -4 \\ 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 &\leq 5 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \\ x_3 &: \text{ez-murriztua} \end{aligned}$$

3. Izan bedi ondoko eredu lineala:

$$\begin{aligned} \max z &= x_1 + 2x_2 \\ \text{ondoko murrizketen menpe} \\ x_1 + 2x_2 &\leq 3 \\ x_1 + x_2 &\geq 1 \\ x_1 - x_2 &\leq 2 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

- (a) Lor ezazu ereduaren idazkera estandarra.
- (b) Problema grafikoki ebatz ezazu. Bideragarritasun-eskualdeko mutur-puntu guztiak zehazta itzazu.
- (c) Simplex metodoa erabiliz ebatz ezazu problema.
- (d) Aurreko bi puntuetan lortutako soluzioak aldera itzazu, oinarriko soluzio optimoa zein mutur-punturi dagokion ikusteko.

4. Honako eredu lineala emanik:

$$\begin{aligned} \max z &= x_1 + x_2 \\ \text{ondoko murrizketen menpe} \\ x_1 - x_2 &\leq 1 \\ x_1 + x_2 &\leq 6 \\ x_2 &\leq 5 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Soluzio optimoa kalkula ezazu. Aukerazko optimorik ba al dago?

5. Zigortze-metodoa erabiliz ondorengo problemak ebatz itzazu:

(a)

$$\begin{aligned} \min z &= 3x_1 - 2x_2 - x_3 \\ \text{ondoko murrizketen menpe} \\ x_1 + x_2 - x_3 &= 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 x_1 + 2x_2 - x_3 &\geq 2 \\
 -x_1 + x_2 + 2x_3 &\leq 6 \\
 x_1 &\leq 0 \\
 x_2, x_3 &\geq 0
 \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}
 \max z &= x_1 - x_2 \\
 \text{ondoko murrizketen menpe}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 x_1 + 3x_2 &\geq 2 \\
 -x_1 - 2x_2 &\leq 3 \\
 x_1 - 3x_2 &= 2 \\
 x_1, x_2 &\geq 0
 \end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned}
 \max z &= x_1 + 3x_2 \\
 \text{ondoko murrizketen menpe}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 x_1 - 2x_2 &\leq 3 \\
 x_1 + x_2 &\geq 7 \\
 2x_1 + 3x_2 &\leq 1 \\
 x_1, x_2 &\geq 0
 \end{aligned}$$

6. Bi faseetako metodoa erabiliz ondorengo problemaren soluzioa lor ezazu:

(a)

$$\begin{aligned}
 \min z &= 30x_1 + 25x_2 \\
 \text{ondoko murrizketen menpe}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 x_1 + 4x_2 &\geq 12 \\
 3x_1 + 2x_2 &\geq 10 \\
 5x_1 + 3x_2 &\geq 20 \\
 x_1, x_2 &\geq 0
 \end{aligned}$$

4.1 .Taula: Ordu-kopuruak

Produktua	Eskulana	Leunketa	Kalitate-Kontrola
P_1	4	1	0.25
P_2	3	1	0.25
P_3	3	0.5	0.2

(b)

$$\max z = -8x_1 - 6x_2 - 6x_3$$

ondoko murrizketen menpe

$$2x_1 + 4x_2 + 4x_3 \geq 8$$

$$-4x_1 - 5x_2 - x_3 \leq -6$$

$$3x_1 + 3x_2 + 4x_3 \geq 4$$

$$x_1 \dots x_3 \geq 0$$

7. Lantegi batek 3 motatako produktuak ekoizten ditu: P_1, P_2, P_3 . Produktu-unitate bakoitza ekoizteko hiru urrats eman behar dira: eskulana, leunketa eta kalitate-kontrola. Urrats bakoitzean produktu bakoitzak behar dituen ordu-kopuruak 4.1 .taulakoak dira.

Asteko eskulanerako ordu erabilgarrien kopurua 100-ekoa da, leunketarako 75-ekoa eta kalitate-kontrolerako 150-ekoa.

Eskari-arrazoiak direla eta, ekoiztutako P_2 produktuaren unitate-kopuruak beste bi produktuen kopuruak elkarrekin jarrita adinakoa izan beharko du.

Ekoiztutako produktu-unitateko lortzen diren irabaziak 14, 10 eta 8-koak dira, hurrenez hurren.

(a) Eredua lineala formula ezazu.

(b) Soluzio optimoa kalkula ezazu metodorik egokiena erabiliz.

5. Gaia

DUALITASUNA

Egitura lineal bat izanik, dagokion egitura duala ematea beti da posible. Problema linealaren eta dagokion problema dualaren arteko erlazioak oso garrantzitsuak dira, bai teorikoki eta baita praktikoki ere. Geroago ikusiko dugunez, eredu lineala ebaztean, ebazten duguna primala zein duala izanik ere, bietarako soluzioa ematea beti da posible. Hori dela eta, bietariko zein ebaztea komeni zaigun erabaki beharko dugu kasu bakoitzean, bietatik errazena ebazteko.

Hauek dira dualtasunak eskaintzen dizkigun aukerak:

1. Problema linealak duen aldagai-kopurua murrizketa-kopurua baino txikiagoa denean, problema linealaren ebazpena erraz daiteke. Eredu lineala ebazterakoan, zenbat eta murrizketa gehiago izan ebazpena lortzea orduan eta luzeagoa gertatzen denez, horrelakoetan problema duala ebaztea komenigarria izan daiteke.
2. Programazio linealeko problemen interpretazio ekonomikoa egin daiteke dualtasunari esker.
3. Ereduaren parametroen aldaketak aztertzeke beharrezkoa da dualtasunaren propietateak erabiliz eratorritako simplex dual delako metodoa erabiltzea.

Problema primalaren eta dagokion dualaren arteko erlazioa hobekiago ulertzeko adibide bat aztertuko dugu.

5.1 .Taula:

LEHENGAIEN	PRODUKTUAK				ERABILGARRITASUNA
	1	2	3	4	
A	2	3	1.5	4	300
B	2	4	3	1	500
D	5	1	2	1	250
IRABAZIA	4	3	6	2	

5.1 Sarrera adibidea

Lantegi batean 4 produktu desberdin sortzen dira: 1,2,3 eta 4. Produktu horiek lantzeko 3 lehengai mota desberdin behar dira: A, B eta D. 5.1 .taulan datoz produktu unitate bakoitza sortua izateko behar diren lehengaien unitate-kopuruak, lehengaien erabilgarritasuna eta produktuek sortutako irabaziak.

Eredu lineal baten bidez idatziko dugu problema, eta zera ezagutu nahi da: irabazia maximoa izan dadin sortu beharko den j produktuaren unitate-kopurua ($j = 1, 2, 3, 4$). Kopuru hori x_j aldagaietan jasotzen da.

$$\max z = 4x_1 + 3x_2 + 6x_3 + 2x_4$$

ondoko murrizketen menpe

$$2x_1 + 3x_2 + 1.5x_3 + 4x_4 \leq 300$$

$$2x_1 + 4x_2 + 3x_3 + x_4 \leq 500$$

$$5x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 \leq 250$$

$$x_j \geq 0 \quad j = 1 \dots 4$$

Demagun badela lantegi horrekin norgehiagoka ari den beste lantegi bat, eta bigarren honek $b_1 = 300$, $b_2 = 500$ eta $b_3 = 250$ lehengaiak erosi nahi dizkiola. Lehengai hauek lortzea zerbait kostatuko zaio: y_1, y_2 eta y_3 , hurrenez hurren, eta lehengai horiek ahalik eta kos-

turik txikienean lortzea da bere helburua.

$$\min G = 300y_1 + 500y_2 + 250y_3$$

Baina, gauza bat garbi dago: lehen lantegiak ez dizkio lehengaiak bigarrenari edozein preziotara salduko; lehengaiak erabiltzearen truke lortzen duena baino gutxiagotatik ez dizkio salduko.

1 produktua sortzeko lehen lantegiak 2 unitate A lehengai, 2 unitate B lehengai eta 5 unitate D lehengai behar ditu. Lehengai horiek bigarren lantegiari salduko balizkio, eta bakoitzagatik y_1, y_2 eta y_3 lortuko balu, hurrenez hurren, $2y_1 + 2y_2 + 5y_3$ irabaziko luke. Honela lortutako irabazia, lehengaiak erabiliz 1 produktua sortzean lortutakoa, 4 alegia, baino handiagoa edo berdina bada, lehengaiak 2. lantegiari saltzeak mereziko du.

$$2y_1 + 2y_2 + 5y_3 \geq 4$$

Hori problema dualaren lehen murrizketa da. 2,3 eta 4 produktuen ekoizpenarekin ere interpretazio berberari jarraituz ondorengo eredu duala lortzen da:

$$\min G = 300y_1 + 500y_2 + 250y_3$$

ondoko murrizketen menpe

$$2y_1 + 2y_2 + 5y_3 \geq 4$$

$$3y_1 + 4y_2 + y_3 \geq 3$$

$$1.5y_1 + 3y_2 + 2y_3 \geq 6$$

$$4y_1 + y_2 + 2y_3 \geq 2$$

$$y_1, y_2, y_3 \geq 0$$

□

Ikusiko dugunez, bi problemen (primalaren eta dualaren) helburufuntzioaren balio optimoa berbera da.

5.2 Problema duala

5.2.1 Definizioak

Definizioa 5.2.1 (Maximizatze-idazkera simetrikoa) *Eredu lineala maximizatze-idazkera simetrikoan dagoela esaten da baldin eta:*

- *Helburu-funtzioa maximizatze erakoa bada*
- *Murrizketa guztiak $\leq$ erakoak badira*
- *Erabaki-aldagai guztiak ez-negatiboak badira*

Adibidea:

Ondoko problema maximizatze-idazkera simetrikoan idatzi nahi da:

$$\max z = x_1 - 3x_2 + x_3$$

ondoko murrizketen menpe

$$x_1 + x_2 + x_3 \geq 2$$

$$-x_1 + 2x_2 - x_3 \leq 3$$

$$x_1 - x_2 + 2x_3 = -1$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

Maximizatze-idazkera simetrikoa:

$$\max z = x_1 - 3x_2 + x_3$$

ondoko murrizketen menpe

$$-x_1 - x_2 - x_3 \leq -2$$

$$-x_1 + 2x_2 - x_3 \leq 3$$

$$x_1 - x_2 + 2x_3 \leq -1$$

$$-x_1 + x_2 - 2x_3 \leq 1$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

□

Definizioa 5.2.2 (Minimizatze-idazkera simetrikoa) *Eredu lineala minimizatze-idazkera simetrikoan dagoela esaten da baldin eta:*

- *Helburu-funtzioa minimizatze erakoa bada*
- *Murrizketak $\geq$ erakoak badira*
- *Erabaki-aldagaiak ez-negatiboak badira*

Eredu lineal guztiak idatz daitezke komeni den idazkera simetrikoan.

Adibidea:

Izan bedi ondorengo eredu lineala:

$$\begin{aligned} \min z &= x_1 - x_2 \\ \text{ondoko murrizketen menpe} \\ 3x_1 + 2x_2 &\leq 1 \\ x_1 - 2x_2 &\geq 3 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Dagokion minimizatzeko-idazkera simetrikoa:

$$\begin{aligned} \min z &= x_1 - x_2 \\ \text{ondoko murrizketen menpe} \\ -3x_1 - 2x_2 &\geq -1 \\ x_1 - 2x_2 &\geq 3 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

□

5.2.2 Primal-dual arteko erlazioa

Demagun maximizatzeko-idazkera simetrikoan dagoen eredu lineala daukagula:

$$\begin{aligned} \max z &= \mathbf{c}^T \mathbf{x} \\ \text{o. m. m.} \\ A\mathbf{x} &\leq \mathbf{b} \\ \mathbf{x} &\geq \mathbf{0} \end{aligned}$$

Eredu honi *primala* deituko diogu. Ondorengo problema minimizatzeko-idazkera simetrikoan dago eta aurrekoaren *duala* dela esaten da:

$$\begin{aligned} \min G &= \mathbf{b}^T \mathbf{y} \\ \text{o. m. m.} \\ A^T \mathbf{y} &\geq \mathbf{c} \\ \mathbf{y} &\geq \mathbf{0} \end{aligned}$$

Erlazio horren esanahia hobe ulertzeko aldera itzazu eredu primal eta duala sarrera adibidean ikusitakoekin.

Adibidea:

Ondoko eredu primalaren duala kalkulatu dugu:

$$\begin{aligned} \max z &= 2x_1 - x_2 + 3x_3 \\ \text{ondoko murrizketen menpe} \\ x_1 - x_2 + x_3 &\leq 2 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 &\leq 1 \\ x_j &\geq 0 \quad j = 1 \dots 3 \end{aligned}$$

Dagokion duala:

$$\begin{aligned} \min G &= 2y_1 + y_2 \\ \text{ondoko murrizketen menpe} \\ y_1 + 3y_2 &\geq 2 \\ -y_1 - y_2 &\geq -1 \\ y_1 + 2y_2 &\geq 3 \\ y_1, y_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

□

Hemendik aurrerako frogapenetan primala maximizatze-idazkera simetrikoan dagoela suposatuko badugu ere, horrek ez du esan nahi eredu primalak beti maximizatze-idazkeran egon beharko duenik. Edozein eredu lineal daukagula, primal izena emango diogu, eta propietate batzuk erabiliz primal horri dagokion duala kalkulatu dugu, oro har.

5.2.3 Eredu primalaren eta dagokion dualaren osagaien azalpena

- A $m \times n$ matrizea bada, eredu primalak m murrizketa eta n erabaki-aldagai du. Eredu dualak, aldiz, n murrizketa eta m erabaki-aldagai izango du, bere teknologi koefizienteen matrizea A^T izateagatik.
- b bektorea:
 - Eredu primalean baliabide-bektorea da
 - Eredu dualean, aldiz, kostu-bektorea edo prezio-bektorea
- c bektorea:
 - Kostu-bektorea da eredu primalean
 - Baliabide-bektorea da eredu dualean

Primal-dual erlazio simetrikoan ondokoak ikus daitezke:

- Primalaren murrizketak $\leq$ erakoak dira, eta dualaren aldagaiak ≥ 0 dira. Primalaren murrizketa-kopurua eta dualaren erabaki-aldagaien kopurua kopuru berbera dira.
- Primalaren aldagaiak ≥ 0 dira eta dualaren murrizketak $\geq$ erakoak. Dualak duen murrizketa-kopurua eta primalak duen erabaki-aldagaien kopurua berbera da.

5.2.4 Dualtasuna: kasu orokorra

Problema praktikoa gehienetan, murrizketak $\leq$, $=$ edo $\geq$ modukoak dira. Horrelako problemen duala kalkulatzeko ereduaren idazkera simetrikoa idatz daiteke eta ondoren aurreko primal-dual erlazioa erabili. Hala ere, idazkera simetrikoa idatzi beharrik izan gabe ere erabil daitezke 5.2 taulako erlazioak.

5.2 taulako zenbait erlazio frogatuko dugu. Gainontzekoak antzera frogatuak izan daitezke. Eredu primalaren helburu-funtzioa minimizatze modukoa bada duala maximizatze modukoa izango da geroago teorema batetan frogatuko dugunez. Era horretako eredu primal baten duala lortzeko 5.2 taula eskubialdetik ezkerraldera irakurri beharko da.

5.2 .Taula:

PRIMAL-DUAL ERLAZIOAK		
max	$\Longleftrightarrow$	min
i murrizketa $\leq b_i$	$\Longleftrightarrow$	i aldagaia ≥ 0
i murrizketa $= b_i$	$\Longleftrightarrow$	i aldagaia murriztugabea
i murrizketa $\geq b_i$	$\Longleftrightarrow$	i aldagaia ≤ 0
i aldagaia ≥ 0	$\Longleftrightarrow$	i murrizketa $\geq c_i$
i aldagaia ez-murriztua	$\Longleftrightarrow$	i murrizketa $= c_i$
i aldagaia ≤ 0	$\Longleftrightarrow$	i murrizketa $\leq c_i$

- Demagun ondoko eredu lineala

$$\max z = \mathbf{c}^T \mathbf{x}$$

o. m. m.

$$A\mathbf{x} \geq \mathbf{b}$$

$$\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$$

dagokion duala

$$\min G = \mathbf{b}^T \mathbf{y}$$

o. m. m.

$$A^T \mathbf{y} \geq \mathbf{c}$$

$$\mathbf{y} \leq \mathbf{0}$$

Hori frogatzeko primal-dual arteko erlazioa erabiliko dugu.

$$\begin{array}{ccc}
\max z = \mathbf{c}^T \mathbf{x} & & \max z = \mathbf{c}^T \mathbf{x} \\
\text{o.m.m.} & \Longleftrightarrow & \text{o.m.m.} \\
A\mathbf{x} \geq \mathbf{b} & & -A\mathbf{x} \leq -\mathbf{b} \\
\mathbf{x} \geq \mathbf{0} & & \mathbf{x} \geq \mathbf{0}
\end{array}$$

Bigarren ereduak dagoeneko maximizatze idazkera simetrikoan dago.
Bere duala

$$\begin{array}{l}
\min G = -\mathbf{b}^T \mathbf{y} \\
\text{o. m. m.} \\
-A^T \mathbf{y} \geq \mathbf{c}^T \\
\mathbf{y} \geq \mathbf{0}
\end{array}$$

$\mathbf{y} = -\mathbf{y}$ aldagai aldaketa eginez,

$$\begin{array}{l}
\max G = \mathbf{b}^T \mathbf{y} \\
\text{o. m. m.} \\
A^T \mathbf{y} \geq \mathbf{c}^T \\
\mathbf{y} \leq \mathbf{0}
\end{array}$$

Hau da, problema primalaren murrizketak $\geq$ modukoak badira, dualaren $\mathbf{y}$ aldagaiak zero baino txikiagoak edo berdinak izango dira.

- Demagun problema primal hau

$$\begin{array}{l}
\max z = \mathbf{c}^T \mathbf{x} \\
\text{o. m. m.} \\
A\mathbf{x} = \mathbf{b} \\
\mathbf{x} \geq \mathbf{0}
\end{array}$$

Dagokion duala

$$\begin{array}{l}
\min G = \mathbf{b}^T \mathbf{y} \\
\text{o. m. m.} \\
A^T \mathbf{y} \geq \mathbf{c} \\
\mathbf{y} : \text{ez-murriztua}
\end{array}$$

Oraingoan primal-dual arteko erlazioa erabiltzeko, aurretik problema primalaren idazkera simetrikoa idatziz, zera daukagu

$$\begin{aligned} \max z &= \mathbf{c}^T \mathbf{x} \\ \text{o. m. m.} \\ A\mathbf{x} &\leq \mathbf{b} \\ -A\mathbf{x} &\leq -\mathbf{b} \\ \mathbf{x} &\geq \mathbf{0} \end{aligned}$$

Aurreko idazkera lortzen da, $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ ondoko bietan banatuz:

$$A\mathbf{x} \leq \mathbf{b}, \quad A\mathbf{x} \geq \mathbf{b}$$

Har dezagun

$$\begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{v} \end{pmatrix}$$

bektorea, non $\mathbf{u}$ eta $\mathbf{v}$ bektoreek m osagai dituzten. Dagokion eredu duala honakoa da.

$$\min G = (\mathbf{b}^T - \mathbf{b}^T) \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{v} \end{pmatrix}$$

ondoko murrizketen menpe

$$\begin{aligned} (A^T - A^T) \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{v} \end{pmatrix} &\geq \mathbf{c} \\ \mathbf{u}, \mathbf{v} &\geq \mathbf{0} \end{aligned}$$

Beste modu batera idatzirik:

$$\begin{aligned} \min G &= \mathbf{b}^T(\mathbf{u} - \mathbf{v}) \\ \text{o. m. m.} \\ A^T(\mathbf{u} - \mathbf{v}) &\geq \mathbf{c} \\ \mathbf{u}, \mathbf{v} &\geq \mathbf{0} \end{aligned}$$

$\mathbf{y} = \mathbf{u} - \mathbf{v}$ aldagai aldaketa eginez

$$\min G = \mathbf{b}^T \mathbf{y}$$

o. m. m.

$$A^T \mathbf{y} \geq \mathbf{c}$$

$\mathbf{y}$: ez-murriztua

$\mathbf{y}$ aldagaia murriztugabea da, bi aldagai positiboren arteko kenketa delako.

Dualtasunaren azken forma honetan zera ikusten da: Primalaren murrizketak = modukoak badira, dualaren aldagaiak ez daudela zeinuz murriztuak.

Era berean froga daitezke 5.2 taulan agertzen diren erlazio guztiak.

Adibidea:

Demagun ondoko eredu primala:

$$\max z = x_1 - 4x_2 - x_3$$

ondoko murrizketen menpe

$$x_1 + x_2 - x_3 \geq 4$$

$$2x_1 + 3x_2 - 5x_3 \leq 2$$

$$2x_1 - x_2 + 2x_3 = 6$$

$$x_1 \leq 0 \quad x_2 \geq 0$$

x_3 : ez-murriztua

Taulako erlazioak erabiliz gero, datorren duala lortzen da:

$$\min G = 4y_1 + 2y_2 + 6y_3$$

ondoko murrizketen menpe

$$y_1 + 2y_2 + 2y_3 \leq 1$$

$$y_1 + 3y_2 - y_3 \geq -4$$

$$-y_1 - 5y_2 + 2y_3 = -1$$

$$y_1 \leq 0 \quad y_2 \geq 0$$

y_3 : ez-murriztua

5.3 Dualtasunari buruzko teoremak

Datozen teoremei esker, problema primalaren eta dualaren arteko erlazioak eta baita beren soluzioen arteko erlazioak ezagutuko ditugu. Guztietan primal-dual idazkera simetrikoa erabiltzen da:

<i>PRIMAL</i>	<i>DUAL</i>
$\max z = \mathbf{c}^T \mathbf{x}$	$\min G = \mathbf{b}^T \mathbf{y}$
<i>o.m.m.</i>	<i>o.m.m.</i>
$A\mathbf{x} \leq \mathbf{b}$	$A^T \mathbf{y} \geq \mathbf{c}$
$\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$	$\mathbf{y} \geq \mathbf{0}$

Teorema 5.3.1 *Problema dualaren duala problema primala da.*

Frogapena:

Demagun honako eredu lineala daukagula:

$$\begin{aligned} \max z &= \mathbf{c}^T \mathbf{x} \\ \text{o. m. m.} \\ A\mathbf{x} &\leq \mathbf{b} \\ \mathbf{x} &\geq \mathbf{0} \end{aligned}$$

Dagokion duala:

$$\begin{aligned} \min G &= \mathbf{b}^T \mathbf{y} \\ \text{o. m. m.} \\ A^T \mathbf{y} &\geq \mathbf{c} \\ \mathbf{y} &\geq \mathbf{0} \end{aligned}$$

Primal-dual erlazio simetrikoak erabiliz bigarren problema honen duala kalkulatzeko, problema maximizatze-idazkera simetrikoan jarriko dugu:

$$\begin{aligned} -\max (-G) &= -\mathbf{b}^T \mathbf{y} \\ \text{o. m. m.} \\ -A^T \mathbf{y} &\leq -\mathbf{c} \\ \mathbf{y} &\geq \mathbf{0} \end{aligned}$$

Dagokion duala kalkulatzeko primal-dual erlazio simetrikoa erabiliko dugu:

$$\begin{aligned} -\min (-z) &= -\mathbf{c}^T \mathbf{x} \\ \text{o. m. m.} \\ -A \mathbf{x} &\geq -\mathbf{b} \\ \mathbf{x} &\geq \mathbf{0} \end{aligned}$$

Beste era batera idatziz:

$$\begin{aligned} \max z &= \mathbf{c}^T \mathbf{x} \\ \text{o. m. m.} \\ A \mathbf{x} &\leq \mathbf{b} \\ \mathbf{x} &\geq \mathbf{0} \end{aligned}$$

Beraz, dualaren duala primala dela dakusagu.

□

Teorema 5.3.2 (Dualtasun ahularena) *Demagun $\mathbf{x}$ eta $\mathbf{y}$ problema primalaren eta dualaren soluzio bideragarri (S.B.) bana direla, hurrenez hurren. Zera betetzen da:*

$$z = \mathbf{c}^T \mathbf{x} \leq \mathbf{b}^T \mathbf{y} = G$$

Frogapena:

$$\mathbf{x} : \text{primalaren S.B.} \Rightarrow A \mathbf{x} \leq \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \quad (5.1)$$

$$\mathbf{y} : \text{dualaren S.B.} \Rightarrow A^T \mathbf{y} \geq \mathbf{c}, \mathbf{y} \geq \mathbf{0} \quad (5.2)$$

(5.1) desberdintza $\mathbf{y}^T \geq \mathbf{0}$ bektoreaz eta (5.2) desberdintza $\mathbf{x}^T \geq \mathbf{0}$ bektoreaz biderkatzean, ondokoa lortzen da:

$$\begin{aligned}\mathbf{y}^T \mathbf{A} \mathbf{x} &\leq \mathbf{y}^T \mathbf{b} = \mathbf{b}^T \mathbf{y} \\ \mathbf{x}^T \mathbf{A}^T \mathbf{y} &\geq \mathbf{x}^T \mathbf{c} = \mathbf{c}^T \mathbf{x}\end{aligned}$$

Matrize-eragiketak eginez $\mathbf{x}^T \mathbf{A}^T \mathbf{y} = \mathbf{y}^T \mathbf{A} \mathbf{x}$ betetzen denez zera daukagu:

$$z = \mathbf{c}^T \mathbf{x} \leq \mathbf{y}^T \mathbf{A} \mathbf{x} \leq \mathbf{b}^T \mathbf{y} = G$$

Primalari eta dualari dagozkien soluzio posibleen $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ bikote guztietarako helburu-funtzio primalaren balioa beti da helburu-funtzio dualaren balioa baino txikiago edo berdina.

□

Aurreko teorematik zera ondoriozta daiteke: problema primalaren balio optimoa (maximoa) problema dualaren balio optimoaren (minimoa) behe-bornea dela. Era berean, problema dualaren minimoa problema primalaren maximoaren goi-bornea da.

Korolaria 5.3.1 *Baldin $\mathbf{x}^*$ eta $\mathbf{y}^*$ soluzio bideragarriek $\mathbf{c}^T \mathbf{x}^* = \mathbf{b}^T \mathbf{y}^*$ betetzen badute, orduan $\mathbf{x}^*$ eta $\mathbf{y}^*$ problema primalaren eta dualaren soluzio optimo dira, hurrenez hurren.*

Frogapena:

Dualtasun ahularen teorema dioenez, edozein $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ soluzio bikoiterentzat zera betetzen da

$$\mathbf{c}^T \mathbf{x} \leq \mathbf{b}^T \mathbf{y}$$

Dualaren $\mathbf{y}^*$ soluzioa hartuz gero, $\mathbf{c}^T \mathbf{x} \leq \mathbf{b}^T \mathbf{y}^*$ betetzen da. Dakigunez, $\mathbf{c}^T \mathbf{x}^* = \mathbf{b}^T \mathbf{y}^*$ betetzen da.

$$\mathbf{c}^T \mathbf{x} \leq \mathbf{c}^T \mathbf{x}^* \Rightarrow \mathbf{x}^* \text{ problema primalaren soluzio optimoa da.}$$

Era berean,

$$\mathbf{b}^T \mathbf{y}^* = \mathbf{c}^T \mathbf{x}^* \leq \mathbf{b}^T \mathbf{y}$$

$$\mathbf{b}^T \mathbf{y}^* \leq \mathbf{b}^T \mathbf{y} \Rightarrow \mathbf{y}^* \text{ dualaren soluzio optimoa da.}$$

□

Korolarioa 5.3.2 *Problema primala bideragarria eta bornegabea bada, dualak ez du soluziorik.*

Edozein $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ soluzio bikotek $\mathbf{c}^T \mathbf{x} \leq \mathbf{b}^T \mathbf{y}$ betetzen duela kontutan izanik, baldin primalaren helburua bornaturik ez badago orduan ez da dualarentzat $\mathbf{y}$ soluziorik existitzen, zeina problema primalaren goi-borne izango den.

Korolarioa 5.3.3 *Baldin problema duala bideragarria eta bornegabea bada, orduan duala bideraezina da.*

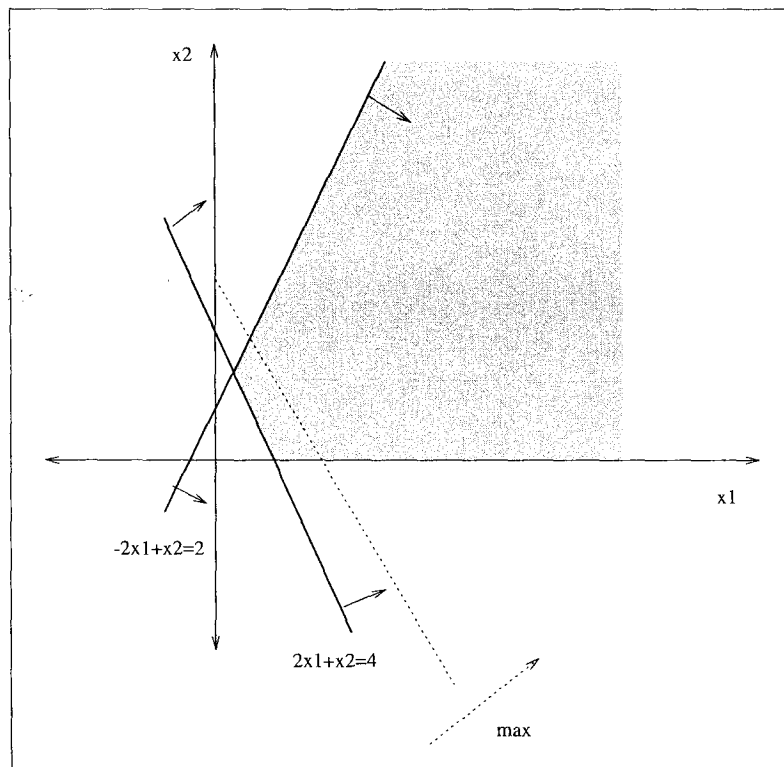
Korolario hau aurrekoaren antzera interpretatzen da.

Adibidea:

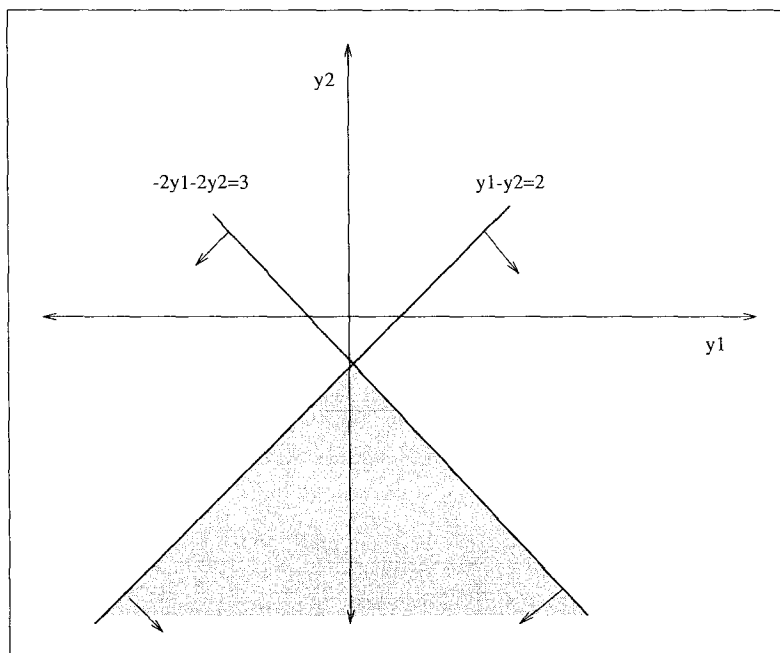
Demagun eredu lineal bat eta dagokion duala dauzkagula. Primalak soluzio bornegabea duela eta bere dualak soluziorik ez duela ikus daiteke.

$$\begin{array}{l|l} \max z = 3x_1 + 2x_2 & \min G = 2y_1 - 4y_2 \\ \text{o. m. m.} & \text{o. m. m.} \\ -2x_1 + x_2 \leq 2 & -2y_1 - 2y_2 \geq 3 \\ 2x_1 + x_2 \geq 4 & y_1 - y_2 \geq 2 \\ x_1, x_2 \geq 0 & y_1, y_2 \geq 0 \end{array}$$

Primalaren soluzio bornegabea:



Dualak ez du soluziorik:



□

Baldin primala (duala) bideraezina bada, orduan duala (primala) bideraezina edo bornegabea izan daiteke. Frogapena ez da erraza, baina aurreko adibidean primala dual gisa hartzen badugu duala bornegabea

dela ikusten da. Aldi berean primala eta duala bideraezinak izan daitezke.

Teorema 5.3.3 (Dualtasunaren funtsezko printzipioa) *Baldin problema primalaren $\mathbf{x}^*$ soluzio optimo bat existitzen bada, orduan problema dualaren $\mathbf{y}^*$ soluzio optimo bat existitzen da. Era berean, baldin problema dualaren $\mathbf{y}^*$ soluzio optimo bat existitzen bada, orduan problema primalaren $\mathbf{x}^*$ soluzio optimo bat existitzen da. Gainera, bi kasuetan $z^* = \mathbf{c}^T \mathbf{x}^* = \mathbf{b}^T \mathbf{y} = G^*$ betetzen da.*

Adibidea:

Demagun ondoko problemak ditugula (primal-dual simetrikoak):

$$\begin{array}{l|l}
 \max z = 2x_1 + 3x_2 & \min G = 2y_1 + 3y_2 + 5y_3 \\
 \text{o. m. m.} & \text{o. m. m.} \\
 x_1 + x_2 \leq 2 & y_1 + 2y_2 + y_3 \geq 2 \\
 2x_1 - x_2 \leq 3 & y_1 - y_2 + 3y_3 \geq 3 \\
 x_1 + 3x_2 \leq 5 & y_1, y_2, y_3 \geq 0 \\
 x_1, x_2 \geq 0 &
 \end{array}$$

Edozein soluzio bikotek $z \leq G$ betetzen du. Adibidez, har dezagun $\mathbf{x}^T = (1 \ 1)$ problema primalaren soluzio bideragarri bat, zeinetan helburu-funtzioak $z = 5$ balioa hartzen duen. Bestalde, problema dualaren soluzio bideragarri bat den $\mathbf{y}^T = (1 \ 1 \ 1)$ hartuko dugu, eta soluzio honetan helburu-funtzio dualak hartzen duen balioa $G = 10$ dela ikusten da. $z \leq G$ betetzen da.

Har ditzagun orain problemen soluzio optimoak. $\mathbf{x}^{*T} = (0.5 \ 1.5)$ eta $\mathbf{y}^{*T} = (1.5 \ 0 \ 0.5)$. Soluzio optimo izateagatik $z^* = G^* = 5.5$ betetzen da.

□

Teorema 5.3.4 *B oinarria programazio linealeko eredu baten oinarri optimoa baldin bada, orduan $\mathbf{y}^{*T} = \mathbf{c}_B^T B^{-1}$ eredu dualaren soluzio optimoa da. Helburu-funtzio primalak eta dualak balio berbera hartzen dute. $z^* = G^*$*

Frogapena:

Demagun problema primala daukagula. Nasaitze-aldagaien bektorea, $\mathbf{x}_h$, gehituz gero, ondokoak dira murrizketak:

$$\begin{aligned} A\mathbf{x} + I\mathbf{x}_h &= \mathbf{b} \\ \mathbf{x}, \mathbf{x}_h &\geq \mathbf{0} \end{aligned}$$

Baldin B problema primalaren oinarri optimoa bada eta $\mathbf{x}_B^*$ B oinarri horri dagokion soluzioaren osagaiak, orduan $z_j - c_j \geq 0$ betetzen da.

$$\begin{aligned} z_j &= \mathbf{c}_B^T \mathbf{y}_j = \mathbf{c}_B^T B^{-1} \mathbf{a}_j \\ z_j \geq c_j \quad \forall j &\Rightarrow \quad \mathbf{c}_B^T B^{-1} A \geq \mathbf{c} \end{aligned}$$

Beste era batera idatzita:

$$A^T \mathbf{c}_B^T B^{-1} \geq \mathbf{c}$$

$\mathbf{c}_B^T B^{-1}$ bektoreak murrizketa dualak betetzen dituela ikusten da. Beraz, dualaren soluzioa da eta $\mathbf{y}^*$ izendatuko dugu.

$$\mathbf{y}^* = \mathbf{c}_B^T B^{-1}$$

Hasierako B oinarria nasaitze-aldagaiez osatuta dagoen kasurako zera daukagu:

$$\mathbf{c}_B^T B^{-1} I \geq \mathbf{c}_I$$

I matrizea nasaitze-aldagaiez osaturik dagoenez, $\mathbf{c}_I = \mathbf{0}$ betetzen da. Beraz,

$$\mathbf{c}_B^T B^{-1} I = \mathbf{c}_B^T B^{-1} \geq \mathbf{0}$$

betetzen da; $\mathbf{y}^* = \mathbf{c}_B^T B^{-1}$ bektorearen osagai guztiak ez-negatiboak dira. Helburu-funtzioaren balioa:

$$z^* = \mathbf{c}_B^T \mathbf{x}_B^* = \mathbf{c}_B^T B^{-1} \mathbf{b} = \mathbf{b}^T (\mathbf{c}_B^T B^{-1})^T = \mathbf{b}^T \mathbf{y}^* = G^*$$

Frogaturik gelditzen da helburu-funtzioen balio optimoak berdinak direla.

□

Jarraian aztertuko dugun osagarritzko nasaitasunaren teorema deritzon, primalaren soluzio optimotik abiatuz dualaren soluzio optimoa nola kalkulatu daitekeen ikusiko dugu.

Teorema 5.3.5 (Osagarritzko nasaitasuna) *Izan bitez $\mathbf{x}^*$ eta $\mathbf{y}^*$ problema primalaren eta dualaren bi soluzio bideragarri, hurrenez hurren. Soluzio horiek optimoak dira baldin eta soilik baldin*

$$\mathbf{x}^{*T}(\mathbf{A}^T \mathbf{y}^* - \mathbf{c}) + \mathbf{y}^{*T}(\mathbf{b} - \mathbf{A} \mathbf{x}^*) = 0$$

Teorema hau ez dugu frogatuko, baina dioena aztertuko dugu, bertatik aterako dugun zenbait ondorio lagungarri gertatuko baitzaigu.

Izan bitez problema primala eta bere duala:

$$\begin{array}{l|l} \max z = \mathbf{c}^T \mathbf{x} & \min G = \mathbf{b}^T \mathbf{y} \\ \text{o. m. m.} & \text{o. m. m.} \\ \mathbf{A} \mathbf{x} \leq \mathbf{b} & \mathbf{A}^T \mathbf{y} \geq \mathbf{c} \\ \mathbf{x} \geq \mathbf{0} & \mathbf{y} \geq \mathbf{0} \end{array}$$

Murrizketak beste era batera idatziz gero:

$$\begin{aligned} \mathbf{b} - \mathbf{A} \mathbf{x} &\geq \mathbf{0} \\ \mathbf{A}^T \mathbf{y} - \mathbf{c} &\geq \mathbf{0} \end{aligned}$$

Bestalde, bai problema primalaren eta bai problema dualaren soluzio optimoek, ez-negatibotasun murrizketa bete behar dutenez, $\mathbf{x}^*$ eta $\mathbf{y}^*$ soluzioek $\mathbf{x}^* \geq \mathbf{0}$ eta $\mathbf{y}^* \geq \mathbf{0}$ betetzen dutela dakigu.

Guztiarekin,

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^{*T}(\mathbf{A}^T \mathbf{y}^* - \mathbf{c}) &\geq \mathbf{0} \\ \mathbf{y}^{*T}(\mathbf{b} - \mathbf{A} \mathbf{x}^*) &\geq \mathbf{0} \end{aligned}$$

Aurreko teorema zera betetzen dela ziurtatzen du.

$$\mathbf{x}^{*T}(\mathbf{A}^T \mathbf{y}^* - \mathbf{c}) + \mathbf{y}^{*T}(\mathbf{b} - \mathbf{A} \mathbf{x}^*) = 0$$

Bi batugaiak positibo direnez eta batura zero denez, batugaiak zero izan behar dute:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^{*T}(A^T \mathbf{y}^* - \mathbf{c}) &= 0 \\ \mathbf{y}^{*T}(\mathbf{b} - A\mathbf{x}^*) &= 0 \end{aligned}$$

Hemendik zenbait ondorio interesgarritara iritsiko gara. Ondorio hauei esker, ekuazio sistema bat eraikiz eta ebatsiz dagokion dualaren soluzioa kalkulatu dugu. Hauexek dira, ba, ondorioak:

1. Aldagai primal bat hertsiki positibo bada, dualaren dagokion murrizketa berdintasunez beteko da.

$$\mathbf{x}^{*T} > 0 \quad \text{izanik} \quad \mathbf{x}^{*T}(A^T \mathbf{y}^* - \mathbf{c}) = 0 \quad \text{bete dadin} \Rightarrow$$

$$A^T \mathbf{y}^* - \mathbf{c} = 0, \text{ hau da, } A^T \mathbf{y}^* = \mathbf{c}$$

2. Primalaren murrizketa bat ez bada berdintasunez betetzen, dagokion aldagai dualak zero balioa hartzen du.

$$A\mathbf{x}^* < \mathbf{b} \Rightarrow \mathbf{b} - A\mathbf{x}^* > 0$$

$$\mathbf{y}^{*T}(\mathbf{b} - A\mathbf{x}^*) = 0 \quad \text{izateko} \Rightarrow \mathbf{y}^{*T} = 0$$

Eredu duala denean ebatzi duguna, hauek izango dira ondorioztatu ditugunak.

1. Aldagai duala hertsiki positibo bada, dagokion murrizketa primala berdintasunez betetzen da.

$$\mathbf{y}^{*T} > 0 \quad \text{izanik, } \mathbf{y}^{*T}(\mathbf{b} - A\mathbf{x}^*) = 0 \quad \text{izateko} \Rightarrow$$

$$\mathbf{b} - A\mathbf{x}^* = 0, \quad \text{hau da, } A\mathbf{x}^* = \mathbf{b}$$

2. Dualaren murrizketa bat ez bada berdintasunez betetzen, dagokion aldagai primala zero izango da.

$$A^T \mathbf{y}^* - \mathbf{c} > 0 \quad \text{bada, } \mathbf{x}^{*T}(A^T \mathbf{y}^* - \mathbf{c}) = 0 \quad \text{izateko} \Rightarrow$$

$$\mathbf{x}^{*T} = 0 \quad \text{izan behar du}$$

Adibidea:

Demagun ondoko problema primala:

$$\max z = 3x_1 + x_2 - 2x_3$$

ondoko murrizketen menpe

$$x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 5$$

$$2x_1 - x_2 + 3x_3 \leq 4$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

Bere soluzio optimoa $\mathbf{x}^* = (\frac{13}{5} \frac{6}{5} 0)$ da eta balio optimoa $z^* = 9$.

Dagokion problema dualaren soluzio optimoa kalkulatu dugu. Horretarako ez daukagu zertan eredu duala hasieratik ebatzi beharrik. Nahikoa da osagarritzko nasaitasunetik eratorritako ondorioak erabiltzea. Nasaitze-aldagaiak gehitu ondoren hauxe da problema primala:

$$\max z = 3x_1 + x_2 - 2x_3$$

ondoko murrizketen menpe

$$x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 5$$

$$2x_1 - x_2 + 3x_3 + x_5 = 4$$

$$x_1 \dots x_5 \geq 0$$

Duala nasaitze-aldagaiekin:

$$\min G = 5y_1 + 4y_2$$

ondoko murrizketen menpe

$$y_1 + 2y_2 - y_3 = 3$$

$$2y_1 - y_2 - y_4 = 1$$

$$y_1 + 3y_2 - y_5 = -2$$

$$y_1 \dots y_5 \geq 0$$

Osagarritzko nasaitasunaren teorematik eratorritako ondorioak erabiliz:

- $x_1 = \frac{13}{5} > 0 \Rightarrow y_1 + 2y_2 = 3$, hau da, $y_3 = 0$
- $x_2 = \frac{6}{5} > 0 \Rightarrow 2y_1 - y_2 = 1$, hau da, $y_4 = 0$
- $x_3 = 0 \Rightarrow$ Ezin da esan problema dualaren 3. murrizketa berdintasunez edo desberdintasunez betetzen den. Beraz, nasaitze-aldagaia gehitu behar zaio.

$$y_1 + 3y_2 - y_5 = -2$$

- $x_4 = 0 \Rightarrow$ Problema primalaren lehen murrizketa berdintasunez betetzen da. Orduan, ezin da esan y_1 positiboa den edo zero den.
- $x_5 = 0 \Rightarrow$ Aurrekoaren arrazoi beragatik ezin da esan y_2 positiboa den edo zero den.

Eredu dualaren soluzioa kalkulatzeko ondoko sistema ebatzi behar da.

$$\begin{aligned} y_1 + 2y_2 &= 3 \\ 2y_1 - y_2 &= 1 \\ y_1 + 3y_2 - y_5 &= -2 \end{aligned}$$

Soluzioa:

$$\mathbf{y}^{*T} = (y_1 \ y_2) = (1 \ 1), \ G^* = 9$$

Ikus daitekeenez, eredu dualaren lehen bi murrizketak berdintasunez betetzen dira eta hirugarrena ez. $y_5 = 6$ da.

□

5.4 Soluzio dual optimoa taulan

Ikus dezagun, simplex metodoaren bidez problema primala ebaztean, inplizituki dagokion problema duala ebazten ari garela. Soluzio dual optimoa primalaren taula optimotik lor daiteke, osagarritzko nasaitasunaren teorema erabiltzeko beharrik izan gabe.

Lehen ikusi dugunez, $\mathbf{y}^{*T} = \mathbf{c}_B^T B^{-1}$ eredu dualaren soluzioa da. Suposa dezagun $I_{m \times m}$ identitate-matrizea A matrizearen azpimatrizea dela. Hau betetzen dela dakigu nasaitze-aldagaiak edota aldagai artifizialak sartzen ditugulako. Taula optimoan hasierako taulako identitate-matrizearen zutabeei dagozkien elementuek B^{-1} matrizea osatzen dute. Hori ikustea oso erraza da; ez ahaztu, taula bakoitzeko zutabe-bektoreak une horretako oinarriarekiko koordenatuak direla. Zutabe horietan, B oinarria optimoa izan edo ez izan, zera beteko da beti:

$$B^{-1}I = B^{-1}$$

Zutabe horiei dagozkien lerro adierazleko elementuak ondokoak dira:

$$z_j - c_j = \mathbf{c}_B^T B^{-1} \mathbf{a}_j - c_j \quad \mathbf{a}_j \in I$$

Osagai guztiak batera kalkulatzen badira ondoko bektorea lortzen da:

$$\mathbf{c}_B^T B^{-1} I - \mathbf{c}_I = \mathbf{c}_B^T B^{-1} - \mathbf{c}_I$$

Beraz, $\mathbf{y}^{*T} = \mathbf{c}_B^T B^{-1}$ lortzeko, aurreko bektoreari $\mathbf{c}_I$ batu besterik ez da egin behar.

- I matrizea nasaitze-aldagaez osaturik baldin badago, $\mathbf{c}_I = \mathbf{0}$ da.
- Bestela, aldagai artifizialak baldin badaude, bektore horrek $-M$ balioak izango ditu.

□

Adibidea:

157. orriko adibideko problema lineala har dezagun.

$$\max z = 3x_1 + x_2 - 2x_3$$

ondoko murrizketen menpe

$$x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 5$$

$$2x_1 - x_2 + 3x_3 \leq 4$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

Hasierako taula:

	-3	-1	2	0	0	0
$\mathbf{a}_4$	1	2	1	1	0	5
$\mathbf{a}_5$	2	-1	3	0	1	4

Simplex metodoa erabiliz lortutako soluzio optimoaren taula:

	0	0	6	1	1	9
$\mathbf{a}_2$	0	1	$-\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$-\frac{1}{5}$	$\frac{6}{5}$
$\mathbf{a}_1$	1	0	$\frac{7}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{13}{5}$

Hasierako taulan ikusten da $B = \{\mathbf{a}_4, \mathbf{a}_5\}$ lehenengo oinarria, identitatea hain zuzen ere, nasaitze-aldagaiez osaturik dagoela, oinarri optimoan 4. eta 5. zutabeei dagokien matrizea B^{-1} dela eta zutabe horretan dauden $(z_4 - c_4, z_5 - c_5) = \mathbf{c}_B^T B^{-1} I - \mathbf{c}_I$ dualaren soluzioa direla $\mathbf{c}_I$ bektorea batuz gero. Hala ere, kasu honetan $\mathbf{c}_I = \mathbf{0}$ da, eta ondorioz $\mathbf{y}^{*T} = \mathbf{c}_B^T B^{-1} = (1 \ 1)$ da dualaren soluzio optimoa.

□

Oro har, eredu guztiak ez dira primal-dual simetriko izango, aurreko adibidean gertatu bezala. Horrelakoetan, lehen oinarriko diren aldagai artifizialek helburu-funtzioa zigortzen dute, eta $\mathbf{c}$ bektorearen osagai horiek kontutan izan beharko ditugu dualaren soluzioa kalkulatzeko.

Adibidea:

Demagun ondoko eredua:

$$\min z = x_1 + 2x_2$$

ondoko murrizketen menpe

$$4x_1 + 3x_2 \leq 12$$

$$x_1 + 3x_2 \geq 6$$

$$2x_1 + x_2 \geq 4$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Simplex metodoa erabiltzen hasteko, beharrezko gertatzen zaigu 2 aldagai artifizial (w_1 eta w_2) eta nasaitze-aldagaiak gehitzea. Lehen oinarria $B = I = \{\mathbf{a}_3, \mathbf{a}_{w1}, \mathbf{a}_{w2}\}$ da, eta ebatziko dugun eredua hauxe izango da:

$$\max (-z) = -x_1 - 2x_2 - Mw_1 - Mw_2$$

ondoko murrizketen menpe

$$4x_1 + 3x_2 + x_3 = 12$$

$$x_1 + 3x_2 - x_4 + w_1 = 6$$

$$2x_1 + x_2 - x_5 + w_2 = 4$$

$$x_1 \dots w_2 \geq 0$$

Beharrezkoak diren simplex metodoaren bi iterazioak taulakoak dira.

c_B		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	w_1	w_2	
		$-3M+1$	$-4M+2$	0	M	M	0	0	$-10M$
0	$\mathbf{a}_3$	4	3	1	0	0	0	0	12
-M	$\mathbf{a}_{w1}$	1	3	0	-1	0	1	0	6
-M	$\mathbf{a}_{w2}$	2	1	0	0	-1	0	1	4
		$-\frac{5}{3}M + \frac{1}{3}$	0	0	$-\frac{1}{3}M + \frac{2}{3}$	M	$\frac{4}{3}M - \frac{2}{3}$	0	$-2M-4$
0	$\mathbf{a}_3$	3	0	1	1	0	-1	0	6
-2	$\mathbf{a}_2$	$\frac{1}{3}$	1	0	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	0	2
-M	$\mathbf{a}_{w2}$	$\frac{5}{3}$	0	0	$\frac{1}{3}$	-1	$-\frac{1}{3}$	1	2
		0	0	0	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{5}$	$M - \frac{3}{5}$	$M - \frac{1}{5}$	$-\frac{22}{5}$
0	$\mathbf{a}_3$	0	0	1	$\frac{2}{5}$	$\frac{9}{5}$	$-\frac{2}{5}$	$-\frac{9}{5}$	$\frac{12}{5}$
-2	$\mathbf{a}_2$	0	1	0	$-\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$-\frac{1}{5}$	$\frac{8}{5}$
-1	$\mathbf{a}_1$	1	0	0	$\frac{1}{5}$	$-\frac{3}{5}$	$-\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{6}{5}$

- Problema primalaren soluzioa:

$$x_1 = \frac{6}{5}, \quad x_2 = \frac{8}{5}, \quad -z^* = -\frac{6}{5} - 2 \cdot \frac{8}{5} = -\frac{22}{5}$$

Beraz, $z^* = \frac{22}{5}$.

- Dualaren soluzioa: Hasierako taulan 3., 6. eta 7. zutabeek (oinarriko bektoreei dagozkienek) osatzen dute identitatea. Taula optimoan lerro adierazleko zutabe horietan bilatu behar da dualaren soluzio optimoa.

$$* \quad z_3 - c_3 = \mathbf{c}_B B^{-1} \mathbf{a}_3 - 0 = 0$$

$$* \quad z_{w1} - c_{w1} = \mathbf{c}_B B^{-1} \mathbf{a}_{w1} - M = M - \frac{3}{5}$$

$$* \quad z_{w2} - c_{w2} = \mathbf{c}_B B^{-1} \mathbf{a}_{w2} - M = M - \frac{1}{5}$$

Beraz,

$$(y_1, y_2, y_3) = (0, M - \frac{3}{5}, M - \frac{1}{5}) + (0, -M, -M) = (0, -\frac{3}{5}, -\frac{1}{5})$$

Kalkulatu berri ditugun aldagai dualen zeinua egokia den begiratu behar da. Kontutan izan behar da y_1 eta y_2 eredu dualaren erabaki-aldagaiak direla, eta ondorioz, soluzio izateko ez-negatibotasun murrizketa bete behar dutela. y_1 eta y_2 aldagaiek balio negatiboak hartuko balituzte, emaitza ez litzateke zuzena izango, ez luketelako ez-negatibotasun baldintza beteko. Hau gertatzen da, helburu-funtzioa minimizatze izatetik maximizatze izatera pasa dugulako, eta honek aldagai dualen zeinuan eragina dauka.

Kasu honetan, dualaren soluzioa $y_1 = 0$, $y_2 = \frac{3}{5}$, $y_3 = \frac{1}{5}$ da.

□

5.5 Dualtasunaren interpretazio ekonomikoa

Eredu linealaren soluzio optimoak baliabide eskasen esleipen optimoa ematen digu. Aldagai dualen balio optimoek, geroago ikusiko dugunez, sistemaren baliabideen erabilgarritasuna edo kantitatea, $\mathbf{b}$ alegia, aldatzea komeni den ala ez esaten digu.

Problema primala eta dagokion duala emanik ondokoa betetzen da:

$$\boxed{\mathbf{y}^{*T} = \mathbf{c}_B^T B^{-1}}$$

B^{-1} problema primalari dagokion B oinarri optimoaren alderantzizkoa da, eta $\mathbf{y}^*$ bektorea problema dualaren soluzio optimoa.

Berdintza hori $z_j - c_j$ balioak kalkulatzeko erabil daiteke.

$$z_j - c_j = \mathbf{c}_B^T B^{-1} \mathbf{a}_j - c_j = \mathbf{y}^{*T} \mathbf{a}_j - c_j$$

5.5.1 Itzal-prezioak

Demagun eredu lineala eta dagokion B oinarri optimoa ditugula, eta baliabideen $\mathbf{b}$ bektorean zenbait aldaketa txiki gertatu dela, hau da, baliabide-bektorea $\mathbf{b} + \Delta\mathbf{b}$ izatera pasatzen dela. $\Delta\mathbf{b}$ txikia denez, $B^{-1}(\mathbf{b} + \Delta\mathbf{b})$ positibo mantentzen dela suposatuko dugu. Guztiarekin, ondoko aldaketak gertatzen dira:

- Soluzio primal optimoa:

$$\hat{\mathbf{x}}_B^* = B^{-1}(\mathbf{b} + \Delta\mathbf{b}) = \mathbf{x}_B^* + B^{-1}\Delta\mathbf{b}$$

$B^{-1}(\mathbf{b} + \Delta\mathbf{b}) \geq 0$ mantentzen dela esan dugunez, soluzio eguneratua bideragarria da.

- Lerro adierazlean:

$$z_j - c_j = \mathbf{c}_B^T B^{-1} \mathbf{a}_j - c_j \quad \forall \mathbf{a}_j \in A$$

ez da aldatuko, $\mathbf{b}$ bektoreak jasandako aldaketak ez duelako bere gain inolako eraginik. Hau honela izanik, $\mathbf{y}^*$ soluzio dual optimoa ez da aldatzen.

- Helburu-funtzio dualaren balioan:

$$\hat{G} = \mathbf{y}^{*T}(\mathbf{b} + \Delta\mathbf{b}) = \mathbf{y}^{*T}\mathbf{b} + \mathbf{y}^{*T}\Delta\mathbf{b} = G + \mathbf{y}^{*T}\Delta\mathbf{b} = z + \mathbf{y}^{*T}\Delta\mathbf{b}$$

Helburu-funtzio primalaren balioa ere aldatu egingo da, $z = G$ betetzen baita.

Guzti honetatik zera ondoriozta daiteke: baliabide-bektorearen aldaketak ez duela soluzio dualaren osagaien gain inolako eraginik izango

baldin B oinarriak optimo izaten jarraitzen badu; bai ordea soluzio primalaren osagaien gain. Helburu-funtzio dualaren balioa aldatu egiten da, $\mathbf{y}^{*T} \Delta \mathbf{b}$ bezain beste, hau da, baliabide-bektorearen aldaketaren eta aldagai dualen arabera da.

Adibidez, baldin $\Delta b_i = 1$ bada eta gainontzeko baliabideak bere horretan mantentzen badira, zera lortzen da:

$$\mathbf{y}^{*T} \Delta \mathbf{b} = (y_1 \dots y_m) \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = y_i$$

hots, helburu-funtzioaren balioa zenbat handituko den aldagai dual optimoen balioek ematen dute.

y_i honek ($i = 1 \dots m$) zera neurtzen du: i baliabidea unitate bat gehituz gero helburua zenbat handituko den. Hori dela eta, y_i balio dualari i baliabidearen *itzal-prezioa* deitzen zaio.

Horrenbestez, problema dualaren soluzio optimoa ezagutzean ereduaren baliabideak handitzea komeni zaigun jakingo dugu, honen arabera handituko edo txikituko baita helburu-funtzio primalaren balio optimoa.

Azter dezagun helburu-funtzio duala:

$$G = b_1 y_1 + b_2 y_2 + \dots + b_m y_m$$

$b_i y_i$ batugai bakoitzak zera adierazten du: b_i unitate i baliabide izateak izango duen eragina helburu-funtzioan.

Adibidea:

Har dezagun 159. orriko adibidea. $b_1 = 5$ eta $b_2 = 4$ baliabideen itzal-prezioak $y_1 = 1$ eta $y_2 = 1$ direla ikusten da taula optimoan.

Zer esan nahi du horrek?

- $b_1 = 5$ izatetik $b_1 + \Delta b_1 = 6$ izatera pasatzen badugu, helburu-funtzioaren balioa y_1 unitate gehituko dela: $z^* = G^* = 9 + y_1$

alegia, ondokoa betetzen den artean:

$$\mathbf{x}_B = B^{-1}(\mathbf{b} + \Delta \mathbf{b}) \geq \mathbf{0}$$

Bideragarria al da aldaketa egin ondoren lortzen den soluzioa?

$$\mathbf{x}_B = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{8}{5} \\ \frac{14}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} \geq \mathbf{0} \quad ,$$

Soluzioa bideragarria da. Egiazta dezagun benetan helburu-funtzioaren balio optimoa $z^* = G^* = 9 + y_1 = 10$ dela:

$$G^* = z^* = \mathbf{c}_B \mathbf{x}_B = (1 \ 3) \begin{pmatrix} \frac{8}{5} \\ \frac{14}{5} \end{pmatrix} = 10$$

- b_2 -rentzat interpretazioa bera izango da. Baliabide hau 4 izatetik 5 izatera handitzen badugu eta

$$\mathbf{x}_B = B^{-1}(\mathbf{b} + \Delta \mathbf{b}) \geq \mathbf{0}$$

betetzen bada, orduan $y_2 = 1$ da baliabide honi dagokion itzalprezioa. b_2 baliabidearen kopurua handitzeak helburuaren balioaren handitzea eragingo du.

$$\mathbf{x}_B = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} \geq \mathbf{0}$$

$$z^* = G^* = 9 + y_2$$

□

Adibidea:

Azter dezagun orain 160. orriko adibidea. Dualaren soluzioa hau dela esan dugu:

$$y_1 = 0, \quad y_2 = \frac{3}{5}, \quad y_3 = \frac{1}{5}$$

Baldin b_1 baliabidea b_2 baliabidea eta b_3 baliabidea, bakoitza unitate bat gehituta ere bideragarritasun primala mantenduko balitz, b_i baliabidearen itzal-prezioa y_i ($i = 1 \dots 3$) izango litzateke.

Kasu honetan b_1 baliabidea $b_1 = 12$ izatetik $b_1 + \Delta b_1 = 13$ izatera aldatzen bada, soluzio optimoa aldatu egiten dela ikusten da, beti ere taulan optimaltasuna galdu gabe.

$$\mathbf{x}_B = B^{-1}(\mathbf{b} + \Delta \mathbf{b}) = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{2}{5} & -\frac{9}{5} \\ 0 & \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \\ 0 & -\frac{1}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 13 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{17}{5} \\ \frac{8}{5} \\ \frac{6}{5} \end{pmatrix} \geq \mathbf{0}$$

Hala ere, helburu-funtzioaren balioa ez da aldatuko:

$$z = \mathbf{c}_B \mathbf{x}_B = (0 \quad -2 \quad -1) \begin{pmatrix} \frac{37}{5} \\ \frac{8}{5} \\ \frac{6}{5} \end{pmatrix} = -\frac{16}{5} - \frac{6}{5} = -\frac{22}{5}$$

Zergatik ez da helburu-funtzioaren balioa hobeagotu? Itzal-prezioaren balioa $y_1 = 0$ delako. Hori hobeto ulertzeko, begira dezagun ea ereduaren lehen murrizketan zer gertatzen den.

Lehen murrizketa ($4x_1 + 3x_2 \leq 12$) aldaketa egin aurretik geneukan soluzio optimorako egiaztatuz gero, ($\mathbf{x}^* = (\frac{6}{5}, \frac{8}{5})$), zera dakusagu:

$$4 \cdot \frac{6}{5} + 3 \cdot \frac{8}{5} < 12$$

Ez da berdintasunez betetzen. Honek zera esan nahi du: b_1 baliabidea ($b_1 = 12$) kopuru handiegian dagoela. Beraz, aldaketa egin aurretik dagoeneko baliabidea soberan baldin bageneukan, oraindik ere gehiago handiagotzeak ez digu inolako hobekuntzarik ekarriko.

Gainontzeko bi baliabideetarako ere modu berean egiten da interpretazio ekonomikoa.

□

5.5.2 Aldagai primalen kostu ekonomikoa

Baldin koefiziente teknologikoen matrizeko a_{ij} bakoitzak j jardueraren unitate bakoitzak eskatzen duen i baliabidearen unitate-kopurua adierazten badu orduan

$$\sum_{i=1}^m a_{ij} y_i$$

batukariak x_j ($j = 1 \dots n$) jardueraren kostu ekonomikoa zenbatzen du itzal-prezioekiko ebaluatuta.

Ondokoan ikus daiteke primalaren eta dualaren arteko erlazioa:

$$\begin{array}{ccccccc} x_j & & & & & & \\ \downarrow & & & & & & \\ a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} & \leq b_1 \rightarrow y_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} & \leq b_2 \rightarrow y_2 \\ & & & \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} & \leq b_m \rightarrow y_m \end{array}$$

x_j -ren unitateko irabazia c_j izanik ($j = 1 \dots n$), problema dualaren murrizketa bakoitzak zera ematen digu:

$$\sum_{i=1}^m a_{ij} y_i \geq c_j$$

kostu ekonomikoaren eta irabaziaren arteko erlazioa. Sarrera adibidean (138. orrian), aztertu dugu erlazio hori. Osagarritzko nasaitasunaren teoremaren ondorioetan (156. orrian) ikusi dugunez,

$$\sum_{i=1}^m a_{ij} y_i > c_j$$

dualaren murrizketa bat ez bada berdintasunez betetzen, hau da, kostu ekonomikoa c_j baino handiagoa denean dagokion x_j aldagai primala $x_j = 0$ izango da, oinarriko izango ez delarik.

5.5.3 Simplex metodoaren interpretazioa

Simplex metodoak erabiltzen dituen erregelak ekonomikoki interpreta daitezke.

Hasierako x_j aldagai bat oinarrikoa ez bada, hau da, j jarduera burutzen ari ez bada, j jarduera hori burutzearen unitateko kostu ekonomikoa ondokoa da:

$$\sum_{i=1}^m a_{ij}y_i$$

Kostu ekonomikoak ondoko desberdintzak bete ditzake:

$$\sum_{i=1}^m a_{ij}y_i = \mathbf{y}^T \mathbf{a}_j \quad \begin{matrix} \geq \\ \leq \end{matrix} \quad c_j$$

Interpretazio ekonomikoaren sarreran ikusi dugunez, $\mathbf{y}^T \mathbf{a}_j = z_j$ betetzen da, hau da, $z_j - c_j = \mathbf{y}^T \mathbf{a}_j - c_j$. Simplex metodoaren edozein iteraziotan, x_j aldagaiarentzat ondokoak gerta daitezke:

- Baldin $\sum_{i=1}^m a_{ij}y_i < c_j$ hau da, $z_j - c_j < 0 \Rightarrow$ baliabideak era probetxugarriagoan erabiliak izango dira x_j jarduera hasten bada.
- Baldin $\sum_{i=1}^m a_{ij}y_i > c_j \Rightarrow$ baliabideak era errentagarrienean erabiltzen dira. x_j jarduera hasteak ez du merezi.
- Baldin $\sum_{i=1}^m a_{ij}y_i = c_j \Rightarrow x_j$ oinarrian dago

Laburbilduz, simplex metodoak egiten duena zera da: oinarriko ez diren aldagai guztiak aztertzen ditu, baliabideen erabilpenaren handiagotzea ekar dezaketen ala ez ikusteko. Aldagaia oinarrira sartzean gertatzen da hori. Hobetzea posible ez bada, daukagun esleipena optimoa da.

5.6 Simplex dual metodoa

Simplex metodoaren erabilpenean ikusi dugu soluzio bideragarri batetik hasten garela, behar izanez gero aldagai artifizialak erabiliko ditugarrik. Algoritmoaren hurrengo pausoetan problema primalaren soluzioaren bideragarritasuna ez da galtzen, hau da, mutur-puntu batetik beste batera goazela ziurtatzen digu metodoak, azkenean mutur-puntu optimoan bukatuko dugun arte. Hau $z_j - c_j \geq 0 \quad \forall \mathbf{a}_j \in A$ betetzean gertatuko da.

Lerro adierazlean $z_j - c_j \geq 0 \quad \forall \mathbf{a}_j \in A$ baldintza betetzen dela esatea eta problema dualerako soluzioa bideragarria dela esatea guztiz baliokideak dira. Begira bestela:

$$\boxed{z_j - c_j \geq 0 \quad \forall \mathbf{a}_j \in A} \iff z_j - c_j = \mathbf{c}_B^T B^{-1} \mathbf{a}_j - c_j \geq 0 \quad \forall \mathbf{a}_j \in A \iff$$

$$\iff \mathbf{y}^T \mathbf{a}_j - c_j \geq 0 \quad \forall \mathbf{a}_j \in A \iff \mathbf{y}^T A - \mathbf{c} \geq 0 \iff \boxed{A^T \mathbf{y} \geq \mathbf{c}}$$

Aurreko baliokidetasunetatik zera ondorioztatzen da:

1. Soluzioa da. $z_j - c_j \geq 0 \quad \forall \mathbf{a}_j \in A$ betetzen denean problema dualaren murrizketak betetzen dira .
2. Bideragarria da. Taula optimoan $z_j - c_j$ balioak positiboak dira, hots, bideragarritasun duala dago.

Eredu lineal bat ebazterakoan, problema primalarentzat eta dualarentzat aldi berean bideragarri izango den soluzioa aurkitu nahi dugu, orduan bakarrik izango baita soluzioa optimo. Primalarentzat bideragarri den soluziotik hasten gara eta $z_j - c_j \geq 0$ lortzean dualarentzat ere soluzioa bideragarria dela dakigu.

Aurreko gaian eraiki dugun simplex metodoari *simplex primala* deituko diogu eta orain ikusiko dugunari *simplex duala*.

Simplex primal metodoa problema primalarentzat bideragarria den oinarri batetik hasten da, eta aldi berean dualarentzat ere bideragarri izango den batean amaitzen. Simplex dual metodoa aldiz, dualarentzat bideragarri den oinarri batetik hasten da, eta metodoaren zenbait pausoren ondoren, problema primalarentzat ere bideragarri izango den oinarri bat lortuko dugu.

Guztiarekin, zera ikus dezakegu: eredu baten soluzioa lortzean, dagokion dualaren soluzioa ere taula berberak ematen digunez, soluzioak lortzeko ez zaigula ajolako problema primalari dagokion soluzio bideragarri batetik edo dualari dagokion batetik hastea.

Hau abantaila handia da, simplex dual metodoaren pausoak simplex primal metodoaren berberak direlako, une bakoitzean egokien gertatuko zaigun metodoa erabiltzea komeniko zaigularik.

5.6.1 Simplex dual metodoaren urratsak

Metodo hau helburu-funtzioa maximizatzeko idazkeran dagoen kasuan erabiltzeko dago eraikia. Hau hala ez den kasuetan ereduari beharrezko aldaketak egin beharko dizkiogu metodoaren urratsak jarraitzen hasi baino lehen. Metodoaren urratsak ondoren datozenak dira:

1. Hasierako taulan $\forall \mathbf{a}_j \in A$ -rako $z_j - c_j \geq 0$ bete behar da bideragarritasun duala izan dadin.
2. Bideragarritasun primalari dagokionez, ondorengo bi kasuetan egon gitezke:
 - Baldin $x_{B_i} \geq 0 \quad \forall i = 1 \dots m$, orduan taula hori optimoa da, bideragarritasun primala ere badaukagulako. Amaitu.
 - Baldin $\exists x_{B_i} < 0$, orduan soluzioa hobe daiteke.
3. Oinarria aldatuko da. Oinarritik irtengo den bektorea:

$$a_r / x_{B_r} = \text{Min} \{ x_{B_i} / x_{B_i} < 0 \}$$

r pibot-lerroa da. Oinarrian sartuko den bektorea:

$$\mathbf{a}_k / \frac{z_k - c_k}{y_{rk}} = \text{Max} \left\{ \frac{z_j - c_j}{y_{rj}} / y_{rj} < 0 \right\}$$

Baldin $\nexists y_{rj}$ negatiborik, orduan ezingo dugu piboterik izan, oinarritik ezin izango dugulako bektorerik atera. Horrelakoetan problemak ez du soluziorik. Duala bornegabea da eta primala bideraezina. Amaitu.

4. Oinarrizko matrize-eragiketen bidez $\mathbf{a}_k$ zutabea $\mathbf{e}_r$ bektore bihurtzen da, y_{rk} pibota izanik. 2. urratsera itzuli, eta urratsak jarraitu optimaltasun baldintzak bete arte.

Adibidea:

Demagun ondorengo eredu lineala ebatzi nahi dugula:

$$\min z = 3x_1 + 2x_2$$

ondoko murrizketen menpe

$$x_1 + 2x_2 \geq 3$$

$$-2x_1 + x_2 \geq 2$$

$$x_1 + 4x_2 \geq 7$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Hasteko, bai simplex primal metodoa eta bai simplex dual metodoa erabili ahal izateko, helburu-funtzioa maximizatze eran jarri beharko dugu:

$$\max (-z) = -3x_1 - 2x_2$$

Murrizketek 3 nasaitze-aldagai eskatzen dituzte, eta hala eta guztiz ere, ez dugu identitate-matrizea lortzen. Berau lortzeko 3 aldagai artifizial sartu beharko ditugu eta orduan izango dugu eredua simplex primal metodoa erabiltzen hasteko prest.

Kasu honetan, problema primalarentzako bideragarri den soluzio batetik problema ebazten hastea baino hobe genuke problema dualarentzako bideragarri den soluzio batetik hastea: helburu-funtzioaren koefiziente guztiak negatiboak izateagatik, lehen taulan bideragarritasun duala daukagu zuzenean. Murrizketa guztiak (-1)-az biderkatuko ditugu, eta optimizatu beharko dugun eredua honako hau izango da:

$$\max (-z) = -3x_1 - 2x_2$$

ondoko murrizketen menpe

$$-x_1 - 2x_2 \leq -3$$

$$2x_1 - x_2 \leq -2$$

$$-x_1 - 4x_2 \leq -7$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

x_3, x_4 eta x_5 nasaitze-aldagaiak gehitu ondoren lortuko dugun hasierako taula hau da:

	3	2	0	0	0	0
$\mathbf{a}_3$	-1	-2	1	0	0	-3
$\mathbf{a}_4$	2	-1	0	1	0	-2
$\mathbf{a}_5$	-1	-4	0	0	1	-7

Hasierako taula honetan ez dago bideragarritasun primalik,

$$\mathbf{x}_B = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ -7 \end{pmatrix} \not\geq \mathbf{0}$$

betetzen delako. Bai ordea bideragarritasun duala $\forall \mathbf{a}_j \in A \quad z_j - c_j \geq 0$ betetzen delako. Hemendik abiatuz 2 bideragarritasunak (primala eta duala) beteko dituen eta ondorioz optimoa izango den soluziora iristea posible da simplex dual algoritmoa erabiliz.

Simplex dual metodoa erabiliz problema ebatziko dugu.

$$x_{B_r} = \min \{x_{B_i}/x_{B_i} < 0\} = \min \{-3, -2, -7\} = -7$$

$\mathbf{a}_5$ oinarritik irtetzen da. Oinarritatzen da:

$$\mathbf{a}_k / \frac{z_k - c_k}{y_{ik}} = \max \left\{ \frac{3}{-1}, \frac{2}{-4} \right\} = \frac{z_2 - c_2}{y_{22}} = -\frac{1}{2}$$

$$\text{Pibota} = -4$$

Simplex primal metodoan egiten diren kalkulu berberak eginez ondorengo taula lortzen da:

		$\frac{5}{2}$	0	0	0	$\frac{1}{2} \downarrow$	$-\frac{7}{2}$	-2
0	$\mathbf{a}_3$	$-\frac{1}{2}$	0	1	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	2
0	$\mathbf{a}_4$	$\frac{9}{4}$	0	0	1	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$	$\leftarrow$
-2	$\mathbf{a}_2$	$\frac{1}{4}$	1	0	0	$-\frac{1}{4}$	$\frac{7}{4}$	1

Bideragarritasun duala badago, baina ez primala zeren eta $\exists x_{Bi} < 0$.

- $x_{B2} = -\frac{1}{4} \Rightarrow \mathbf{a}_4$ oinarritik irtetzen da.
- $\mathbf{a}_5$ sartzen da, $y_{2j} < 0$ betetzen duen bakarra delako.
- Pibota: $-\frac{1}{4}$. Pibot lerroa: bigarrena.

Taula eguneratua:

		7	0	0	2	0	-4
0	$\mathbf{a}_3$	-5	0	1	-2	0	1
0	$\mathbf{a}_5$	-9	0	0	-4	1	1
-2	$\mathbf{a}_2$	-2	1	0	-1	0	2

Taula honetan bideragarritasun primala eta duala dauzkagu. Hor-taz, optimoa da.

□

5.7 Murrizketa artifizialaren metodoa

Askotan, aldi berean bideragarritasun duala duen eta bideragarritasun primala ez duen hasierako taula bat aurkitzea zaila gertatzen da. Hon-ek simplex dual metodoaren erabilpena murriztu egiten du. Arazoa konpontzen duten metodoak garatu dira. Horietariko bat *murrizketa artifizialaren metodoa* da.

Metodo hau, aldi berean $z_j - c_j$ negatibo bat edo gehiago eta $x_{Bi} < 0$ bat edo gehiago duten problematan, hau da, ez bideragarritasun pri-malik eta ez bideragarritasun dualik ez duten problematan erabilgarria da. N aldagai dual negatiboen multzoa bada, problemari ondoko mu-rrizketa artifiziaia gehitzen zaio:

$$\sum_{j \in N} x_j \leq M$$

M balioa taulan agertu litekeen beste edozein baliorekin konparatuz oso balio handia da. Murrizketa artifizialari nasaitze-aldagai bat gehitu eta hasierako taulan sartzen da.

Hasiera batean, $z_j - c_j$ negatiboen artetik txikiena duen aldagaia hartzen da sarrera-aldagai izateko, eta irteera-aldagaia murrizketa artifizialari gehitutako nasaitze-aldagaia izango da. Prozesu honek balio-adierazle guztiak ez-negatiboak izatea eragingo du, ondoren simplex dual metodoa erabiltzea posible gertatzen delarik.

Metodo honen bidez lor daitezkeen emaitzak ondokoak dira.

1. Soluzio optimoa lortu da baldin murrizketa artifizialaren nasaitze-aldagaia azken oinarrian balio positiboak agertzen bada.
2. Problema ez dauka soluziorik pibote posiblerik ez badago, hau da, $x_{Bi} < 0$ bat edo gehiago baldin badago baina dagozkien y_{rj} balio guztiak ez-negatiboak badira (duala bornegabea da eta primala bideraezina).
3. Murrizketa artifizialaren nasaitze-aldagaia azken oinarrian zero balioaz agertzen bada edo azken oinarrian agertzen ez bada problema bornegabea izan daiteke edo bestela, aukeratutako M balioa ez da nahiko handia.

Ondorengo adibideetan murrizketa artifizialaren metodoa erabili ondoren gerta daitezkeen kasuak ikusiko ditugu.

Adibidea:

Har dezagun ondoko eredu lineala:

$$\max z = x_1 + 6x_2$$

ondoko murrizketen menpe

$$x_1 + 2x_2 \leq 20$$

$$x_1 + \frac{1}{2}x_2 \geq \frac{1}{2}$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

2. murrizketa (-1) balioaz biderkatu eta x_3 eta x_4 nasaitze-aldagaiak gehituko ditugu:

$$\max z = x_1 + 6x_2$$

ondoko murrizketen menpe

$$\begin{array}{rclcl} x_1 + 2x_2 & +x_3 & & & = 20 \\ -x_1 - \frac{1}{2}x_2 & & +x_4 & & = -\frac{1}{2} \end{array}$$

$$x_1 \dots x_4 \geq 0$$

Hasierako taula:

	x_1	x_2	x_3	x_4	
	-1	-6	0	0	0
$\mathbf{a}_3$	1	2	1	0	20
$\mathbf{a}_4$	-1	$-\frac{1}{2}$	0	1	$-\frac{1}{2}$

Taula honetan ez dago ez bideragarritasun primalik ez eta bideragarritasun dualik ere. Ezin gaitezke ez simplex primal metodoa (aldagai artifizialik gehitu gabe) ez eta simplex dual metodoa erabiltzen hasi. Bai ordea murrizketa artifizialaren metodoa. Horretarako hasierako taula eraikitzeko murrizketa artifiziala gehituko diogu ereduari:

$$x_1 + x_2 \leq 100$$

M erabili ordez oraingo honetan 100 balioa erabiltzea erabaki dugu, balio hau, taulako gainontzeko balioekin konparatuz, nahiko handia delarik. Hasierako taula:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
	-1	$-6\downarrow$	0	0	0	0
$\mathbf{a}_3$	1	2	1	0	0	20
$\mathbf{a}_4$	-1	$-\frac{1}{2}$	0	1	0	$-\frac{1}{2}$
$\mathbf{a}_5$	1	1	0	0	1	100 ←

x_2 aldagaia oinarritutako da, $z_2 - c_2 = -6$ delako negatiboen artetik txikiena. Oinarritik x_5 aldagaia irtengo da, murrizketa artifizialari dagokion nasaitze-aldagaia, hain zuzen ere. Pibota 1 balioa da. Eragiketak egin ondoren, ondoko taulara iristen gara:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
	5	0	0	0	6	600
$\mathbf{a}_3$	-1	0	1	0	-2	-180
$\mathbf{a}_4$	$-\frac{1}{2}$	0	0	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{99}{2}$
$\mathbf{a}_2$	1	1	0	0	1	100

Taula honetan bideragarritasun duala badagoenez, simplex dual metodoa erabiltzen has gaitezke.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
	5	0	0	0	$6\downarrow$	600
$\mathbf{a}_3$	-1	0	1	0	-2	-180
$\mathbf{a}_4$	$-\frac{1}{2}$	0	0	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{99}{2}$
$\mathbf{a}_2$	1	1	0	0	1	100
	2	0	3	0	0	60
$\mathbf{a}_5$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	0	1	90
$\mathbf{a}_4$	$-\frac{3}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	1	0	$\frac{9}{2}$
$\mathbf{a}_2$	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	0	0	10

-3

 $-\frac{1}{4}$ $-\frac{1}{2}$

Bideragarritasun primala eta duala izatea lortu dugu eta murrizketa artifizialaren nasaitze-aldagaia, x_5 , oinarrian dago. Daukagun soluzioa optimoa da: $x_1^* = 0$, $x_2^* = 10$, $z^* = 60$.

□

Ondorengo adibidean problema primala bornegabea eta dagokion duala bideraezina den kasua ikusten da.

Adibidea:

Demagun eredu lineal hau daukagula.

$$\begin{aligned} \max z &= -4x_1 + 5x_2 \\ \text{ondoko murrizketen menpe} \\ 2x_1 + 2x_2 &\geq 4 \\ x_1 - x_2 &\geq 3 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Nasaitze-aldagaiak eta murrizketa artifizialeak gehituz, honela gelditzen zaigu.

$$\begin{aligned} \max z &= -4x_1 + 5x_2 \\ \text{ondoko murrizketen menpe} \\ -2x_1 - 2x_2 + x_3 &= -4 \\ -x_1 + x_2 + x_4 &= -3 \\ x_2 + x_5 &= M \\ x_1 \dots x_5 &\geq 0 \end{aligned}$$

Murrizketa artifizialaren metodoa erabiliz taula optimoa lortuko dugu. Ikusten denez, zenbat eta balio handiagoa aukeratu M balio-arentzat, orduan eta handiagoak izango dira $\mathbf{x}_B$ bektorearen balioak. Primala bornegabea da eta duala bideraezina.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
	4	-5	0	0	0	0
$\mathbf{a}_3$	-2	-2	1	0	0	-4
$\mathbf{a}_4$	-1	1	0	1	0	-3
$\mathbf{a}_5$	0	1	0	0	1	M
	4	0	0	0	5	$5M$
$\mathbf{a}_3$	-2	0	1	0	2	$-4 + 2M$
$\mathbf{a}_4$	-1	0	0	1	-1	$-3 - M$
$\mathbf{a}_2$	0	1	0	0	1	M
	0	0	0	4	1	$M - 12$
$\mathbf{a}_3$	0	0	1	-2	4	$4M + 2$
$\mathbf{a}_1$	1	0	0	-1	1	$3 + M$
$\mathbf{a}_2$	0	1	0	0	1	M

□

Adibidea:

Ikus dezagun duala bornegabea eta primala bideraezina den kasua.

$$\max z = 2x_1 + x_2$$

ondoko murrizketen menpe

$$x_1 + x_2 \leq 2$$

$$-3x_1 + x_2 \geq 3$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Murrizketa artifizialaren metodoa erabiliz.

$$\max z = 2x_1 + x_2$$

ondoko murrizketen menpe

$$x_1 + x_2 + x_3 = 2$$

$$3x_1 - x_2 + x_4 = -3$$

$$x_1 + x_2 + x_5 = M$$

$$x_1 \dots x_5 \geq 0$$

Simplex metodoaren urratsak:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
	-2	-1	0	0	0	0
$\mathbf{a}_3$	1	1	1	0	0	2
$\mathbf{a}_4$	3	-1	0	1	0	-3
$\mathbf{a}_5$	1	1	0	0	1	M
	0	1	0	0	2	$2M$
$\mathbf{a}_3$	0	0	1	0	-1	$2 - M$
$\mathbf{a}_4$	0	-4	0	1	-3	$-3 - 3M$
$\mathbf{a}_1$	1	1	0	0	1	M
	0	0	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{5M-3}{4}$
$\mathbf{a}_3$	0	0	1	0	-1	$2 - M$
$\mathbf{a}_2$	0	1	0	$-\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{3+3M}{4}$
$\mathbf{a}_1$	1	0	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{M-3}{4}$
	0	0	$\frac{5}{4}$	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{17}{4}$
$\mathbf{a}_5$	0	0	-1	0	1	$M - 2$
$\mathbf{a}_2$	0	1	$\frac{3}{4}$	$-\frac{1}{4}$	0	$\frac{9}{4}$
$\mathbf{a}_1$	1	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	0	$-\frac{1}{4}$

a_1 aldagaiak oinarria utzi behar du baina ez dago pibote posiblerik. Hortaz, duala bornegabea da eta primala bideraezina. Grafikoki egiazta daiteke, nahi izanez gero.

□

5.8 Ariketak

1. Ondoko problemen dualak kalkula itzazu:

(a)

$$\max z = 3x_1 + 5x_2 - 4x_3$$

ondoko murrizketen menpe

$$2x_1 - x_2 - x_3 \leq 2$$

$$x_1 + 4x_2 - 3x_3 \geq -4$$

$$2x_1 + x_2 + 2x_3 = 2$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

(b)

$$\min z = -x_1 - x_2 + 2x_3$$

ondoko murrizketen menpe

$$x_1 - 2x_2 + x_3 = 5$$

$$2x_1 - 3x_2 + 2x_3 \leq 6$$

$$x_1 : \text{murriztugabea}$$

$$x_2 \geq 0, x_3 \leq 0$$

(c)

$$\max z = x_1 - 2x_2 + x_3$$

ondoko murrizketen menpe

$$x_1 + 5x_2 - x_3 \leq 2$$

$$2x_1 - x_2 + 4x_3 \leq 6$$

$$x_1 \leq 0, x_2 \geq 0$$

$$x_3 : \text{murriztugabea}$$

2. Har dezagun aurreko ariketako lehen eredua.
 - (a) Helburu-funtzio dualaren balio optimoarentzako behe-borne bat eta problema primalaren balio optimoaren goi-borne bat kalkula itzazu.
 - (b) Problema primala ebatzi eta taulatik dualaren soluzioa lortu.
3. Ebatz ezazu ondorengo problema simplex dual metodoa erabiliz:

$$\begin{aligned}
 \max z &= -x_1 - x_2 - x_3 \\
 \text{ondoko murrizketen menpe} \\
 x_1 + 2x_2 + 2x_3 &\geq 5 \\
 -x_1 - 3x_2 + 4x_3 &\geq 7 \\
 x_j &\geq 0 \quad j = 1, 2, 3
 \end{aligned}$$

4. Demagun ondoko eredu lineala:

$$\begin{aligned}
 \max z &= -x_1 + 4x_2 \\
 \text{ondoko murrizketen menpe} \\
 x_1 - 3x_2 &\leq 5 \\
 2x_1 + 3x_2 &\leq 2 \\
 -x_1 + 5x_2 &\leq 3 \\
 x_1 + 4x_2 &\leq 2 \\
 6x_1 - 3x_2 &\leq 7 \\
 x_1, x_2 &\geq 0
 \end{aligned}$$

- (a) Dagokion duala kalkula ezazu.
- (b) Bai primalaren eta bai dualaren soluzioak aurki itzazu horietariko sinpleena ebatziz.
- (c) Soluzioek osagarritzko nasaitasunaren teorema betetzen dutela egiazta ezazu.
- (d) Primalaren eta dualaren itzal-prezioak kalkula itzazu. Zein da itzal-prezio hauen esanahia?

5. Har dezagun eredu lineal hau:

$$\max z = 4x_1 - 7x_2 + x_3$$

ondoko murrizketen menpe

$$x_1 + 2x_2 - 2x_3 \leq 6$$

$$-x_1 + 3x_2 + x_3 = 3$$

$$2x_1 + 3x_2 - x_3 \geq 5$$

$$x_j \geq 0 \quad j = 1 \dots 3$$

(a) Ebatz ezazu murrizketa artifizialaren metodoa erabiliz.

(b) Dualaren soluzioa lor ezazu.

6. Ondorengo eredu linealen adibideak idatz itzazu:

(a) Primala bornegabea da eta duala bideraezina.

(b) Duala bornegabea da eta primala bideraezina.

(c) Primala bideraezina da eta baita duala ere.

7. Demagun honako eredu lineala:

$$\min z = x_1 + 2x_2 + x_3$$

ondoko murrizketen menpe

$$-x_1 - x_2 + 5x_3 \leq 14$$

$$2x_1 + 3x_2 - x_3 \geq 6$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

Bere soluzio optimoa $\mathbf{x} = (3 \ 0 \ 0)$ da.

(a) Osagarritzko nasaitasunaren teorema erabiliz dualaren soluzioa lor ezazu.

(b) Metodoric egokiena (simplex primal edo duala) erabiliz problema ebatz ezazu. Taulako soluzio duala aurreko puntuan lortutakoarekin aldera ezazu.

(c) Aldagai dualen interpretazio ekonomikoa egin ezazu.

6. Gaia

SENTIKORTASUN-ANALISIA

Behin programazio linealeko problema ebatzia izan denean, gerta liteke ereduaren $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ eta A parametroek aldaketaren bat jasatea. Kontutan izan parametro horiek denboran zehar aldakorrak izan daitezkeela. Edota aldaketarik ez gertatuta ere, beharbada aldatuz gero zer gertatuko litzatekeen aurretik jakitea interesatuko zaigu. Aldaketa gertatu ondoreneko problemaren soluzioa lortzeko ez dago zertan berriro ere problema hasieratik ebatzi beharrik; nahikoa da sentikortasun-analisirako metodoak erabiltzea. Hauek, aldaketa gertatu aurreko ereduaren soluzio optimotik hasten dira eta iterazio-kopuru garrantzitsua aurrezten dute.

Ereduaren parametroetan gertatutako aldaketek soluzio optimoan zer nolako eragina sortzen duten aztertzea *sentikortasun-analisisa* edo *postoptimaltasun analisisa* deitzen da.

6.1 Aldaketa diskretuak

Eredu linealeko $\mathbf{c}$, $\mathbf{b}$ eta A parametroetan gerta daitezkeen aldaketa diskretuak eta baita murrizketa-kopuruaren aldaketa eta aldagai-kopuruaren aldaketa aztertzen dira analisi honetan.

Aldaketa horien esanahia ulertzeko adibide bat aztertuko dugu; baliabide-esleipenaren problema. Problema hau izango da aldaketa

6.1 .Taula:

ESENTZIAK	GASOLINAK			ESENTZIA-KOPURUA
	A	B	D	
1	4	2	1	40
2	2	3	1	30
IRABAZIA	1	2	2	

guztien eragina aztertzeko erabiliko duguna gai osoan zehar.

Adibidea:

Demagun 3 gasolina mota desberdin ekoitzi nahi direla: A, B eta D. Horretarako, 2 esentzia mota erabiliko dira: 1 eta 2. Gasolina mota bakoitza ekoizteko behar den esentzia bakoitzeko kopurua, esentzien erabilgarritasuna eta ekoitzitako gasolina-unitate bakoitzagatik lortutako irabazia 6.1 .taulakoak dira.

Problema ebazteko eraikitako eredu lineala, behin beharrezko naitze-aldagaiak (x_4, x_5) gehituak izan direnean, ondokoa da:

$$\max z = x_1 + 2x_2 + 2x_3$$

ondoko murrizketen menpe

$$4x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 40$$

$$2x_1 + 3x_2 + x_3 + x_5 = 30$$

$$x_j \geq 0 \quad j = 1 \dots 5$$

Dagokion simplex metodoaren taula optimoa hau da:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
	3	4	0	0	2	60
$\mathbf{a}_4$	2	-1	0	1	-1	10
$\mathbf{a}_3$	2	3	1	0	1	30

Soluzio optimoa $x_1 = 0, x_2 = 0$ eta $x_3 = 30$ da, eta lortu ahal izango dugun irabazi handiena $z^* = 60$ -koa da. Nola lortuko dugu irabazi maximoa? D gasolina 30 unitate ekoitziz $x_3^* = 30$. Hau da baliabide-esleipen optimoa.

□

Zer lortzen dugu ereduaren parametroen aldaketa diskretuak aztertzerakoan? Ba, $\mathbf{b}$ baliabide-kopurua aldatuko bagenu, honek soluzio optimoan izango lukeen eragina ezagutzea lortuko genuke sentikortasun-analisiaren bidez. Gauza bera $\mathbf{c}$ prezio-bektorean gertatutako aldaketekin eta A -ko elementuen aldaketarekin, gasolinen konposizioan gerta litezkeenekin alegia.

Adibidea:

Har dezagun aurreko adibidea, eta ikus dezagun zer nolako aldaketak gerta daitezkeen:

1. Interesgarri gerta liteke baliabide-kopuruak 40 eta 30 izan ordez 50 eta 20 balira, lehen lortutako emaitza nola aldatuko litzatekeen ezagutzea; edota irabazien bektorea $(1, 2, 2)$ izatetik $(1, 1, 1)$ izatera pasako balitz. Edo, lehenengo gasolinen konposizioa aldatzen bada, hau da, $\mathbf{a}_1$ bektorea $\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ izatetik $\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$ izatera pasatzen bada.
2. Aldaketa horietaz gain, honelakoak ere azter genitzake: E gasolina mota desberdin bat ekoizten has liteke lantegia. Demagun 1 eta 2 esentzien 1 eta 2 unitate behar direla horretarako, hurrenez hurren, gasolina horrekin lortuko den irabazia 2-koa izango delarik. E gasolina berria ekoizten hasteak soluzio optimoaren gain

eraginik izango al luke? Begira, oraingo honetan eredu linealari aldagai berri bat gehitzen ari gatzazkiola.

3. Eta, A, B eta D gasolinak ekoizteko beste esentzia desberdin bat erabiltzen hasiko bagina orain artekoez gain? 3. esentzia adibidez? Aldaketa honek ereduaren murrizketa-kopuruaren gain du eragina.

Aldaketa guzti horiek eta beste zenbait adibideen bidez aztertuko ditugu.

Aldaketa horiek guztiak banan-bana gerta daitezke, baina baita 2 edo gehiago batera ere. Guk banakako aldaketak bakarrik aztertuko ditugu gai honetan; besteak analisi berberari jarraituz egin daitezke.

□

Demagun idazkera kanonikoan dagoen problema lineala daukagula eta $\mathbf{b} \geq \mathbf{0}$ dela. Dagozkion hasierako taula eta taula optimoa ondokoak dira:

- Hasierako taula:

Hasierako aldagaiak Nasaitze-aldagaiak

$x_1 \dots x_n$	$x_{n+1} \dots x_{n+m}$	
$-C$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$
A	I	$\mathbf{b}$

- Taula optimoa, B oinarri optimoa izanik:

Hasierako-aldagaiak	Nasaitze-aldagaiak	
$z_1 - c_1 \dots z_n - c_n$	$z_{n+1} - c_{n+1} \dots z_{n+m} - c_{n+m}$	
$C_B B^{-1} A - C$	$C_B B^{-1}$	$C_B^T X_B$
$B^{-1} A$	B^{-1}	$B^{-1} \mathbf{b}$

Sentikortasun-analisia taula optimoaren erabileran oinarritzen da. Taula horretako B^{-1} matrizea erabiltzen da baliabideen $\mathbf{b}$ bektorean edo ereduaren murrizketa-kopuruan aldaketaren bat egin ondoren bideragarritasun primala galdu den ala ez aztertzeko. Taula bera erabiltzeko dugu baita $\mathbf{c}$ bektorean, koefiziente teknologikoen A matrizean edo problemaren aldagai-kopuruan aldaketaren bat burutu ondoren bideragarritasun duala galdu den edo ez egiaztatzeko. Azter dezagun, ba, orain aldaketa guzti hauen eragina.

6.1.1 $\mathbf{b}$ bektorearen aldaketak

Demagun idazkera estandarrean dagoen hasierako problema ondokoa dela:

$$\begin{aligned} \max z &= \mathbf{c}^T \mathbf{x} \\ \text{o. m. m.} \\ A\mathbf{x} &= \mathbf{b} \\ \mathbf{x} &\geq \mathbf{0} \end{aligned}$$

Demagun, baita, dagokion taula optimoa ezaguna zaigula.

Baldin $\mathbf{b}$ bektorea diskretuki aldatu eta $\mathbf{b} + \Delta\mathbf{b}$ balioa hartzen badu, $\Delta\mathbf{b}$ bektorea m osagaiko bektorea izanik, ebatzi behar den problema

orain honako hau da:

$$\begin{aligned} \max z &= \mathbf{c}^T \mathbf{x} \\ \text{o. m. m.} \\ A\mathbf{x} &= \mathbf{b} + \Delta\mathbf{b} \\ \mathbf{x} &\geq \mathbf{0} \end{aligned}$$

Esan dugunez, parametroetan aldaketaren bat gertatzen denean, aldaketa gertatu aurretik geneukan ereduari dagokion taula optimoa hartuko dugu sentikortasun-analisia egiten hasteko. Izan bedi B soluzio optimo horri dagokion oinarria. Aldaketa egin aurretik geneukan problemaren soluzioa eta helburu-funtzioaren balio optimoa:

$$\mathbf{x}_B = B^{-1}\mathbf{b} \geq \mathbf{0}$$

$$z = \mathbf{c}_B^T \mathbf{x}_B$$

Aldaketa gertatzean, hau da, $\mathbf{b}$ -ren ordean $\mathbf{b} + \Delta\mathbf{b}$ jartzean, soluzio eguneratua hau izango da:

$$\hat{\mathbf{x}}_B = B^{-1}(\mathbf{b} + \Delta\mathbf{b})$$

- Baldin $\hat{\mathbf{x}}_B \geq \mathbf{0}$, hau da, $B^{-1}(\mathbf{b} + \Delta\mathbf{b}) \geq \mathbf{0} \Rightarrow B$ oinarria optimoa da baita aldaketa egin ondorenko problemarako ere, eta $\hat{\mathbf{x}}_B$ soluzio optimoa da.
- Baldin $B^{-1}(\mathbf{b} + \Delta\mathbf{b}) \not\geq \mathbf{0} \Rightarrow$ bideragarritasun primala galdu da; bideragarritasuna berrezartzeko simplex dual metodoa erabili beharko da. Horri esker, aldaketa egin ondorenko problemaren soluzio optimoa lortuko dugu.

Simplex dual metodoa erabiltzen hasteko aldaketa egin aurretik geneukan taula optimoa hartuko dugu, $\mathbf{x}_B$ -ren ordean $\hat{\mathbf{x}}_B$ jarriaz.

Adibidea:

1. Demagun baliabide-bektorean aldaketa bat gertatu dela.

- Orain arteko baliabide-bektorea: $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 40 \\ 30 \end{pmatrix}$
- Aldaketa gertatu ondorenekoa: $\mathbf{b} + \Delta\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 50 \\ 20 \end{pmatrix}$

Baliabide-bektore horri dagokion eredu linealaren soluzio optimoa kalkulatu dugu.

$$\hat{\mathbf{x}}_B = B^{-1}(\mathbf{b} + \Delta\mathbf{b}) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 50 \\ 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 \\ 20 \end{pmatrix} \geq \mathbf{0}$$

Bideragarritasun primala ez da galdu; B oinarriak optimo izaten jarraitzen du. Soluzioaren osagaiak eta helburu-funtzioaren balio optimoa dira aldatu diren taulako balio bakarrak:

$$z^* = (0 \ 2) \begin{pmatrix} 30 \\ 20 \end{pmatrix} = 40$$

Taula optimoa:

	3	4	0	0	2	40
$\mathbf{a}_4$	2	-1	0	1	-1	30
$\mathbf{a}_3$	2	3	1	0	1	20

Honek zera esan nahi du: soluzio optimoa eta helburu-funtzioak lortuko duen balio optimoa aldatu badira ere (orain D gasolina 20 unitate ekoitziko dira eta irabazia 40 -koa izango da) oinarri optimoak berbera izaten jarraitzen duela (D gasolina ekoizteari ekingo diogula).

Guzti hori ondorioztatzeko ez dago zertan problema hasieratik ebatzi beharrik. Aldaketa egin aurreko taula optimoa hartu eta

egindako azterketa egitea nahikoa da baliabide-esleipen optimoa lortzeko.

2. Azter dezagun beste aldaketa hau:

$$\mathbf{b} + \Delta \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 20 \\ 60 \end{pmatrix}$$

$$\hat{\mathbf{x}}_B = B^{-1}(\mathbf{b} + \Delta \mathbf{b}) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 20 \\ 60 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -40 \\ 60 \end{pmatrix} \not\geq \mathbf{0}$$

$$z^* = (0 \ 2) \begin{pmatrix} -40 \\ 60 \end{pmatrix} = 120$$

Bideragarritasun primala galdu egin da. Simplex dual metodoa erabili beharko dugu bideragarritasuna berreskuratzeke.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5		
	3	4	0	0	2 ↓	120	-2
$\mathbf{a}_4$	2	-1	0	1	-1	-40	←
$\mathbf{a}_3$	2	3	1	0	1	60	-1
	7	2	0	2	0	40	
$\mathbf{a}_5$	-2	1	0	-1	1	40	
$\mathbf{a}_3$	4	2	1	1	0	20	

- Soluzio optimoa: $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 20$
- Irabazi handiena: 40koa.

□

6.1.2 $\mathbf{c}$ bektorean gertatutako aldaketak

Demagun hasierako problema

$$\begin{aligned} \max z &= \mathbf{c}^T \mathbf{x} \\ \text{o. m. m.} \\ A\mathbf{x} &= \mathbf{b} \\ \mathbf{x} &\geq \mathbf{0} \end{aligned}$$

dela eta dagokion soluzio optimoa ezaguna dela. Demagun $\mathbf{c}$ -ren balioa aldatu eta $\mathbf{c} + \Delta\mathbf{c}$ balioa hartzen duela, $\Delta\mathbf{c}$ bektorea n osagaikoa izanik. Ebatzi beharko den problema ondorengoa da:

$$\begin{aligned} \max z &= (\mathbf{c} + \Delta\mathbf{c})^T \mathbf{x} \\ \text{o. m. m.} \\ A\mathbf{x} &= \mathbf{b} \\ \mathbf{x} &\geq \mathbf{0} \end{aligned}$$

Abiapuntutzat hasierako problemaren soluzio optimoa hartuz gero, $\mathbf{c}$ bektorean gertatutako edozein aldaketak $z_j - c_j$ balioen gain eragina duela ikusten da. Balio horietakoren bat negatibo bihurtuko balitz, bideragarritasun duala galduko litzateke. Aldaketa gertatu ondorenerako balioak:

$$\hat{z}_j - \hat{c}_j = \hat{\mathbf{c}}_B^T B^{-1} \mathbf{a}_j - \hat{c}_j = (\mathbf{c}_B + \Delta\mathbf{c}_B)^T B^{-1} \mathbf{a}_j - (c_j + \Delta c_j)$$

- Baldin $\hat{z}_j - \hat{c}_j \geq 0 \quad \forall \mathbf{a}_j \in A \Rightarrow B$ oinarriak oinarri optimo izaten jarraitzen du, $\mathbf{x}_B$ O.S.B.O. eta $z^* = (\mathbf{c}_B + \Delta\mathbf{c}_B)^T \mathbf{x}_B$
- Baldin $\exists \hat{z}_j - \hat{c}_j < 0 \Rightarrow$ une horretako taula ez da optimoa, eta bideragarritasun duala berreskuratzeko simplex algoritmoa erabili beharko da.

Horren esanahia hobeki ulertzeko ikus dezagun gure adibidearen bitartez $\mathbf{c}$ bektorearen aldaketa hau:

Gasolina mota baten ekoizpenak sortutako irabazia aldatu dela (gutxiagotu) suposatzen ari gara. Oinarrian dagoen gasolina motaren batek sortutako irabazia oso txikia bihurtzen bada, agian gasolina hori ekoizten jarraitzeak errentagarri izateari utziko dio.

Adibidea:

Jarrai dezagun problema berberarekin. Dagokion taula optimoa ezaguna da. Azter ditzagun $\mathbf{c}$ prezio-bektorerako ondorengo aldaketak:

1. Baldin $(\mathbf{c} + \Delta\mathbf{c})^T = (1 \ 1 \ 1)$

- $\hat{z}_1 - \hat{c}_1 = (0 \ 1) \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} - 1 = 2 - 1 = 1$
- $\hat{z}_2 - \hat{c}_2 = (0 \ 1) \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} - 1 = 3 - 1 = 2$
- $\hat{z}_3 - \hat{c}_3 = \hat{z}_4 - \hat{c}_4 = 0$
- $\hat{z}_5 - \hat{c}_5 = (0 \ 1) \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} - 0 = 1$

Ez da bideragarritasun duala galdu $\hat{z}_j - \hat{c}_j$ guztiak positiboak direlako. Beraz, soluzioen bektore optimoa ez da aldatzen. D gasolina oinarrian dago, eta ekoizten jarraituko dugu berak sortutako irabazia 2-tik 1-era jeitsi bada ere. Orain arteko kopuru berbera ekoizten jarraituko dugu gainera.

$$\mathbf{x}_B = \begin{pmatrix} 10 \\ 30 \end{pmatrix}$$

Baina z balioa bai aldatzen dela, $\mathbf{c}$ -ren oinarriko osagaiak aldatu egin direlako:

$$z^* = (0 \ 1) \begin{pmatrix} 10 \\ 30 \end{pmatrix} = 30$$

D gasolinak sortutako irabazia ($\mathbf{c}_3 = 2 \rightarrow \mathbf{c}_3 + \Delta\mathbf{c}_3 = 1$) erdira jaistean, irabazia ere erdira jaitsi dela ($z^* = 60 \rightarrow \hat{z}^* = 30$) ikusten da.

2. Baldin $(\mathbf{c} + \Delta \mathbf{c})^T = (4 \ 2 \ \frac{3}{2})$

- $\hat{z}_1 - \hat{c}_1 = (0 \ \frac{3}{2}) \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} - 4 = -1$
- $\hat{z}_2 - \hat{c}_2 = (0 \ \frac{3}{2}) \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} - 2 = \frac{5}{2}$
- $\hat{z}_3 - \hat{c}_3 = \hat{z}_4 - \hat{c}_4 = 0$ oinarrikoak direlako.
- $\hat{z}_5 - \hat{c}_5 = (0 \ \frac{3}{2}) \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{3}{2}$

Bideragarritasun duala galdu dela dakusagu. Soluzio optimoa lortzeko simplex metodoa erabili beharko da.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5		
	$-1 \downarrow$	$\frac{5}{2}$	0	0	$\frac{3}{2}$	60	$-\frac{1}{2}$
$\mathbf{a}_4$	2	-1	0	1	-1	10	$\leftarrow$
$\mathbf{a}_3$	2	3	1	0	1	30	1
	0	2	0	$\frac{1}{2}$	1	50	
$\mathbf{a}_1$	1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	5	
$\mathbf{a}_3$	0	4	1	-1	2	20	

Soluzio optimoa: $x_1 = 5$, $x_3 = 20 \rightarrow 5$ unitate A gasolina eta 20 unitate D gasolina ekoiztean lortzen da irabazi handiena: $z^* = 50$.

Oraingo honetan, D gasolinaren irabaziaren jaitsierak eta A gasolinak sortutako irabaziaren igoerak A gasolina ekoiztea errentagarri izatea eragin du.

□

6.1.3 $\mathbf{a}_j$ bektorearen aldaketa j oinarrikoa ez denean

A-ko a_{ij} teknologi koefiziente bat edo gehiagoren aldaketa aztertuko dugu, baina $\mathbf{a}_j$ oinarrikoa ez denean bakarrik. Aldaketa oinarrikoa den aldagai batean gertatuz gero, problema hasieratik ebaztea gomendatzen da, B^{-1} aldatzean taula osoa aldatuko litzatekeelako.

Baldin $\mathbf{a}_j \in A$ $\mathbf{a}_j \notin B$ bektorea aldatu eta $\mathbf{a}_j + \Delta\mathbf{a}_j$ balioa hartzen badu,

$$\begin{aligned} \max z &= \mathbf{c}^T \mathbf{x} \\ \text{o. m. m.} \\ A\mathbf{x} &= \mathbf{b} \\ \mathbf{x} &\geq \mathbf{0} \end{aligned}$$

problemaren taula optimoan ondoko aldaketak gertatzen dira:

1. Oinarri optimoaren funtzioan dauden $\mathbf{a}_j$ bektorearen $\mathbf{y}_j$ -ko osagaiak aldatu eta lortzen diren balioak B optimoaren funtzioan dauden $\hat{\mathbf{a}}_j$ -ren $\hat{\mathbf{y}}_j$ -ko osagaiak izango dira.

$$\hat{\mathbf{y}}_j = B^{-1} \hat{\mathbf{a}}_j$$

2. $z_j - c_j$ balioa ere aldatzen da:

$$\hat{z}_j - c_j = \mathbf{c}_B B^{-1} \hat{\mathbf{a}}_j - c_j$$

$$\hat{z}_j - c_j = \mathbf{c}_B \hat{\mathbf{y}}_j - c_j$$

Aldaketa horiek kontutan hartuz ondokoak gerta daitezke:

- Baldin $\hat{z}_j - c_j \geq 0$ bada, orduan B oinarriak optimo izaten jarraitzen du, $\mathbf{x}_B$ O.S.B.Optimoa eta z helburu-funtzioaren balio optimoa izango direlarik.
- Baldin $\hat{z}_j - c_j < 0$ bada, orduan bideragarritasun duala galtzen da eta simplex metodoa erabili behar da berau berreskuratzeko.

Adibidea:

Har dezagun problema eta ikus dezagun bi aldagetek sortutako eragina.

1. Oinarrikoa ez den bektore bat da aldatuko duguna:

$$\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} \rightarrow \mathbf{a}_1 + \Delta\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Bideragarritasun duala galtzen ez dela egiazta daiteke.

$$\hat{\mathbf{y}}_1 = B^{-1}(\mathbf{a}_1 + \Delta\mathbf{a}_1) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\hat{z}_1 - c_1 = (0 \ 2) \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} - 1 = 6 - 1 = 5 > 0$$

Beraz, taula optimoa:

	5	4	0	0	2	60
$\mathbf{a}_4$	0	-1	0	1	-1	10
$\mathbf{a}_3$	3	3	1	0	1	30

Hau da, A gasolinaren konposaketaren aldaketa honek ez du aldageta aurretik lortutako baliabide-esleipen optimoaren gain inolako eraginik sortu.

2. Demagun beste aldaketa hau:

$$\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} \rightarrow \mathbf{a}_1 + \Delta\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0.2 \end{pmatrix}$$

Aldaketa honek $z_1 - c_1$ balioaren gain eragina dauka, $\mathbf{y}_1$ bektorea aldatu egiten delako:

$$\hat{\mathbf{y}}_1 = B^{-1}(\mathbf{a}_1 + \Delta \mathbf{a}_1) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 0.2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.8 \\ 0.2 \end{pmatrix}$$

$$\hat{z}_1 - c_1 = (0 \ 2) \begin{pmatrix} 2.8 \\ 0.2 \end{pmatrix} - 1 = 0.4 - 1 = -0.6$$

Bideragarritasun duala galdu da. Simplex metodoa erabiliz,

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5		
	$-0.6 \downarrow$	4	0	0	2	60	$-\frac{0.6}{2.8}$
$\mathbf{a}_4$	2.8	-1	0	1	-1	10	$\leftarrow$
$\mathbf{a}_3$	0.2	3	1	0	1	30	$\frac{0.2}{2.8}$
	0	3.8	0	0.2	1.8	62.143	
$\mathbf{a}_1$	1	-0.35	0	0.35	-0.35	3.57	
$\mathbf{a}_3$	0	3.07	1	-0.07	1.07	29.3	

$\mathbf{a}_1$ bektorearen koefizienteak aldatzea lehenengo gasolinaren kalitatea aldatzea da eta, soluzio optimoan ikusten denez gasolina hori ekoiztea errentagarri bihurtu zaigu.

□

6.1.4 Aldagai berriak gehitzea

x_j aldagai berriak gehitzean, $z_j - c_j$ balio berriak eta $\mathbf{y}_j$ zutabe berriak sortzen dira. Aldagai berriei dagozkien c_j prezio eta $\mathbf{a}_j$ bektoreak eza-gunak izanik, balio berriak honela kalkulatzen dira:

$$z_j - c_j = \mathbf{c}_B B^{-1} \mathbf{a}_j - c_j$$

$$\mathbf{y}_j = B^{-1} \mathbf{a}_j$$

- Baldin $z_j - c_j \geq 0$ badira $\Rightarrow x_j$ aldagai berriak ez zaizkigu oinarritatuko. Hortaz, daukagun oinarriak optimo izaten jarraitzen du.
- Baina, $\exists z_j - c_j < 0 \Rightarrow \mathbf{a}_j$ bektoreak oinarrian sartu behar du, eta simplex metodoa erabili beharko da optimaltasuna lortzen den arte.

Adibidea:

Gure probleman oinarrituz, demagun problemari aldagai berri bat eransten diogula, hau da, E gasolina mota desberdin bat ekoizten hasi nahi dugula. Bi kasu gerta daitezke.

1. Sartu berri den aldagaia soluzio optimoan oinarriko bihurtzen ez bada, ez soluzio bektorea ezta helburu-funtzioaren balioa ere ez dira aldatuko. Adibidez, x_4 aldagaia sartuko bagenu, non

$$\mathbf{a}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad c_4 = 2$$

$$\mathbf{y}_4 = B^{-1}\mathbf{a}_4 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$z_4 - c_4 = (0 \ 2) \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} - 2 = 4 - 2 = 2$$

Taula optimoa:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
	3	4	0	2	0	2	60
$\mathbf{a}_5$	2	-1	0	-1	1	-1	10
$\mathbf{a}_3$	2	3	1	2	0	1	30

Bideragarritasun duala ez da galdu eta soluzio optimoa ez da aldatu. Baliabide-esleipenak aldaketa egin aurreko berbera izaten jarraitzen du.

x_4 aldagai berria denez, nasaitze-aldagaiak x_5 eta x_6 izendatzen ditugu.

2. Sartu berri dugun aldagaia oinarriko bihurtzen bada, bere ekoizpena komenigarria (errentagarria) dela esan nahi du. Hau, bideragarritasun duala galtzean gertatzen da. Adibidez, x_4 aldagai berri hau sartuko dugu:

$$\mathbf{a}_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad c_4 = 3$$

Kalkuluak eginez:

$$\bullet \mathbf{y}_4 = B^{-1}\mathbf{a}_4 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\bullet z_4 - c_4 = (0 \quad 2) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - 3 = 2 - 3 = -1$$

Ondoko taula lortzen da:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6		
	3	4	0	$-1 \downarrow$	0	2	60	-1
$\mathbf{a}_5$	2	-1	0	1	1	-1	10	$\leftarrow$
$\mathbf{a}_3$	2	3	1	1	0	1	30	1
	5	3	0	0	1	1	70	
$\mathbf{a}_4$	2	-1	0	1	1	-1	10	
$\mathbf{a}_3$	0	4	1	0	-1	2	20	

Taula optimo honek dioenez, $x_1 = x_2 = 0$ dira, D gasolina $x_3 = 20$ unitate ekoizten da eta E gasolina berria $x_4 = 10$ unitate, irabazi handiena ($z^* = 70$) lortzeko.

□

6.1.5 Murrizketa berriak gehitzea

Behin eredu lineala ebatzi dugunean, gerta liteke eredu linealari murrizketaren bat gehitu beharra izatea. Horrelakoetan ere aldaketa egin aurretik geneukan taula optimoa erabiliko dugu murrizketa gehitu ondorenko eredu linealaren soluzio optimoa lortzeko. Demagun

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \begin{matrix} \geq \\ \leq \end{matrix} b_i \quad i = m+1 \dots m+k$$

moduko k ($k > 0$) murrizketa gehitu nahi dizkiogula hasierako problemari. Bi kasutan egon gintezke:

1. Hasierako problemari dagokion $\mathbf{x}_B$ soluzio optimoak murrizketa berriak betetzea $\Rightarrow$ $\mathbf{x}_B$ problema berriaren soluzio optimoa ere bada.
2. Baldin hasierako problemaren soluzio optimoak ($\mathbf{x}_B$) sartu berri ditugun murrizketatariko bat beteko ez balu, murrizketak taula optimoan sartu beharko genituzke. Horren ondorioz bideragarritasun primala galdu dela ikusten badugu, simplex dual metodoa erabili beharko da bideragarritasuna berreskuratzeke.

Azter ditzagun bi kasu horiek adibideen bidez.

Adibidea:

Demagun A, B eta D gasolinak ekoizteko 3. motako esentzia berria ere erabili nahi dugula. Azter ditzagun datozen bi aldaketak:

1. Demagun murrizketa hau sartu nahi dugula:

$$x_1 + x_2 + x_3 \leq 50$$

3. motako esentzia berri honen erabilgarritasuna 50-ekoa dela esaten zaigu bertan. Oraingoan, murrizketa sartu aurretik geneukan soluzio optimoak betetzen du murrizketa berri hau:

$$\mathbf{x}_B = \begin{pmatrix} x_4 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 30 \end{pmatrix}$$

$$x_1 + x_2 + x_3 \leq 50 \quad \Rightarrow \quad 0 + 0 + 30 \leq 50$$

Bideragarritasun primala ez da galdu eta soluzio optimoa berbera da:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 30 \end{pmatrix}$$

D gasolina ekoizten jarraituko dugu, orain D gasolina ekoizteko 3. esentzia ere erabiliko dugularik. Irabazi optimoa ez da aldatuko.

2. Demagun ereduari $x_1 + x_2 + x_3 \leq 20$ murrizketa gehitzen diogula. Orain arteko soluzio optimoak betetzen al du murrizketa hau?
 $x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 30$

$$0 + 0 + 30 \not\leq 20$$

Ez. Beraz, murrizketa taulari erantsi behar zaio. Nasaitze-aldagai bat behar dugu, x_6 , desberdintza berdintza bihurtzeko. Taulako 3. lerroan sartuko dugu.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
	3	4	0	0	2	0	60
a₄	2	-1	0	1	-1	0	10
a₃	2	3	1	0	1	0	30
a₆	1	1	1	0	0	1	20

Oinarrikoa den $\mathbf{a}_3$ bektorea ez dago oinarriarekiko ondo adierazia. Konpontzeko 3. lerroari 2.-a kenduko diogu. Horren ondorioz bideragarritasun primalik ez duen taula lortzen da, eta simplex dual metodoa erabiliz bideragarritasun hori berreskuratuko dugu.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6		
	3	$4 \downarrow$	0	0	2	0	60	-2
$\mathbf{a}_4$	2	-1	0	1	-1	0	10	$\frac{1}{2}$
$\mathbf{a}_3$	2	3	1	0	1	0	30	$-\frac{3}{2}$
$\mathbf{a}_6$	-1	-2	0	0	-1	1	-10	$\leftarrow$
	1	0	0	0	0	2	40	
$\mathbf{a}_4$	$\frac{5}{2}$	0	0	1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	15	
$\mathbf{a}_3$	$\frac{1}{2}$	0	1	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	15	
$\mathbf{a}_2$	$\frac{1}{2}$	1	0	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	5	

Taulan bideragarritasun primala eta duala lortu direnez optimoa da. B eta D gasolinak ekoitziz lortzen da irabazi handiena.

□

6.2 Programazio parametrikoa

Programazio parametrikokoak ereduaren parametroetan gertaturiko aldaketa jarraiak aztertzen ditu. Aldaketa jarrai horiek parametro baten funtzioan gertatzen dira. Aldaketa jarraiak ezin daitezke ez aldagai-kopuruan ez eta murrizketa-kopuruan gerta. Koefizienteen matrizean aldaketa jarraiak gertatzea posible da, baina hau ez da maiz gertatzen eta ez gara hor sartuko. Aztertuko ditugun bi aldaketa jarrai bakarrak $\mathbf{c}$ prezio-bektorean gertatutakoak eta $\mathbf{b}$ baliabide-bektorean gertatutakoak izango dira.

6.2.1 Prezio-bektorean gertatutako aldaketa jarraiak

Demagun idazkera estandarrean dagoen eredu lineala daukagula:

$$\begin{aligned} \max z &= \mathbf{c}^T \mathbf{x} \\ \text{o. m. m.} \\ A\mathbf{x} &= \mathbf{b} \\ \mathbf{x} &\geq \mathbf{0} \end{aligned}$$

Dagokion eredu parametrikoa ondokoa da:

$$\begin{aligned} \max z &= (\mathbf{c} + \theta\sigma)^T \mathbf{x} \\ \text{o. m. m.} \\ A\mathbf{x} &= \mathbf{b} \\ \mathbf{x} &\geq \mathbf{0} \end{aligned}$$

non σ osagai ezagunak dituen bektorea den eta θ parametro bat den. Problemarako lortuko ditugun soluzioak θ parametroarekiko adieraziak egongo dira. θ parametroak balio positibo eta negatiboak har ditzake. Hori dela eta, azterketa bi zatitan banatuko dugu.

θ parametroaren balio positiboetarako azterketa ($\theta \geq 0$)

Demagun $\theta = 0$ den kasurako ereduaren oinarri optimoa B_0 dela. Oinarri hori optimoa izateagatik bideragarritasun primala eta duala betetzen dituen taula bat egokitzen zaio.

$\theta > 0$ bada, prezio-bektorea aldatu egiten da, eta aldaketa diskretuetarako analisisian ikusi dugun bezala, honek bideragarritasun dualaren gain (lerro adierazlea) badu eraginik.

Aldaketaren ondoren lerro adierazleak izango duen balioa honela kalkulatzeko da:

$$\begin{aligned} \forall \mathbf{a}_j \notin B \quad \hat{z}_j - \hat{c}_j &= (\mathbf{c}_{B_0}^T + \theta\sigma_{B_0}^T)B_0^{-1}\mathbf{a}_j - (c_j + \theta\sigma_j) = \\ &= \mathbf{c}_{B_0}^T B_0^{-1}\mathbf{a}_j + \theta\sigma_{B_0}^T B_0^{-1}\mathbf{a}_j - c_j - \theta\sigma_j = \\ &= (\mathbf{c}_{B_0}^T B_0^{-1}\mathbf{a}_j - c_j) + \theta(\sigma_{B_0}^T B_0^{-1}\mathbf{a}_j - \sigma_j) = \end{aligned}$$

$$= z_j - c_j + \theta(\sigma_{B_0}^T B_0^{-1} \mathbf{a}_j - \sigma_j)$$

$z_j - c_j \geq 0$ eta $\theta > 0$ direnez, lerro adierazleko balioak negatiboak izateko beharrezkoa izango da $\sigma_{B_0}^T B_0^{-1} \mathbf{a}_j - \sigma_j < 0$ beteko duen $\mathbf{a}_j$ bektoreren bat existitzea. Hau hala ez balitz, oinarriak optimo izaten jarraituko luke, θ parametroak edozein balio positibo hartuta ere. Beraz,

- Baldin $\sigma_{B_0}^T B_0^{-1} \mathbf{a}_j - \sigma_j \geq 0 \quad \forall \mathbf{a}_j \in A \Rightarrow B_0$ optimoa da $\forall \theta \geq 0$
- Baldin $\exists \sigma_{B_0}^T B_0^{-1} \mathbf{a}_j - \sigma_j < 0 \Rightarrow [0, \theta^*]$ tartea definituko duen θ^* balioa existitzen da. Tarte honetako θ balioetarako B_0 oinarria optimoa da.

$$\theta^* = \min_{\mathbf{a}_j \notin B} \left\{ \frac{-(z_j - c_j)}{\sigma_{B_0}^T B_0^{-1} \mathbf{a}_j - \sigma_j} / \sigma_{B_0}^T B_0^{-1} \mathbf{a}_j - \sigma_j < 0 \right\}$$

θ^* balioaren eraginez lerro adierazleko balioen bat zero bihurtuko da eta gainontzekoak positiboak mantenduko dira. θ^* baino hertsiki handiagoak diren θ parametroaren balioetarako $\mathbf{a}_j$ bektoreari dagokion $\hat{z}_j - \hat{c}_j$ balioa negatibo bihurtzen da. Bideragarritasun duala galdu egiten da eta B_0 oinarria ez da optimoa izango.

$\theta = \theta^*$ denerako prezio-bektoreari dagokion taula kalkulatzen da. Taulan bideragarritasun duala badago, baina oinarriko ez den $\mathbf{a}_j$ bektoreren bati dagokion $\hat{z}_j - \hat{c}_j$ balioa zero dela ikusiko dugu. $\mathbf{a}_j$ bektore hori oinarrira sartuko dugu. Honela, $\theta = \theta^*$ denerako B_1 beste oinarri optimo bat lortzen da.

Azterketa honekin aurrera jarraituz gero B_1 oinarria θ parametroaren zein tartetan izango den optimo jakingo dugu.

Adibidea:

Har dezagun honako problema parametrikoa:

$$\max z = (1 + 3\theta)x_1 + (2 + 3\theta)x_2 + (2 + \theta)x_3$$

ondoko murrizketen menpe

$$4x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 40$$

$$2x_1 + 3x_2 + x_3 + x_5 = 30$$

$$x_j \geq 0 \quad j = 1 \dots 5$$

$\theta = 0$ denerako taula optimoa hau dela dakigu:

	3	4	0	0	2	60
$\mathbf{a}_4$	2	-1	0	1	-1	10
$\mathbf{a}_3$	2	3	1	0	1	30

Oinarria:

$$B_0 = \{\mathbf{a}_4, \mathbf{a}_3\}$$

Baldin $\exists \sigma_{B_0}^T B_0^{-1} \mathbf{a}_j - \sigma_j < 0$ $\mathbf{a}_j \notin B_0$ bektoreren batentzat, orduan parametroaren balio positiboetarako bideragarritasun duala galdu egingo da.

Demagun oinarriko ez diren bektoreen matrizea N_0 dela. Zera daukagu:

$$\begin{aligned} \sigma_{B_0}^T B_0^{-1} N_0 - \sigma_{N_0}^T &= (0 \quad 1) \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} - (3 \quad 3 \quad 0) = \\ &= (2 \quad 3 \quad 1) - (3 \quad 3 \quad 0) = (-1 \quad 0 \quad 1) \end{aligned}$$

$\sigma_{B_0}^T B_0^{-1} \mathbf{a}_1 - \sigma_1 = -1 < 0$ betetzen da, eta ondorioz, badago θ parametroaren balioen bat balio horretatik aurrera B_0 optimo izango ez delarik. Kasu honetan:

$$\theta^* = \frac{-(z_1 - c_1)}{\sigma_{B_0}^T B_0^{-1} \mathbf{a}_1 - \sigma_1} = \frac{-3}{-1} = 3$$

$\forall \theta \in [0, 3]$ B_0 oinarri optimoa da. Soluzio optimoa:

$$\mathbf{x}_{B0} = \begin{pmatrix} 10 \\ 30 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_4 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Helburuak lortzen duen balio optimoa:

$$z(\theta) = (0 \ 2 + \theta) \begin{pmatrix} 10 \\ 30 \end{pmatrix} = 60 + 30 \theta$$

$\theta \geq 3$ -rako azterketa errepikatu egin behar da. Lehenik $\theta = 3$ -rako aukerazko oinarri optimoa kalkulatu behar da. Parametroaren balio horrentzako lerro adierazlea eta balio optimoa kalkulatzuz taula eguneratuko dugu:

- $\hat{z}_1 - \hat{c}_1 = 3 + 3(-1) = 0$
- $\hat{z}_2 - \hat{c}_2 = 4 + 3(0) = 4$
- $\hat{z}_5 - \hat{c}_5 = 2 + 3(1) = 5$
- $z = 60 + 30 \cdot 3 = 150$

Taula eguneratuan, oinarriko ez den $\mathbf{a}_1$ bektoreari dagokion $\hat{z}_1 - \hat{c}_1$ balioa zero da. Bektore hori oinarritatu egiten da, B_1 beste oinarri bat lortuko dugularik.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
	0 ↓	4	0	0	5	150
$\mathbf{a}_4$	2	-1	0	1	-1	10 ←
$\mathbf{a}_3$	2	3	1	0	1	30
	0	4	0	0	5	150
$\mathbf{a}_1$	1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	5
$\mathbf{a}_3$	0	4	1	-1	2	20

$\theta = 3$ -n 2 oinarri optimo daude: $B_0 = \{\mathbf{a}_4, \mathbf{a}_3\}$ eta $B_1 = \{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_3\}$, aukerazko soluzioak daudelarik. Azter dezagun B_1 oinarria θ -ren zein balio tarterako den optimo.

$$\sigma_{B_1}^T B_1^{-1} N_1 - \sigma_{N_1}^T = (3 \ 1) \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 4 & -1 & 2 \end{pmatrix} - (3 \ 0 \ 0) = \left(-\frac{1}{2} \ \frac{1}{2} \ \frac{1}{2}\right)$$

$$\sigma_{B_1} B_1^{-1} \mathbf{a}_2 - \sigma_2 = -\frac{1}{2} < 0 \quad , \quad \exists \theta^{**} = \frac{-4}{-\frac{1}{2}} = 8$$

Honek B_1 oinarria zein tartetan den optimo zehazten digu. Beraz, B_1 oinarria optimoa da $\forall \theta \in [3, 3 + 8]$ -rako.

$$\mathbf{x}_{B_1} = \begin{pmatrix} 5 \\ 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$z(\theta) = (1 + 3\theta, 2 + \theta) \begin{pmatrix} 5 \\ 20 \end{pmatrix} = 45 + 35\theta$$

$\theta \geq 11$ balioetarako soluzio optimoa finkatu nahi izanez gero analisisia errepikatu beharko dugu. Hala ere, normalean aldaketak zenbait tartetan bakarrik aztertzen dira.

□

θ parametroaren balio negatiboetarako azterketa ($\theta \leq 0$)

θ parametroak 0 balioa hartzen duenean, B_0 oinarria optimoa da eta soluzio optimoa ezagutzen dugu. $\theta \leq 0$ balioetarako, lerro adierazlearen kalkulua balio positiboetarako egiten den bezala egiten da:

$$\hat{z}_j - \hat{c}_j = z_j - c_j + \theta(\sigma_{B_0} B_0^{-1} \mathbf{a}_j - \sigma_j) \quad \forall \mathbf{a}_j \notin B$$

$z_j - c_j \geq 0$ eta $\theta \leq 0$ izanik,

- Baldin $\exists \sigma_{B_0}^T B_0^{-1} \mathbf{a}_j - \sigma_j > 0$ orduan $\exists \theta$ balioren bat (behar bezain txikia, $\theta \rightarrow -\infty$) zeinarentzat bideragarritasun duala galduko den eta azterketa parametroaren balio positiboen kasurako

egin dugun bezala egin beharko da. θ^* ondoko eran kalkulatzeko da:

$$\theta^* = \max_{\mathbf{a}_j \notin B} \left\{ \frac{-(z_j - c_j)}{\sigma_{B_0}^T B_0^{-1} \mathbf{a}_j - \sigma_j} \mid \sigma_{B_0}^T B_0^{-1} \mathbf{a}_j - \sigma_j > 0 \right\}$$

- Baldin $\forall \mathbf{a}_j \notin B$, $\sigma_{B_0}^T B_0^{-1} \mathbf{a}_j - \sigma_j \leq 0$, orduan B_0 oinarri optimoa da θ -ren edozein baliotarako.

$\theta = \theta^*$ -rako beste B_1 oinarri bat kalkulatzeko da eta azterketa errepika daiteke.

Adibidea:

Jarrai dezagun aurreko adibidearekin. $\theta = 0$ den kasurako soluzioa eta taula optimoa ezagutzen ditugu. Baldin $\theta \leq 0$ bada, bideragarritasun duala gal daiteke, $\sigma_{B_0}^T B_0^{-1} N_0 - \sigma_{N_0}^T = (-1 \ 0 \ 1)$ bektoreak balio positiboak dituelako.

$\sigma_{B_0}^T B_0^{-1} \mathbf{a}_5 - \sigma_5 = 1$ da. Hori dela eta, $\theta^* < \frac{-2}{1}$ balioetarako $\hat{z}_5 - \hat{c}_5$ balioa negatiboa izango da, B_0 optimo izango ez delarik.

$\forall \theta \in [-2, 0]$ baliorako, B_0 optimoa da. Soluzio optimoa:

$$\mathbf{x}_{B_0} = \begin{pmatrix} 10 \\ 30 \end{pmatrix}$$

$$z(\theta) = 60 + 30 \theta$$

Baldin $\theta = -2$

- $\hat{z}_1 - \hat{c}_1 = 3 - 2(-1) = 5$
- $\hat{z}_2 - \hat{c}_2 = 4 - 2(0) = 4$
- $\hat{z}_5 - \hat{c}_5 = 2 - 2(1) = 0$
- $z^* = 60 + 30 \cdot (-2) = 0$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
	5	4	0	0	0 ↓	0
$\mathbf{a}_4$	2	-1	0	1	-1	10
$\mathbf{a}_3$	2	3	1	0	1	30 ←
	5	4	0	0	0	
$\mathbf{a}_4$	4	2	1	1	0	40
$\mathbf{a}_5$	2	3	1	0	1	30

$\theta = -2$ den kasurako, B_0 eta $B_1 = \{\mathbf{a}_4, \mathbf{a}_5\}$ oinarriak optimo dira. Azter dezagun ea zein $\theta < -2$ baliotarako den B_1 optimo.

$$\sigma_{B_1}^T B_1^{-1} N_1 - \sigma_{N_1}^T = (0 \ 0) \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} - (3 \ 3 \ 1) = (-3 \ -3 \ -1) \not\geq \mathbf{0}$$

Beraz, B_1 optimo da $\forall \theta \in (-\infty, -2]$. Tarte horretan soluzio optimoa

$$\mathbf{x}_{B_1} = \begin{pmatrix} 40 \\ 30 \end{pmatrix}$$

da, eta helburu-funtzioak hartuko duen balio optimoa

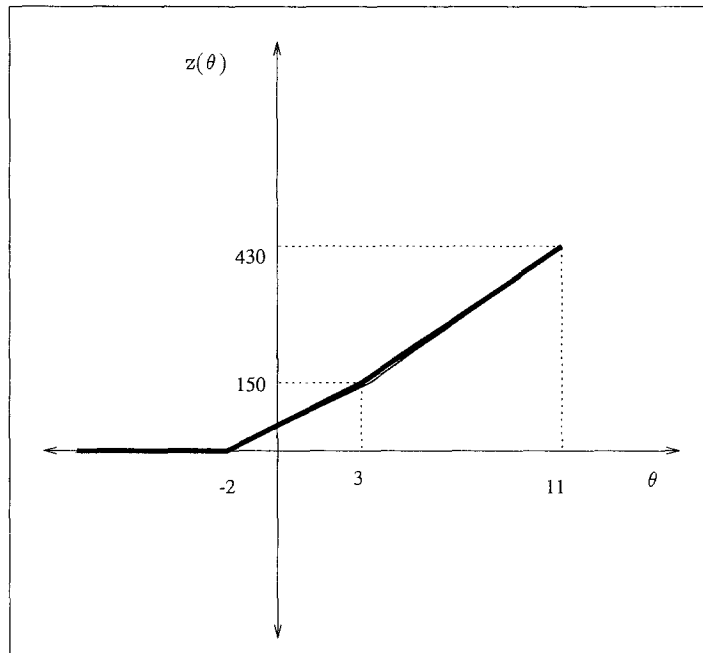
$$z(\theta) = (0 \ 0) \begin{pmatrix} 40 \\ 30 \end{pmatrix} = 0$$

da.

Problemarako soluzioak ondoko taulan bilduko ditugu:

θ parametroaren tarte	Soluzio optimoa(x_B)	Balio optimoa($z(\theta)$)
$-\infty < \theta \leq -2$	(0, 0, 0, 40, 30)	0
$-2 \leq \theta \leq 3$	(0, 0, 30, 10, 0)	$60 + 30\theta$
$3 \leq \theta \leq 11$	(5, 0, 20, 0, 0)	$35\theta + 45$

$\theta > 11$ balioetarako soluzioak era berean kalkulatzeko dira. Helburu-funtzioaren balioa θ parametroaren funtzioan grafikoki marraz daiteke. Aztertu ditugun tarteak marraztuko ditugu, $(-\infty, 11]$ tarteak alegia.



□

Adierazpen grafikoak θ parametroaren balio hoberena ematen digu. Kasu honetan $\theta = 11$ denean helburu-funtzioaren balioa optimoa da.

6.2.2 Baliabide-bektorean gertatutako aldaketa jarraiak

Demagun idazkera estandarrean dagoen eredu lineala:

$$\max z = \mathbf{c}^T \mathbf{x}$$

o. m. m.

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

$$\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$$

Dagokion eredu parametrikoa hau da:

$$\begin{aligned} \max z &= \mathbf{c}^T \mathbf{x} \\ \text{o. m. m.} \\ A\mathbf{x} &= \mathbf{b} + \theta\sigma \\ \mathbf{x} &\geq \mathbf{0} \end{aligned}$$

non σ bektorearen osagaiak ezagunak diren eta θ balio positiboak eta negatiboak har ditzakeen parametroa den. $\mathbf{c}$ bektorearen aldaketa jarraiak aztertzerakoan egin bezala, azterketa bi zatitan egingo dugu.

θ parametroaren balio positiboetarako azterketa ($\theta \geq 0$)

Jo dezagun $\theta = 0$ baliorako problemaren soluzioa badaukagula, B_0 oinarri optimoa dela, $\mathbf{x}_{B_0} = B_0^{-1}\mathbf{b}$ soluzio optimoa dela, eta helburufuntzioaren balio optimoa $z = \mathbf{c}_{B_0}^T \mathbf{x}_{B_0}$ dela.

Baldin $\theta > 0$ bada, hau da, baliabide-bektorea $\mathbf{b} + \theta\sigma$ bada, B_0 oinarriarekiko soluzioa aldatu egiten da.

$$\mathbf{x}_{B_0}(\theta) = B_0^{-1}(\mathbf{b} + \theta\sigma) = B_0^{-1}\mathbf{b} + \theta B_0^{-1}\sigma = \mathbf{x}_{B_0} + \theta B_0^{-1}\sigma$$

$\mathbf{x}_{B_0} \geq \mathbf{0}$ dela badakigu, $\mathbf{x}_{B_0}$ oinarriko soluzio bideragarria delako. $B_0^{-1}\sigma$ bektorea m osagaitako bektorea da. Bi kasu gerta daitezke.

- Baldin $B_0^{-1}\sigma \geq \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{x}_{B_0}(\theta) \geq \mathbf{0}$ eta B_0 optimoa izango da $\forall \theta \geq 0$ -rako. Soluzio optimoa $\mathbf{x}_{B_0}(\theta)$ izango da eta helburuaren balio optimoa $z(\theta) = \mathbf{c}_{B_0}^T \mathbf{x}_{B_0}(\theta)$.
- Baldin $B_0^{-1}\sigma \not\geq \mathbf{0}$ hau da, baldin $\exists (B_0^{-1}\sigma)_i < 0 \Rightarrow \theta > 0$ balioen batetarako $\mathbf{x}_{B_0}(\theta)$ soluzioaren i . osagaia negatibo bihurtzen da, eta ondorioz, B_0 ez da optimo izango. i . osagaia 0 bihurtzen duen parametroaren balioa hau da:

$$\theta^* = -\frac{(\mathbf{x}_{B_0})_i}{(B_0^{-1}\sigma)_i}$$

θ^* baino hertsiki handiagoak diren balioek i osagaia negatibo bihurtzen dute; balio horietarako bideragarritasun primala galdu egiten da eta soluzioa kalkulatzeko beharrezko gertatuko zaigu.

Baldin $\mathbf{B}_0^{-1}\sigma$ -ren osagai negatiboa bakarra ez bada,

$$\theta^* = \min \left\{ -\frac{(\mathbf{x}_{B0})_i}{(B_0^{-1}\sigma)_i} / (B_0^{-1}\sigma)_i < 0 \right\}$$

Beraz, $\forall \theta \in [0, \theta^*]$ baliorako soluzio optimoa $\mathbf{x}_{B0}(\theta)$ da eta helburu-funtzioaren balio optimoa $z(\theta) = \mathbf{c}_{B0}^T \mathbf{x}_{B0}(\theta)$.

$[\theta^*, \infty)$ tarterako soluzioak kalkulatzeko aurreko azterketa errepikatuko dugu. Horretarako, θ^* baliorako taula eguneratu beharko da eta parametroaren balio horretarako aukerazko soluzio optimoren bat kalkulatu beharko da lehenik. Oraingo honetan, soluzio optimoa kalkulatzeko simplex dual metodoa erabili behar da.

Adibidea:

Ondorengo problema parametrikokoaren soluzioak kalkulatu ditugu:

$$\max z = x_1 + 2x_2 + 2x_3$$

ondoko murrizketen menpe

$$4x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 40 + 2\theta$$

$$2x_1 + 3x_2 + x_3 + x_5 = 30 + 3\theta$$

$$x_j \geq 0 \quad j = 1 \dots 5$$

$\theta = 0$ denerako taula optimoa ezaguna zaigu:

	3	4	0	0	2	60
$\mathbf{a}_4$	2	-1	0	1	-1	10
$\mathbf{a}_3$	2	3	1	0	1	30

Oinarri optimoa $B_0 = \{\mathbf{a}_4, \mathbf{a}_3\}$ da eta:

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 40 \\ 30 \end{pmatrix}, \quad \sigma = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$B_0^{-1}\sigma = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Kasu honetan $B_0^{-1}\sigma$ bektorearen lehen osagaia negatiboa da. Hori dela eta, B_0 oinarria optimo izango da θ^* parametroak balio hau hartzen duen punturaino bakarrik:

$$\theta^* = -\frac{(\mathbf{x}_{B_0})_1}{(B_0^{-1}\sigma)_1} = \frac{-10}{-1} = 10$$

$[0, 10]$ tartean B_0 oinarria optimoa da. Tarte horretarako soluzio optimoa eta helburu-funtzioaren balio optimoa

$$\mathbf{x}_{B_0}(\theta) = \begin{pmatrix} 10 \\ 30 \end{pmatrix} + \theta \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 - \theta \\ 30 + 3\theta \end{pmatrix}$$

$$z(\theta) = (0 \quad 2) \begin{pmatrix} 10 - \theta \\ 30 + 3\theta \end{pmatrix} = 60 + 6\theta$$

$$\theta = 10 \text{ baliorako } \mathbf{x}_{B_0}(\theta) = \begin{pmatrix} 0 \\ 60 \end{pmatrix}$$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5		
	3	4	0	0	$2 \downarrow$	120	-2
$\mathbf{a}_4$	2	-1	0	1	$\boxed{-1}$	0	$\leftarrow$
$\mathbf{a}_3$	2	3	1	0	1	60	-1
	7	2	0	2	0	120	
$\mathbf{a}_5$	-2	1	0	-1	1	0	
$\mathbf{a}_3$	4	2	1	1	0	60	

$\theta = 10$ baliorako $B_0 = \{\mathbf{a}_4, \mathbf{a}_3\}$ eta $B_1 = \{\mathbf{a}_5, \mathbf{a}_3\}$ dira oinarri optimoak. Azter dezagun ea θ -ren zein baliotarako den B_1 oinarria optimo.

$$B_1^{-1}\sigma = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \geq \mathbf{0}$$

$\mathbf{x}_{B_1}(\theta) \geq \mathbf{0} \quad \forall \theta \geq 10$ eta ondorioz B_1 optimoa da $\forall \theta \in [10, \infty)$.
Soluzioa:

$$\mathbf{x}_{B_1}(\theta) = \begin{pmatrix} 0 \\ 60 \end{pmatrix} + (\theta - 10) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \theta - 10 \\ 40 + 2\theta \end{pmatrix}$$

$$z(\theta) = (0 \quad 2) \begin{pmatrix} \theta - 10 \\ 40 + 2\theta \end{pmatrix} = 80 + 4\theta$$

□

θ parametroaren balio negatiboetarako azterketa ($\theta < 0$)

$\theta = 0$ balioari dagokion soluzio optimotik abiatuz eta parametroa aldatzean B_0 oinarriaren funtzioan lortzen den soluzioa:

$$\mathbf{x}_{B_0}(\theta) = B_0^{-1}\mathbf{b} + \theta B_0^{-1}\sigma = \mathbf{x}_{B_0} + \theta B_0^{-1}\sigma$$

$\mathbf{x}_{B_0} \geq \mathbf{0}$ eta $\theta < 0$ betetzen dela dakigu. Bi kasu posible dago:

- Baldin $B_0^{-1}\sigma \leq \mathbf{0} \Rightarrow B_0$ optimoa da $\forall \theta \in (-\infty, 0]$ -rako.
- Baldin $B_0^{-1}\sigma \not\leq \mathbf{0}$, hau da, $\exists (B_0^{-1}\sigma)_i > 0$ orduan

$$\theta^* = -\frac{(\mathbf{x}_{B0})_i}{(B_0^{-1}\sigma)_i}$$

balioak soluzioko i osagaia zero egiten du eta θ^* -ren balioa baino hertsiki txikiagoak diren balioetarako i osagai hau negatiboa izango da.

Baldin $B_0^{-1}\sigma$ bektoreak osagai negatibo bat baino gehiago baldin badu:

$$\theta^* = \max \left\{ -\frac{(x_{B0})_i}{(B_0^{-1}\sigma)_i} / (B_0^{-1}\sigma)_i > 0 \right\}$$

$\theta = \theta^*$ balioan aukerazko optimoak existitzen dira. Beste soluzio optimo hori kalkula daiteke parametroaren θ^* baliorako; azterketa errepikatuko da hurrengo tarteak finkatzeko.

Adibidea:

Aurreko adibidearekin jarrai dezagun. Ikus dezagun $\theta \leq 0$ balioetarako soluzioak zein diren.

Lehen oinarri optimoa, B_0 , $\theta = 0$ baliorako lortzen da.

$$B_0^{-1}\sigma = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$(B_0^{-1}\sigma)_2 = 3$ da, positiboa $\Rightarrow \exists \theta^* = \frac{-30}{3} = -10$ non $\forall \theta \in [-10, 0]$ baliotarako B_0 optimoa den eta -10 balioa baino txikiagoentzako bidegarri izateari uzten dion. Soluzioa:

$$\mathbf{x}_{B0}(\theta) = \begin{pmatrix} 10 \\ 30 \end{pmatrix} + \theta \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 - \theta \\ 30 + 3\theta \end{pmatrix}$$

Helbururako balio optimoa:

$$z(\theta) = (0 \quad 2) \begin{pmatrix} 10 - \theta \\ 30 + 3\theta \end{pmatrix} = 60 + 6\theta$$

Baldin $\theta = -10$ bada,

$$\mathbf{x}_{B0}(-1) = \begin{pmatrix} 20 \\ 0 \end{pmatrix}$$

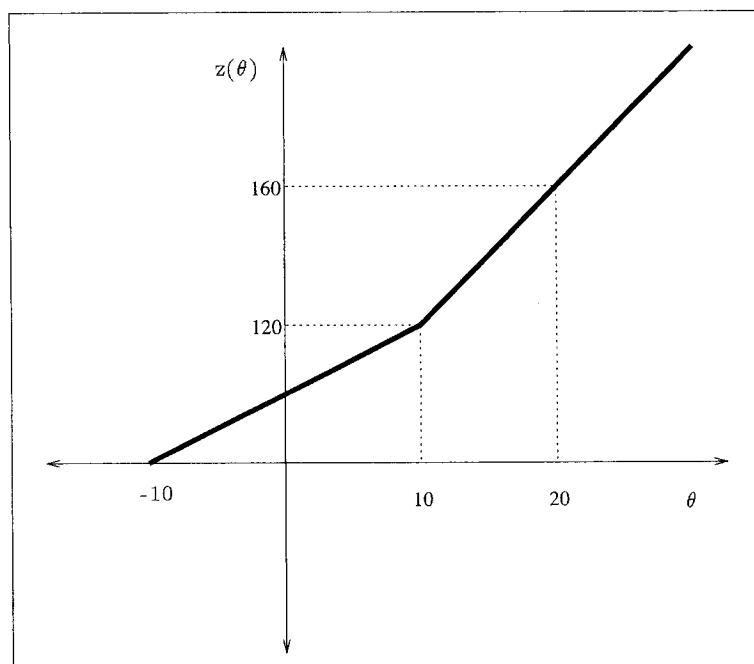
$\theta < -10$ balioetarako bigarren osagaia negatiboa izango litzateke. Beraz, osagai horretan bideragarritasun primala galduko litzateke. Hona-koa da $\theta = -10$ baliorako taula

	3	4	0	0	2	0
$\mathbf{a}_4$	2	-1	0	1	-1	20
$\mathbf{a}_3$	2	3	1	0	1	0

$\mathbf{a}_3$ -k oinarritik irten beharko du, baina ez da piboterik existitzen eta $\forall \theta \in (-\infty, -10]$ -rentzat ez dago soluziorik. Lortutako soluzioak taulan bilduz,

θ - ren tartea	Soluzio optimoa($x_B(\theta)$)	Balio optimoa($z(\theta)$)
$-\infty < \theta \leq -10$	ez dago soluziorik	— — — — —
$-10 \leq \theta \leq 10$	$(0, 0, 30 + 3\theta, 10 - \theta, 0)$	$60 + 6\theta$
$10 \leq \theta < \infty$	$(0, 0, 40 + 2\theta, 0, \theta - 10)$	$80 + 4\theta$

Helburu-funtzioaren balio optimoa θ parametroaren funtzioan grafikoki marraz daiteke:



Grafikan ikusten denez, θ hazi ahala helburuaren balioa hazi egiten da.

□

6.3 Ariketak

1. Demagun ondoko eredu lineala:

$$\max z = x_1 + 2x_2 - x_3$$

ondoko murrizketen menpe

$$2x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 6$$

$$x_1 - 2x_2 + x_3 \leq 5$$

$$x_1 + x_2 + x_3 \leq 9$$

$$x_j \geq 0 \quad j = 1 \dots 3$$

- (a) Eredua ebatz ezazu.
- (b) Baldin $\mathbf{c}^T + \Delta \mathbf{c}^T$ bektorea $(2 \ 1 \ -1)$ bada soluzio optimoa kalkula ezazu.

(c) Baldin $\mathbf{b} + \Delta \mathbf{b}$ bektorea $\begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ bada soluzio optimoa kalkula ezazu.

(d) Ondorengo aldaketak eginez gero soluzio optimoa kalkula ezazu:

$$\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \hat{\mathbf{a}}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \hat{c}_1 = 3$$

(e) Kalkula ezazu problemaren soluzio optimoa ereduari honako aldagaia gehitzen zaion kasurako:

$$\mathbf{a}_4 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \quad c_4 = 2$$

(f) Zein izango litzateke soluzio optimoa ereduari murrizketa hau gehituko bagenio?

$$-x_1 + x_2 - x_3 \leq 3$$

(g) Eta beste hau gehituko bagenio?

$$x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 4$$

2. Demagun honako eredu lineala:

$$\max z = 2x_1 + 3x_2 + x_3$$

ondoko murrizketen menpe

$$x_1 + 3x_2 + 2x_3 \leq 30$$

$$2x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 30$$

$$x_j \geq 0 \quad j = 1 \dots 3$$

- (a) Zein da soluzio optimoa?
 (b) Azter ezazu ondoko aldaketa parametrikoa:

$$\mathbf{b} + \theta\sigma = \begin{pmatrix} 30 \\ 30 \end{pmatrix} + \theta \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

3. Demagun ondoko eredu lineala:

$$\max z = 2x_1 - x_2 + x_3$$

ondoko murrizketen menpe

$$x_1 + x_2 + x_3 \leq 6$$

$$-x_1 + 2x_2 \leq 4$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

Dagokion taula optimoa honakoa da:

	0	3	1	2	0	12
$\mathbf{a}_1$	1	1	1	1	0	6
$\mathbf{a}_5$	0	3	1	1	1	10

- (a) Azter itzazu honako aldaketa diskretuak eta eman ezazu soluzio optimoa kasu bakoitzean.

i. Baliabide-bektorea: $\mathbf{b} + \Delta\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$

ii. Prezio-bektorea: $\mathbf{c}^T + \Delta\mathbf{c}^T = (1 \ 1 \ 2)$

iii. Ereduari murrizketa hau gehitzen zaio:

$$-x_1 + 3x_2 - x_3 \geq 2$$

- (b) Baliabide-bektorea ondorengoa den kasurako analisi parametrikoa egin ezazu:

$$\mathbf{b} + \theta\sigma = \begin{pmatrix} 6 + \theta \\ 4 - 2\theta \end{pmatrix}$$

Azter itzazu 0 inguruko θ -ren balioak eta balio positiboak. Kalkulatutako tarteetan helburu-funtzioari balio optimoa emango dion θ -ren balioa eta θ balio horretarako helburu-funtzioak hartutako balioa kalkula itzazu.

4. Demagun ondoko eredu lineala:

$$\max z = x_1 - x_2 + 2x_3$$

ondoko murrizketen menpe

$$x_1 + x_2 + x_3 \leq 6$$

$$-x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 9$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

Dagokion taula optimoa honakoa da:

	0	$\frac{11}{4}$	0	$\frac{5}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{39}{4}$
$\mathbf{a}_1$	1	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{3}{4}$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{9}{4}$
$\mathbf{a}_3$	0	$\frac{3}{4}$	1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{15}{4}$

(a) $\mathbf{c}^T$ bektorearen ordezt

$$\mathbf{c}^T + \theta \sigma^T = (1 \ -1 \ 2) + \theta(-2 \ 1 \ -1)$$

bektorea baldin badaukagu, θ -ren balio positiboetarako lehen bi tarteetarako soluzio optimoak kalkula itzazu.

(b) Aurreko puntuko bektore parametrikiko berberarekin jarraituz, θ -ren balio negatiboetarako lehen bi tarteetarako soluzio optimoak aurki itzazu.

(c) Aurreko bi puntuetan kalkulatutako θ -ren balioak izanik, helburu-funtzioak θ -ren zein baliotarako lortuko duen balio optimoa zehazta ezazu.

5. Demagun honako eredu lineala:

$$\max z = 3x_1 + 2x_2 + x_3$$

ondoko murrizketen menpe

$$2x_1 + x_2 + x_3 \leq 6$$

$$x_1 + x_2 + x_3 \leq 4$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

Dagokion taula optimoa hau da:

	0	0	1	1	1	10
a₁	1	0	0	1	-1	2
a₂	0	1	1	-1	2	2

- (a) Azter itzazu soluzio optimoak θ -ren funtzioan ($\theta \geq 0$) prezio-bektorea eta baliabide-bektorea honakoak izanik:

$$\mathbf{c}^T + \theta \sigma^T = (3 \ 2 \ 1) + \theta (1 \ 3 \ 1)$$

$$\mathbf{b} + \theta \sigma = \begin{pmatrix} 6 + \theta \\ 4 + 2\theta \end{pmatrix}$$

Azterketa lehen bi tarteetarako egin ezazu.

- (b) Kalkula ezazu $\theta \leq 0$ zein balio tarterako izango den aurreko taula optimo eta soluzioak eman itzazu.

7. Gaia

GARRAIO-PROBLEMA ETA ESLEIPEN-PROBLEMA

Garraio-problema eta esleipen-problema egitura bereziko eredu linealak besterik ez dira, eta ebazteko orain arte ikusitako programazio linealaren metodoak erabiltzea posible da. Hala ere, beren egitura bereziari probetxurik handiena atera asmoz beste metodo eraginkorragoak eraiki dira.

7.1 Garraio-problema

Programazio linealaren erabilpen praktiko garrantzitsua da garraio-problema. Zertan datza? Produktu-unitateak m jatorri-puntutatik n helburu-puntutara garraiatzean datza, ondorengo baldintzapean:

- i jatorri-puntu bakoitzean a_i ($i = 1 \dots m$) produktu-unitate dago garraiatua izateko prest.
- j helburu-puntu bakoitzak b_j ($j = 1 \dots n$) produktu-unitate eskatzen du.
- Produktu-unitate bat i jatorri-puntutik j helburu-puntura garraiatzeak c_{ij} kostua sortzen du.

i jatorri-puntuaren prest dagoen unitate-kopurua baino gehiago ez da garraiatuko, eta j helburu-puntura eskatutako unitate-kopurua iritsiko dela ziurtatu behar da. Baldintza horiek kontutan izanik, eta produktuen garraioa ahalik eta kosturik txikienean egiteko i jatorri-puntutik j helburu-puntura zein x_{ij} unitate-kopuru bidali beharko den erabaki behar da.

Garraio-problema programazio linealeko eredu baten bidez honela adierazten da:

$$\min z = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij}$$

ondoko murrizketen menpe

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} \leq a_i \quad i = 1 \dots m$$

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} \geq b_j \quad j = 1 \dots n$$

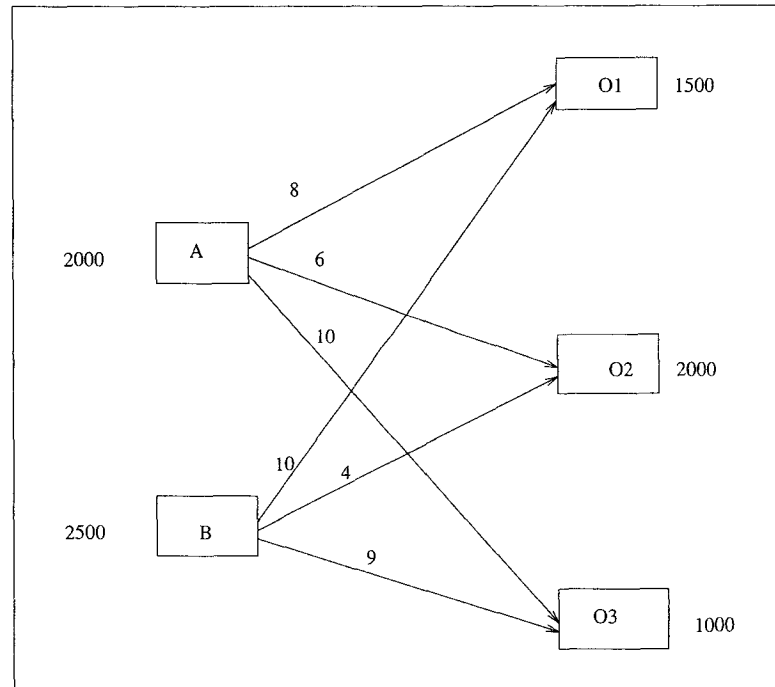
$$x_{ij} \geq 0 \quad \forall i, j$$

Lehen m murrizketak jatorri-puntuen eskaintzari buruzkoak dira; eskaintza hauek ez dira inoiz gaindituak izango. Hurrengo n murrizketak, era berean, helburu-puntuen eskariei dagozkie, zerbitzatu egin beharko direlarik. Aldagai guztiek positibo izan behar dute.

Adibidea:

Demagun herrialde batean badirela ogia ekoizten duten 2 lantegi: A eta B. Lantegi horietan ekoiztutako ogia 3 okindegitara bidaltzen da, bertan sal dezaten: O_1, O_2, O_3 .

Jatorri-puntuen (lantegien) eskaintzak, helburu-puntuen (okindegi-en) eskariak eta garraio-kostuak grafokoak dira:



Garraio-problema horri dagokion eredu lineala honakoa da:

- Erabaki-aldagaiak: x_{ij} : i ($i = A, B$) lantegitik O_j ($j = 1, 2, 3$) okindegira garraiatzen den ogiaren unitate-kopurua.

$$\min z = 8x_{A1} + 6x_{A2} + 10x_{A3} + 10x_{B1} + 4x_{B2} + 9x_{B3}$$

ondoko murrizketen menpe

$$x_{A1} + x_{A2} + x_{A3} \leq 2000$$

$$x_{B1} + x_{B2} + x_{B3} \leq 2500$$

$$x_{A1} + x_{B1} \geq 1500$$

$$x_{A2} + x_{B2} \geq 2000$$

$$x_{A3} + x_{B3} \geq 1000$$

$$x_{ij} \geq 0 \quad i = A, B \quad j = 1, 2, 3$$

□

Garraio-problemaren hasierako formulazioari nasaitze-aldagaiak sartzen badizkiogu, garraio-problemaren idazkera estandarra lortuko dugu:

$$\min z = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij}$$

ondoko murrizketen menpe

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n x_{ij} &= a_i \quad i = 1 \dots m \\ \sum_{i=1}^m x_{ij} &= b_j \quad j = 1 \dots n \\ x_{ij} &\geq 0 \end{aligned}$$

- Eskaintza totala: $\sum_{i=1}^m a_i$
- Eskari totala: $\sum_{j=1}^n b_j$

Eskari guztiak beteak izan daitezen nahi badugu, zera bete beharko da:

$$\sum_{i=1}^m a_i \geq \sum_{j=1}^n b_j$$

- Baldin $\sum_{i=1}^m a_i < \sum_{j=1}^n b_j$ orduan ezin ditugu eskariak zerbitzatu.
- Baldin $\sum_{i=1}^m a_i > \sum_{j=1}^n b_j$ orduan eskaintza handiegia da.
- Baldin $\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j$ orduan problema *orekatua* dela esaten da.

Lehen esan bezala, garraio-problema simplex metodoa erabiliz ebatz daiteke, idazkera estandarraren bidez adierazia izan baitaiteke. Hala ere, ez da hori gehien komeni zaigun bidea, metodo probetxugarriagoak badirelako. Metodo probetxugarriago hauek garraio-problema duen

egitura bereziari etekin ateratzen diote. Egitura berezi hori (A matrizearena, hain zuzen ere) ikusteko ondoko adibidea aztertuko dugu.

Adibidea:

Aurreko adibideko eredua matrize-eran idatziko dugu:

$$\min z = (8 \ 6 \ 10 \ 10 \ 4 \ 9) \begin{pmatrix} x_{A1} \\ x_{A2} \\ x_{A3} \\ x_{B1} \\ x_{B2} \\ x_{B3} \end{pmatrix}$$

ondoko murrizketen menpe

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{A1} \\ x_{A2} \\ x_{A3} \\ x_{B1} \\ x_{B2} \\ x_{B3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2000 \\ 2500 \\ 1500 \\ 2000 \\ 1000 \end{pmatrix}$$

$$x_{ij} \geq 0$$

Kasu honetan murrizketak berdintasunez idatz daitezke, eskaintza totala eta eskari totala berdinak direlako. Nasaitze-aldagaiak ez dira beharrezkoak.

Adibide honetan bi jatorri-puntu eta hiru helburu-puntu daude. Matrizeak 2+3 lerro eta 2·3 zutabe du. Matrize honen heina, froga daiteke nahi izanez gero, 4 da. Bestalde, ikus daiteke zutabe-bektore guztiek 0-ren desberdinak diren bi osagai besterik ez dutela.

□

Oro har, m jatorri-puntuz eta n helburu-puntuz osaturiko garraio-problema guztien A matrizea berbera da. $m + n$ lerro eta $m \cdot n$ zutabez osaturik dago. A matrizearen heina $m + n - 1$ da; beste era batera esateko, oinarriek $m + n - 1$ bektore dituzte.

A matrizearen egitura sinple hau dela eta, informazio garrantzitsua c bektorean eta eskari eta eskaintzetan datorrela ikusten da.

7.1.1 Garraio-problemarako matrize-idazkera

Aurreko adibidean ikusi dugu garraio-problemako A matrizeek zer nolako egitura duten. m jatorri eta n helburu dituzten garraio-problema guztiek A matrize berbera dute. Hori dela eta, problema ebazteko datu esanguratsuak A matrizean ez datoz, c bektorean eta eskarien eta eskaintzen bektoreetan baizik. Erabiltzen den informazioa garbiago izateko datu erabilgarriak taula moduan jasotzen dira. Taula honi *garraio-problemarako matrize-idazkera* esaten zaio.

Adibidea:

Aurreko adibideko problema honela idatziko genuke matrize eran:

	O_1	O_2	O_3	ESK AINTZA
A	8	6	10	2000
B	10	4	9	2500
ESKARIA	1500	2000	1000	

non O_1, O_2, O_3 helburu-puntuak, okindegiak, diren eta A, B jatorri-puntuak.

□

Posizio bakoitzean zera adierazten da: produktu-unitate bat i jatorri-puntutik j helburu-puntura garraiatzeak eragindako c_{ij} kostua. Azken zutabekoak jatorri-puntu bakoitzaren eskaintzak dira eta azken lerrokoak helburu-puntu bakoitzaren eskariak.

7.1.2 Garraio-ereduaren ebazpidea

Ikusiko dugunez, garraio-problemen soluzioa osoa da. Hala ere, berau ebazteko ez dugu programazio osoa erabiliko, problemak duen egitura berezia dela eta garraio-algoritmoa erabiliz lortuko dugun soluzioa osoa izango baita. Algoritmo hau simplex algoritmoa garraio-problemarako egokituz lortzen da.

Garraio-problema betetzen dituen zenbait propietate aztertuko ditugu orain datozen teorema eta definizioen bidez. Garraioaren eredua-
ren ebazpidea propietate horietan oinarritzen da.

Teorema 7.1.1 *Garraio-problema soluziorik izan dezan baldintza beharrezkoa eta nahikoa da eskaintza totala eta eskari totala kopuru berbera izatea.*

Frogapena:

Problemaren formulazioan zera daukagu: i jatorri-puntuak a_i eskaintzarekin j helburu-puntuak ($j = 1 \dots n$) zerbitzatuko ditu.

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i \quad i = 1 \dots m$$

Jatorri guztien eskaintzak gehituz gero, eskaintza totala:

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n x_{ij} = \sum_{i=1}^m a_i \quad (7.1)$$

Bestalde, helburu-puntuei lotutako murrizketek zera diote: j helburu-puntura i jatorri-puntuetatik ($i = 1 \dots m$) heltzen da eskatutako b_j kopurua.

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j \quad j = 1 \dots n$$

Helburu-puntu guztien eskariak gehituz gero, eskari totala:

$$\sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m x_{ij} = \sum_{j=1}^n b_j \quad (7.2)$$

(7.1) eta (7.2) formuletan berdintzaren ezker aldeak, garraiatzen diren produktu-unitate totalak, berdinak dira. (7.1) eta (7.2) berdintzak

beteko dira baldin eta soilik baldin

$$\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j$$

Beraz, eskari totalak eta eskaintza totalak berbera izan beharko du garraio-problemak soluziorik izan dezan.

□

Problema matematikoki ebatzi ahal izateko beharrezkoa gertatuko zaigu eskaintza totala eta eskari totala kopuru berbera izatea, baina horrek ez du esan nahi problema errealean eskaintza eta eskaria kopuru berbera izango direnik beti. Horrelakoetan problema orekatu eta gero lortutako soluzioa interpretatu egin behar da.

Definizioa 7.1.1 (problema orekatua) *Baldin*

$$\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j$$

orduan problema orekatua dela esaten da.

Garraio-problema baten soluzioa lortzeko egin behar den lehen gauza problema orekatzea da. Bi kasutan egon gintezke:

1. **Eskaintza eskaria baino txikiagoa den kasua:** $\sum_{i=1}^m a_i < \sum_{j=1}^n b_j$

Eskaintza totalak ezin diezaioke eskari totalari aurre egin. Hau matematikoki konpontzeko, gezurrezko jatorri-puntu bat sortzen da. Bere eskaintza eta garraio-kostuak:

$$a_{m+1} = \sum_{j=1}^n b_j - \sum_{i=1}^m a_i$$

$$c_{m+1,j} = 0 \quad \forall j = 1 \dots n$$

Gezurrezko jatorri-puntu horrek, eskari totala asetu ahal izateko falta den eskaintza sortzen du, eta produktu-kopuru hori jatorri-puntu horretatik gainontzeko helburu-puntuetara garraiatzeak ez

du inolako kosturik suposatzen, jatorri-puntu hori gezurrezkoa delako. Beste era batera esateko: jatorri horrek sortutako eskaintza ez da existitzen eta lortutako soluzioan eskaintza hori jasotzen duten helburu-puntuak ez dira behar bezala zerbitzatuak izan. Horregatik da zero garraio-kostu hori.

Adibidea:

Har dezagun matrize-idazkeran dagoen garraio-problema hau:

	1	2	3	<i>ESKAINZA</i>
<i>A</i>	2	4	3	10
<i>B</i>	6	1	4	20
<i>ESKARIA</i>	20	20	20	

$$a_1 + a_2 = 10 + 20 = 30 < b_1 + b_2 + b_3 = 20 + 20 + 20 = 60$$

Eredua ez da orekatua. Gezurrezko D jatorri-puntua sortuko dugu.

- Eskaintza: $a_3 = 60 - 30 = 30$
- Kostuak: $c_{3j} = 0 \quad \forall j = 1, 2, 3$

	1	2	3	<i>ESKAINZA</i>
<i>A</i>	2	4	3	10
<i>B</i>	6	1	4	20
<i>D</i>	0	0	0	30
<i>ESKARIA</i>	20	20	20	

Eredua orekatzea lortu dugu.

□

2. Eskaria eskaintza baino txikiagoa den kasua: $\sum_{i=1}^m a_i > \sum_{j=1}^n b_j$

Gezurrezko helburu-puntu bat sortuko dugu.

- Eskaria: Gezurrezko helburu-puntu horrek jasoko ditu ekointzitateko produktu gehigarriak.

$$b_{n+1} = \sum_{i=1}^m a_i - \sum_{j=1}^n b_j$$

- Kostuak: $c_{i,n+1} = 0 \quad \forall i$, helburu-puntua gezurrezkoa delako.

Garraio-eredu orekatua izanik, ereduak soluzioa baduela ziurtatzen du ondorengo teoremak.

Teorema 7.1.2 *Garraio-problema soluzio bideragarri bat du.*

Frogapena:

Demagun idazkera estandarra daukagula, eta

$$T = \sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j$$

garraiatutako produktu-kopuru totala dela. Zera egiazta daiteke: soluzio bideragarri bat honako x_{ij} dela.

$$x_{ij} = \frac{a_i b_j}{T} \quad \forall i, j$$

x_{ij} honek problemaren murrizketak betetzen ditu, eta $x_{ij} \geq 0$ da.

□

Teorema 7.1.3 *Garraio-problema oinarriko soluziorik badu. Soluzio horiek gehienez $m + n - 1$ aldagai positibo izango dituzte.*

7.1.3 Hasierako soluzio baten kalkulua

Lehen soluzio bat lortzeko 2 metodo desberdin aztertuko ditugu. Metodo hauek problemaren matrize-idazkera erabiltzen dute. Kontutan izan behar da, metodoak erabiltzen hasi baino lehen problema orekatu egin beharko dela, dagoeneko orekatua ez bada.

Ipar-mendebaldeko ertzaren metodoa.

Ondorengo urratsak burutuz gero garraio-problemarako oinarriko soluzio bideragarri bat lortuko dugu.

1. Garraio-problemaaren matrizean ipar-mendebaldeko (i, j) posizioa aukeratu. Lehen pausoa $i = 1$ eta $j = 1$ izango dira.
2. (i, j) posizio horri a_i eskaintza eta b_j eskaria dagozkio. Horien artetik txikiena hartu.

$$x_{ij} = \min \{a_i, b_j\}$$

eta a_i eta b_j balioei x_{ij} kopurua kenduz, eskaintza eta eskaria eguneratuak geldituko dira.

- Txikiena a_i eskaintza denean, eskaintza zero bihurtuko zaigu, hots, i jatorri-puntuaren eskaintza totala erabilia izan da b_j eskaria zerbitzatzeko, eta horren ondorioz, jatorri-puntua matrizetik desagertu eta b_j eskaria $b_j - x_{ij}$ bihurtuko da.
- Aldiz, txikiena b_j eskaria bada, eskaria zerbitzaturik izango da, zutabea desagertuko delarik. Hortaz, i jatorri-puntuaren eskaintza txikiagotuko da eta balio eguneratua $a_i - x_{ij}$ izango da.
- a_i eta b_j balioak berdinak izatea ere gerta liteke. Horrelakoetan bai lerroa eta bai zutabea desagertuko zaizkigu.

Ondorengo kalkuluetan, desagertutakoak ez ditugu kontutan izango.

3. Lerrorik edo zutaberik gelditzen ez bada, prozesua amaitu. Bestela, 1. pausora joan.

Adibidea:

Jarrai dezagun okindegien adibidearekin (ikus taula 226. orrian). Orekatua da berau:

$$2000 + 2500 = 1500 + 2000 + 1000$$

	O_1	O_2	O_3	ESKAINZA
A	8	6	10	2000
B	10	4	9	2500
ESKARIA	1500	2000	1000	

Ipar-mendebaldeko ertzaren metodoa erabiliz soluzio bat lortzeko tamaina bereko beste taula bat eraikiko dugu, eta bertan x_{ij} aldagaien balioak jasoko ditugu. Bi taulak bereizteko, hasierakoari *kostu-matrizea* deituko diogu eta metodoaren bidez eraikitakoari *fluxu-matrizea*.

Has gaitezen metodoarekin:

	O_1	O_2	O_3	ESKAINZA
A	x_{11}			2000
B				2500
ESKARIA	1500	2000	1000	

- $x_{11} = \min \{2000, 1500\} = 1500$
- $a_1 = 2000 - x_{11} = 500$
- $b_1 = 1500 - x_{11} = 0$

	O_2	O_3	ESKAINZA
A	x_{12}		500
B			2500
ESKARIA	2000	1000	

O_1 helburu-puntua zerbitzatua gelditu da. Lehen jatorri-puntuaren eskaintza 500-ekoa da orain, gainontzeko 1500-ak erabiliak izan direlako O_1 zerbitzatzeko. Taula eguneratuan 2 lerro eta 2 zutabe besterik ez dugu. Oraingo ipar-mendebaldeko ertza x_{12} da.

- $x_{12} = \min \{500, 2000\} = 500$
- $a_1 = 500 - x_{12} = 0$
- $b_2 = 2000 - 500 = 1500$

	O_2 O_3	<i>ESKAINITZA</i>
<i>B</i>	x_{22}	2500
<i>ESKARIA</i>	1500 1000	

A jatorri-puntuak ez du ezer gehiago eskaintzen. Desagertu egin zaigu lerro hori. 2. helburu-puntuaren eskaria 1500-ekoa da orain. Taula eguneratua lerro bakar batez eta bi zutabez osaturik dago.

- $x_{22} = \min \{2500, 1500\} = 1500$
- $a_2 = 2500 - 1500 = 1000$
- $b_2 = 1500 - 1500 = 0$

	O_3	<i>ESKAINITZA</i>
<i>B</i>	x_{23}	1000
<i>ESKARIA</i>	1000	

Eta, azkenik, B lantegiaren eskaintzak O_3 okindegiaren eskaria zerbitzatuko du:

- $x_{33} = \min \{1000, 1000\} = 1000$
- $a_2 = 1000 - 1000 = 0$
- $a_3 = 1000 - 1000 = 0$

	O_1 O_2 O_3	<i>ESKAINITZA</i>
<i>A</i>	1500 500	2000
<i>B</i>	1500 1000	2500
<i>ESKARIA</i>	1500 2000 1000	

Hau da garraio-problema honen soluzio bat. Ogi-unitate horiek garraiatuz gero, ditugun eskaintzek zerbitzatzen dute eskaria (fluxu-taula). Ez ahaztu, soluzio bat besterik ez dela, oraingoz. Soluzio hau kalkulatzeko ez dugu kostu-matrizea kontutan izan.

Taulako osagai positiboen kopurua: $m + n - 1 = 2 + 3 - 1 = 4$

□

Problema orekatua izanik, azken pausoan izango dugun eskaria eta eskaintza balio berekoak izango dira, eta jatorri-puntua eta helburu-puntua batera desagertuko dira, eskari eta eskaintzarik geldituko ez delarik. Lortuko den soluzioak gehienez $m + n - 1$ osagai positibo izango du, eta soluzioa oinarrikoa dela egiazta daiteke.

Vogel-en metodoa

Metodo honek, esleipenak egiteko unean, kostu-matrizea kontutan izaten du, eta horregatik lortuko den hasierako soluzioa soluzio optimotik gertuago egongo da ipar-mendebaldeko ertzaren metodoan lortutako soluzioa baino. Helburua minimizatze erakoa denean erabiltzen da metodo hau. Maximizatze kasurako egokitu egin beharko litzateke.

Metodoaren urratsak aipatu aurretik, lerrokako eta zutabekako diferentziak definituko ditugu.

- $LD_i = i$ lerroko bi kosturik txikien arteko diferentzia balio absolutuan.
- $ZD_j = j$ zutabeko bi kosturik txikien arteko diferentzia balio absolutuan.

Vogel-en metodoa erabiltzen hasi aurretik garraio-taula orekatu behar da. Metodoan bete beharreko urratsak hauek dira:

1. Lerrokako eta zutabekako diferentziak kalkulatu.
2. Diferentziarik handieneko lerro edo zutabea aukeratu eta lerro edo zutabe horretan kosturik txikieneko posizioan ahalik eta x_{ij} unitate-kopuru handiena (posizioari dagozkion eskaintzaren eta eskariaren arteko minimoa) kokatu.

3. Esleitu berri dugun x_{ij} kopurua kontutan izanik eskari eta eskaintzak eguneratu. Eskari edo eskaintza zero duten lerroak edo zutabeak alde batera utziko ditugu.
4. Kopuru guztiak esleituak izan badira, prozesua gelditu. Bestela, 1. urratsean jarraitu.

Adibidea:

Har dezagun okindegien adibideko garraio-taula. LD_i eta ZD_j kalkulatu ditugu:

	O_1	O_2	O_3	ESKAITZA	LD_i
A	8	6	10	2000	2
B	10	4	9	2500	5
ESKARIA	1500	2000	1000		
ZD_j	2	2	1		

$$\max \{LD_i, ZD_j\} = 5 \rightarrow \text{bigarren lerroari dagokio}$$

Bigarren lerroan kostu txikieneko posizioa aukeratuko dugu:

$$c_{22} = 4$$

$$x_{22} = \min \{2000, 2500\} = 2000$$

O_2 helburu-puntua taulatik desagertzen zaigu, zerbitzatua izan delako. 2. jatorri-puntuaren eskaintza 500-ekoa da zerbitzuaren ondoren. Taula eguneratuan 2 jatorri-puntu eta 2 helburu-puntu ditugu.

	O_1	O_3	ESKAITZA	LD_i
A	8	10	2000	2
B	10	9	500	1
ESKARIA	1500	1000		
ZD_j	2	1		

Diferentziarik handiena 2-koa da, lehen lerroari eta lehen zutabeari dagokiena. Bietariko edozein aukera dezakegu.

1. lerroa aukeratuko dugu, adibidez. Bertan kosturik txikieneko posizioa $c_{11} = 8$ da.

$$x_{11} = \min \{1500, 2000\} = 1500$$

O_1 helburua zerbitzatua izan da. 1. jatorri-puntuaren eskaintza 500-era eguneraturik gelditzen da. Aurrerantzean egingo diren kalkuluetatik at gelditzen da 1. zutabea.

	O_3	ESKAINZA
A	10	500
B	9	500
ESKARIA	1000	

Gelditzen zaigun matrizea 2 lerroz eta zutabe batez osaturik dago. Zutabe hori zerbitzatzeko bi jatorri-puntuen eskaintzak erabiliko ditugu, hau da, $x_{13} = 500$ eta $x_{23} = 500$.

Vogel-en metodoa zein ipar-mendebaldeko ertzaren metodoa erabiltzen ari garela helburu-puntu bakarra edo jatorri-puntu bakarra izatera heltzen garenean, azken esleipena egiten da.

Horrenbestez, lortu dugun hasierako soluzioa ondoko fluxu-taulakoa da:

	O_1	O_2	O_3	ESKAINZA
A	1500		500	2000
B		2000	500	2500
ESKARIA	1500	2000	1000	

Soluzio honek ere, ipar-mendebaldeko ertzaren metodoa erabiliz lortutakoak bezala, zero baino handiagoak diren $m + n - 1 = 2 + 3 - 1 = 4$ osagai ditu, eta egiazta daiteke oinarriko soluzioa dela. Ez-endekatua da.

Egiazta daiteke, baita, azken soluzio hau ipar-mendebaldeko ertzaren metodoa erabiliz lortutakoa baino hobea dela.

- Vogel-en metodoaren bidez lortutako soluzioak helburu-funtzioari ematen dion balioa:

$$8 \cdot 1.500 + 10 \cdot 500 + 4 \cdot 2.000 + 9 \cdot 500 = 29.500$$

- Ipar-mendebaldeko ertzaren metodoaren bidez lortutako soluzioak ondoko balioa ematen dio helburu-funtzioari:

$$8 \cdot 1.500 + 6 \cdot 500 + 4 \cdot 1.500 + 9 \cdot 1.000 = 30.000$$

Helburua minimizatzea denez, Vogel-en metodoaren bidez lortutako soluzioa hobea da.

□

7.1.4 Oinarriko soluzio bideragarri baten hobekuntza

Badakigu lehen soluzio bat nola lortu, ipar-mendebaldeko ertzaren metodoa edo Vogel-en metodoa erabiliz.

Oinarriko soluzio bideragarri bat harturik, oraintxe garatuko dugun metodoak lehen soluzio hori hobetuko du. Metodoaren izena *MODI* da eta problema primalari dagokion duala formulatzean datza.

Garraio-problemari dagokion eredu duala hau da:

$$\max G = \sum_{i=1}^m a_i u_i + \sum_{j=1}^n b_j v_j$$

ondoko murrizketen menpe

$$u_i + v_j \leq c_{ij} \quad \forall i, j$$

$\mathbf{u}, \mathbf{v}$: ez-murriztuak

$\mathbf{u} = (u_1 \dots u_m)$ eta $\mathbf{v} = (v_1 \dots v_n)$ izanik.

Adibidea:

Kalkula dezagun 222. orrialdeko adibideko problemari dagokion eredu duala. Horretarako u_1, u_2, v_1, v_2, v_3 aldagai dualak erabiliko ditugu. Hau da lortzen den eredu:

$$\max G = 2000u_1 + 2500u_2 + 1500v_1 + 2000v_2 + 1000v_3$$

ondoko murrizketen menpe

$$u_1 + v_1 \leq 8$$

$$u_1 + v_2 \leq 6$$

$$u_1 + v_3 \leq 10$$

$$u_2 + v_1 \leq 10$$

$$u_2 + v_2 \leq 4$$

$$u_2 + v_3 \leq 9$$

$$u_i, v_j : \text{ez-murriztuak}$$

□

Oinarriratuko den aldagaia finkatu

Garraio-problemaren helburua minimizatzea denean:

- Baldin $z_{ij} - c_{ij} \leq 0 \quad \forall i, j$ orduan daukagun soluzioa optimoa da.
- Baldin $\exists z_{ij} - c_{ij} > 0$ orduan oinarriratuko den bektorea $z_{ij} - c_{ij}$ positiboen artean handiena duen $\mathbf{a}_{ij}$ bektorea izango da.

$$z_{ij} - c_{ij} = \mathbf{c}_B^T B^{-1} \mathbf{a}_{ij} - c_{ij}$$

$$\mathbf{c}_B^T B^{-1} = [u_1 \dots u_m, v_1 \dots v_n]$$

Hortaz,

$$z_{ij} - c_{ij} = [u_1 \dots u_m, v_1 \dots v_n] \mathbf{a}_{ij} - c_{ij}$$

Kontutan izan behar da A matrizearen egitura berezia dela, eta horregatik a_{ij} bektorearen bi osagaik dutela 1 balioa: i posizioako osagaiak eta $m+j$ posizioakoak. Gainontzeko osagaiak zero dira. Honen ondorioz,

$$z_{ij} - c_{ij} = u_i + v_j - c_{ij}$$

Beraz, u_i eta v_j kalkulatzeko 0-ren berdinak diren dualaren murrizketak planteatzen dira. Murrizketa horiek dira oinarriko bektoreei dagozkienak.

$$z_{ij} - c_{ij} = 0 \quad \forall a_{ij} \in B$$

$u_1 \dots u_m, v_1 \dots v_n$ balioak kalkulatzeko, $n + m$ balio alegia,

$$u_i + v_j - c_{ij} = 0$$

moduko $m + n - 1$ ekuazio dago. Sistema honetan 1 mailako askatasun-gradua dago: aldagai bati balio bat emanez gero gainontzeko aldagaien balioak kalkula daitezke. Aldagai dualen balioak kalkulatu ondoren $z_{ij} - c_{ij} = u_i + v_j - c_{ij}$ balio guztiak kalkula daitezke. Horien arabera soluzioa optimoa den edo hobeagotzerik ba al den jakingo dugu.

Adibidea:

Har ditzagun gure adibideari dagokion kostu-taula eta ipar-mendebaldeko ertzaren metodoa erabiliz lortutako soluzioa. Hauek dira dauzkagun kostu-taula eta fluxu-taula:

Kostu-taula:

	O_1	O_2	O_3	ESKAINNTZA
A	8	6	10	2000
B	10	4	9	2500
ESKARIA	1500	2000	1000	

Fluxu-taula:

	O_1	O_2	O_3	<i>ESK AINTZA</i>
A	1500	500		2000
B		1500	1000	2500
<i>ESKARIA</i>	1500	2000	1000	

Oinarria:

$$B = \{\mathbf{a}_{11}, \mathbf{a}_{12}, \mathbf{a}_{22}, \mathbf{a}_{23}\}$$

$\{u_1, u_2, v_1, v_2, v_3\}$ balioak kalkulatzeko ekuazio sistema hau ebatzi beharko dugu:

$$u_1 + v_1 = 8$$

$$u_1 + v_2 = 6$$

$$u_2 + v_2 = 4$$

$$u_2 + v_3 = 9$$

u_1 aldagaiari 0 balioa emanez gero, $v_1 = 8, v_2 = 6, u_2 = -2$ eta $v_3 = 11$ soluzioa lortzen da.

$z_{ij} - c_{ij} = u_i + v_j - c_{ij} \quad \forall a_{ij} \notin B$ balioak kalkulatzeko oinarriko ez diren $\mathbf{a}_{13}$ eta $\mathbf{a}_{21}$ bektoreak hartuko ditugu.

$$\bullet \quad z_{13} - c_{13} = u_1 + v_3 - c_{13} = 0 + 11 - 10 = 1 > 0$$

$$\bullet \quad z_{21} - c_{21} = u_2 + v_1 - c_{21} = -2 + 8 - 10 = -4 < 0$$

$$\exists \quad z_{13} - c_{13} = 1 > 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{a}_{13} \text{ oinarritutako da}$$

$\mathbf{a}_{13}$ oinarritutuz soluzioa hobetzea lortuko dugu.

□

Oinarritik kanporatua izango den bektorea

Soluzioa hobe dadin oinarria utzi beharko duen bektorea zein den zehazteko ondorengoak izango ditugu kontutan.

1. m jatorri-puntuz eta n helburu-puntuz osaturiko garraio-problema orekatu baten oinarriko $m + n - 1$ aldagai multzoan ez dago ziklorik. Adibidez, aurreko adibidean $\mathbf{a}_{11}, \mathbf{a}_{12}, \mathbf{a}_{22}, \mathbf{a}_{23}$ oinarriko bektoreek ez dute ziklorik osatzen.
2. Oinarriko aldagaiak erabiliz eta helburuaren balioa hobetzeko oinarritatuko den aldagaia erabiliz ziklo bakar bat osa daiteke. Oinarria utziko duen aldagaia zikloak ematen digu. Zikloa osatzen duten bektoreen arteko bat izango da oinarria utziko duena. Adibidez, aurreko adibidean oinarrian ez dagoen $\mathbf{a}_{13}$ bektorea ondoko konbinazio linealaren bidez adieraz daiteke:

$$\mathbf{a}_{13} = \mathbf{a}_{12} - \mathbf{a}_{22} + \mathbf{a}_{23}$$

Taulan begiraturaz gero bektore horiek ziklo bat osatzen dutela ikusten da.

Behin oinarrira sartuko den aldagaia eta oinarritik irtengo dena zehaztu ditugunean, fluxu-taulan aldaketa egingo dugu. Honen ondorioz, eskariak edo eskaintzak desorekatu egingo zaizkigu. Orekatzeko beharrezko aldaketak burutu beharko ditugu.

Adibidea:

Aurreko adibidearekin jarrai dezagun. Ipar-mendebaldeko ertzaren metodoa erabiliz lortu dugun soluzioa hau da:

	O_1	O_2	O_3	ESKAINZA
A	1500	500		2000
B		1500	1000	2500
ESKARIA	1500	2000	1000	

Oinarritutako den bektorea $\mathbf{a}_{13}$ da, eta $\mathbf{a}_{13}, \mathbf{a}_{12}, \mathbf{a}_{22}, \mathbf{a}_{23}$ bektoreek zikloa osatzen dute. $\mathbf{a}_{13} = \mathbf{a}_{12} - \mathbf{a}_{22} + \mathbf{a}_{23}$ idaztea posible da.

Zikloaren arabera, $\mathbf{a}_{22}$ bektorea ez da oinarritik irtengo, koefiziente negatiboa duelako. Zein irtengo da? $\mathbf{a}_{12}$ edo $\mathbf{a}_{23}$?

$$\left. \begin{array}{l} x_{12} = 500 \\ x_{23} = 1000 \end{array} \right\} \text{ txikiena: } 500 \rightarrow x_{12} \text{ irtengo da}$$

Gauzak honela utziz gero, taula desorekatua geldituko zaigu. O_2 -ren eskaria orekatzeko $x_{22} = 1500 + 500 = 2000$ jarri beharko dugu eta orain B eskaintza orekatzeko $x_{23} = 1000 - 500 = 500$. Eskari eta eskaintza guztiak betetzen dira.

	O_1	O_2	O_3	ESKAINNTZA
A	1500		500	2000
B		2000	500	2500
ESKARIA	1500	2000	1000	

□

Zikloaren osaeran parte hartzen ez duten aldagaien gain ez du oinarriaren aldaketak inolako eraginik izango.

Existitzen den zikloa bakarra da, sartzen den bektorearen konbinazio lineala baita. Soluzio hobea kalkulatzeko egiten dena zikloaren oreka mantentzea da.

7.1.5 Garraio-problemarako algoritmoa

1. Problema orekatu.
2. Soluzio bideragarri bat kalkulatu.
3. Une honetan daukagun oinarriari dagozkion $u_1 \dots u_m, v_1 \dots v_n$ kalkulatu.

4. Baldin $\forall a_{ij} \notin B \quad z_{ij} - c_{ij} = u_i + v_j - c_{ij} \leq 0$ bada, une honetan daukagun soluzioa optimoa da. Bestela, $z_{ij} - c_{ij} = u_i + v_j - c_{ij}$ positiboen artetik balio handieneko aldagaia oinarritatuko da.
5. Oinarrira sartu berri den aldagaiak eta oinarriko zenbait aldagaik osatutako zikloa zein den zehaztu, eta soluzio berria kalkulatu. 3. urratsean jarraitu.

Adibidea:

Garraio-problema bat ebatziko dugu, dagozkion kostu-taula, eskari eta eskaintzak ondokoak izanik.

	1	2	3	4	ESKAINZAK
1	5	9	-	4	28
2	6	10	3	-	32
3	4	2	5	7	60
ESKARIAK	48	29	40	33	

$$1. \sum_{i=1}^3 a_i = 120 < \sum_{j=1}^4 b_j = 150$$

Problema ez da orekatua. Gezurrezko iturburu-puntu bat gehituko dugu, bere eskaintza 30 eta garraio-kostuak 0 izango direlarik.

	1	2	3	4	ESKAINZAK
1	5	9	M	4	28
2	6	10	3	M	32
3	4	2	5	7	60
4	0	0	0	0	30
ESKARIAK	48	29	40	33	

244 7.GAIA GARRAIO-PROBLEMA ETA ESLEIPEN-PROBLEMA

(1,3) eta (2,4) posizioetan M garraio-kostua jarri dugu, iturburu-puntu eta helburu-puntu horien arteko garraioa posible ez dela adierazteko.

2. Vogel-en metodoa erabiliko dugu hasierako oinarriko soluzio bideragarri bat kalkulatzeko.

	1	2	3	4	ESKAINTZAK	LD_i
1	5	9	M	4	28	1
2	6	10	3	M	32	3
3	4	2	5	7	60	2
4	0	0	0	0	30	0
ESKARIAK	48	29	40	33		
ZD_i	4	2	3	4		

Diferentziarik handiena 1. zutabean eta 4. zutabean aurkitzen dira. 1. zutabea aukeratzen dugu, eta bertan $c_{41} = 0$ balioa. x_{41} balioa esleituko dugu.

$$x_{41} = \min \{30, 48\} = 30$$

4. iturburu-puntua zerbitzatua izan da. 1. helburu-puntuaren eskaria 18-koa da hemendik aurrera.

	1	2	3	4	ESKAINTZAK	LD_i
1	5	9	M	4	28	1
2	6	10	3	M	32	3
3	4	2	5	7	60	2
ESKARIAK	18	29	40	33		
ZD_i	1	7	2	3		

Diferentziarik handiena 7-koa da, eta 2. zutabean $c_{32} = 2$ da kostu minimoa.

$$x_{32} = \min \{29, 60\} = 29$$

Bigarren zutabea zerbitzatua izan da, eta 3. iturburu-puntuaren eskaintza $60 - 29 = 31$ -koa izango da. Kostu-taula honakoa da.

	1	3	4	ESKAIN TZAK	LD_i
1	5	M	4	28	1
2	6	3	M	32	3
3	4	5	7	31	1
ESKARIAK	18	40	33		
ZD_j	1	2	3		

x_{23} esleituko dugu.

$$x_{23} = \min \{32, 40\} = 32$$

2. iturburua zerbitzatua gelditzen da eta 3. helburuaren eskaria $40 - 32 = 8$ da. Datozen kalkuluetarako ez da 2. lerroa erabiliko. Hortaz, ondorengo kostu-taula daukagu.

	1	3	4	ESKAIN TZAK	LD_i
1	5	M	4	28	1
3	4	5	7	31	1
ESKARIAK	18	8	33		
ZD_j	1	M-5	3		

Hirugarren zutabean esleipena egingo dugu.

$$x_{33} = \min \{8, 31\} = 8$$

Helburu-puntua zerbitzatua izan da, eta 3. iturburu-puntuaren eskaintza $31 - 8 = 23$.

	1	4	ESKAINTZAK	LD_i
1	5	4	28	1
3	4	7	23	3
ESKARIAK	18	33		
ZD_j	1	3		

$$x_{31} = \min \{18, 23\} = 18$$

Eskariak eta eskaintzak eguneratuz zera daukagu.

	4	ESKAINTZAK
1	4	28
3	7	5
ESKARIAK	33	

Esleipenak egiteko zutabe bat besterik ez daukagu oraingo honetan.

$$x_{14} = 28, \quad x_{34} = 5$$

Burututako esleipen guztiak fluxu-taulan adieraziko ditugu.

	1	2	3	4	ESKAINTZA
1				28	28
2			32		32
3	18	29	8	5	60
4	30				30
ESKARIA	48	29	40	33	

3. u_i $i = 1, 2, 3, 4$ eta v_j $j = 1, 2, 3, 4$ balioen kalkulua.

$$u_1 + v_4 = 4$$

$$u_2 + v_3 = 3$$

$$u_3 + v_1 = 4$$

$$u_3 + v_2 = 2$$

$$u_3 + v_3 = 5$$

$$u_3 + v_4 = 7$$

$$u_4 + v_1 = 0$$

Baldin $u_3 = 0$ bada, honako soluzioa lortzen da.

$$u_3 = 0, v_1 = 4, v_2 = 2, v_3 = 5$$

$$v_4 = 7, u_4 = -4, u_2 = -2, u_1 = -3$$

4. Datorren taulan, oinarriko kostuak eta oinarriko ez diren bektoreei dagozkien $z_{ij} - c_{ij}$ balioak biltzen dira.

	1	2	3	4	u_i
1	-4	-10	2-M	4	-3
2	-4	-10	3	5-M	-2
3	4	2	5	7	0
4	0	-2	1	3	-4
v_j	4	2	5	7	

$x_{44} = 5$ oinarrian sartzen da, eta aurreko taulako zikloa aztertuz, $x_{34} = 5 - 5$ taulatik irtengo dela ikusten da.

5. Hurrengo soluzioa hau da.

	1	2	3	4	ESKAINTZA
1				28	28
2			32		32
3	23	29	8		60
4	25			5	30
ESKARIA	48	29	40	33	

Algoritmoaren 3. 4. eta 5. pausoak errepikatu egingo ditugu, optimaltasun baldintzak beteko diren arte.

3. Ekuazioak:

$$u_1 + v_4 = 4$$

$$u_2 + v_3 = 3$$

$$u_3 + v_1 = 4$$

$$u_3 + v_2 = 2$$

$$u_3 + v_3 = 5$$

$$u_4 + v_1 = 0$$

$$u_4 + v_4 = 0$$

Baldin $u_3 = 0$ orduan,

$$v_1 = 4, \quad v_2 = 2, \quad v_3 = 5$$

$$u_4 = -4, \quad v_4 = 4, \quad u_1 = -4, \quad u_2 = -2$$

4. $z_{ij} - c_{ij}$ balioen kalkulua.

	1	2	3	4	u_i
1	-1	-7	5-M	4	0
2	-4	-10	3	2-M	-2
3	4	2	5	-3	0
4	0	-2	1	0	-4
v_j	4	2	5	4	

5. $x_{43} = 8$ oinarriratuko da eta $x_{33} = 8 - 8$ da. Soluzio berria honakoa da

	1	2	3	4	ESKAINTZAK
1				28	
2			32		
3	31	29			
4	17		8	5	
ESKARIAK					

3. Ekuazioak askatuz

$$u_1 + v_4 = 4$$

$$u_2 + v_3 = 3$$

$$u_3 + v_1 = 4$$

$$u_3 + v_2 = 2$$

$$u_4 + v_1 = 0$$

$$u_4 + v_3 = 0$$

$$u_4 + v_4 = 0$$

$$u_4 = 0, \quad v_1 = v_3 = v_4 = 0$$

$$u_3 = 4, \quad v_2 = -2, \quad u_1 = 4, \quad u_2 = 3$$

4. .

	1	2	3	4	u_i
1	-1	-7	4-M	4	4
2	-3	-9	3	3-M	3
3	4	2	-1	-3	4
4	0	-2	0	0	0
v_j	0	-2	0	0	

Soluzioa optimoa da. Esleipenak honakoak dira.

$$x_{14} = 28, \quad x_{23} = 32, \quad x_{31} = 31, \quad x_{32} = 29$$

1. helburu-puntuaren eskaria, 17-koa, ez da zerbitzatua izan (x_{41} gezurrezko aldagaia da). Era berean, 3. helburu-puntuaren 8 unitate eta 4. helburu-puntuaren 5 unitate zerbitzatu gabe gelditu dira.

$$z^* = 4 \cdot 28 + 3 \cdot 32 + 4 \cdot 31 + 2 \cdot 29 = 390$$

□

7.1.6 Soluzio endekatua

m jatorri-puntu eta n helburu-puntu duen garraio-problema izanik, oinarriko soluzio bideragarri bat osatzen duten aldagaien artean hertsiki positiboak direnak $m + n - 1$ baino gutxiago badira, orduan soluzioa endekatua da. Endakatzea ondorengo kasuetan gerta daiteke:

- Ipar-mendebaldeko ertzaren metodoaren bidez edo Vogel-en metodoaren bidez hasierako soluzio bideragarri bat eraikitzean, azkena ez den pausoren batetan aldi berean jatorri-puntu bat eta helburu-puntu bat desagertzen direnean.
- Hasierakoa ez den soluzio batean egonik, oinarritik irtengo den bektorea aukeratzeko unean bi bektore edo gehiagok aukeratuak izateko baldintza betetzen dutenean, beren artean zorizko aukeraketa egiten dugunean.

Horrelako kasuetan, zero balioa hartzen duten aldagaien artean oinarrikoak direnak eta ez direnak bereiztu egin beharko ditugu.

Endakatzek bi arazo sortzen ditu:

1. Ziklatzearen arazoa. Simplex metodoarekin ere arazo berbera gertatzen zitzaigun.
2. Garraioaren algoritmoa erabili ahal izateko, soluzioak ez-endakakua izan beharko du, MODI metodoaren ekuazio sistema bete dadin.

Adibidea:

Har dezagun ondoko garraio-problema orekatua:

	1	2	3	4	ESKAINNTZA
1	23	22	17	24	40
2	18	23	16	22	60
3	21	18	21	23	70
ESKARIA	50	50	30	40	

Ipar-mendebaldeko ertzaren metodoa erabiliz hasierako soluzio bat kalkulatuko dugu:

	1	2	3	4	ESKAINITZA
1	40				40
2	10	50			60 50
3			30	40	70 40
ESKARIA	50 40	50	30	40	

Aldagai hertsiki positiboen kopurua: $5 < 4 + 3 - 1 = 6$. Beraz, soluzioa endekatua da.

Endekatu bihurtu zaigu bigarren lerroa eta hirugarren zutabea batera desagertu zaizkigunean. Soluzioa ez-endekatu bihurtzeko x_{23} aldagia oinarrikotzat hartuko dugu eta hertsiki positiboa den ϵ balioa emango diogu.

	1	2	3	4	ESKAINITZA
1	40				40
2	10	50	ϵ		60
3			30	40	70
ESKARIA	50	50	30	40	

Azter dezagun ea soluzio hori optimoa den. Horretarako oinarriko $\forall i, j$ -rako $u_i + v_j = c_{ij}$ sistema ebatziko dugu.

- Oinarria: $B = \{\mathbf{a}_{11}, \mathbf{a}_{21}, \mathbf{a}_{22}, \mathbf{a}_{23}, \mathbf{a}_{33}, \mathbf{a}_{34}\}$
- Ekuazio sistema:

$$u_1 + v_1 = 23$$

$$u_2 + v_1 = 18$$

$$u_2 + v_2 = 23$$

$$u_2 + v_3 = 16$$

$$u_3 + v_3 = 21$$

$$u_3 + v_4 = 23$$

- $u_1 = 0$ eginez lortzen den soluzioa:

$$v_1 = 23, u_2 = -5, v_2 = 28, v_3 = 21, u_3 = 0, v_4 = 23$$

- Oinarriko ez diren aldagaienezko:

$$* z_{12} - c_{12} = u_1 + v_2 - c_{12} = 0 + 28 - 22 = 6$$

$$* z_{13} - c_{13} = u_1 + v_3 - c_{13} = 0 + 21 - 17 = 4$$

$$* z_{14} - c_{14} = u_1 + v_4 - c_{14} = 0 + 23 - 24 = -1$$

$$* z_{24} - c_{24} = u_2 + v_4 - c_{24} = -5 + 23 - 22 = -4$$

$$* z_{31} - c_{31} = u_3 + v_1 - c_{31} = 0 + 23 - 21 = 2$$

$$* z_{32} - c_{32} = u_3 + v_2 - c_{32} = 0 + 28 - 18 = 10$$

	1	2	3	4	u_i
1	23	6	4	-1	0
2	18	23	16	-4	-5
3	2	10	21	23	0
v_j	23	28	21	23	

$$z_{32} - c_{32} = \max \{z_{ij} - c_{ij} / z_{ij} - c_{ij} > 0\}$$

$\mathbf{a}_{32}$ oinarriara sartuko da. Fluxu-matrizea eta $\mathbf{a}_{32} = \mathbf{a}_{22} - \mathbf{a}_{23} + \mathbf{a}_{33}$ zikloa aztertuz, oinarritik $\mathbf{a}_{22}$ edo $\mathbf{a}_{33}$ atera daitekeela ikusten dugu. x_{ij} txikienari lotuta dagoena $\mathbf{a}_{33}$ da. Soluzioa:

	1	2	3	4	ESKAINITZA
1	40				40
2	10	20	30		60
3		30		40	70
ESKARIA	50	50	30	40	

Soluzio hau ez da endekatua; algoritmoa erabiltzen jarrai dezakegu optimoa lortu arte.

□

7.2 Esleipen-problema

Garraio-problemaren kasu partikularra da esleipen-problema. Problema honetan lortu nahi dena zera da: iturburu-puntuen (izaki, eginkizun etab.) eta helburu-puntuen (eginkizun, makina etab.) arteko esleipena, esleipen honek kostu-funtzioa optimizatuko duelarik. Esleipen honek izaki bakoitza eginkizun bakar bati eta eginkizun bakoitza izaki bakar bati esleituko ditu. i izakia eta j eginkizuna elkarri esleitzeak c_{ij} kostua eragiten du.

Erabaki-aldagaiak honela definituak daude:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{baldin } i \text{ izakia eta } j \text{ eginkizuna elkarlotu badira} \\ 0 & \text{bestelakoetan} \end{cases}$$

Formalki esateko, n izaki eta n eginkizun izanik, eta c_{ij} i izakia j eginkizunari esleitzeko kostua bada, kostu totala minimo egingo duen esleipena aurkitzean datza esleipen-problema.

Ondoko eredu lineala planteatu daiteke:

$$\min z = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij}$$

ondoko murrizketen menpe

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = 1 \quad i = 1 \dots n$$

$$\sum_{i=1}^n x_{ij} = 1 \quad j = 1 \dots n$$

$$x_{ij} = 0, 1 \quad \forall i, j$$

c_{ij} balioak i izakia j eginkizunari lotzeak sortzen duen eraginkortasuna adieraziko balu, orduan helburua maximizatzea litzateke, eta minimizatze-problemara aldatu beharko genuke algoritmoa erabili ahal izateko.

i eginkizun bakoitza izaki bakar bati elkartzen zaiola diote lehen n murrizketek; hurrengo n murrizketek aldiz, izaki bakoitzari eginkizun bakar bat egokitzen zaiola.

x_{ij} aldagaiak bitarrak dira. Esleipen-problema garraio-problema ebazten den moduan ebatz daiteke. Horretarako, x_{ij} aldagaiak positibo izatera pasako dira, eta eskari eta eskaintzak 1 izango dira. Esleipen-problema eta garraio-problema arteko erlazioa ikusteko interesgarria da hau egitea, baina ez beste ezertarako, esleipen-problema ebazteko metodo eraginkorrak badaude eta. Metodo hauetan, garraio-probleman gertatu zaigun antzera, kostu-matrizea izango da informazio gehien emango diguna.

Oro har, problema praktikoetan ez da beti jatorri-puntuen kopurua eta helburu-puntuen kopurua berbera izango. Kopurua bera ez denetan problema orekatu egin beharko da horretarako problemari gezurrezko jatorri-puntuak edo gezurrezko helburu-puntuak gehituz.

Honako adibidearen bidez esleipen-problema erreal bat nolakoa izan daitekeen ikusiko dugu.

Adibidea:

Demagun herri batean lau eraikin jaso nahi direla: A, B, D eta E. Lehiaketa publikora atera du udaletxeak, eta 4 izan dira lehiaketara aurkeztu diren kontratistak: 1, 2, 3 eta 4. Kontratista bakoitzak eraikin bakoitza altxatzeak ekarriko duen kostuaren aurreproiektua (milioi pezetatan) aurkeztu du. Datuak taulakoak dira:

	1	2	3	4
A	58	58	60	54
B	66	70	70	78
D	106	104	100	95
E	52	54	64	54

Demagun kontratista bakoitzari eraikin bakar bat eraikitzea eskatuko zaiola, eta eraikin guztiak eraiki behar direla. Zein da kontratista eta eraikin arteko esleipen optimoa? Udaletxeari merkeen aterako zaiona, alegia?

□

Esleipen-problema ebartziko duen algoritmoa datozen bi teorematan oinarritzen da:

Teorema 7.2.1 *Esleipen problema baten helburu-funtzioa*

$$z = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n c_{ij} x_{ij}$$

izanik, bere $\{x_{ij}\}$ aldagaiek hartutako balioak soluzio optimo badira, orduan $\{x_{ij}\}$ soluzio optimo da baita helburu-funtzio horren orde

$$z' = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n c'_{ij} x_{ij}$$

duen problemarako. $c'_{ij} = c_{ij} - u_i - v_j$ da eta u_i eta v_j konstanteak dira.

Frogapena:

$$\begin{aligned} z' &= \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n c'_{ij} x_{ij} = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n (c_{ij} - u_i - v_j) x_{ij} = \\ &= \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n c_{ij} x_{ij} - \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n u_i x_{ij} - \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n v_j x_{ij} = \\ &= z - \sum_{i=1}^n u_i \sum_{j=1}^n x_{ij} - \sum_{j=1}^n v_j \sum_{i=1}^n x_{ij} = \\ &= z - \sum_{i=1}^n u_i - \sum_{j=1}^n v_j = z - k \end{aligned}$$

z eta z' helburu-funtzioen arteko aldea konstante bat da. Horregatik lortzen dute optimoa $\{x_{ij}\}$ erabaki-aldagaien balioen multzo berberean.

□

Teorema horri esker kostu-matrizea eraldatu ahal izango dugu le-
erroka edota zutabeka eragiketak eginez. Horrela, adibidez, lerro edota
zutabe bati konstante bat kendu ahal izango diogu.

Teorema 7.2.2 *Baldin $\forall i, j \quad c_{ij} \geq 0$ bada eta x_{ij} aldagaiek hartutako balioen multzoak*

$$z = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n c_{ij} x_{ij} = 0$$

betetzen badu, orduan $\{x_{ij}\}$ daukagun problemarako soluzio optimoa da.

Frogapena:

$c_{ij} \geq 0$ dela dakigu $\forall i, j$ -rako, eta baita $x_{ij} = 0, 1$ dela ere. z -ren minimo absolutua 0 da. Horregatik, $\{x_{ij}\}$ multzo batek $z = 0$ egiten badu, minimo absolutua lortuko da eta hori izango da problemaren soluzio optimoa.

□

Esan dugun bezala, aurreko bi teorematan oinarritzen da esleipen-problema baten soluzioa lortzeko erabiltzen den metodoa. Metodo horren urratsak jarraitzean kostu-matrizea eraldatuko dugu, lehen teoremari esker erabil ditzakegun eragiketak eginez, zeroak lortzeko. Gero, esleipen guztiak egin ondoren, helburu-funtzioaren balioa zero bada, minimo absolutua lortu dugu eta soluzioa optimo izango da.

7.2.1 Esleipen-metodoa: Metodo hungariarra.

Ikusi bezala, esleipenaren matrizeko lerro edo zutabe bateko osagai guztiei konstante bat gehitzen edo kentzen badiegu, horrek ez du esleipen optimoaren gain inolako eraginik izango. Metodo hungariarra gertakizun honetan oinarrituz, kostu-matrizea eraldatu eta bertan ahalik eta zero-kopuru handiena lortzen saiatuko da.

Hauek dira jarraitu beharreko urratsak:

1. Problema orekatu.
2. Kostu-matrizeko elementu guztiak ez-negatibo bihurtu eta problema minimizatze-idazkerara moldatu.
3. Lerro bakoitzetik kosturik txikieneko u_i elementua hartu eta lerroko elementu guztiei balio hori kendu. Matrizeko elementuak

aldatuak izan dira eta orain c'_{ij} balioak ditugu.

$$u_i = \min_j c_{ij}$$

4. Aurreko urratsean lerroetarako egindako gauza bera egin zutabee-tarako.

$$v_j = \min_i c'_{ij}$$

orain c''_{ij} elementuak lortu ditugu.

5. Zeroak esleitu. Zero-kopuru txikieneko lerroa aukeratu, zero hori-etako edozein esleitu eta lerro edo zutabe berberean dauden gai-nontzeko zeroak zirriborrotu. Gainontzeko lerroekin ere gauza bera egin, zirriborrotugabeko zero-kopuru txikiena duen lerrotik jarraituz;
- Halakoren batean, lerro guztietan esleitutako zero bat baldin badaukagu, orduan daukagun soluzioa optimoa da. Amaitu.
 - Oraindik ez badugu lerro bakoitzeko zero bana esleitzea lortu, 5. urratsean jarraituko dugu.
6. Ahalik eta lerro edota zutabe-kopuru txikiena aukeratuko dugu, beti ere, esleitutako zero guztiak lerro edota zutabe horietan egongo direlarik. Aukeraketa honela burutuko dugu:
- (a) Esleitutako zerorik ez daukan lerro oro markatu.
 - (b) Markatutako lerroetan zirriborrotutako zeroa duten zutabeak markatu.
 - (c) Markatutako zutabeetan zero bat esleituta duten lerroak markatu.
- (b) eta (c) urratsak errepikatu ez lerro eta ez zutabe gehiago markatu ahal izango ez dugun arte.
- Markatuak izan ez diren lerroetan eta markatutako zutabeetan daude zero guztiak. Lerro eta zutabe horiek estali.

7. Zero gehiago sortuko dugu. Horretarako, estaligabeko elementuen artetik txikiena aukeratuko dugu. Estaligabeko elementuei kopuru hori kendu, eta kopuru hori gehitu estalitako lerro eta zutabe arteko ebakidura puntu direnei. 4. urratsera joan.

Esleipen-problema ebazteko erabiltzen den metodo hungariar hau König-en teoreman oinarritzen da. Teorema honen arabera, *lerro eta zutabeetan independenteki eslei daitekeen zero-kopurua, taulako zero guztiak estaltzeko behar den lerro edota zutabe-kopuru minimoa da.*

Adibidea:

Har dezagun kontratisten eta eraikinen arteko esleipen-problema. Metodo hungariarra erabiliko dugu soluzio optimoa lortzeko. Kostutaula honakoa dela esan dugu:

	1	2	3	4
A	58	58	60	54
B	66	70	70	78
D	106	104	100	95
E	52	54	64	54

1. Problema orekatua da.
2. Matrizeko osagai guztiak positiboak dira, eta helburua minimizatzea da.
3. Lerro bakoitzeko elementuei lerroko elementurik txikiena kenduko diegu. Lehen lerroko elementurik txikiena 54 da, bigarrenekoa 66, hirugarrenekoa 95 eta laugarrenekoa 52. Matrize hau lortuko dugu:

	1	2	3	4
<i>A</i>	4	4	6	0
<i>B</i>	0	4	4	12
<i>D</i>	11	9	5	0
<i>E</i>	0	2	12	2

4. Eragiketa horiek egin ondoren lortutako taulan zutabe bakoitzean txikiena kenduz gero, ondoko taula lortzen da:

	1	2	3	4
<i>A</i>	4	2	2	0
<i>B</i>	0	2	0	12
<i>D</i>	11	7	1	0
<i>E</i>	0	0	8	2

5. Zeroak esleitu.

- Zero-kopuru txikieneko lerroak lehenengoa eta hirugarrena dira. Lehenengotik hasiko gara. Bertan zero bakarra dago. (A,4) zeroa esleitua gelditzen da, beraz, eta A lerroko eta 4 zutabeko gainontzeko zeroak zirriborrotuko ditugu. A lerroan ez dago beste zerorik, bai ordea 4 zutabean.

	1	2	3	4
<i>A</i>	4	2	2	0
<i>B</i>	0	2	0	12
<i>D</i>	11	7	1	∅
<i>E</i>	0	0	8	2

- Esleitugabeko zeroak dituzten lerroak bigarrena eta laugarrena dira. Hirugarren lerroan ez dago esleitua izan daitekeen zerorik. Bi lerro horietariko edozein aukera dezakegu, bigarrena adibidez. Bigarren lerroan bi zero ditugu; edozein aukera daiteke. Har dezagun (B,1) zeroa. Hau esleiturik gelditzen da. (B,3) eta (E,1) zeroak zirriborrotu egingo ditugu, bata B lerroan egoteagatik eta 1 zutabean egoteagatik bestea.

	1	2	3	4
A	4	2	2	0
B	0	2	$\emptyset$	12
D	11	7	1	$\emptyset$
E	$\emptyset$	0	8	2

- Zirriborrotugabeko zero bakarra dago taulan, laugarren lerroan hain zuzen ere: (E,2). Esleitua gelditzen da, ba.

	1	2	3	4
A	4	2	2	0
B	0	2	$\emptyset$	12
D	11	7	1	$\emptyset$
E	$\emptyset$	0	8	2

Taulako lerro bakoitzeko ez dago esleitutako zero bat. Beraz, hurrengo urratsean jarraitu beharko dugu.

- Zero guztiak estaltzeko beharrezko lerro edota zutabe-kopuru minimoa aukeratuko dugu.
 - D lerroa markatuko dugu x baten bidez, bertan ez daukagutako esleitutako zerorik.

262 7.GAIA GARRAIO-PROBLEMA ETA ESLEIPEN-PROBLEMA

- (b) Markatu berri dugun lerroan esleitua izan ez den zero bat dago, 4. zutabea hain zuzen ere. Markatu egingo dugu zutabe hau.
- (c) Aurreko urratsean zutabe bat, laugarrena, markatu dugu. Zutabe horretan badago esleitutako zero bat, A lerrokoa alegia. Lerro hau markatu egingo dugu.
- (b) Markatutako A lerroan ez dago esleitugabeko zerorik. Beraz, prozesua amaitu da.

	1	2	3	4	
A	4	2	2	0	x
B	0	2	0	12	
D	11	7	1	0	x
E	0	0	8	2	

x

Markatuak izan ez diren lerroek eta markatuak izan diren zutabeek zero guztiak estaltzen dituzte.

7. Zero berriak sortu. Har ditzagun estaliak izan ez diren taulako elementuak: 4, 2, 2, 11, 7, 1. Horietatik txikiena 1 elementua da. Estaliak ez dauden elementuei 1 kenduko diegu eta bi aldiz estaliak izan direnei 1 gehitu. Batuketak eta kenketak egin ondoren hau lortzen da:

	1	2	3	4
A	3	1	1	0
B	0	2	0	13
D	10	6	0	0
E	0	0	8	3

8. Zeroak esleitu:

	1	2	3	4
A	3	1	1	$\boxed{0}$
B	$\boxed{0}$	2	$\emptyset$	13
D	10	6	$\boxed{0}$	$\emptyset$
E	$\emptyset$	$\boxed{0}$	8	3

Lau zero izan dira esleituak. Beraz, soluzio optimoa lortu dugu.

- $(A \rightarrow 4)$: 4. kontratistak A eraikina altxako du.
- $(B \rightarrow 1)$: 1. kontratistak B eraikina altxako du.
- $(D \rightarrow 3)$: 3. kontratistak D eraikina altxako du.
- $(E \rightarrow 2)$: 2. kontratistak E eraikina altxako du.

$$\text{Kostua} = c_{A4} + c_{B1} + c_{D3} + c_{E2} = 54 + 66 + 100 + 54 = 274$$

□

7.2.2 Maximizatze-problemak

Helburua minimizatzea denetan bakarrik erabil daiteke metodo hungariarra. Problemaren helburua maximizatzea balitz, aldatu egin beharko genuke metodoa erabiltzen hasi baino lehen. Hori bai! c_{ij} koefizienteek positibo izan beharko dute, esleipen-metodoaren baldintza beharrezkoa da eta.

Adibidea:

Lantegi batek hiru langile behar ditu. Iragarki bat bidali du egunkarira eta 5 lagun azaldu zaizkio. Bost langile horietatik hiru aukeratu beharko ditu zuzendariak. Horretarako hautapen-froga bat prestatu du, lan bakoitzari buruzko galderekin, eta langile bakoitzak 0-tik 10-era bitarteko puntuaketa lortu du lan bakoitzerako. Puntuaketa taulakoa da.

	1	2	3	4	5
A	2	4	10	3	6
B	7	7	5	6	4
D	8	6	7	—	9

Laugarren langilea ez da D lana egiteko gai.

Guzti honekin, lan eta lagun arteko esleipena egin behar dugu, lan bakoitza egiteko aukeratutako pertsonen gaitasuna maximizatuko delarik.

Kasu honetan helburua gaitasunak maximizatzea da. Algoritmoa erabiltzen hasi baino lehen, helburua minimizatze helburu bihurtu behar dugu, kostu-matrizea aldatuta honen arabera aldatuz.

$\forall i, j$ -rako c_{ij} ordez $-c_{ij}$ jartzea zilegi da, baina taulako balio guztiak negatibo bihurtuko zaizkigu honen ondorioz. Positibo bihurtzeko taulako elementurik handiena hartuko dugu, 10, eta elementu guztiei gehituko diegu. Taula honela gelditu zaigu:

	1	2	3	4	5
A	8	6	0	7	4
B	3	3	5	4	6
D	2	4	3	—	1

Orain helburua minimizatzea da. Taula prest daukagu algoritmoa erabiltzen hasteko.

4. langilea D lana egiteko gai ez dela dio problemaren enuntziatuak; esleipen hori gertatuko ez dela ziurtatzeko M balioa, guk nahi adina handia, jarriko dugu taulako posizio horretan.

Bestalde, problema ez da orekatua, jatorri-puntuen eta helburu-puntuen kopurua berdina ez delako. Gezurrezko bi jatorri-puntu gehituko dizkiogu taulari; jatorri-puntu hauen kostuak zero izango dira edozein helburu-puntutarako. Bi langile eta gezurrezko bi lan hauek lotuko ditu soluzioak, eta langile horiek lanik gabe gelditu direla esan nahiko du. Horregatik da kostua zero.

	1	2	3	4	5
<i>A</i>	8	6	0	7	4
<i>B</i>	3	3	5	4	6
<i>D</i>	2	4	3	<i>M</i>	1
<i>E</i>	0	0	0	0	0
<i>F</i>	0	0	0	0	0

Orain bai metodo hungariarra erabil daitekeela esleipen optimoa ezagutzeko.

□

7.2.3 Aukerazko optimoak

Zeroak esleitzeko unean, lerro bakoitzean zero bat esleitzea lortu badugu eta esleipenak egiterakoan aukera bat baino gehiagoren artean aukeratu behar izan badugu, orduan aukerazko optimoak daude.

Adibidea:

Har dezagun aurreko adibideko taula, behin minimizazio helburura aldatua izan denean.

Kostu-matrizeko elementu guztiak positiboak dira. Lerro bakoitzean lerroko txikiena kenduz:

	1	2	3	4	5
<i>A</i>	8	6	0	7	4
<i>B</i>	0	0	2	1	3
<i>D</i>	1	3	2	<i>M</i>	0
<i>E</i>	0	0	0	0	0
<i>F</i>	0	0	0	0	0

Zutabe bakoitzean bada zeroren bat. Beraz, zeroak esleitzen has gaitezke.

	1	2	3	4	5
A	8	6	0	7	4
B	0	$\emptyset$	2	1	3
D	1	3	2	M	0
E	$\emptyset$	0	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$
F	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	0	$\emptyset$

Bost zero izan dira esleituak, zero bat lerroko. Algoritmoa amaitu da.

- Soluzioa: $A \rightarrow 3$, $B \rightarrow 1$, $D \rightarrow 5$, $E \rightarrow 2$ eta $F \rightarrow 4$.
- Esleipen-kostua: $c_{13} + c_{21} + c_{35} + c_{42} + c_{54} = 10 + 7 + 9 + 0 + 0 = 26$

Soluzio honen arabera 2 langilea eta 4 langilea lanik gabe gelditu dira.

Bigarren lerroan esleipena egiterakoan, B lana 1. lagunari esleitzeko aukera izateaz gain badago beste aukera bat: B lana 2. lagunari esleitzekoa. Bigarren aukera hartuz gero ondorengo aukerazko soluzioa lortuko genuke:

	1	2	3	4	5
A	8	6	0	7	4
B	$\emptyset$	0	2	1	3
D	1	3	2	M	0
E	0	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$
F	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	0	$\emptyset$

- Soluzioa: $A \rightarrow 3$, $B \rightarrow 2$, $D \rightarrow 5$, $E \rightarrow 1$, $F \rightarrow 4$
- Kostua: $10 + 7 + 9 + 0 + 0 = 26$

Oraingo honetan lanik gabe gelditu direnak 1. langilea eta 4. langilea dira.

Modu berean, laugarren eta bosgarren lerroetatik ere aukerazko soluzioak lor daitezke, baina hauek ez dute benetazko lanen esleipenaren gain inolako eraginik izango.

□

7.3 Erabilpen praktikoak

7.3.1 Ekoizpen-problema bat

Lantegi batek bere ekoizpena antolatu behar du hurrengo urteko 4 hiruhilabetealdietarako. Izango duen eskaria estima dezake: lehen hiruhilabetealdian 100 unitateko eskaria izango du, bigarrenengoan 200, 150 unitatekoa hirugarrenengoan eta 100 azkenengoan. Hiruhilabetealdi bateko ekoizpen-ahalmena 120 unitatetara mugatua dago. Hiruhilabetealdi bateko eskaria ezin daiteke geroagoko hiruhilabetealdiren batetan zerbitzatu. Produktu-unitate bat ekoizteak 2 unitateko kostua dakarkio lantegiari. Gainera, 0.5 unitateko kostu gehigarria izango du produktu-unitate hori biltegitratzeko beharrean aurkitzen bada. Problema hau garraio-problema baten moduan planteatuko dugu.

Adibide honetan lau hiruhilabetealdiak aldi berean jatorri-puntu eta helburu-puntu dira. x_{ij} erabaki-aldagaiek zera adierazten dute: j hiruhilabetealdiko eskaria zerbitzatzeko i hiruhilabetealdian sortu behar den unitate-kopurua. Baldin $i > j$ bada, x_{ij} oinarrian egotea ezinezkoa izango da, lehen esan baitugu hiruhilabetealdi bateko eskaria ezin daitekeela geroagoko hiruhilabetealdiren batetan zerbitzatu.

Jatorri-puntuen eskaintza hiruhilabetealdiko ekoizpen maximoa da, hau da, $a_1 = 120, a_2 = 120, a_3 = 120, a_4 = 120$. Eskariak berriz: $b_1 = 100, b_2 = 200, b_3 = 150, b_4 = 100$.

Ekoizte-kostuak hauek dira:

- $c_{ij} = \text{ekoizte-kostua}$ $i = j$ den kasuetan.
- $c_{ij} = \text{ekoizte-kostua} + \text{biltegitratze-kostua}$ $i < j$ denetan.
- $c_{ij} = M$ $i > j$ bada.

M balio hau x_{ij} aldagaia oinarriko ez bihurtzeko behar adina handia da.

Problema honi dagokion garraioaren kostu-taula hau da:

	1	2	3	4	ESKAINNTZA
1	2	2.5	3	4	120
2	M	2	2.5	3	120
3	M	M	2	2.5	120
4	M	M	M	2	120
ESKARIA	100	200	150	100	

7.3.2 Maximizatze-problema bat

Lantegi batek hiru ekoizte-zentro ditu: A, B eta D. Bere produktua sortzeak ematen dion unitateko irabazia 110-ekoa da. Irabazi hau kalkulatzeko ekoizte-kostua eta salmenta-prezioa izan dira kontutan. Produktua hiru ekoizte-zentro horietatik lau salmenta-puntuera garraiatzeak suposatzen dituen kostuak hauek dira:

	1	2	3	4
A	30	10	25	20
B	15	25	30	10
D	20	30	15	20

Ekoizpen-zentro hauen hilabeteko ekoizte-ahalmena 2.000 unitatera mugatua dago. Salmenta-puntuen hilabeteko eskariak 1.000, 1.200, 1.500 eta 1.000 unitatekoak dira, hurrenez hurren.

Lantegiak ahalik eta irabazi handiena lor dezan bere ekoizpena planifikatzen lagunduko dion garraio-taula idatziko dugu.

- Eskaintzak: $a_1 = 2.000$, $a_2 = 2.000$, $a_3 = 2.000$

- Eskariak: $b_1 = 1.000$, $b_2 = 1.200$, $b_3 = 1.500$, $b_4 = 1.000$

Oraingo honetan, kostu-taulako c_{ij} balioak irabaziak dira.

- c_{ij} =Ekoiztearen irabazia - Garraio-kostua

Garraio-taula:

	1	2	3	4	<i>ESK AINTZA</i>
<i>A</i>	80	100	85	90	2000
<i>B</i>	95	85	80	100	2000
<i>D</i>	90	80	95	90	2000
<i>ESKARIA</i>	1000	1200	1500	1000	

Garraioaren algoritmoa erabili ahal izateko taulako elementuen zeinuak aldatu egin beharko ditugu, taulako balioak irabaziak eta helburua maximizatzea direlako.

7.3.3 Ordutegien esleipena

Demagun bi irakasle daudela matematika lau ikasgelatan erakusteko prest. Irakasle bakoitzak bi eskola eman beharko ditu. Irakasleek ordutegiari buruzko lehentasunak azaldu dituzte eta beheko taulan datoz adieraziak. 10-eko puntuaketak irakasleak gehien nahi duen ordua hori dela esan nahi du eta 1-ekoak gutxien nahi duen ordua hori dela.

Lehentasunen taula:

	9.00	10.00	11.00	13.00
1. irakaslea	9	9	7	6
2. irakaslea	9	8	8	4

Irakasleen lehentasunak ahalik eta gehien errespetatuko diren eranbanatu nahi dira eskolak.

Esleipen-taula hau eraiki beharko da ordutegiak irakasleen artean banatzeko.

	9.00	10.00	11.00	13.00
1. irakaslea	9	9	7	6
2. irakaslea	9	8	8	4
1. irakaslea	9	9	7	6
2. irakaslea	9	8	8	4

Lerro bakoitzean posizio bat esleitzen da eta ondorioz irakasle bakoitzari bi ordutegi desberdin egokituko zaizkio.

Gogoratu taula minimizatze erari egokitu behar zaiola esleipenaren algoritmoa erabiltzen hasi baino lehen.

7.4 Ariketak

1. Demagun garraio-taula hau daukagula:

	1	2	3	4	ESK AINTZA
1	6	3	2	4	30
2	7	5	4	6	60
3	9	8	6	3	40
ESKARIA	20	50	45	20	

- (a) Idatzi dagokion eredu lineala.
 - (b) Eraiki ezazu garraio-eredu orekatua.
 - (c) Ipar-mendebaldeko ertzaren metodoa erabiliz soluzio bat kalkulatu ezazu.
 - (d) Vogel-en metodoa erabiliz kalkulatu ezazu, baita, soluzio bat.
 - (e) Aurreko puntuetan lorturiko soluzioen artetik hoberena har ezazu soluzio optimoa bilatzeko.
2. Garraio-problema bati dagokion garraio-taula behekoa da. M balioek garraio hori ezinezkoa dela esan nahi dute.

	1	2	3	4	ESK AINTZA
1	2	4	<i>M</i>	3	10
2	6	2	7	3	10
3	<i>M</i>	9	<i>M</i>	7	10
ESKARIA	8	6	15	6	

- (a) Ipar-mendebaldeko ertzaren metodoa erabiliz lortutako soluzioa eta Vogel-en metodoa erabiliz lortutakoa aldera itzazu.
- (b) Soluzio optimoa lor ezazu.
3. 267 .orriko ekoizpen-problemaren antzekoa ebatzi nahi da. Oraingoan hiruhilabetealdi bateko eskaria geroagoko beste hiruhilabetealdi batean zerbi daiteke, eta horrelakoetan 0.60-ko zigor-kostua ezarriko da atzerapenezko hiruhilabetealdi bakoitzeko. Problema eredu lineal moduan idatz eta ebatz ezazu.
4. Igeriketa talde baten entrenatzaileak taldeko sei igerilarien artetik lau aukeratu behar ditu txandaketa proba batean parte hartzeko. Aurretik egindako proba batean igerilari bakoitzak igeriketa estilo bakoitzean lortutako denborak baditu entrenatzaileak eta denbora horiek aukeraketa egiten lagunduko diote. Denborak segundutan hartuak daude.

	1	2	3	4	5	6
BIZKAR ESTILOA	36	34	33	38	37	42
BULAR ESTILOA	42	35	40	35	35	35
TXIMELETA EST.	34	29	39	29	32	40
CROLL ESTILOA	30	28	29	30	28	30

Zein lau igerilari eta bakoitza zein estilotan igerian aritzeko aukeratuko ditu entrenatzaileak txapelketan irabazle izateko aukerak ahalik eta handienak izateko? Erabil ezazu metodo hungariarra.

5. Aire-konpainia batek A hiritik B hirira 5 hegaldi egiten ditu, eta beste hainbeste itzultzeko. Hegaldien ordutegia taulakoa da. Tripulazio bakoitzak eguneko bi hegaldi burutu behar ditu eta hegaldi artean gutxienez bi orduko atsedenaldia izan behar du. Tripulazioak bai A hirian eta bai B hirian bizi daitezke.

Hegaldia	Irteera A-tik	Helduera B-ra
1	5.00	9.00
2	9.00	13.00
3	12.30	16.30
4	17.00	21.00
5	20.00	24.00

Hegaldia	B-tik irteera	A-ra itzulera
1	6.00	9.00
2	9.00	12.00
3	13.00	16.00
4	15.00	18.00
5	20.00	23.00

Zehazta ezazu tripulazio bakoitzak zein ordutako hegaldiak egin beharko dituen eta zein hiritan bizi beharko duen hegaldi arteko atsedenaldi denborak minimizatzeke.

6. Datozen esleipen-taulatako elementuak irabaziak dira. Soluzio optimoa aurki ezazu.

(a) .

	1	2	3	4
1	7	3	2	4
2	4	—	7	6
3	2	9	3	3
4	6	4	—	9

(b) .

	1	2	3	4	5
1	4	3	6	3	7
2	12	5	4	5	2
3	9	2	2	7	10
4	6	7	9	3	5

8. Gaia

PAKETEAK

8.1 Sarrera

Problema linealak eskuz ebazteko kalkulu matematiko asko egin behar izaten da. Lana erraztearren, zenbait konputagailu programa garatu da, eta tamaina handiko problemak ere modu errazean ebatziak izango dira.

Gai honetan bi pakete aztertuko ditugu: QSB+ eta LINDO pake-teak. Menuen bitartez erabiltzen da lehenengoa eta aginduen bitartez bigarrena. Bakoitzak eskaintzen dituen aukerak banan bana aztertuko ditugu, eta adibide batzuk exekutatu ditugu bakoitzak sortzen duen irteera nolakoa den ikusteko. Honakoak dira adibideen enuntziatuak:

8.1.1 Nahasketen problema

Birfindegi batean 2 gasolina mota (A eta B) ekoizten dituzte, horretarako 3 esentzia desberdin nahastuz. Erabil daitekeen esentzia-kopurua eta mota bakoitzeko upelaren prezioa 8.1 .taulan datoz adieraziak.

A eta B gasolinak kalitate onekoak izan daitezen, nahasketak egite-rakoan ondokoak kontutan izan behar dira:

- A gasolinaren %50-a gutxienez 1. esentzia da eta ezin du 2. esen-tzia %30-etik behera izan.

8.1 .Taula:

ESENTZIA	UPELA-KOPURUA	UPELAKO PREZIOA
1	2.000	10
2	3.000	8
3	1.000	12

- B gasolinaren 3. esentzia-kopuruak %30-etik beherakoa izan behar du.

A gasolinaren salneurria 40 ptakoa da upelako eta B-rena 35 ptakoa. Demagun ekoiztutako gasolina guztia saltzeko gai dela birfindegia.

Irabaziak ahalik eta handienak izan daitezen mota bakoitzetik zenbat gasolina ekoiztu beharko den zehaztuko duen eredu lineala eraiki genuen. Ikus 24. orria.

8.1.2 Jan-neurriaren problema

Elikapen-zentro batean A, B, D eta E bitaminak kopuru egokian izango dituen jan-neurria prestatzen ari dira. Jan-neurriak ondokoak bete beharko ditu: gutxienez 25 mg A bitamina izan beharko ditu, B bitamina-kopuruak 25 mg eta 30 mg artean egon beharko du, D bitaminak berriz 22 mg-tik gora agertu beharko du eta gehienera jota ere 17 mg E bitamina nahi dira.

Bitamina guzti horiek 4 elikagai ezberdinen bidez lor daitezke. 8.2 .taulan zera dator adierazia: elikagai gramoko dagoen A, B, D eta E bitaminen mg-kopurua eta elikagai horietariko bakoitzaren gramoko kostua.

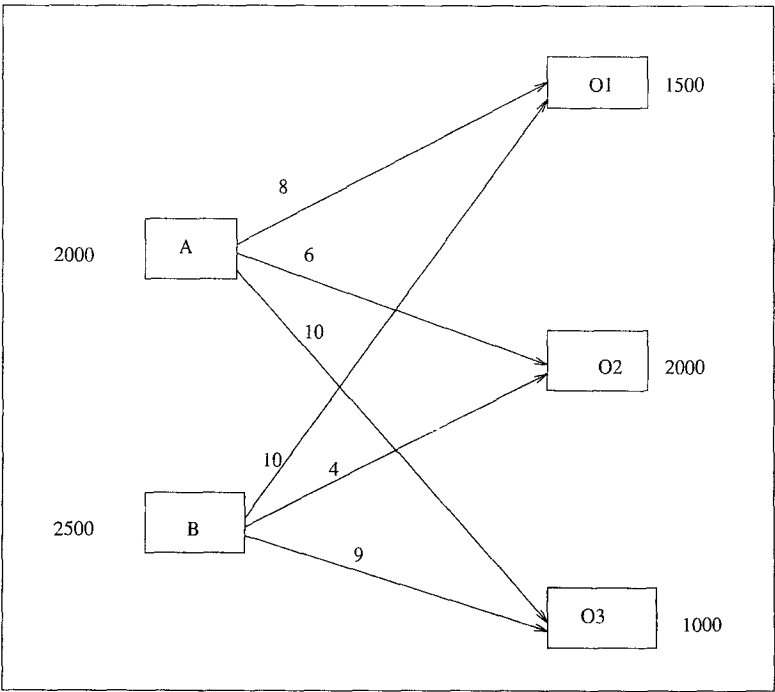
Eskatzen dena zera da: kosturik txikieneko jan-neurria aurkitu nahi da, beti ere beharrezko A, B, D eta E bitamina-kopurua ziurtatuko duelarik. (Begira 22. orriko eredua).

8.2 .Taula: Elikagaien bitaminak eta kostua

ELIKAGAIA	BITAMINAK (mg/gr)				ELIKAGAI GRAMOAREN KOSTUA
	A	B	D	E	
1	2	1	0	1	14
2	1	2	1	2	9
3	1	0	2	0	13
4	1	2	1	1	16

8.1.3 Garraio-problema bat

Demagun herrialde batean badirela ogia ekoizten duten 2 lantegi: A eta B. Lantegi horietan ekoiztutako ogia 3 okindegitara garraiatzen da, hauek sal dezaten: O_1, O_2, O_3 . (Ikus 222. orria).



Jatorri-puntuen (lantegien) eskaintzak, helburu-puntuen (okindegi-en) eskariak eta garraio-kostuak irudikoak dira.

Erabaki-aldagaiak:

$x_{ij} = i$ ($i = A, B$) lantegitik O_j ($j = 1, 2, 3$) okindegira garraiatzen den ogiaren unitate-kopurua

8.1.4 Esleipen-problema bat

Igeriketa talde baten entrenatzaileak taldeko sei igerilarien artetik lau aukeratu behar ditu proba batean parte hartzeko. Aurretik egindako proba batean igerilari bakoitzak igeriketa-estilo bakoitzean lortutako denborak baditu entrenatzaileak eta denbora horiek aukeraketa egiten lagunduko diote. Denborak segundutan hartuak daude.

	1	2	3	4	5	6
BIZKAR ESTILOA	36	34	33	38	37	42
BULAR ESTILOA	42	35	40	35	35	35
TXIMELETA EST.	34	29	39	29	32	40
CROWL ESTILOA	30	28	29	30	28	30

Zein lau igerilari eta bakoitza zein modalitatetan igerian aritzeko aukeratuko ditu entrenatzaileak txapelketan irabazle izateko aukerak ahalik eta handienak izateko?

8.2 QSB+

QSB+ (Quantitative Systems for Business Plus) paketearen helburua erabakiak hartzen laguntzea da, eta bide horretatik erabiltzaileak emandako optimizazio-problemak ebazten ditu. 19 moduluz osaturik dago, modulu bakoitza problema mota bat ebazteko egokitua dagoelarik. Horietariko hiru dira irakasgai honetan aztertzen diren problemak ebazteko erabiliko ditugunak:

1. Programazio lineala
2. Garraio-problema ebazteko modulua
3. Esleipen-problema eta bidaiariaren problema ebaztekoa

Hiru horietaz gain praktikan ager daitekeen beste hainbat problema ebazteko gai da QSB+.

Erabiltzaileari paketea erabilgarri gerta dakion, lehioen eta menuen bidez antolaturik dago. Honakoak dira eskaintzen diren aukerak:

1. Moduluak:

- Programazio lineala
- Programazio lineal osoa
- Helburu bidezko programazioa
- Programazio koadratikoa
- Programazio ez-lineala
- Programazio dinamikoa
- Garraio-problema
- Esleipen-problema eta bidaiariaren problema
- Sare espezialduen eredutzea
- Sare gaituen fluxuaren eredutzea
- Proiektu-antolaketa (PERT/CPM)
- Inbentario-teoria
- Inbentario-teoria 2
- Iladen teoria
- Ilada sistemen simulazioa
- Erabakien analisisia
- Markov prozesuak
- Denbora-serieen auresateak
- Analisi finantziarrak

2. Datu-sarrera:

- Datuak sartu
- Fitxategia irakurri
- Datuak erakutsi
- Datuak aldatu
- Datuak gorde
- QSB+ -etik irten

3. Soluzioa:

- Problema ebatzi
- Ebatzi eta taulak erakutsi
- Grafika bidez ebatzi
- Grafikaren neurriak finkatu
- Soluzioa erakutsi
- Soluzioa inprimatu
- Soluzioa gorde
- Azken taula inprimatu

4. Aukerak:

- Koloreak
- Kolorebakarra
- Inprimagailua

5. Laguntza:

- Moduluari buruzkoa
- Interfazeari buruzkoa
- Editatze-teklei buruzkoa

Hona hemen adibideak ebatzi ondoren QSB+ paketeak lortutako soluzioak.

Nahasketen problema

Datorren taulan biltzen dira problema ebatzi ondoren lortutako datuak. **Solution** zutabekoak dira problemaren aldagaien balio optimoak. **Opportunity Cost** zutabearen hasierako aldagaiei dagozkien $z_j - c_j$ balioak datoz. Gainontzeko hiru zutabeetan zera dator adierazia: **c** bektorearen parametro bakoitzak zein tartetan egon beharko duen oinarri optimoa alda ez dadin. Parametro horietariko bakar bat aldatuko da aldi berean.

----- Solution Summary for nahasket -----							
12-27-1994 14:12:47				Page: 1 of 1			
Variable	Variable		Opportuni-	Minimum	Current	Maximum	
Number	Name	Solution	ty Cost	Obj. Coef.	Obj. Coef.	Obj. Coef.	
1	x1A	2000	0	20	30	M	
2	x2A	1200	0	15.33333	32	32	
3	x3A	800	0	28	28	M	
4	x1B	0	10	-M	25	35	
5	x2B	1800	0	27	27	43.66666	
6	x3B	200	0	0	23	23	

Maximized OBJ = 174000 Iteration = 5 Elapsed CPU seconds = 0.050781							

Ondorengo taula honetan, **Constraint Status** zutabeak murrizketen zentzua ematen digu. **Shadow Price** zutabearen itzal-prezioak datoz, soluzio dual optimoa, alegia. Gainontzeko hiru zutabeetan **b** bektorearen parametro bakoitza zein tartetan mugitu ahal izango den esaten zaigu, beti ere oinarri optimoa aldatuko ez delarik. Aldi berean parametro horietariko bakar bat alda daiteke.

Constraint Summary for nahasket							
12-27-1994 14:12:47				Page: 1 of 1			
Constraint Number	Constraint Status	Shadow Price	Surplus	Minimum R. H. S.	Current R. H. S.	Maximum R. H. S.	
1	Tight (<)	35	0	0.000122	2000	2500	
2	Tight (<)	27	0	1666.667	3000	M	
3	Tight (<)	23	0	800	1000	1571.429	
4	Tight (>)	.1	0	-14285.7	0	50000	
5	Tight (>)	0	0	-20000	0	40000	
6	Loose (>)	0	40000	-M	0	40000	
Maximized OBJ = 174000 Iteration = 5 Elapsed CPU seconds = 0.050781							

Janeurriaren problema

Solution Summary for janeurri						
12-27-1994 14:15:06				Page: 1 of 1		
Variable Number	Variable Name	Solution	Opportunity Cost	Minimum Obj. Coef.	Current Obj. Coef.	Maximum Obj. Coef.
1	X1	4.428571	0	1.250001	14	24
2	X2	2.285714	0	-11	9	16
3	X3	5.857143	0	6.333333	13	35.5
4	X4	8	0	9.571428	16	M
Minimized OBJ = 286.7143 Iteration = 4 Elapsed CPU seconds = 0						

Constraint Summary for janeurri						
12-27-1994 14:15:06			Page: 1 of 1			
Constraint Number	Constraint Status	Shadow Price	Surplus	Minimum R. H. S.	Current R. H. S.	Maximum R. H. S.
1	Tight (>)	7.285714	0	17.25	25	33
2	Loose (<)	0	5	25	30	M
3	Tight (>)	6.428571	0	17	25	30
4	Tight (>)	2.857143	0	8.333333	22	37.5
5	Tight (<)	-7	0	14.71429	17	25
Minimized OBJ = 286.7143 Iteration = 4 Elapsed CPU seconds = 0						

Garraio-problema

Hasierako soluzioa kalkulatzeko 8 metodo desberdin dago, eta horietariko edozein erabil daiteke. Soluzioaren hobekuntza kalkulatzeko MODI metodoa erabiltzen da.

Datorren taulan problemaren taula optimoa agertzen da, hau da, aldagaien balio optimoak eta helburu-funtzioaren balio optimoa.

Edozein unetako garraio-aula ikus daiteke, ez garraio-aula optimoa bakarrik.

----- Solution for garraio -----					
12-27-1994 14:18:13			Page: 1 of 1		
From	To	Shipment	@ Cost/Profit	Opport. Cost	
A	01	1500	8	0	
A	02	0	6	1	
A	03	500	10	0	
B	01	0	10	3	
B	02	2000	4	0	
B	03	500	9	0	

Minimized OBJ = 29500 Iteration = 2 Elapsed CPU seconds = 0					

Esleipen-problema

Problema ebazteko metodo hungariarra erabiltzen du QSB+ek.

Assignment Solution for igeriketa		
12-27-1994 14:22:25		
Object	Task	Cost/Profit
BIZKAR	3	33
BULAR	2	35
TXIMELETA	4	29
CROLL	5	28
Dummy	1	0
Dummy	6	0
Minimized OBJ = 125 # Iterations = 1 CPU seconds = 0		

OBJECT zutabeen igeriketa-estiloak (iturburu-puntuak) agertzen dira, eta TASK zutabeen igeriketa-estilo bakoitzari esleitutako igerilariak (helburu-puntuak). Oraingoan ere, edozein iteraziotarako esleipen-aula lor daiteke. Aurrekoa esleipen-aula optimoa da.

8.3 LINDO

8.3.1 Sarrera

Erabiltzaileari bere zereginetan erabakiak hartzen laguntzeko eraiki zen LINDO (Linear, Interactive, Discrete Optimizer) paketea. Honakoa izaten da paketea erabiltzeko modua: hasteko, erabiltzaileak eskuartearen duen problema lineala eredu moduan formulatzen du, eta LINDOk eskaintzen dituen datu-sarrera aginduen bidez eredu LINDOn sartuko du. Ondoren, ebatzi egingo du, eta lortutako soluzioa aztertuko du, sartu berri duen ereduaren zuzentasuna eta egokitasuna aztertzeko. Zerbait aldatu nahi izanez gero, eredu eguneratu eta ebatziko du. Erabiltzaileak prozesua errepikatuko du behar bezain beste aldiz.

Aginduen bidez erabiltzen da LINDO, ez menuen bidez. Agindu multzoa nahiko zabala da eta edozein unetan agindu horietariko edozein erabil daiteke. Honakoak dira guztiak:

1. Informazioa

- CAT → Aginduen kategoriak zerrendatzen ditu.
- COM → Aginduak zerrendatzen ditu
- HELP → Laguntza eskaintzen du
- LOCAL → Bertako instalazioari buruzko informazioa
- TIME → Erabilitako konputagailu-denbora erakusten du

2. Sarrera

- LEAVE → Aurretik egindako TAKE-aren eragina desegiten du
- MAX → Eredua sartzen hasteko

- MIN → Eredua sartzen hasteko
- RDBC → (Retrieve Data Base Column) Aurreko soluzioa atzitu
- RETR → (RETRieve) Problema fitxategi batetik atzitu
- RMPS → (Retrieve MPS) MPS formatuko fitxategia atzitu
- TAKE → Terminaleko sarrerez osaturiko fitxategia atzitu

3. Erakutsi

- BPICTURE → (Base PICTURE) Uneko oinarria marraztu
- CPRI → (Column PRInt) Zutabeari buruzko informazioa
- LOOK → Problemaren zati bat ikusteko
- NONZEROES → Soluzioan zero ez diren aldagaiak erakutsi
- PICTURE → Matritzea marraztu
- RANGE → Heinaren azterketa erakutsi
- RPRI → (Row PRInt) Lerroari buruzko informazioa eman
- SHOCOLUMN → (SHOW COLUMN) Problemaren zutabe bat erakutsi
- SOLUTION → Soluzioa erakutsi
- TABLEAU → Uneko taula marraztu
- TITLE → Problemaren izenburua erakutsi edo aldatu

4. Irteera

- DIVERT → Irteera fitxategi batera zuzendu
- RVRT → (ReVeRT) Irteera terminalera zuzendu
- SAVE → Uneko problema fitxategi batean gorde
- SDBC → (Save in Data Base format a Column report) Soluzioa gorde datu-base formatoa erabiliz
- SMPS → (Save MPS) Uneko problema MPS formatoa erabiliz gorde

5. Soluzioa

- GO → Problema ebatzi
- PIVOT → Simplex metodoaren pauso bat eman

6. Problema editatu

- ALTER → Problemako osagaiak aldatzeko
- APPC → (APPend Column) Ereduari zutabe bat gehitu
- DEL → Zehaztutako murrizketa ezabatzeke
- EDIT → Editorean sartu
- EXT → (EXTend) Problemari murrizketak erantsi
- FREE → Aldagaia zeinuz murriztugabea dela esateko
- SLB → (Simple Lower Bound) Aldagai batentzat behe-bornea
- SUB → (Simple Upper Bound) Aldagai batentzat goi-bornea

7. Programa osoak, koadratikoak eta parametrikokoak

- BIP → (Bound IP) Programa osorako bornea finkatu
- GIN → (General INteger) Aldagai osoak zehazteko (0,1 ez direnean)
- INT → 0 edo 1 baliodun aldagai osoak zehazteko
- IPTOL → (IP TOLerance) Soluzio optimorako programa osoaren jasankortasuna finkatu
- PARA → Programazio parametrikoa
- POSD → (POSitive Definiteness) Positibotasuna egiaztatu
- QCP → (QuadratiC Programming) Programazio koadratikoa
- TITAN → (TIghTen AN ip)
- BATCH → Batch moduan exekutatzeko
- PAGE → Orriaren edota pantailaren tamaina finkatzeko
- PAUSE → Teklatu-ekintzaren zain egon
- TERSE → Elkarriketa-modua modu laburrera eraldatu

- VERBOSE → Elkarriketa-modua modu elkarriketatsura eraldatu
- WIDTH → Terminalaren zabalera finkatu

8. Erabiltzailearen azpirrutinak

- USER → Erabiltzailearen azpirrutinari deia

9. Beste zenbait agindu

- BUG → Erroreren batekin topo eginez gero zer egin
- DEBUG → Eredu bideraezina arazten laguntzeko
- INVERT → Uneko oinarriaren alderantzizkoa kalkulatzeko
- SET → Soluzio parametrikokoak finkatu
- STAT → Estatistikak erakutsi
- TITL → Uneko ereduaren izenburua finkatu edo erakutsi

10. Irten

- QUIT → Irten

Aukerak zabalak direla ikusten da. Hala ere, LINDO nola erabiltzen den eta lortzen den irteera zein den ikusteko aurreko adibideak ebatziko ditugu, horretarako agindu sinpleenak besterik erabiliko ez ditugarik.

Ikus ditzagun, ba, paketearen irteerak:

Nahasketen problema

Hasteko, problema ebazteko erabiliko dugun eredu lineala sartzen dugu. Honakoa da.

```

MAX      30 X1A + 32 X2A + 28 X3A + 25 X1B + 27 X2B + 23 X3B
SUBJECT TO
2)      X1A + X1B <=    2000
3)      X2A + X2B <=    3000
4)      X3A + X3B <=    1000
5)      50 X1A - 50 X2A - 50 X3A >=    0
6)      - 30 X1A + 70 X2A - 30 X3A >=    0
7)      30 X1B + 30 X2B - 70 X3B >=    0
END

```

Ereduan esplizituki adierazia ez badago ere, LINDOk aldagaiak ez-negatibotzat hartzen ditu.

LINDOk problema ebatz dezan, GO agindua erabiliko dugu. Horren ondorioz, behar beste iterazio burutuko du, soluzio optimoa lortu arte. Ondoren datorrena, soluzio optimoa lortu ondoren emandako emaitza da. Bertan, soluzio optimoa lortzeko 5 iterazio burutu behar izan duela esaten zaigu. Soluzio optimo horretan helburu-funtzioak hartutako balio optimoa 174.000-koa da.

Azkenik, soluzio optimoa dator. VALUE zutabean problemaren aldagaiek hartutako balio optimoak agertzen dira, eta SLACK OR SURPLUS zutabeetan nasaitze-aldagaien balioak. REDUCED COST zutabekoak taularen $z_j - c_j$ balioak dira eta DUAL PRICES zutabekoak problema dualaren aldagaien balio optimoak.

LP OPTIMUM FOUND AT STEP 5

OBJECTIVE FUNCTION VALUE

1) 174000.00

VARIABLE	VALUE	REDUCED COST
X1A	2000.000000	.000000
X2A	1200.000000	.000000
X3A	800.000000	.000000
X1B	.000000	10.000000
X2B	1800.000000	.000000
X3B	200.000000	.000000

ROW	SLACK OR SURPLUS	DUAL PRICES
2)	.000000	35.000000
3)	.000000	27.000000
4)	.000000	23.000000
5)	.000000	-.100000
6)	.000000	.000000
7)	40000.000000	.000000

Ondoren, LINDOk ea sentikortasun analisia egin nahi dugun galde-tuko digu. Baietz erantzunez gero, honakoa erakutsiko digu.

NO. ITERATIONS= 5

RANGES IN WHICH THE BASIS IS UNCHANGED:

VARIABLE	CURRENT COEF	OBJ COEFFICIENT RANGES	
		ALLOWABLE INCREASE	ALLOWABLE DECREASE
X1A	30.000000	INFINITY	10.000000
X2A	32.000000	.000000	16.666670
X3A	28.000000	INFINITY	.000000
X1B	25.000000	10.000000	INFINITY
X2B	27.000000	16.666670	.000000
X3B	23.000000	.000000	23.000000

ROW	CURRENT RHS	RIGHTHAND SIDE RANGES	
		ALLOWABLE INCREASE	ALLOWABLE DECREASE
2	2000.000000	500.000000	2000.000000
3	3000.000000	INFINITY	1333.333000
4	1000.000000	571.428600	200.000000
5	.000000	50000.000000	14285.710000
6	.000000	40000.000000	20000.000000
7	.000000	40000.000000	INFINITY

Sentikortasun-analisi honetan helburu-funtzioaren koefizienteen aldaketa eta **b** baliabide-bektorearen balioen aldaketa aztertzen dira. Aldi berean balio horietariko bakar bat aldatzen dela suposatu behar da.

OBJ COEFFICIENT RANGES atalean helburu-funtzioaren koefizienteen aldaketa aztertzen da. VARIABLE zutabekoak dira problemaren aldagaiak eta CURRENT COEF zutabekoak une honetako balioak. Gainontzeko bi zutabeek adierazten dute balio hori zenbateraino igo edo jaitsi daitekeen oinarrian eraginik izan gabe. ALLOWABLE INCREASE zutabearen balioa zenbateraino igo daitekeen esaten zaigu, eta ALLOWABLE DECREASE zutabearen zenbateraino jaitsi daitekeen.

RIGHTHAND SIDE RANGES atalean baliabide-bektorearen balioak aztertzen dira. Hemen zutabeek aurreko ataleko esanahi berbera dute, hau da, une honetako balioa eta balio horiek zenbateraino igo edo jaitsi daitezkeen, beti ere, aldaketak banaka-banaka gertatuz gero, noski.

Edozein unetan taulako balio guztiak ikusi nahiko bagenitu, TABLE agindua erabiliko genuke. Orain erabiliz gero, taula optimoa lortuko dugu, oso osorik.

THE TABLEAU

ROW	(BASIS)	X1A	X2A	X3A	X1B	X2B
1	ART	.000	.000	.000	10.000	.000
2	X1A	1.000	.000	.000	1.000	.000
3	X2B	.000	.000	.000	-.600	1.000
4	X3B	.000	.000	.000	-.400	.000
5	X2A	.000	1.000	.000	.600	.000
6	X3A	.000	.000	1.000	.400	.000
7	SLK 7	.000	.000	.000	-20.000	.000

ROW	X3B	SLK 2	SLK 3	SLK 4	SLK 5	SLK 6
1	.000	35.000	27.000	23.000	.100	.000
2	.000	1.000	.000	.000	.000	.000
3	.000	-.600	1.000	.000	-.006	.010
4	1.000	-.400	.000	1.000	-.014	-.010
5	.000	.600	.000	.000	.006	-.010
6	.000	.400	.000	.000	.014	.010
7	.000	10.000	30.000	-70.000	.800	1.000

ROW	SLK 7
1	.00 .17E+06
2	.000 2000.000
3	.000 1800.000
4	.000 200.000
5	.000 1200.000
6	.000 800.000
7	1.000 40000.000

Janeurriaren problema

Ebatz dezagun orain janeurriaren problema. Eredua lineala sartuko dugu lehenik.

```

MIN      14 X1 + 9 X2 + 13 X3 + 16 X4
SUBJECT TO
    2)   2 X1 + X2 + X3 + X4 >=  25
    3)   X1 + 2 X2 + 2 X4 <=  30
    4)   X1 + 2 X2 + 2 X4 >=  25
    5)   X2 + 2 X3 + X4 >=  22
    6)   X1 + 2 X2 + X4 <=  17
END

```

Honakoa da hasierako taula.

THE TABLEAU

ROW	(BASIS)	X1	X2	X3	X4	SLK	2
1	ART	14.000	9.000	13.000	16.000	.000	
2	SLK 2	-2.000	-1.000	-1.000	-1.000	1.000	
3	SLK 3	1.000	2.000	.000	2.000	.000	
4	SLK 4	-1.000	-2.000	.000	-2.000	.000	
5	SLK 5	.000	-1.000	-2.000	-1.000	.000	
6	SLK 6	1.000	2.000	.000	1.000	.000	
ART	6 ART	-3.000	-4.000	-3.000	-4.000	1.000	

ROW	SLK	3	SLK	4	SLK	5	SLK	6
1	.000	.000	.000	.000	.000	.000		
2	.000	.000	.000	.000	.000	-25.000		
3	1.000	.000	.000	.000	.000	30.000		
4	.000	1.000	.000	.000	.000	-25.000		
5	.000	.000	1.000	.000	.000	-22.000		
6	.000	.000	.000	1.000	.000	17.000		
ART	6	.000	1.000	1.000	.000	-72.000		

Beharrezko iterazio guztiak, 4, burutu ondoren, honakoa da lortu-tako soluzio optimoa.

LP OPTIMUM FOUND AT STEP 4

OBJECTIVE FUNCTION VALUE

1) 286.71430

VARIABLE	VALUE	REDUCED COST
X1	4.428571	.000000
X2	2.285714	.000000
X3	5.857143	.000000
X4	8.000000	.000000

ROW	SLACK OR SURPLUS	DUAL PRICES
2)	.000000	-7.285714
3)	5.000000	.000000
4)	.000000	-6.428571
5)	.000000	-2.857143
6)	.000000	7.000000

Ikus dezagun sentikortasun-analisiaren emaitza.

NO. ITERATIONS= 4

RANGES IN WHICH THE BASIS IS UNCHANGED:

VARIABLE	OBJ COEFFICIENT RANGES		
	CURRENT	ALLOWABLE	ALLOWABLE
	COEF	INCREASE	DECREASE
X1	14.000000	10.000000	12.750000
X2	9.000000	7.000000	20.000000
X3	13.000000	22.500000	6.666667
X4	16.000000	INFINITY	6.428571

ROW	RIGHTHAND SIDE RANGES		
	CURRENT	ALLOWABLE	ALLOWABLE
	RHS	INCREASE	DECREASE
2	25.000000	8.000000	7.750000
3	30.000000	INFINITY	5.000000
4	25.000000	5.000000	8.000000
5	22.000000	15.500000	13.666670
6	17.000000	8.000000	2.285714

Azken taula, taula optimoa alegia, hau da.

THE TABLEAU

ROW	(BASIS)	X1	X2	X3	X4	SLK	2
1	ART	.000	.000	.000	.000	7.286	
2	X3	.000	.000	1.000	.000	-.143	
3	SLK 3	.000	.000	.000	.000	.000	
4	X4	.000	.000	.000	1.000	.000	
5	X1	1.000	.000	.000	.000	-.571	
6	X2	.000	1.000	.000	.000	.286	

ROW	SLK	3	SLK	4	SLK	5	SLK	6
1	.000	6.429	2.857	7.000	-286.714			
2	.000	.286	-.429	.000	5.857			
3	1.000	1.000	.000	.000	5.000			
4	.000	-1.000	.000	-1.000	8.000			
5	.000	.143	.286	.000	4.429			
6	.000	.429	-.143	1.000	2.286			

Garraio-problema

Problema honi dagokion eredu lineala hau da.


```

MIN      8 XA1 + 6 XA2 + 10 XA3 + 10 XB1 + 4 XB2 + 9 XB3
SUBJECT TO
    2)    XA1 + XA2 + XA3 <=    2000
    3)    XB1 + XB2 + XB3 <=    2500
    4)    XA1 + XB1 >=     1500
    5)    XA2 + XB2 >=     2000
    6)    XA3 + XB3 >=     1000
END

```

LINDOk lortutako soluzio optimoa honakoa da.

LP OPTIMUM FOUND AT STEP 4

OBJECTIVE FUNCTION VALUE

1) 29500.000

VARIABLE	VALUE	REDUCED COST
XA1	1500.000000	.000000
XA2	.000000	1.000000
XA3	500.000000	.000000
XB1	.000000	3.000000
XB2	2000.000000	.000000
XB3	500.000000	.000000

ROW	SLACK OR SURPLUS	DUAL PRICES
2)	.000000	.000000
3)	.000000	1.000000
4)	.000000	-8.000000
5)	.000000	-5.000000
6)	.000000	-10.000000

Azkenik, sentikortasun-analisiaren emaitza aztertuko dugu.

NO. ITERATIONS= 4

RANGES IN WHICH THE BASIS IS UNCHANGED:

VARIABLE	CURRENT COEF	OBJ COEFFICIENT RANGES	
		ALLOWABLE INCREASE	ALLOWABLE DECREASE
XA1	8.000000	3.000000	8.000000
XA2	6.000000	INFINITY	1.000000
XA3	10.000000	1.000000	1.000000
XB1	10.000000	INFINITY	3.000000
XB2	4.000000	1.000000	5.000000
XB3	9.000000	1.000000	1.000000

ROW	CURRENT RHS	RIGHTHAND SIDE RANGES	
		ALLOWABLE INCREASE	ALLOWABLE DECREASE
2	2000.000000	INFINITY	.000000
3	2500.000000	500.000000	.000000
4	1500.000000	.000000	1500.000000
5	2000.000000	.000000	500.000000
6	1000.000000	.000000	500.000000

8.3.2 Sentikortasun-analisisa

Aurreko adibideetan ikusi bezala, LINDOk problema lineal bat ebazten duen bakoitzean sentikortasun-analisisa egin nahi al duzun galdetzen du. Hala ere, sentikortasun-analisi hori nahiko mugaturik dago, aldi berean koefiziente bakar bat aldatzen deneko kasua besterik ez baitu aztertzen.

Guri zenbaitetan koefiziente bat baino gehiago aldi berean aldatzen direnako kasua aztertzea interesatuko zaigu. Horrelakoetan beste modu batera egin beharko dugu aipatutako analisisa.

Oraingoan ere iterazio-kopuru handia aurreztuko dugu, problema ez dugulako hasieratik ebatziko. Ebatzitako problemaren soluzio optimoa LINDOren SDBC aginduaren bidez gordeko dugu. Honek datu-base moduko fitxategia sortzen du, eta RDBC aginduaren bidez gordetako soluzioa jaso ahal izango dugu. Soluzio honetatik abiatuko gara, eta egin beharreko aldaketa egin ondoren problema ebatziko dugu.

Adibide baten bidez aldaketa posible guztien sentikortasun-analisisa egingo dugu. Adibidea txikia izateagatik ez da hain garbi ikusten iterazio-kopuru handia aurrezten dela, baina pentsa praktikan problemek aldagai-kopuru handia eta murrizketa-kopuru handia izaten dutela.

Hasteko problema lineal bat ebatziko dugu, eta aldaketa guztiak problema honi egingo dizkiogu.

```

MAX      4 X1 + 7 X2 + 4 X3 + 8 X4
SUBJECT TO
    2)    2 X1 + 2 X2 + X3 + X4 <=  4
    3)    2 X1 + X2 + X3 + X4 >=  2
    4)    X1 + 3 X2 + X3 + 3 X4 <=  9
END

```

LINDOri GO aginduaren bidez eredua ebazteko esango diogu. Honakoa da lortzen duen soluzio optimoa.

LP OPTIMUM FOUND AT STEP 5

OBJECTIVE FUNCTION VALUE

1) 31.000000

VARIABLE	VALUE	REDUCED COST
X1	.000000	2.000000
X2	.000000	3.000000
X3	1.500000	.000000
X4	2.500000	.000000

ROW	SLACK OR SURPLUS	DUAL PRICES
2)	.000000	2.000000
3)	2.000000	.000000
4)	.000000	2.000000

NO. ITERATIONS= 5

RANGES IN WHICH THE BASIS IS UNCHANGED:

VARIABLE	OBJ COEFFICIENT RANGES		
	CURRENT COEF	ALLOWABLE INCREASE	ALLOWABLE DECREASE
X1	4.000000	2.000000	INFINITY
X2	7.000000	3.000000	INFINITY
X3	4.000000	4.000000	.800000
X4	8.000000	4.000000	4.000000

ROW	RIGHTHAND SIDE RANGES		
	CURRENT RHS	ALLOWABLE INCREASE	ALLOWABLE DECREASE
2	4.000000	5.000000	1.000000
3	2.000000	2.000000	INFINITY
4	9.000000	3.000000	5.000000

Demagun orain baliabide-bektorean aldaketak gertatu direla. Aldaketa gertatu ondoren problemak izango duen soluzio optimoa jakin nahi dugu. Hori jakiteko modurik azkarrena, aldaketa gertatu aurreko soluzio optimoa berreskuratu eta LINDOri aldaketen berri ematea da. Aurreko soluzio optimoa jasotzeko RDBC agindua erabiliko dugu. Aldaketak sartu eta LOOK ALL aginduaren bidez eredua ikusiko dugu.

```

MAX      4 X1 + 7 X2 + 4 X3 + 8 X4
SUBJECT TO
    2)   2 X1 + 2 X2 + X3 + X4 <=   7
    3)   2 X1 + X2 + X3 + X4 >=   2
    4)   X1 + 3 X2 + X3 + 3 X4 <=   8
END

```

GO aginduaren bidez eredu ebatziko dugu. Begira, iterazio bat besterik ez duela behar izan soluzio optimoa lortzeko.

LP OPTIMUM FOUND AT STEP 1

OBJECTIVE FUNCTION VALUE

1) 35.000000

VARIABLE	VALUE	REDUCED COST
X1	.000000	2.000000
X2	.000000	3.000000
X3	6.500000	.000000
X4	.500000	.000000

ROW	SLACK OR SURPLUS	DUAL PRICES
2)	.000000	2.000000
3)	5.000000	.000000
4)	.000000	2.000000

NO. ITERATIONS= 1

RANGES IN WHICH THE BASIS IS UNCHANGED:

VARIABLE	CURRENT COEF	OBJ COEFFICIENT RANGES	
		ALLOWABLE INCREASE	ALLOWABLE DECREASE
X1	4.000000	2.000000	INFINITY
X2	7.000000	3.000000	INFINITY
X3	4.000000	4.000000	.800000
X4	8.000000	4.000000	4.000000

ROW	CURRENT RHS	RIGHTHAND SIDE RANGES	
		ALLOWABLE INCREASE	ALLOWABLE DECREASE
2	7.000000	1.000000	4.333333
3	2.000000	5.000000	INFINITY
4	8.000000	13.000000	1.000000

Baliabide-bektorean beste aldaketa bat gertatu dela eman dezagun. Honela gelditu zaigu eredu lineala.

```

MAX      4 X1 + 7 X2 + 4 X3 + 8 X4
SUBJECT TO
      2)  2 X1 + 2 X2 + X3 + X4 <=   3
      3)  2 X1 + X2 + X3 + X4 >=   2
      4)  X1 + 3 X2 + X3 + 3 X4 <=   7
END

```

Aldaketaren ondorioz ez da bideragarritasunik galdu, eta oinarriak optimo izaten jarraitzen du. Azken taula nola gelditu den jakin nahi izanez gero, TABLE agindua erabiliko genuke.

Burututako iterazio-kopurua zero da. Soluzio optimoa hau da.

```

LP OPTIMUM FOUND AT STEP      0

      OBJECTIVE FUNCTION VALUE

      1)      25.000000

      VARIABLE                VALUE                REDUCED COST
      X1                      .000000                2.000000
      X2                      .000000                3.000000
      X3                      1.000000                .000000
      X4                      2.000000                .000000

      ROW    SLACK OR SURPLUS    DUAL PRICES
      2)      .000000            2.000000
      3)      1.000000            .000000
      4)      .000000            2.000000

      NO. ITERATIONS=          0

      RANGES IN WHICH THE BASIS IS UNCHANGED:

      OBJ COEFFICIENT RANGES
      VARIABLE    CURRENT    ALLOWABLE    ALLOWABLE
                   COEF      INCREASE      DECREASE
      X1          4.000000    2.000000    INFINITY
      X2          7.000000    3.000000    INFINITY
      X3          4.000000    4.000000    .800000
      X4          8.000000    4.000000    4.000000

```

ROW	RIGHTHAND SIDE RANGES		
	CURRENT RHS	ALLOWABLE INCREASE	ALLOWABLE DECREASE
2	3.000000	4.000000	.666667
3	2.000000	1.000000	INFINITY
4	7.000000	2.000000	4.000000

Orain, ereduaren kostu-bektorean gertatutako aldaketen sentikortasun-analisia egingo dugu.

```

MAX      3 X1 + 6 X2 + 3 X3 + 5 X4
SUBJECT TO
    2)   2 X1 + 2 X2 + X3 + X4 <=   4
    3)   2 X1 + X2 + X3 + X4 >=   2
    4)   X1 + 3 X2 + X3 + 3 X4 <=   9
END

```

Iteraziorik burutu gabe lortzen da soluzio optimoa.

LP OPTIMUM FOUND AT STEP 0

OBJECTIVE FUNCTION VALUE

1) 22.000000

VARIABLE	VALUE	REDUCED COST
X1	.000000	2.000000
X2	.000000	1.000000
X3	1.500000	.000000
X4	2.500000	.000000

ROW	SLACK OR SURPLUS	DUAL PRICES
2)	.000000	2.000000
3)	2.000000	.000000
4)	.000000	1.000000

Kostu-bektorean gertatutako honako aldaketak eragindakoak azter ditzagun.

```

MAX      6 X1 + 6 X2 + 6 X3 + 4 X4
SUBJECT TO
    2)   2 X1 + 2X2 + X3 + X4 <=   4
    3)   2 X1 + X2 + X3 + X4 >=   2
    4)   X1 + 3 X2 + X3 + 3 X4 <=   9
END

```

Honakoa da lortzen den soluzio optimoa.

```

LP OPTIMUM FOUND AT STEP      1

      OBJECTIVE FUNCTION VALUE

    1)      29.000000

      VARIABLE            VALUE            REDUCED COST
      X1              .000000             6.000000
      X2              .000000             6.000000
      X3              4.000000             .000000
      X4              .000000             2.000000

      ROW  SLACK OR SURPLUS      DUAL PRICES
      2)           .000000             6.000000
      3)           2.000000             .000000
      4)           5.000000             .000000

NO. ITERATIONS=          1

RANGES IN WHICH THE BASIS IS UNCHANGED:

      OBJ COEFFICIENT RANGES
      VARIABLE            CURRENT      ALLOWABLE      ALLOWABLE
                        COEF      INCREASE      DECREASE
      X1              6.000000      6.000000      INFINITY
      X2              6.000000      6.000000      INFINITY
      X3              6.000000      INFINITY      2.000000
      X4              4.000000      2.000000      INFINITY

      Righthand Side Ranges
      ROW            CURRENT      ALLOWABLE      ALLOWABLE
                        RHS      INCREASE      DECREASE
      2              4.000000      5.000000      2.000000
      3              2.000000      2.000000      INFINITY
      4              9.000000      INFINITY      5.000000

```

Hasierako ereduari murrizketa bat erantsi nahi badiogu, LINDOren EXT agindua erabiliko dugu. Murrizketa berria gehituta, hau da eredu lineala.

```

MAX      4 X1 + 7 X2 + 4 X3 + 8 X4
SUBJECT TO
    2)    2 X1 + 2 X2 + X3 + X4 <=  4
    3)    2 X1 + X2 + X3 + X4 >=  2
    4)    X1 + 3 X2 + X3 + 3 X4 <=  9
    5)    4 X1 + X2 + 2 X3 + X4 <=  6
END

```

TABLE aginduaren bidez taula ikus dezakegu.

THE TABLEAU

ROW	(BASIS)	X1	X2	X3	X4	SLK	2
1	ART	2.000	3.000	.000	.000	2.000	
2	X3	2.500	1.500	1.000	.000	1.500	
3	SLK 3	.000	1.000	.000	.000	1.000	
4	X4	-.500	.500	.000	1.000	-.500	
5	SLK 5	-.500	-2.500	.000	.000	-2.500	
ART	5 ART	2.000	3.000	.000	.000	2.000	

ROW	SLK	3	SLK	4	SLK	5
1	.000	2.000	.000	31.000		
2	.000	-.500	.000	1.500		
3	1.000	.000	.000	2.000		
4	.000	.500	.000	2.500		
5	.000	.500	1.000	.500		

Taula horren azken zutabeak aldagaien soluzio optimoa eta helburu-funtzioaren balio optimoa ematen ditu, eta ikus daitekeenez, aldagaiek balio positiboak hartzen dituzte. Beraz, ez da bideragarritasun primala galdu, eta soluzio berria lortzeko ez dugu iteraziorik burutu beharko.

LP OPTIMUM FOUND AT STEP 0

OBJECTIVE FUNCTION VALUE

1) 31.000000

VARIABLE	VALUE	REDUCED COST
X1	.000000	2.000000
X2	.000000	3.000000
X3	1.500000	.000000
X4	2.500000	.000000

ROW	SLACK OR SURPLUS	DUAL PRICES
2)	.000000	2.000000
3)	2.000000	.000000
4)	.000000	2.000000
5)	.500000	.000000

NO. ITERATIONS= 0

RANGES IN WHICH THE BASIS IS UNCHANGED:

VARIABLE	OBJ COEFFICIENT RANGES		
	CURRENT COEF	ALLOWABLE INCREASE	ALLOWABLE DECREASE
X1	4.000000	2.000000	INFINITY
X2	7.000000	3.000000	INFINITY
X3	4.000000	4.000000	.800000
X4	8.000000	4.000000	4.000000

ROW	RIGHTHAND SIDE RANGES		
	CURRENT RHS	ALLOWABLE INCREASE	ALLOWABLE DECREASE
2	4.000000	.200000	1.000000
3	2.000000	2.000000	INFINITY
4	9.000000	3.000000	1.000000
5	6.000000	INFINITY	.500000

Beste murrizketa desberdin bat erantsiko diogu ereduari.

```

MAX      4 X1 + 7 X2 + 4 X3 + 8 X4
SUBJECT TO
    2)    2 X1 + 2 X2 + X3 + X4 <=  4
    3)    2 X1 + X2 + X3 + X4 >=  2
    4)    X1 + 3 X2 + X3 + 3 X4 <=  9
    5)    2 X1 + X2 + X3 + 2 X4 <=  5
END

```

Hasierako taula ondoren datorrena da. Bideragarritasun primala galdu da, azken zutabea -1.5 balioek adierazi bezala.

THE TABLEAU							
ROW	(BASIS)	X1	X2	X3	X4	SLK	2
1	ART	2.000	3.000	.000	.000		2.000
2	X3	2.500	1.500	1.000	.000		1.500
3	SLK 3	.000	1.000	.000	.000		1.000
4	X4	-.500	.500	.000	1.000		-.500
5	ART	.500	-1.500	.000	.000		-.500
ART	5 ART	.500	-1.500	.000	.000		-.500

ROW	SLK	3	SLK	4	SLK	5
1	.000	2.000	.000	31.000		
2	.000	-.500	.000	1.500		
3	1.000	.000	.000	2.000		
4	.000	.500	.000	2.500		
5	.000	-.500	1.000	-1.500		
ART	5	.000	-.500	1.000	-1.500	

Iterazioak burutuz,

LP OPTIMUM FOUND AT STEP 3

OBJECTIVE FUNCTION VALUE

1) 28.000000

VARIABLE	VALUE	REDUCED COST
X1	.000000	3.000000
X2	1.000000	.000000
X3	.000000	.000000
X4	2.000000	.000000

ROW	SLACK OR SURPLUS	DUAL PRICES
2)	.000000	1.000000
3)	1.000000	.000000
4)	.000000	1.000000
5)	.000000	2.000000

NO. ITERATIONS= 3

RANGES IN WHICH THE BASIS IS UNCHANGED:

VARIABLE	CURRENT COEF	OBJ COEFFICIENT RANGES	
		ALLOWABLE INCREASE	ALLOWABLE DECREASE
X1	4.000000	3.000000	INFINITY
X2	7.000000	3.000000	3.000000
X3	4.000000	1.000000	1.000000
X4	8.000000	1.500000	3.000000

ROW	CURRENT RHS	RIGHTHAND SIDE RANGES	
		ALLOWABLE INCREASE	ALLOWABLE DECREASE
2	4.000000	3.000000	.000000
3	2.000000	1.000000	INFINITY
4	9.000000	.000000	3.000000
5	5.000000	1.500000	.000000

Oraingoan aldagai berri bat erantsiko diogu ereduari. Hori APPC aginduari esker lortuko dugu.

```

MAX      4 X1 + 7 X2 + 4 X3 + 8 X4 + 6 X5
SUBJECT TO
    2)    2 X1 + 2 X2 + X3 + X4 + 2 X5 <= 4
    3)    2 X1 + X2 + X3 + X4 + 2 X5 >= 2
    4)    X1 + 3 X2 + X3 + 3 X4 + 2 X5 <= 9
END

```

Aldagai berria erantsi ondorengo ereduaren hasierako taula honakoa da.

THE TABLEAU

ROW	(BASIS)	X1	X2	X3	X4	X5
1	ART	2.000	3.000	.000	.000	2.000
2	X3	2.500	1.500	1.000	.000	2.000
3	SLK 3	.000	1.000	.000	.000	.000
4	X4	-.500	.500	.000	1.000	.000
ART 4	ART	2.000	3.000	.000	.000	2.000

ROW	SLK	2	SLK	3	SLK	4
1	2.000		.000	2.000	31.000	
2	1.500		.000	-.500	1.500	
3	1.000		1.000	.000	2.000	
4	-.500		.000	.500	2.500	

Soluzio optimoa iteraziorik burutu gabe lortzen da. Aurreko taulan ere ikus zitekeen x_5 aldagaia gehitzeak ez duela bideragarritasun dualaren gain eraginik izan.

LP OPTIMUM FOUND AT STEP 0

OBJECTIVE FUNCTION VALUE

1) 31.000000

VARIABLE	VALUE	REDUCED COST
X1	.000000	2.000000
X2	.000000	3.000000
X3	1.500000	.000000
X4	2.500000	.000000
X5	.000000	2.000000

ROW	SLACK OR SURPLUS	DUAL PRICES
2)	.000000	2.000000
3)	2.000000	.000000
4)	.000000	2.000000

NO. ITERATIONS= 0

RANGES IN WHICH THE BASIS IS UNCHANGED:

VARIABLE	OBJ COEFFICIENT RANGES		
	CURRENT COEF	ALLOWABLE INCREASE	ALLOWABLE DECREASE
X1	4.000000	2.000000	INFINITY
X2	7.000000	3.000000	INFINITY
X3	4.000000	4.000000	.800000
X4	8.000000	4.000000	4.000000
X5	6.000000	2.000000	INFINITY

ROW	RIGHTHAND SIDE RANGES		
	CURRENT RHS	ALLOWABLE INCREASE	ALLOWABLE DECREASE
2	4.000000	5.000000	1.000000
3	2.000000	2.000000	INFINITY
4	9.000000	3.000000	5.000000

Ea beste aldagai hau gehituz gero zer gertatzen den.

```

MAX      4 X1 + 7 X2 + 4 X3 + 8 X4 + 10 X5
SUBJECT TO
    2)   2 X1 + 2 X2 + X3 + X4 + X5 <=  4
    3)   2 X1 + X2 + X3 + X4 + 2 X5 >=  2
    4)   X1 + 3 X2 + X3 + 3 X4 + X5 <=  9
END

```

Hasierako taula.

THE TABLEAU						
ROW	(BASIS)	X1	X2	X3	X4	X5
1	ART	2.000	3.000	.000	.000	-6.000
2	X3	2.500	1.500	1.000	.000	1.000
3	SLK 3	.000	1.000	.000	.000	-1.000
4	X4	-.500	.500	.000	1.000	.000
ART	4 ART	2.000	3.000	.000	.000	-6.000

ROW	SLK	2	SLK	3	SLK	4
1	2.000	.000	2.000	31.000		
2	1.500	.000	-.500	1.500		
3	1.000	1.000	.000	2.000		
4	-.500	.000	.500	2.500		

Oraingoan $z_5 - c_5 = -6 < 0$ negatibo egin zaigu. Aurreko taula ez da optimo.

LP OPTIMUM FOUND AT STEP 2

OBJECTIVE FUNCTION VALUE

1) 45.000000

VARIABLE	VALUE	REDUCED COST
X1	.000000	16.000000
X2	.000000	13.000000
X3	.000000	6.000000
X4	.000000	2.000000
X5	4.000000	.000000

ROW	SLACK OR SURPLUS	DUAL PRICES
2)	.000000	10.000000
3)	6.000000	.000000
4)	5.000000	.000000

NO. ITERATIONS= 2

RANGES IN WHICH THE BASIS IS UNCHANGED:

VARIABLE	CURRENT COEF	OBJ COEFFICIENT RANGES	
		ALLOWABLE INCREASE	ALLOWABLE DECREASE
X1	4.000000	16.000000	INFINITY
X2	7.000000	13.000000	INFINITY
X3	4.000000	6.000000	INFINITY
X4	8.000000	2.000000	INFINITY
X5	10.000000	INFINITY	2.000000

ROW	CURRENT RHS	RIGHTHAND SIDE RANGES	
		ALLOWABLE INCREASE	ALLOWABLE DECREASE
2	4.000000	5.000000	3.000000
3	2.000000	6.000000	INFINITY
4	9.000000	INFINITY	5.000000

Amaitzeko, koefiziente-teknologikoen matrizean gertatutako aldaketak aztertuko ditugu. Oinarriko ez den x_2 aldagaiaren koefizienteak aldatu direla suposatuko dugu. Aldi berean, helburu-funtzioan x_2 -ri dagokion koefizientea ere aldatu dela suposatuko dugu.

```

MAX      4 X1 + 9 X2 + 4 X3 + 8 X4
SUBJECT TO
    2)    2 X1 + X2 + X3 + X4 <=  4
    3)    2 X1 + 2 X2 + X3 + X4 >=  2
    4)    X1 + X2 + X3 + 3 X4 <=  9
END

```

Hasierako taula honakoa da.

THE TABLEAU

ROW	(BASIS)	X1	X2	X3	X4	SLK	2
1	ART	2.000	-5.000	.000	.000		2.000
2	X3	2.500	1.000	1.000	.000		1.500
3	SLK 3	.000	-1.000	.000	.000		1.000
4	X4	-.500	.000	.000	1.000		-.500
ART	4 ART	2.000	-5.000	.000	.000		2.000

ROW	SLK	3	SLK	4
1	.000	2.000		31.000
2	.000	-.500		1.500
3	1.000	.000		2.000
4	.000	.500		2.500

Soluzio optimoa.

LP OPTIMUM FOUND AT STEP 2

OBJECTIVE FUNCTION VALUE

1) 41.000000

VARIABLE	VALUE	REDUCED COST
X1	.000000	14.000000
X2	4.000000	.000000
X3	.000000	5.000000
X4	.000000	1.000000

ROW	SLACK OR SURPLUS	DUAL PRICES
2)	.000000	9.000000
3)	6.000000	.000000
4)	5.000000	.000000

NO. ITERATIONS= 2

RANGES IN WHICH THE BASIS IS UNCHANGED:

VARIABLE	CURRENT COEF	OBJ COEFFICIENT RANGES	
		ALLOWABLE INCREASE	ALLOWABLE DECREASE
X1	4.000000	14.000000	INFINITY
X2	9.000000	INFINITY	1.000000
X3	4.000000	5.000000	INFINITY
X4	8.000000	1.000000	INFINITY

ROW	CURRENT RHS	RIGHTHAND SIDE RANGES	
		ALLOWABLE INCREASE	ALLOWABLE DECREASE
2	4.000000	5.000000	3.000000
3	2.000000	6.000000	INFINITY
4	9.000000	INFINITY	5.000000

Bada sarreran aipatu eta gero komentatu ez dugun beste zenbait agindu interesgarri. Problemaren formulazioa gordetzeko, adibidez, SAVE agindua erabiltzen da, eta formulazioa aldatzeko ALTER agindua.

Bestalde, esan beharra dago, LINDOren bidez ebatz daitezkeela beste motatako problemak ere, halanola problema osoak, koadratikoak eta parametrikoak.

9. Gaia

SOLUZIOAK

2 EREDU LINEALAK ETA SOLUZIO GRAFIKOA

- 2.1(a) i. x_j : j lantegiak garbitu behar duen hondakinen tonakopurua, $j = 1, 2, 3$

$$\min z = 20.000x_1 + 15.000x_2 + 35.000x_3$$

$$0.5x_1 + 0.1x_2 + 0.3x_3 \geq 40$$

$$0.2x_1 + 0.1x_2 + 0.15x_3 \geq 40$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, 3$$

- (a) ii.

$$\max z = 0.5x_1 + 0.1x_2 + 0.3x_3$$

$$+0.2x_1 + 0.1x_2 + 0.15x_3$$

$$20.000x_1 + 15.000x_2 + 35.000x_3 \leq 5.000.000$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, 3$$

- (b) x_j = erosi behar den j produktuaren unitate-kopurua, $j = A, B, C, D, E$.

Helburu-funtzioa:

$$\max z = \text{Salmenta prezioa} - \text{Eroste prezioa}$$

$$\text{Salmenta prezioa} = 100x_A + 150x_B + 140x_C + 280x_D + 50x_E$$

$$\text{Eroste prezioa} = 54x_A + 90x_B + 81x_C + 180x_D + 27x_E + 48.750$$

Murrizketak:

$$1000 \leq x_A \leq 2000$$

$$800 \leq x_B \leq 1600$$

$$750 \leq x_C \leq 1500$$

$$1100 \leq x_D \leq 2200$$

$$2000 \leq x_E \leq 4000$$

$$5x_A + 6x_B + 8x_C + 3x_D + 10x_E \leq 60.000$$

$$54x_A + 90x_B + 81x_C + 180x_D + 27x_E \leq 651.250$$

$$x_j \geq 0, \quad j = A, B, C, D, E$$

- (c)
- x_j : j hiruhilabetearen ohizko ekoizpenean eraiki behar duen txalupa-kopurua, $j = 1, 2, 3, 4$.
 - y_j : j hiruhilabetearen ekoizpen-gehigarrian eraiki behar duen txalupa-kopurua, $j = 1, 2, 3, 4$.
 - a_j : j hiruhilabetearen bukaeran biltegian dagoen txalupa-kopurua, $j = 1, 2, 3, 4$.
 - d_j : j hiruhilabetearen eskaera, $j = 1, 2, 3, 4$. d_j ezaguna da epe bakoitzean.
 $d_1 = 40, d_2 = 60, d_3 = 75, d_4 = 25$.

$$\begin{aligned} \min z = & 40.000(x_1 + x_2 + x_3 + x_4) \\ & + 45.000(y_1 + y_2 + y_3 + y_4) \\ & + 2.000(a_1 + a_2 + a_3 + a_4) \end{aligned}$$

$$a_1 = 10 + x_1 + y_1 - 40$$

$$a_2 = a_1 + x_2 + y_2 - 60$$

$$a_3 = a_2 + x_3 + y_3 - 75$$

$$a_4 = a_3 + x_4 + y_4 - 25$$

$$x_1 \leq 40, x_2 \leq 40, x_3 \leq 40, x_4 \leq 40$$

$$a_j \geq 0 \quad j = 1 \dots 4$$

$$x_j \geq 0 \quad j = 1 \dots 4$$

$$y_j \geq 0 \quad j = 1 \dots 4$$

- (d)
- x_1 : Saltzen den Brute lurrinaren gramo-kopurua.
 - x_2 : Saltzen den luxuzko Brute lurrinaren gramo-kopurua.
 - x_3 : Saltzen den Chanelle lurrinaren gramo-kopurua.
 - x_4 : Saltzen den luxuzko Chanelle lurrinaren gramo-kopurua.
 - x_5 : Lehengaiaren kilo-kopurua.

$$\max z = 25x_1 + 60x_2 + 20x_3 + 50x_4 - 12(x_2 + x_4) - 600x_5$$

$$x_5 \leq 2.000$$

$$x_2 + 0.5x_4 + x_5 \leq 4.000$$

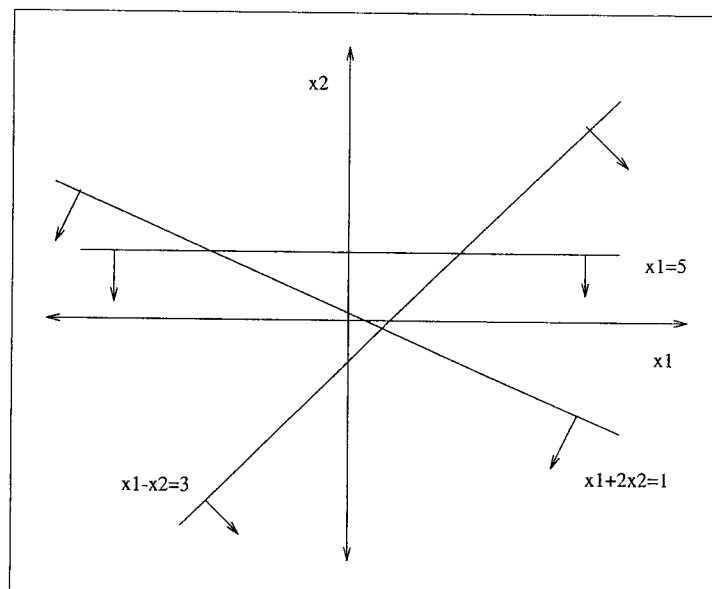
$$x_1 + x_2 - 200x_5 = 0$$

$$x_3 + x_4 - 250x_5 = 0$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1 \dots 5$$

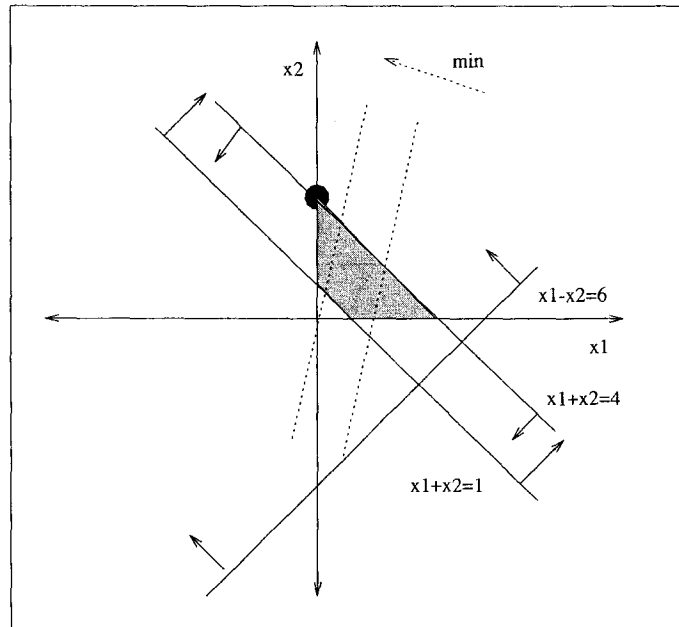
2.2 Soluzio grafikoak:

(a) Problemak ez du soluziorik.



(b) Soluzioa:

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 4, \quad z = -4$$

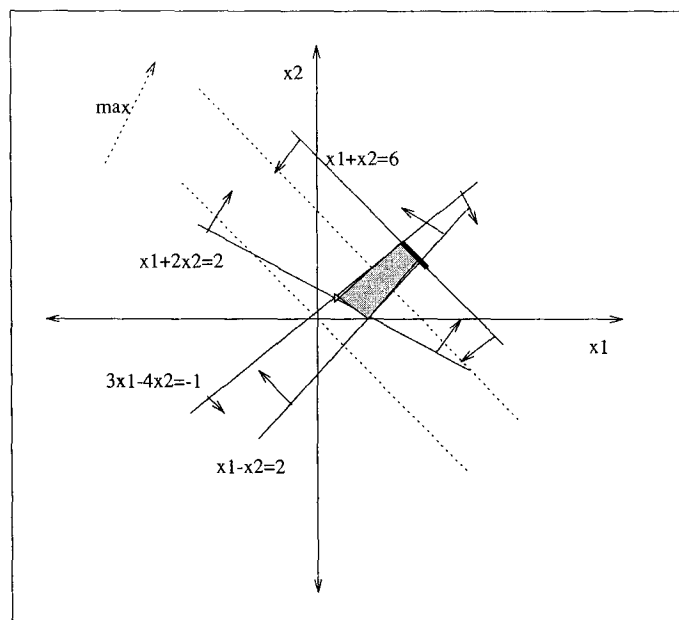


(c) Soluzioa:

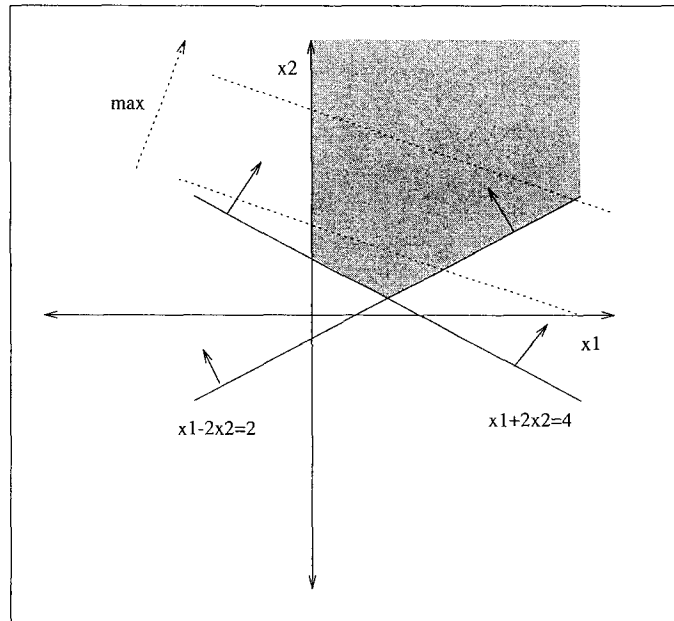
$$x_1 = 3,285, \quad x_2 = 2,7142, \quad z = 6$$

Soluzio anizkoitzak daude.

$$x_1 = 4, \quad x_2 = 2, \quad z = 6$$



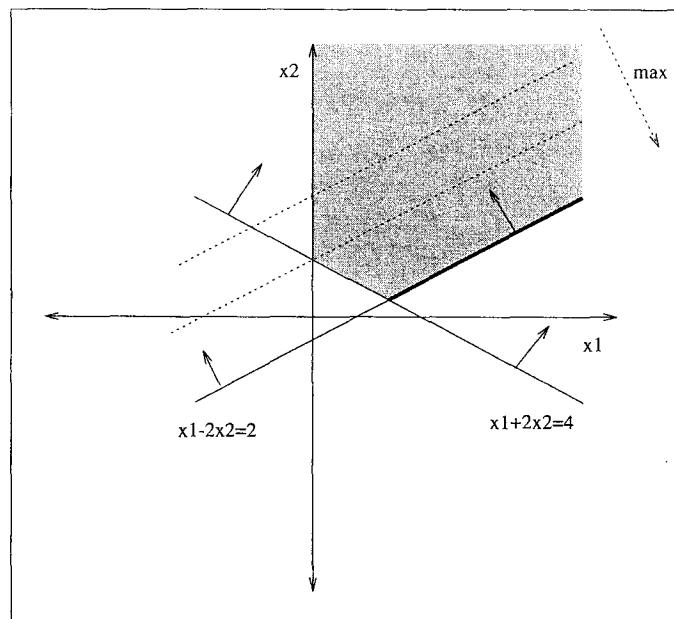
(d) Soluzio bornegabea.



(e) Soluzioa:

$$x_1 = 3, \quad x_2 = \frac{1}{2}, \quad z = 2$$

Puntu hori eta irudian azpimarraturik agertzen den zuzeneko puntuak dira soluzio. Beraz, infinitu soluzio dago.



3 ALGEBRA LINEALA ETA MULTZO GANBILAK

3.1. Alderantzizkoa:

$$A^{-1} = \frac{1}{19} \begin{pmatrix} 7 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ -1 & \frac{5}{2} & \frac{11}{2} \\ -5 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

3.2. Heina=2

3.3. Bai.

3.4. Oinarriko soluzioak: Hiru oinarri posible dago:

$$B_1 = \{\bar{a}_1, \bar{a}_2\}, \quad B_2 = \{\bar{a}_1, \bar{a}_3\}, \quad B_3 = \{\bar{a}_2, \bar{a}_3\}$$

Oinarri horietariko bakoitzean lortzen den soluzioa:

$$B_1 \text{ oinarrian: } x_1 = \frac{17}{8}, \quad x_2 = \frac{1}{4}, \quad x_3 = 0$$

$$B_2 \text{ oinarrian: } x_1 = \frac{7}{3}, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = \frac{1}{3}$$

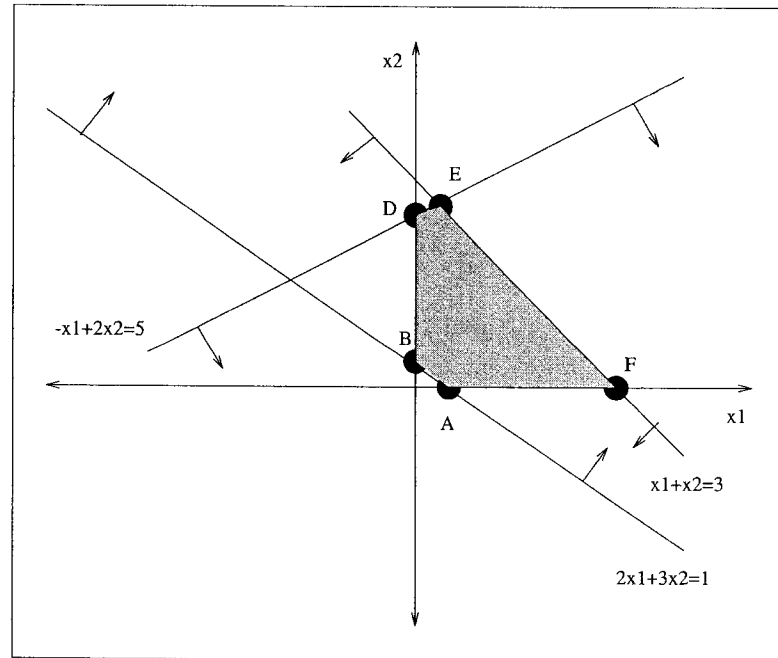
$$B_3 \text{ oinarrian: } x_1 = 0, \quad x_2 = \frac{14}{5}, \quad x_3 = \frac{17}{5}$$

3.5. Konbinazio lineal ganbil orokortuen multzoa:

$$\{(x, y, z) / x = \lambda_1 - \lambda_2 + 2\lambda_3, \quad y = 3\lambda_1 + 2\lambda_2 - \lambda_3$$

$$z = 5\lambda_1 - \lambda_2 + 3\lambda_3, \quad 0 \leq \lambda_i \leq 1 \quad \forall i = 1, 2, 3 \quad \text{eta} \quad \sum_{i=1}^3 \lambda_i = 1\}$$

3.6. (a) Soluzio grafikoa:



(b) Mutur-puntuak:

$$A = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{5}{2} \end{pmatrix}$$

$$E = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{8}{3} \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

4 PROGRAMAZIO LINEALA: SIMPLEX METODOA

4.1. $x_1 = 0, \quad x_2 = 6, \quad z = 12$

4.2. Soluzio bornegabea du problemak.

4.3. (a)

$$\max z = x_1 + 2x_2$$

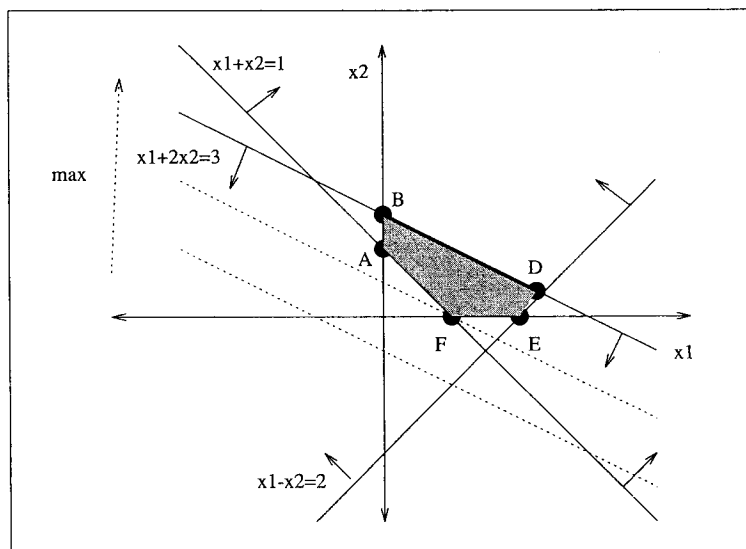
$$x_1 + 2x_2 + x_3 = 3$$

$$x_1 + x_2 - x_4 = 1$$

$$x_1 - x_2 + x_5 = 2$$

$$x_1 \dots x_5 \geq 0$$

(b) Soluzio grafikoa:



Mutur-puntuak:

$$A = (0, 1), \quad B = (0, \frac{3}{2}), \quad D = (\frac{7}{3}, \frac{1}{3})$$

$$E = (2, 0), \quad F = (1, 0)$$

(c) Soluzio optimoa:

$$x_1 = 0, \quad x_2 = \frac{3}{2}, \quad z = 3$$

Soluzio anizkoitzak daude.

$$x_1 = \frac{7}{3}, \quad x_2 = \frac{1}{3}, \quad z = 3$$

(d) $x_1 = 0, \quad x_2 = \frac{3}{2}, \quad z = 3$ soluzioa grafikoko B puntuari dagokio, eta $x_1 = \frac{7}{3}, \quad x_2 = \frac{1}{3}, \quad z = 3$ soluzioa grafikoko D puntuari.

4.4. $x_1 = 1, \quad x_2 = 5, \quad z = 6$

4.5. Zigortze-metodoa erabiliz.

(a) $x_1 = -1, \quad x_2 = 5, \quad x_3 = 0, \quad z = -13$. Soluzioa bakarra da.

(b) Soluzio ezbornatua.

(c) Ez dago soluziorik.

4.6. Bi faseetako metodoa erabiliz.

(a) $x_1 = \frac{178}{85}, \quad x_2 = \frac{40}{17}, \quad z = \frac{2068}{17}$

(b) Soluzio anizkoitza daude.

- $x_1 = 0, \quad x_2 = 2, \quad x_3 = 0, \quad z = -12$

- $x_1 = 0, \quad x_2 = x_3 = 1, \quad z = -12$

4.7. (a) Eredu lineala:

$$\max z = 14x_1 + 10x_2 + 8x_3$$

$$4x_1 + 3x_2 + 3x_3 \leq 100$$

$$x_1 + x_2 + \frac{1}{2}x_3 \leq 75$$

$$\frac{1}{4}x_1 + \frac{1}{4}x_2 + \frac{1}{5}x_3 \leq 150$$

$$x_1 - x_2 + x_3 = 0$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

(b) $x_1 = 14.28571, \quad x_2 = 14.28571, \quad x_3 = 0, \quad z = 342.8571$

5 DUALITASUNA

5.1. (a) Duala:

$$\min z = 2y_1 - 4y_2 + 2y_3$$

$$2y_1 + y_2 + 2y_3 \geq 3$$

$$-y_1 + 4y_2 + y_3 \geq 5$$

$$-y_1 - 3y_2 + 2y_3 \geq -4$$

$$y_1 \geq 0, y_2 \leq 0$$

$$y_3 : \text{ez-murritzua}$$

(b)

$$\max z = 5y_1 + 6y_2$$

$$y_1 + 2y_2 = -1$$

$$-2y_1 - 3y_2 \leq -1$$

$$y_1 + 2y_2 \geq 2$$

$$y_1 : \text{murritzugabea}$$

$$y_2 \leq 0$$

(c)

$$\min z = 2y_1 + 6y_2$$

$$y_1 + 2y_2 \leq 1$$

$$5y_1 - y_2 \geq -2$$

$$-y_1 + 4y_2 = 1$$

$$y_1, y_2 \geq 0$$

5.2. (a) Primala: $x_1 = x_3 = 0$, $x_2 = 2$, $z = 10$ Duala: $y_1 = y_2 = 0$, $y_3 = 5$, $G = 10$ (b) Dualaren behe-bornea bat: $z = 3$ Primalaren goi-bornea bat: $G = 10$

5.3. Soluzio anizkoitzak daude.

$$x_1 = 0 \text{ , } x_2 = \frac{3}{7} \text{ , } x_3 = \frac{29}{4} \text{ , } z = -\frac{5}{2}$$

$$x_1 = x_2 = 0, \quad x_3 = \frac{5}{2}, \quad z = -\frac{5}{2}$$

5.4. (a) Duala:

$$\begin{aligned} \min G &= 5y_1 + 2y_2 + 3y_3 + 2y_4 + 7y_5 \\ y_1 + 2y_2 - y_3 + y_4 + 6y_5 &\geq -1 \\ -3y_1 + 3y_2 + 5y_3 + 4y_4 - 3y_5 &\geq 4 \\ y_1 \dots y_5 &\geq 0 \end{aligned}$$

(b) Primala: $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{1}{2}$, $x_3 = \frac{13}{2}$, $x_4 = \frac{1}{2}$, $x_5 = \frac{1}{2}$,
 $x_6 = 0$, $x_7 = \frac{17}{2}$, $z = 2$

Duala: $y_1 = y_2 = y_3 = y_5 = 0$, $y_4 = 1$, $y_6 = 2$, $y_7 = 0$,
 $G = 2$

(c) Teorema betetzen duenez, lortutako soluzioa optimo dela dakigu.

(d) Dualarenak: $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{1}{2}$

Primalarenak: $y_1 = y_2 = y_3 = y_5 = 0$, $y_4 = 1$

5.5. (a) Soluzioa ez-bornatua da.

(b) Primala bornegabea denez dualak ez du soluziorik.

5.7 (a) $y_1 = 0$, $y_2 = \frac{1}{2}$, $z = 3$

(b) Problema primala ebazteko simplex dual metodoa erabiliko dugu. Honakoak dira soluzioak:

Duala: $y_1 = 0$, $y_2 = \frac{1}{2}$, $G = 3$

Primala: $x_1 = 3$, $x_2 = x_3 = 0$, $z = 3$

- (c)
- $y_1 = 0$ denez, b_1 baliabidea unitate bat handitzen bada helburu-funtzioa 0 handituko da B oinarri optimorako bideragarritasun primala galtzen ez bada.
 - $y_2 = \frac{1}{2}$ izateak helburu-funtzioa $\frac{1}{2}$ handituko dela esan nahi du, B oinarriak optimo izaten jarraitzen badu.

6. SENTIKORTASUN ANALISIA

- 6.1. (a) $x_1 = 0, x_2 = 2, x_3 = 0, z = 4$
 (b) $x_1 = 3, x_2 = x_3 = 0, z^* = 6$
 (c) $x_1 = x_3 = 0, x_2 = 1, z^* = 2$
 (d) $x_1 = 2, x_2 = x_3 = 0, z^* = 6$
 (e) Aldagaia sartu aurretik geneukan soluzioak optimo izaten jarraitzen du.
 (f) $x_1 = x_3 = 0, x_2 = 2, z^* = 4$
 (g) $x_1 = 2, x_2 = \frac{2}{3}, z^* = \frac{10}{3}$
- 6.2. (a) $x_1 = x_3 = 0, x_2 = 10, z^* = 30$
 Aukerazko soluzioak daude.
 (b) $\forall \theta \in [0, +\infty), x_1 = 0, x_2 = 10$ S.B.O. da.
- 6.3. (a) Aldaketa diskretuak.
 (i) Oinarriak optimo izaten jarraitzen du.
 $x_1 = 5, x_2 = 0, z = 10$
 (ii) $x_1 = x_2 = 0, x_3 = 6, z = 12$
 (iii) $x_1 = 4, x_2 = 2, x_3 = 0, z = 6$
 (b) Analisi parametrikoa. $\forall \theta \in [-6, 10]$ tarterako optimoa:

$$\bar{x}_B(\theta) = \bar{x}_B + \theta B^{-1} \bar{\sigma} = \begin{pmatrix} 6 + \theta \\ 10 - \theta \end{pmatrix}$$

$$z^*(2 \ 0) \begin{pmatrix} 6 + \theta \\ 10 - \theta \end{pmatrix} = 12 + 2 \theta$$

$\theta > 10$ denean ez dago soluziorik.

- 6.4 (a) $\forall \theta \in [0, \frac{5}{7}]$ tarterako soluzioa:

$$x_1 = \frac{9}{4}, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = \frac{15}{4}, \quad z(\theta) = \frac{39}{4} - \frac{33}{4} \theta$$

$\forall \theta \in [\frac{5}{7}, \frac{5}{7} + \frac{24}{35}]$ tarterako soluzioa:

$$x_1 = x_2 = 0, \quad x_3 = 3, \quad z(\theta) = 6 - 3 \theta$$

(b) $\forall \theta \in [-1, 0]$ tarterako soluzioa:

$$x_1 = \frac{9}{4}, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = \frac{15}{4}, \quad z(\theta) = \frac{39}{4} - \frac{33}{4} \theta$$

$\forall \theta \in (-\infty, -1]$ tarterako soluzioa:

$$x_1 = 6, \quad x_2 = x_3 = 0, \quad z(\theta) = 6 - 12 \theta$$

(c) Soluzioak:

$$\bullet \forall \theta \in [-1, \frac{5}{7}] \quad B_0 = \{\bar{a}_1, \bar{a}_3\}$$

$$\bar{x}_{B_0} = \begin{pmatrix} \frac{9}{4} \\ \frac{15}{4} \end{pmatrix}$$

$$z^* = (1 - 2 \theta \quad 2 - \theta) \begin{pmatrix} \frac{9}{4} \\ \frac{15}{4} \end{pmatrix} = \frac{39}{4} - \frac{33}{4} \theta$$

$$\bullet \forall \theta \in [\frac{5}{7}, \frac{7}{5}] \quad B = \{\bar{a}_4, \bar{a}_3\}$$

$$\bar{x}_B = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$z^* = (0 \quad 2 - \theta) \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} = 6 - 3 \theta$$

$$\bullet \forall \theta \in [-\infty, -1] \quad B_1 = \{\bar{a}_1, \bar{a}_5\}$$

$$\bar{x}_{B_1} = \begin{pmatrix} 6 \\ 15 \end{pmatrix}$$

$$z^* = (1 - 2 \theta, 0) \begin{pmatrix} 6 \\ 15 \end{pmatrix} = 6 - 12 \theta$$

6.5. (a) Soluzioa:

$$\forall \theta \in [0, \frac{1}{2}] \rightarrow \bar{x}_{B0} = \begin{pmatrix} 2 - \theta \\ 2 + 3 \theta \end{pmatrix}$$

$$z^* = (3 + \theta \quad 2 + 3 \theta) \begin{pmatrix} 2 - \theta \\ 2 + 3 \theta \end{pmatrix} = 10 + 8 \theta^2 + 11 \theta$$

• $\theta = 2$

$$\bar{x}_{B1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{7}{2} \end{pmatrix} + \frac{3}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} - \frac{3}{2} \\ \frac{7}{2} + \frac{6}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{13}{2} \end{pmatrix}$$

$$z^* = (0 \quad \frac{7}{2} + 3 \cdot \frac{3}{2}) \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{13}{2} \end{pmatrix} = (0 \quad 8) \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{13}{2} \end{pmatrix} = \frac{104}{2}$$

• $\frac{1}{2} \leq \theta \leq 2$

$$\bar{x}_{B1}(\theta) = \begin{pmatrix} 2 - \theta \\ \frac{5}{2} + 2 \theta \end{pmatrix}$$

$$z^*(\theta) = (0 \quad \frac{7}{2} + 3 \theta) \begin{pmatrix} 2 - \theta \\ \frac{5}{2} + 2 \theta \end{pmatrix} = 6\theta^2 + \frac{29}{2}\theta + \frac{35}{4}$$

(b) $\forall \theta \in [-\frac{1}{5}, 0] \rightarrow B_0$ oinarri optimoa da.

7 GARRAIO-PROBLEMA ETA ESLEIPEN-PROBLEMA

7.1 (a) Ereditu lineala:

$$\begin{aligned} \min z = & 6x_{11} + 3x_{12} + 2x_{13} + 4x_{14} + 7x_{21} + 5x_{22} + 4x_{23} + 6x_{24} + \\ & + 9x_{31} + 8x_{32} + 6x_{33} + 3x_{34} \end{aligned}$$

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} \leq 30$$

$$x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} \leq 60$$

$$x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} \leq 40$$

$$x_{11} + x_{21} + x_{31} \geq 20$$

$$x_{12} + x_{22} + x_{32} \geq 50$$

$$x_{13} + x_{23} + x_{33} \geq 45$$

$$x_{14} + x_{24} + x_{34} \geq 20$$

$$x_{ij} \geq 0$$

(b) Garraio-problemarako taula orekatua:

	1	2	3	4	ESKAINTZA
1	6	3	2	4	30
2	7	5	4	6	60
3	9	8	6	3	40
4	0	0	0	0	5
ESKARIA	20	50	45	20	

(c) Ipar-mendebaldeko ertzaren metodoa erabiliz:

Soluzioa:

$$x_{11} = 20, \quad x_{12} = 10, \quad x_{22} = 40, \quad x_{23} = 20$$

$$x_{33} = 25, \quad x_{34} = 15, \quad x_{44} = 5$$

$$x_{13} = x_{14} = x_{21} = x_{24} = x_{31} = x_{32} = x_{41} = x_{42} = x_{43} = 0$$

$$z = 6 \cdot 20 + 3 \cdot 10 + 5 \cdot 40 + 4 \cdot 20 + 6 \cdot 25 + 3 \cdot 15 = 625$$

(d) Vogel-en metodoa erabiliz:

Soluzioa:

$$x_{13} = 30, x_{22} = 50, x_{23} = 10, x_{31} = 15$$

$$x_{33} = 5, x_{34} = 20, x_{41} = 5$$

$$x_{11} = x_{13} = x_{14} = x_{21} = x_{24} = x_{32} = x_{42} = x_{43} = x_{44} = 0$$

$$\begin{aligned} z &= 2 \cdot 30 + 5 \cdot 50 + 4 \cdot 10 + 9 \cdot 15 + 6 \cdot 5 + 3 \cdot 20 = \\ &= 60 + 250 + 40 + 135 + 30 + 60 = 575 \end{aligned}$$

(e) Soluzio hobeia da Vogel-en metodoa erabiliz lortutakoa ipar-mendebaldeko ertzaren metodoa erabiliz lortutakoa baino, $575 < 625$ delako. Daukagun soluzioa optimoa da, kalkulaturako balio guztiak negatiboak edo zero direlako. Zero balioa hartzen dutenek aukerazko soluzio optimoak kalkulatzeko balio dute.

7.2 (a) • Ipar-mendebaldeko ertzaren metodoa erabiliz:

Soluzioa:

$$x_{11} = 8, x_{12} = 2, x_{22} = 4, x_{23} = 6$$

$$x_{33} = 9, x_{34} = 1, x_{44} = 5$$

• Vogel-en metodoa erabiliz:

Soluzioa:

$$x_{11} = 8, x_{12} = 2, x_{23} = 10, x_{32} = 4, x_{34} = 6, x_{43} = 5$$

$$z = 8 \cdot 2 + 2 \cdot 4 + 10 \cdot 7 + 4 \cdot 9 + 6 \cdot 7 = 16 + 8 + 70 + 36 + 42 = 172$$

(b) Soluzio optimoaren kalkulua: Soluzioa optimoa da.

7.3 Garraio-taula:

	1	2	3	4	ESKAINITZA
1	2	2.5	3	4	120
2	2.6	2	2.5	3	120
3	3.2	2.6	2	2.5	120
4	3.8	3.2	2.6	2	120
ESKARIA	100	200	150	100	

	1	2	3	4	ESKAINTZA
1	100	20			120
2		120			120
3		60	60		120
4			90	30	120
5				70	70
ESKARIA	100	200	150	100	

Soluzioa:

$$x_{11} = 100, x_{12} = 20, x_{22} = 120, x_{32} = 60$$

$$x_{33} = 60, x_{43} = 90, x_{44} = 30, x_{54} = 70, z^* = 982$$

7.4 Igeriketa soluzioa: $x_{13} = x_{22} = x_{34} = x_{45} = 1$. 1. eta 6. igerilariak txapelketan parte hartu gabe geldituko dira. Denbora: 125. Aukerazko soluzioak daude.

7.5 $x_{13} = x_{24} = x_{35} = x_{42} = x_{51} = 1$. Hegaldi-bikoteak:

$$1 \rightarrow 3 \quad (\text{A-n bizi})$$

$$2 \rightarrow 4 \quad (\text{A-n bizi})$$

$$3 \rightarrow 5 \quad (\text{A-n bizi})$$

$$4 \rightarrow 2 \quad (\text{B-n bizi})$$

$$5 \rightarrow 1 \quad (\text{A-n edo B-n})$$

Itxarote-denbora: 27.5

7.6 Asignazio-problema.

(a) $1 \rightarrow 1, 2 \rightarrow 3, 3 \rightarrow 2, 4 \rightarrow 4, z^* = 32$

(b) $1 \rightarrow 5, 2 \rightarrow 1, 3 \rightarrow 4, 4 \rightarrow 3, 5 \rightarrow 2, z^* = 35$

Aukerazko soluzio bat:

$$1 \rightarrow 3, 2 \rightarrow 1, 3 \rightarrow 5, 4 \rightarrow 2, 5 \rightarrow 4$$

- [7] Linus Schrage. 1.991.
Lindo. An Optimization Modeling System.
The Scientific Press
- [8] Yih-Long Chang. 1.994.
QSB+ Quantitative Systems for Business Plus.
Prentice Hall
- [9] S.Bazaraa, J.J.Jarvis, H.D.Sherali, 1.994
Linear Programming and Network Flows.
Wiley
- [10] *Hiztegia bi mila.*
Elkar, 1.991
- [11] U.Z.E.I. 1.982
Matematika Hiztegia
Elkar
- [12] U.Z.E.I.
EUSKALTERM Datu Base Terminologikoa

Aurkibide alfabetikoa

- aldagaiak 63
- aldagai artifiziala 111, 117
 - lehen oinarrian 100
- aldaketa diskretuak 183
 - aldagai berriak sartzea 196
 - baliabide-bektorean 187
 - kostu-bektorean 191
 - murritzketak gehitzea 199
 - teknologi koefizienteetan 194
- aldaketa jarraiak 201
 - baliabide-bektorean 209
 - kostu-bektorean 202
- algebra lineala 43
- algoritmoa
 - garraio-prob.-rako 242
 - murritzketak artif. 173
 - simplex berrikusia 121
 - simplex duala 169
 - simplex 17, 62, 77, 106
- baliabide-bektorea 18, 143
- baliabide-esleipen prob. 20
- balio adierazlea 104
- balio optimoa 67
- batukortasuna 29
- bektoreak 43
- bektore-eragiketak 43
- bideragarria 67
- bideragarritasun-eskualdea 67
- biderkatzailea 107
- bi faseetako metodoa 117
- biribiltze-errorea 127
- bornegabea problema 67
- dimentsioa 49
- dualtasuna 137
- dualtasun ahularen teorema 149
- dualtasunaren funts. printz. 153
- ebazpen grafikoa 30
- ekoizpen-problema 267
- endekatua soluzioa 67
- erabaki-aldagaia 18
- erdiespazio 55
 - irekia 56, 57
 - itxia 56, 57, 59
- eredu
 - duala 141
 - lineala 18, 59
 - primala 141
- esleipen-metodoa 257
- esleipen-problema 221, 254, 278
- ez-negatibotasun murritzketak 18
- garraio
 - ereduaren ebazpidea 227
 - kostua 221
 - problema 4, 27, 221, 277
 - prob.-rako algoritmoa 242
- grafika bidezko ebazpena 30

- heina 51
- helburu-funtzioa 18, 62
- helburu-puntua 221, 254
- heuristikoak metodoak 10
- hiperplanoa 55, 59
- hobekuntzaren teorema 82
- hungariar metodoa 257
- idazkera
 - estandarra 61, 64
 - kanonikoa 61
 - simetrikoa 139-140
- independentzia lineala 47
- interpretazio ekonomikoa 162
- ipar-mend. ertzaren met. 231
- iturburu-puntua 254
- itzal-prezioa 163
- jan-neurriaren problema 22, 276
- jatorri-puntua 221
- konbinazio
 - lineala 46
 - lineal ganbila 56
 - lineal ganbil orokortua 58
- kostu-bektorea 18, 143
- kostu ekonomikoa 167
- lerro adierazlea 104
- lerrokako dif. (LD) 234
- LINDO 284
- matrizeak 51
- matrize-idazkera 226
- maximizatze-problema 268
- menpekotasun lineala 47
- metodoa
 - bi faseetako metodoa 117
 - esleipen-metodoa 257
 - hungariarra 257
 - ipar-mend. ertzarena 231
 - MODI 237
 - murritzeta artif. 173
 - simplex 17, 62, 77, 106
 - simplex berrik. 121
 - simplex duala 169
 - vogel-en metodoa 234
 - zigortze-metodoa 111
- MODI metodoa 237
- multzo
 - ganbila 55, 56, 59
 - ganbil itxia 70
 - sortzailea 48
- murritzeta 18, 62
 - artifiziala 173
 - artifizialaren met. 173
 - erredundanteak 127
- mutur-puntua 56, 70, 71
- nahasketen problema 24, 275
- nasaitze-aldagaia 64
 - lehen oinarrian 98
- oinarria 48
 - hasierako oinarria 97
 - oinarriko soluzioa 53, 67
 - oin. sol. bid.(O.S.B.) 67
- ordutegien antolakuntza 26
- ordutegien esleipen-problema 269
- orekatzea 228
- osagarritzko nasait. teorema 155
- paketeak 275
- pibota 107
 - pibot-lerroa 107
 - pibot-zutabea 107

- poliedro ganbila 58
- prezio-bektorea 18, 143
- primal-dual erlazioak 144
- problema
 - antolaketa-problema 15
 - baliabide-esleip. 16, 20
 - bornegabea 67
 - duala 139
 - ekoizpen-problema 267
 - esleipen-prob. 221, 254, 278
 - garraio-problema 4, 27, 277
 - inbentario-problema 12
 - itxarote-problema 14
 - jan-neurriaren prob. 22, 276
 - mantenu-ordezkatzearena 13
 - maximizatze-prob. 263, 268
 - nahasketen problema 24, 275
 - ordutegien esleipena 26, 269
- programazio
 - lineala 61
 - matematikoa 2
 - parametrikoa 201
- proportzionaltasuna 29
- QSB+ 278
- segmentua 55
- sentikortasun-analisisa 183
- simplex
 - berrikusiaren metodoa 121
 - dual metodoa 169-170
 - metodoa 17, 62, 77, 106
 - metodoaren interpretazioa 168
 - metodoaren taula 103
 - primal metodoa 169
- simulazioa 8-10
- sistema linealen soluzioa 52
- soluzio 67
 - anizkoitzak 33, 67, 94, 106, 265
 - bakarra 30
 - bideragarria 67
 - bornegabea 35, 90, 106
 - dual optimoa taulan 158
 - endekatua 67, 250
 - eza 34, 106
 - ez-endekatua 67
 - hasierakoa 230
 - oinarrikoa 53, 67
 - oin. sol. bid.(O.S.B.) 67, 71
 - optimoa 89, 106
- taula simplex metodoarena 103
- teknologi koef.-en matrizea 18
- teorema
 - dualtasun ahularena 149
 - dualt. funts. printz. 153
 - hobekuntzarena 82
 - osagarritzko nasait. 155
- Vogel-en metodoa 234
- zatigarritasuna 30
- zigortze-metodoa 111
- ziklatzea 131
- ziurtasuna 30
- zutabekako dif. (ZD) 234
- zuzena 55

ERROREEN ZERRENDA

ORRIALDEA	NON	JARTZEN DU	JARRI BEHAR DU
65	2. lerroan	$y > 0$	$y \geq 0$
113	2. taulan (lerro adierazlean)	$5M+3$	$6M+3$
126	5. lerroan	$(2 \ 4 \ 2)^T$	$(2 \ 4 \ -2)^T$
128	3. taulan (lerro adierazlean)	$3/2 M$	$3/2 M+1$
129	3. taulan (lerro adierazlean)	-2	-4
129	3. taulan (lerro adierazlean)	M	$2M$
129	4. taulan (lerro adierazlean)	3	4
129	4. taulan (lerro adierazlean)	$4/3$	$4/3+2M$
129	4. taulan (lerro adierazlean)	$5/3$	$5/3+2M$
130	ereduaren 2. eta 3. murrizketetan	$\geq$	$=$
138	5.1. taulan (D4) posizioan	1	2
145	12. lerroan	$\max G=b^T y$	$\min G=b^T y$
151	8. lerroan	orduan duala	orduan primala
166	z-ren balioaren kalkuluan	$(37/5 \ 8/5 \ 6/5)^T$	$(17/5 \ 8/5 \ 6/5)^T$
179	4. taulan (lerro adierazlean)	$17/4$	$7/4$
215	4. lerroan	$X_{B0}(-1)$	$X_{B0}(-10)$
248	azken lerroan	$u_1 = -4$	$u_1 = 0$
252	3. lerroan	hirugarren zutabea	bigarren zutabea

ISBN 84-86967-65-1



9 788486 967659